2104683

QUESTION N° 1 (2 points)

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que

$$P(B) = 0{,}60; \quad P\left(A \mid \overline{B}\right) = 0{,}75.$$

2

a) (1 point) Calculer la probabilité $P(A \cap \overline{B})$.

b) (1 point) Calculer la probabilité $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

RÉPONSE

a) $P(A \mid \bar{B}) = \dfrac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P(A \mid \bar{B})$

$= (1 - P(B)) \cdot P(A \mid \bar{B})$

$= (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}75$

$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = 0{,}3}$

b) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(B) - P(A \cap \bar{B})$

$= 1 - 0{,}6 - 0{,}3$

$\boxed{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}1}$

QUESTION N° 1 (suite)

2104683

QUESTION N° 2 (3 points)

Trois machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Le pourcentage de pièces défectueuses produites par ces machines sont respectivement de 2%, 4% et 5%. On prend au hasard une pièce fabriquée dans cette usine.

a) (1 point) Quelle est la probabilité que cette pièce ne soit pas défectueuse ?

b) (2 points) Si on constate que la pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ne provienne pas de la machine M_2 ?

RÉPONSE

a) D : pièce défectueuse

$P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D)$

$= P(D \mid M_1) \cdot P(M_1) + P(D \mid M_2) \cdot P(M_2) + P(D \mid M_3) \cdot P(M_3)$

1

$= 0{,}02 \times 0{,}5 + 0{,}04 \times 0{,}3 + 0{,}05 \times 0{,}2$

$P(D) = 0{,}032 \Rightarrow P(\bar{D}) = 1 - P(D) = \boxed{0{,}968}$

b) $P(\bar{M}_2 \mid D) = 1 - P(M_2 \mid D)$

$= 1 - \dfrac{P(D \mid M_2) \cdot P(M_2)}{P(D)}$

2

$= 1 - \dfrac{0{,}04 \cdot 0{,}3}{0{,}032} = \boxed{0{,}625}$

QUESTION N° 2 (suite)

QUESTION N° 2 (suite)

2104683

QUESTION N° 3 (5 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) (2 points) Déterminer la valeur de la constante k et la fonction de répartition de X, $F_X(x)$.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = 1 - X^2$.

1.b) (2 points) Calculer la probabilité $P(Y \geq 3/4)$.

2.b) (1 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f_X(x)\,dx}_{=0} + \int_{-1}^{1} f_X(x)\,dx + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f_X(x)\,dx}_{=0} = 1$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} k\,(1+x)\,dx = 1$

$k\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1$

~~$\lim_{x\to 1} k\left(x+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{3}{2}k$~~

~~$\lim_{x\to -1} k\left(x+\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}k$~~

$\Rightarrow$ ~~$\boxed{k = \frac{1}{2}}$~~

$\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}k = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$

pour $x \leq -1$ $F_X(x) = 0$

~~pour $-1 < x < 1$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}(1+t)\,dt$~~

2104683

QUESTION N° 3 (suite)

$-1 < x < 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f_X(t)\,dt}_{=0} + \int_{-1}^{x} f_X(t)\,dt$

$= \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}(1+t)\,dt$

$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{x}$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1)$

2

$x \geq 1 \Rightarrow F_X(x) = 1$

donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{4}(x^2+2x+1) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $Y = 1 - X^2$.

$P(Y \geq 3/4) = P(1 - X^2 \geq 3/4) = P(-X^2 \geq -\frac{1}{4}) = P(X^2 \leq \frac{1}{4})$

$= P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \int_{-1/2}^{1/2} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2}$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

2

2104683

QUESTION N° 3 (suite)

2b) $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_X(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} y\, f_X(x)\,dx}_{=0} + \int_{-1}^{1} y\, f_X(x)\,dx + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} y\, f_X(x)\,dx}_{=0}$

$= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\cdot\frac{1}{2}(1-x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 - x - x^2 + x^3\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{4}} + 1 + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{2}{3}\right)$

$\boxed{E(Y) = 2/3}$

1

QUESTION Nº 4 (4 points)

