POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Questionnaire
Examen final

PHS4700

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Réservé	
Q1:	**/25**
Q2:	**/25**
Q3:	**/25**
Q4:	**/25**
Total :	**100**

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
PHS4700 **Physique pour les applications multimédia**		**Automne 2021**
Professeur	***Local***	***Téléphone***
Djamel Seddaoui	**B-258.13**	

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Lundi	**20 décembre 2021**	**2h30**	**9h30 à 12h00**

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Aucune	☐ Aucune	**Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.**
☐ Toute	☐ Toutes	
☒ Voir directives particulières	☒ Non programmable (AEP)	

Directives particulières

- Écrire lisiblement avec un crayon foncé.
- Détaillez et justifiez les étapes de vos solutions.
- Toute documentation permise.
- **Bonne fin de trimestre à tous. Passez de beaux temps des fêtes !**

Important

Cet examen contient 4 questions sur un total de 16 pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de 50 %

Vous devez répondre sur : ☐ le questionnaire ☒ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☐ oui ☒ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1. (25 points)

On lance une pièce de monnaie vers le haut à partir d'une position initiale $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)^T$m avec une vitesse initiale verticale $\vec{v}_0 = (0, 0, 4)^T \mathrm{m}/s$ et une vitesse angulaire initiale $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)^T \mathrm{rad}/s$. La pièce est un disque plein de masse $m = 7$ grammes, de rayon $r = 1.3$ cm et d'épaisseur négligeable. Durant sa course, on considèrera que la pièce ne subit que la force de son poids. L'accélération gravitationnelle est $\vec{g} = (0, 0, -9.8)^T \mathrm{m/s^2}$.

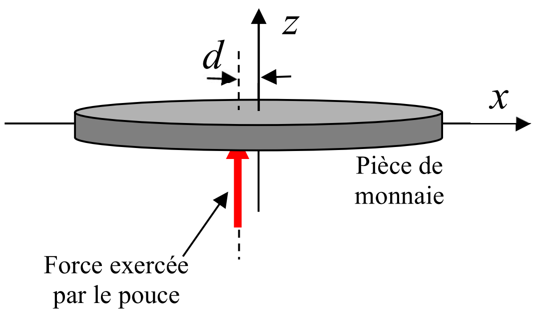
a) **(5 points)** Déterminer la durée de vol t_0 de la pièce avant qu'elle n'arrive au niveau du sol situé à $z = -1$ m.

En fait, la pièce a été lancée en la frappant par l'angle du pouce pendant qu'elle reposait immobile sur l'index plié (tir de pile ou face). Le point de contact entre le pouce et la pièce est situé à $\vec{r}_p = (-d, 0, 0)^T$ avec $d = 2$ mm. Le pouce, que l'on considérera comme ayant une masse infinie comparativement à la masse de la pièce, la heurte avec une vitesse $\vec{V}$ dirigée vers le haut.

b) **(10 points)** Déterminer le module de la vitesse $\vec{V}$ sachant que la collision pouce-pièce est élastique.

c) **(7 points)** Calculer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ de la pièce immédiatement après la collision?

d) **(3 points)** Combien de tours fera la pièce autour d'elle-même avant d'atteindre le sol? Approximez votre réponse à un demi-tour près.



Question 2 : (25 points)

Une sphère de rayon $R = 2$ cm est posée sur une table. On choisit le référentiel du laboratoire tel que son origine coïncide avec le point de contact de la sphère avec la table et l'axe z est vertical. Le plan *xy* sera donc le plan de table.
On fait une marque blanche sur la surface de la sphère au point A situé à $\vec{r}_A = (0;\ 2;\ 2)^T$cm puis, on fait rouler cette sphère sans glisser sur un segment de droite situé dans le 4e quadrant du plan *xy* faisant un angle de 45° avec l'axe *ox* (voir la figure ci-dessous). La sphère parcoure ainsi une distance $d = \pi$ (cm) puis s'immobilise.

