PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Automne 2022

Contrôle périodique 1

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

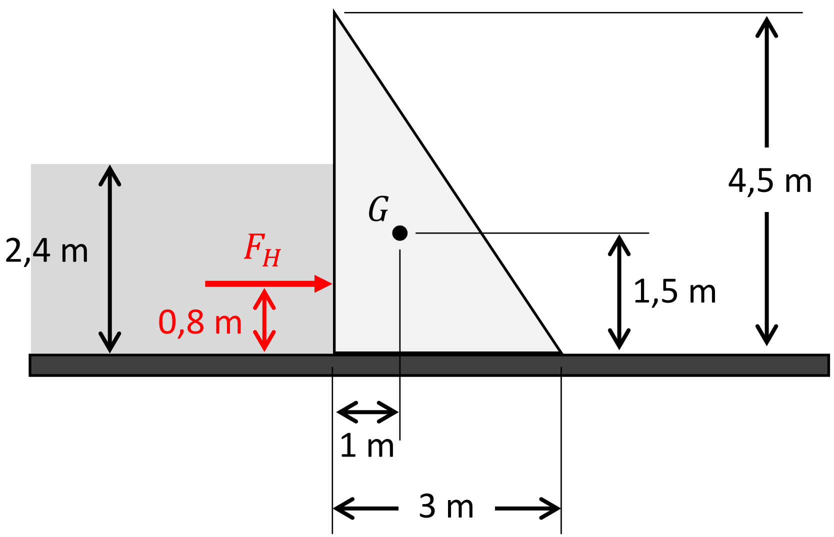
A. L’équation est valide sous les deux conditions suivantes :
   - On décrit un frottement sec **statique** entre deux surfaces.
   - Les deux surfaces sont **sur le point de glisser** l’une par rapport à l’autre.

B. Force hydrostatique sur le bloc :

$$F_H = \rho g \frac{h}{2} A$$

- Il faut prendre ρ du fluide : $\rho = 1000$ kg/m³
- La hauteur est celle du fluide en contact avec la paroi : $h = 2{,}4$ m.
- La surface de la paroi en contact avec le fluide est $A = 2{,}4 \cdot 2 = 4{,}8$ m².

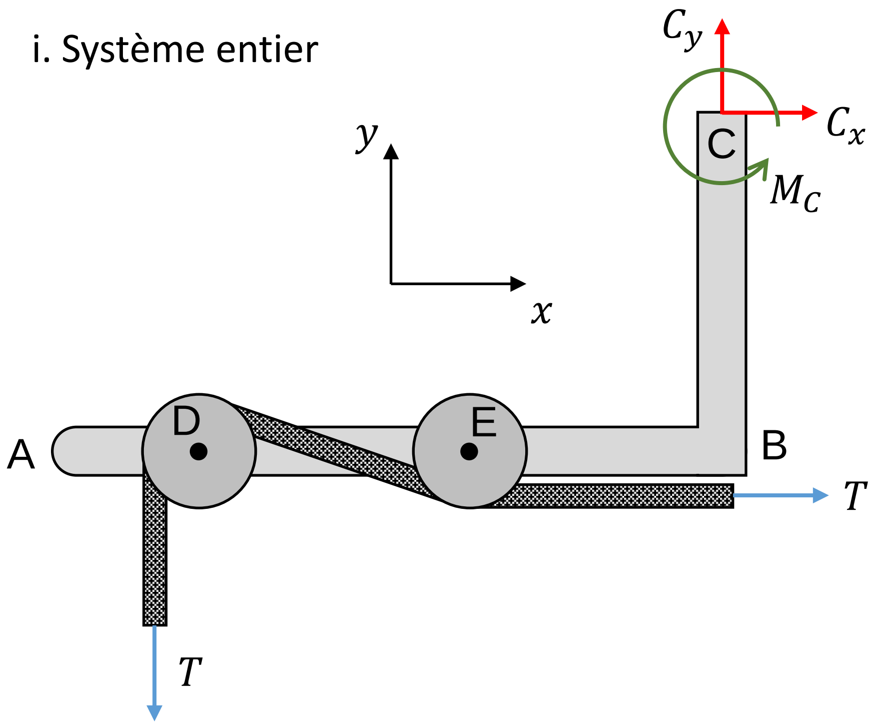
$$\boxed{F_H = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{2{,}4}{2} \cdot 4{,}8 = 56{,}5 \text{ kN}}$$



