Question 1 (50 points) – Questions à court développement

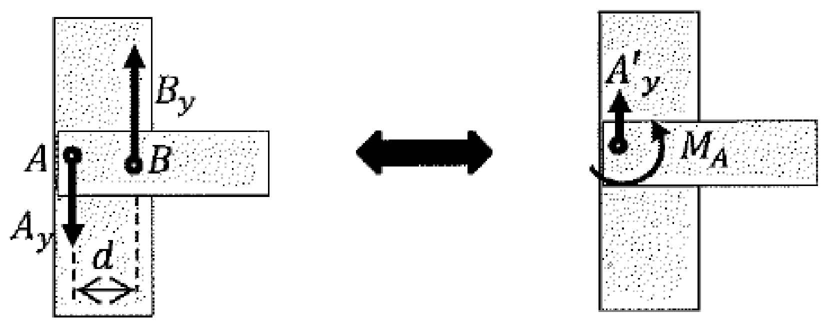
Répondez aux sous-questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes. Une réponse sans justification ne vaut aucun point.**

A. Vrai ou faux : Si l'objet A exerce un couple sur l'objet B, alors l'objet B exerce un couple égal et opposé sur A. Justifiez votre réponse (5 points)

B. Vrai ou faux : Si la résultante des forces externes exercées sur un objet est nulle, alors tous les points de cet objet gardent une vitesse constante. (5 points)

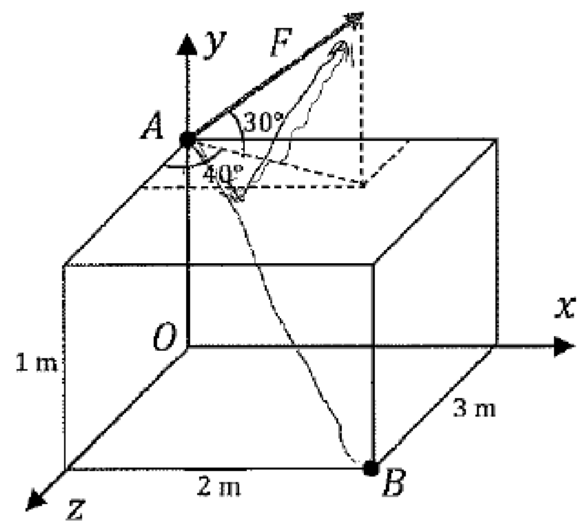
C. Nous avons vu en TD que le fait de mettre deux pivots A et B côte à côte, distants de d et reliant les mêmes pièces équivaut à un encastrement au point A.

Écrire A'_y et M_A en fonction de A_y et B_y. Ici, les forces horizontales sont nulles (20 points)



D. Sur la figure ci-dessous, la force $\vec{F}$ appliquée au point A est de $150\ \mathrm{N}$ et son orientation est indiquée sur la figure ci-dessous.

- **i.** Déterminer le vecteur force $\vec{F}$. (10 points)
- **ii.** Déterminer les composantes parallèle $\vec{F}_{\parallel}$ et perpendiculaire $\vec{F}_{\perp}$ de la force $\vec{F}$ à la droite AB. (10 points)



Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. **Vrai.** Un couple est une paire de forces soumises au principe d'action-réaction, donc le couple aussi est soumis à ce principe.

B. **Faux,** si l'objet subit une rotation, seul le centre de masse garde sa vitesse constante. Les autres points décrivent un mouvement circulaire autour du centre de masse. Leurs vitesses ne sont donc pas constantes.

C. A'_y et $\vec{M}_A$ sont la force et le couple équivalent de A_y et de B_y.

$$A'_y = B_y - A_y$$
$$M_A = \mathrm{d}B_y$$

D. i. $\vec{F} = 150(\cos 30.\sin 40\,\hat{\imath} + \sin 30\;\hat{\jmath} + \cos 30\,.\cos 40\,\hat{k})$ (N).

$$\boxed{\vec{F} = (83{,}5\,\hat{\imath} + 75{,}0\,\hat{\jmath} + 99{,}5\hat{k}\,)\ (\mathrm{N})}$$

ii. $\vec{F}_{\parallel} = (\vec{F}.\hat{u}_{AB})\hat{u}_{AB}$ avec $\hat{u}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}) \longrightarrow \boxed{\vec{F}_{\parallel} = (55{,}8\,\hat{\imath} - 27{,}9\,\hat{\jmath} + 83{,}7\,\hat{k})\ \mathrm{N}}$

