QUESTION Nº 1 (2 points)

Soient A et B deux événements indépendants tels que

$$P(A) = P(B) = p \text{ et } P(A \cap B) = 2 \times P(\overline{A} \cap B).$$

Déterminer les valeurs possibles de p.

RÉPONSE

2

A et B deux évenement indépendants

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$= p^2$

on a $P(A \cap B) = 2 \times P(\overline{A} \cap B)$

donc $p^2 = 2 \times P(\overline{A} \cap B)$

$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$

$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$

$p = 2P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$p = 3P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = \frac{p}{3}$

$p^2 = 2 \times P(\overline{A} \cap B)$

$p^2 = 2 \times \frac{p}{3}$

$p^2 - \frac{2}{3}p = 0$

$p(p - \frac{2}{3}) = 0$

$p = 0$ ou $p - \frac{2}{3} = 0$

$\boxed{p = 0}$ ou $\boxed{p = \frac{2}{3}}$

QUESTION N° 1 (suite)

QUESTION N° 2 (3 points)

Dans une certaine unité de production, plusieurs années d'observations montrent que 40% des pièces produites sont de qualité excellente, 50% sont de qualité acceptable et 10% sont de qualité inacceptable. Si une pièce est de qualité excellente, elle a une probabilité de 95% de fonctionner sans problème (durant une période donnée). Par contre, si une pièce est de qualité acceptable, elle a une probabilité de 80% de fonctionner ; si elle est de qualité inacceptable, cette probabilité est de 25%.

a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'une pièce soit de qualité acceptable, étant donné qu'elle a fonctionné sans problème ?

b) (2 points) On choisit au hasard cinq pièces parmi celles qui ont fonctionné sans problème. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux pièces (parmi les cinq) qui sont de qualité excellente ?

RÉPONSE

$p(E$

$B(0{,}805)$

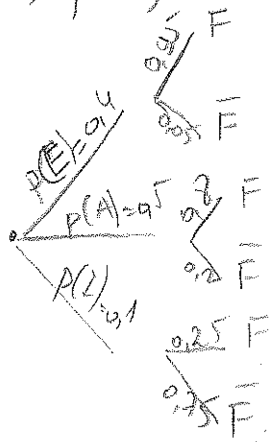
$B(n=5,\ p=0{,}805)$

$p(X \geqslant 2$

F : "la pièce fonctionne"
E : "pièces de qualité excellente"
A : "Pièces de qualité acceptable"
I : "Pièces de qualité inacceptable"

$(E \mid F)^5$

$p(E) = 0{,}4 \; ; \; p(A) = 0{,}5 \; , \; p(I) = 0{,}1$



$\bullet\ p(F) = p(F|E)\cdot p(E) + p(F|A)\cdot p(A) + p(F/I)\cdot p(I)$

$= (0{,}4 \times 0{,}95) + (0{,}5 \times 0{,}8) + (0{,}1 \times 0{,}25)$

$= 0{,}38 + 0{,}4 + 0{,}025$

$p(F) = 0{,}805$

$\bullet\ p(A \cap F) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4$

a) $p(A|F) = \dfrac{p(A \cap F)}{p(F)}$

QUESTION N° 2 (suite)

1

$$p(A|F) = \frac{0{,}4}{0{,}805} = 0{,}496$$

b) X : nombre de pièces qui fonctionne qui sont de qualité excellente

2

$$X \sim B(n=5, p(E|F)) \quad \text{avec } p(E/F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}95}{0{,}805} = 0{,}472$$

Binomiale $\Rightarrow X \sim B(5; 0{,}472)$

$$p(X \geq 2) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5)$$

$$= 1 - p(X<2)$$

$$= 1 - (p(X=0) + p(X=1))$$

$$= 1 - \left(\left(C_0^5 (0{,}472)^0 (0{,}528)^5\right) + \left(C_1^5 (0{,}472)^1 (0{,}528)^4\right)\right)$$

$$= 1 - (0{,}04103 + (5 \times 0{,}472 \times 0{,}0777))$$

$$= 1 - 0{,}224 = 0{,}776$$

QUESTION N° 2 (suite)

QUESTION N° 3 (4 points)

Soit X une variable aléatoire continue, de fonction de répartition

3

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{k+1} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1, \end{cases}$$

où k est une constante telle que $k > -1$ et $E(X) = 0{,}5$.

a) (1 point) Déterminer la valeur de la constante k.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = (0{,}3 - X)^2$.

1.b) (2 points) Calculer la probabilité $P(Y \ge 0{,}04)$.