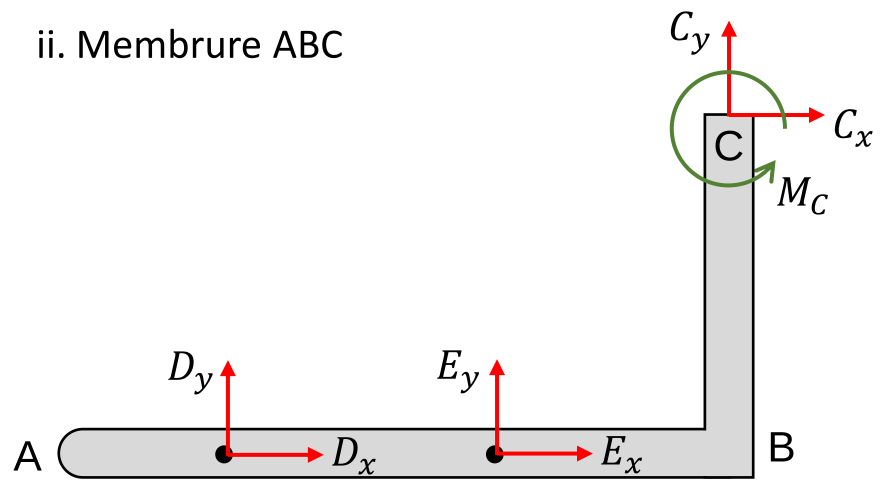
Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

C. DCL des différentes parties de la structure

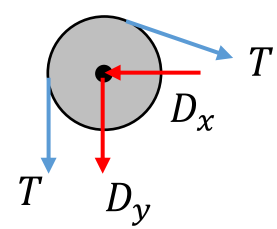
i. Système entier



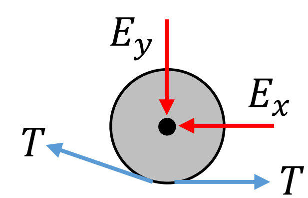
ii. Membrure ABC



iii. Poulie D



vi. Poulie E



<u>Remarques</u>

- Système d'axes doit être présent.
- Membrure : poids négligeable.
- Encastrement en C : deux forces + un couple de sens arbitraires. Ces éléments doivent être identiques dans les DCL i. et ii.
- Pivots en D et en E : deux forces pour chaque pivot. Le sens des forces dans le DCL ii. est un choix arbitraire, mais les forces dans les DCL iii. et iv. doivent être inversées (paires action-réaction).

Q2 – Solution (1/2)

A. Vecteur tension en coordonnées cartésiennes :

La tension s'applique sur la tablette au point E, en direction de F.

$$\hat{u}_{EF} = \frac{\vec{r}_F - \vec{r}_E}{\|\vec{r}_F - \vec{r}_E\|} = \frac{(380 - 300)\vec{\imath} + (250 - 0)\vec{\jmath} + (0 - 200)\vec{k}}{\sqrt{80^2 + 250^2 + 200^2}}$$
$$= \frac{8\vec{\imath} + 25\vec{\jmath} - 20\vec{k}}{33}$$
$$= 0{,}2424\vec{\imath} + 0{,}7576\vec{\jmath} - 0{,}6061\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{T} = T\hat{u}_{EF} = \left(97{,}0\vec{\imath} + 303\vec{\jmath} - 242\vec{k}\right)\ \mathrm{N}}$$

B. Vecteur moment du couple en coordonnées cartésiennes :

Le cosinus directeur en z s'obtient à partir des deux angles. On trouve en réalité que $\theta_z = 90°$ et donc que le moment n'a pas de composante selon z :

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \Longrightarrow \cos\theta_z = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y} = 0 \Longrightarrow \theta_z = 90°$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{M} = M\left(\cos\theta_x\,\vec{\imath} + \cos\theta_y\,\vec{\jmath} + \cos\theta_z\,\vec{k}\right) = (141\vec{\imath} - 51{,}3\vec{\jmath})\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}$$

Q2 – Solution (2/2)

