QUESTION N° 1 (2 points)

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que

$$P(B) = 0{,}60; \quad P\left(A \mid \overline{B}\right) = 0{,}75.$$

a) (1 point) Calculer la probabilité $P(A \cap \overline{B})$.

b) (1 point) Calculer la probabilité $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

RÉPONSE

a) $P(A \cap \overline{B})$

① $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})$

② $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

② → ① $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}75 \cdot 0{,}4$

$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3}$

1

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$P(B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(B) - P(A \cap \overline{B})$

$= 1 - 0{,}6 - 0{,}3$

$\boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}1}$

1

QUESTION N° 1 (suite)

QUESTION N° 2 (3 points)

0,3694

Trois machines M_1, M_2 et M_3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Le pourcentage de pièces défectueuses produites par ces machines sont respectivement de 2%, 4% et 5%. On prend au hasard une pièce fabriquée dans cette usine.

0

a) (1 point) Quelle est la probabilité que cette pièce ne soit pas défectueuse ?

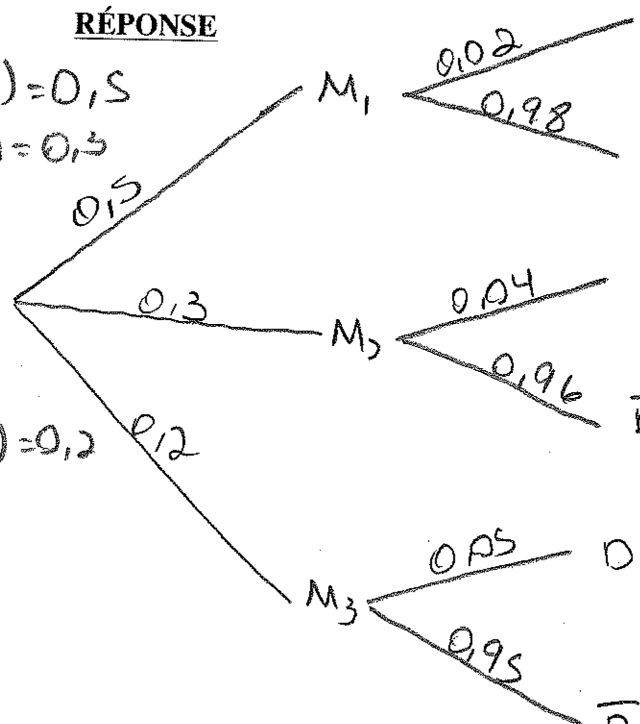
b) (2 points) Si on constate que la pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ne provienne pas de la machine M_2 ?

Non!!

Soit D = defectueuse

RÉPONSE

$P(M_1) = 0{,}5$
$P(M_2) = 0{,}3$
$P(M_3) = 0{,}2$



$P(D|M_1) = 0{,}02 \cdot 0{,}5 = 0{,}01$

$\overline{D}$ $P(\overline{D}|M_1) = 0{,}98 \cdot 0{,}5 = \underline{0{,}49}$

D $P(D|M_2) = 0{,}04 \cdot 0{,}3 = 0{,}012$

$\overline{D}$ $P(\overline{D}|M_2) = 0{,}96 \cdot 0{,}3 = \underline{0{,}288}$

D $P(D|M_3) = 0{,}05 \cdot 0{,}2 = 0{,}01$

$\overline{D}$ $P(\overline{D}|M_3) = \underbrace{0{,}95 \cdot 0{,}2}_{P(\overline{D} \cap M_3)} = \underline{0{,}19}$

a) proba pas défectueuse

1- Machine M_1

$$P(M_1|\overline{D}) = \frac{P(M_1)\cdot P(\overline{D}|M_1)}{\sum P(M_i) P(\overline{D}|M_i)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}49}{(0{,}5 \cdot 0{,}49) + (0{,}3 \cdot 0{,}288) + (0{,}2 \cdot 0{,}19)}$$

$$= \frac{0{,}245}{0{,}245 + 0{,}0864 + 0{,}038}$$

$$\boxed{P(M_1|\overline{D}) = 0{,}663}$$

$\frac{1225}{1847}$

QUESTION N° 2 (suite)

