PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 1
Automne 2020

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

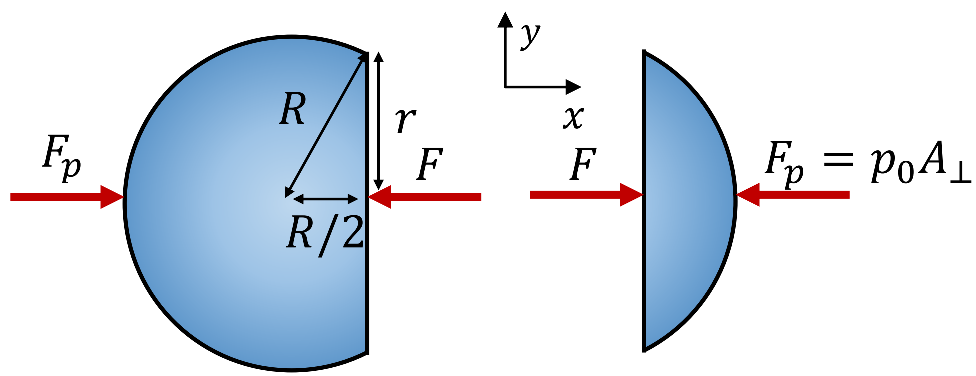
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. Une force interne est une force qui s'exerce entre deux corps qui font partie du même système étudié. On ne dessine pas ces forces dans le DCL du système, car leurs effets s'annulent par action-réaction.

B. Faux. La force ressentie par la plume (due au sol) et par le sol (due à la plume) sont égales en module et de sens opposé (action-réaction).

C. Faux. La poussée d'Archimède s'applique au centre de gravité (ou de masse) du volume de fluide déplacé.

D. Pour séparer les coquilles, il faut tirer horizontalement avec une force $F = F_p$ (la normale devient nulle lorsque les coquilles sont sur le point de se séparer). La surface à utiliser pour calculer la force de pression est la projection des coquilles sur le plan yz, i.e. la surface du disque de rayon r à la jonction entre les deux coquilles.



$$\boxed{F = p_o A_\perp = p_0 \pi r^2 = p_0 \pi \left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\pi p_0 R^2 = 597\ \mathrm{N}}$$

Q2 – Solution (1/2)

A. Les composantes du vecteur $\vec{T}$ sont :

$$\vec{r}_B = \left(0{,}50\vec{\imath} + 0{,}50\vec{\jmath} - 0{,}20\vec{k}\right)\,\mathrm{m} \qquad \vec{r}_D = \left(0{,}25\vec{\jmath} + 0{,}30\vec{k}\right)\,\mathrm{m}$$

$$\hat{u}_{BD} = \frac{\vec{r}_D - \vec{r}_B}{|\vec{r}_D - \vec{r}_B|} = \frac{-0{,}50\vec{\imath} - 0{,}25\vec{\jmath} + 0{,}50\vec{k}}{0{,}75} = -\frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{T} = T\hat{u}_{BD} = \left(-80{,}0\,\vec{\imath} - 40{,}0\,\vec{\jmath} + 80{,}0\,\vec{k}\right)\mathrm{N}}$$

B. Les composantes du vecteur $\vec{\tau}$ sont :

$$\vec{\tau} = \tau\left(-\frac{3}{\sqrt{3^2+5^2}}\cos 30°\,\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{3^2+5^2}}\sin 30°\,\vec{\jmath} - \frac{5}{\sqrt{3^2+5^2}}\vec{k}\right)\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \left(-17{,}8\vec{\imath} + 10{,}3\vec{\jmath} - 34{,}3\vec{k}\right)\ \mathrm{N\cdot m}}$$

Q2 – Solution (2/2)

C. Système équivalent au point O.

Force équivalente

$$\boxed{\vec{R} = \vec{T} = \left(-80{,}0\,\vec{\imath} - 40{,}0\,\vec{\jmath} + 80{,}0\,\vec{k}\right)\,\mathrm{N}}$$

