PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Examen final
Hiver 2018

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. Une tige homogène de longueur $L = 1$ m peut tourner autour du pivot idéal A situé à l'une de ses extrémités. Au même point A, la tige est fixée à un ressort de torsion ($\kappa = 100$ N·m/rad, $\theta_0 = 90°$ par rapport à l'axe x positif). La tige est maintenue immobile dans la position illustrée sur la figure, puis elle est lâchée. N.B. La gravité agit selon l'axe z.

i. Une fois lâchée, est-ce que l'énergie mécanique de la tige est conservée? Justifiez. (10 points)

ii. Une fois lâchée, est-ce que la quantité de mouvement de la tige est conservée ? Justifiez. (10 points)

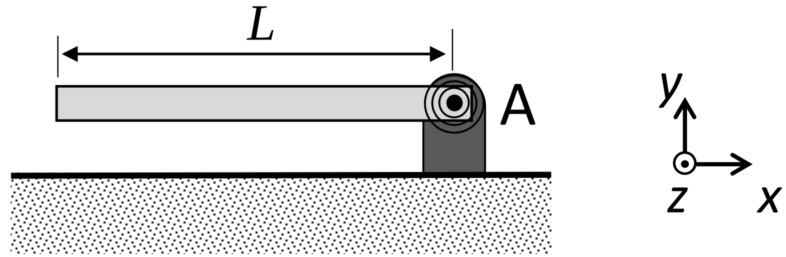
iii. Calculez le travail fait par le ressort de torsion entre la position initiale de la tige et le moment où elle est perpendiculaire au mur. (10 points)

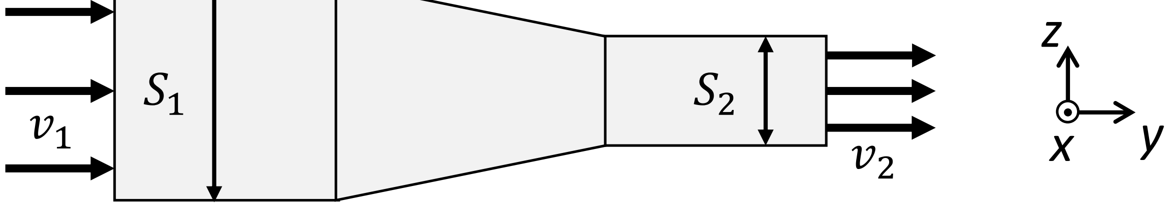
B. Le turbopropulseur d'un avion permet de générer une force de propulsion en recevant de l'air par une ouverture de section $S_1 = 1{,}5$ m², puis en l'éjectant à une vitesse différente à travers une ouverture de section $S_2 = 0{,}75$ m². On considère un avion qui vole à altitude constante à une vitesse $v_1 = 360$ km/h par rapport à l'air ambiant. Supposez que l'air est un fluide incompressible de masse volumique $\rho = 1{,}20$ kg/m³.

i. Quelle est la force générée par le turbopropulseur ? Répondez sous forme vectorielle en utilisant les axes de la figure. (15 points)

ii. Quelle est la puissance générée par le turbopropulseur ? (5 points)

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)





Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. i. L'énergie mécanique de la tige est conservée, car la somme des travaux non conservatifs est nulle : 1) les forces au pivot A ne font pas de travail et 2) le couple exercé par le ressort est un couple conservatif.

10 points de compréhension

ii. La QM de la tige n'est pas conservée, car la somme des forces sur la tige pendant son mouvement n'est pas nulle : les forces au pivot A créent une résultante non nulle.

L'étudiant peut aussi dire que le vecteur vitesse du centre de masse de la tige varie dans le temps (car le CM est en rotation autour de A) et puisque $\vec{L} = m\vec{v}_{CM}$, alors la quantité de mouvement varie forcément.

10 points de compréhension

iii. Le travail fait par le ressort est ($\theta_i = \pi$ rad, $\theta_f = \pi/2$ rad, $\theta_0 = \pi/2$ rad) :

$$U = -\Delta V = \frac{1}{2}\kappa(\theta_i - \theta_0)^2 - \frac{1}{2}\kappa\left(\theta_f - \theta_0\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 100\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 = 123\ \mathrm{J}$$

10 points de calculs simples

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

B. i. Le débit massique est constant (hypothèse de continuité) et vaut :

$$\mu = \left|\frac{dm}{dt}\right| = \rho S_1 v_1 = 1{,}20 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{360}{3{,}6} = 180 \text{ kg/s}$$

$$\mu = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 \implies v_2 = 200 \text{ m/s}$$

