QUESTION N° 1 (2 points)

2

On considère deux événements A et B d'un espace échantillon tels que

$$P(A) = 0{,}40; \quad P(\overline{B} \mid A) = 0{,}25; \quad P(B \mid \overline{A}) = 0{,}50.$$

a) (1 point) Calculer la probabilité $P(B)$.

b) (1 point) Calculer la probabilité $P(A \cup B)$.

RÉPONSE

$P(B) - P(B)\,P(A|B)$

a) $\begin{cases} P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(B)\,P(\bar{A}|B)}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(B)\left(1 - P(A|B)\right)}{1 - P(A)} \\ P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(B)\,P(A|B)}{P(A)} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(B) - P(B)\,P(A|B)}{1 - P(A)} \\ P(B)P(A|B) = P(A)\left[1 - P(\bar{B}|A)\right] \end{cases}$

$\Rightarrow P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(B) - P(A)\left[1 - P(\bar{B}|A)\right]}{1 - P(A)}$

$\Rightarrow P(B) - P(A)\left[1 - P(\bar{B}|A)\right] = P(B|\bar{A})\left(1 - P(A)\right)$

$\Rightarrow P(B) = P(B|\bar{A})\left(1 - P(A)\right) + P(A)\left[1 - P(\bar{B}|A)\right]$

$= 0.5 \times (1 - 0.4) + 0.4\,(1 - 0.25)$

$\boxed{P(B) = 0.6}$

QUESTION Nº 1 (suite)

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B|A)$

$= P(A) + P(B) - P(A)\,(1 - P(\bar{B}|A))$

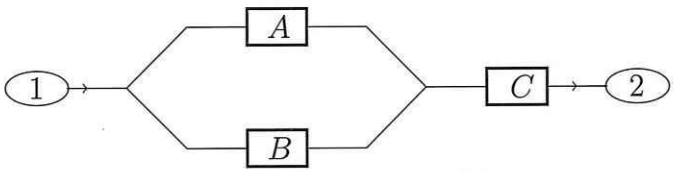
$= 0.4 + 0.6 - 0.4\,(1 - 0.25)$

$\boxed{P(A \cup B) = 0.7}$

3

QUESTION Nº 2 (3 points)

On considère un système (voir schéma ci-dessous) constitué de trois composants A, B et C. Le système fonctionne s'il y a au moins un chemin, liant les points 1 et 2, constitué de composants qui fonctionnent. Les trois composants opèrent indépendamment les uns des autres et chacun a une fiabilité de 0,95.



Sachant que le système fonctionne, quelle est alors la probabilité que le composant B fonctionne ?

RÉPONSE

F: système fonctionne
A : A fonctionne
B : B fonctionne
C : C fonctionne

Les 3 composantes opèrent indépendamment les uns des autres
$\rightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)$, $P(A\cap C) = P(A)P(C)$
$P(B\cap C) = P(B)P(C)$

on cherche $P(B|F)$?

$$P(B|F) = \frac{P(B\cap F)}{P(F)}$$

or
$$\begin{aligned} P(F) &= P((A\cap C)\cup(B\cap C)) \\ &= P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap C\cap B) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= 2\times(0.95)^2 - (0.95)^3 \end{aligned}$$

$P(F) = 0.9476$

QUESTION Nº 2 (suite)

$$\text{et } P(B\cap F) = P(B\cap[(A\cap C)\cup(B\cap C)])$$
$$= P([B\cap A\cap C]\cup[B\cap C])$$
$$= P(B\cap A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)$$
$$= P(B\cap C)$$
$$= P(B)P(C)$$
$$= 0.95^2$$
$$= \underline{0.9025}$$

$$\text{Alors } P(B|F) = \frac{0.9025}{0.9476} = 0.9524$$

QUESTION N° 2 (suite)

QUESTION Nº 3 (4 points)

On suppose que chaque nouvelle que vous recevez provient (origine) d'une seule des trois sources suivantes : F, T, C. Les sources F et T sont des réseaux sociaux tandis que la source C est constituée des médias conventionnels (télé, radio, etc.).

On suppose que 50% des nouvelles que vous recevez proviennent de F, 30% proviennent de T et le reste provient de C. De plus, une étude montre que 60% des nouvelles de F sont fausses, cette proportion est de 40% pour les nouvelles de T et de 10% pour celles de C.

