POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Questionnaire examen final

PHS1101

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)			
Nom : Yuan		**Prénom :** Ming Xiao	
Signature : M.Z		**Matricule :** 1949477	**Groupe :** 01

Réservé
Q1 : /50 26
Q2 24/50
Q3 : /50 33
Q4 : /50 40
Total : 123/200

Sigle et titre du cours			
PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs			
Professeur		***Groupe***	***Trimestre***
Jérémie Villeneuve		**Tous**	**Automne 2021**
Jour	***Date***	***Durée***	***Heures***
Samedi	**18 décembre**	**2 h 30**	**9 h 30 à 12 h 00**

Documentation	***Calculatrice***	***Outils électroniques***
☒ Aucune	☐ Aucune	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**
☐ Toute	☐ Toutes	
☐ Voir directives particulières	☒ Non programmable (AEP)	

Directives particulières

- **Le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons, veuillez le justifier puis passer à la question suivante.**
- **Vous vous engagez à faire cet examen individuellement.**
- **Détaillez les étapes de vos solutions. Une réponse sans justification ne vaut aucun point.**
- **Toute réponse finale doit être accompagnée des unités appropriées.**
- **Des formulaires aide-mémoire sont disponibles à la fin du questionnaire.**

Important

Cet examen contient **4** questions sur un total de **20** pages **(excluant cette page).**

La pondération de cet examen est de **40** %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

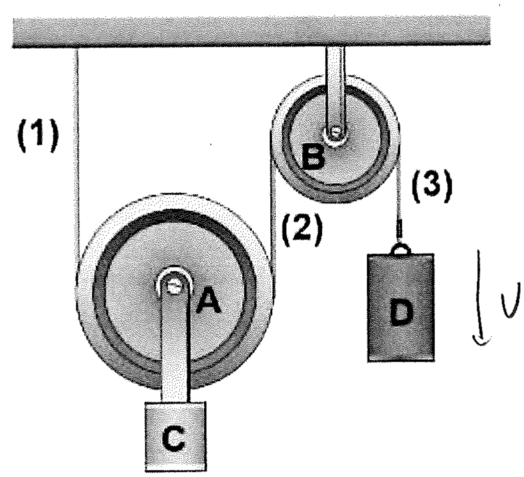
L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Mise à jour 18/11/2020

Question 1 (50 points) – Questions conceptuelles et à réponses courtes

Répondez aux questions suivantes en expliquant votre raisonnement.

A. Considérez le système mécanique sur la figure ci-contre, où le point A est un pivot. Le câble est inextensible et les poulies ont des masses non négligeables. À l'instant considéré, le bloc D est en train de descendre à une vitesse v.



À cet instant :

i. [10 pts] Vrai ou faux. Les segments de câble (1), (2) et (3) exercent tous la même tension sur les poulies.

ii. [10 pts] Vrai ou faux. Les segments de câble (1), (2) et (3) se déplacent tous à la même vitesse.

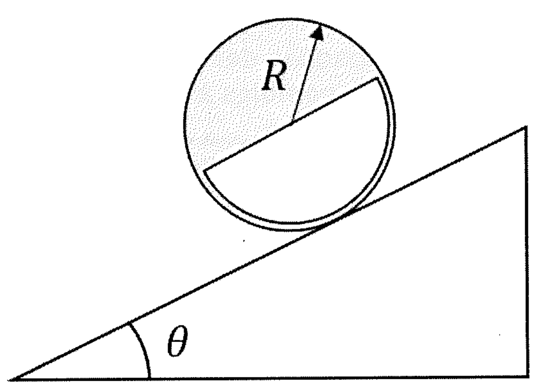
B. Une roue semi-creuse de rayon $R = 10$ cm descend un plan incliné sous l'effet de son propre poids. La moitié pleine de la roue a une masse $M = 2$ kg, tandis que la moitié creuse a une masse $m = 0{,}5$ kg. La roue roule sans glisser.

À l'instant représenté sur la figure ci-dessous, l'axe qui sépare la partie pleine de la partie creuse de la roue est parallèle au plan incliné. On donne $\theta = 30$ °.

