MTH2302D - A17

Question #1 (6 points)

a) $X \sim N\left(\mu = 1 ; \sigma^2 = \frac{1}{100}\right)$ $Z \sim N(0,1)$ où $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$

$$P(1 \leq \bar{X} \leq 1{,}05) = P(0 \leq Z \leq 0{,}5)$$
$$= \Phi(0{,}5) - \Phi(0)$$
$$= 0{,}69146 - 0{,}5$$
$$= 0{,}19146$$

b) $P(T > U) = P(T - U > 0) = P(V > 0)$ où $V = T - U \Rightarrow V \sim N(3,9)$

$$= P(Z > -1)$$
$$= 1 - \Phi(-1)$$
$$= \Phi(1)$$
$$= 0{,}84134$$

c) $y = \sum_{i=1}^{100} (x_i - 1)^2$

1.c) $Y \sim \chi^2_{100}$

2.c) $Y \sim N(K, 2K)$
$Y \sim N(100, 200)$

d) $G = \sum_{i=1}^{6} (X_i - 1)^2$ et $H = \sum_{i=7}^{9} (X_i - 1)^2$

55,82

Par la loi de Fisher :

$$F = \frac{G/u}{H/v} = \frac{G/6}{H/3} = \frac{G}{2H}$$

On a :

$$P(G > mH) = 0{,}01$$
$$= P\left(\frac{G}{2H} > \frac{m}{2}\right) = 0{,}01$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = F_{0{,}01;\,6,3} = 27{,}91 \Rightarrow m = 55{,}82$$

Question #2 (6 points)

a) $H_0 : X \sim Poi(c)$
$H_1 : X \nsim Poi(c)$

b) On rejette H_0 si
$\mu_0 > \chi^2_{0,05;k-p-1}$

$\hat{c} = \frac{(15 \cdot 0 + 45 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 15 \cdot 3)}{15+45+25+15} = 1,4$

1)

X	O_i	$P(X=k)$	E
0	15	$\frac{1.4^0 \cdot e^{-1.4}}{0!} = 0,2466$	24,66
1	45	0,3452	34,52
2	25	0,2417	24,17
3	15	0,1128	11,28

2) $\mu_0 = \frac{(15-24.66)^2}{24.66} + \frac{(45-34.52)^2}{34.52} + \frac{(25-24.17)^2}{24.17} + \frac{(15-11.28)^2}{11.28}$

$= 3,7841 + 3,1816 + 0,0285 + 1,2268$

$= 8,22$

3) $\chi^2_{0,05;2} = 5,99$

On rejette H_0, car $\mu_0 > \chi^2_{0.05;2}$

Question #3 (8 points)

a) $n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \cdot 0{,}5(1-0{,}5)$

$n \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$

$n \geq \left(\frac{1{,}96}{0{,}045}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$

$n \geq 474{,}27$

$n = 475$

b) p: proportion actuelle d'unités non-conformes d'une production

$H_0: p = 0{,}10 \quad H_1: p > 0{,}10$

c) • Rejetter H_0, car $0{,}0024 < 0{,}05$

• 1) $1 - 0{,}0024 = 0{,}9976 \Rightarrow \Phi(Z_0) = 0{,}9976$
$Z_0 = 2{,}82$

2) $Z_0 = \frac{\hat{p} - 0{,}10}{\sqrt{\frac{0{,}10(1-0{,}10)}{400}}} = 2{,}82 \Rightarrow \hat{p} = 0{,}1423$

3) $400 \cdot 0{,}1423 = 56{,}92 \approx 57$ unités

d) $\beta = P$(Erreur de deuxième espace)

$\beta = P\left(p_0 - p_1 + Z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \mid H_1\right)$

$= P\left(Z < \frac{0{,}10 - 0{,}11 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}10 \cdot 0{,}90}{500}}}{\sqrt{\frac{0{,}11 \cdot 0{,}89}{500}}}\right)$

$= \Phi(0{,}86)$

$= 0{,}80511$

$= 80{,}511\%$

Question #4 (12 points)

a) On sait que $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$IDC(\mu_2) = \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 50,3 \pm t_{0,05;8} \cdot \frac{1,48}{3}$$

$$= 50,3 \pm 1,86 \cdot \frac{1,48}{3}$$

$$= [49,3824 ; 51,2176]$$

b) $X_{n+1} \in \bar{X} \pm t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) S\sqrt{1+\frac{1}{n}}$