2- Pour Machine M2

$$P(M_2|\bar{D}) = \frac{P(M_2)\,P(\bar{D}|M_2)}{\sum P(M_i)\,P(\bar{D}|M_i)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}288}{0{,}5\cdot 0{,}49 + 0{,}3\cdot 0{,}288 \cdot 0{,}2\cdot 0{,}119}$$

$$= \frac{0{,}0864}{0{,}245 + 0{,}0864 + 0{,}038}$$

$$\boxed{P(M_2|\bar{D}) = 0{,}234}$$

$$\frac{432}{1847}$$

3- Pour Machine M3

$$P(M_3|\bar{D}) = \frac{P(M_3)\,P(\bar{D}|M_3)}{\sum P(M_i)\,P(\bar{D}|M_i)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}119}{0{,}5\cdot 0{,}49 + 0{,}3\cdot 0{,}288 + 0{,}2\cdot 0{,}119}$$

$$= \frac{0{,}038}{0{,}245 + 0{,}0864 + 0{,}038}$$

$$\boxed{P(M_3|\bar{D}) = 0{,}103}$$

$$\frac{190}{1847}$$

4- proba pièce ne sort pas défectueuse

$$P(\bar{D}) = P(M_1|\bar{D}) + P(M_2|\bar{D}) + P(M_3|\bar{D})$$
$$= 0{,}663 + 0{,}234 + 0{,}103$$
$$= 1 \quad ??$$

X

?!

b) proba pas M2

$$\frac{2}{3}\cdot P(D) = \frac{2}{3}\cdot(1 - P(\bar{D}))$$

QUESTION N° 2 (suite)

QUESTION N° 3 (5 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,(1+x) & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) (2 points) Déterminer la valeur de la constante k et la fonction de répartition de X, $F_X(x)$.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = 1 - X^2$.

1.b) (2 points) Calculer la probabilité $P(Y \geq 3/4)$.

2.b) (1 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

a) trouver K et $F_X(x)$

1- trouver K

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{-1} \cancel{0}\,dx + \int_{-1}^{1} k(1+x)\,dx + \int_{1}^{\infty} \cancel{0}\,dx$$

$$1 = k\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$1 = k\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$$

$$1 = k\left[\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$1 = 2k$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = k}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

QUESTION N° 3 (suite)

2- trouver $F_X(x)$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

pour $x < -1$

$F_x(x<0) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

pour $-1 < x < 1$

$F_x(-1<x<1) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}(1+t)\,dt$

$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{x}$

$= \frac{1}{2}\left[\left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$

2

pour $x \geq 1$

$F_x(x \geq 1) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1+x)\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{1^2}{2}\right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right] = 1$

QUESTION N° 3 (suite)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $Y = 1 - X^2$

1.b) $P(Y \geq \frac{3}{4})$

$$P(Y \geq \tfrac{3}{4}) = P(1 - X^2 \geq \tfrac{3}{4}) = P(-X^2 \geq -1/4) = P(X^2 \leq 1/4)$$

$$= P(-\tfrac{1}{4} \leq X \leq \tfrac{1}{4}) = F(1/4) - F(-1/4)$$

$$= \left[\left(\frac{(1/4)}{2} + \frac{(1/4)^2}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{(-1/4)}{2} + \frac{(-1/4)^2}{4} + \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \left[\left(1/8 + \cancel{\tfrac{1}{64}} + \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) - \left(-\tfrac{1}{8} + \cancel{\tfrac{1}{64}} + \cancel{\tfrac{1}{4}}\right)\right]$$

$$\boxed{P(Y \geq 3/4) = \frac{1}{4}}$$

1

2.b) $E(Y) = 1 - E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1+x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 + x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{4}}\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \cancel{\frac{(-1)^4}{4}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

1

QUESTION N° 4 (4 points)

La fonction de masse conjointe $p(x, y)$ d'un couple de variables aléatoires $[X,\ Y]$ est partiellement donnée dans le tableau suivant :

y \ x	-1	0	1	$p_Y(y)$
0	0,10	v_1	0,05	0,25
1	0,20	v_2	0,15 v_3	0,75
$p_X(x)$	0,3	0,5	0,2	1

On sait que $P(Y = 1) = 3P(Y = 0)$, c'est-à-dire $p_Y(1)$ égale trois fois $p_Y(0)$.
De plus, la fonction de répartition de la variable X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 0{,}30 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0{,}80 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

a) (2 points) Compte tenu des données ci-dessus, trouver les valeurs manquantes v_1, v_2 et v_3 du tableau.

b) (2 points) Calculer la variance de la variable $W = 10 - 2X + Y$.

