Question 1 (40 points) – Questions conceptuelles et à réponses courtes

Répondez aux sous-questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.**

Les sous-questions sont indépendantes les unes des autres.

A. Supposez que la station spatiale internationale (SSI) se déplace à vitesse constante sur une orbite circulaire, à une altitude de 400 km au-dessus du sol. Il faut 93 minutes à la SSI pour faire une révolution sur son orbite. Sachant que le rayon de la Terre est de 6 370 km, quel est le module de l'accélération de la SSI ? (10 points)

B. Un père (80 kg) et sa fille (20 kg) sont côte à côte, immobiles, sur une patinoire (on néglige tout frottement). La fille exerce une poussée sur son père : elle atteint alors une vitesse de 2 m/s après avoir exercé la poussée. On suppose que la poussée a duré 0,5 s et qu'elle est parallèle à la surface glacée.

i. Quel est le module de l'impulsion subie par la fille due à la poussée ? (5 points)

ii. Quel est le module de la force moyenne exercée par le père sur la fille ? (5 points)

iii. Après avoir été poussé par sa fille, quelle est la vitesse du père (en module) ? (10 points)

iv. Quel est le module de la force moyenne exercée par la fille sur le père ? (10 points)

(A) Vitesse constante => accélération ~~nulle~~. tangentielle

0

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}$; v étant constant, la dérivée est ~~nulle~~.

(B) $m_P = 80$ kg $v_F = 2$ m/s
$m_F = 20$ kg $\Delta t = 0{,}5$

i) État 1 : Le père et la fille sont immobiles

3

État 2 : Après la poussée

$Imp_{1\to2} = \Delta \vec{L} = \vec{F}_{moy} \Delta t$

quantité de mouvement conservée (aucune force externe n'est appliquée)

$Imp = L_2 - L_1 \Rightarrow L_1 = 0$

$L_2 = \cancel{\frac{1}{2} m (v_f)^2} = 40 J$

≠ énergie.

$\boxed{Imp = 40 \cancel{J}\ N \cdot s}$

5 ii) $I_{moy} = F_{moy} \Delta t \Rightarrow F_{moy} = \frac{I_{moy}}{\Delta t} = \frac{40}{0,5} = 80\,N$

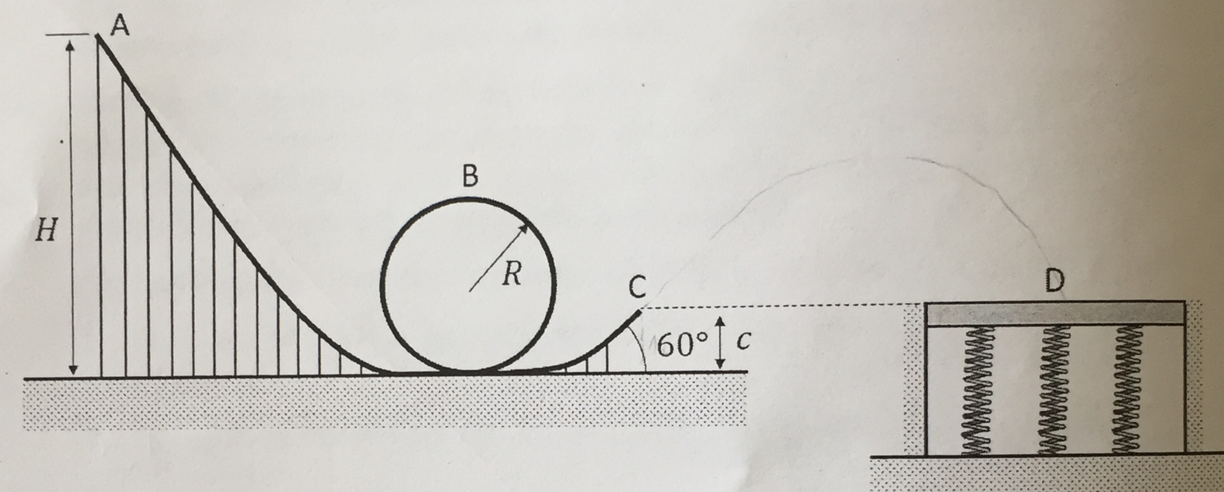
10 iii) $0 = m_P \vec{V}_P + m_F \vec{V}_F \Rightarrow 0 = 80 \times \vec{V}_P + 20 \times 2 \Rightarrow \vec{V}_P = \frac{-20 \times 2}{80} = -0,5\,m/s$

0 iv) $\emptyset$

Question 2 (65 points)

Un planchiste (m = 75 kg) part immobile du point A. Il descend la piste, parcourt la boucle circulaire en passant par le point B, puis est projeté dans les airs au point C. Il atterrit au point D, sur une plateforme matelassée (M = 200 kg) amortie par une série de trois ressorts identiques (k = 2 kN/m).

