QUESTION N° 1 (2 points)

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que

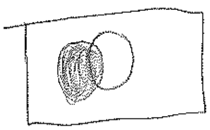
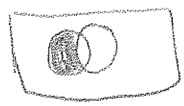
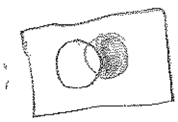
$$P(A) = 0{,}40; \quad P(\overline{B} \mid A) = 0{,}25; \quad P(B \mid \overline{A}) = 0{,}50.$$

2

a) (1 point) Calculer la probabilité $P(B)$.

b) (1 point) Calculer la probabilité $P(A \cup B)$.

RÉPONSE

$P(A)$:  $P(\bar{B} \mid A) \cdot P(A) =$  $P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$: 

a) $P(B) = P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) + [P(A) - P(\bar{B} \mid A) \cdot P(A)]$

$= P(B \mid \bar{A}) \cdot (1 - P(A)) + [P(A) - P(\bar{B} \mid A)\, P(A)]$

$= 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}4) + [0{,}4 - 0{,}25 \cdot 0{,}4] = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = P(A) + P(B \mid \bar{A}) \cdot (1 - P(A))$

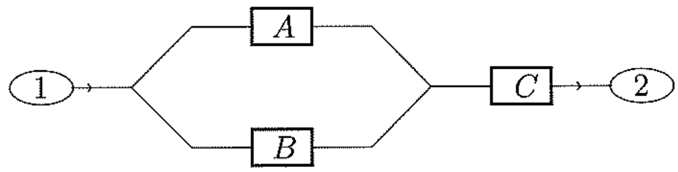
$= 0{,}4 + 0{,}5(1 - 0{,}4) = 0{,}7$

QUESTION N° 1 (suite)

3

QUESTION Nº 2 (3 points)

On considère un système (voir schéma ci-dessous) constitué de trois composants A, B et C. Le système fonctionne s'il y a au moins un chemin, liant les points 1 et 2, constitué de composants qui fonctionnent. Les trois composants opèrent indépendamment les uns des autres et chacun a une fiabilité de 0,95.



Sachant que le système fonctionne, quelle est alors la probabilité que le composant B fonctionne ?

RÉPONSE

F : Le système fonctionne
A : Le composant A fonctionne
B : " " B " "
C : " " C " "

$P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}95$

a) $P(F) = P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

par indépendance on peut multiplier les probabilités ←

$= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$= 0{,}95 \cdot 0{,}95 + 0{,}95 \cdot 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 \simeq 0{,}947625$

b) $P(B|F) = \dfrac{P(F|B) \cdot P(B)}{P(F)} = \dfrac{P(C) \cdot P(B)}{P(F)} = \dfrac{0{,}95 \cdot 0{,}95}{0{,}947625} \simeq 0{,}95238$

$P(F|B) = P(C)$, car si B fonctionne, il suffit que C fonctionne pour que le système en entier fonctionne

QUESTION Nº 2 (suite)

QUESTION N° 2 (suite)

QUESTION N° 3 (4 points)

On suppose que chaque nouvelle que vous recevez provient (origine) d'une seule des trois sources suivantes : F, T, C. Les sources F et T sont des réseaux sociaux tandis que la source C est constituée des médias conventionnels (télé, radio, etc.).

On suppose que 50% des nouvelles que vous recevez proviennent de F, 30% proviennent de T et le reste provient de C. De plus, une étude montre que 60% des nouvelles de F sont fausses, cette proportion est de 40% pour les nouvelles de T et de 10% pour celles de C.

4/4

Vous venez de recevoir une nouvelle.

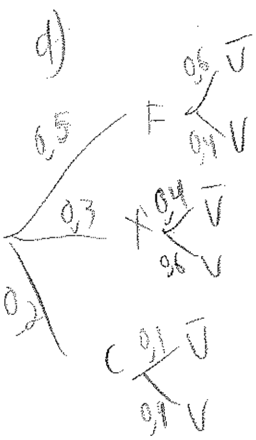
a) (2 points) Quelle est la probabilité que la nouvelle soit fausse ?

b) (2 points) Si la nouvelle est fausse, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne d'au moins une des sources des réseaux sociaux ?

