Question n° 1 : (5 points) 4,5

On considère une certaine tâche dont l'exécution sur une ligne d'assemblage s'effectue en deux phases successives. On suppose que les durées d'exécution, X_1 et X_2, de chacune des phases sont indépendantes et distribuées selon des lois normales dont les paramètres sont donnés dans le tableau suivant

Durée	Moyenne (en minute)	Écart type (en minute)
X_1	20	1,2
X_2	5	0,5

$X_1 \sim N(20, 1{,}2^2)$
$X_2 \sim N(5, 0{,}5^2)$

a) (2 points) Quelle est la probabilité que la première phase de la tâche dure plus de 23 minutes ?

~~Y : Temps de la première phase~~

~~$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$~~

2

~~$\cdot\ \mu_Y = \mu_1 + \mu_2 = 25 \rightarrow Y \sim N(25, 1{,}7^2)$~~

(Voir verso Page) $\Rightarrow$

~~$\cdot\ \sigma_Y = 1{,}2 + 0{,}5 = 1{,}7$~~

~~$P(Y > 23) = 1 - P(Y < 23) = 1 - P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{23-25}{1{,}7}\right)$~~

~~$= 1 - \Phi(-1{,}176) = 1 - [1 - \Phi(1{,}176)] = \Phi(1{,}176) = \Phi(1{,}18) = 0{,}881$~~

b) (3 points) Calculer la probabilité que la tâche complète soit exécutée en moins de 27,5 minutes.

Y : Temps de la tâche complète

2,5

$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$\cdot\ \mu_Y = \mu_1 + \mu_2 = 25$ $\quad Y \sim N(25, 1{,}7^2)$

$\cdot\ \sigma_Y^2 = 1{,}2^2 + 0{,}5^2 \overset{?}{=} 1{,}7^2$

$P(Y < 27{,}5) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{27{,}5-25}{1{,}7}\right) = \Phi(1{,}47)$

$= 0{,}92922$

(a)

X : le temps de la première phase

$X \sim N(20, 1{,}2^2)$

$$P(X > 23) = 1 - P(X \leq 23)$$
$$= 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{23 - 20}{1{,}2}\right)$$
$$= 1 - \Phi(2{,}5)$$
$$= 0{,}00621$$

Question n° 2 : (4 points)

3

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi $N(0,1)$. Pour chacune des variables aléatoires ci-dessous, donner le nom de loi de probabilité correspondante ainsi que la valeur de ses paramètres :

a) **(1 point)** $V_1 = 2X$;

$V_1 \sim N(0,4)$ ✓

b) **(1 point)** $V_2 = X + Y$;

$V_2 \sim N(0,2)$ ✓

$1 \times E(X) + 1 \times E(Y) = 0$
$1 \times V(X) + 1 \times V(Y) = 2$

c) **(1 point)** $V_3 = X^2 + Y^2$;

$V_3 \sim \chi^2_2$ ✓

RM $X^2 \sim \chi^2_1$
$Y^2 \sim \chi^2_1$

d) **(1 point)** $V_4 = \frac{1}{2}(X - Y)^2$.

~~Exp(2)~~

Question n° 3 : (10 points)

Le tableau ci-dessous présente la distribution de fréquence du nombre de défauts par pièce observés dans un échantillon aléatoire de 80 pièces d'une production.

Nombre de défauts (x_i)	0	1	2	3
Nombre de pièces (O_i)	35	20	15	10

1,75 a) **(3 points)** Calculer la médiane, la moyenne et l'écart type de cet échantillon.

$* \ \bar{x} = \dfrac{0\times 35 + 1\times 20 + 2\times 15 + 3\times 10}{80} = 1$

$* \ S^2 = \dfrac{0^2\times 35 + 1^2\times 20 + 2^2\times 15 + 3^2\times 10 - 1}{80} = 2,125$ 0,75

$* \ \text{la médiane } \tilde{x} = \cancel{\dfrac{\frac{20+15}{2}}{80}} = 0,219$

Question n° 3 : (suite) 2,25

b) **(3 points)** Supposons que $X \sim \text{Poi}(c)$. On trouve que la fonction de vraisemblance de l'échantillon est donnée par

$$L(c) = \frac{c^{80}}{2^{15}6^{10}} \exp(-80c).$$

Rappel : si $X \sim \text{Poi}(c)$, alors $p_X(x) = \frac{c^x}{x!}\exp(-c)$, pour $x = 0, 1, \ldots$.

b.1) *(2 points)* Déterminer la valeur $\hat{c}$ de c qui maximise $L(c)$ et dire ce que représente cette valeur.