2.b) (1 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

a) $f_X(x) = (F_X(x))' \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (k+1)x^k & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

x^2

$$f_X(x) = \begin{cases} (k+1)x^k & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$1 \times x^2$

on a $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^1 (k+1)x^k\,dx + \int_1^{+\infty} 0\,dx = 1$

$\Rightarrow \int_0^1 (k+1)x^k\,dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{k+1}\cdot(k+1)\cdot x^{k+1}\right]_0^1 = 1$

$\left[x^{k+1}\right]_0^1 = 1^{k+1} = 1$

QUESTION N° 3 (suite)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot (k+1) x^k \, dx = \int_0^1 (k+1) x^{k+1} \, dx$$

$$= (k+1) \int_0^1 x^{k+1} \, dx$$

$$= (k+1) \left[\frac{1}{k+2} x^{k+2} \right]_0^1$$

$$= (k+1) \left(\frac{1}{k+2} \right) = \frac{k+1}{k+2}$$

$$E(X) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{k+1}{k+2} = 0{,}5 \Rightarrow k+1 = 0{,}5(k+2)$$

$$\Rightarrow k+1 = 0{,}5k + 1$$

$$k - 0{,}5k = 0 \Rightarrow 0{,}5k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 0}$$

b) $Y = (0{,}3 - X)^2$

1.b) $P(Y \geq 0{,}04) = P((0{,}3 - X)^2 \geq 0{,}04)$

$= P(0{,}3 - X \geq 0{,}2)$ $+ P[0{,}3 - X \leq -0.2]$

$= P(-X \geq 0{,}2 - 0{,}3)$

$= P(-X \geq -0{,}1) = P(X \leq 0{,}1) = F(0{,}1) = (0{,}1)^1 = 0{,}1$

2.b) $E(Y) = E((0{,}3 - X)^2) = E(X^2 - 0{,}6X + 0{,}09)$

$= E(X^2) - 0{,}6\,E(X) + 0{,}09$

QUESTION Nº 3 (suite)

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = E(X^2) - 0{,}6\,E(X) + 0{,}09$$

$$= \frac{1}{3} - (0{,}6 \times 0{,}5) + 0{,}09$$

$$= \frac{1}{3} - 0{,}03 + 0{,}09$$

$$= 0{,}393$$

QUESTION N° 4 (3 points)

2

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \sim$ `Bernoulli`(0,4), $Y \sim$ `Binomiale`(2; 0,6) et

y	0	1	2
$P(Y=y \mid X=1)$	0,3	0,2	?

a) (1 point) Déterminer la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$ sous la forme d'un tableau.

b) (2 points) Soit la variable aléatoire T définie par $T = 5 - X + 2Y$. Déterminer l'écart-type de T.

RÉPONSE

a)

$x \backslash y$	0	1	2	$P_X(x)$
0	0,04	0,4	0,16	0,6
1	0,12	0,08	0,2	0,4
$P_Y(y)$	0,16	0,48	0,36	1

$P(X=0) = 1 - 0,4 = 0,6$, $P(Y=0) = C_0^2 (0,6)^0 (0,4)^2 = 0,16$

$P(X=1) = 0,4$, $P(Y=1) = C_1^2 (0,6)(0,4) = 0,48$

$P(Y=2) = C_2^2 (0,6)^2 (0,4)^0 = 0,36$

- $P(Y=0 \mid X=1) = \dfrac{P_{XY}(1,0)}{P(X=1)} \Rightarrow P_{XY}(1,0) = P(Y=0 \mid X=1) \cdot P(X=1)$
$= 0,3 \times 0,4 = 0,12$

$\frac{3}{25}$

- $P(Y=1 \mid X=1) = \dfrac{P_{XY}(1,1)}{P(X=1)} = P_{XY}(1,1) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$

- $P(Y=2 \mid X=1) = 0,4 - (0,08 + 0,12) = 0,2$

b) $T = 5 - X + 2Y$

$V(T) = 4V(Y) - V(X)$

Non

QUESTION N° 4 (suite)

$V(X) = p(1-p)$ (car $X \sim B(0{,}4)$ Bernoulli)

$= 0{,}4(1-0{,}4) = 0{,}24$

$V(Y) = np(1-p)$ (car $Y \sim B(2, 0{,}6)$ Binomiale)

$= 2 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$

$\Rightarrow V(T) = 4V(Y) - V(X)$

$= (4 \times 0{,}48) - 0{,}24$

$= 1{,}68$

L'écart type de T : $\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{1{,}68}$

$= 1{,}296$

QUESTION N° 4 (suite)

QUESTION N° 5 (4 points)

1/4

Un serveur informatique est utilisé pour le traitement de certaines requêtes en réseau. Ce serveur reçoit en moyenne trois requêtes par minute et ce, selon un processus de Poisson.

a) (1 point) Quelle est la probabilité que le serveur reçoive au moins 2 requêtes lors des 30 prochaines secondes ?

b) (1 point) Quelle est la probabilité que le serveur attende plus de 20 secondes en tout pour recevoir une première requête sachant qu'aucune requête n'a été reçue durant les 5 premières secondes ?

c) (2 points) Sachant que le serveur a reçu exactement 3 requêtes en une minute, quelle est la probabilité qu'il ait reçu exactement une requête durant les 30 premières secondes de cette minute ?