4/4

Vous venez de recevoir une nouvelle.

a) (2 points) Quelle est la probabilité que la nouvelle soit fausse ?

b) (2 points) Si la nouvelle est fausse, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne d'au moins une des sources des réseaux sociaux ?

RÉPONSE

$\boxed{D : \text{nouvelle fausse}}$

$P(F) = 0.5 \quad , \quad P(T) = 0.3 \quad , \quad P(C) = 0.2$

$P(D|F) = 0.6 \ , \ P(D|T) = 0.4 \ , \ P(D|C) = 0.1$

2

a) $P(D) = P(F).P(D|F) + P(T).P(D|T) + P(C).P(D|C)$

$= 0.5 \times 0.6 + 0.3 \times 0.4 + 0.2 \times 0.1$

$\boxed{P(D) = 0.44}$

b) S : la nouvelle provienne d'au moins une des sources (F et T)

$S = (\underbrace{F \cap \overline{T}}_{F}) \cup (\underbrace{\overline{F} \cap T}_{T}) \rightarrow \overline{S} = C$

on cherche $P(S|F)$?

P.S. : F : la nouvelle provienne de F
T : ... ... de T
C : ... ... de C

QUESTION Nº 3 **(suite)**

$$P(S|D) = 1 - P(\bar{S}|D)$$

$$= 1 - P(C|D)$$

$$= 1 - \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$$

2

$$= 1 - \frac{P(C)P(D|C)}{P(D)}$$

$$= 1 - \frac{0.2 \times 0.1}{0.44}$$

$$\boxed{P(S|D) = 0.9545}$$

QUESTION N° 3 (suite)

QUESTION Nº 4 (4 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

3,75 / 4

a) (1 point) Déterminer la valeur de la constante k.

b) (3 points) On considère une deuxième variable Y définie par $Y = 1 - X^2$.

1.b) (1,5 point) Calculer la probabilité $P\,(Y > 3/4)$.

2.b) (1,5 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

RÉPONSE

a) k ? :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{-1} f_X(x)\,dx}}_{=0} + \int_{-1}^{1} f_X(x)\,dx + \underbrace{\cancel{\int_{1}^{+\infty} f_X(x)\,dx}}_{=0} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} k\,(1+x)\,dx = 1 \Rightarrow k\left[x + \frac{x^2}{2}\right]\Big|_{-1}^{1} = 1$$

$$\Rightarrow k\left[1 + \frac{1}{2} - \left(-1 + \frac{1}{2}\right)\right] = 1 \Rightarrow 2k = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D

QUESTION Nº 4 (suite)

b) $Y = 1 - X^2$

b.1) $P(Y > \frac{3}{4}) = P(1 - X^2 > \frac{3}{4})$

$= P(X^2 < 1 - \frac{3}{4}) = P(X^2 < \frac{1}{4})$

$= P(|X| < \frac{1}{2})$

$= P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx$

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(1+x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^2}{2}\right]\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{0.5^2}{2} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{0.5^2}{2}\right)\right]$

1.25

$= \frac{7}{16}$

$\boxed{P(Y > \frac{3}{4}) = 0.4375}$ ✗

QUESTION N° 4 (suite)

b.2) $E(Y) = E(1-X^2) = 1 - E(X^2)$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1+x)\,dx$$

1.5

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{2}{3}}$$

QUESTION Nº 5 (4 points)

Une boîte contient 3 jetons dont les valeurs sont différentes. Un jeton a la valeur 0, un jeton a la valeur 1, et un jeton a la valeur 2. On choisit au hasard et sans remise deux jetons de la boîte.

Soit X la valeur du premier jeton obtenu, et Y la somme des valeurs des deux jetons obtenus.

a) (2 points) Déterminer, sous forme de tableau, la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$, en y incluant les valeurs possibles et les distributions marginales de X et de Y.

Laisser les probabilités sous forme fractionnaire (par exemple 1/4 au lieu de 0,25).

b) (2 points) Calculer l'écart-type de la variable $T = 20 + 2X - Y$.

