PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Automne 2022

Contrôle périodique 2

Q1 – Solution (1/2)

A. Puisque la voiture possède une vitesse tout juste suffisante pour parcourir la boucle sans tomber, c'est qu'elle est sur le point de décoller de la piste au sommet de la boucle. Dans ce cas limite, la normale est nulle et **donc le poids apparent est nul** aussi. Si une personne était à bord de la voiture, elle se sentirait momentanément en apesanteur.

B. Vitesse de B

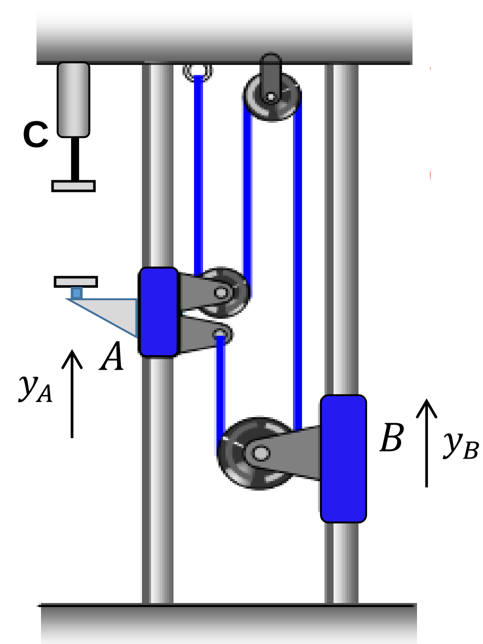
La relation de mouvement contraint appliquée sur le câble de longueur constante nous donne :

$$\sum \Delta\ell_i = (1-2)\Delta y_A - 2\Delta y_B = 0 \implies \Delta y_B = -\frac{1}{2}\Delta y_A$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

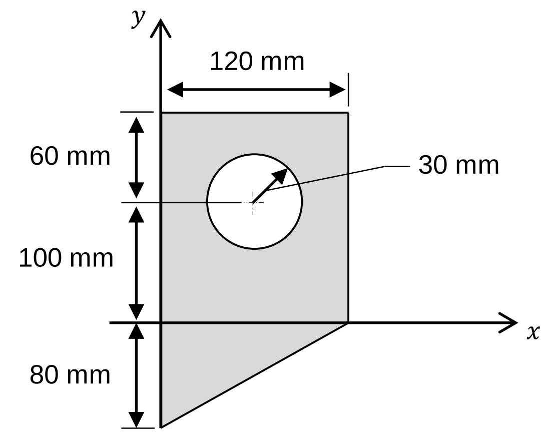
$$\boxed{v_B = -\frac{1}{2}v_A = -0{,}05\ \mathrm{m/s}}$$

Le signe négatif implique que **B descend** pendant que A monte.



Q1 – Solution (2/2)

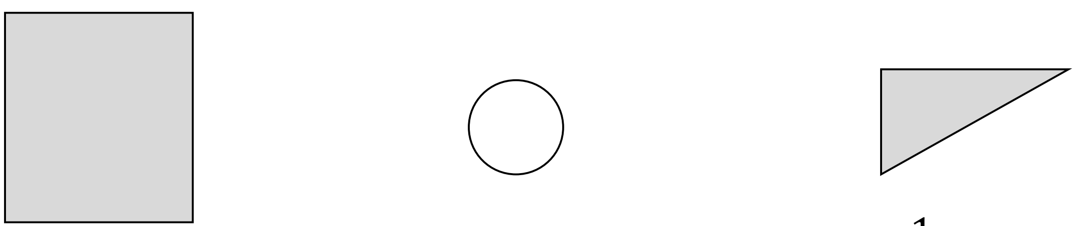
C. CM de la pièce



La pièce est homogène, alors on peut remplacer la masse par l'aire dans la définition du CM.