Couple équivalent

$$\vec{M}_O^R = \vec{\tau} + \vec{r}_{OB} \times \vec{T} \qquad \vec{\tau} = \left(-17{,}8\vec{\imath} + 10{,}3\vec{\jmath} - 34{,}3\vec{k}\right)\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$\vec{r}_{OB} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}50 & 0{,}50 & -0{,}20 \\ -80{,}0 & -40{,}0 & 80{,}0 \end{vmatrix} = \left(32{,}0\vec{\imath} - 24{,}0\vec{\jmath} + 20{,}0\vec{k}\right)\ \mathrm{N\cdot m}$$

On aurait aussi pu utiliser le vecteur position $\vec{r}_{OD}$ par principe de transmissibilité.

$$\boxed{\vec{M}_O^R = \vec{\tau} + \vec{r}_{OB} \times \vec{T} = \left(14{,}2\vec{\imath} - 13{,}7\vec{\jmath} - 14{,}3\vec{k}\right)\ \mathrm{N\cdot m}}$$

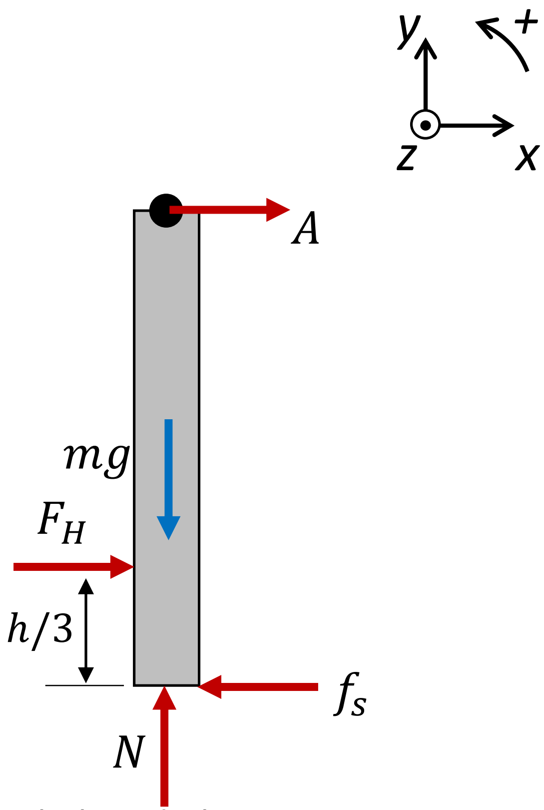
D. Moment du couple équivalent par rapport à l'axe OC de rotation de la trappe.

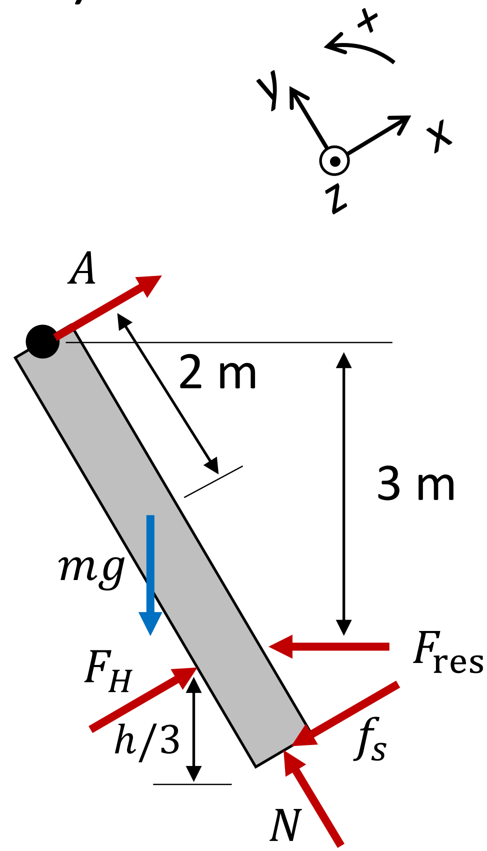
$$\hat{u}_{OC} = \frac{0{,}50\,\vec{\jmath} - 0{,}20\vec{k}}{\sqrt{0{,}50^2 + 0{,}20^2}} = 0{,}9285\vec{\jmath} - 0{,}3714\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_{OC}^R = (\vec{M}_O^R \cdot \hat{u}_{OC})\hat{u}_{OC} = -7{,}4092\hat{u}_{OC} = \left(-6{,}88\vec{\jmath} + 2{,}75\vec{k}\right)\ \mathrm{N\cdot m}}$$

