POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

1

CAHIER D'EXAMEN

Matricule

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - HIVER 2023

Nom : ______________________
(lettres moulées)

Prénom : ______________________
(lettres moulées)

No du cours : **MTH2302D** Section : ______

Titre du cours : **PROBABILITÉS ET STATISTIQUE**

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-haut et signez immédiatement le cahier.
2. Donnez une réponse complète à chaque question et cette réponse doit être **expliquée et justifiée**. La note **0** sera attribuée à toute réponse non justifiée.
3. N'utilisez que le **recto** pour rédiger vos réponses; servez-vous du verso comme brouillon. Inscrivez votre **matricule** sur chaque page.
4. Écrivez aussi lisiblement que possible, de manière à ce que le correcteur comprenne vos réponses.
5. Ne détachez aucune feuille de ce cahier. Rédigez vos solutions sur les pages identifiées à cet effet. Vérifiez que le cahier compte bien **18 pages**.
6. **Documentation : 1 feuille résumée manuscrite 8,5x11 recto-verso.**
7. **Calculatrice non-programmable permise. Les appareils électroniques personnels (téléphones, tablettes, ordinateurs, etc.) sont interdits.**
8. ***Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question (données manquantes, données erronées, et.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.***

Réservé		
1.	2	/2
2.	3	/3
3.	4	/4
4.	4	/4
5.	4	/4
6.	3	/3
TOTAL	20	/20

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Signature de l'étudiant(e)

Date : samedi, le 18 février 2023

Heure : 10h00 à 12h00

QUESTION Nº 1 (2 points)

2

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que

$$P(A) = 0{,}40; \quad P(\overline{B} \mid A) = 0{,}25; \quad P(B \mid \overline{A}) = 0{,}50.$$

a) (1 point) Calculer la probabilité $P(B)$.

b) (1 point) Calculer la probabilité $P(A \cup B)$.

RÉPONSE

$p(A)=0.4 \quad p(\bar{B}|A) = \dfrac{p(\bar{B}\cap A)}{p(A)} = 0.25$

Donc $p(\bar{B}|A)\cdot p(A) = p(\bar{B}\cap A)$

$0.25 \cdot 0.4 = 0.1 = p(\bar{B}\cap A)$

$p(B|\bar{A}) = \dfrac{p(\bar{A}\cap B)}{p(\bar{A})} = 0.5$

$p(\bar{A}) = 1-p(A) = 1-0.4 = 0.6$

Donc $p(B|\bar{A})\cdot p(\bar{A}) = p(\bar{A}\cap B) = 0.5\cdot 0.6 = 0.3$

$p(\bar{B}\cap A) = p(A) - p(A\cap B)$

$p(\bar{B}\cap A) - p(A) = -p(A\cap B)$

$p(A) - p(\bar{B}\cap A) = p(A\cap B)$

$p(A\cap B) = 0.3$

$p(\bar{A}\cap B) = p(B) - p(B\cap A)$

$p(\bar{A}\cap B) + p(B\cap A) = p(B)$

$0.3 + 0.3 = 0.6 = p(B)$

$p(B) = 0.6$

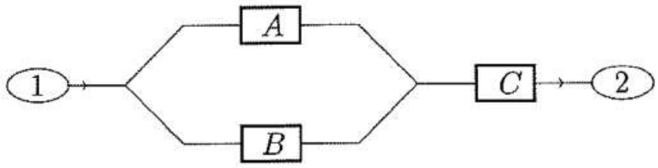
$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$= 0.4 + 0.6 - 0.3 = 0.7$

QUESTION N° 2 (3 points)

3

On considère un système (voir schéma ci-dessous) constitué de trois composants A, B et C. Le système fonctionne s'il y a au moins un chemin, liant les points 1 et 2, constitué de composants qui fonctionnent. Les trois composants opèrent indépendamment les uns des autres et chacun a une fiabilité de 0,95.