C. Système force-couple équivalent à $\vec{T}$ et à $\vec{M}$ au point A.

Force équivalente

Il n'y a qu'une seule force dans le système, alors la force équivalente est égale à la tension.

$$\boxed{\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{T} = \left(97{,}0\vec{\imath} + 303\vec{\jmath} - 242\vec{k}\right)\ \mathrm{N}}$$

Couple équivalent

Il faut faire la somme du moment $\vec{M}$ du couple (vecteur libre) et du moment de $\vec{T}$ par rapport à A.

$$\vec{M}_A^R = \vec{M} + \vec{M}_A^T$$

$$\vec{M}_A^T = \vec{r}_{AE} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}3 - 0{,}04 & 0 & 0{,}2 - 0 \\ 97{,}0 & 303 & -242 \end{vmatrix} = \left(-60{,}6\vec{\imath} - 82{,}32\vec{\jmath} + 78{,}78\vec{k}\right)\ \mathrm{N \cdot m}$$

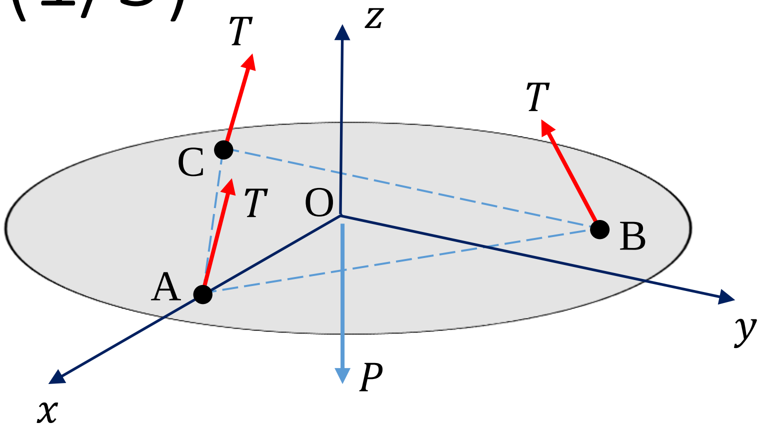
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_A^R = \left(80{,}4\vec{\imath} + 31{,}0\vec{\jmath} + 78{,}8\vec{k}\right)\ \mathrm{N \cdot m}}$$

D. Tendance à la rotation autour de AB

L'axe AB est défini par le vecteur unitaire $\vec{\imath}$. Le couple équivalent par rapport à l'axe AB est donc donné par la partie en $\vec{\imath}$ du couple équivalent : $\vec{M}_{AB}^R = \left(\vec{M}_A^R \cdot \vec{\imath}\right)\vec{\imath} = 80{,}4\vec{\imath}\ \mathrm{N \cdot m}$.

Ce vecteur pointe vers les x positifs, alors la tablette a tendance à tourner **en sens antihoraire** autour de AB (règle de la main droite).

Q3 – Solution (1/5)



A. Module de la tension dans les câbles

Par symétrie, la tension dans chacun des câbles est la même : $T_{AD} = T_{BD} = T_{CD} = T$. C'est la seule façon d'avoir $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$.

Méthode #1 – Somme des forces (courte)

Coordonnées des points : $A(r,0,0) = A(0{,}20;0;0)$ m
$D(0,0,h) = D(0;0;0{,}40)$ m

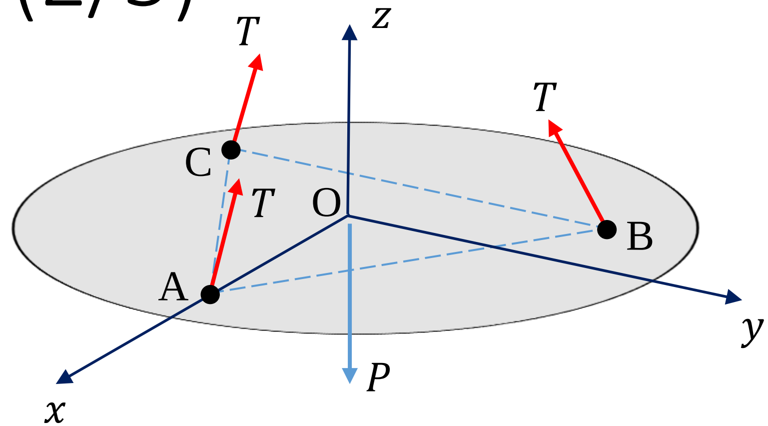
À l'aide du triangle rectangle AOD et de l'angle θ au point A, on peut exprimer la composante T_z :

