PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Examen final
Été 2019

Djamel Seddaoui

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. Une planète gravite autour d'une étoile. Vrai ou faux : le moment cinétique de la planète par rapport à l'étoile est conservé même si sa trajectoire est elliptique. (10 points)

B. Le CIR d'une roue qui roule sur le sol se situe toujours au point de contact entre la roue et le sol. (10 points)

C. Un satellite flottant dans l'espace est composé d'un cylindre plein homogène de masse $m_c = 40\ \mathrm{kg}$ et de deux panneaux identiques d'épaisseurs négligeables de masse $m_p = 10\ \mathrm{kg}$ chacun. Les dimensions du satellite sont données sur les figures ci-dessous. Initialement, les panneaux étaient parallèles au plan *yz* (figure du haut) puis, un petit moteur embarqué les fait tourner autour de l'axe *y* jusqu'à devenir parallèle au plan *xy* (figure du bas).

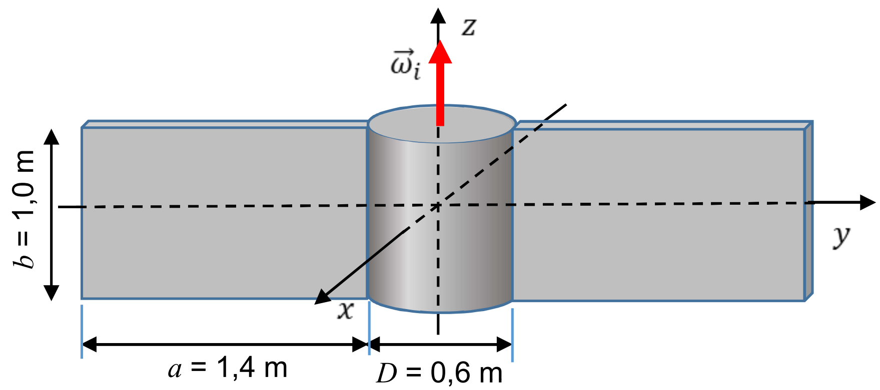
   i. Calculer les moments d'inertie initial I_i et final I_f du satellite par rapport à l'axe *z*.(10 points)

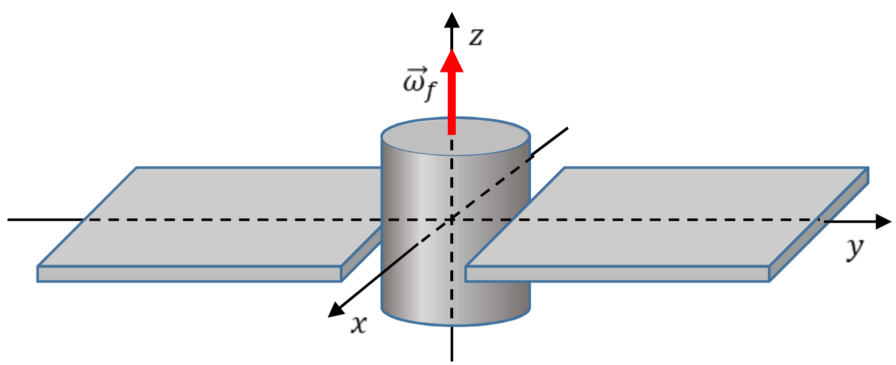
   ii. Si la vitesse angulaire initiale du satellite était $\vec{\omega}_i = 3.0\vec{k}\ \mathrm{rad/s}$, déterminer la vitesse angulaire finale $\vec{\omega}_f$. (10 points)

   iii. La vitesse initiale du centre de masse du satellite était $\vec{v}_{CMi} = 35{,}0\,\vec{j}\ \mathrm{m/s}$, déterminer sa nouvelle vitesse $\vec{v}_{CMf}$. (5 points)

   iv. L'énergie mécanique du satellite est-t-elle conservée durant la rotation des panneaux. Expliquez votre réponse sans faire de calculs (5 points)

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)





Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. **Vrai**. La seule force qui s'exerce sur la planète est la force d'attraction gravitationnelle de l'étoile. Le moment de cette force par rapport à l'étoile est nul quel que soit la trajectoire de la planète. Donc son moment cinétique est conservé.