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel} \longrightarrow \boxed{\vec{F}_{\perp} = (27{,}7\,\hat{\imath} + 102{,}9\,\hat{\jmath} + 15{,}8\,\hat{k})\ \mathrm{N}}$$

Question 2 (50 points)

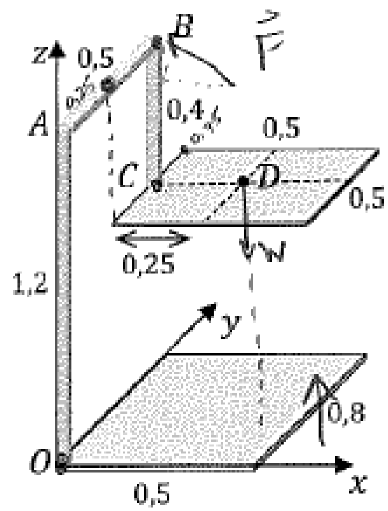
Un fakir utilise la structure rigide représentée sur le schéma ci-dessous pour simuler une lévitation. Les dimensions affichées sur la figure sont en mètres. Les points A, B et C sont dans le plan Oyz. Lorsque le fakir s'installe sur la structure, il exerce son poids $W = 700$ N sur le point D. Le poids de la structure est négligeable.

A. Déterminer le système force-couple équivalent du poids du fakir au point O. (15 points)

Un passant vient exercer une force $\vec{F} = 100(-\hat{\imath} + \hat{k})$ (N) sur le point B.

B. Déterminer le moment total qu'exercent ces deux forces (Wet F) par rapport à l'axe Oy. (15 points)

C. Déterminer la grandeur et la position du point d'application de la normale qu'exerce le sol sur la plaque inférieure de la structure. (20 points)



Q2 – Solution (1/2)

A. Le système force-couple équivalent de $\vec{W}$ au point O:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{W} = -700\,\vec{k}\ (\mathrm{N})}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^W = \vec{r}_{OD} \times \vec{W} \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{OD} = \vec{r}_{OA} + \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BC} + \vec{r}_{CD} = \left(0{,}25\vec{\imath} + 0{,}5\vec{\jmath} + 0{,}8\vec{k}\right)(\mathrm{m})$$

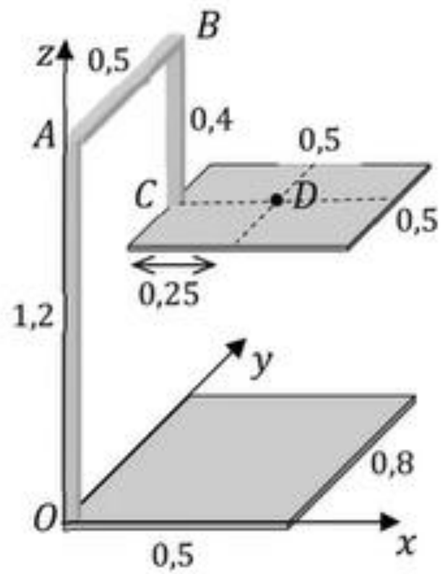
$$\boxed{\vec{M}_O^W = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & -700 \end{vmatrix} = (-350\vec{\imath} + 175\vec{\jmath})\ (\mathrm{N\cdot m})}$$

B. Le moment des forces W et F par rapport à l'axe Oy:

$$\vec{M}_{Oy}^{W+F} = \left(\left(\vec{M}_O^W + \vec{M}_O^F\right).\vec{\jmath}\right)\vec{\jmath} = \left(\left(\vec{M}_O^W + \vec{r}_{OB} \times \vec{F}\right).\vec{\jmath}\right)\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_{OB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ -100 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 50\vec{\imath} - 120\vec{\jmath} + 50\vec{k}\ (\mathrm{N\cdot m})$$

$$\boxed{\vec{M}_{Oy}^{W+F} = (175 - 120)\vec{\jmath} = 55\,\vec{\jmath}\ \ (\mathrm{N\cdot m})}$$



Q2 – Solution (2/2)