1

1) par la Méthode des Moment, on a

$\hat{C}$ Estimateur de C avec $X \sim \text{Poi}(C)$

$E(X) = C$ (Espérence théorique)

$\hat{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X}$ (~~Exp~~ moyenne Experimentale)

$\hat{C} = \bar{X}$

$\hat{c}$ qui Max $L(C)$: Maximiser $L(C)$ c'est maximiser $\ln L(C)$

$\ln L(C) = \ln\left(\frac{c^{80}}{2^{15}6^{10}} \exp^{(-80c)}\right)$

$= \ln\left(\frac{c^{80}}{2^{15}6^{10}}\right) + \ln\left(\exp^{(-80C)}\right)$

$= -\ln(C^{80}) - \ln(2^{15} \cdot 6^{10}) + (-80C)$

$= \frac{80c^{79}}{c^{80}} - 28{,}315 + (-80C)$

$\text{Max } \frac{dL}{dc} = 0$

$\frac{80c^{79}}{c^{80}} - 80c - 28{,}315 = 0$

$\frac{80}{c} - 80c = 28{,}315$

$\frac{80 - 80c^2}{c} = 28{,}315$

$80 - 80c^2 = 28{,}315\,c$

$-80c^2 - 28{,}315\,c + 80 = 0$

$\hat{C} = 0{,}832$

$\frac{d \log L(c)}{dc} = \frac{80}{c} - 80$

$\hat{c} = 1$

b.2) *(1 point)* Donner l'interprétation du résultat $L(1) = 9{,}1 \times 10^{-48}$ en encerclant la réponse appropriée parmi les suivantes :

0,5

R1 : $9{,}1 \times 10^{-48}$ est la probabilité que $\hat{c}$ prenne la valeur 1 lorsqu'on observe les effectifs du tableau de la page précédente.

R2 : $9{,}1 \times 10^{-48}$ est la probabilité que c prenne la valeur 1 lorsqu'on observe les effectifs du tableau de la page précédente.

R3 : $9{,}1 \times 10^{-48}$ est la probabilité d'observer les effectifs du tableau de la page précédente lorsque $\hat{c} = 1$.

R4 : $9{,}1 \times 10^{-48}$ est la probabilité d'observer les effectifs du tableau de la page précédente lorsque $c = 1$.

R5 : Aucune de ces réponses.

Question n° 3 : (suite)

c) **(4 points)** En utilisant le test d'ajustement du Khi-deux, on veut tester l'hypothèse selon laquelle le nombre X de défauts sur une pièce est distribué selon une loi de Poisson. Compléter le tableau ci-dessous, effectuer le test avec un niveau critique de 5 % et conclure.

j'ai prit $\hat{c}$ pour cette Question

Nombre de défauts (x_i)	0	1	2	3+
Effectifs observés (O_i)	35	20	15	10
Effectifs espérés (E_i)	29,43	29,43	12,16	3,39

test d'Ajustement $n=80$ $\hat{c} = 0{,}838$ $\alpha = 0{,}05$

H_0 : le nombre X suit $Poi(c)$

H_1 : le nbr X ne suit pas $Poi(c)$

M1

$\circ\ E_2 = n\,p^{(2)} = \cancel{n \times P(X=2) = 80 \times}$

$= n \times P_X(2) = 80 \times \frac{c^2}{2!} \exp(-c)$

$= 80 \times 0{,}1519$

$= 12{,}16$

$\circ\ E_3 = n\,p^{(3)} = 80 \times \frac{c^3}{3!} \exp(-c)$

$= 3{,}394$

x_i	0	1	2+	tot
O_i	35	20	25	80
E_i	29,43	29,43	15,55	75

$\circ\ \chi_0^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(35-29{,}43)^2}{29{,}43} + \frac{(20-29{,}43)^2}{29{,}43} + \frac{(25-15{,}55)^2}{15{,}55}$