Sachant que le système fonctionne, quelle est alors la probabilité que le composant B fonctionne ?

RÉPONSE

Soit $\overline{E}$ qui represente la defaillance d'un composant où $E = \{A, B, C\}$

$p(\overline{A}) = p(\overline{B}) = p(\overline{C}) = 0.05$ (probabilité de defaillance) (obtenu avec $1-0.95$)

La probabilité que A et B brisent en même temps est $p(\overline{A} \cap \overline{B})$

puisque ils sont indépendants alors $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A})\, p(\overline{B})$

Donc $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.0025$

La probabilité que A et B brisent <u>OU</u> C brise est $P((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup C)$

Donc $p(\overline{A} \cap \overline{B}) + p(\overline{C}) - p(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 0.0025 + 0.05 - (0.0025 \cdot 0.05)$ → car indépendants

Donc la probabilité que le systeme brise est : 0.052375

La probabilité qu'il fonctionne est 0.947625 ($P(F) = 0.947625$)

QUESTION Nº 2 (suite)

On cherche $p(B|F) = \dfrac{P(F|B)\cdot P(B)}{P(F)}$

Quel est $p(F|B)$, c'est-à-dire la probabilité que le système marche sachant que B marche? Si B marche alors on peut assumer que fiabilité de B $= 100\%$ donc l'enlever du schéma. Alors A aussi car parallèle, on peut l'enlever. $\Rightarrow 1 \to \boxed{C} \to 2$ Donc par conséquent.

$p(F|B) = 0.95$ et $p(B|F) = \dfrac{0.95 \;\; 0.95}{0.947625} = 0.9524$

QUESTION Nº 3 (4 points)

On suppose que chaque nouvelle que vous recevez provient (origine) d'une seule des trois sources suivantes : F, T, C. Les sources F et T sont des réseaux sociaux tandis que la source C est constituée des médias conventionnels (télé, radio, etc.).

On suppose que 50% des nouvelles que vous recevez proviennent de F, 30% proviennent de T et le reste provient de C. De plus, une étude montre que 60% des nouvelles de F sont fausses, cette proportion est de 40% pour les nouvelles de T et de 10% pour celles de C.

Vous venez de recevoir une nouvelle.

4/4

a) **(2 points)** Quelle est la probabilité que la nouvelle soit fausse ?

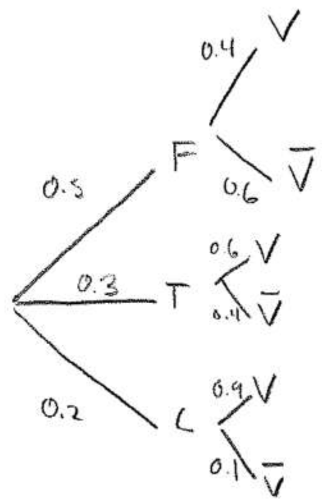
b) **(2 points)** Si la nouvelle est fausse, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne d'au moins une des sources des réseaux sociaux ?

$(F\cup T\cup C)\cap\bar{V}$

$F\bar{V}$

RÉPONSE

V : Vrai $\bar{V}$: Fausse ?



$P(F)=0.5$
$P(T)=0.3$
$P(C)=1-P(F)-P(T)=0.2$

$P(V|F)=1-P(\bar{V}|F)=0.4$

$P(V|T)=1-P(\bar{V}|T)=0.6$

$P(V|C)=1-P(\bar{V}|C)=0.9$

$$P(\bar{V})=P(F)\cdot P(\bar{V}|F)+P(T)P(\bar{V}|T)+P(C)P(\bar{V}|C)$$

$$=0.5\cdot 0.6+0.3\cdot 0.4+0.2\cdot 0.1$$

$$\boxed{=0.44}$$

b) $$P(F\cup T|\bar{V})=\frac{P((F\cup T)\cap\bar{V})}{P(\bar{V})}$$

$$=\frac{P((F\cap\bar{V})\cup(T\cap\bar{V}))}{P(\bar{V})}$$ → Disjoints

$$\frac{P(F\cap\bar{V})+P(T\cap\bar{V})}{P(\bar{V})}=\frac{P(F)\cdot P(\bar{V}|F)+P(T)P(\bar{V}|T)}{P(\bar{V})}$$

$$=\frac{0.5\cdot 0.6+0.3\cdot 0.4}{0.44}=0.955$$

QUESTION Nº 4 (4 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) (1 point) Déterminer la valeur de la constante k.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = 1 - X^2$.

