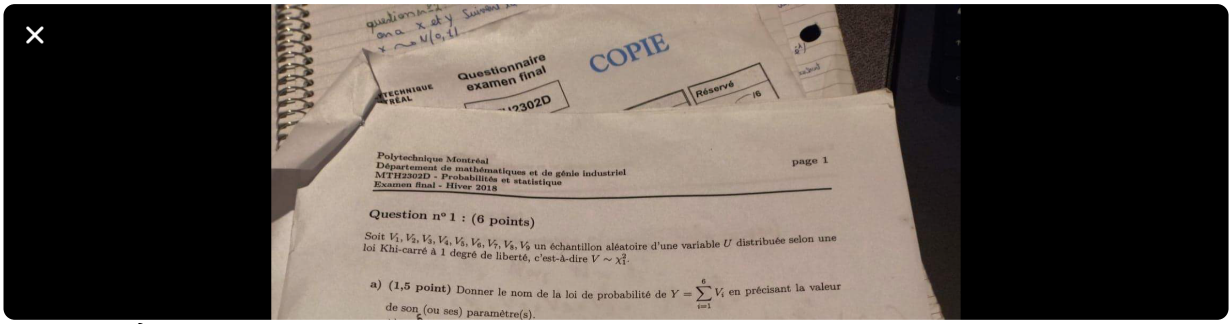


Questionnaire examen final

COPIE

Réservé

Polytechnique Montréal
Département de mathématiques et de génie industriel
MTH2302D - Probabilités et statistique
Examen final - Hiver 2018

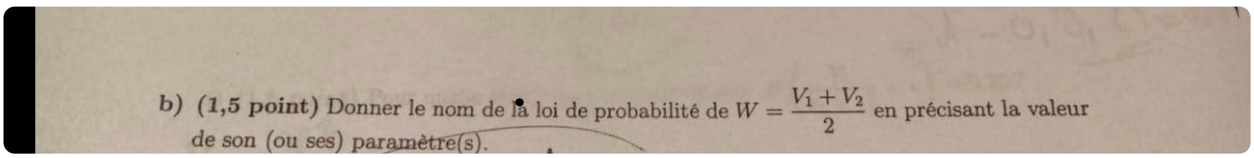
page 1

Question nº 1 : (6 points)

Soit $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9$ un échantillon aléatoire d'une variable U distribuée selon une loi Khi-carré à 1 degré de liberté, c'est-à-dire $V \sim \chi^2_1$.

a) (1,5 point) Donner le nom de la loi de probabilité de $Y = \sum_{i=1}^{6} V_i$ en précisant la valeur de son (ou ses) paramètre(s).

$Y = \sum_{i=1}^{6} V_i$ où $V_i \sim \chi^2_1 \rightarrow Y \sim \chi^2_6$



b) (1,5 point) Donner le nom de la loi de probabilité de $W = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$ en précisant la valeur de son (ou ses) paramètre(s).

$V_1 + V_2 = \chi^2_2$

$\dfrac{V_1 + V_2}{2} = \dfrac{\chi^2_2}{2} \rightarrow$ Une khi-2 divisée par son degré de liberté

χ^2_2

Polytechnique Montréal
Département de mathématiques et de génie industriel
MTH2302D - Probabilités et statistique
Examen final - Hiver 2018

Question n° 1 : (suite)

c) (1,5 point) Calculer la probabilité $P\left(\dfrac{V_1+V_2+V_3}{V_4+V_5+V_6+V_7+V_8+V_9} \leq 3{,}3\right)$.