$= 1{,}0542 + 3{,}0216 + 6{,}404 = 10{,}4799$

$\circ$ on rejete H_0 si $\chi_0^2 > \chi_{0{,}05,\,k-1-p}$

$\circ\ \chi_{0{,}05,1} = 3{,}84$

On a $\chi_0^2 = 10{,}4797 > \chi_{0{,}05,1} = 3{,}84$

donc on rejette H_0

Question n° 4 : (12 points) 8,5

Lors d'une étude sur la résistance (en MPa) de deux types de béton B_1 et B_2, deux échantillons de spécimens de béton indépendants (un par type de béton) furent prélevés. Les mesures de résistance obtenues ainsi que quelques statistiques sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Type	Mesures de résistance							Taille	Moyenne	Écart type
B_1	44	41	39	45	46			5	43,00	2,92
B_2	42	41	36	42	37	39	42	7	39,86	2,54

On suppose que les deux échantillons sont indépendants et que les résistances des bétons de types B_1 et B_2 suivent respectivement des lois normales $N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$ et $N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$.

Important *: formuler les hypothèses H_0 et H_1 pour chaque test.*

a) **(2 points)** Calculer un intervalle de confiance pour la variance de la résistance du béton de type B_1 au niveau de confiance 95%.

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ ~~test d'hyp~~ et $\longrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array}\right]$ $\alpha = 0{,}05$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

test d'hyp sur les variances au seuil $\alpha = 0{,}05$

$F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \dfrac{2{,}92^2}{2{,}54^2} = 1{,}3215$ $\quad F_{0,025;4,6} = 6{,}60$

on rejette H_0 si $F_0 > F_{0,025;4,6}$ on a $F_0 = 1{,}3215 < 6{,}60 = F_{0,025;4,6}$

donc on accepte H_0 alors IC sera

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2;\, n_1+n_2-2} \times S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ $\quad S_p = \sqrt{\dfrac{4 \times 2{,}92^2 + 6 \times 2{,}54^2}{10}} = 2{,}698$

$3{,}14 \pm t_{0,025;10} \times 2{,}698 \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}$

$3{,}14 \pm$

b) **(2 points)** On compte effectuer une sixième mesure avec un nouveau spécimen du béton de type B_1. Calculer un intervalle de prévision pour cette mesure à un niveau de confiance 95 %; interpréter brièvement le résultat.

a)

$$\left[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\chi^2_{\alpha/2;\,n_1-1}},\ \frac{(n_1-1)S_1^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}}\right] \Rightarrow \left[\frac{34{,}106}{\chi^2_{0,025;4}},\ \frac{34{,}106}{\chi^2_{0,975;4}}\right]$$

$$\left[\frac{34{,}106}{11{,}14},\ \frac{34{,}106}{0{,}48}\right] \Rightarrow \left[3{,}0616,\ 71{,}054\right] ✓$$

Question n° 4 : (suite)

c) **(2 points)** À un seuil critique de 5 %, peut-on conclure que le béton de type B_1 présente en moyenne une résistance supérieure à 41 MPa ?

test d'hyp sur la moyenne unilatéral à droite avec σ^2 inconnue

$H_0 : \mu_1 = 41$ $\quad \alpha = 0{,}05$
$H_1 : \mu_1 > 41$

$T_0 = \dfrac{\bar{x}_1 - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{43 - 41}{2{,}92/\sqrt{5}} = 1{,}53$

$t_{\alpha, n-1} = t_{0{,}05;4} = 2{,}13$

on rejette H_0 si $T_0 > t_{\alpha, n-1}$

on a $T_0 = 1{,}53 < t_{0{,}05;4} = 2{,}13$

donc on accepte H_0

d) **(3 points)** Au seuil critique de 5 %, peut-on dire que les variances des résistances sont différentes pour les deux types de béton B_1 et B_2 ?

test d'hyp sur les variance bilatérale

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\quad \alpha = 0{,}05$
$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \dfrac{2{,}92^2}{2{,}54^2} = 1{,}3215$ $\quad F_{0{,}025;4;6} = 6{,}60$

on rejette H_0 si $F_0 > F_{0{,}025;4;6}$

on

autre limit. $-1{,}5$

$F_0 = 1{,}322 < F_{0{,}025;4;6} = 6{,}60$

donc on accepte H_0

Question n° 4 : (suite)

e) **(3 points)** Au seuil critique de 5 %, peut-on conclure que le béton de type B_1 présente en moyenne une résistance supérieure à celle du béton de type B_2 ?

test d'hyp sur les moyennes unilatérale à droite avec $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ inconnues

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$T_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$; $S_p = \sqrt{\dfrac{4 \times 2{,}92^2 + 6 \times 2{,}54^2}{10}} = 2{,}698$