À cet instant :

i. [10 pts] Faire le DCL-DCE de la roue.

ii. [20 pts] Calculer le rayon de giration de la roue par rapport au point de contact avec le sol.



A.

i. Faux, par exemple, pour le bout de corde (3), la ~~tension qu'elle exerce~~ ~~en le poids de~~ O tandis que la tension de (1) represente une combinaison du poids combiné de A et C, qui sont différents de O donc ils n'ont pas la même tension.

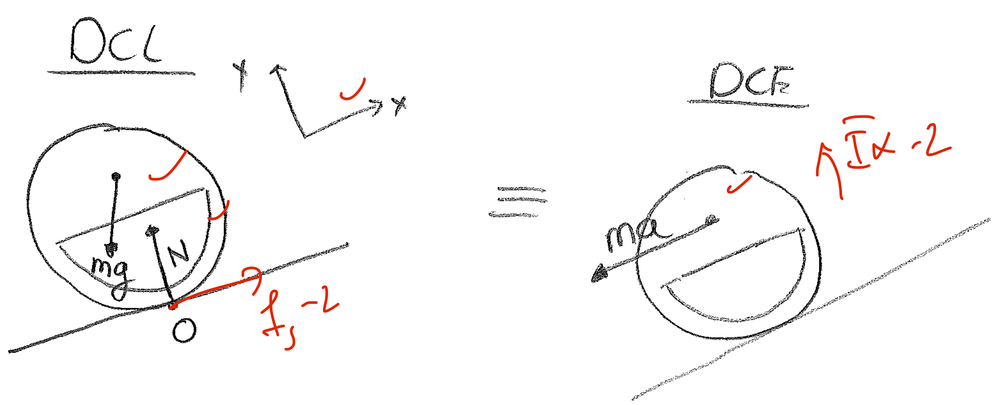
2 Non.

ii. Faux, pendant que (3) se déplace vers le bas avec une vitesse V_c, la poulie A se déplacera vers le haut avec une vitesse multiple de 2 car ce dernier a 2 cordes reliés, par le mouvement contraint.

3 ∅ vitesse des segments de corde

B. i

6



R=10cm=0,1m

15

ii ① Roue

$$I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0{,}1^2 = 0{,}01\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

$$I_0 = I_{CM} + md^2$$
$$= 0{,}01 + 2\cdot 0{,}1^2$$
$$= 0{,}03\ \mathrm{kg\cdot m^2}\ \text{J positif}$$

Mauvaise décomposition -3

② Demi cylindre

$$I_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)(2-0{,}5)0{,}1^2$$
$$= 0{,}003256\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

$$I_0 = I_{CM} + md^2 \quad -2$$
$$= 0{,}003256 + 1{,}5\cdot \cancel{0}{,}1^2$$
$$= 0{,}018256\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

③ Actuel, le I_0 est

$$0{,}03 - 0{,}018256$$
$$= 0{,}011744\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

④ donc rayon de giration

$$K = \sqrt{I_0/m}$$
$$= \sqrt{0{,}011744/2{,}5}$$
$$= \boxed{0{,}0685\ \mathrm{m}}$$

Question 2 (50 points)

Le dispositif représenté sur la figure ci-dessous est composé d'une tige homogène AB et d'une membrure BC reliées par un pivot B. L'extrémité A de la tige AB est munie d'une roulette de masse et de rayon négligeables qui roule sur un mur vertical. Le pivot C est muni d'un ressort de torsion dont la position naturelle (à laquelle il n'exerce aucun couple) correspond à une inclinaison de la tige BC d'un angle $\theta_0 = \pi/10$ rad dans le sens horaire par rapport à la verticale.

À l'instant initial, on maintient le dispositif immobile dans la configuration telle que les points A, B et C soient alignés (voir Figure 1), puis on le lâche. Le dispositif se déplace ensuite sous l'effet combiné de la gravité (qui s'exerce vers le bas de la page) et du ressort de torsion. On s'intéresse ensuite à l'instant où le dispositif passe pour la première fois par la position où la membrure BC est verticale (voir Figure 2).