B. **Faux.** Seules les roues qui roulent sans glisser ont leur CIR au point de contact avec le sol.

C. i.

$$I_i = \frac{1}{2} m_c \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{m_p}{12} a^2 + m_p \left(\frac{a}{2} + \frac{D}{2}\right)^2\right) \qquad \boxed{I_i = 25{,}07 \text{ kg.m}^2}$$

$$I_f = \frac{1}{2} m_c \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{m_p}{12} (a^2 + b^2) + m_p \left(\frac{a}{2} + \frac{D}{2}\right)^2\right) \qquad \boxed{I_f = 26{,}73 \text{ kg.m}^2}$$

C. ii. **Comme aucune force ne s'applique sur le satellite, son moment cinétique par rapport à son centre de masse est conservé.**

$$\vec{H}_i = \vec{H}_f \Rightarrow I_i \vec{\omega}_i = I_f \vec{\omega}_f \Rightarrow \vec{\omega}_f = \frac{I_i}{I_f} \vec{\omega}_i \qquad \boxed{\vec{\omega}_f = \frac{25{,}07}{26{,}73} \times 3\vec{k} = 2{,}81\, \vec{k} \text{ (rad/s)}}$$

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

C. iii. Le satellite est isolé, sa quantité de mouvement est conservée donc sa vitesse reste inchangée. $\vec{v}_{CMf} = 35{,}0\,\vec{j}\ \mathrm{m/s}$,

C. iv. L'énergie mécanique n'est pas conservée car le moteur fait un travail en tournant les panneaux. Le déplacement d'une pièce du satellite par rapport à une autre génère des frottements qui consomment de l'énergie. Lorsque les panneaux s'arrêtent de tourner, leur énergie de déplacement relatif est perdue, principalement, sous forme de chaleur.

Question 2 (50 points)

Dans le mécanisme représenté sur la figure ci-dessous, le pignon B a une masse $m_B = 1{,}8\ \mathrm{kg}$ et un rayon de gyration central $\kappa = 30\ \mathrm{mm}$. La barre ACD a une masse $m_c = 2{,}5\ \mathrm{kg}$ et la couronne extérieure est stationnaire (fixe). Le système se trouve dans un plan horizontal, ne subit aucun frottement et il est initialement au repos. La largeur et l'épaisseur de la barre ACD sont négligeables devant sa longueur.

On applique un couple constant $M = 1{,}25\ \mathrm{N.m}$ sur la barre ACD dans le sens antihoraire pour la faire tourner d'un angle $\theta = 90°$ puis on relâche.

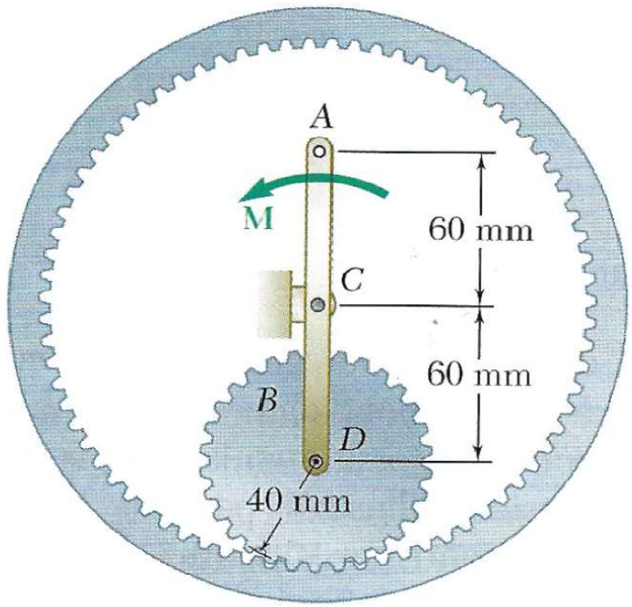
A. Écrire la vitesse v_D du point D et la vitesse angulaire ω_B du pignon B en fonction de la vitesse angulaire ω_C de la barre ACD. (10 points)

