POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire examen final différé

MTH2302D

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Réservé	
1.	/4
2.	/4
3.	/4
4.	/4
5.	/4
6.	/4
7.	/4
8.	/4
9.	/8
10.	/7
11.	/3
TOTAL	
	/50

Sigle et titre du cours			
MTH2302D - Probabilités et statistique			
Professeur		*Groupe*	*Trimestre*
Luc Adjengue		**TOUS**	**Automne 2020**
Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Vendredi	**5 février**	**2h30**	**13h30 à 16h00**

Documentation	*Calculatrice*	*Outils électroniques*
☐ Aucune ☒ Toute ☒ Voir directives particulières	☐ Aucune ☒ Toutes	**Les ordinateurs et autres appareils électroniques sont interdits.**

Directives particulières

- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**
- **Chaque réponse doit être complète, justifiée et expliquée.**
- **Il est strictement interdit de débrocher l'examen.**
- **IMPORTANT : inscrire votre matricule sur toutes les pages numérotées.**

Cet examen contient 11 questions sur un total de 24 pages **(incluant cette page).**

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question nº 1 : (4 points)

Un système est constitué de quatre composants qui fonctionnent indépendamment les uns des autres. Le système fonctionne si au moins trois des quatre composants fonctionnent.
Soit F_i : le composant nº i fonctionne, pour $i = 1, 2, 3, 4$. On suppose que $P(F_1) = P(F_2) = 0{,}75$ et que $P(F_3) = P(F_4) = 0{,}95$.

On considère les deux événements F et G suivants :

F : le système fonctionne ; G : au moins un des quatre composants ne fonctionne pas.

a) **(2 points)** Calculer la probabilité $P(F)$.

Réponse :

Question n° 1 : (suite)

b) **(2 points)** Calculer la probabilité $P(F \mid G)$.

Réponse :

Question nº 2 : (4 points)

La roulette américaine est un jeu de hasard où les participants peuvent miser sur les nombres de 1 à 36, comprenant 18 nombres «rouges» et 18 nombres «noirs» ainsi que sur deux nombres spéciaux, le 0 et le 00. À chaque tour de roulette, un numéro gagnant est déterminé au hasard avec équiprobabilité, et indépendamment d'un tour à l'autre. Il est possible de miser sur un seul numéro, ou sur plusieurs numéros à la fois. Par exemple, une mise sur les nombres rouges est gagnante si le résultat de la roulette est un nombre rouge.

Supposons qu'un joueur ait gagné exactement quatre fois avec les nombres rouges en six tours de roulette. Quelle est la probabilité que ces gains soient survenus lors de quatre tours consécutifs ?

Réponse :

Question nº 2 : (suite)

Question n° 3 : (4 points)

Un libraire a établi que pour un certain magazine, le nombre d'exemplaires demandés en une semaine est une variable aléatoire X dont la fonction de masse est donnée dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0,10	0,20	0,30	0,30	0,10

Le libraire paie 8 $ chaque exemplaire du magazine et le revend 12 $. Les exemplaires non revendus à la fin de la semaine sont rachetés par le fournisseur au prix de 2 $ l'unité. Le libraire hésite entre les deux stratégies A et B suivantes :

- A : commander deux exemplaires du magazine chaque semaine ;
- B : commander trois exemplaires du magazine chaque semaine.

En moyenne laquelle de ces deux stratégies est plus avantageuse pour ce libraire ?

Réponse :

Question n^o 3 : (suite)

Question n° 4 : (4 points)

On lance 3 fois un pièce de monnaie équilibrée. Soit X le nombre total de «*Face*» obtenu lors des 3 lancers, et Y le nombre total de «*Face*» obtenu lors des deux premiers lancers.

Calculez la variance de la variable $T = 10 + 2X - 3Y$.

Réponse :

Question n$^{\text{o}}$ 4 : (suite)

Question n° 5 : (4 points)

Le temps (en minutes) qu'un employé d'usine prend pour effectuer une certaine tâche est une variable aléatoire T distribuée selon une loi exponentielle de moyenne 1. Avec l'aide des conseils d'une ingénieure industrielle, ce temps est réduit à $T^* = 0{,}9T$.

Calculer la probabilité $P(T^* \geq 2 \mid T^* > 1)$.

Réponse :

Question n^o 5 : (suite)

Question n° 6 : (4 points)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire de taille n prélevé d'une population (c'est-à-dire une variable) X de fonction de densité

$$f(x) = \begin{cases} \theta(\theta+1)\, x(1-x)^{\theta-1} & \text{si } \; 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel positif.

Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ par la méthode des moments.