1.b) (1,5 point) Calculer la probabilité $P(Y > 3/4)$.

2.b) (1,5 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

4/4

a) Par que $f_X(x)$ soit une fonction de densité il faut que

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ Donc on cherche $k\int_{-1}^{1}(1+x)dx = k\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = k\left(1+\frac{1}{2}-\left(-1+\frac{1}{2}\right)\right)$

$= k(1+0.5+1-0.5) = 2k$ Donc il faut que $2k=1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

1

b) $P(Y>0.75) = P(1-X^2>0.75) = P(-X^2>-0.25) = P(X^2<0.25)$

$= P(|X|<0.5) = P(-0.5<X<0.5)$. Donc on cherche $\frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5}(1+x)dx$

1.5

$\frac{1}{2}\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-0.5}^{0.5} = \frac{1}{2}\left(0.5+\frac{0.5^2}{2}-\left(-0.5+\frac{0.5^2}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(0.5+\frac{0.5^2}{2}+0.5-\frac{0.5^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$

QUESTION N° 4 (suite)

Puisque $Y = 1 - X^2$

Alors $E(Y) = 1 - E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]$$

1.5

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Donc $E(Y) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

QUESTION Nº 5 (4 points)

Une boîte contient 3 jetons dont les valeurs sont différentes. Un jeton a la valeur 0, un jeton a la valeur 1, et un jeton a la valeur 2. On choisit au hasard et sans remise deux jetons de la boîte.

Soit X la valeur du premier jeton obtenu, et Y la somme des valeurs des deux jetons obtenus.

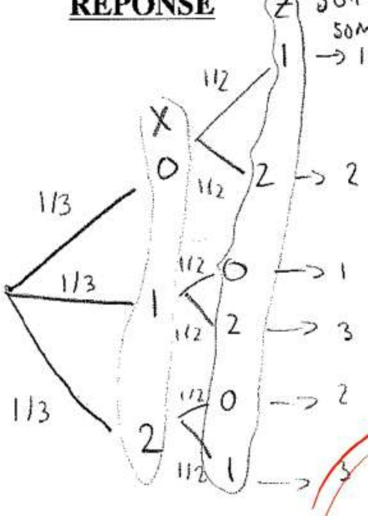
a) (2 points) Déterminer, sous forme de tableau, la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$, en y incluant les valeurs possibles et les distributions marginales de X et de Y.

Laisser les probabilités sous forme fractionnaire (par exemple 1/4 au lieu de 0,25).

b) (2 points) Calculer l'écart-type de la variable $T = 20 + 2X - Y$.

RÉPONSE

(Z) Soit Z : Deuxième jeton
somme :



y \ x	0	1	2	$P_Y(y)$
1	1/6	1/6	0	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	0	1/6	1/6	1/3
$P_X(x)$	1/3	1/3	1/3	

Soit $p(x,y) = p(X=x, Y=y)$

Donc $x \in \{0,1,2\}$ et $y \in \{1,2,3\}$

Quel est la probabilité que :

$p(0,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (0 et 1 après)

$p(0,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (0 et 2 après)

$p(0,3) = 0$ car impossible (max valeur pour jeton = 2)

$p(1,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ (avoir 1 et 0 après)

$p(1,2) = 0$ car il faudrait 1+1 mais impossible

$p(1,3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (1 et 2 après)

$p(2,1) = 0$ (impossible)

