Question 1 (40 points) – Questions à court développement

Répondez aux sous-questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.**

A. Vrai ou faux : L'énergie mécanique d'un système isolé (sur lequel aucune force externe ne s'applique) est toujours conservée. Justifiez votre réponse (5 points)

B. Vrai ou faux : Si j'applique une force sur un objet et que cet objet demeure immobile, alors l'impulsion de ma force est nulle. Justifiez votre réponse (5 points)

C. Une voiture roule sur une route parfaitement horizontale. Son moteur développe une puissance constante $P = 120\,\mathrm{kW}$ alors que le module de la résultante des forces de frottement est donné par $f = 1{,}3 \times v^2$ où f est en Newton et v en m/s. Déterminer la vitesse maximale que peut atteindre la voiture. (15 points)

D. Déterminer la position $(\bar{x}, \bar{y})$ du centre de masse de la pièce grise 2D ci-dessous. La pièce a une masse surfacique homogène. (15 points)

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes. Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. **Faux.** Même si l'objet ne subit pas de forces externes les forces internes peuvent faire un travail ce qui va varier son énergie mécanique.

B. **Faux,** Une force non nulle induit forcément une impulsion non nulle sur une durée donnée. Le fait que l'objet demeure immobile signifie que d'autres forces s'appliquent sur l'objet dont l'impulsion est égale et opposée à la mienne.

C. $P = Fv \implies F = P/v$

lorsque la vitesse est maximale la somme des forces est nulle: $F = f$

$$\frac{P}{v_{max}} = 1{,}3 \times v_{max}^2 \qquad \boxed{v_{max} = \sqrt[3]{P/1{,}3} = 45.2 \text{ m/s}}$$

D. Par symétrie $\bar{x} = 30$ cm

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{(\pi(0{,}3)^2/2)(4(0{,}3)/(3\pi)) - 2(\pi(0{,}1)^2/2)(4(0{,}1)/(3\pi))}{\pi(0{,}3)^2/2}$$

$$\bar{y} = 11{,}8 \text{ cm}$$

$$\longrightarrow \boxed{(\bar{x}; \bar{y}) = (30; 11{,}8)\text{cm}}$$

Question 2 (50 points)

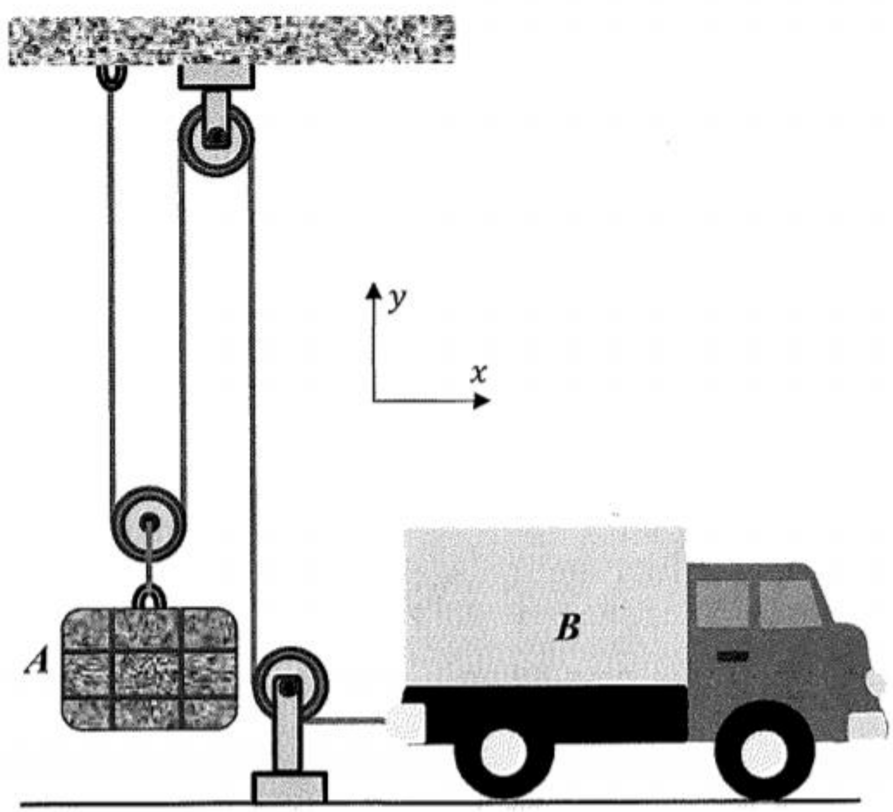
On utilise le dispositif de la figure ci-dessous pour soulever une charge A de masse $m_A = 1800$ kg en se servant de la force du camion B de masse m_B. Le moteur du camion produit une force vers l'avant donnée par $F = \alpha(\beta - v_B)$ où α et β sont des constantes et v_B est la vitesse du camion.