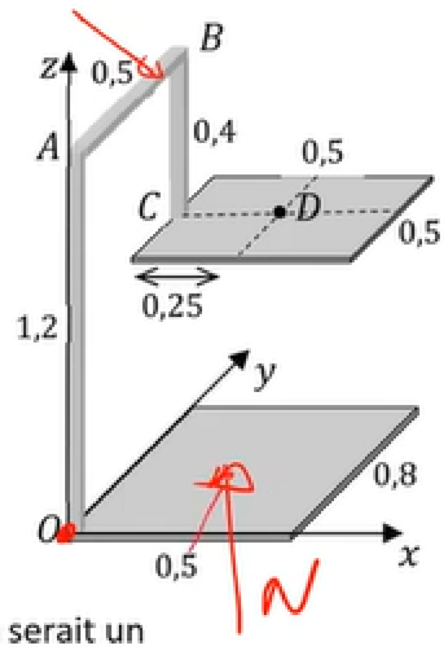
C. Le module et la position de la normale:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow N + F_z - W = 0 \qquad \boxed{\Rightarrow \; N = 700 - 100 = 600\ (\mathrm{N})}$$

Soit $\vec{r}_N = x_N\vec{\imath} + y_N\vec{\jmath}$ le vecteur position du point d'application de la normale N

$$\sum \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{r}_N \times \vec{N} = -\vec{M}_O^W - \vec{M}_O^F$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_N & y_N & 0 \\ 0 & 0 & 600 \end{vmatrix} = -(-350\vec{\imath} + 175\vec{\jmath}) - \left(50\vec{\imath} - 120\vec{\jmath} + 50\vec{k}\right)\mathrm{N.m}$$



$$x_N = \frac{55}{600} = 9{,}17\ \mathrm{cm} \qquad y_N = \frac{300}{600} = 50\ \mathrm{cm}$$

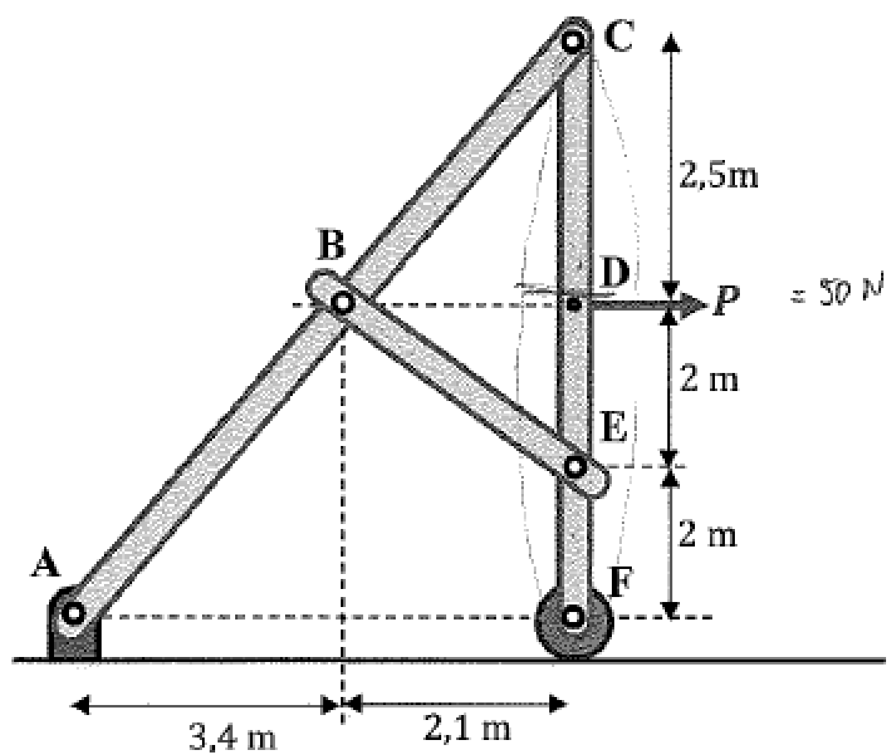
Remarque: On peut utiliser un autre point de référence comme le pont B. Ça serait un meilleur choix si on n'avait pas calculé au préalable $\vec{M}_O^W$ et $\vec{M}_O^F$.

y_N peut être déduit directement en remarquant que les forces W et F sont toutes les deux dans le plan $y = 0{,}5\ (\mathrm{m})$. Le calcul de x_N serait alors réduit à 2D.

Question 3 (50 points)

Soit la structure de membrures illustrée sur la figure ci-dessous. On applique une force externe $\boldsymbol{P} = 50\ \mathrm{N}$ horizontale au point D.