Q3 – Solution (1/3)

A. DCL de la porte AC et AE





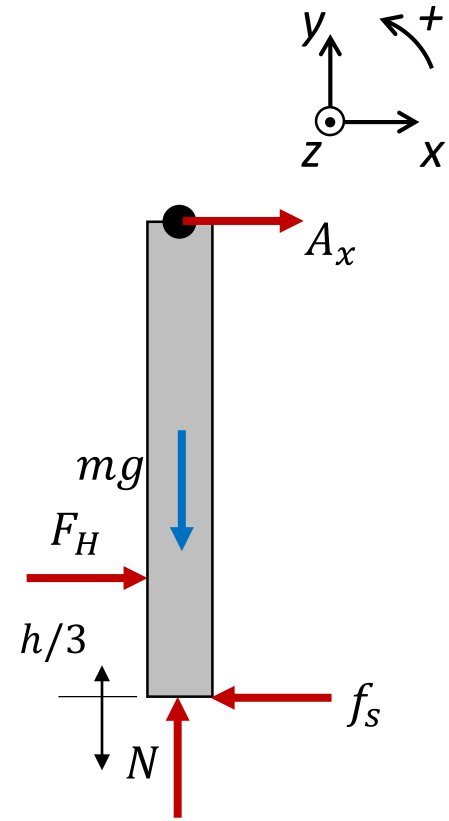
Puisque le bas de la porte est en contact avec le sol, il faut ajouter une normale perpendiculaire au sol et un frottement statique vers la gauche (la porte s'ouvre vers la droite).

La force hydrostatique est perpendiculaire à la porte et son point d'application est situé au tiers de la hauteur de fluide en contact avec la porte.

La force du ressort dans la situation AC est nulle. Dans la situation AE, elle est horizontale et s'applique à une hauteur de 3 m sous le point A.

Q3 – Solution (2/3)

B. Hauteur maximale d'eau pour que la porte reste en position verticale



Force hydrostatique

$$F_H = \frac{\rho g h A}{2} = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot h \cdot 2}{2} h = 9810 h^2 \text{ N}$$

Frottement statique maximal (porte sur le point de pivoter)

$$f_s = f_{s,\max} = \mu_s N$$

Équilibre statique

$$\sum F_y = N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

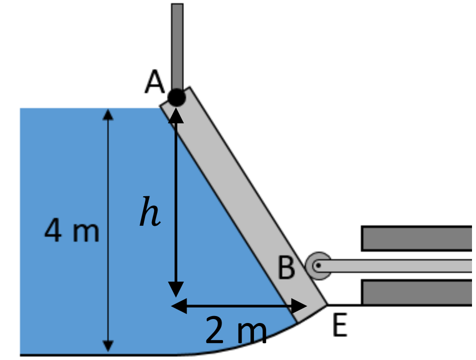
$$\sum M_{A,z} = \left(4 - \frac{h}{3}\right) F_H - 4 f_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(4 - \frac{h}{3}\right) \frac{\rho g h A}{2} - 4\mu_s m g = 0$$

$$3270 h^3 - 39240 h^2 + 164808 = 0$$

Et on obtient une équation cubique… On ne demande pas aux étudiants d'être capable de résoudre cette équation analytiquement. Bien sûr, il s'agissait d'un examen à livre ouvert, alors les étudiants pouvaient la résoudre numériquement par la méthode de leur choix (ex. : Wolfram Alpha, etc.), mais ce n'était pas intentionnel. Tous les points ont été donnés si la démarche est correcte jusqu'à l'équation cubique.

$$\Rightarrow \quad \boxed{h = 2{,}28 \text{ m}} \qquad h = 11{,}6 \text{ m} \qquad h = -1{,}90 \text{ m}$$

Q3 – Solution (3/3)



$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} = 3{,}4641\ \text{m}$$

C. Force de frottement en position AE

Attention : ici le frottement statique n'est pas maximal.