La force générée est donc :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_s = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 180(100 - 200)\vec{\jmath} = -18{,}0\vec{\jmath} \text{ kN}$$

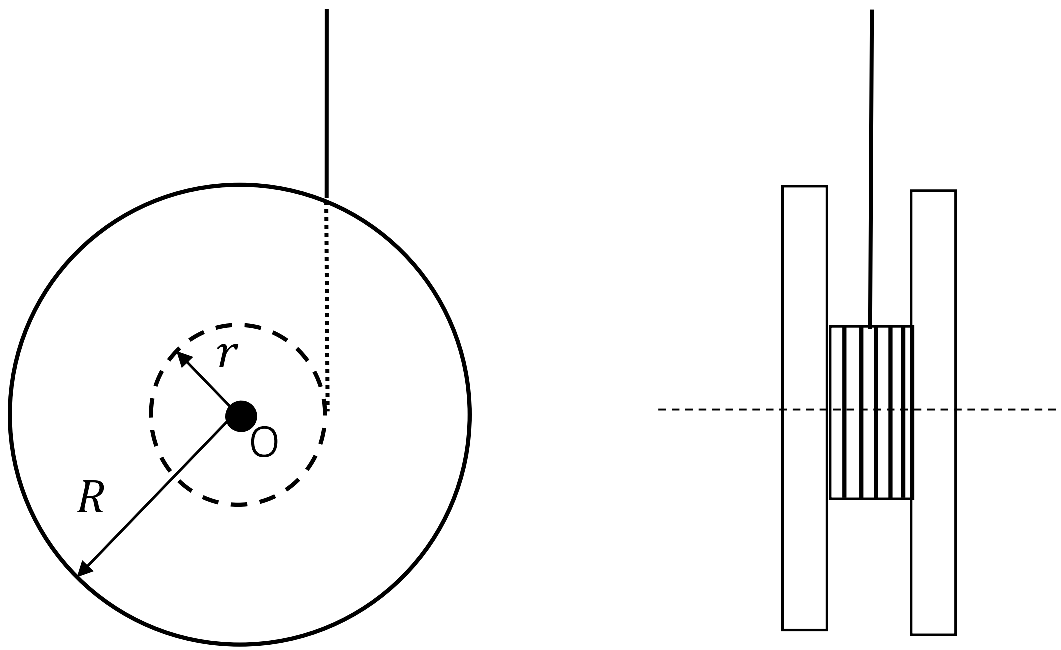
15 points de compréhension et de calculs simples

ii. La puissance lorsque l'avion se déplace à vitesse $\vec{v}_1$ est

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_1 = -18{,}0\vec{\jmath} \cdot -100\vec{\jmath} = 1{,}80 \text{ MW}$$

5 points de calculs simples

Question 2 (50 points)



Question 2 (50 points)

On étudie le mouvement d'un yoyo constitué de deux cylindres pleins de rayon R et de masse M disposés parallèlement, entre lesquels se trouve un troisième cylindre plein de rayon $r < R$ et de même masse M autour duquel s'enroule la corde. La corde a une longueur totale L et possède une densité de masse linéique ρ_l. Au temps $t = 0$ s, toute la corde est enroulée autour du yoyo et le yoyo est lâché avec une vitesse nulle.

Le moment d'inertie total du yoyo par rapport à l'axe passant par son centre (perpendiculaire à la figure de gauche) est I_O et on suppose qu'il est constant même si le yoyo perd de la masse au fur et à mesure que la corde se déroule.

On suppose que la corde est toujours tendue lorsque le yoyo est en mouvement et qu'elle ne glisse pas autour du yoyo. De plus, on néglige toute résistance de l'air et on fait l'hypothèse que le yoyo est un corps homogène.

A. Faites le DCL-DCE du yoyo. (15 points)

B. Déterminez l'expression du taux (débit massique) auquel la masse du yoyo diminue lorsque son centre de masse descend verticalement avec une vitesse de module v. (10 points)

C. Déterminez l'expression de l'accélération du centre de masse du yoyo. Commentez sur l'impact de la masse de la corde sur l'accélération. (20 points)

D. Quelle valeur d'accélération du centre de masse retrouve-t-on dans la limite où la masse de la corde et le moment d'inertie du yoyo sont tous les deux négligeables ? Justifiez à partir de l'expression obtenue en C. (5 points)

BONUS. En considérant que la masse du yoyo varie, déterminez l'expression de la vitesse v du centre de masse du yoyo en fonction de la distance verticale y puis évaluez la vitesse lorsque toute la longueur de corde s'est déroulée. (15 points)