B. Déterminer la valeur de ω_C à l'instant où on cesse d'appliquer le couple M. (20 points)

C. Quelle est la grandeur de l'impulsion en rotation gagnée par le système ACD+B formé de la tige ACD et du pignon B durant l'application du couple M. (10 points)

D. Sachant que le temps d'application du couple M est $\Delta t = 16{,}5\ \mathrm{ms}$, déterminer le couple moyen exercé par la couronne sur le système ACD+B durant ce temps. (10 points)

Question 2 (50 points)



Q2 – Solution (1/2)

A. $$\boxed{v_D = \overline{CD}\,\omega_C}$$

$$v_D = R_B\omega_B \Rightarrow \omega_B = \frac{v_D}{R_B} \Rightarrow \boxed{\omega_B = \frac{\overline{CD}}{R_B}\omega_C}$$

B. En prenant comme système la barre ACD et le pignon B, il n'y a pas de moment de force ou de couples non conservatifs qui font un travail à part le couple M. On utilise le principe travail-énergie en prenant comme: état 1: la position avant d'appliquer M

état 2: la position à l'instant où le couple M cesse.

$$M\theta_0 = \frac{1}{2}I_C\omega_C^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 + \frac{1}{2}m_Bv_D^2 = \frac{1}{2}\left(I_C + I_B\left(\frac{\overline{CD}}{R_B}\right)^2 + m_B\overline{CD}^2\right)\omega_C^2$$

Avec:

$$I_C = \frac{m_C}{12}\overline{AD}^2 = 30 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg.m^2}$$

$$I_B = m_B\mathrm{K}^2 = 16{,}2 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg.m^2}$$

$$\boxed{\omega_C = \sqrt{\frac{2M\theta_0}{I_C + I_B\left(\frac{\overline{CD}}{R_B}\right)^2 + m_B\overline{CD}^2}} = 17{,}3\ \mathrm{rad/s}}$$

Q2 – Solution (2/2)

C. Impulsion en rotation gagnée par le système ACD+B

$$\mathrm{Imp} = H_f - H_i = I_C\omega_C - I_B\omega_B + \overline{CD}m_B v_D = \left(I_C - I_B\frac{\overline{CD}}{R_B} + m_B\overline{CD}^2\right)\omega_C$$

$$\boxed{\mathrm{Imp} = 0{,}119\ \mathrm{N.m.s}}$$

D. Les deux couples externes agissant sur le système ACD+B sont : le couple M et le couple exercé par la couronne $M_{couronne}$:

$$\mathrm{Imp} = (M + M_{couronne})\Delta t$$

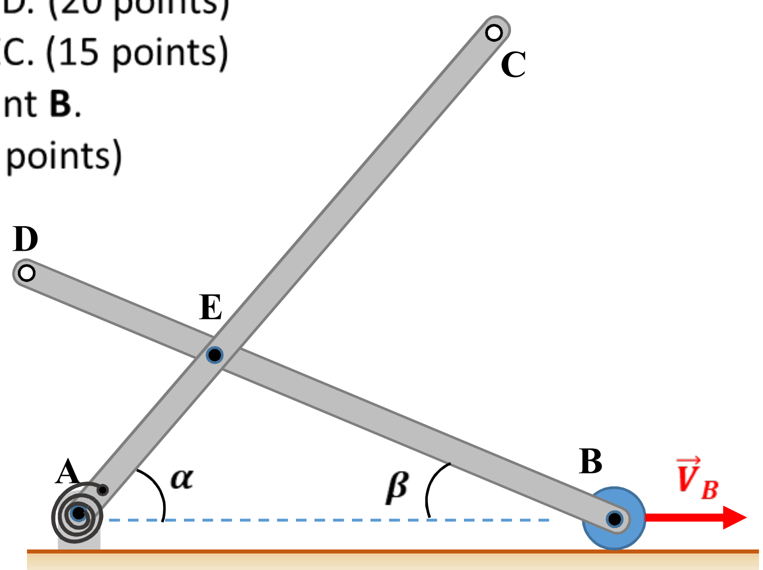
$$\boxed{M_{couronne} = \frac{\mathrm{Imp}}{\Delta t} - M = \frac{0{,}119}{16{,}5 \times 10^{-3}} - 1{,}25 = 5{,}96\ \mathrm{N.m}}$$