Attention : la hauteur de fluide en contact avec la porte ne vaut pas 4 m !

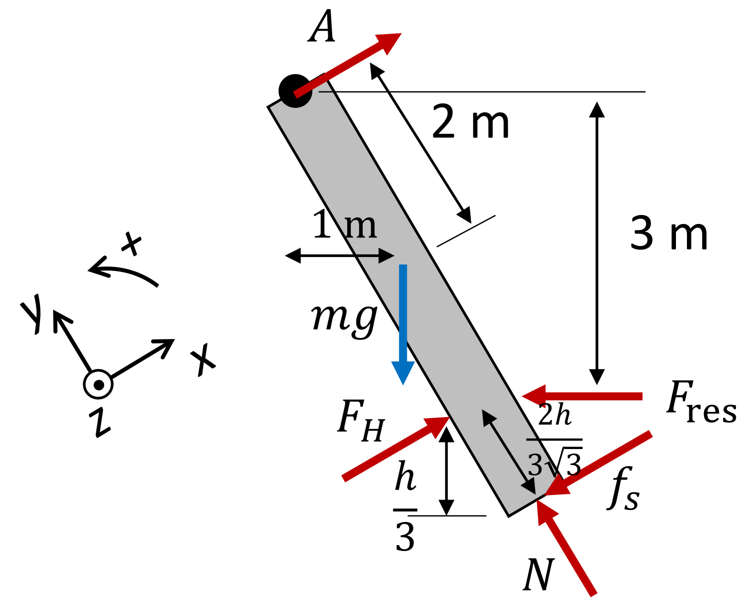
Force hydrostatique

$$F_H = \frac{\rho g h A}{2} = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot h \cdot (2 \cdot 4)}{2} = 135\ 931\ \text{N}$$

Force du ressort

$$F_{\text{res}} = k(L - L_0) = 10000 \cdot 2 = 20\ 000\ \text{N}$$

Équilibre statique



$$\sum M_{A,z} = \left(4 - \frac{2h}{3\sqrt{3}}\right) F_H - 1mg - 3F_{\text{res}} - 4f_s = 0$$

$$\boxed{f_s = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}F_H - mg - 3F_{\text{res}}\right) = 60{,}9\ \text{kN}}$$

Bonus si l'étudiant.e a fait la vérification et a constaté que la valeur de μ_s dans l'énoncé est trop faible.