Q2 – Solution (1/3)

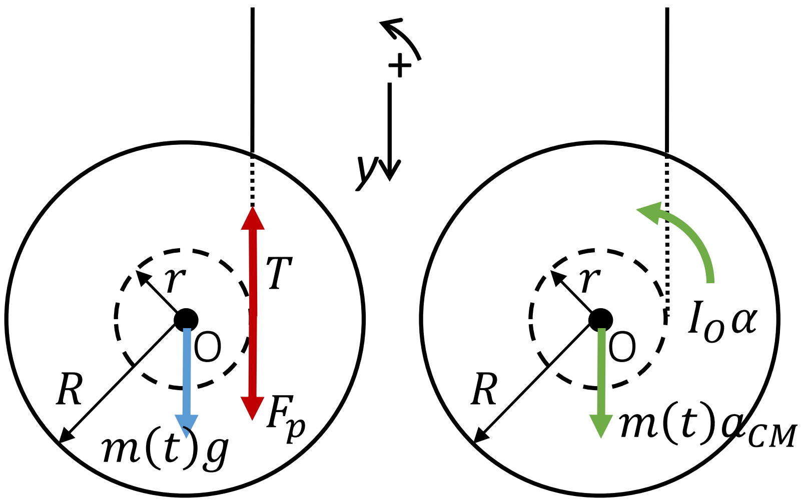
A. DCL-DCE du yoyo

Poids : la masse totale du yoyo est $M(t) \leq 3m$. S'applique au CM du yoyo (point O) vers le bas.

Tension : vers le haut au point où la corde se sépare du yoyo.

Force due au changement de masse du yoyo : vers le bas au point où la corde se sépare du yoyo. On déduit le sens de l'expression $\vec{F}_p = \frac{dm}{dt}\left(\vec{v}_p - \vec{v}\right)$. Ici, le yoyo perd de la masse ($\frac{dm}{dt} < 0$) et la vitesse relative de la corde qui pend immobile par rapport à celle du CM du yoyo est vers le haut : la force est donc vers le bas.

Axes : il faut un axe en translation et un axe en rotation.



15 points de compréhension

B. Débit massique sortant du yoyo

Si le CM du yoyo descend d'une distance verticale dy, alors la variation de masse dm perdue par le yoyo est :

$$dm = -\rho_l dy$$

La variation est négative, car le yoyo perd de la masse.

Pour trouver le débit massique, on dérive par rapport au temps, sachant que ρ_l est constante.

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = -\rho_l \frac{dy}{dt} = -\rho_l v}$$

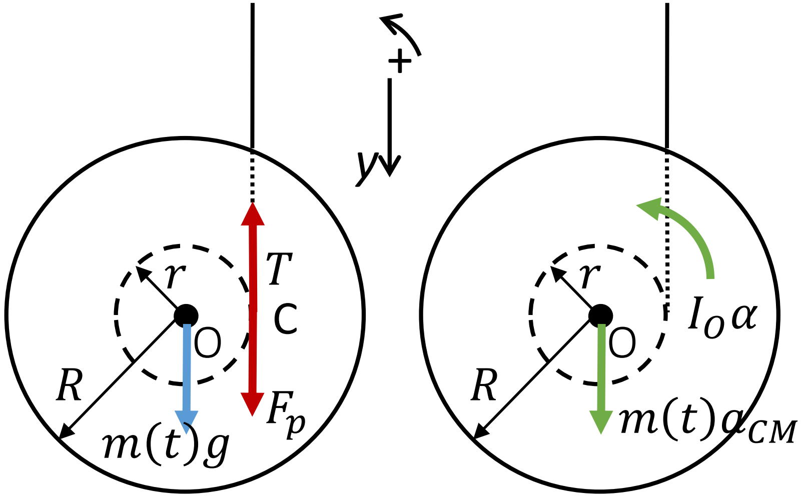
10 points de calculs simples

Q2 – Solution (2/3)

C. Accélération du CM et accélération angulaire du yoyo

Force due à la variation de masse du yoyo :

$$\vec{F}_p = \frac{dm}{dt}\left(\vec{v}_p - \vec{v}\right) = \left(-\rho_l v\right)\left(\vec{0} - v\vec{j}\right) = \rho_l v^2 \vec{j}$$



Roulement sans glissement du yoyo autour du point de contact C (CIR).

$$a_{CM} = \alpha r$$

Somme des forces verticales

$$\sum F_y = m(t)g + \rho_l v^2 - T = m(t)a_{CM}$$

Somme des moments (au choix : par rapport à O ou à C en utilisant le moment d'inertie approprié)

$$\sum M_O = rT - r\rho_l v^2 = I_O\alpha \qquad \sum M_C = m(t)gr = \left(I_O + m(t)r^2\right)\alpha$$

Dans les deux cas, on trouve :

$$\alpha = \frac{m(t)r}{I_O + m(t)r^2}g$$

$$\boxed{a = \frac{m(t)r^2}{I_O + m(t)r^2}g}$$

Plus la masse de la corde est grande, plus l'accélération est grande.