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

On décompose ensuite la pièce en trois morceaux simples.



$$\bar{A}_1 = 120 \cdot 160 = 19\,200 \text{ mm}^2$$

$\bar{x}_1 = 60$ mm

$\bar{y}_1 = 80$ mm

$$\bar{A}_2 = -\pi \cdot 30^2 = -2\,827 \text{ mm}^2$$

$\bar{x}_2 = 60$ mm

$\bar{y}_2 = 100$ mm

$$\bar{A}_3 = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 80 = 4\,800 \text{ mm}^2$$

$\bar{x}_3 = 40$ mm

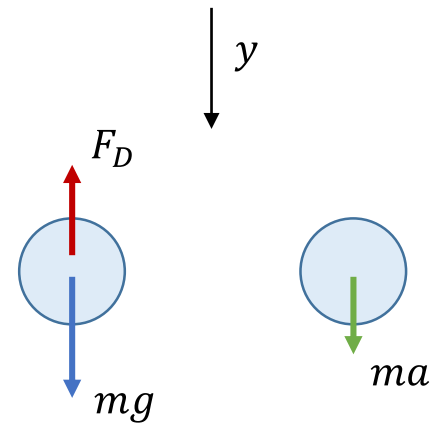
$\bar{y}_3 = -\,26{,}67$ mm

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1\,174\,380}{21\,173} = 55{,}5 \text{ mm}}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{1\,125\,284}{21\,173} = 53{,}1 \text{ mm}}$$

Q2 – Solution (1/2)

A. DCL-DCE de la goutte + accélération



2e loi de Newton :

$$\sum F_y = mg - F_D = ma \quad \Longrightarrow \quad a = g - \frac{\rho_a C_D S}{2m} v^2$$

Masse de la goutte : $m = \rho_e V = \rho_e \dfrac{4\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3}{3} = 4{,}189 \times 10^{-6}\ \mathrm{kg}$

Section transverse de la goutte : $S = \dfrac{\pi D^2}{4} = 3{,}142 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$

En combinant le tout : $\boxed{a = g - \dfrac{3\rho_a C_D}{4D\rho_e} v^2 = 9{,}81 - 0{,}225 v^2}$

B. Vitesse de la goutte en fonction du temps

On sépare les variables et on intègre :

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{a} = \int_0^v \frac{dv}{9{,}81 - 0{,}225 v^2}$$

$$\Longrightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{0{,}225 \cdot 9{,}81}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{0{,}225}}{\sqrt{9{,}81}} v\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v(t) = 6{,}60 \tanh(1{,}49 t)}$$

Q2 – Solution (2/2)

C. Vitesse du train en fonction de l'angle θ

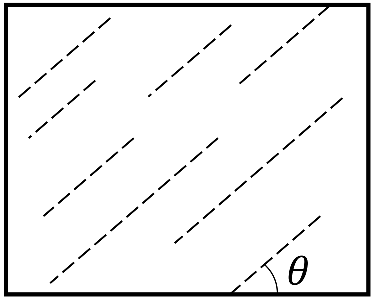
Lorsque la goutte de pluie est à la hauteur du train, elle est en chute libre depuis très longtemps. Elle a atteint une vitesse maximale dite « terminale » qu'on peut calculer de deux façons.

Méthode #1 : poser que l'accélération est nulle ($a = 0$) dans la somme des forces.

$$F_D = mg \quad \Longrightarrow \quad v_E = \sqrt{\frac{4D\rho_e}{3\rho_a g C_D}} = 6{,}603 \text{ m/s}$$

Méthode #2 : prendre la limite $t \to \infty$ dans l'expression de $v(t)$.

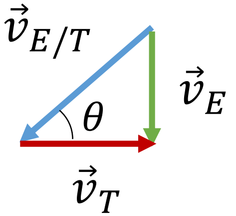
$$v_E = \lim_{t\to\infty} v(t) = 6{,}603 \cdot 1 = 6{,}603 \text{ m/s}$$



En utilisant les lois du mouvement relatif, on a donc :

$$\vec{v}_{E/T} = \vec{v}_E - \vec{v}_T$$

Il est plus facile de résoudre géométriquement en utilisant le triangle des vitesses ci-contre. On obtient :