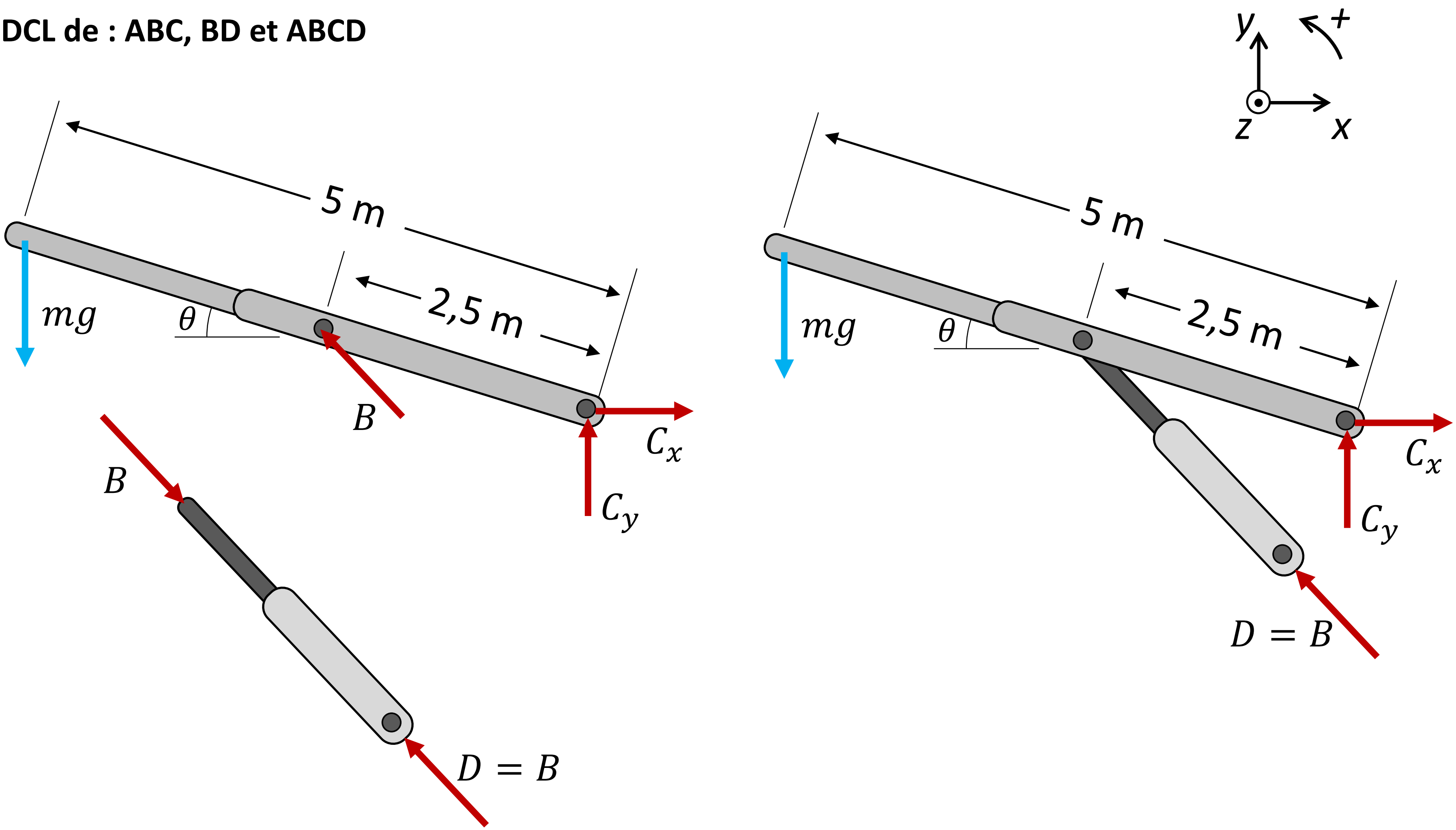
$$\sum F_y = N - mg\cos 30° + F_{\text{res}}\sin 30° = 0$$

$$N = mg\cos 30° - F_{\text{res}}\sin 30° = 41{,}0\ \text{kN}$$

$$f_s = 60{,}9\ \text{kN} > f_{s,\max} = \mu_s N = 28{,}7\ \text{kN (incohérence!)}$$

Q4 – Solution (1/2)