Question 3 (50 points)

Soit le mécanisme illustré sur la figure ci-dessous. Les tiges rigides AEC et BED sont identiques et sont reliées entre-elles à l'aide d'un pivot **E**. La tige AEC est retenue au point **A** par un pivot fixe et un ressort de torsion dont la constante est $\mathrm{K} = 100\ \mathrm{N.m/rad}$ et sa position naturelle correspond à $\alpha = \alpha_0 = 90°$. Une force $\vec{F}$ tire sur le point **B** pour le déplacer vers la droite. À l'instant représenté sur la figure, la vitesse du point **B** est $V_B = 3\ \mathrm{cm/s}$.
On donne : $\overline{AE} = \overline{DE} = 30\ \mathrm{cm}$, $\overline{BE} = \overline{CE} = 62\ \mathrm{cm}$ et $\alpha = 30°$.

À l'instant représenté sur la figure, déterminer :

A. L'angle d'orientation de la vitesse $\vec{V}_E$ du point **E** par rapport à l'horizontale. La valeur de cette vitesse n'est pas demandée (5points)
B. La valeur et le sens de la vitesse angulaire de la tige BED. (20 points)
C. La valeur et le sens de la vitesse angulaire de la tige AEC. (15 points)
D. La puissance développée par la force qui agit sur le point **B**.
 Négligez toutes les masses et tous les frottements (10 points)



Q3 – Solution (1/2)

A. l'angle d'orientation de $\vec{V}_E$ est $\alpha - 90° = -60°$

B. On utilise le CIR de la tige BED

La loi des sinus appliquée au triangle ABE donne:

$$\frac{\sin(\beta)}{\overline{AE}} = \frac{\sin(\alpha)}{\overline{BE}} \Rightarrow \beta = 14{,}0°$$

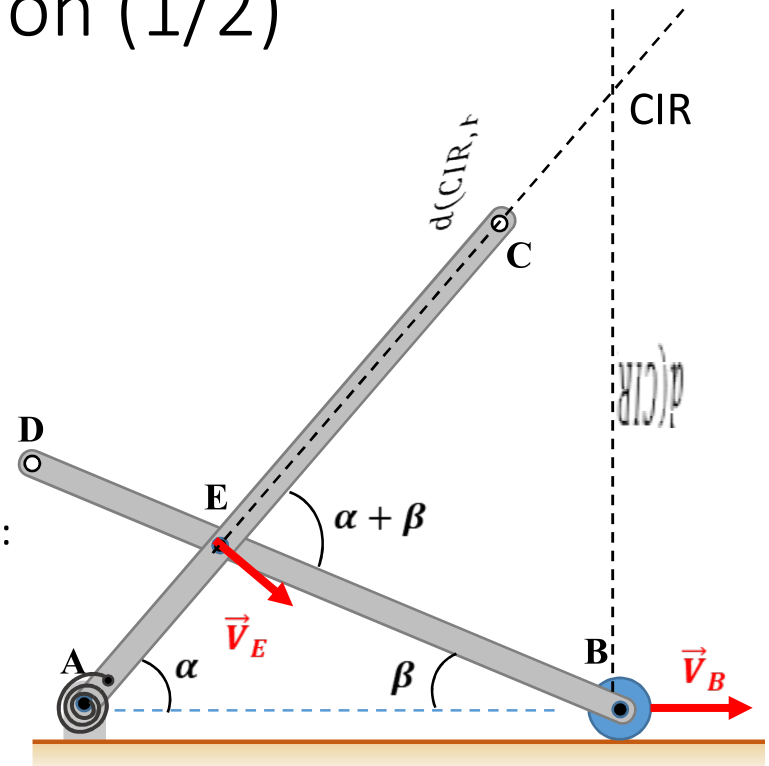
La loi des sinus appliquée sur le triangle EB(CIR) donne:

$$\frac{d(CIR,E)}{\sin(90-\beta)} = \frac{d(CIR,B)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\overline{BE}}{\sin(90-\alpha)}$$

$$\Rightarrow d(CIR,E) = 69{,}46 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d(CIR,B) = 77{,}29 \text{ cm}$$

