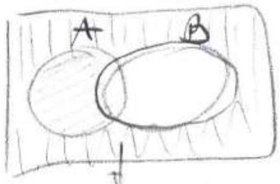
Question n° 1 : (2 points)

11 min.

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que



$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}40 \quad \text{et} \quad P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}25.$$

A seule

$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}25$

a) **(1 point)** Déterminer la probabilité $P(B)$.

b) **(1 point)** Si on suppose maintenant que A et B sont indépendants, calculer la probabilité $P(A)$.

Réponse : (a) ~~$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B)$~~

~~$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$~~

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) - \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = 1 - 0{,}25 - 0{,}40 = 0{,}35$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(B) = 0{,}35}$

(b) $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Question n° 2 : (4 points)

Une boîte contient trois pièces de monnaie A, B et C d'apparence identiques. Les pièces A et B sont parfaitement équilibrées, mais pas la pièce C. En effet pour chaque lancer, la pièce C a une probabilité de $3/4$ de présenter le côté *Face*. Une pièce est choisie au hasard de la boîte et cette pièce est ensuite lancée 2 fois.

a) **(2 point)** Calculer la probabilité que la pièce présente 2 fois le côté *Face*.

b) **(2 points)** Si la pièce présente 2 fois le côté *Face*, quelle est la probabilité qu'il ne s'agisse pas de la pièce C ?

Réponse :

Soient les événements:
* A : monnaie A est choisie
* B : monnaie B est choisie
* C : monnaie C est choisie
* D = le côté "Face" est présenté"

(a)

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\times\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\times\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|C)\times\mathbb{P}(C)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

* Evenement E : la pièce présente 2 fois le côté Face.

→ chaque lancer : l'épreuve de Bernoulli, "succès" = "la pièce présente côté Face"

$$E \sim Bin\left(n=2, p=\frac{7}{12}\right)$$

$$\mathbb{P}(E=2) = C_2^2 \left(\frac{7}{12}\right)^2\left(1-\frac{7}{12}\right)^0 = \frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12} = \frac{49}{144} = 0,3403$$

⇒ 34,03 %

(b) $$\mathbb{P}(\bar{C}|E) = 1 - \mathbb{P}(C|E) = 1 - \frac{\mathbb{P}(C\cap E)}{\mathbb{P}(E)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(E|C)\,\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(E)} =$$

$$\mathbb{P}(E|C) = \frac{\mathbb{P}(E\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$$

(+0.5)

$$\mathbb{P}(\bar{C}|E) = 1 - \frac{\frac{3}{16}\times\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = 1 - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{12}} = 1 - \frac{12}{112} = \frac{112}{112} - \frac{12}{112} = \frac{100}{112}$$

≈ 89,23

Question nº 3 : (4 points)

45+92 ⟹ 14:07 reste 8 min.

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,x(1-x) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) (2 points) Déterminer la valeur de la constante k et l'espérance mathématique de X.

b) (2 points) On considère une deuxième variable Y définie en fonction de X par

$$Y = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad X < 1/2 \\ 1/X & \text{si} \quad X \geq 1/2. \end{cases}$$

1.b) (1 point) Calculer la probabilité $P(Y < 3/2)$.

2.b) (1 point) Calculer l'espérance mathématique de Y.

$\frac{2}{4}$

Réponse :

(a). On sait que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

ici, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx}}_{0} + \int_0^1 f_X(x)\,dx + \underbrace{\cancel{\int_1^{\infty} f_X(x)\,dx}}_{0} = 1$

$\int_0^1 f_X(x)\,dx = k\int_0^1 x(1-x)\,dx = k\int_0^1 (x-x^2)\,dx = k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$

$= k\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = k\left[\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right] = \frac{k}{6} \Rightarrow \frac{k}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{k = 6}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = 6\int_0^1 x(x-x^2)\,dx = 6\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$

$= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 6\left(\frac{14}{12} - \frac{3}{12}\right) = 6\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{1}{2}}$

(b) 1.b) $P\left(Y < \frac{3}{2}\right) = F_Y\left(\frac{3}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{3}{2}} f_Y(y)\,dy =$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\,dy = \left[2y\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{y}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(2\cdot\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{x} - \frac{0{,}5}{x}\right]\right)$

$= 1 + \frac{0{,}5}{x} = 1+$

12:46 → 13:07

Question n° 4 : (4 points)

(22 min)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que :

$X \sim$ `Bernoulli`$(p = 0{,}6)$ et $Y \sim$ `Binomiale`$(n = 2;\ p = 0{,}4)$.