$$T_z = T\sin\theta = \frac{0{,}40}{\sqrt{0{,}20^2 + 0{,}40^2}}T = 0{,}894T$$

Puisque les trois câbles ont la même tension et qu'ils sont fixés symétriquement, alors ils possèdent tous la même composante T_z. L'équilibre statique en z s'écrit donc :

$$\sum F_z = 3T_z - P = 3 \cdot 0{,}894T - P = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{P}{3 \cdot 0{,}894} = 3{,}73 \text{ N}}$$

Q3 – Solution (2/5)



A. Module de la tension dans les câbles

Par symétrie, la tension dans chacun des câbles est la même : $T_{AD} = T_{BD} = T_{CD} = T$. C'est la seule façon d'avoir $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$.

<u>Méthode #2 – Somme des forces (longue)</u>

Coordonnées des points :

$$A(r, 0{,}0) = A(0{,}20; 0; 0)\ \mathrm{m}$$
$$B(-r\sin 30°, r\cos 30°, 0) = B(-0{,}10; 0{,}173; 0)\ \mathrm{m}$$
$$C(-r\sin 30°, -r\cos 30°, 0) = C(-0{,}10; -0{,}173; 0)\ \mathrm{m}$$
$$D(0{,}0, h) = D(0; 0; 0{,}40)\ \mathrm{m}$$

Vecteurs unitaires :

$$\hat{u}_{AD} = \frac{-0{,}20\vec{\imath} + 0{,}40\vec{k}}{\sqrt{0{,}20^2 + 0{,}40^2}} = -0{,}447\vec{\imath} + 0{,}894\vec{k}$$

$$\hat{u}_{BD} = \frac{0{,}10\vec{\imath} - 0{,}173\vec{\jmath} + 0{,}40\vec{k}}{\sqrt{0{,}10^2 + 0{,}173^2 + 0{,}40^2}} = 0{,}224\vec{\imath} - 0{,}387\vec{\jmath} + 0{,}894\vec{k}$$

$$\hat{u}_{CD} = \frac{0{,}10\vec{\imath} + 0{,}173\vec{\jmath} + 0{,}40\vec{k}}{\sqrt{0{,}10^2 + 0{,}173^2 + 0{,}40^2}} = 0{,}224\vec{\imath} + 0{,}387\vec{\jmath} + 0{,}894\vec{k}$$

Équilibre statique :

$$\sum F_z = T\hat{u}_{ADz} + T\hat{u}_{BDz} + T\hat{u}_{CDz} - P = 3 \cdot 0{,}894T - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{P}{3 \cdot 0{,}894} = 3{,}73\ \mathrm{N}}$$

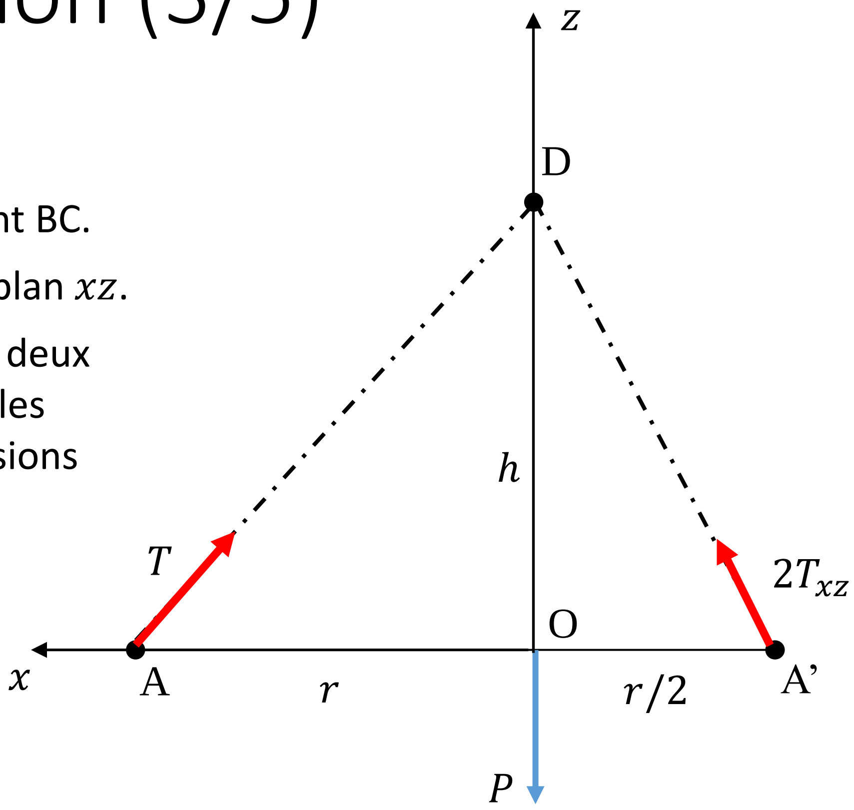
Q3 – Solution (3/5)