20 points de résolution de problème

Q2 – Solution (3/3)

D.

Masse de la corde négligeable : $m(t)$ devient constante.

Moment d'inertie du yoyo négligeable : $I_O \to 0$

On retrouve donc l'accélération gravitationnelle :

$$\boxed{a = \frac{mr^2}{0 + mr^2} g = g}$$

5 points de compréhension

BONUS

On trouve l'expression de $m(t)$ en intégrant la relation du débit massique par rapport au temps ($y = 0$ à $t = 0$).

$$\frac{dm}{dt} = -\rho_l v$$

$$\int_{m_0}^{m(t)} dm = \int_0^t -\rho_l v dt$$

$$m(t) = m_0 - \rho_l y$$

$$m_0 = M + \rho_l L$$

$$a dy = v dv$$

$$a = \frac{(m_0 - \rho_l y) r^2}{I_O + (m_0 - \rho_l y) r^2} g = \left[1 - \frac{I_O}{I_O + (m_0 - \rho_l y) r^2}\right] g$$

$$\int_0^v v dv = \int_0^y \left[1 - \frac{I_O}{I_O + (m_0 - \rho_l y) r^2}\right] g dy$$

$$v = \sqrt{2g\left(y + \frac{I_O}{\rho_l r^2} \ln\left[\frac{I_O + (M + \rho_l [L - y]) r^2}{I_O + (M + \rho_l L) r^2}\right]\right)}$$

$$\boxed{v(y = L) = \sqrt{2g\left(y + \frac{I_O}{\rho_l r^2} \ln\left[\frac{I_O}{I_O + (M + \rho_l L) r^2}\right]\right)}}$$

15 points de résolution de problème

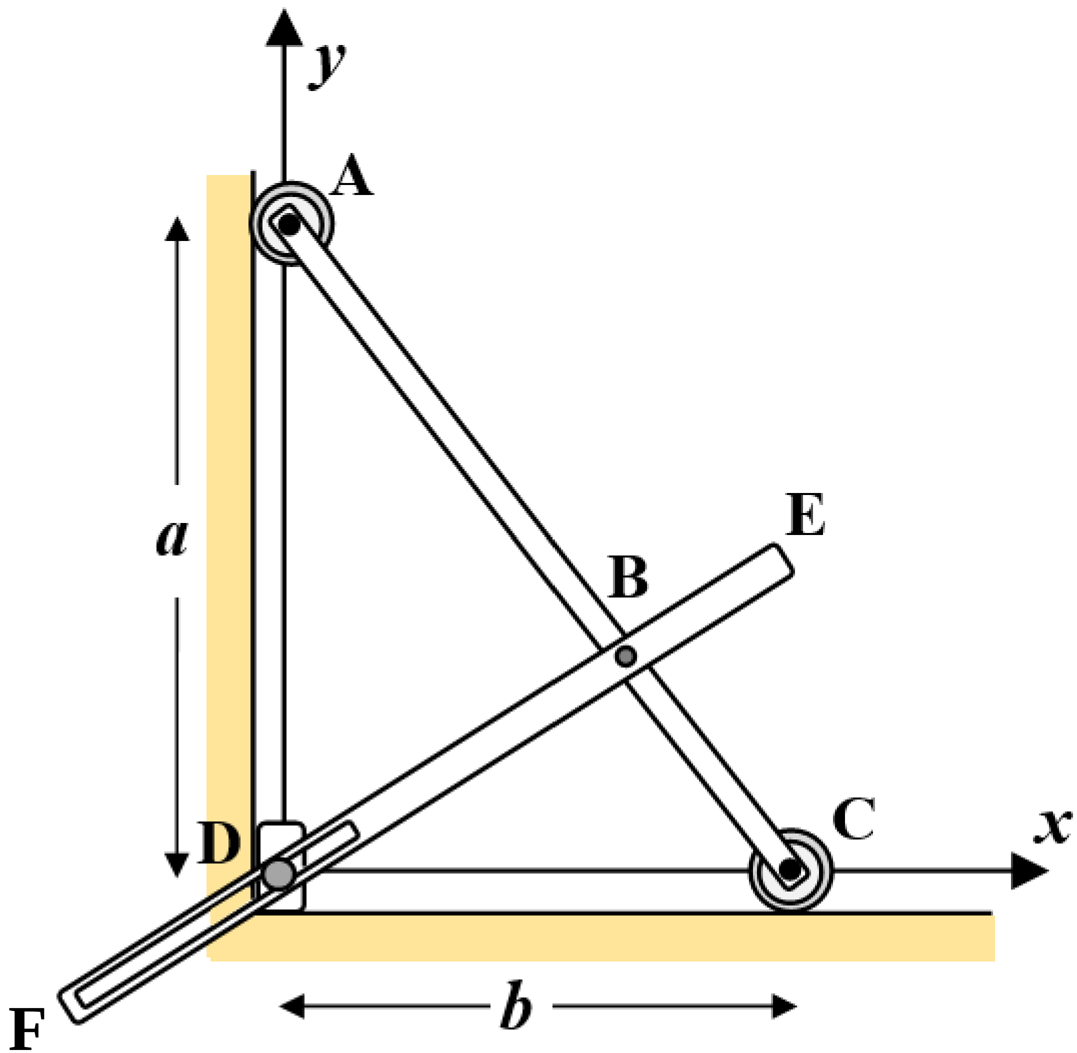
Question 3 (50 points)