Réponse :

Question nº 6 : (suite)

Question n° 7 : (4 points)

Soit $X_1, \cdots, X_6$ un échantillon aléatoire d'une variable X telle que $X \sim N(0,\ 2)$.

a) (2 points) Déterminer la valeur de la constante c telle que

$$P\left(\frac{|X_1 - X_2 - X_3|}{\sqrt{X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}} \leq c\right) = 0{,}90.$$

Réponse :

Question nº 7 : (suite)

b) (2 points) Déterminer la valeur de la constante d telle que

$$P\left(\frac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2} < d\right) = 0{,}05.$$

Réponse :

Question n° 8 : (4 points)

Le tableau suivant présente la répartition du nombre de pannes, observées pour 124 composants d'une production, selon le modèle (X) du composant et le type de panne (Y). Trois modèles de composant (M_1, M_2, M_3), et deux types de panne (T_1, T_2) sont considérés.

Type (Y)	Modèle (X)		
	M_1	M_2	M_3
T_1	32	19	10
T_2	13	28	22

On veut vérifier si le type de panne est indépendant du modèle du composant.

Que peut-on conclure au seuil critique 5% ?

Réponse :

Question n° 8 : (suite)

Question n° 9 : (8 points)

Une expérience est menée afin de comparer la perte de chaleur dans un tuyau en acier d'une part, et dans un tuyau en verre d'une autre part. On considère 5 paires de tuyaux (un en acier, l'autre en verre). Les tuyaux d'une paire ont le même diamètre, mais les diamètres sont différents d'une paire à l'autre. On fait circuler de l'eau dans les tuyaux à la même température initiale et l'on mesure la perte de chaleur (en ˚C) pour une distance de 150 m. Le tableau ci-dessous présente les mesures obtenues.

Mesures de perte de chaleur (en ˚C)

Type de tuyau	Numéro de la paire				
	1	2	3	4	5
Acier	5,7	6,2	3,9	6,8	8,1
Verre	6,2	4,0	3,8	4,7	4,2

On suppose que la perte de chaleur dans un tuyau est distribuée selon une loi normale.

Consigne. *Veuillez définir au préalable les variables et les paramètres d'intérêt. Veuillez formuler les hypothèses H_0 et H_1 dans chaque cas de test.*

a) **(2 points)** Calculer un intervalle de confiance de niveau de confiance 90% pour la moyenne de la perte de chaleur dans les tuyaux en acier. Commenter brièvement le résultat.

Réponse :

Question n° 9 : (suite)

b) **(2 points)** Peut-on affirmer que la variance de la perte de chaleur dans les tuyaux en acier est égale à 2 au seuil critique $\alpha = 0,05$?

Réponse :

Question n° 9 : (suite)

c) (4 points) À un seuil critique de $\alpha = 5\%$, peut-on conclure qu'en moyenne la perte de chaleur est plus grande dans les tuyaux en acier que dans les tuyaux en verre ?

Réponse :

Question n^o 10 : (7 points)

Un ingénieur cherche à établir un lien entre le niveau des précipitations (X en mm) et le niveau de polluants (Y en ppm) en utilisant un échantillon de $n = 19$ observations obtenues lors d'une étude sur la pollution de l'air. Les données sont de la forme $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, 19$. Pour ce faire, il envisage le modèle de régression linéaire simple

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon,$$

où β_0 et β_1 sont des paramètres, et ε est une erreur aléatoire de loi normale $N(0,\ \sigma^2)$.

L'ingénieur obtient les résultats suivants sur l'ajustement du modèle avec les 19 observations :

$$\sum_{i=1}^{19} X_i = 857{,}2; \quad \sum_{i=1}^{19} X_i Y_i = 7\,670{,}5; \quad \sum_{i=1}^{19} X_i^2 = 52\,105{,}4;$$
$$\sum_{i=1}^{19} Y_i = 204{,}3; \quad R^2 = 0{,}84.$$

a) **(2 points)** Déterminer les valeurs estimées $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ des paramètres β_0 et β_1. Donner l'équation de la droite des moindres carrés.

Réponse :

Question n° 10 : (suite)

b) **(2 points)** Calculer un intervalle de confiance de niveau 95% pour le paramètre β_1. Peut-on conclure que la variable X contribue significativement au modèle ?

Réponse :

Question n° 10 : (suite)

c) **(3 points)** Compléter le tableau d'analyse de la variance ci-dessous en laissant les cases inutiles vides. Quelle conclusion peut-on en tirer au seuil critique $\alpha = 0{,}05$?

Réponse :

Source de variation	Somme des carrés	Nombre de degrés d.l.	Moyenne des carrés	F_0
Régression				
Erreur				
Total				

Question n° 11 : (3 points)

Un système est constitué de deux composants, placés en série, dont les durées de vie sont des variables aléatoires T_1 et T_2 indépendantes, telles que $T_1 \sim U(0,1)$ et $T_2 \sim U(0,2)$.

Calculer la probabilité que le système dure entre 1/4 et 1/2 unité de temps.

Réponse :