<u>Méthode #3 – Somme des moments dans le plan xz</u>

A’ est le point de croisement de l’axe AO sur le segment BC.

T_{xz} est la projection de la tension T_{BD} (ou T_{CD}) sur le plan xz.

La symétrie du problème permet de travailler avec les deux tensions $2T_{xz}$ qui s’appliquent en A’, étant donné que les moments de force dus aux composantes en y des tensions T_{BD} et T_{CD} s’annulent.



Somme des moments par rapport au point A’ :

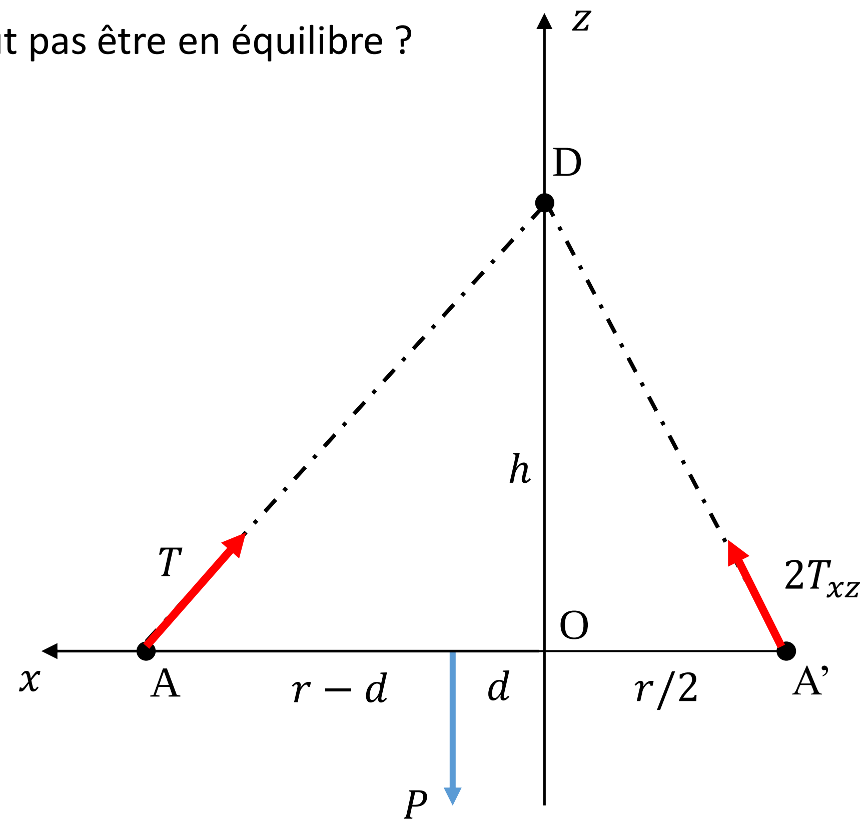
$$\sum M_A' = \frac{r}{2}P - \frac{3r}{2}T_z = 0 \quad \Rightarrow \quad T_z = \frac{P}{3}$$

Avec la géométrie, on retrouve le module de la tension :

$$T_z = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}T \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{3h}P = 3{,}73\ \mathrm{N}}$$

Q3 – Solution (4/5)

B. Pourquoi le système avec le disque décentré ne peut pas être en équilibre ?



Exemple de réponse basée sur la méthode #1

1. Peu importe la distibution de masse du disque, les câbles doivent tous avoir la même tension pour avoir l'équilibe dans le plan xy.