On donne : $\alpha = 300$ kg/s et $\beta = 30$ m/s

A. Faire le DCL-DCE de la charge A et du camion B séparément. (15 points)

B. Déterminer l'expression algébrique de l'accélération de la charge a_A en fonction de sa vitesse v_A et des paramètres constants du problème. (20 points)

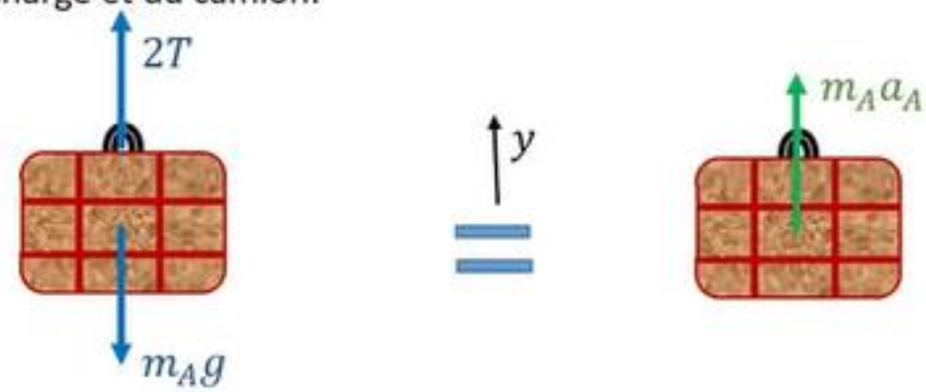
C. Déterminer la vitesse maximale v_{Amax} atteinte par la charge A. (15 points)



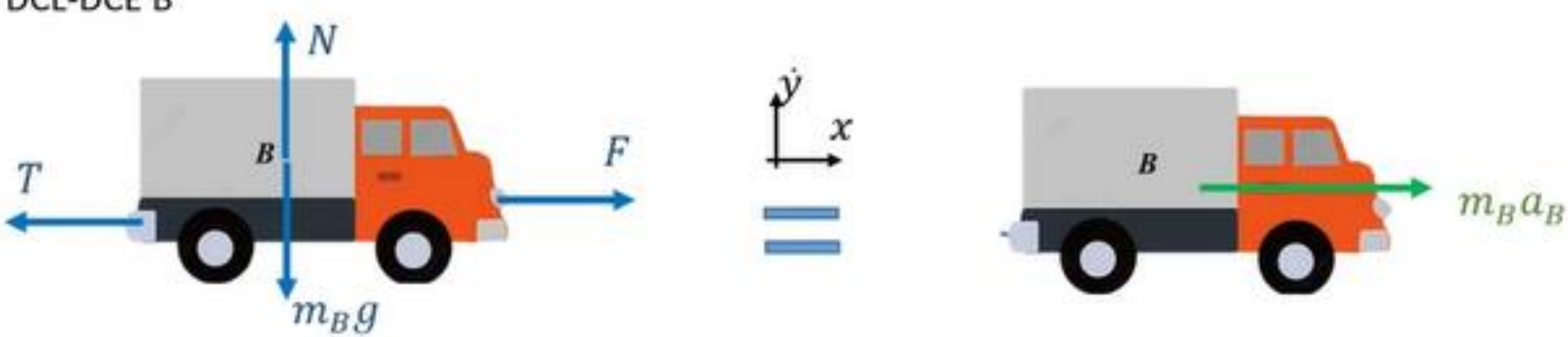
Q2 – Solution (1/2)

A. DCL-DCE de la charge et du camion:

DCL-DCE A



DCL-DCE B



Note: Dans le DCL-DCE B, on peut indiquer les forces de frottement f_s vers la droite à la place de F. Leur point d'application n'est pas important. Il faudrait par la suite écrire que : $f_s = F$.