En atterrissant, le planchiste reste solidaire avec la plateforme qui peut se déplacer verticalement seulement. Après l'atterrissage, on observe que le point le plus bas atteint par la plateforme est à h = 50 cm sous sa position initiale.



On néglige tout frottement avec la piste et toute résistance de l'air dans ce problème. La plateforme est initialement immobile. On donne c = 1 m.

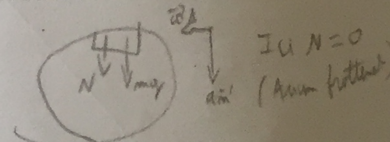
A. De quelle distance les ressorts sont-ils comprimés initialement ? (10 points)

B. Quel est le module de la vitesse du planchiste tout juste avant d'atterrir sur la plateforme au point D ? (30 points)

C. À quelle hauteur H le planchiste a-t-il débuté son parcours ? (15 points)

D. Donnez la valeur maximale du rayon R qui permet au planchiste de franchir la boucle sans tomber. (10 points)

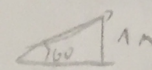
Au point A : On a de l'énergie potentiel (mgH)
Avant d'entrer dans la boucle on a de l'énergie cinétique



$N + mg = m\frac{v^2}{R}$

$a_r = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \begin{cases} v = \sqrt{gR} \\ R = \frac{v^2}{g} \end{cases}$

(B) Du point C au point D, on a une trajectoire parabolique



2 État 1: Le planchiste part du point C avec une vitesse $\vec{v}_C$

État 2: Le planchiste touche presque le matelas avec une vitesse $\vec{v}_D$

$m_p \vec{v}_C = m_p \vec{v}_D \Rightarrow$ quantité de mouvement conservée (aucune force extérieure n'est appliquée).

$\vec{F}_g$ --- $W_{F_g} = 0$ car $y_C = y_D$

Il faut trouver la vitesse au point C $\Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_D$

De B jusqu'à C : $v_C = \sqrt{gR}$

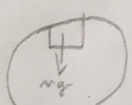
Ainsi $v_D = \sqrt{gR}$

(C) Comme on n'a pas de frottement et le travail de la normale est nulle ; aucune force non

12 conservatives $\Rightarrow E_2 = E_1$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = mgH \\ E_2 = \frac{1}{2} m v^2 \end{array}\right\} \quad mgH = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \ldots \quad -1$$

+mgc −2

(D) 

$\equiv \quad mg = m a_n \Rightarrow g = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{v^2}{g}}$

3

A) Avant D. $mg(0,5) - \frac{1}{2}k(l_0 - L_0)^2 = 0$ non $\Delta E \neq 0$ (pertes à l'atterrissage)

0

$\frac{1}{2}k(0,5 - L_0)^2 = mg\,0,5 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2000(0,5 - L_0)^2 = 75 \times 9,81 \times 0,5$

$(0,5 - L_0)^2 = \frac{75 \times 9,81 \times 0,5}{1000} \Rightarrow 0,5 - L_0 = \sqrt{\frac{75 \times 9,81 \times 0,5}{1000}}$

$L_0 = 0,5 - \sqrt{\frac{75 \times 9,81 \times 0,5}{1000}} \Rightarrow \boxed{L_0 = -0,107\,m}$

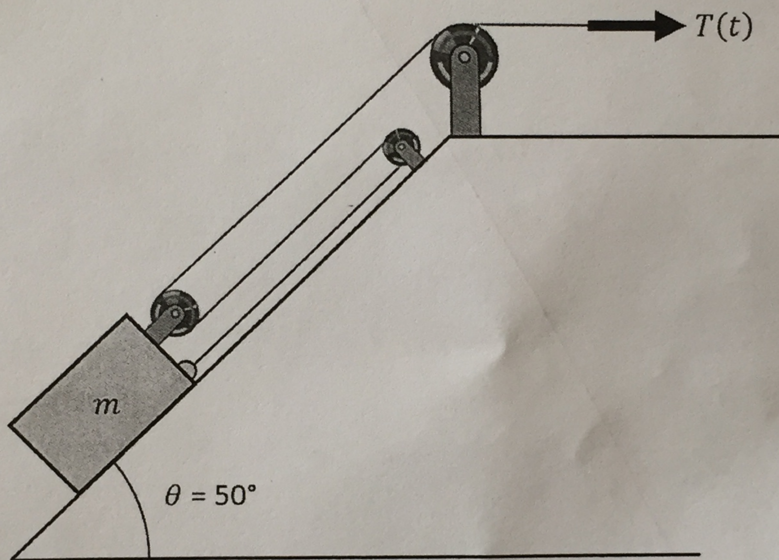
Question 3 (60 points)

Une personne tire sur un câble horizontal afin de déplacer une charge de masse m vers le haut d'un plan incliné. Pour modéliser la fatigue musculaire de la personne, on suppose que la force qu'elle exerce décroît avec le temps :

$$T = T_0 e^{-bt},$$

où T_0 et b sont des constantes. La charge est initialement au repos (à t = 0) et l'on suppose que la personne tire suffisamment fort pour mettre la charge en mouvement.