Deux tiges ABC et FBE sont disposées telles que montrées sur la figure suivante. Les roulettes aux extrémités **A** et **C** de la tige ABC se déplacent en restant toujours en contact avec les surfaces sur lesquelles elles s'appuient. Le point **B** est une goupille qui permet aux tiges de pivoter l'une par rapport à l'autre. La tige FBE est munie d'une rainure afin de pouvoir glisser sans frottement tout en pivotant autour du point fixe **D**.

À l'instant montré sur la figure, l'extrémité **A** se déplace vers le bas avec une vitesse $v_A = 0{,}6$ m/s. On connaît également les longueurs **AD** = *a* = 2,1 m et **DC** = *b* = 1,5 m. Enfin, nous avons les relations suivantes concernant les longueurs des tiges : 3**AB** $=$ 2**AC** et 2**DE** $=$ 3**DB**.

a) Quelle est la valeur et le sens de la vitesse de rotation ω de la tige ABC ? (15 points)
b) En utilisant le système d'axes de la figure, déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_B$ du point **B**. (15 points)
c) Déterminer la valeur du module de la vitesse de glissement v_D de la tige FBE sur le point **D**. Note : la vitesse de glissement est la vitesse à laquelle le point **B** s'éloigne du point **D**. (10 points)
d) Quelle est la valeur du module de la vitesse v_E de l'extrémité **E** ? (10 points)

Question 3 (50 points)



Question 3 – Solution (1/4)

a) Quelle est la valeur et le sens de la vitesse de rotation ω de la tige ABC. (15 points)

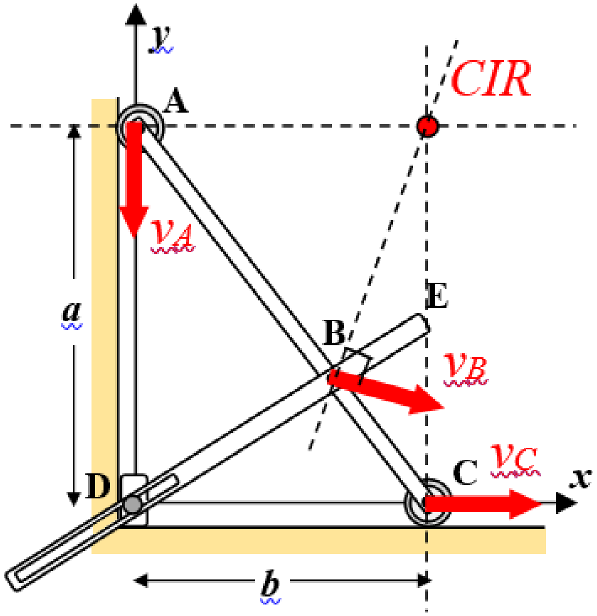
Connaissant les directions des vitesses v_A et v_C, on peut définir le CIR de la tige ABC.

Dans le système d'axes de la figure, les coordonnées du CIR de la tige ABC sont (b,a).