La fonction de masse conjointe $p(x,y)$ d'un couple de variables aléatoires $[X,\ Y]$ est partiellement donnée dans le tableau suivant :

y \ x	-1	0	1	$p_Y(y)$
0	0,10	v_1	0,05	
1	0,20	v_2	v_3	
$p_X(x)$				

On sait que $P(Y=1) = 3P(Y=0)$, c'est-à-dire $p_Y(1)$ égale trois fois $p_Y(0)$.
De plus, la fonction de répartition de la variable X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0{,}30 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0{,}80 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

a) (2 points) Compte tenu des données ci-dessus, trouver les valeurs manquantes v_1, v_2 et v_3 du tableau.

b) (2 points) Calculer la variance de la variable $W = 10 - 2X + Y$.

RÉPONSE

a/ ~~$P(0,0) = v_1$ on fait la distribution~~

$\sum_{x \in R_x} \sum_{y \in R_y} P(x,y) = 1$ $\quad R_x = \{-1, 0, 1\}$, $R_y = \{0, 1\}$

$\Rightarrow 0,1 + 0,2 + v_1 + v_2 + 0,05 + v_3 = 1 \Rightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 0,65$ (1)

$P_y(1) = 3 P_y(0) \Rightarrow 0,2 + v_2 + v_3 = 3 \cdot (0,1 + v_1 + 0,05)$

$\Rightarrow v_2 + v_3 + 0,2 = 3(v_1 + 0,15)$

$v_2 + v_3 = 3v_1 + 0,25$ (2)

QUESTION Nº 4 (suite)

$P_x(1) = F_x(1) - F_x(0) = 0,2$
$= \sum_{y \in R_y} P(1,y) = 0,05 + v_3$
$\quad v_3 + 0,05 = 0,2$
$\boxed{v_3 = 0,15}$

$P_x(0) = \sum_{y \in R_y} P(0,y) = v_1 + v_2$
$= F_x(0) - F_x(-1) = 0,5$
$\quad v_1 + v_2 = 0,5 \Rightarrow v_1 = 0,5 - v_2$

d'après (2)
$v_2 = 3v_1 - v_3 + 0,25$
$v_2 = 3(0,5 - v_2) - 0,15 + 0,25$
$v_2 = 1,5 - 3v_2 + 0,10$
$4v_2 = 1,6$
$\boxed{v_2 = \frac{1,6}{4} = 0,4}$

$v_1 = 0,5 - v_2$
$= 0,5 - 0,4$
$\boxed{v_1 = 0,1}$

2

vérifions les résultats avec 1

$v_1 + v_2 + v_3 = 0,1 + 0,15 + 0,4 = 0,65$ vrai

b/ $E(10 - 2X + Y) = \sum_{x \in R_x} \sum_{y \in R_y} (10 - 2X + Y)\, P(x,y)$

$= 12 \cdot 0,1 + 13\ 0,2 + 10 \cdot 0,1 + 11 \cdot 0,4 + 8 \cdot 0,05 + 9 \cdot 0,15$

$\boxed{E(W) = \cancel{10,95}}$

$V(W) = \cancel{E(W)^2 - E(W^2)}\ E(W^2) - (E(W))^2$

QUESTION Nº 4 (suite)

$E(W^2) = \sum_{x \in R_x} \sum_{y \in R_y} (10 - 2x + y)^2 p(x,y)$

$= 144 \cdot 0,1 + 169 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,1 + 121 \cdot 0,4 + 64 \cdot 0,05 + 81 \cdot 0,15$

$= 121,95$

~~$V(W) = 10,95 - 121,45$~~

~~$V(W) = -111$~~

$V(W) = 121,95 - (10,95)^2$

$\boxed{V(W) = 2,0475}$

2

QUESTION Nº 5 (3 points)

Considérons un examen constitué de plusieurs questions indépendantes et dont les réponses sont à choix multiples. Pour chaque question on propose un choix de 4 réponses, dont une seule est bonne. Considérons un étudiant qui répond à toutes les questions de l'examen mais en choisissant chaque fois une réponse au hasard.