De plus $P(Y = 0 \mid X = 0) = 0{,}20$ et $P(Y = 1 \mid X = 0) = 0{,}40$.

a) **(2 points)** Déterminer la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$ et calculer les probabilités $P(X = 1 \mid Y = 0)$ et $P(Y = 1 \mid X = 1)$.

b) **(2 points)** Soit la variable aléatoire T définie par $T = 10 - 4X + 3Y$. Déterminer l'écart-type de T.

Réponse :

(a)

y \ x	0	1	$\mathbb{P}(Y=y)$
0	0,08	0,28	0,36
1	0,16	0,32	0,48
2	0,16	0	0,16
$\mathbb{P}(X=x)$	0,4	0,6	1

La fonction de masse conjointe du vecteur $[X,Y]$, sous forme d'un tableau.

$X \sim Bern(p=0{,}6) : \Rightarrow \quad p_X(0) = 1-p = 1-0{,}6 = 0{,}4.$ (par définition de la fonction de masse d'une v.a qui suit la loi de Bernoulli)

$p_X(1) = p = 0{,}6$

$Y \sim Bin(n=2, p=0{,}4)$:

si $y=0$: $p_Y(0) = C_0^2 (0{,}4)^0 (1-0{,}4)^{2-0} = 0{,}36$

si $y=1$: $p_Y(1) = C_1^2 (0{,}4)^1 (0{,}6)^{2-1} = 0{,}48$

si $y=2$: $p_Y(2) = C_2^2 (0{,}4)^2 (0{,}6)^0 = 0{,}16$

vérification : $0{,}36 + 0{,}48 + 0{,}16 = 1$

on sait que :

$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=0) = \frac{\mathbb{P}(\{Y=0\} \cap \{X=0\})}{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\mathbb{P}(0,0)}{\mathbb{P}(X=0)} = 0{,}20 \Rightarrow \mathbb{P}(0,0) = 0{,}20 \times \mathbb{P}(X=0) = 0{,}20 \times 0{,}40 = 0{,}08$$

$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=0) = \frac{\mathbb{P}(\{Y=1\} \cap \{X=0\})}{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\mathbb{P}(0,1)}{\mathbb{P}(X=0)} = 0{,}40 \Rightarrow \mathbb{P}(0,1) = 0{,}40 \times 0{,}40 = 0{,}16.$$

Réponse (suite)

Le reste du tableau:

$\mathbb{P}(0,2) = 0,40 - 0,08 - 0,16 = 0,16$

$\mathbb{P}(1,0) = 0,36 - 0,08 = 0,28$

$\mathbb{P}(1,1) = 0,48 - 0,16 = 0,32$

$\mathbb{P}(1,2) = 0,16 - 0,16 = 0$

Probabilités à calculer:

* $\mathbb{P}(X=1 \mid Y=0) = \dfrac{\mathbb{P}(1,0)}{\mathbb{P}(Y=0)} = \dfrac{0,28}{0,36} = \dfrac{7}{9}$

* $\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1) = \dfrac{\mathbb{P}(1,1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \dfrac{0,32}{0,6} = \dfrac{8}{15}$

2

(b) Soit $T = 10 - 4X + 3Y$ $\quad \sigma_T = ? \Rightarrow \sigma_T = \sqrt{Var(T)}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(10 - 4X + 3Y) = 10 - 4\mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y)$

$\mathbb{E}(X) = \sum x\, p_X(x) = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6 = 0,6$

$\mathbb{E}(Y) = \sum y\, p_Y(y) = 0 \cdot 0,36 + 1 \cdot 0,48 + 2 \cdot 0,16 = 0,8$

$\Rightarrow \mathbb{E}(T) = 10 - 4 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,8 = 10 - 2,4 + 2,4 = 10$

$Var(T) = Var(10 - 4X + 3Y) = Var(-4X + 3Y + 10) =$
$= (-4)^2 Var(X) + 3^2 Var(Y) + 2(-4)(3) Cov(X,Y)$

2

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 0^2 \cdot 0,4 + 1^2 \cdot 0,6 - 0,6^2 = 0,24$

$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)]^2 = (0^2 \cdot 0,36 + 1^2 \cdot 0,48 + 2^2 \cdot 0,16) - 0,8^2 = 0,48$

$1,12 \qquad 0,64$

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0,32 - 0,6 \cdot 0,8 = -0,16$

$\mathbb{E}(X,Y) = \sum\sum x\, y\, p(x,y) \underset{\neq}{=} 1 \cdot 1 \cdot 0,32 = 0,32$

je n'écris pas les termes qui vont donner 0.