La vitesse angulaire de la tige ABC est donnée par :

$$\boxed{\omega_{ABC} = \frac{v_A}{r_{CIR-A}} = \frac{v_A}{b} = \frac{0,6}{1,5} = 0,400 \text{ rad/s}}$$

dans le sens antihoraire. $\vec{\omega}_{ABC} = 0,4\,\vec{k}$ rad/s



15 points de résolution de problème

Question 3 – Solution (2/4)

b) En utilisant le système d'axes de la figure, déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_B$ du point **B**. (15 points)

Les coordonnées du point **B** sont $(\frac{2b}{3}, \frac{a}{3})$. Le vecteur position $\vec{r}_{B/CIR}$ du point **B** par rapport au CIR est donné par :

$$\vec{r}_{B/CIR} = \left(\frac{2b}{3} - b\right)\vec{\imath} + \left(\frac{a}{3} - a\right)\vec{\jmath} = -0{,}5\vec{\imath} - 1{,}4\,\vec{\jmath}\ \text{m}$$

d'où la vitesse du point **B** :

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CIR-B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0{,}4 \\ -0{,}5 & -1{,}4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_B = 0{,}560\,\vec{\imath} - 0{,}200\,\vec{\jmath}\ \text{m/s}}$$

15 points de résolution de problème

Question 3 – Solution (3/4)

c) Déterminer la valeur du module de la vitesse de glissement v_D de la tige FBE sur le point **D**. Note : la vitesse de glissement est la vitesse à laquelle le point **B** s'éloigne du point **D**. (10 points)

On peut décomposer le mouvement de la tige FBE en un mouvement de glissement sur le point **D** (translation) et un mouvement de rotation autour du pivot **D**.

La vitesse de translation est parallèle à la tige FBE et est la même pour tous les points de la tige alors que la vitesse de rotation est perpendiculaire à la tige.

v_D est donc donnée par la projection de $\vec{v}_B$ sur l'axe de la tige de vecteur unitaire :

$$\vec{u}_{DB} = \frac{\frac{2b}{3}\vec{\imath}+\frac{a}{3}\vec{\jmath}}{\sqrt{(\frac{2b}{3})^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}} = 0{,}819\,\vec{\imath} + 0{,}573\,\vec{\jmath}$$

$$\boxed{v_D = \vec{v}_B \cdot \vec{u}_{DB} = 0{,}344\ \ \text{m/s}}$$

10 points de calculs simples

Question 3 – Solution (4/4)

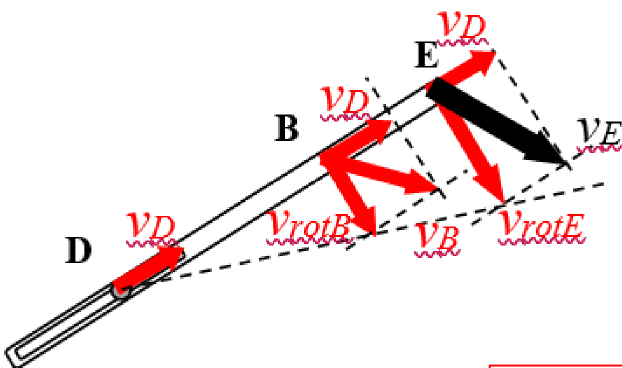
d) Quelle est la valeur du module de la vitesse v_E de l'extrémité **E** ? (10 points)

La vitesse $\vec{v}_E$ du point **E** est composée de la vitesse de translation $\vec{v}_D$ et de la vitesse de rotation $\vec{v}_{rotE}$. Cette dernière est donnée par :

$$\frac{v_{rotE}}{\mathbf{DE}} = \frac{v_{rotB}}{\mathbf{DB}}$$

$$v_{rotE} = \frac{\mathbf{DE}}{\mathbf{DB}} v_{rotB} = \frac{\mathbf{DE}}{\mathbf{DB}} \sqrt{{v_B}^2 - {v_D}^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{(0{,}560^2 + 0{,}200^2) - 0{,}344^2} = 0{,}7276 \text{ m/s}$$

d'où : $\boxed{v_E = \sqrt{v_D^2 + v_{rotE}^2} = \sqrt{0{,}344^2 + 0{,}7276^2} = 0{,}805 \text{ m/s}}$



10 points de résolution de problème

Question 4 (50 points)

En cette fin de session, un peu de nostalgie vous frappe, et vous décidez de sortir une vieille toupie *Beyblade*. Le lancement de la toupie s'effectue en deux étapes (voir figure ci-dessous) :

1. On tire sur un fil denté de longueur $L =$ 30 cm qui s'appuie sur la circonférence externe de la toupie, ce qui lui donne un mouvement de rotation sans translation.
2. Une fois rendu au bout du fil denté, la toupie est relâchée et tombe vers le sol à partir d'une hauteur $h =$ 0,5 m.