Q2 – Solution (2/2)

B. Expression algébrique de a_A:

DCL-DCE B: $\sum F_x = m_B a_B \Rightarrow F - T = m_B a_B \quad \Rightarrow \; T = F - m_B a_B$

DCL-DCE A: $\sum F_y = m_A a_A \Rightarrow 2T - m_A g = m_A a_A$

$$\Rightarrow 2(F - m_B a_B) - m_A g = m_A a_A$$

Mouvements de A et B contrains: $v_B = 2v_A$ et $a_B = 2a_A$

$$\Rightarrow 2F - 4m_B a_A - m_A g = m_A a_A \quad \Rightarrow a_A = \frac{2F - m_A g}{m_A + 4m_B}$$

$$\boxed{\Rightarrow a_A = \frac{2\alpha(\beta - 2v_A) - m_A g}{m_A + 4m_B}}$$

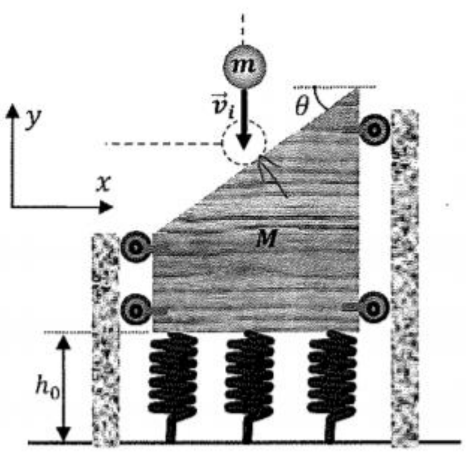
C. Vitesse maximale de A $\longrightarrow a_A = 0$

$$\Rightarrow \; 2\alpha(\beta - 2v_{Amax}) - m_A g = 0 \quad \boxed{\Rightarrow v_{Amax} = \frac{2\alpha\beta - m_A g}{4\alpha} = 0{,}285 \text{ m/s}}$$

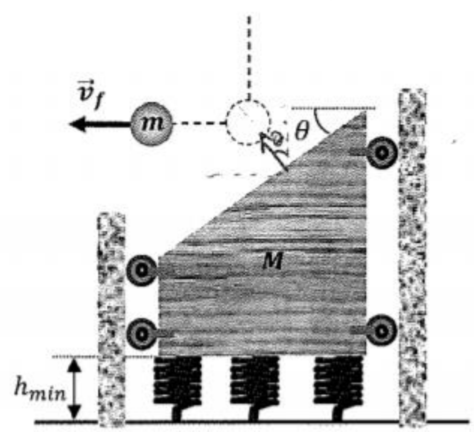
Question 3 (60 points)

Le bloc de masse $M = 5\,\mathrm{kg}$ représenté sur la figure ci-dessous repose sur trois ressorts identiques de longueurs naturelles $L_0 = 0{,}8\,\mathrm{m}$ et de constantes k. Le bloc est susceptible de se déplacer verticalement sans frottement sur un guide grâce à des roulettes. On note h la position verticale de sa face inférieure (h représente aussi la longueur des ressorts). Une balle de dimensions négligeables et de masse $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ percute la face inclinée du bloc avec une vitesse initiale verticale v_i puis rebondit dans la direction horizontale avec une vitesse v_f tel que représenté sur la figure. On considérera que l'impact est élastique et de durée très courte. On négligera aussi tout frottement. Avant l'impact, le bloc est au repos à une hauteur $h = h_0$ du sol. Après l'impact, le bloc descend jusqu'à une hauteur minimale $h = h_{min}$. On donne : $h_0 = 0{,}5\,\mathrm{m}$ et $h_{min} = 0{,}3\,\mathrm{m}$.