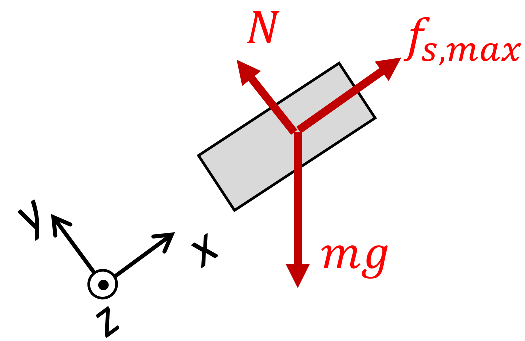


$$\tan\theta = \frac{v_E}{v_T} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_T = \frac{v_E}{\tan\theta} = 37{,}4 \text{ m/s} = 135 \text{ km/h}}$$

Q3 – Solution (1/3)

A. Calcul de l'angle α :

Comme la poussée qui a suffi à mettre en mouvement le disque est négligeable, cela signifie que ce dernier était en équilibre statique, mais sur le point de glisser. La force de frottement statique que le retenait était donc à sa valeur maximale $f_s = f_{s,max} = \mu_s N$. Voici ci-contre, le DCL du disque avant d'appliquer la poussée.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow mg\sin\alpha = f_{s,max} = \mu_s N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg\cos\alpha = N$$

$$\Rightarrow mg\sin\alpha = \mu_s mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \mu_s = 0{,}7 \Rightarrow \boxed{\alpha = 35{,}0°}$$

Q3 – Solution (2/3)

B. Calcul de la distance d :

En glissant du point A au point C, le disque subit la force de frottement cinétique. Cette force est non conservative et fait un travail (négatif). L'énergie mécanique entre ces deux positions n'est donc pas conservée. Le principe travail énergie entre A et C donne:

$$U_{nc} = \Delta E = \underbrace{\cancel{\Delta T}}_{0} + \Delta V_g \Rightarrow -\mu_c N(S_{AB} + S_{BC}) = mg\Delta y$$

$$\Rightarrow -\mu_c(mg\cos\alpha)\left(\frac{\pi}{2}L + \frac{\pi}{2}(L-d)\right) = mg(-d\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow d = \frac{\mu_c \pi L \cos\alpha}{\sin\alpha + \mu_c \frac{\pi}{2}\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{d = 40{,}2\ \text{cm}}$$

C. Variation de la tension de la corde au point B:

On applique le principe travail-énergie sur le disque entre A et B pour trouver v_B la vitesse en B :

$$U_{nc} = \Delta E = \Delta T + \Delta V_g \Rightarrow -\mu_c N S_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg\Delta y$$

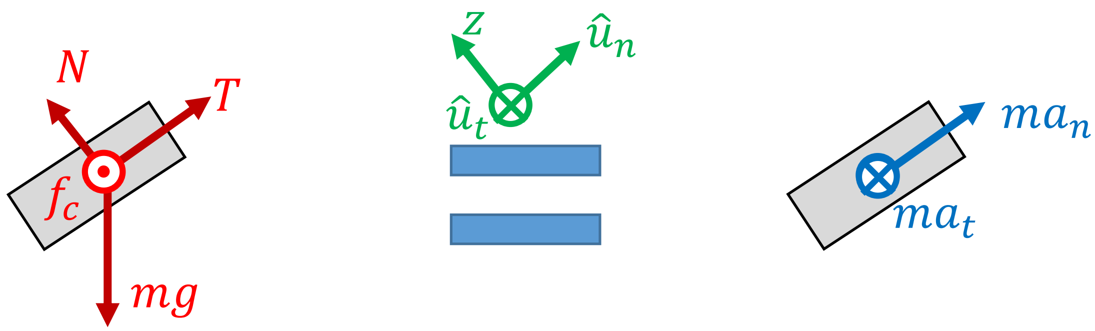
$$\Rightarrow -\mu_c(mg\cos\alpha)\frac{\pi}{2}L = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(-L\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = gL(2\sin\alpha - \mu_c\pi\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow v_B = 1{,}356\ \text{m/s}$$

Q3 – Solution (3/3)

Voici ci-dessous, le DCL-DCE du disque à la position B vu du côté droit:



$$\sum F_n = T - mg\sin\alpha = ma_n \quad \Rightarrow \quad T = mg\sin\alpha + m\frac{v_B^2}{\rho}$$

