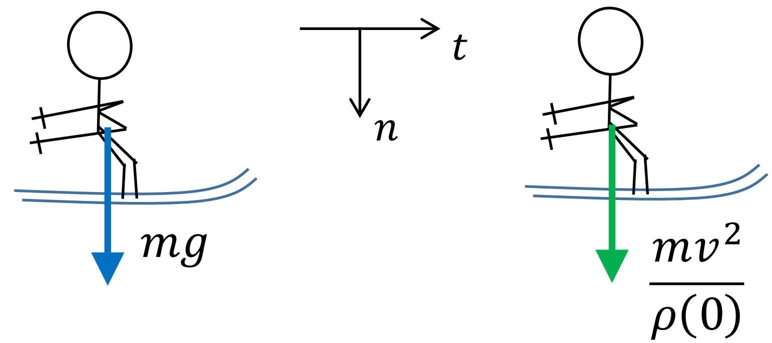
PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 2
Automne 2020

Retour en classe

Question 1 – Solution (1/2)

A. [20 pts]
On considère le cas limite où le skieur est sur le point de décoller de la bosse (la normale est nulle).

Dans ce cas, le poids doit générer l'accélération normale (centripète) nécessaire pour que le skieur reste sur la trajectoire parabolique.



$$y = -Ax^2 \Rightarrow \rho(0) = \frac{1}{A} \qquad \sum F_n = mg - N = \frac{mv^2}{\rho(0)} \leq mg \Rightarrow \boxed{v \leq \sqrt{\frac{g}{A}}}$$

B. [15 pts]
Le travail fait par la résistance de l'air lorsque le véhicule se déplace à vitesse constante v sur une distance d est égal à :

$$U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -Fd = -Bv^2 d \Rightarrow \begin{array}{l} U_{100} = -57{,}9 \text{ kJ} \\ U_{120} = -83{,}3 \text{ kJ} \end{array}$$

Puisque ce travail est égal (en module) à l'énergie que doit fournir le moteur pendant le trajet, on voit clairement **qu'il est plus avantageux de rouler moins vite, mais plus longtemps.** Ici, une augmentation de 20 % de la vitesse induit une augmentation de 44 % de carburant consommé (dépendance quadratique).
Note : une autre façon de voir ce résultat est de remplacer $d = vt$. On obtient $U = -Bd^3/t^2$, ce qui confirme qu'il faut parcourir la distance d le plus lentement possible.

Question 1 – Solution (2/2)

C. [15 pts]
On pose un axe positif vers le bas pour A et B, ainsi qu'un axe positif vers la droite pour C.

$$\sum \Delta\ell = \Delta\ell_A + \Delta\ell_B + \Delta\ell_C = 3\Delta y_A + 4\Delta y_B + \Delta x_C = 0$$

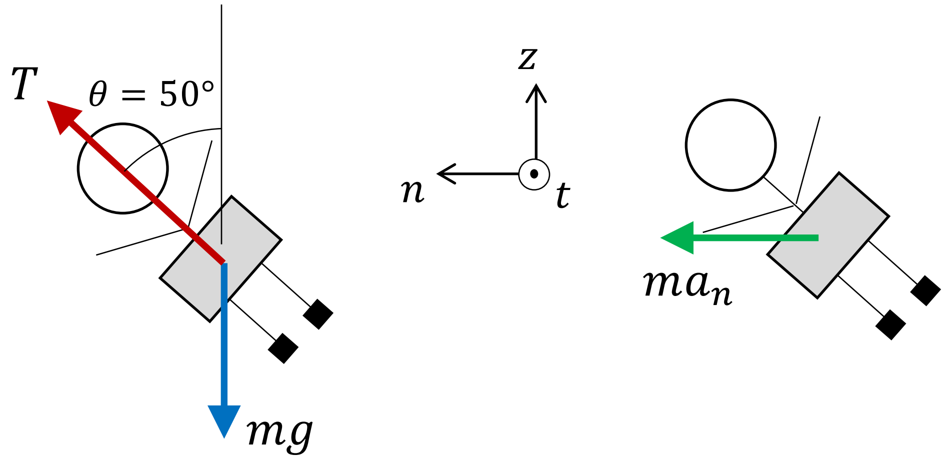
$$\Rightarrow \quad 3v_{Ax} + 4v_{Bx} + v_{Cx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_{Ax} = -\frac{4v_{Bx} + v_{Cx}}{3} = -4 \text{ cm/s}$$

Le bloc A se délplace à 4 cm/s vers le haut.