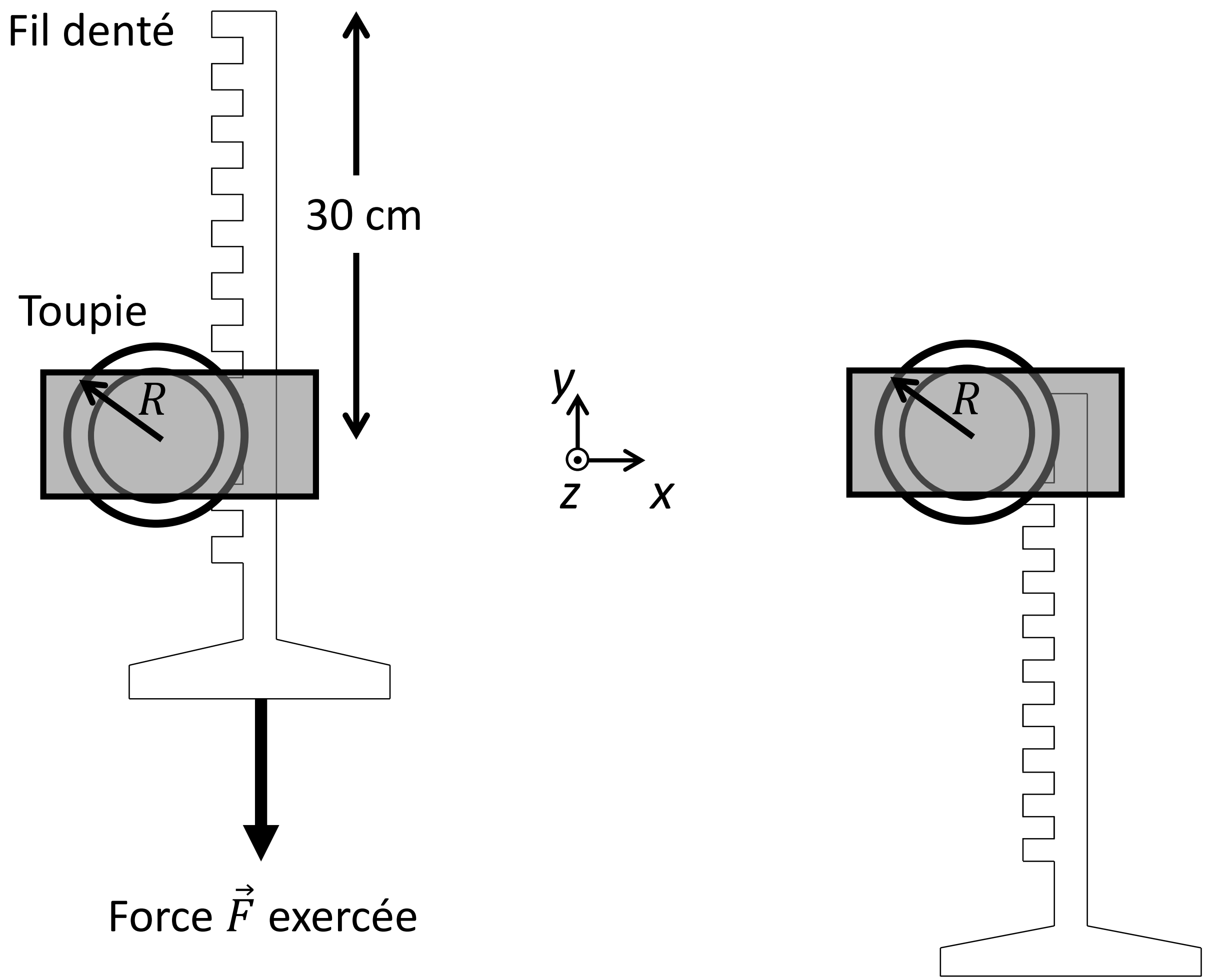
Curieux, vous vous intéressez à l'analyse du mouvement de la toupie (rayon externe $R =$ 2,5 cm, masse $m =$ 700 g, moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation perpendiculaire à la figure et passant par le centre de masse de la toupie $I =$ 2,27 × 10^{-4} kg·m²). Vous supposez qu'en tirant sur le fil, vous exercez une force $\vec{F} = -[20 - \theta]\vec{\jmath}\ \mathrm{N}$ sur la circonférence externe de la toupie, où θ est la position angulaire de la toupie en radians, mesurée positivement dans le sens horaire sur la figure (θ = 0 au départ).