$= \dfrac{43 - 41}{2{,}698\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}}$

$= 1{,}265$

on rejette H_0 si $T_0 > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$ au seuil $\alpha = 0{,}05$

$t_{0{,}05, 10} = 1{,}81$

On a $T_0 = 1{,}265 > t_{0{,}05,10} = 1{,}81$

on rejette H_0

-1

Question n° 5 : (14 points) 12

On cherche à établir un lien entre le niveau des précipitations (X en mm) et le niveau de polluants (Y en ppm) en utilisant un échantillon de 20 observations obtenues lors d'une étude sur la pollution de l'air. Pour ce faire, on envisage un modèle de régression linéaire simple, d'équation

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon,$$

où β_0 et β_1 sont des paramètres, et ε une erreur aléatoire. On suppose que $\varepsilon \sim N(0,\ \sigma^2)$.

L'ajustement du modèle aux 20 observations recueillies $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, 20$ a donné les résultats partiels suivants :

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 846{,}20\ ; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 51\,532{,}38\ ; \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 1\,910{,}98;$$

$$\sum_{i=1}^{20} y_i = 194{,}20\ ; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 7\,656{,}19\ ; \quad R^2 = 0{,}7892.$$

a) **(4 points)** Calculer $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$. Donner l'équation de la droite des moindres carrés.

4

- $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$

$* S_{xy} = \sum_{i=1}^{20} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} x_i = 42{,}31$

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} y_i = 9{,}71$

$S_{xy} = 7656{,}19 - (20 \times 42{,}31 \times 9{,}71)$

$= -560{,}412$

$* S_{xx} = \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - n\bar{x}^2$

$= 51532{,}38 - (20 \times 42{,}31^2)$

$= 15729{,}658$

$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = -0{,}0356$

- $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

$= 9{,}71 - (-0{,}0356 \times 42{,}31)$

$= 11{,}216$

- Eq de la droite $E(y|x) = y_* = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$

$= 11{,}216 - 0{,}0356\, X$

Question n° 5 : (suite)

b) **(3 points)]** Compléter le tableau d'analyse de la variance ci-dessous, en laissant les cases inutiles vides. Quelle conclusion peut-on en tirer au seuil $\alpha = 0{,}05$?

Source de variation	Somme des carrés	Nombre de degrés d.l.	Moyenne des carrés	F_0
Régression	21,322	1	21,322	0,6919
Erreur	554,72	18	30,818	
Total	576,046	19		

2

$$SS_R = \frac{S^2_{xy}}{S_{xx}} = \frac{(-560{,}412)^2}{15729{,}658} = 21{,}322$$

$$SS_E = S_{yy} - SS_R$$

$$S_{yy} = \frac{SS_R}{R^2} = \frac{21{,}322}{0{,}7892^2} = 560{,}05$$

$$SS_E = 560{,}05 - 21{,}322 = 554{,}72$$

c) **(2 points)** Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour le paramètre β_1.

$$\beta_1 = \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2, n-2} \sqrt{MSE/S_{xx}}$$

$\hat{\beta}_1 = -0{,}0356$

$t_{0{,}025, 18} = 2{,}10$

$MSE = 30{,}818$

$S_{xx} = 15729{,}658$

$$\Rightarrow \beta_1 = -0{,}0356 \pm 0{,}0929527$$

$$-0{,}1286 \leq \beta_1 \leq 0{,}0574$$

Question n° 5 : (suite)

d) **(3 points)** On veut prédire le niveau de polluant Y_0 lorsque le niveau de précipitations est de 30 mm. Donner un intervalle de prévision pour Y_0 au niveau de confiance 95 %.

$$E(Y|x_0=30) = Y_0 = \hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2,n-2}\sqrt{MSE\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]}$$

$$\hat{Y}_0 = 11,216 - 0,0356 \times 30 = 10,148$$

$$Y_0 = 10,148 \pm 2,10\sqrt{30,812 \times \left[1+\frac{1}{20}+\frac{(30-42,31)^2}{15724,658}\right]}$$

$$= 10,148 \pm 12,0005$$

$$-1,8525 \leq Y_0 \leq 22,1485$$

e) **(2 points)** Les graphiques de la page suivante ont été produits avec Statistica.
L'hypothèse d'une distribution normale des erreurs est-elle plausible ?
Le modèle linéaire vous semble-t-il adéquat ?