Question 2 – Solution (1/2)

A. [10 pts] Faites le DCL-DCE d'une chaise lorsque le manège est en mouvement.



B. [20 pts] Déterminez l'expression du module de la vitesse d'une chaise en fonction de son inclinaison θ par rapport à la verticale, puis faites l'application numérique pour la valeur spécifique $\theta = 50°$.

$$\sum F_z = T\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\sum F_n = T\sin\theta = \frac{mv^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\rho T\sin\theta}{m}}$$

Question 2 – Solution (2/2)

Le rayon de courbure est le rayon de la trajectoire circulaire dans le plan nt.

$$\rho = \frac{a}{2} + b + L\sin\theta = 6{,}33 \text{ m}$$

On trouve alors :

$$\boxed{v = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + b + L\sin\theta\right) g\tan\theta} = 8{,}60 \text{ m/s}}$$

C. [15 pts] Combien de temps faut-il au manège pour amener la chaise à la vitesse calculée en B à partir du repos ?

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2e^{-v/20} \Rightarrow \int_0^v e^{v/20}dv = \int_0^t 2dt \Rightarrow 20\left(e^{\frac{v}{20}} - 1\right) = 2t$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 10\left(e^{\frac{v}{20}} - 1\right) = 5{,}37 \text{ s}}$$

D. [5 pts] Quel est le poids apparent ressenti par une personne lorsque le manège est en marche ? Exprimez votre réponse en multiple du poids réel de la personne.

Le poids apparent est la force du siège sur la personne, qui n'est rien d'autre que la tension ici.

$$\boxed{N = T = \frac{mg}{\cos\theta} = 1{,}56mg}$$

Q3 – Solution (1/2)

A. Quantités conservées

i. [10 pts] Les forces qui agissent sur le manchon sont le poids (conservatif), le ressort (conservatif) au début du mouvement et la normale du guide (non conservative). Par contre, la normale du guide de fait pas de travail puisqu'elle est perpendiculaire au mouvement du manchon. **L'énergie mécanique du manchon (avec ressort) est donc conservée.**

ii. [5 pts] **La QM du manchon n'est pas conservée.** Justification 1 : la somme des forces sur le manchon n'est pas nulle pendant son mouvement. Justification 2 : le vecteur vitesse du manchon varie pendant son mouvement.

B. Constante de rappel minimale pour atteindre le point A

Conservation de l'énergie mécanique du manchon

État 1 : Manchon au repos en C avec ressort comprimé.

État 2 : Manchon instantanément au repos en D.

Longueur naturelle et longueur initiale du ressort

$$L_0 = \frac{\pi}{2}R \qquad L_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)R$$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}k(L_1 - L_0)^2 + mgy_1 = mgy_2$$

$$\frac{1}{2}k\theta^2R^2 - mgR\cos\theta = mgR \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{2mg}{R\theta^2}(1+\cos\theta) = 66{,}8\ \mathrm{N/m}}$$

Q3 – Solution (2/2)

C. Impulsion exercée par la butée au point A pour immobiliser le manchon

Conservation de l'énergie mécanique du manchon entre D et A

État 1 : Manchon instantanément au repos en D.

État 2 : Manchon en mouvement juste avant d'atteindre A.

$$E_1 = E_2$$

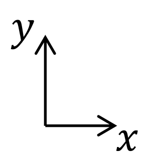
$$mgR = \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2gR} = 2{,}426\ \mathrm{m/s}$$

Principe impulsion-QM

État 1 : Manchon en mouvement juste avant d'atteindre A.

État 2 : Manchon immobile au point A.



$$\mathbf{Imp} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

$$\mathbf{Imp} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\mathbf{Imp} = m\left(\vec{0} - [-v_A\vec{\jmath}]\right)$$

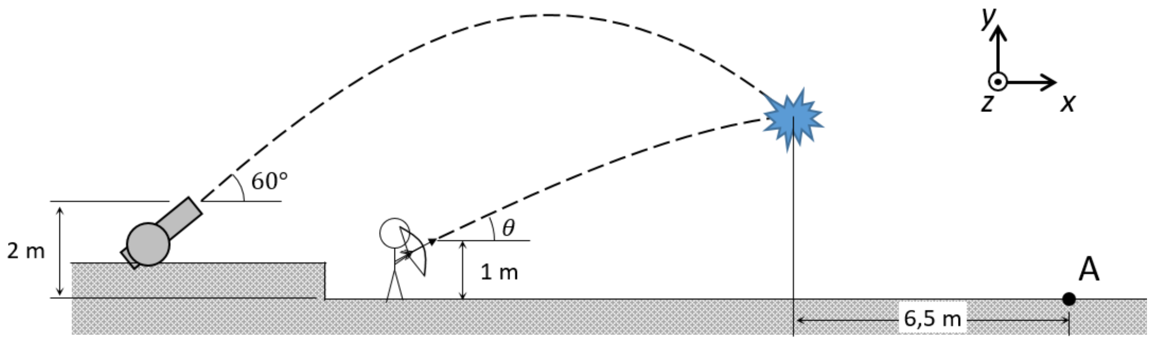
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{Imp} = mv_A\vec{\jmath} = 0{,}364\vec{\jmath}\ \mathrm{N \cdot s}}$$

L'impulsion est de 0,364 N·s orientée vers le haut.