2. La valeur obtenue pour T_z à partir de $\sum F_z = 0$ ne dépend pas non plus de la distribution de masse du disque (seulement de sa masse totale), alors le module de T ne dépend pas de la position du CM.

3. Ainsi, si l'on change la position de P avec T fixée (la somme des moments était nulle avec P en O), alors la somme des moments ne sera plus nulle : le système ne restera pas immobile.

Exemple de réponse basée sur la méthode #2

1. Si l'on décale P par rapport à O, alors la tension T dans le câble AD doit varier de sorte à maintenir l'équilibre de rotation ($\sum M_{A'} = 0$).

2. Cela implique que les tensions dans les deux autres câbles doivent varier de la même façon, car elles doivent être toutes égales pour garantir l'équilibre de translation dans le plan xy.

3. Puisque le poids du disque reste le même, alors l'équilibre en z ne sera plus respecté : le système ne restera pas immobile.

Q3 – Solution (5/5)

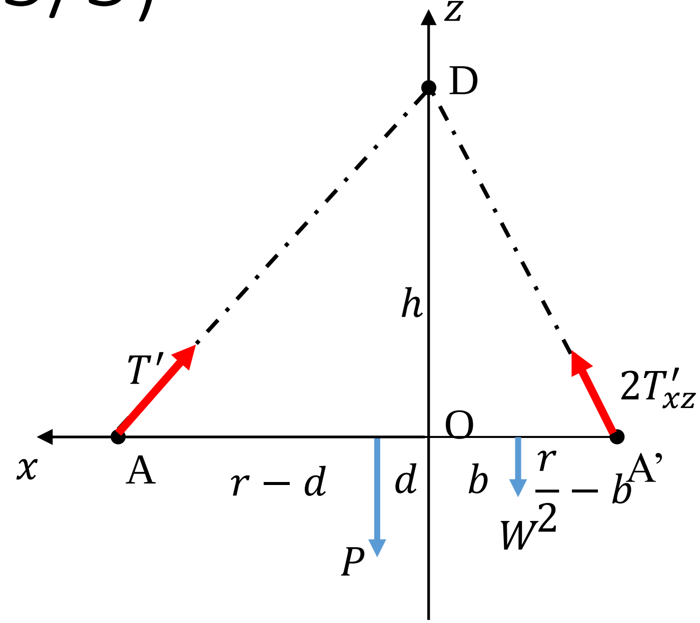
C. Position de la bille pour rétablir l'équilibre statique

Le système est à l'équilibre seulement lorsque le poids total de l'objet suspendu s'applique en O.

L'idée est donc de trouver la condition pour que le système force-couple équivalent aux poids P et W soit composé d'une seule force R appliquée en O (couple équivalent nul).

On observe qu'il faudra placer la bille du côté opposé sur lequel le poids P s'applique.

En notant b la position de la bille, on a donc :

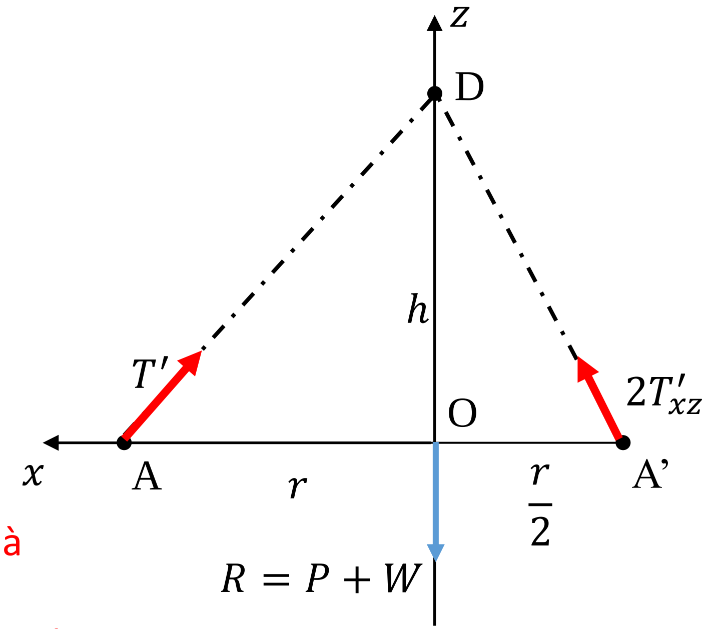


$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{W} = -12\vec{k} \text{ N}$$