Le sol est modélisé comme une surface rugueuse de coefficients μ_s et μ_k. La masse des poulies et du câble est négligeable.



A. Faites le DCL-DCE de la charge en mouvement. (10 points)

B. Déterminez l'expression du module de la vitesse de la charge en fonction du temps. (30 points)

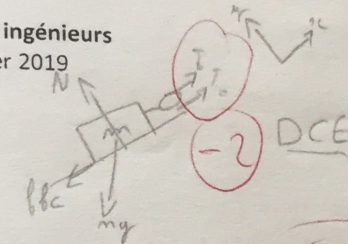
Répondre aux questions **C** et **D** en utilisant les valeurs suivantes :

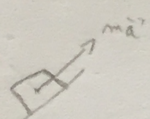
$$m = 100 \text{ kg},\ T_0 = 550 \text{ N},\ b = 0{,}5 \text{ s}^{-1},\ \mu_s = 0{,}6 \text{ et } \mu_k = 0{,}3.$$

C. Quelle est la vitesse maximale (module) atteinte par la charge lorsqu'elle se déplace vers le haut ? (10 points)

D. Quelle est la puissance générée par la personne à $t = 2$ s ? (10 points)

$\frac{8}{10}$

A) DCL. 

−2 DCE : 

B) $\sum f_x = -f_{fc} - mg \sin 50° + T = m\vec{a}$ −5

$\sum f_y = N - mg\cos 50° = 0 \implies N = mg \cos 50°$

$f_{fc} = \mu_c N$, Sachant que $\vec{a} = \frac{dV}{dt}$

$\boxed{dt = \frac{dV}{a(V)}}$

$\sum f_x = -mg\cos 50° \mu_c - mg \sin 50° + T_0 e^{-bt} = m \frac{dV}{dt}$

$dt = \frac{m\,dV}{\underbrace{-mg\cos 50° \mu_c - mg\sin 50°}_{\text{On note } C} + T_0 e^{-bt}} \implies dt = \frac{m\,dV}{C + T_0 e^{-bt}}$

$\frac{5}{30}$

$(C + T_0 e^{-bt})\,dt = m\,dV \implies \int_0^t T_0 e^{-bt}\,dt = \int_0^V m - C \cdot dV$

Posons $u = -bt \to du = -b\,dt \implies dt = \frac{du}{-b}$

$\frac{T_0}{-b}\int_0^t e^{u}\,du = (m - C)\cdot V \implies \frac{T_0}{-b} e^{[-bt]} = (m - C)V$

$\boxed{\frac{T_0 e^{-bt}}{-b + m - C} = V}$ $V = \frac{T_0 e^{-bt}}{-b + m + mg\cos(50)\mu_c + mg\sin(50)}$

C) $V = 0{,}529\, e^{-bt}$

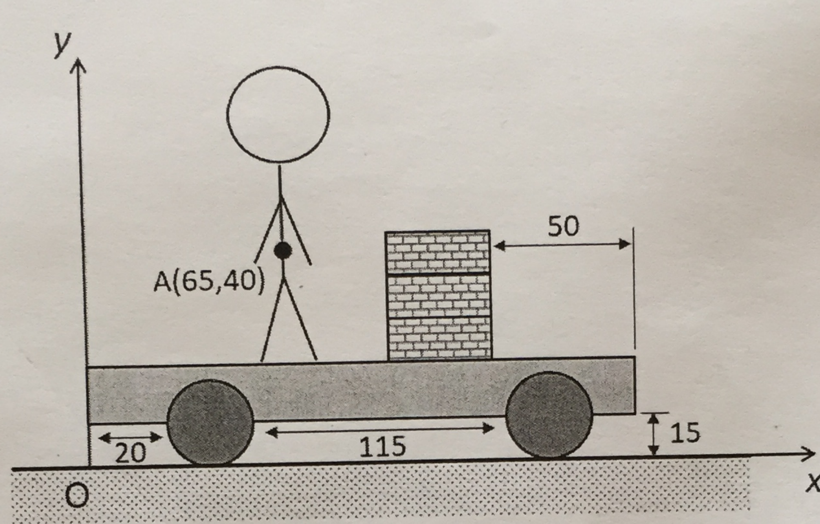
La vitesse maximale est atteinte si le terme e^{-bt} s'annule ; donc $\boxed{V = 0{,}529 \frac{m}{s}}$