$X_{n+1} \in 50,3 \pm 1,86 \cdot 1,476 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{9}}$

$X_{n+1} \in 50,3 \pm 2,89$

$X_{n+1} \in [47,41 ; 53,13]$

c) $H_0 : \sigma_1^2 = 0,5$
$H_1 : \sigma_1^2 \neq 0,5$

Rejetter H_0 si $\chi_0^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}$

1) $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{15 \cdot 0,37}{0,5} = 11,1$

2) $\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 27,49 \quad \chi_0^2 < \chi^2_{15;\frac{\alpha}{2}}$

3) $\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2});n-1} = 6,27 \quad \chi_0^2 > \chi^2_{(1-\ldots}$

On ne peut pas rejetter.

d) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Rejetter si $F_0 < F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1}$ ou $F_0 > F_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1}$

1) $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0{,}37}{2{,}18} = 0{,}17$

2) $F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1} = \frac{1}{3{,}20} = 0{,}3125$ $F_0 < F_{1-\frac{\alpha}{2}}, \ldots$ (rejetter H_0)

3) $F_{\frac{\alpha}{2}; n_1-1; n_2-1} = 4{,}10$

e) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

Rejetter H_0 si $T_0 > t_{\alpha; v}$

1) $v = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2$

$= 9{,}94$

≈ 10

2) $T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$

$= 4{,}07673$

3) $t_{0{,}05;10} = 1{,}81$

On rejette H_0, oui on peut affirmer qu'en moyenne les délais du protocole expérimental sont plus courts que ceux du protocole standard.

Question # 5 (14 points)

a) $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$

$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$

1) $S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{X}\bar{Y}$

1.1) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{244{,}10}{12} = 20{,}34$

1.2) $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i = \frac{1182{,}20}{12} = 98{,}52$

Reprenons $S_{xy} = 25\,631{,}34 - 12(20{,}34)(98{,}52)$
$= 1\,584{,}58$

2) $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{X}^2 = 5567{,}37 - 12(20{,}34)^2 = 602{,}78$

3) $\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1\,584{,}58}{602{,}78} = 2{,}63$

4) $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 98{,}52 - 2{,}63 \cdot 20{,}34 = 45{,}02$

$$Y = 45{,}02 + 2{,}63X + \epsilon$$

b)

Source de variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Moyenne des carrés	F_0
Régression	SSR = 4167,45	1	MSR = SSR/1 = 4167,45	$\frac{MSR}{MSE} = 32{,}69$
Erreur	SSE = 1274,86	n-2 = 10	MSE = SSE/(n-2) = 127,49	—
Totale	5450,197	n-1 = 9	—	—

1) $SS_R = \hat{\beta}_1 S_{xy} = 2{,}63 \cdot 1\,584{,}58 = 4167{,}45$

2) $SS_E = SST - SS_R$
$= S_{yy} - SS_R$
$= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2 - 4167{,}45$
$= 121\,916{,}60 - 12(98{,}52)^2 - 4167{,}45$
$= 1274{,}86$

$\longrightarrow$

$H_0 : \beta_1 = 0$ (aucun lien)
$H_1 : \beta_1 \neq 0$ (lien)

On rejette H_0 si $f_0 > F_{\alpha ; 1 ; n-2}$

3) $F_{\alpha;1;n-2} = 4,67$

On rejette H_0, alors c'est possible qu'il y ait une rég. entre les 2

c) $\hat{\sigma}^2 = MS_E = 128,0415$

d) 1) $\hat{Y}_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-2} \sqrt{MSE\left(1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}$ 2) $\hat{Y}_0 = 45,02 + 2,63(20) = 97,62$

$\hat{Y}_0 \pm 2,23 \sqrt{127,49\left(1+\frac{1}{12}+\frac{(20-20,91)^2}{602,78}\right)}$

$\hat{Y}_0 \pm 26,21$

$97,62 \pm 26,21 \Rightarrow [71,41 , 123,83]$

e) $R^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{xx}}{S_{yy}} = 2,63^2 \cdot \frac{602,78}{121916,60 - 12(98,52)^2} = 0,7661$

R^2 est proche de 1, alors il y a une certaine régression linéaire.