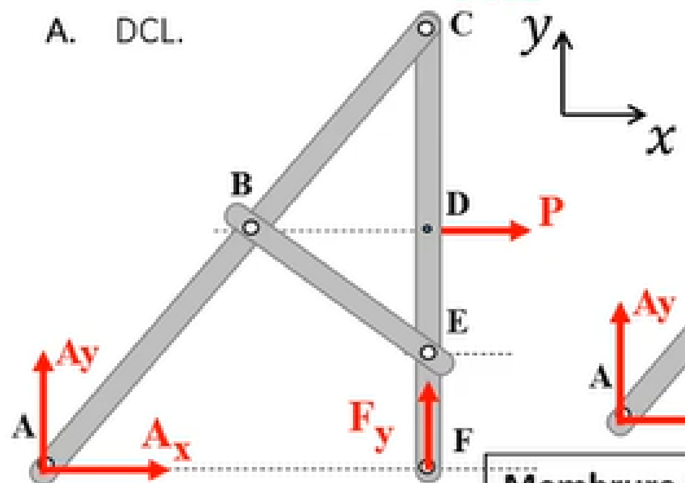
A. Faire les DCL de la structure entière et des membrures ABCD, DEFG et CF. (20 points)
B. Déterminer le module et l'orientation de la réaction du pivot A. (15 points)
C. Déterminer le module de la réaction du pivot C. (15 points)



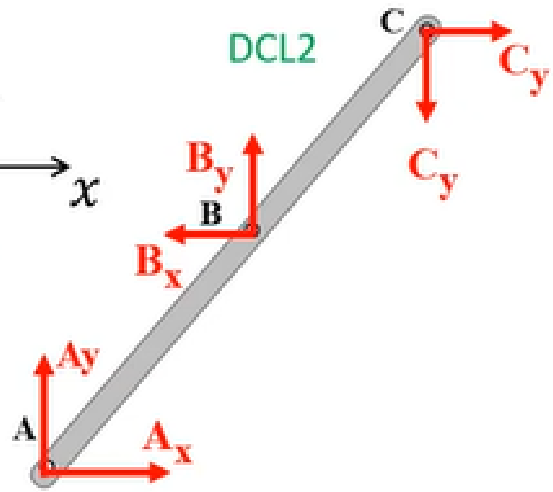
Question 3 – Solution (1/2)

A. DCL.

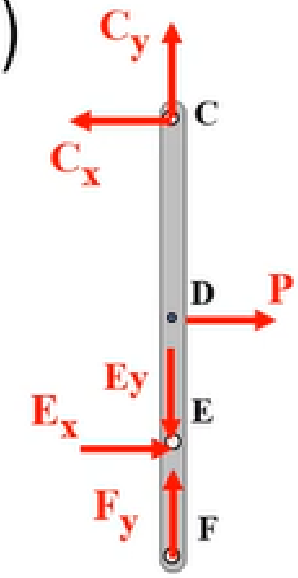
DCL1



DCL2

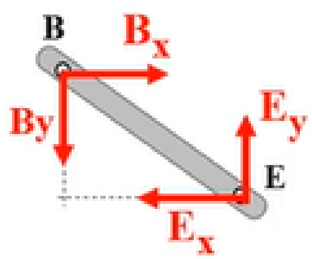


DCL3



Membrure BE : c'est une membrure à deux forces (toutes les forces s'appliquent en deux point, B et E). On en déduit donc que les forces en B et en E sont de même module, de sens opposé. On a aussi $\frac{E_y}{E_x} = \frac{2}{2.1}$

DCL4



Points importants:

- Les réactions en A doivent être les mêmes dans les DCL1 et DCL2
- La réaction en F doit être la même dans les DCL1 et DCL3 et dirigée vers le haut.
- Les réactions en B et en E peuvent aussi être représentées par des résultantes orientées selon l'axe BE.
- Les réactions en B doivent être inversées dans les DCL2 et DCL4
- Les réactions en C doivent être inversées dans les DCL2 et DCL3
- Les réactions en E doivent être inversées dans les DCL3 et DCL4
- Un seul système d'axes est suffisant pour les 4 DCL.