- **A.** Déterminer la constante k des ressorts. (10 points)
- **B.** Déterminer la grandeur de la vitesse v_i de la balle juste avant l'impact. (20 points)
- **C.** Déterminer la grandeur de la vitesse v_f de la balle juste après l'impact. (15 points)
- **D.** Quel est l'angle d'inclinaison θ de la face inclinée du bloc? (15 points)



Instant avant l'impact. Le bloc est à sa hauteur initiale.



Instant où le bloc est à sa hauteur minimale après l'impact.

Question 3 – Solution (1/2)

A. Constante k des ressorts :

Avant l'impact, le bloc est en équilibre statique $\Rightarrow 3F_{res} = Mg$

$$\Rightarrow 3k(L_0 - h_0) = Mg \quad \boxed{\Rightarrow k = \frac{Mg}{3(L_0 - h_0)} = 54{,}5\ \mathrm{N/m}}$$

B. Calcul de v_i :

Soit V la vitesse du bloc juste après l'impact. La conservation de l'énergie mécanique du bloc entre l'instant juste après l'impacte et lorsqu'il est à sa position la plus basse donne:

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}k(L_0 - h_0)^2 + Mgh_0 = \frac{1}{2}k(L_0 - h_{min})^2 + Mgh_{min}$$

$$\Rightarrow V = 1{,}144\ \mathrm{m/s}$$

Durant l'impact, la quantité de movement du système composé de la balle et du bloc est conservée sur l'axe vertical car aucune force impulsive ne s'applique sur la direction verticale. $L_{yi} = L_{yf}$

$$mv_i = MV \quad \boxed{\Rightarrow \quad v_i = \frac{M}{m}V = 11{,}4\ \mathrm{m/s}}$$

Question 3 – Solution (2/2)

C. Calcul de v_f :

L'impact est élastique donc il y a conservation de l'énergie cinétique du système bloc-balle.

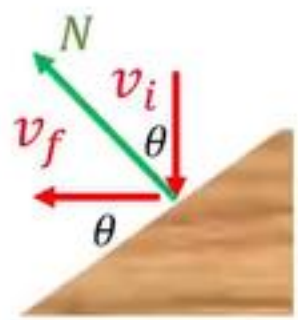
$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_f = \sqrt{v_i^2 - \frac{M}{m}V^2} = 10{,}9\ \mathrm{m/s}}$$

D. Calcul de θ:

Durant l'impact, la composante parallèle à la face inclinée du bloc de la quantité de mouvement de la balle est conservée.

$$mv_i \sin\theta = mv_f \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = artan\left(\frac{v_f}{v_i}\right) = 43{,}6°}$$



Question 4 (50 points)

Un bloc B de masse $m = 2\ \mathrm{kg}$ est attaché à un clou O à l'aide d'une corde inextensible de longueur $L = 0{,}8\ \mathrm{m}$ (de masse négligeable). Le bloc est susceptible de glisser sur une table horizontale. Le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et la table est $\mu_k = 0{,}1$. On lance le bloc avec une vitesse initiale $v_i = 2\ \mathrm{m/s}$ comme représenté sur la figure ci-dessous. Le bloc tourne d'abord autour de O puis autour de la cheville A fixée sur la table lorsque la corde la touche. On prendra comme origine du temps ($t = 0$) l'instant où la corde touche la cheville A. Sur la figure, la gravité agit perpendiculairement à la page dans le sens entrant.

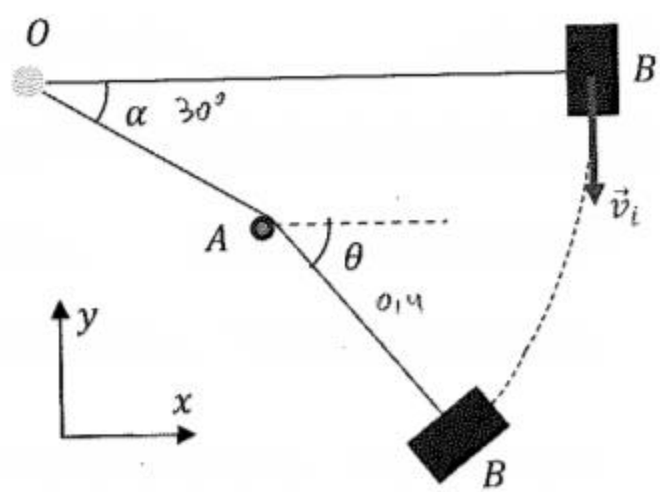
On donne : $\overline{OA} = L/2$ et $\alpha = \pi/6$ rad.