a) Quelle est la vitesse de rotation de la toupie, en tours par minute au moment où elle est relâchée ? **(20 pts)**
b) Comment varie la vitesse de rotation de la toupie après qu'elle a été relâchée ? Justifiez. **(5 pts)**
c) Quelle est l'énergie cinétique totale de la toupie tout juste avant de toucher le sol ? **(15 pts)**
d) Combien de tours la toupie aura fait avant d'atteindre le sol, incluant la phase de lancement? **(10 pts)**

Question 4 (50 points)

Instant initial (vue de haut)
La toupie est immobile et on commence à appliquer la force.

Fin de l'application de la force (vue de haut)
La force cesse d'être appliquée et la toupie est relâchée : elle se met à tomber.



On cherche :

- La vitesse de rotation de la toupie avant qu'elle ne soit relâchée.

Stratégie de résolution :

- Principe travail-énergie (moment non-conservatif en raison de la force appliquée)
- Conservation d'énergie entre l'instant relâché et juste avant de toucher le sol
- Temps de vol à partir de la cinématique (MRUA)
- Calcul du nombre de tours à partir du temps de vol et de la vitesse de rotation trouver en a)

Équation utiles

Rayon de giration :

$$k = \sqrt{I/m}$$

Principe travail-énergie :

$$U_{NC} = \Delta V + \Delta T$$

Relation translation-rotation :

$$\Delta s = r\theta$$

Cinématique (MRUA) :

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

Résolution

a) Principe travail-énergie (la force qui met la toupie en rotation crée un moment externe non-conservatif sur la toupie)

$$U_{NC} = \Delta V + \Delta T$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} M\, d\theta = 0 + \Delta T_{rot}$$

$$\int_0^{12} R\, F d\theta = \frac{1}{2} I_{CM} \omega_f^2$$

$$\int_0^{12} R(20-\theta) d\theta = \frac{1}{2}(k^2 m)\omega_f^2$$

$$0{,}025 \cdot \left[20 \cdot 12 - \frac{12^2}{2}\right] = \frac{1}{2}(0{,}018^2 \cdot 0{,}7)\omega_f^2$$

$$\omega_f = 192{,}5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 30{,}6\,\frac{\text{tr}}{s} = \boxed{1840\,\frac{\text{tr}}{\text{min}}}$$

Ici, $\theta_i = 0$ et

$$\theta_f = \frac{L}{R} = \frac{30}{2{,}5} = 12 \text{ rad}$$

$$I_{CM} = 2{,}27 \times 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

20 points de résolution de problème

b) La vitesse de rotation de la toupie est conservée car la somme des moments par rapport au CM de la toupie est nulle après qu’elle a été relâchée (son accélération angulaire est donc nulle). De manière équivalente, le moment cinétique par rapport au CM est conservé.

5 points de compréhension

Résolution (suite)

c) Conservation de l'énergie :

$$U_{NC} = \Delta V + \Delta T$$

$$0 = mg\Delta\text{h} + \frac{1}{2}mv_f^2 - \cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_i^2}$$

$$v_f = \sqrt{-2g\Delta h} = \sqrt{-2 \cdot 9{,}8 \cdot (-0{,}5)}$$
$$= 3{,}13\ \text{m/s}$$

Pour trouver l'énergie cinétique totale, il faut additionner l'énergie cinétique de translation du CM avec l'énergie cinétique de rotation :

$$T = T_{CM} + T_{rot}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7 \cdot 3{,}13^2 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}27 \times 10^{-4} \times 192{,}5^2$$

$$T = 3{,}43 + 4{,}21 = 7{,}64\ \text{J}$$

15 points de résolution de problème

d) Nombre de tours par la toupie durant le lancement :

$$\frac{\theta_f - \theta_i}{2\pi} = \frac{12}{2\pi} = 1{,}91\ \text{tr}$$

Nombre de tours durant après le lancement :

$$n = t_{vol} \cdot \omega$$

Pour trouver le temps de vol, on procède à l'aide du MRUA de la chute libre :

$$y_f = y_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = 0{,}5 + 0t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$t = 0{,}319\ \text{s}$$

$$\Rightarrow n = 0{,}319[\text{s}] \cdot 30{,}6\left[\frac{\text{tr}}{\text{s}}\right] = 9{,}76\ \text{tr}$$

Le nombre total de tours est donc :

$$N = 1{,}91 + 9{,}76 = 11{,}7\ \text{tr}$$

10 points de calculs simples