$\omega_{BED} = \frac{V_B}{d(CIR,B)}$ =3,88 rad/s dans le sens antihoraire



C. La tige AEC est en rotation pure autour de A: $\omega_{AEC} = \frac{V_E}{\overline{AE}}$

avec: $V_E = \omega_{BED}\, d(CIR,E) = 2{,}695$ m/s $\Rightarrow$ $\omega_{AEC} = 8{,}98$ rad/s dans le sens horaire

Q3 – Solution (2/2)

D. La force ***F*** est la seule force non conservative qui fait un travail car les frottement sont négligeables. Alors, en négligeant toutes les masses, le principe travail énergie donne:

$$U_F = \Delta E = \frac{1}{2}\mathrm{K}(\alpha - \alpha_0)^2$$

La puissance ***P*** de la force ***F*** est donc la dérivée par rapport au temps de l'énergie potentielle du ressort.

$$P = \frac{dU_F}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathrm{K}(\alpha - \alpha_0)^2\right) = \mathrm{K}(\alpha - \alpha_0)\frac{d\alpha}{dt} = -\mathrm{K}(\alpha - \alpha_0)\omega_{AEC}$$

ou encore

$$P_F = -P_{\mathrm{res}} = -\vec{M}_{\mathrm{res}} \cdot \vec{\omega}_{AEC} = K(\alpha - \alpha_0)\vec{k} \cdot \left(-\omega_{AEC}\vec{k}\right) = -K(\alpha - \alpha_0)\omega_{AEC}$$

$$\boxed{P = 940\,W}$$

Question 4 (50 points)

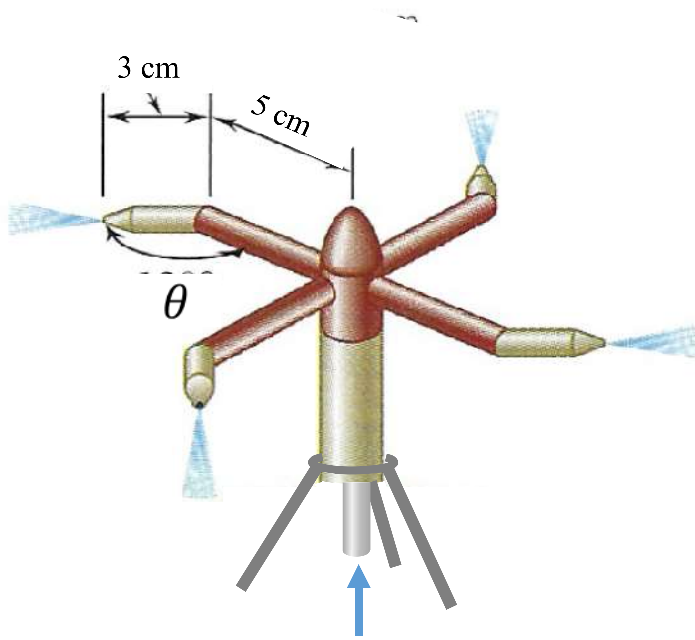
Un arroseur rotatif à quatre bras identiques qui consistent chacun en deux tuyaux horizontaux droits faisant un angle $\theta = 120°$ l'un avec l'autre. L'arroseur repose sur le sol sans aucun ancrage à l'aide d'un trépied. Un débit d'eau μ entre par un tuyau vertical de section $S_e = 3\ \mathrm{cm}^2$ se trouvant sous l'arroseur. La masse de la partie fixe de l'arroseur est $m_f = 300\ \mathrm{g}$ et la masse de la partie rotative est $m_r = 200\ \mathrm{g}$ et un moment d'inertie $I = 5\ \mathrm{kg.cm}^2$ par rapport à son axe de rotation. Des frottements statiques et cinétiques entre les deux parties de l'arroseur sont équivalents à des couples $M_s = 0{,}86\ \mathrm{N.m}$ et $M_k = 0{,}6\ \mathrm{N.m}$ respectivement. La densité de l'eau est $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m}^3$.