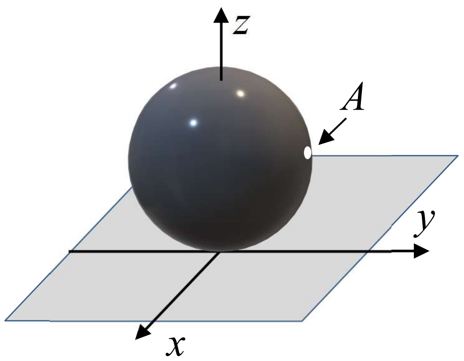
a) **(5 points)** Quels est l'angle θ de la rotation subie par la sphère et le vecteur unitaire $\hat{u}$ de son axe entre la configuration initiale et la configuration finale?

b) **(5 points)** Déterminer le quaternion associé à cette rotation.

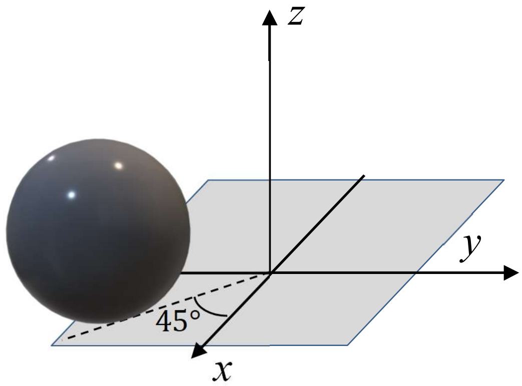
c) **(2 points)** Déterminer le vecteur position $\vec{r}_{A/C}$ du point A par rapport au centre de masse de la sphère dans la configuration initiale.

d) **(3 points)** Déterminer le vecteur position finale $\vec{r'}_C$ du centre de masse de la sphère.

e) **(10 points)** Calculer le vecteur position finale $\vec{r'}_A$ du point A dans le référentiel du laboratoire en utilisant la méthode des quaternions.



Configuration initiale



Configuration finale

Question 3 : (25 points)

On désire étudier la trajectoire d'un rayon lumineux émis par une source s située à $\vec{r_s} = (1, 0, 0)^T$m. Ce rayon se propage dans la direction $\hat{u}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ et intercepte un miroir défini par trois points A, B et C appartenant à sa surface. Les coordonnées de ces points sont $A(1,2, 0)$m, $B(2,2, 0)$m et $C(0,1, 1)$m.

(a) (**10 points**) Déterminer la normale sortante $\hat{n}$ du miroir.

(b) (**10 points**) Déterminer le vecteur position $\vec{r_p}$ du point P d'impact du rayon lumineux avec le miroir.

(c) (**5 points**) Quel est le vecteur unitaire $\hat{u}_r$ du rayon réfléchit par le miroir?

Question 4 : (25 points)

Deux avions, A et B volent en même temps à vitesses constantes. À l'instant $t = 0$, l'avion A se trouvant à la position $\vec{r}_A = (0, 2000, 3500)^T$m et volant à vitesse $\vec{v}_A = (150, -80, 0)^T \mathrm{m/s}$, émet un bref signal sonore de fréquence $f_A = 2$ kHz et d'une puissance telle qu'un décibelmètre posé sur cet avion et situé à une distance $r_1 = 1$m de l'émetteur, affiche une intensité $L_I(r_1) = 120$ dB. À cet instant, l'avion B est situé à $\vec{r}_B = (4000, 0, 2500)^T$m. lorsque l'avion B reçoit le signal, sa position est $\vec{r}_{B1} = (3000, 500, 2800)^T$m.
La vitesse du son dans l'air est $c = 342{,}6$ m/s et son coefficient d'atténuation est $\mathcal{A} = 8.5$ dB/km.

(a) (**7 points**) Déterminer la vitesse $\vec{v}_B$ de l'avion B sachant que celle-ci est constante.