Question 3 – Solution (2/2)

B. Réaction en A:

DCL1: $\sum M_F = 0 \Rightarrow -A_y\,\overline{AF} - P\,\overline{DF} = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $A_y = -P\dfrac{\overline{DF}}{\overline{AF}} = -36{,}36\ N$

DCL1: $\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $A_x = -P = -50\ N$

$\Rightarrow$ $\boxed{A = 61{,}8\ N}$

C. Réactions en C: Plusieurs façons possibles, en voici l'une d'elles:

DCL3: $\sum M_E = 0 \Rightarrow C_x\,\overline{CE} - P\,\overline{DE} = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{C_x = P\dfrac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = 22{,}22\ \text{N}}$

DCL3: $\sum M_C = 0 \Rightarrow E_x\,\overline{CE} + P\,\overline{CD} = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $E_x = -P\dfrac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = -27{,}78\ \text{N}$

Membrure BE à deux forces: $\Rightarrow E_y = \dfrac{2}{2{,}1}E_x = 26{,}46\ \text{N}$

DCL1: $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y = -A_y = 36{,}36\ N$

DCL3: $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y + C_y - E_y = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{C_y = E_y - F_y = -9{,}9\ \text{N}}$

Le module de la réaction du pivot C est : 24,3 N. Remarque: On peut utiliser: $\sum M_B = 0$ dans le DCL2.

Question 4 (50 points)

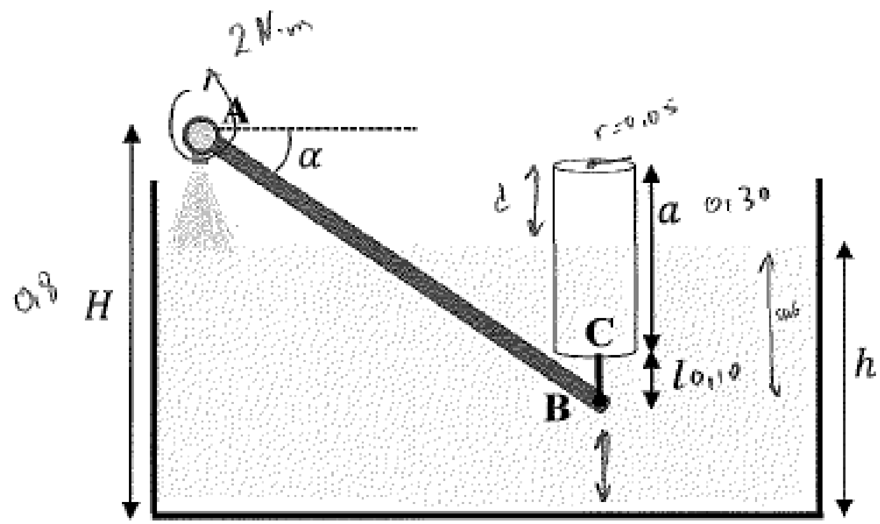
Un réservoir est alimenté en eau ($\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$) grâce à un robinet A contrôlé par un système de flotteur. Ce système est composé d'une tige métallique cylindrique AB (de masse $m = 2\ \mathrm{kg}$, de longueur $L = 1\ \mathrm{m}$ et de diamètre négligeable) et d'un bloc cylindrique en styromousse de masse négligeable, de hauteur $a = 30\ \mathrm{cm}$ et de rayon $r = 5\ \mathrm{cm}$. Ce bloc est relié à la tige AB par une corde de longueur $l = 10\ \mathrm{cm}$. 0,30 0,05

0,10

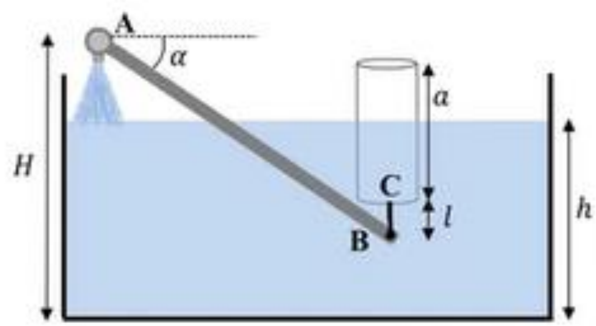
Le robinet est à la position fermée lorsque l'inclinaison de la tige AB par rapport à l'horizontale respecte la condition $\alpha \leq 30°$ et s'ouvre lorsque $\alpha > 30°$. Un couple de frottements statiques maximal $M_s = 2\ \mathrm{N \cdot m}$ s'exerce sur la tige AB au niveau du robinet A. $V_{cyl} = \pi r^2 . h$

On donne $H = 0{,}8\ \mathrm{m}$.