RÉPONSE

F : la nouvelle provient de F
T : " " T
C : " " C
V : La nouvelle est vrai

a)



2

$$P(\bar{V}) = P(F\cap\bar{V}) + P(T\cap\bar{V}) + P(C\cap\bar{V})$$
$$= P(\bar{V}|F)\cdot P(F) + P(\bar{V}|T)\cdot P(T) + P(\bar{V}|C)\cdot P(C)$$
$$= 0,6\cdot 0,5 + 0,4\cdot 0,3 + 0,1\cdot 0,2 = 0,44$$

car disjoints (les nouvelles proviennent d'une seule source)

b)
$$P(F\cup T|\bar{V}) = \frac{P[(F\cup T)\cap\bar{V}]}{P(\bar{V})} = \frac{P[(F\cap\bar{V})\cup(T\cap\bar{V})]}{P(\bar{V})} = \frac{P(F\cap\bar{V}) + P(T\cap\bar{V})}{P(\bar{V})}$$

2

$$= \frac{P(\bar{V}|F)\cdot P(F) + P(\bar{V}|T)\cdot P(T)}{P(\bar{V})} = \frac{0,6\cdot 0,5 + 0,4\cdot 0,3}{0,44} \simeq 0,9545$$

QUESTION N° 3 (suite)

QUESTION N° 3 (suite)

QUESTION N° 4 (4 points)

4/4

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \cancel{k}\,\tfrac{1}{2}(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) (1 point) Déterminer la valeur de la constante k.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = 1 - X^2$.

1.b) (1,5 point) Calculer la probabilité $P(Y > 3/4)$.

2.b) (1,5 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

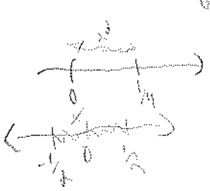
RÉPONSE

a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{1} k(1+x)\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx$

1

$= k\int_{-1}^{1}(1+x)\,dx = k\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = k\left[1+\frac{1^2}{2}-\left(-1+\frac{(-1)^2}{2}\right)\right] = k(2) = 2k$

$\Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$



b) 1.b) $P(Y > 3/4) = P(1-X^2 > 3/4) = P(1 > 3/4 + X^2) = P(1/4 > X^2)$

$= P\left(-\sqrt{\frac14} < X < \sqrt{\frac14}\right) = P\left(-\frac12 < X < \frac12\right)$

$= \int_{-1/2}^{1/2} f_X(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2}\frac12(1+x)\,dx = \frac12\int_{-1/2}^{1/2}(1+x)\,dx = \frac12\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{1/2}$

1,5

$= \frac12\left[\frac12+\frac{(1/2)^2}{2} - \left(-\frac12+\frac{(-1/2)^2}{2}\right)\right] = \frac12(1) = \frac12$

QUESTION N° 4 (suite)

$$E(Y) = E(1 - X^2) = 1 - E(X^2)$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} x^2 \cdot 0\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (1+x)\,dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{4}} - \left(-\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{4}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

1,5

$$E(Y) = 1 - E(X^2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

QUESTION N° 4 (suite)

QUESTION N° 5 (4 points)

Une boîte contient 3 jetons dont les valeurs sont différentes. Un jeton a la valeur 0, un jeton a la valeur 1, et un jeton a la valeur 2. On choisit au hasard et $\boxed{\text{sans remise}}$ deux jetons de la boîte.

Soit X la valeur du premier jeton obtenu, et Y la somme des valeurs des deux jetons obtenus.

a) (2 points) Déterminer, sous forme de tableau, la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$, en y incluant les valeurs possibles et les distributions marginales de X et de Y.

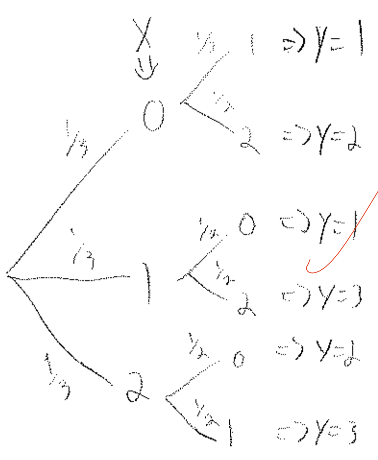
Laisser les probabilités sous forme fractionnaire (par exemple 1/4 au lieu de 0,25).

b) (2 points) Calculer l'écart-type de la variable $T = 20 + 2X - Y$.