Q4 – Solution (1/2)

A. Position de l'impact

Le projectile est en chute libre. Les équations du MUA s'appliquent.



$$x_P(t) = x_{P0} + v_{P0x}t$$
$$= 0 + 15\cos 60°\, t$$

$$y_P(t) = y_{P0} + v_{P0y}t - \frac{g}{2}t^2$$
$$= 2 + 15\sin 60°\, t - \frac{9{,}81}{2}t^2$$

$$\boxed{\vec{r}_{\text{coll}} = \vec{r}(t = 2\text{ s}) = (15{,}0\vec{\imath} + 8{,}36\vec{\jmath})\text{ m p/r au canon}}$$

B. Vitesse de la flèche juste avant l'impact

On peut trouver la vitesse du projectile juste avant l'impact :

$$v_{Px} = v_{P0x} = 15\cos 60° = 7{,}50\text{ m/s}$$

$$v_{Py} = v_{P0y} - gt = 15\sin 60° - 9{,}81 \cdot 2 = -6{,}63\text{ m/s}$$

et la vitesse projectile+flèche juste après l'impact :

$$v_{FPx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6{,}5\text{ m}}{0{,}85\text{ s}} = 7{,}65\text{ m/s}$$

$$0 = y_{coll} + v_{FPy}\Delta t - \frac{g}{2}\Delta t^2 \quad\Rightarrow\quad v_{FPy} = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{g}{2}\Delta t^2 - y_{coll}\right) = -5{,}67\text{ m/s}$$

Q4 – Solution (2/2)

Pendant la collision, la seule force externe qui agit sur le système projectile + flèche est le poids. Puisque ce n'est pas une force impulsive, son effet est négligeable pendant l'impact et on considère que la résultante sur le système est nulle. Ainsi, on peut appliquer la conservation de la QM.

$$\vec{L}_{\text{juste avant}} = \vec{L}_{\text{juste après}}$$

$$m_P \vec{v}_P + m_F \vec{v}_F = (m_P + m_F)\vec{v}_{PF}$$

$$0{,}5(7{,}50\vec{\imath} - 6{,}63\vec{\jmath}) + 0{,}05\vec{v}_F = 0{,}55(7{,}65\vec{\imath} - 5{,}67\vec{\jmath})$$

$$\boxed{\vec{v}_F = (9{,}15\vec{\imath} + 3{,}93\vec{\jmath})\ \text{m/s}}$$

C. Pourcentage d'énergie mécanique perdue pendant l'impact

Énergie juste avant l'impact : $E_1 = \frac{1}{2} m_P v_P^2 + \frac{1}{2} m_F v_F^2 = 25{,}05 + 2{,}479 = 27{,}53\ \text{J}$

Énergie juste après l'impact : $E_2 = \frac{1}{2}(m_P + m_F) v_{PF}^2 = 24{,}93\ \text{J}$

Pourcentage d'énergie perdue : $\boxed{\frac{|E_2 - E_1|}{E_1} = 9{,}44\ \%}$

Q4 – Solution (3/2)

BONUS. Vitesse et angle avec lesquelles la flèche a été tirée.

On sait que la flèche a été tirée à une hauteur $y_{F0} = 1$ m au-dessus du sol, mais on ne connait pas la position horizontale x_{F0} de l'archer ni l'instant t_{F0} auquel la flèche a été tirée. On cherche v_{F0} et θ.

Les équations du MUA nous disent que :

1. $y_{coll} = y_{F0} + v_{F0}\sin\theta\,(t_{coll} - t_{F0}) - \frac{g}{2}(t_{coll} - t_{F0})^2 = 1 + v_{F0}\sin\theta\,(2 - t_{F0}) - 4{,}905(2 - t_{F0})^2$

   $8{,}36 = 1 + v_{F0}\sin\theta\,(2 - t_{F0}) - 4{,}905(2 - t_{F0})^2$
2. $v_{Fx} = v_{F0}\cos\theta = 9{,}15\ \mathrm{m/s}$
3. $v_{Fy} = v_{F0}\sin\theta - g(t_{coll} - t_{F0}) = v_{F0}\sin\theta - 9{,}81(2 - t_{F0}) = 3{,}93\ \mathrm{m/s}$
4. $v_{Fy}^2 = (v_{F0}\sin\theta)^2 - 2g(y_{coll} - y_{F0}) = (v_{F0}\sin\theta)^2 - 144{,}40 = 3{,}93^2\ \mathrm{m^2/s^2}$

On utilise [l'équation 4] ou [on isole $v_{F0}\sin\theta$ dans la 3^e équation et on susbstitue dans la 1re] :

$$7{,}36 - 3{,}93(2 - t_{F0}) - 4{,}905(2 - t_{F0})^2 = 0$$

$$\Rightarrow\ 2 - t_{F0} = \frac{-3{,}93 + \sqrt{3{,}93^2 + 4(4{,}905)(7{,}36)}}{9{,}81} = 0{,}888\ \mathrm{s}\ \Rightarrow\ v_{F0}\sin\theta = 12{,}64\ \mathrm{m/s}$$

Ainsi : $v_{F0}\sin\theta = 12{,}64\ \mathrm{m/s}$

$v_{F0}\cos\theta = 9{,}15\ \mathrm{m/s}$

$$\Rightarrow\ \boxed{v_{F0} = \sqrt{9{,}15^2 + 12{,}64^2} = 15{,}6\ \mathrm{m/s}}$$

$$\boxed{\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{12{,}64}{9{,}15}\right) = 54{,}1^\circ}$$