(b) (**8 points**) Quelle est la fréquence du signal sonore reçu par l'avion B?

(c) (**5 points**) Déterminer la puissance P du signal sonore émis par l'avion A.

(d) (**5 points**) Quelle est l'intensité du signal sonore reçu par l'avion B?

Solution Q1 :

a) **(5 points)** Déterminer la durée de vol de la pièce avant qu'elle ne touche le sol situé à $z = -1$ m.

Le mouvement de la pièce est un mouvement vertical uniformément accéléré, la position verticale de la pièce en fonction du temps est donnée par :

$$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Lorsque la pièce arrive au niveau du sol :

$$z(t) = 4t_0 - \frac{9.8}{2} t_0^2 = -1$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{t_0 = 1.017\ s}$$

b) **(10 points)** Déterminer le module de la vitesse $\vec{V}$ sachant que la collision pouce-pièce est élastique.

On choisi de prendre la pièce comme l'objet *a* qui rentre en collision avec le pouce (objet *b*).
La normale entrante dans *a* sera donc :

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La vitesse relative de *a* par rapport à *b* avant la collision:

$$\vec{v}_r^- = 0 - \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -V \end{pmatrix}$$

sa projection selon $\hat{n}$ est :

$$v_r^- = \vec{v}_r^- . \hat{n} = -V$$

L'impulsion transférée du pouce à la pièce durant la collision est :

$$\vec{J} = j\hat{n}$$

avec:

$$j = -\frac{(1+\epsilon)}{\frac{1}{m} + G_a} v_r^-$$

Ici ϵ est le coefficient de restitution et vaut 1 car la collision est élastique et :

$$G_a = \hat{n}.\left[\left(I_a^{-1}(\vec{r}_p \times \hat{n})\right) \times \vec{r}_p\right] = \frac{d^2}{I_{ay}} = 13.5249\ \text{kg}^{-1}$$

car $I_{ay} = \frac{mr^2}{4}$
cela donne :

$$j = (0.012789)\ V$$

Sachant que

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 + \frac{j\hat{n}}{m} = \frac{0.012789}{0.007} V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$V = \frac{4 \times 0.007}{0.012789} \quad \rightarrow \quad \boxed{V = 2.189 \text{ m/s}}$$

c) **(5 points)** Calculer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ de la pièce immédiatement après la collision?

$$\vec{\omega} = 0 + I_a^{-1}(\vec{r}_p \times \vec{J}) = \frac{4}{mr^2} j \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$j = (0.012789)V = 0.028 \text{ kg. m/s}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = 189{,}35 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad/s}}$$

d) **(3 points)** Combien de tours fera la pièce autour d'elle-même avant d'atteindre le sol? Approximez votre réponse au demi-tour près.

Le nombre de tours est $N = \omega t_0 / 2\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{N = 30.5 \text{ tours}}$

Solution Q2 :

a) **(5 points)** Quels est l'angle θ de la rotation subie par la sphère et le vecteur unitaire $\hat{u}$ de son axe entre la configuration initiale et la configuration finale?

Puisque la sphère roule sans glisser, l'angle θ est donné par la relation:

$$d = \theta R$$

alors :

$$\boxed{\theta = \frac{d}{R} = \frac{\pi}{2}}$$

On peut aussi établir que l'axe de rotation est la première bissectrice du plan xy et $\hat{u}$ est dans le sens positif soit :

$$\boxed{\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

b) **(5 points)** Déterminer le quaternion associé à cette rotation.

Soit $\vec{\vec{R}}$ le quaternion recherché. Celui-ci est donné par :

$$\vec{\vec{R}} = \begin{pmatrix}\cos\pi/4\\(\sin\pi/4)/\sqrt{2}\\(\sin\pi/4)/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\vec{R}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

c) **(2 points)** Déterminer le vecteur position $\vec{r}_{A/C}$ du point A par rapport au centre de masse de la sphère dans la configuration initiale.

$$\boxed{\vec{r}_{A/C} = \vec{r}_A - \vec{r}_C = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\text{ cm}}$$

d) **(3 points)** Déterminer le vecteur position finale $\overrightarrow{r'}_C$ du centre de masse de la sphère.