A. Déterminer le débit d'eau maximal μ_{max} que peut supporter l'arroseur sans se soulever du sol. (15 points)

B. Quelle est la valeur limite du diamètre d_s de l'orifice de chacun des quatre gicleurs qui permet à la partie mobile de l'arroseur de tourner lorsque le débit d'eau entrant dans l'arroseur est $\mu = 0{,}5\ \mathrm{kg/s}$. (20 points)

C. Dans le cas de la sous-question B, quelle sera l'accélération angulaire initiale de la partie mobile lorsque celle-ci commencera à tourner? (15 points)

Question 4 (50 points)



Q4 – Solution (1/2)

A. Débit maximal: Lorsque l'arroseur est sur le point de décoller du sol, il subit deux forces dans la direction verticale qui sont: la poussée du débit entrant F_e et le poids. Les réactions du sol sont nulles. Ces deux forces sont donc égales et opposées.

$$F_e = \mu_{max} v_{e,max} = (m_f + m_p) g \quad \text{avec} \quad \mu_{max} = \rho S_e v_{e,max} \Rightarrow v_{e,max} = \frac{\mu_{max}}{\rho S_e}$$

Donc: $$F_e = \frac{\mu_{max}^2}{\rho S_e} = (m_f + m_p) g \Rightarrow \boxed{\mu_{max} = \sqrt{\rho S_e (m_f + m_p) g} = 1{,}21 \text{ kg/s}}$$

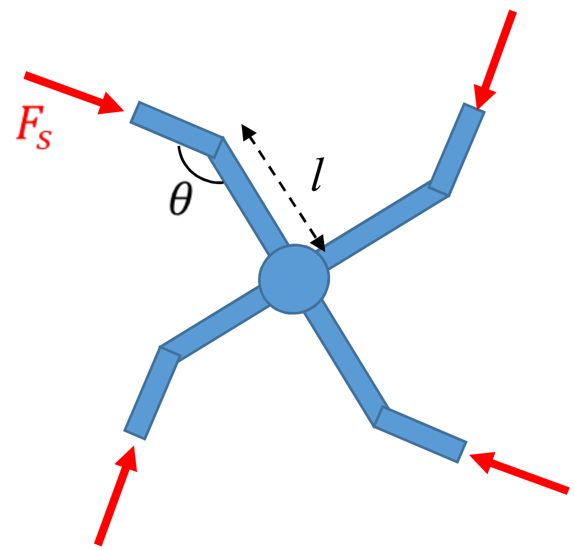
B. Pour que l'arroseur commence à tourner, il faut que les forces de poussée du débit d'eau puisse vaincre le couple des frottements statiques. Donc, la valeur minimale $F_{s,min}$ de force de poussée F_s du débit sortant dans chaque gicleur est donnée par:

$$M_s = 4 F_{s,min} l sin\theta \Rightarrow F_{s,min} = 4{,}965 \text{ N}$$

D'un autre côté, la force F_s est reliée à la section de sortie de chaque gicleur S_s par:

$$F_{s,min} = \mu_s v_s = \mu_s \frac{\mu_s}{\rho S_s} \quad \Rightarrow \quad S_s = \frac{\mu_s^2}{\rho F_{s,min}}$$

Avec $\mu_s = \frac{\mu}{4} = 0{,}125$ kg/s le débit massique sortant de chaque gicleur.



Q4 – Solution (2/2)

et: $S_s = \pi \frac{d_s^2}{4} \Rightarrow d_s = \sqrt{\frac{4S_s}{\pi}} \Rightarrow \boxed{d_s = \frac{2\mu_s}{\sqrt{\pi \rho F_{s,min}}} = 2 \text{ mm}}$

C. À l'instant où la partie mobile du gicleur commence à tourner, la vitesse des gicleurs est encore nulle alors l'accélération angulaire de la partie mobile est donnée par:

$$\sum M = I\alpha \quad \Rightarrow \quad 4F_{s,min} l sin\theta - M_k = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{4F_{s,min} l sin\theta - M_k}{I}$$

Selon la sous-question B, on sait que: $4F_{s,min} l sin\theta = M_s \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\alpha = \frac{M_s - M_k}{I} = \frac{0{,}86 - 0{,}6}{5 \times 10^{-4}} = 520 \text{ rad}/s^2}$$