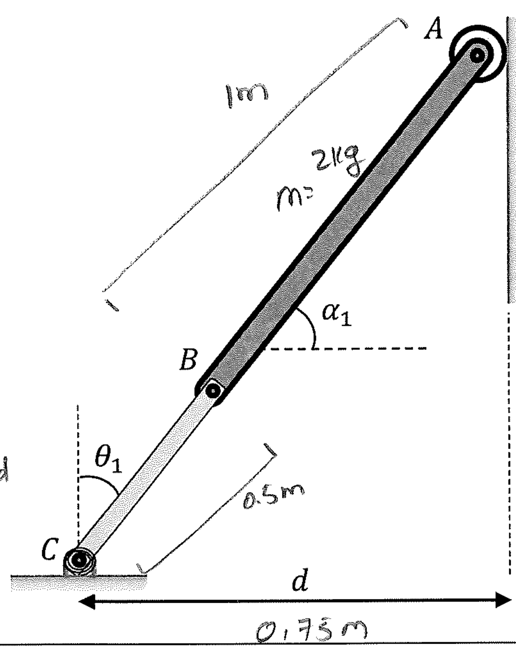
On donne :

- Tige AB : masse $m = 2$ kg et longueur $L_{AB} = 1$ m
- Membrure BC : longueur $L_{BC} = 0{,}5$ m
- Ressort de torsion : constante $\kappa = 20\ \mathrm{N \cdot m/rad}$, position naturelle $\theta_0 = \pi/10$ rad
- Distance horizontale : $d = 0{,}75$ m.

À l'instant où la membrure BC est verticale (voir Figure 2) :

A. [15 pts] Obtenir la relation entre la vitesse v_B du pivot B et la vitesse v_G du centre de masse de la tige AB.
B. [30 pts] Calculer le module de la vitesse du point B.
C. [5 pts] Calculer le module de la vitesse angulaire de la membrure BC.

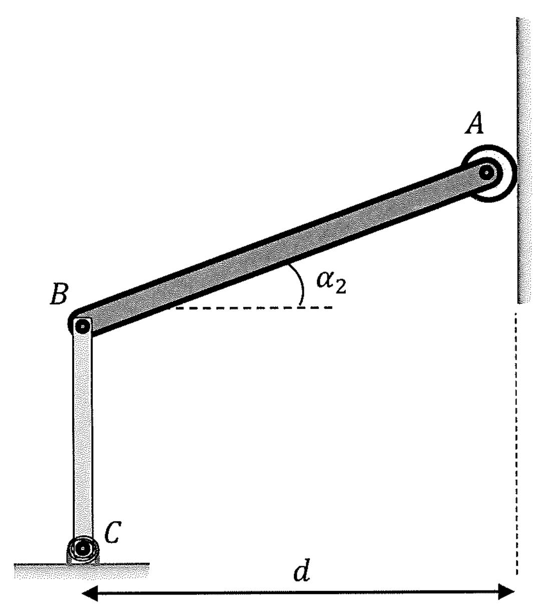
Figure 1 – Configuration initiale avec A, B et C alignés



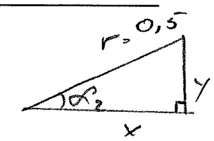
$\theta_0 = \pi/10$ rad

K=20 N·m

Figure 2 – Instant où la membrure BC est verticale



avec $\alpha_2 = 41,4067°$



A. $\vec{v}_B = \vec{v}_{CH} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/G}$ où $\vec{r}_{B/G} = (0,5\cos\alpha_2 \vec{i} + 0,5\sin\alpha_2 \vec{j})$ m

$= (0,375\vec{i} + 0,3307\vec{j})$ m

$\cos\alpha_2 = \frac{x}{r}$

$x = r\cos\alpha_2$

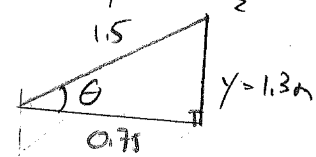
$y = r\sin\alpha_2$

(1) L'énergie est conservée car les seules forces en jeu sont le ressort de torsion et le poids qui sont les 2 des forces conservatives. Donc $E_1 = E_2$