RÉPONSE

a)
① $P_X(-1) = 0{,}3$ ② $P_X(0) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$ ③ $P_X(1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

④ $V_3 = P_X(1) - p(1,0) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$

⑤ $P_Y(1) = 3P_Y(0)$
$= 3(0{,}1 + V_1 + 0{,}05)$
$= 3(0{,}15 + V_1)$
$= 0{,}45 + 3V_1$

⑥ $P_Y(0) = 0{,}1 + V_1 + 0{,}05$
$= 0{,}15 + V_1$

suite →

QUESTION N° 4 (suite)

(6) $p_Y(y) = p_Y(0) + p_Y(1)$

$1 = (0{,}15 + v_1) + (0{,}45 + 3v_1)$

$1 = \frac{3}{5} + 4v_1$

$\boxed{\frac{1}{10} = v_1}$

2

(7) $p_Y(0) = 0{,}1 + (1/10) + 0{,}05 = 0{,}25$

(8) $p_Y(1) = 0{,}45 + 3(1/10) = 0{,}75$

(9) $p_Y(1) = 0{,}2 + v_2 + 0{,}15$

$0{,}75 = 0{,}35 + v_2$

$\boxed{0{,}4 = v_2}$

(10) tableau fonction de masse conjointe $p(x,y)$ finale

y \ x	-1	0	1	$p_Y(y)$
0	0,1	$\frac{1}{10}$	0,05	0,25
1	0,2	0,4	0,15	0,75
$p_X(x)$	0,3	0,5	0,2	1

b) variance de $W = 10 - 2X + Y$

1 - X et Y indep?

$p(-1,0) \stackrel{?}{=} p_X(-1) \cdot p_Y(0)$

$0{,}1 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}25$

$\Rightarrow$ X et Y dependants, donc doit calculer $cov(X,Y)$ pour $V(W)$

QUESTION N° 4 (suite)

2- $V(W) = (-2)^2 V(X) + 1^2 V(Y) - 2\sum\sum a_i a_j \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$

2.1 $V(X) = \sum x_i^2 p(x_i) = (-1)^2 \cdot 0{,}3 + 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}2$

$\boxed{V(X) = \cancel{0{,}5}}$ $= E(X^2)$

2.2 $V(Y) = \sum y_i^2 p(y_i) = 0^2 \cdot 0{,}25 + 1^2 \cdot 0{,}75$

$\boxed{V(Y) = \cancel{0{,}75}}$ $= E(Y^2)$

2.3 $\operatorname{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$E(XY) = \sum\sum x_i y_i p(x_i, y_i)$

$= (\cancel{-1 \cdot 0 \cdot 0{,}1}) + (-1 \cdot 1 \cdot 0{,}2) + (\cancel{0 \cdot \tfrac{1}{10}}) + (\cancel{0 \cdot 0{,}4})$

$+ (\cancel{1 \cdot 0 \cdot 0{,}05}) + (1 \cdot 1 \cdot 0{,}15)$

$= -1 \cdot 1 \cdot 0{,}2 + (1 \cdot 1 \cdot 0{,}15)$

$= -0{,}05$

1

$E(X) = \sum x_i p(x_i) = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 = -0{,}1$

$E(Y) = \sum y_i p(y_i) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}75 = 0{,}75$

$\operatorname{Cov}(X,Y) = -0{,}05 - (-0{,}1)(0{,}75) = 0{,}025$

2.4 $V(W) = ((-2)^2 \cdot \cancel{0{,}5}) + (1^2 \cdot \cancel{0{,}75}) - 2(-2)(1)(0{,}025)$

$= \cancel{2} + \cancel{0{,}75} - (-0{,}1)$

$\boxed{V(W) = \cancel{2{,}85}}$

QUESTION N° 5 (3 points)

Considérons un examen constitué de plusieurs questions indépendantes et dont les réponses sont à choix multiples. Pour chaque question on propose un choix de 4 réponses, dont une seule est bonne. Considérons un étudiant qui répond à toutes les questions de l'examen mais en choisissant chaque fois une réponse au hasard.