RÉPONSE

justifications page 14

a)

y \ x	0	1	2	$P_Y(y)$
1	1/6	1/6	0	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	0	1/6	1/6	1/3
$P_X(x)$	1/3	1/3	1/3	1

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

$\boxed{0}$	1	1
$\boxed{0}$	2	2
$\boxed{1}$	0	1
$\boxed{1}$	2	3
2	0	2
2	1	3

2

b) $\sigma(T)$?

on a : $V(T) = V(20 + 2X - Y)$

$= 2^2 V(X) + V(Y) - 2 \times 2\, Cov(X, Y)$

on $Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$

or $\mu_X = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$

et $\mu_Y = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 2$

avec :

$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, P_X(x)$

$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y \in R_Y} y\, P_Y(y)$

QUESTION N° 5 (suite)

et $E(XY) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} x \cdot y \, p(x,y)$

$= 0 \cdot \left(1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times 0\right) +$

$1 \cdot \left(1 \times \frac{1}{6} + 2 \times 0 + 3 \times \frac{1}{6}\right) +$

$2 \left(1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6}\right)$

$= \frac{7}{3}$

alors : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{7}{3} - 1 \times 2 = \frac{1}{3}$

et on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$

car $E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 p_X(x) = 0 + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

et $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{7}{3}$

car $E(Y^2) = \sum_{y \in R_Y} y^2 p_Y(y) = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$

Par conséquent ; $\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{20^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{3} - 20 \times 2 \times \frac{1}{3}}$

$\rightarrow \sigma(T) = \cancel{16} \quad \simeq 16.81$

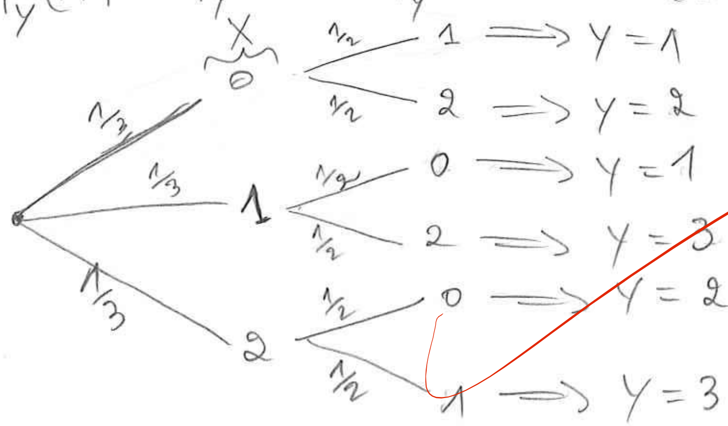
1,5

QUESTION N° 5 (suite)

a) (suite)

$p_X(0) = p_X(1) = p_X(2) = \frac{1}{3}$

$p_Y(1) = p_Y(2) = p_Y(3) = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$



$$\begin{cases} R_X = \{0, 1, 2\} \\ R_Y = \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

QUESTION Nº 5 (suite)

QUESTION Nº 6 (3 points)

On suppose que les autobus de la ville passent à un certain arrêt, durant le jour, selon un processus de Poisson de moyenne 5 autobus par heure.

a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'il passe à cet arrêt au moins 3 autobus durant les 25 prochaines minutes ?

b) (2 points) Étant donné qu'un usager attend l'autobus à cet arrêt depuis 5 minutes, quelle est la probabilité qu'un autobus arrive dans moins de 10 minutes à compter de maintenant ?

RÉPONSE

a) X : V.A nb d'autobus qui passent durant 25 minutes

$X \sim P(\lambda)$

$\lambda = \frac{5}{60min} \times 25min = \frac{25}{12}$

$\rightarrow X \sim P\left(\frac{25}{12}\right)$

0,75

$P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - p_X(0) - p_X(1) - p_X(2)$

$= 1 - e^{-\frac{25}{12}}\left[\left(\frac{25}{12}\right)^0 + \left(\frac{25}{12}\right)^1 + \left(\frac{25}{12}\right)^2\right]$

2

$\boxed{P(X \geq 3) = \cancel{0.075}}$

b) Y : V.A temps d'attente de l'autobus

$Y \sim Exp\left(\frac{5}{60}\right)$

$P(Y<15 \mid Y>5) = \frac{P(Y<15 \cap Y>5)}{P(Y>5)} = \frac{P(5<Y<15)}{P(Y>5)}$

$= \frac{F_Y(15) - F_Y(5)}{P(Y>5)} = \frac{P(Y<15) - P(Y<5)}{P(Y>5)}$

QUESTION Nº 6 (suite)

or $P(Y \leq 15) = 1 - e^{-\frac{5}{60} \times 15}$

et $P(Y \leq 5) = 1 - e^{-\frac{5}{60} \times 5}$

et $P(Y > 5 = e^{-\frac{5}{60} \times 5}$

Alors $\boxed{P(Y < 15 \mid Y > 5) = 0.5654}$

2