Le vecteur unitaire du segment de droite parcourue par la sphère est :

$$\hat{u}_C = \begin{pmatrix} \cos 45° \\ -\sin 45° \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r'}_C = \vec{r}_C + d\hat{u}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{r'}_C = \begin{pmatrix} \pi/\sqrt{2} \\ -\pi/\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}}$$

e) **(10 points)** Calculer le vecteur position final $\overrightarrow{r'}_A$ du point A dans le référentiel du laboratoire en utilisant la méthode des quaternions.

On associe un quaternion $\vec{\vec{r}}_{A/C}$ au vecteur $\vec{r}_{A/C}$:

$$\vec{\vec{r}}_{A/C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le quaternion $\vec{\vec{r'}}_{A/C}$ associé au vecteur position finale $\overrightarrow{r'}_{AC}$ de A par rapport au centre de mase de la sphère est donné par :

$$\vec{\vec{r'}}_{A/C} = \vec{\vec{R}}\,\vec{\vec{r}}_{A/C}\,\vec{\vec{R}}^*$$

avec $\vec{\vec{R}}^*$ le complexe conjugué de $\vec{\vec{R}}$ soit :

$$\vec{\vec{R}}^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\vec{\vec{r'}}_{A/C} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{r'}}_{A/C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\overrightarrow{r'}_{A/C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ cm}$$

Finalement :

$$\overrightarrow{r'}_A = \overrightarrow{r'}_C + \overrightarrow{r'}_{A/C} = \begin{pmatrix} \pi/\sqrt{2} \\ -\pi/\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ cm} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{r'}_A = \begin{pmatrix} 3.2214 \\ -1.2214 \\ 3.4142 \end{pmatrix} \text{ cm}}$$

Solution Q3 :

a) (**10 points**) Déterminer la normale sortante $\hat{n}$ du miroir

$\hat{n}$ est donnée par :

$$\hat{n} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

Avec $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

On vérifie que $\hat{n}$ est sortant du miroir en vérifiant que $\hat{n}.\hat{u}_i = \frac{-2}{\sqrt{6}}$ est bien négatif.

(b) (**10 points**) Déterminer le vecteur position $\vec{r}_p$ du point P d'impact du rayon lumineux avec le miroir.

On peut trouver le vecteur position $\vec{r}_p$ du point P grâce à la formule :

$$(\vec{r}_p - \vec{r}_A).\hat{n} = 0$$

puisque le vecteur $\vec{r}_p - \vec{r}_A = \overrightarrow{AP}$ est dans le plan du miroir donc normal à $\hat{n}$.

(Ici j'ai utilisé le point A mais on peut choisir n'importe quel point appartenant au plan du miroir)

Sachant que $\vec{r}_p$ doit aussi vérifier l'équation du rayon lumineux :

$$\vec{r}_p = \vec{r}_s + d\,\hat{u}_i = \begin{pmatrix} 1 + d/\sqrt{3} \\ d/\sqrt{3} \\ d/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_p - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} d/\sqrt{3} \\ -2 + d/\sqrt{3} \\ d/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ça donne :

$$(\vec{r}_p - \vec{r}_A).\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2 - \frac{2d}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow d = \sqrt{3}$$

donc:

$$\boxed{\vec{r}_p = \vec{r}_s + d\,\hat{u}_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m}}$$

(c) (**5 points**) Quel est le vecteur unitaire $\hat{u}_r$ du rayon réfléchit par le miroir?

$$\hat{u}_r = \hat{u}_i - 2(\hat{u}_i.\hat{n})\hat{n}$$

$$\hat{u}_r = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2\sqrt{3}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{u}_r = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Solution Q4:

(a) (**7 points**) Déterminer la vitesse $\vec{v}_B$ de l'avion B sachant que celle-ci est constante.