A. DCL de : ABC, BD et ABCD



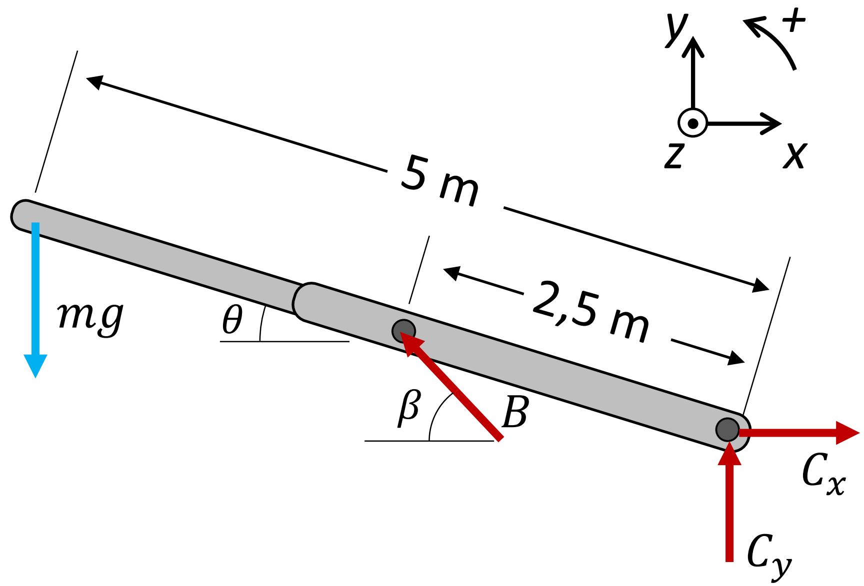
Si l'étudiant.e n'a pas remarqué que BD est une membrure à deux forces, alors il doit y avoir deux forces Dx et Dy en D et deux forces Bx et By en B.

Q4 – Solution (2/2)

B. Norme réaction en B

$$\vec{r}_{B/D} = -(2{,}5\cos\theta - 0{,}4)\vec{\imath} + (2{,}5\sin\theta + 0{,}8)\vec{\jmath}$$
$$= (-1{,}9492\vec{\imath} + 1{,}6551\vec{\jmath})\ \mathrm{m}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{1{,}6551}{1{,}9492}\right) = 40{,}27°$$



Équilibre statique

$$\sum M_{C,z} = (5\cos\theta)mg - 2{,}5B\sin(\beta - \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{5mg\cos\theta}{2{,}5\sin(\beta-\theta)} = 13\,304\ \mathrm{N} = 13{,}3\ \mathrm{kN}}$$

C. Réaction en C : y'a-t-il des dommages ?

Équilibre statique

$$\sum F_x = C_x - B\cos\beta = 0 \Rightarrow C_x = B\cos\beta = 10{,}2\ \mathrm{kN}$$

$$\sum F_y = C_y + B\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow C_y = mg - B\sin\beta = -6{,}15\ \mathrm{kN}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 11{,}9\ \mathrm{kN}}$$

Puisque 11,9 kN < 15 kN, alors il n'y aura pas de dommages en C.

Q4 – Solution (3/2)

BONUS. Masse maximale qui peut être soulevée.

$$\sum M_{C,z} = (5\cos\theta)mg - 2{,}5B\sin(\beta-\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5mg\cos\theta}{2{,}5\sin(\beta-\theta)}$$

$$\sum F_x = C_x - B\cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = B\cos\beta$$

$$\sum F_y = C_y + B\sin\beta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = mg - B\sin\beta$$

On ajoute la contrainte où la norme de la réaction en C est maximale : $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 15\ \mathrm{kN}$

$$C_x^2 + C_y^2 = (B\cos\beta)^2 + (mg - B\sin\beta)^2 = B^2 - 2mgB\sin\beta + (mg)^2 = C^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5mg\cos\theta}{2{,}5\sin(\beta-\theta)}\right)^2 - 2mg\left(\frac{5mg\cos\theta}{2{,}5\sin(\beta-\theta)}\right)\sin\beta + (mg)^2 = C^2$$

$$\left[\left(\frac{2\cos\theta}{\sin(\beta-\theta)}\right)^2 - \frac{4\cos\theta\sin\beta}{\sin(\beta-\theta)} + 1\right]m^2g^2 = C^2$$

$$\boxed{m = \frac{C}{g\sqrt{\left(\frac{2\cos\theta}{\sin(\beta-\theta)}\right)^2 - \frac{4\cos\theta\sin\beta}{\sin(\beta-\theta)} + 1}} = 316\ \mathrm{kg}}$$