$$\vec{M}_O^R = \vec{M}_O^P + \vec{M}_O^W = \vec{0}$$

$$dP - bW = 0$$

$$\boxed{b = \frac{P}{W}d = 5 \text{ cm}}$$



En plaçant la bille à 5 cm de O, en sens opposé à P, cela revient à suspendre un objet de 12 N dont le poids s'applique en O. On retrouve donc le cas étudié en A et l'équilibre statique est retrouvé.

Q4 – Solution (1/2)

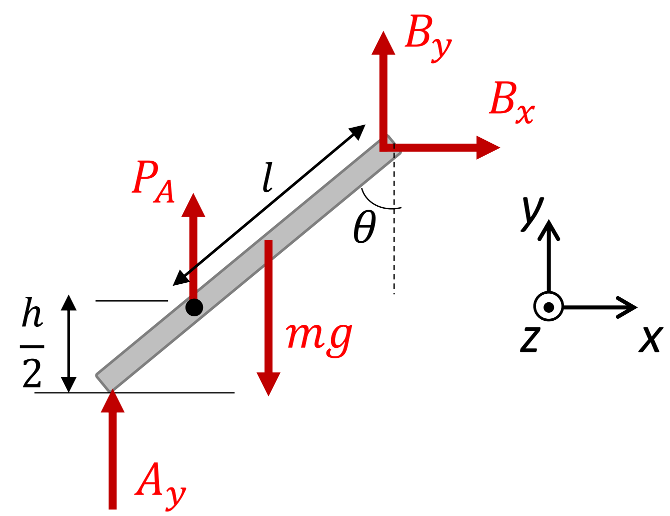
A. DCL de la tige

Système d'axes doit être présent.

Normale en A doit être orientée vers le haut.

Réactions dues au pivot en B (sens arbitraires).

Ici, P_A est la poussée d'Archimède que subit la partie immergée de la tige. Son point d'application est le centre géométrique de cette partie. On notera l la distance entre ce point et le pivot B.



B. Masse volumique de la tige

Pour déterminer ρ_t , on considère la situation où la tige est sur le point de se détacher du fond. Cela signifie que $A_y = 0$, $h = h_0$ et $\theta = \cos^{-1}\frac{d}{L} = 48{,}19°$.

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\frac{L}{2}\sin\theta - P_A l \sin\theta = 0$$

avec : $P_A = \rho_e g S \dfrac{h_0}{\cos\theta} = 4{,}71\ \mathrm{N}$ et $l = l_0 \equiv \dfrac{d - \frac{h_0}{2}}{\cos\theta} = 0{,}9\ \mathrm{m}$

$$\Rightarrow \quad mg\frac{L}{2} - \rho_e g S \frac{h_0}{\cos\theta} l_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \rho_e \frac{2Sh_0 l}{L\cos\theta} = 0{,}576\ \mathrm{kg}}$$

Q4 – Solution (2/2)

C. Expression de la réaction en B en fonction de h

Équilibre statique

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad P_A(L-l)\sin\theta - mg\frac{L}{2}\sin\theta + B_y L\sin\theta = 0$$

avec: $L - l = \dfrac{h/2}{\cos\theta}$ et $P_A = \rho_e g S \dfrac{h}{\cos\theta}$

$$\Rightarrow \quad B_y = \frac{1}{2}mg - \frac{\rho_e g S h^2}{2L\cos^2\theta}$$

$$\boxed{B = |B_y| = \frac{1}{2}mg - \frac{\rho_e g S}{2L\cos^2\theta}h^2 = 2{,}83 - 2{,}94\,h^2}$$

où h est en mètre et B en Newton.

Plus h est petit, plus la réaction est grande.