- **A.** Faire le DCL de la tige AB et le DCL du bloc cylindrique C. (10 points)
- **B.** Déterminer l'expression algébrique de la tension T de la corde BC en fonction de α et h. (20 points)
- **C.** Si le robinet est initialement $\alpha \leq 30$ fermé, à partir de quelle hauteur h de l'eau il commencera à s'ouvre si on vide le réservoir lentement? (20 points)

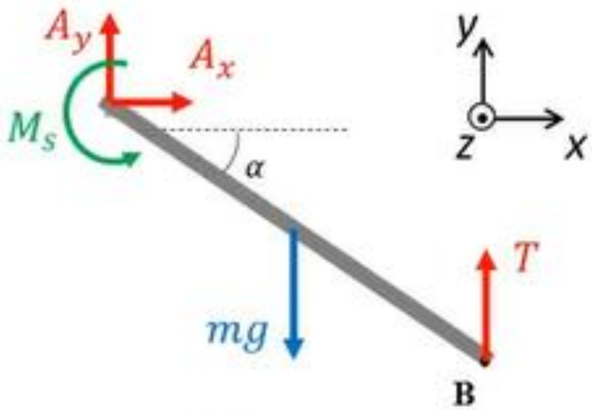


Question 4 (50 points)

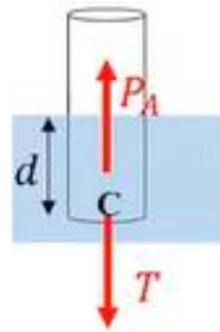


Q4 – Solution (1/2)

A. DCL de la tige AB et du bloc cylindrique:



DCL1



DCL2

Éléments importants

- Un système d'axes est suffisant.
- Point A : un pivot donc deux forces perpendiculaires.
- Point A : couple de frottement M_s peut importe le sens.
- Poids : s'applique au centre de la tige AB.
- Point B: la tension de la corde vers le haut
- Point C: la tension de la corde vers le bas
- Poussée d'Archimède s'applique vers le haut au centre de la partie immergée.

B. Expression de T:

Soit d la hauteur de la partie immergée u bloc cylindrique

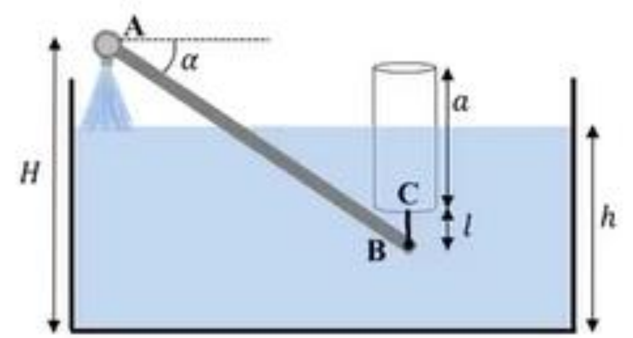
DCL2: $T = P_A = \rho g \pi r^2 d$

Selon la géométrie du problème on a:

$$H - h = L \sin\alpha - (l + d)$$

$$\Rightarrow \quad d = L \sin\alpha - l - (H - h)$$

$$\Rightarrow \quad T = P_A = \rho g \pi r^2 (L \sin\alpha + h - l - \mathrm{H})$$



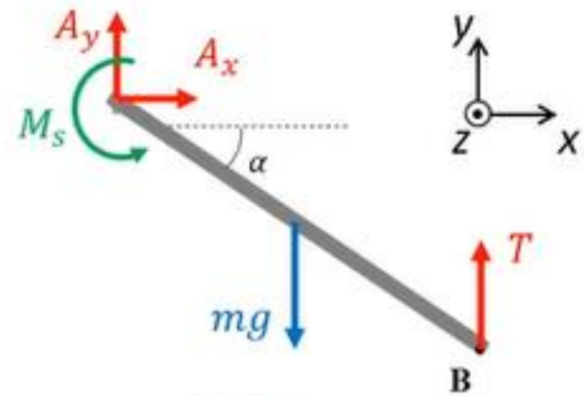
Q4 – Solution (2/2)

C. Hauteur h pour laquelle le robinet s'ouvre:

Le robinet est sur le point de s'ouvrir lorsque l'angle $\alpha = 30°$ et que le couple de forces de frottements est M_s dans le sens antihoraire

DCL 1: $$\sum M_A = 0 \Rightarrow TL\cos\alpha - mg\frac{L}{2}\cos\alpha + M_s = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{mg\frac{L}{2}\cos\alpha - M_s}{L\cos\alpha} = 7{,}50\ \mathrm{N}$$



DCL1

De l'expression obtenue en B, on tire h

$$\Rightarrow h = \frac{T}{\rho g \pi r^2} + H + l - L\sin\alpha$$

$$\boxed{\Rightarrow h = 49{,}7\ \mathrm{cm}}$$