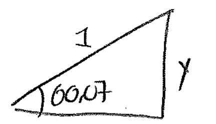
5

2

(0)



on a $E_1 = \underbrace{\frac{1}{2}k(\Delta\theta)^2}_{\text{potentielle ressort}} + \underbrace{mgh}_{\text{tige AB}}$



$\sin 60,07 = \frac{y}{1}$

$y = 0,8666$ m

on a $0,75^2 + y^2 = 1,5^2$

$y = 1,3$ m

on a $\frac{1,3}{\sin\theta} = \frac{1,5}{\sin 90}$

$= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (\cancel{1,047} - \frac{\pi}{10})^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot \cancel{0,8666}$

$= 6,3706$

$+ 17 = 22,3705$ J

6

$1,3 = 1,5\sin\theta$

$\theta = 60,07°$

on a $E_2 = \underbrace{mgh}_{\text{potentielle tige}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(\Delta\theta)^2}_{\text{potentielle du ressort}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_{AB}^2}_{\text{translation de AB}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega_{AB}^2}_{\text{rotation de AB}}$

3

On a donc $\theta_1 = 90° - 60,07 = 30°$

$\frac{2\pi \text{ rad}}{360} = \frac{?}{30}$

on a $30° = 0,5236$ rad

$\frac{2\pi \text{ rad}}{360} = \frac{? \text{ rad}}{60}$

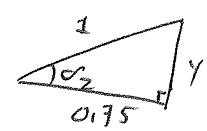
$1,047$ rad

$= 2 \cdot 9,81 \cdot 0,6614 + \frac{1}{2} \cdot 20(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10})^2 + \frac{1}{2}mv_{CH,AB}^2 + \frac{1}{2}0,167 \cdot \omega_{CH,AB}^2$

$= 12,9767 + 15,791 + v_{CH,AB}^2 + 0,0835\omega_{CH,AB}^2$

on a donc $-6,3972 = v_{CH,AB}^2 + 0,0835\omega_{CH,AB}^2$

on a $\omega_{CHAB} = \sqrt{-6,3972 - v_{CH,AB}^2}$



on a $0,75^2 + y^2 = 1^2$

$y = 0,6614$ m

on a $\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \sqrt{-6,3972 - v^2} \\ 0,375 & 0,3307 & 0 \end{vmatrix} = -0,3307\sqrt{-6,3972 - v^2} + 0,375\sqrt{-6,3972 - v^2}$

$I_{CH,AB} = \frac{1}{12}ml^2$

$= \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 1^2$

$= 0,167$ kg·m²

2

$\vec{v}_B = \vec{v}_{CH} + (-0,3307\sqrt{-6,3972 - v_{CH}^2} + 0,375\sqrt{-6,3972 - v_{CH}^2})$

$\vec{v}_B = v$

$\frac{1}{\sin 90} = \frac{0,6614}{\sin\alpha_2}$

$\sin\alpha_2 = 0,6614$

$\alpha_2 = 41,4067°$

2

20/30

$\vec{v}_B = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/G}$ où $\vec{r}_{B/G} = (0.5\cos\alpha_2 \vec{i} + 0.5\sin\alpha_2 \vec{j})$

① Pour BC, on a CIR est au point C

donc $\omega_{BC} = \frac{v_B}{r_{B/CIR}} = \frac{v_B}{0.5}$

$v_B = 0.5\,\omega_{BC}$

C. Supposons que $U_B = 5\,m/s$ ← trouvé précédemment

On sait que CIR de BC est au point C

1

donc $\omega_{BC} = \dfrac{U_B}{r_{B/CIR}} = \dfrac{5}{0{,}5} = \boxed{10\ rad/s}$

4/5

3

Question 3 (50 points)

Un récipient cylindrique de diamètre $D = 20\ \mathrm{cm}$ comportant de l'eau ($\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$) est posé sur une planche à roulettes susceptible de se déplacer sans frottement sur un sol horizontal. Sur le côté du récipient, à la hauteur de sa base, se trouve une ouverture circulaire de diamètre $d = 2\ \mathrm{cm}$ par laquelle s'échappe l'eau (voir la figure ci-dessous).