$p(2,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (2 et 0 après)

$p(2,3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (2 et 1 après)

$P_X(0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

$P_X(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

$P_X(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

$P_Y(0) = P_Y(1) = P_Y(2)$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

QUESTION Nº 5 (suite)

Tableau :

$y \backslash x$	0	1	2	$P_Y(y)$
1	1/6	1/6	0	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	0	1/6	1/6	1/3
$P_X(x)$	1/3	1/3	1/3	

Il faut trouver $V(T) = V(20 + 2X - Y) = 4V(X) + V(Y) - 4\,Cov(X,Y)$

$E(X) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ Donc $V(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$

$E(X^2) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$

$E(Y) = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 2$

$E(Y^2) = \frac{1}{3} + 4\left(\frac{1}{3}\right) + 9\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}$ $V(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ Pour calculer $E(XY)$ on peut enlever $(0,1), (0,2), (0,3)$ car $xy = 0$

Donc $E(XY) = \left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\right) + (0\cdot 1\cdot 2) + \left(\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 1\right) + (0\cdot 2\cdot 1) + \left(\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\right) + \left(\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\right) = \frac{7}{3}$

$Cov(X,Y) = \frac{7}{3} - E(X)E(Y) = \frac{7}{3} - 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$

Donc $V(T) = 4\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} - 4\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \Rightarrow \sigma_T = \sqrt{2}$

2

QUESTION Nº 6 (3 points)

On suppose que les autobus de la ville passent à un certain arrêt, durant le jour, selon un processus de Poisson de moyenne 5 autobus par heure.

a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'il passe à cet arrêt au moins 3 autobus durant les 25 prochaines minutes ?

b) (2 points) Étant donné qu'un usager attend l'autobus à cet arrêt depuis 5 minutes, quelle est la probabilité qu'un autobus arrive dans moins de 10 minutes à compter de maintenant ?

RÉPONSE

a) X : le nombre d'autobus qui passent en 25 min.

$X \sim \text{Poisson}\left(\frac{5}{2.4}\right)$ → si 5 autobus passent par heure alors $\frac{5}{2.4}$ bus passent / 25 min } → $\frac{60\text{min}}{25\text{min}} = 2.4$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{5}{2.4}} \cdot \left(\frac{5}{2.4}\right)^x}{x!} & \text{si } x = 0, 1, \dots \end{cases}$

$P(X=0) = 0.1245$

$P(X=1) = 0.2594$

$P(X=2) = 0.2702$

Donc $P(X \geq 3) = 1 - 0.1245 - 0.2594 - 0.2702 = 0.3459$

1

b) Y : le temps d'attente entre deux bus (en minutes)

$Y \sim \text{Exponentielle}\left(\frac{5}{60}\right)$

ou $\lambda = \frac{1}{12}$

$P(Y \leq 15 \mid Y > 5) = \dfrac{P(Y \leq 15 \cap Y > 5)}{P(Y > 5)}$

$= \dfrac{P(5 \leq Y \leq 15)}{P(Y > 5)}$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$

$P(X > x) = e^{-\lambda x}$

$\dfrac{F(15) - F(5)}{P(Y > 5)} = \dfrac{F(15) - F(5)}{e^{-5\lambda}} = \dfrac{1 - e^{-\lambda \cdot 15} - (1 - e^{-\lambda 5})}{e^{-5\lambda}}$

QUESTION Nº 6 (suite)

$$= \frac{\left(1-e^{-\frac{1}{12}\cdot 15}\right)-\left(1-e^{-\frac{1}{12}\cdot 5}\right)}{e^{\frac{-5}{12}}} = \frac{0.3727}{0.6592} = 0.5654$$

2

Evidemment ceci devrait être égal a $P(Y\leq 10)$ due a l'absence de memoire de l'exponentielle. On peut vérifier.

$P(Y\leq 10) = 1-e^{\frac{-10}{12}} = 0.5654$. Donc notre réponse est correcte.