RÉPONSE

X : nombre de requêtes reçues par minute

$X \sim P(\lambda = 3)$ Poisson

a) Y : nombre de requêtes reçues dans 30 secondes

$Y \sim P(\lambda' = 0{,}5\lambda)$

$Y \sim P(\lambda' = 0{,}5 \times 3)$

$Y \sim P(\lambda' = 1{,}5)$ Poisson

$P(Y \geq 2) = 1 - p(Y < 2) = 1 - (p(Y=0) + p(Y=1))$

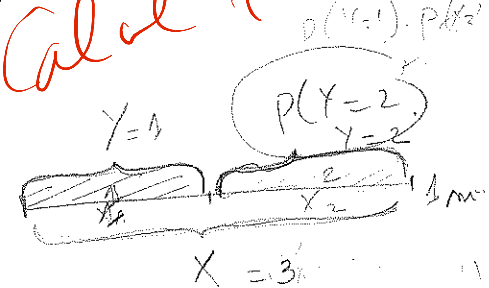
$= 1 - \left(\frac{e^{-0,5} \cdot 0{,}5^0}{0!} + \frac{e^{-0,5} \cdot (0{,}5)^1}{1!}\right)$

0,75

$= 1 - (0{,}606 + 0{,}606 \times 0{,}5)$

$= \cancel{1 - 0{,}909} = \cancel{0{,}091}$

Calcul faux

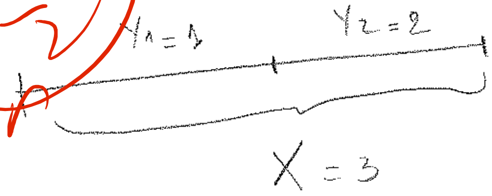


c) $p(Y = 1 \mid X = 3) = \frac{P(Y=1 \cap X=3)}{P(X=3)} =$

QUESTION N° 5 (suite)

$$p(X=3) = \frac{e^{-3} \cdot 3^3}{3!} = 0{,}224$$

0,125 / 2



$$p(Y=1) = \frac{e^{-0{,}5}(0{,}5)^1}{1!} = 0{,}303$$

$$p(Y=1 \mid X=3) = p(Y=2) = \cancel{0{,}7575}$$

$$p(Y=2) = \frac{e^{-0{,}5}(0{,}5)^2}{2!} = 0{,}7575$$

0/2

$3 \times 3 \times 3$

1,344250746 20,08553692

QUESTION N° 5 (suite)

QUESTION N° 6 (4 points)

$\frac{1,5}{4}$

On suppose que la durée de vie (en années) d'un certain type de composant est une variable aléatoire X distribuée selon une loi exponentielle telle que $P(X > 3) = 0{,}05$.

a) (2 points) Calculer la probabilité conditionnelle $P(X > 2 \mid 1 \leq X < 3)$.

b) (2 points) Cinq composants de ce type sont mis en fonction et opèrent indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que deux ans plus tard au moins deux des cinq composants fonctionnent encore ?

RÉPONSE

X : n des compo.

$X \sim$

$Y \geq 2 \mid X \geq 2$

X : durée de vie d'un composant (en années)

$X \sim Exp(\lambda)$

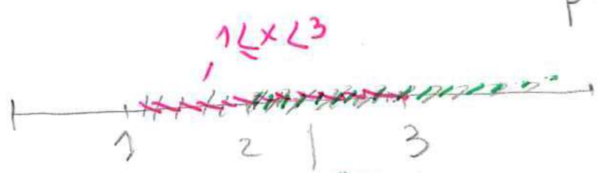
$p(X>3) = 0{,}05 \Rightarrow e^{-\lambda 3} = 0{,}05$

$\Rightarrow -3\lambda = Ln(0{,}05)$

$\lambda = -\frac{Ln(0{,}05)}{3}$

$\boxed{\lambda = 0{,}99}$

a) $p(X>2 \mid 1 \leq X < 3) = \frac{p(X>2 \cap 1 \leq X < 3)}{p(1 \leq X < 3)}$



$\Rightarrow p(X>2 \cap 1 \leq X < 3) \overset{x>2}{=} p(2 \leq X \leq 3)$

d'où $p(X>2 \mid 1 \leq X < 3) = \frac{p(2 \leq X \leq 3)}{p(1 \leq X < 3)} = \frac{F_X(3) - F_X(2)}{F_X(3) - F_X(1)}$

$\frac{1,25}{2}$

$= \frac{(1 - e^{-3 \times 0{,}99}) - e^{-2 \times 0{,}99}}{(1 - e^{-3 \times 0{,}99}) - e^{-0{,}99}} =$ Fall?

QUESTION N° 6 (suite)

2) Y : nombre de composants fonctionn-

Binomiale ?!

$Y \sim (5, p)$

$p(Y \geq 2 \mid X \geq 2) = \dfrac{p(Y \geq 2 \cap X \geq 2)}{p(X \geq 2}$

$\dfrac{0}{2}$

QUESTION N° 6 (suite)

Page supplémentaire