Juste avant que la corde ne touche le clou E, le rayon de courbure de la trajectoire est $\rho = L$.
Juste après que la corde touche le clou E, ce rayon devient $\rho = (L - \mathrm{d})$.

$$\Rightarrow \quad \Delta T = mv_B^2\left(\frac{1}{L-d} - \frac{1}{L}\right) = mgL(2\sin\alpha - \mu_c\pi\cos\alpha)\left(\frac{1}{L-d} - \frac{1}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = 15,1\ \mathrm{N}}$$

Q4 – Solution (1/2)

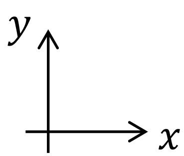
A. Pour le système formé des deux billes et entre les instants juste avant et juste après l'impact :

- L'énergie mécanique est conservée puisqu'on suppose que la collision est élastique.
- La QM est conservée dans le plan de la collision puisque $\sum \vec{F} = \vec{0}$ (les forces exercées par une boule sur l'autre sont des forces internes au système).

Attention : l'énergie mécanique et la QM ne sont pas conservées pour une seule boule.

B. Vecteurs vitesses de A et B

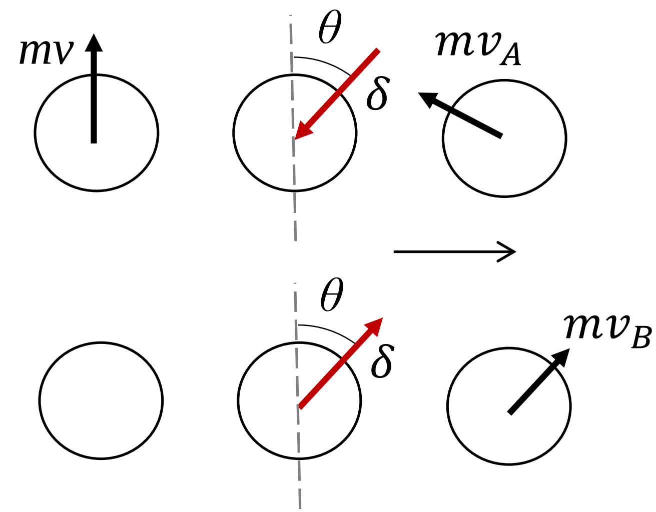
En utilisant un système d'axes cartésiens et le principe impulsion-QM sur chacune des boules entre les instants juste avant et juste après l'impact :



$$\vec{L}_1 + \overrightarrow{\mathbf{Imp}} = \vec{L}_2$$

$$\vec{v}_A = v\vec{j} - \frac{\delta}{m}[\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{j}]$$

$$\vec{v}_B = \vec{0} + \frac{\delta}{m}[\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{j}]$$



Q4 – Solution (2/2)

B. Vecteurs vitesses de A et B (suite)

$$\vec{v}_A = -\frac{\delta}{m}\sin\theta\,\vec{\imath} + \left(v - \frac{\delta}{m}\cos\theta\right)\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}_B = \frac{\delta}{m}[\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}]$$

Conservation de l'énergie mécanique (collision élastique)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v^2 = v_A^2 + v_B^2$$

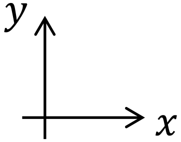
$$\Rightarrow v^2 = v^2 - 2\frac{\delta}{m}v\cos\theta + \left(\frac{\delta}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \delta = mv\cos\theta$$

Les vecteurs vitesses de A et de B sont donc :

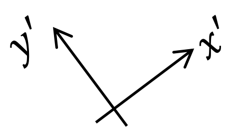
$$\boxed{\vec{v}_A = v\sin\theta\,[-\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}]}$$

$$\boxed{\vec{v}_B = v\cos\theta\,[\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}]}$$



Un autre système d'axes aurait pu être utilisé : les expressions obtenues seront alors différentes. Par exemple :

$$\boxed{\vec{v}_A = v\sin\theta\,\vec{\jmath}'} \qquad \boxed{\vec{v}_B = v\cos\theta\,\vec{\imath}'}$$



C. On cherche l'angle tel que :

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_A = v_B \Rightarrow v\sin\theta = v\cos\theta \Rightarrow \boxed{\theta = 45°}$$