La vitesse d'échappement de l'eau par rapport au récipient est donnée par la formule de Torricelli $u = \sqrt{2gh}$, où g est l'accélération gravitationnelle et h est la hauteur de l'eau dans le récipient.

À l'instant initial $t = 0$ s, le récipient et la planche sont lâchés immobiles alors que le niveau de l'eau est $h_0 = 30\ \mathrm{cm}$.

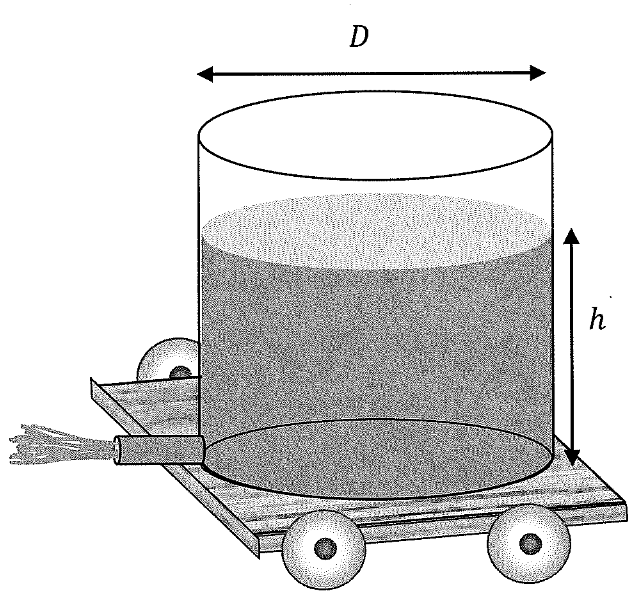
La masse totale du récipient vide et de la planche à roulette est $M = 3\ \mathrm{kg}$.

A. [10 pts] Faire le DCL-DCE du système [récipient + planche à roulettes].
B. [20 pts] Exprimer l'accélération du récipient en fonction de h.
C. [10 pts] Montrer que l'expression de h en fonction du temps est donnée par :

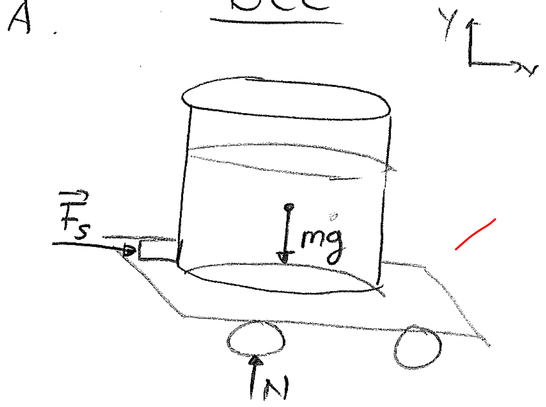
$$h = \left(h_0 - t\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{d^2}{D^2}\right)^2$$

Indice : Déterminer une équation différentielle pour h et résoudre par séparation de variables.

D. [10 pts] Quelle est la durée de la phase d'accélération du récipient ?

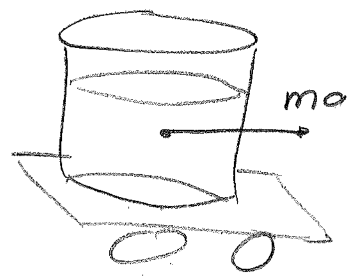


A. DCL



=

DCE



B. Puisque l'objet bouge, en x on a $\vec{F_s} = m\vec{a}$ où $F_s = -\left|\frac{dm}{dt}\right|\vec{v}_s$

où $\vec{v}_s = (\sqrt{2gh}\,\vec{i}\,)$ m/s et $\frac{dm}{dt} = \rho S v = \rho S\sqrt{2gh}$

on a donc $-|\rho S v|(\sqrt{2gh})\vec{i} = M\vec{a}$

donc $\frac{-\rho S\sqrt{2gh}\cdot\sqrt{2gh}}{M} = a \;=\; \frac{-\rho S\cdot 2gh}{M} = a$ où $S = \pi(d/2)^2$

C.