D) $\bar{V} = \frac{V_{1\to 2}}{\Delta t}$ avec $\Delta t = 2$

à $t = 2 \implies V = 0{,}529\, e^{-0{,}5 \times 2} = 0{,}195 \frac{m}{s}$

Question 4 (35 points)

Soit le système formé d'une personne (60 kg) et de trois briques sur un chariot à quatre roulettes (deux en avant et deux en arrière). Le système est initialement au repos. Le centre de masse de la personne est situé au point A.



Toutes les mesures sont en cm.

On donne les informations suivantes sur les matériaux et les dimensions du problème :

	Masse surfacique (kg/m²)=S	Dimensions	
		Largeur selon *x* (cm)	Hauteur selon *y* (cm)
Brique	120	30	15
Plaque du chariot	250	200	20
Roulette	5	25	25

A. Déterminez la position du centre de masse du système formé de la personne, du chariot et des briques en utilisant le système d'axes de la figure. (20 points)

La personne décide de lancer une brique hors du chariot afin de le mettre en mouvement. La brique est lancée avec une vitesse relative de 5 m/s par rapport au chariot à un angle de 30° par rapport au sol. On néglige tout frottement avec le sol.

B. Quelle est la vitesse du chariot après que la 1re brique a été lancée ? (15 points)

A) Les trois briques, les quatre roulettes et les trois briques sont constitués de :

$4 \times$ ① $+$ ② $200\,cm \times 20\,cm$ $+ 3 \times$ ③ 30×15 $- 4 \times$ ④

pas nécessaire mais OK

Calculons la surface de chaque morceau du système

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

① $\pi r^2 = \pi \times \left(\frac{0{,}25}{2}\right)^2 \Rightarrow m = \rho \times S = 0{,}245\,kg$

② $L \times l = 2 \times 0{,}2 \Rightarrow m = 250 \times (2 \times 0{,}2) = 100\,kg$

③ $L \times l = 0{,}3 \times 0{,}15 \Rightarrow m = 120 \times (0{,}3 \times 0{,}15) = 5{,}4\,kg$

④ $\frac{\pi r^2}{2} \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = -0{,}1225\,kg$

Pour la plaque du chariot ; le CM est $\begin{cases} x = 100\,cm \\ y = 25\,cm \end{cases}$; Pour les briques : $\begin{cases} x = 200 - 50 - 0{,}5 \times 30 = 135\,cm \\ y = 15 + 20 + 1{,}5 \times 15 = 57{,}5\,cm \end{cases}$

Pour les roues en avant : $\begin{cases} x = 20 + \frac{25}{2} = 0{,}325\,m \\ y = \frac{0{,}25}{2} = 0{,}125\,m \end{cases}$ Pour les roues derrière : $\begin{cases} x = 20 + 25 + 115 + \frac{25}{2} = 1{,}725\,m \\ y = 0{,}125\,m \end{cases}$

+ personne

$\sum m_i = 4 \times 0{,}245 + 100 + 3 \times 5{,}4 - 4 \times 0{,}1225 = 116{,}69\,kg$ +60

~~3~~ -1

Sur l'axe des x_i : $0{,}1 \times 100 + 3 \times 1{,}35 \times 5{,}4 + 2 \times 0{,}325 \times 0{,}245 + 2 \times 1{,}725 \times 0{,}245$
$- 2 \times 0{,}325 \times 0{,}1225 - 2 \times 1{,}725 \times 0{,}1225$ $+ 60 \times 0{,}65$

-1

Sur l'axe des y : $0{,}25 \times 100 + 3 \times 0{,}575 \times 5{,}4 + 2 \times 0{,}125 \times 0{,}245 + 2 \times 0{,}125 \times 0{,}245$
$- 2 \times 0{,}125 \times 0{,}1225 - 2 \times 0{,}125 \times 0{,}1225$ $+ 60 \times 0{,}4$

18/20

$\vec{r}_{CM} = (71{,}355\,\vec{i} + 58{,}38)\,m$

B) $V_{B/C} = 5\,m/s$

$N_{B/C}$ 30°

$V_C = ?$

1

$V_{B/C} = V_{B/sol} - V_{C/sol} \Rightarrow V_{C/sol} = V_{B/sol} + V_{B/C}$

2/13

$0 = m_B V_B + m_C V_C$

$0 = 5{,}4\,V_B +$ 1 pourquoi?