2/3

a) (1 point) Si l'étudiant n'a aucune bonne réponse dans les deux premières questions, quelle est la probabilité qu'il ait une première bonne réponse seulement après la cinquième question ?

b) (2 points) Supposons maintenant que l'examen contient 10 questions, que chaque bonne réponse donne 2 points, et qu'on soustrait 0,5 point pour chaque mauvaise réponse.
Déterminer la moyenne et l'écart type de la note que l'étudiant obtiendra à cet examen

RÉPONSE

a/ B : l'étudiant obtient une bonne réponse $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$

X : nombre de questions pour obtenir une bonne réponse

$X \sim Géo(1/4)$

en utilisant l'absence de mémoire

$P(X > 5 \mid X > 2) = P(X > 3)$

1

$P(X>3) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$

$= 1 - 0,75^0 \cdot 0,25 - 0,75 \cdot 0,25 - 0,75^2 \cdot 0,25$

$\boxed{P(X>3) = 0,42}$

2104683

QUESTION N° 5 (suite)

b) Y : nombre de Bonnes questions

$Y \sim$ Binomiale $(10, \frac{1}{4})$

$\frac{1}{2}$

$E(Y) = 10 \cdot 1/4 = 2,5$ En moyenne l'étudiant obtiendra 2,5 Bonnes réponses et donc 7,5 mauvaises réponses

$\Rightarrow$ sa moyenne $= 2,5 \cdot 2 - 7,5 \cdot 0,5$

$\boxed{\text{moyenne} = 1,25}$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4})} = 1,37$

~~Z = note $\Rightarrow Z = 2Y - 0,5(1-Y) = 3Y - 0,5$~~

~~$E(Z) = 3E(Y) - 0,5$~~

~~$V(Z)$; $\sigma_Z = 3\sigma_Y$~~

2104683

QUESTION N° 6 (3 points)

On suppose que la durée de vie d'un certain type de composant est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de moyenne 5 ans.

$2,5/3$

a) (1 point) Sachant qu'un composant de ce type fonctionne depuis 3 ans, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore pendant au moins 2 autres années ?

b) (2 points) Quatre composants sont mis en fonction et opèrent indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que deux ans plus tard, au moins deux des quatre composants ne fonctionnent plus ?

RÉPONSE

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$

a) ~~$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$~~ $\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

~~$P(X \geq 2 \mid X \geq 3) = \frac{P(X \geq 2 \cap X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 3)}$~~

~~$P(X \geq 2) = \int_2^{+\infty} 5e^{-5x}\,dx = e^{-5 \times 2} = e^{-10}$~~

~~$P(X \geq 3) = \int_3^{+\infty} 5e^{-5x}\,dx = e^{-15}$~~

~~$= \frac{e^{-10}}{e^{-15}}$~~

$P(X \geq 5 \mid X \geq 3) = P(X \geq 2)$ (absence de mémoire)

$= \int_2^{+\infty} 5e^{-5x}\,dx = e^{-\frac{1}{5} \cdot 2} = \boxed{e^{-0,4}} = ?$

$0,5/1$

2104683

QUESTION N° 6 (suite)

b) Y : nombre de composants qui ne fonctionnent plus après 2 ans

~~$p = e^{-10}$~~ $P(X \leq 2) = 1 - P(X \geq 2) = 1 - e^{-0,4}$

$Y \sim$ Binomiale$(4, 1 - e^{-0,4})$

$P_X(2) = \binom{4}{2}(1 - e^{-0,4})^2(1 - 1 + e^{-0,4})^2 = 0,293$

~~$P_X(2) = 1,237 \cdot 10^{-8}$~~

$2/3$

$P_X(3) = \binom{4}{3}(1 - e^{-0,4})^3(e^{-0,4})^1 = \cancel{4,846 \cdot 10^{-4}} = 0,096$

$P_X(4) = \binom{4}{4}(1 - e^{-0,4})^4 = \cancel{0,0998} \ 0,012$

$P(X \geq 2) = P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) = 0,293 + 0,096 + 0,012 = \boxed{0,4}$

QUESTION N° 6 (suite)

Page supplémentaire