A. Déterminer la vitesse v_0 du bloc à l'instant $t = 0$. (10 points)

B. Faire le DCL-DCE du bloc pour un angle θ quelconque compris entre $30°$ et $90°$. Utiliser le même angle de vue que dans la figure. (10 points)

C. Déterminer l'expression algébrique de la tension T de la corde en fonction du temps, de v_0 et des paramètres constants du problème lorsque $t \geq 0$. (20 points)

D. Quelle est la distance totale Δs parcourue par le bloc à partir de son lancement jusqu'à son arrêt total? (10 points)



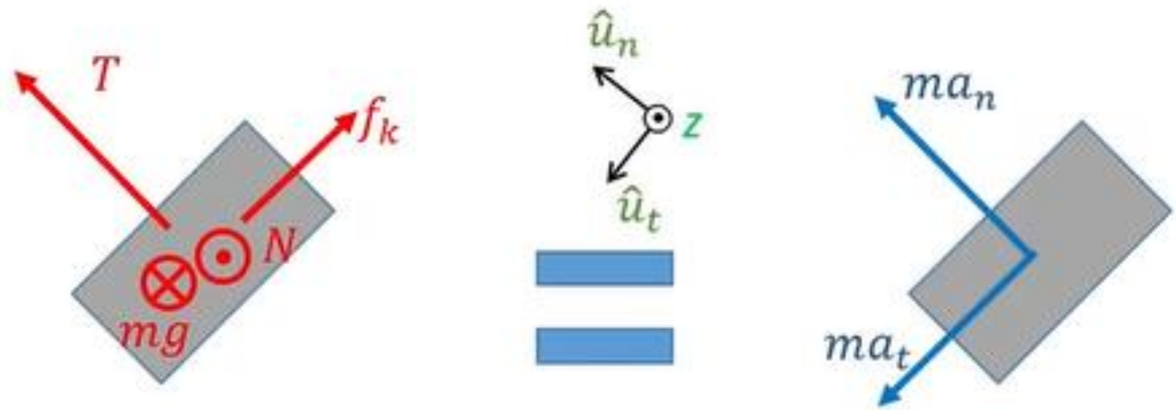
Q4 – Solution (1/2)

A. Calcul de la vitesse v_0

Entre la position initiale et la position à $t = 0$, il n'y a pas de conservation de l'énergie mécanique. La seule force non conservative qui fait un travail est la force de frottement. Celle-ci est toujours dans la direction opposée au déplacement

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -f_k L\alpha = -\mu_k mgL\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \sqrt{v_i^2 - \mu_k gL\alpha} = 1{,}78\ \mathrm{m/s}}$$

B. DCL-DCE du bloc:



Note: Orienter a_t dans l'autre sens n'est pas une erreur. Il faut juste être cohérents lorsqu'on écrit l'équation correspondante soit: $\sum F_t = -ma_t$ avec a_t positif.

Q4 – Solution (2/2)

C. Expression algébrique de la tension T :

DCL-DCE: $\sum F_t = ma_t \Rightarrow -f_k = ma_t \qquad \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-\mu_k N}{m} = -\mu_k g$

$\Rightarrow v = v_0 - \mu_k g t$

$\sum F_n = ma_n \Rightarrow T = m\frac{v^2}{L/2}$ ➡ $\boxed{T = \frac{2m}{L}(v_0 - \mu_k g t)^2}$

D. Distance totale parcourue:

On peut utiliser le principe travail-énergie comme dans A ou la quatrième équation du MUA car dans la direction $\hat{u}_t$ l'accélération est bien constante.

$v_f^2 - v_i^2 = 2a_t \Delta s$ ➡ $0 - v_i^2 = -2\mu_k g \Delta s$

➡ $\boxed{\Delta s = \frac{v_i^2}{2\mu_k g} = 2{,}04 \text{ m}}$