−10

$$\Rightarrow \frac{-\rho\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot 2gh}{M} = a$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{-\rho\pi d^2\cdot 2gh}{2M} = a}$$

m(t) = ?

−5

−2

D. Puisque $h=\left(h_0-t\sqrt{\frac{g}{2}}\,\frac{d^2}{D^2}\right)^2$

la durée s'arrête quand $h=0$

donc $0=\left(0.3-t\sqrt{\frac{9.81}{2}}\cdot\frac{0,02^2}{0,2^2}\right)^2$

$0=0.3-t\cdot 2.2147\cdot 0,01$

$0=0.3-0,022147\,t$

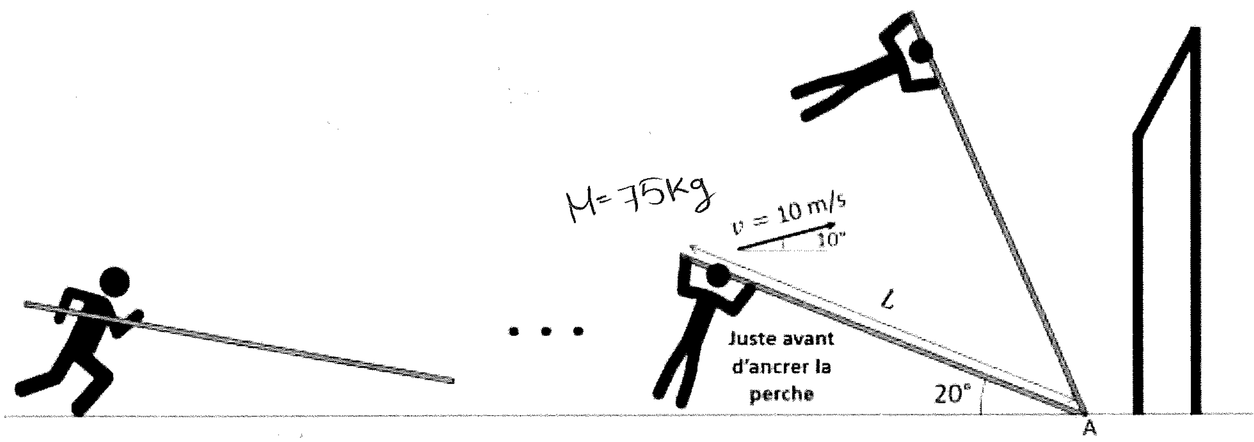
$0,3=0,022147\,t$

$\boxed{t=13.545\,s}$

40

Question 4 (50 points)

On étudie ici le mouvement d'une athlète olympique qui pratique le saut à la perche. L'athlète court d'abord sur la piste en tenant la perche dans ses mains, puis saute juste avant d'ancrer la perche dans un petit trou situé au sol (point A). À cet instant, elle se déplace avec la perche à une vitesse de 10 m/s orientée à 10° au-dessus de l'horizontale (voir figure). L'ancrage au point A permet à la perche de tourner, mais empêche tout mouvement vertical ou horizontal.



Données et hypothèses :

- L'athlète peut être considérée comme une masse ponctuelle $M = 75$ kg. La distance entre ses mains et l'extrémité de la perche est négligeable.
- La perche, de masse $m = 2{,}5$ kg et de longueur $L = 5$ m, est considérée comme une tige mince rigide et homogène. Tout juste avant d'être ancrée, elle a la même vitesse que l'athlète.

A. [15 pts] En considérant le système [athlète + perche] :
   i. La quantité de mouvement du système est-elle conservée entre les instants juste avant et juste après avoir ancré la perche ? Justifier.
   ii. Existe-t-il un point par rapport auquel le moment cinétique du système est conservé entre les instants juste avant et juste après avoir ancré la perche ? Justifier.

B. [25 pts] Calculer la vitesse angulaire du système [athlète + perche] juste après avoir ancré la perche au sol.

C. [10 pts] Quelle est l'accélération angulaire du système [athlète + perche] juste après avoir ancré la perche au sol ?

A. i. La quantité de mouvement n'est pas conservée car après que la perche a été mis à terre, il y a eu un impact, où une force qui s'est ajoutée contre le système athlète + tige. Donc une force externe vient perturber le système isolé donc la QM n'est pas conservée.