RÉPONSE $R_X = \{0,1,2\}$ $R_Y = \{1,2,3\}$

a)

Y \ X	0	1	2	$p_Y(y)$
1	1/6	1/6	0	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	0	1/6	1/6	1/3
$p_X(x)$	1/3	1/3	1/3	1



2

$p_X(0) = 1/3$ $p_X(1) = 1/3$ $p_X(2) = 1/3$

$p_{XY}(0,1) = P(X=0, Y=1) = P(X=0 \cap Y=1)$
$= P(Y=1 \mid X=0) \cdot P(X=0)$
$= 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$

$p_{XY}(1,1) = P(X=1, Y=1) = P(Y=1 \mid X=1) \cdot P(X=1)$
$= 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$

$p_{XY}(2,1) = P(X=2, Y=1) = P(Y=1 \mid X=2) \cdot P(X=2)$
$= 0 \cdot 1/3 = 0$

$p_{XY}(0,2) = P(X=0, Y=2) = P(Y=2 \mid X=0) \cdot P(X=0)$
$= 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$

$p_{XY}(1,2) = P(X=1, Y=2) = P(Y=2 \mid X=1) \cdot P(X=1)$
$= 0 \cdot 1/3 = 0$

$p_{XY}(2,2) = P(X=2, Y=2) = P(Y=2 \mid X=2) \cdot P(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1/6$

$p_{XY}(0,3) = P(X=0, Y=3) = P(Y=3 \mid X=0) \cdot P(X=0) = 0 \cdot 1/3 = 0$

$p_{XY}(1,3) = P(X=1, Y=3) = P(Y=3 \mid X=1) \cdot P(X=1) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$

$p_{XY}(2,3) = P(X=2, Y=3) = P(Y=3 \mid X=2) \cdot P(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1/6$

QUESTION N° 5 (suite)

$p_Y(1) = p_{XY}(0,1) + p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{3}$

$p_Y(2) = p_{XY}(0,2) + p_{XY}(1,2) + p_{XY}(2,2) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$p_Y(3) = p_{XY}(0,3) + p_{XY}(1,3) + p_{XY}(2,3) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

b) $E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot p_X(x) = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y \cdot p_Y(y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$

$E(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 \cdot p_Y(y) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$

$E(XY) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} x \cdot y \cdot p_{XY}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{3}$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{7}{3} - 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$

$T = 20 + 2X - Y$

$Var(T) = Var(20 + 2X - Y) = 2^2 \cdot Var(X) + (-1)^2 Var(Y) + 2 \cdot 2 \cdot (-1) Cov(X,Y)$
$= 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = 2$

$\boxed{Std(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{2}}$

2

QUESTION N° 5 (suite)

QUESTION N° 5 (suite)

QUESTION N° 6 (3 points)

On suppose que les autobus de la ville passent à un certain arrêt, durant le jour, selon un processus de Poisson de moyenne 5 autobus par heure.

a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'il passe à cet arrêt au moins 3 autobus durant les 25 prochaines minutes ?

b) (2 points) Étant donné qu'un usager attend l'autobus à cet arrêt depuis 5 minutes, quelle est la probabilité qu'un autobus arrive dans moins de 10 minutes à compter de maintenant ?

RÉPONSE X: le nombre d'autobus qui passent à l'arrêt sur une période de 25 minutes

$X \sim Poi\left(c = 5 \cdot \frac{25}{60} = \frac{25}{12}\right)$

1

a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (p_X(0) + p_X(1) + p_X(2))$

$1 - \left(\frac{\frac{25}{12}^0 \cdot e^{-25/12}}{0!} + \frac{\frac{25}{12}^1 e^{-25/12}}{1!} + \frac{\frac{25}{12}^2 e^{-25/12}}{2!}\right) \simeq 1 - (0{,}1245 + 0{,}2594 + 0{,}2702) \simeq 0{,}34587$

b) Y: le temps avant l'arrivée du prochain autobus (en minutes)

$\text{moyenne} = \frac{60 \text{ min}}{5 \text{ autobus}} = 12 \text{ min/autobus}$

$Y \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{12}\right)$

$\to$ par la propriété de non-vieillissement de la loi exponentielle

$P(Y < 10+5 \mid Y > 5) = P(Y < 10)$

$= 1 - e^{-\frac{1}{12} \cdot 10} \simeq 0{,}5654$

2

QUESTION N° 6 (suite)

Page supplémentaire