- D'après le graphe 1 on peut conclure visuellement que σ^2 est constante (pour chaque x, $E(\varepsilon=0)$ et $V(\varepsilon)=\sigma^2$) les erreurs sont non corrélés et sont distribuées normalement.

- pour le graphe 2, l'analyse des résidus aussi, on peut conclure que ~~[illegible]~~ ε^2 est constante alors le modèl semble adéquat.

Question n° 5 : (suite)

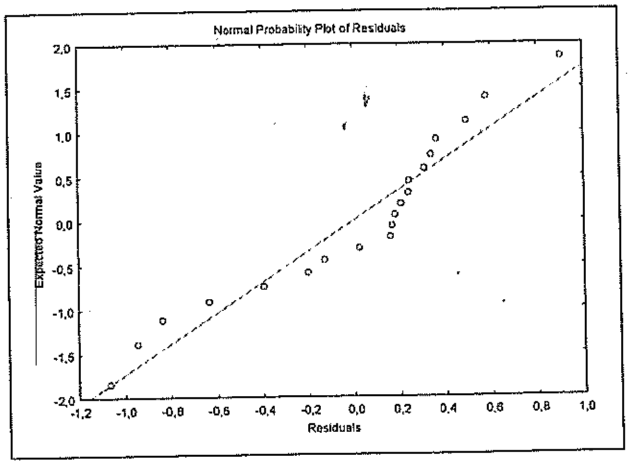

FIGURE 1 – Graphe de probabilité normale des résidus

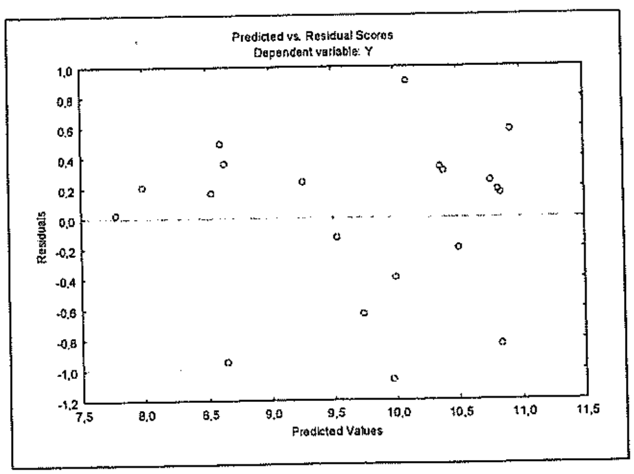

FIGURE 2 – Graphe des résidus en fonction des valeurs prédites

Question n° 6 : (5 points)

0

Cette question est constituée de deux parties indépendantes l'une de l'autre.

a) **(3 points)** Un ingénieur dispose n composants pour former un système en parallèle (redondance active) qui doit avoir une fiabilité d'au moins 99,9% pour une période de 1 an.
Quel nombre minimal de composants l'ingénieur doit-il utiliser si les composants fonctionnent indépendamment les uns des autres et s'ils ont chacun une fiabilité de 55 % pour une période de 1 an ?

b) **(2 points)** Vous vous présentez à un comptoir de service modélisé par une file d'attente $M/M/1$ (avec $\lambda = 9$ et $\mu = 10$) alors qu'il y a exactement six clients déjà en attente (et un en train d'être servi).
Soit X votre temps de séjour dans le système. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

$\lambda = 9 \qquad \mu = 10 \qquad \rho = 9/10 = 0{,}9$

Question n° 6 : (suite)

n	0	1	2	3	4	5	6
π_n	1,7	0,862	0,431	0,216	0,101	0,059	0,0269

$$\pi_0 = \left(\frac{9}{10}\right)^0 \times \frac{1-9/10}{1-(9/10)^7} = \frac{9/10}{0,522} = \frac{9}{10} \times \frac{1}{0,522} = \frac{9}{5,22} = 1,7$$

$$\pi_1 = \left(\frac{9}{10}\right)^1 \times 1 = 0,8621$$

$$\pi_2 = 0,431$$

$$\pi_3 = 0,2155$$

$$\pi_4 = 0,101$$

$$\pi_5 = 0,0539$$

$$\pi_6 = 0,0269$$

donc $E(X) = \bar{N} = 0 \times 1,7 + 1 \times 0,862 + \dots \; 6 \times 0,0269$
$= 3,232$

$V(X) = 0^2 \times 1,7 + 1^2 \times 0,826 + \dots + 6^2 \times 0,026$
$= 8,589$