$3,84 \quad 4,32 \quad + \quad 3,84$

$Var(T) = 16 \cdot 0,24 + 9 \cdot 0,48 - 24 \cdot (-0,16) = 12$

$\boxed{\sigma_T = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,46}$

Question n° 5 : (3 points)

→ fin à 13:27

On suppose que la durée de vie d'un certain type de composant est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de moyenne 1 200 heures. La fabrication d'un composant coûte 10 \$ et celui-ci est vendu 17 \$. Le fabricant offre une garantie pour les composants qui durent moins de 300 heures. On sait que 50% des composants sous garantie peuvent être réparés à un coût de 5 \$ et les autres doivent être remplacés par un composant neuf. La garantie est honorée une seule fois par composant.

a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 300 heures ?

b) (2 points) Calculer le profit moyen du fabricant pour un composant vendu.

Réponse :

(a) T = la durée de vie d'un certain type de composant
on sait que
$T \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$. On sait que $\mathbb{E}(T) = 1200h \Rightarrow \mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ alors $\frac{1}{\lambda} = 1200$

alors $\boxed{\Rightarrow \lambda = \frac{1}{1200}}$

$\mathbb{P}(T < 300) = F_X(300) = 1 - e^{-\frac{300}{1200}} = 1 - e^{-0{,}25} = 0{,}2212 \Rightarrow 22{,}12\%$

1

(b) Fabrication : 10 , vente : 17\$ ⇒ profit $\underbrace{17 - 10 = 7\$}_{1 - 22{,}12\% = 77{,}88\%}$ (si pas de réparations)

pour les restants 22,12% :
Fabrication : 10\$, vente : 17\$

50% → − 5\$

50% → − 10\$ (remplacé par nouveau)

profit : 17 − 10 − 5 = 2\$ profit : 17 − 10 − 10 = − 3\$

Soit Y = le profit du fabriquant. $Y = \begin{cases} 7 & \text{si } T > 300 \Rightarrow (77{,}88\%) \\ 2 & \text{si } T \leq 300 \text{ et répare } (0{,}5 \times 22{,}12\% = 11{,}06\%) \\ -3 & \text{si } T \leq 300 \text{ et remplacement } (0{,}5 \times 22{,}12\% = 11{,}06\%) \end{cases}$

on cherche $\mathbb{E}(Y)$..

2

$\mathbb{E}(Y) = 0{,}7788 \cdot 7\$ + 0{,}1106 \times 2\$ + 0{,}1106 \times (-3\$)$
$= 5{,}4516\$ + 0{,}2212\$ - 0{,}3318\$ = 5{,}341\$$

Question n° 6 : (3 points)

fin 13:43

On suppose que la pression (en lb/po^2) d'un pneu posé sur une voiture suit une loi normale de moyenne 30 et d'écart-type 0,4.

a) (1 point) Quelle est la probabilité que la pression d'un pneu se situe entre 29 et 31 lb/po^2 ?

b) (2 points) Un pneu est considéré dégonflé si sa pression est inférieure à 29,5 lb/po^2. Calculer la probabilité qu'au moins deux des quatre pneus d'une voiture soient dégonflés.

Rappel : la table de la loi normale est en annexe.

Réponse :

X = la pression d'un pneu posé sur une voiture.

$X \sim \mathcal{N}(\mu = 30,\ \sigma^2 = 0{,}40^2)$

(a) $P(29 \leq X \leq 31) = \Phi\left(\frac{31-30}{0{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{29-30}{0{,}4}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-2{,}5) =$

$= \Phi(2{,}5) - [1 - \Phi(2{,}5)] = 2 \times \Phi(2{,}5) - 1 \underset{\text{table}}{=} 2 \times 0{,}99379 - 1 = 0{,}98758$ 1

$\Rightarrow 98{,}76\,\%$

(b) "Succès" = "le pneu est dégonflé" $P(\text{"Succès"}) = 1 - 0{,}98758 = 0{,}01242 = p$

soit Y = le nombre de pneux dont la pression est inférieure à 29,5 lb/po^2 ; n = 4 (4 épreuves Bernoulli / mesurer la pression de chaque pneux)

$Y \sim Bin(n = 4,\ p = \cancel{0{,}01242})$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)]$

$1 - [C_0^4 (0{,}01242)^0 (0{,}98758)^4 + C_1^4 (0{,}01242)^1 (0{,}98758)^3]$

$= 1 - [0{,}95124 + 0{,}047852] = \cancel{0{,}00091}$

$\Rightarrow \cancel{0{,}}09\,\%$

$\frac{1}{2}$