1,75/3

a) **(1 point)** Si l'étudiant n'a aucune bonne réponse dans les deux premières questions, quelle est la probabilité qu'il ait une première bonne réponse seulement après la cinquième question ?

b) **(2 points)** Supposons maintenant que l'examen contient 10 questions, que chaque bonne réponse donne 2 points, et qu'on soustrait 0,5 point pour chaque mauvaise réponse.
Déterminer la moyenne et l'écart type de la note que l'étudiant obtiendra à cet examen

---

RÉPONSE

a) probabilité succès $= p = \frac{1}{4}$

Soit X : nb de question afin d'avoir la première bonne réponse

$X \sim G(p) \Rightarrow X \sim G(1/4)$ 0,25

$\cancel{p(X>5) = 1 - p(X \le 4) = 1 - [1 - (1 - \frac{1}{4})^4]}$ (après 5 => sup à 5)

$\boxed{\cancel{p(X>5) = 0,316}}$

b) $n = 10$

Soit Y : le nb de questions bien répondues $\sim B(10; 1/4)$

Soit Z : le nb de points

Soit W : le nb de questions mal répondues $\sim B(10; 3/4)$

$Z = 2Y - 0,5W$

1- $E(Z) = 2E(Y) - 0,5E(W)$

QUESTION N° 5 (suite)

1.1 $E(Y) = np = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$

1.2 $E(W) = np = 10 \cdot \frac{3}{4} = 7{,}5$

1,5 / 2

1.3 $E(Z) = 2 \cdot 2{,}5 - 0{,}5 \cdot 7{,}5 = 1{,}25$

2- $\sigma = \sqrt{V(Z)}$

$V(Z) = 2^2 V(Y) - 0{,}5^2 V(W)$

2.1 $V(Y) = np(1-p) = 10 \cdot \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4}) = 1{,}875$

2.2 $V(W) = np(1-p) = 10 \cdot \frac{3}{4}(1 - \frac{3}{4}) = 1{,}875$

2.3 $V(Z) = 2^2 \cdot 1{,}875 - 0{,}5^2 \cdot 1{,}875 = 7{,}03$

2.4 $\sigma = \sqrt{V(Z)} = 2{,}65$

Y et W dépendants

$W = 10 - Y$

$\Downarrow$

$Z = \frac{5}{2}Y - 5$

QUESTION Nº 6 (3 points)

On suppose que la durée de vie d'un certain type de composant est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de moyenne 5 ans.

a) **(1 point)** Sachant qu'un composant de ce type fonctionne depuis 3 ans, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore pendant au moins 2 autres années ?

b) **(2 points)** Quatre composants sont mis en fonction et opèrent indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que deux ans plus tard, au moins deux des quatre composants ne fonctionnent plus ?

3/3

RÉPONSE

Soit X : durée de vie composant $X \sim Exp(\lambda)$

$E(X) = 5 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$ $X \sim Exp(1/5)$

a) $p(X \geq 3+2 \mid X>3) = p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 2)$

$= e^{-\frac{1}{5} \cdot 2}$

$\boxed{p(X \geq 2) = 0{,}67}$

1

b) $n = 4$

2 ans plus tard $\rightarrow$ $p(X \leq 2) = 1 - e^{-1/5 \cdot 2} = 0{,}330$

Soit Y : nb de composantes qui ne fonctionnent plus après 2 ans

$Y \sim B(4 ; 0{,}330)$

$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - p(X=0) - p(X=1)$

$= 1 - \binom{4}{0} 0{,}330^0 (1-0{,}330)^4 - \binom{4}{1} 0{,}330^1 (1-0{,}330)^3$

$p(X \geq 2) = 1 - 0{,}202 - 0{,}397 = \boxed{0{,}401}$

2

QUESTION N° 6 (suite)

QUESTION N° 6 (suite)

Page supplémentaire