7

ii. Oui, le centre de masse de l'athlète et le centre de masse de la tige sont conservés pour leur moment cinétique car les 2 points tournent autour de pivot A après que la perche est ancrée et aucune autre force ne crée de moment par rapport au système avant l'ancrage donc il est conservé.

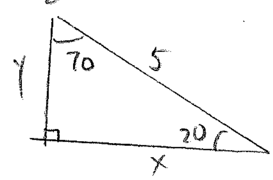
4

−4 pas le bon point

B. Puisque le moment cinétique est conservé, nous avons $\vec{H}_{O_1} = \vec{H}_{O_2}$

25

où $\vec{H}_{O_1} = \vec{r} \times m\vec{v}\,]_{\text{athlète}} + \vec{r} \times m\vec{v}\,]_{\text{tige}}$ où $m = 75\ \text{kg}$ et $\vec{v} = (10\cos 10\,\vec{i} + 10\sin 10\,\vec{j})\ \text{m/s}$ et $\vec{r} = (-5\cos 20\,\vec{i} + 5\sin 20\,\vec{j})\ \text{m}$



$\cos 20 = \frac{X}{5}$

$X = 5\cos 20$ $Y = 5\sin 20$

donc $m\vec{v} = (738.606\,\vec{i} + 130.236\,\vec{j})\ \text{m}^2/\text{s}$

et $\vec{H}_{O_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4.698 & 1.71 & 0 \\ 738.606 & 130.236 & 0 \end{vmatrix} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 1874.864)\ \text{N.m}$

tige
$\vec{r} = (-2.5\cos 20\,\vec{i} + 2.5\sin 20\,\vec{j})$
$m = 2.5\ \text{kg}$
$\vec{v} = (10\cos 10\,\vec{i} + 10\sin 10\,\vec{j})$

On a $\vec{H}_{O_2} = I_O\vec{\omega}$ où $I = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12} \cdot 2.5 \cdot 5^2 = 5.208\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ pour la tige

$I = mR^2 = 75 \cdot 5^2 = 1875\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ pour athlète.

donc $I_{\text{tige}}/_A = 5.208 + 2.5 \cdot 2.5^2 = 20.833\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$m\vec{v} = (24.62\,\vec{i} + 4.341\,\vec{j})$

on a donc

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2.349 & 0.855 & 0 \\ 24.62 & 4.340 & 0 \end{vmatrix} = -31.244\,\vec{k}\ \text{N.m}$

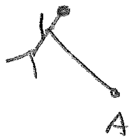
donc en tout $-1874.864 - 31.244 = 1906.108\ \text{kg}\ \text{m}^2/\text{s}$

on a donc $-1906.108 = 1895.833\,\omega$

$\omega = \boxed{1.00510\ \text{rad/s}}$

DCC

c.



4

donc $\Sigma \vec{M}_A = I_A \alpha$

où $I_A = 1895,833\ kg \cdot m^2$ pour athlète + tige au point A.

① Moment de l'athlète

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ où $\vec{r} = (-5\cos 20\,\vec{i} + 5\sin 20\,\vec{j})\,m$

$\vec{F} = (10\cos 10\,\vec{i} + 10\sin 10\,\vec{j})\,N$

on a donc
$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4{,}698 & 1.71 & 0 \\ 9.848 & 1.736 & 0 \end{vmatrix} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 25\vec{k})\ N.m$$

② Moment de la Tige

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ où $\vec{r} = (-2{,}5\cos 20\,\vec{i} + 2.5\sin 20\,\vec{j})\,m$

$\vec{F} = (\underline{10\cos 10\,\vec{i} + 10\sin 10\,\vec{j}})\,N$

on a
$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2{,}349 & 0{,}855 & 0 \\ 9.848 & 1.736 & 0 \end{vmatrix} = (-12{,}498\vec{k})\ N.m$$

−6

on a donc $-37{,}498\ Nm = 1895{,}833\,\alpha$

$$\boxed{\alpha = 0{,}0197\ rad/s^2}$$