$U_1+U_2+U_3 \sim \chi^2_3$

$V_4+U_5+U_6+V_7+U_8+U_9 = \chi^2_6$

$$P\left(\frac{\chi^2_3}{\chi^2_6} \leq 3{,}3\right)$$

$$= P\left(\frac{\frac{\chi^3_3}{3}}{\frac{\chi^2_6}{6}} \leq \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}\right) \cdot 3{,}3\right)$$

$$= P\left(F_{3,6} \leq 6{,}6\right)$$

$$= 1 - P\left(F_{3,6} > 6{,}6\right)$$

$$= 1 - 0{,}025$$

$$= 0{,}975$$

d) (1,5 point) Pour quelle valeur de c trouve-t-on que $P\left(\frac{V_1}{V_1+V_2} < c\right) = 0,25$?

$$\frac{V_1}{V_1+V_2} = \frac{\chi^2_1}{\chi^2_2} \qquad F = \frac{\frac{\chi^2_1}{1}}{\frac{\chi^2_2}{2}} \qquad F \sim F_{1,2}$$

$$P\left(F < \left(\frac{1}{1} \div \frac{1}{2}\right) c\right) = 0,25$$

$$P(F_{1,2} < 2c) = 0,25$$

$$0,75 = P(F_{1,2} \geq 2c)$$

$$F_{0,75,1,2} = \frac{1}{F_{0,25,2,1}} =$$

$$0,25 = P\left(F_{2,1} \geq \frac{1}{2c}\right)$$

$$7,5 = \frac{1}{2c}$$

$$15c = 1$$

$$c = \frac{1}{15}$$

Question nº 2 : (8 points)

On s'intéresse au temps X (en minutes) nécessaire pour effectuer une certaine tâche sur une chaîne de production. Le tableau suivant présente la distribution des fréquences d'un échantillon de taille $n = 120$ de la variable X.

	Classes des valeurs de X			
	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)
Nombre d'observations	32	37	23	28

→ temps

→ 120

a) (2 points) Calculer approximativement la moyenne et la médiane de cet échantillon en utilisant le point milieu des classes.

$$\text{moy} = \frac{(32 \cdot 0{,}5) + (37 \cdot 1{,}5) + (23 \cdot 2{,}5) + (28 \cdot 3{,}5)}{120} = \underline{1{,}89}$$

médiane : n est pair : les 2 valeurs du milieu

On prend $\frac{120}{2}$ et $\frac{120}{2}+1$

Valeur 60 et 61 qui sont dans la classe [1, 2) donc la médiane est de 1,5!

b) (2 points) Soit p le paramètre désignant la probabilité d'effectuer la tâche en moins de 2 minutes. Donner une estimation ponctuelle et un intervalle de confiance de niveau 95% pour p.

$$\hat{p} = \frac{32+37}{120} = 0{,}575$$

$$IC = \hat{p} \pm Z_{0{,}025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{120}}$$

$$= 0{,}575 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}045127$$

$$= 0{,}575 \pm 0{,}08845$$

$$[\,0{,}48655 \,;\, 0{,}66345\,]$$

Question nº 2 : (suite)

On veut tester l'hypothèse selon laquelle la variable X est distribuée selon une loi uniforme dans l'intervalle $[0,\ 4]$, en utilisant le test d'ajustement du Khi-deux.

c) (1 point) Formuler les hypothèses H_0 et H_1 du test à effectuer.

H_0 : la loi uniforme est un bon modèle pour X

H_1 : la loi uniforme n'est pas un bon modèle pour X

d) (3 points) Effectuer le test et conclure au seuil $\alpha = 5\%$.

$E_1 = 0{,}25$	$E_2 = 0{,}25$	$E_3 = 0{,}25$	$E_4 = 0{,}25$
$O_1 = 0{,}27$	$O_2 = 0{,}308$	$O_3 = 0{,}192$	$O_4 = 0{,}23$

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right)$$

$$= \frac{1}{625} + 0{,}013456 + 0{,}013456 + \frac{1}{625} = \boxed{0{,}03012}$$

$k = 4$
$p = 2$

On rejette H_0 si $\chi_0^2 > \chi^2_{k-p-1}$

$\chi_0^2 > \chi_1^2$? à 95%

$0{,}030112 > 3{,}84$

Faux

On ne peut pas rejeter H_0
On ne peut donc pas nier la possibilité que la loi uniforme soit un bon modèle pour X

Question n° 3 : (6 points)

Le tableau suivant présente la répartition du nombre de pannes, observées pour 180 composants d'une production, selon le modèle (X) du composant et le type de panne (Y). Trois modèles de composant (M_1, M_2, M_3) et trois types de panne (T_1, T_2, T_3) sont considérés.

Type (Y)	Modèle (X) M_1	M_2	M_3	
T_1	32	18	10	60
T_2	12	28	20	60
T_3	16	14	30	60
	60	60	60	

On désire effectuer un test d'hypothèses afin de déterminer si le type de panne dépend du modèle du composant.

a) **(1 point)** Écrire l'hypothèse nulle H_0 ainsi que la contre-hypothèse H_1 du test.

a) H_0 : X et Y sont indépendantes H_1 : X et Y ne sont pas indépendantes

b) **(4 points)** Compléter le tableau ci-dessous des effectifs théoriques lorsque H_0 est vraie. Effectuer le test et conclure au seuil $\alpha = 5\%$.

Type (Y)	Modèle (X) M_1	M_2	M_3
T_1	20	20	20
T_2	20	20	20
T_3	20	20	20

$P(T=T_1) = 1/3 \qquad P(M=M_1) = 1/3$

$P(T=T_2) = 1/3 \qquad P(M=M_2) = 1/3$

$P(T=T_3) = 1/3 \qquad P(M=M_3) = 1/3$

$\hat{E}_{11} = n\, P(T=T_1)\, P(M=M_1) = 20$ chill

$$u_0 = \sum \left(\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right)$$

$$= \left(\frac{(32-20)^2}{20}\right) + \left(\frac{(18-20)^2}{20}\right) + \left(\frac{(10-20)^2}{20}\right) + \left(\frac{(12-20)^2}{20}\right)$$

$$+ \left(\frac{(28-20)^2}{20}\right) + \left(\frac{(16-20)^2}{20}\right) + \left(\frac{(14-20)^2}{20}\right) + \left(\frac{(10^2)}{20}\right)$$

$$= 26{,}4$$

$(r-1)(c-1) = 2 \cdot 2 = 4$

On rejette H_0 si $u_0 > \chi^2_{0{,}05;4}$?

$u_0 > 9{,}49$ OUI !

donc les 2 v.a. ne sont pas indépendantes !

Question n° 4 : (12 points)

Lors d'une étude sur la résistance (en MPa) de deux types de béton A et B, deux échantillons de spécimens de béton indépendants (un par type de béton) furent prélevés. Les mesures de résistance obtenues ainsi que quelques statistiques sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Type	Mesures de résistance							Taille (n)	Moyenne ($\overline{x}$)	Écart type (s)
A	44	41	39	45	46			5	43,00	2,92
B	42	41	36	42	37	39	42	7	39,86	2,54

On suppose que les deux échantillons sont indépendants et que les résistances des bétons de types A et B suivent respectivement des lois normales $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ et $N(\mu_B, \sigma_B^2)$.

Important : *formuler les hypothèses H_0 et H_1 pour chaque test.*

a) (2 points) Calculer un intervalle de confiance pour la variance de la résistance du béton de type A au niveau de confiance 95%.

$$\left[\frac{(n_A-1)S_A^2}{\chi^2_{0,025;n_A-1}} ; \frac{(n_A-1)S_A^2}{\chi^2_{0,975;n_A-1}}\right]$$

$$\left[\frac{34,1056}{11,14} ; \frac{34,1056}{0,48}\right]$$

$$\left[3,062 ; 71,05\right]$$

b) **(2 points)** On compte effectuer une sixième mesure avec un nouveau spécimen du béton de type A. Calculer un intervalle de prévision pour cette mesure à un niveau de confiance 95 %, interpréter brièvement le résultat.

IP =