Le signal sonore mettra un temps Δt pour atteindre l'avion B donné par :

$$\Delta t = \frac{|\vec{r}_{B1} - \vec{r}_A|}{c}$$

avec $\vec{r}_{B1} - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 3000 \\ -1500 \\ -700 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \Delta t \approx \frac{3426}{342.6} = 10$ s.

la vitesse de B est donnée par :

$$\vec{v}_B = \frac{\vec{r}_{B1} - \vec{r}_B}{\Delta t} = \frac{1}{10}\left[\begin{pmatrix} 3000 \\ 500 \\ 2800 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4000 \\ 0 \\ 2500 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -100 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ m/s}}$$

(b) (**8 points**) Quelle est la fréquence du signal sonore reçu par l'avion B?

Le vecteur unitaire de la droite reliant la source au récepteur est :

$$\hat{u}_{s,r} = \frac{\vec{r}_{B1} - \vec{r}_A}{|\vec{r}_{B1} - \vec{r}_A|} = \frac{1}{34{,}26}\begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix}$$

La fréquence reçue par l'avion B est donnée par :

$$f_B = \frac{1 - \beta_B}{1 - \beta_A} f_A$$

avec:

$$\beta_A = \frac{\hat{u}_{s,r} . \vec{v}_A}{C} = \frac{1}{342.6 \times 34{,}26}\begin{pmatrix} 150 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix} = 0.4856$$

$$\beta_B = \frac{\hat{u}_{s,r} . \vec{v}_B}{C} = \frac{1}{342.6 \times 34{,}26}\begin{pmatrix} -100 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix} = -0.3374$$

$$\Rightarrow \boxed{f_B = \frac{1.3374}{0.5144} \times 2 = 5.2 \text{ kHz}}$$

(c) (**5 points**) Déterminer la puissance P du signal sonore émis par l'avion A.

Sachant que l'intensité en dB à 1 mètre de la source est relié à la puissance de la source par:

$L_I(r_1) = L_P - 10 \log\left(\frac{4\pi r_1^2}{1}\right)$ avec $L_P = 10 \log\left(\frac{P}{10^{-12}}\right)$

$$\Longrightarrow \; L_I(r_1) = 10 \log\left(\frac{P}{4\pi r_1^2 \times 10^{-12}}\right)$$

$$P = 4\pi r_1^2 \times 10^{-1} \;\; \times 10^{L_I(r_1)/10} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P = 4\pi \; (W)}$$

Remarque : on peut aussi utiliser la formule :

$$I(r_1) = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

où $I(r_1)$ est l'intensité en $\mathrm{W/m^2}$ à une distance r_1 de la source. Elle est reliée à sa valeur $L_I(r_1)$ en dB par :

$$L_I(r_1) = 10 \log\left(\frac{I(r_1)}{10^{-12}}\right) \Longrightarrow \; I(r_1) = 10^{-12} \times 10^{\frac{L_I(r_1)}{10}} = 1\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\Longrightarrow P = I(r_1) \times 4\pi r_1^2 = 4\pi\ (\mathrm{W})$$

d) (**5 points**) Quelle est l'intensité du signal sonore reçu par l'avion B?

Lorsque le signal atteint l'avion B, celui-ci à parcouru une distance de $r_{AB} = |\vec{r}_{B1} - \vec{r}_A| = 3426\ \mathrm{m}$
L'intensité reçue par B est donc:

$$L_I(r_{AB}) = L_I(r_1) - 20 \log\left(\frac{r_{AB}}{r_1}\right) - \mathcal{A}(r_{AB} - r_1)$$

soit:

$$L_I(r_{AB}) = 120 - 20 \log\left(\frac{3426}{1}\right) - \; 8.5(3.426 - 0.001)\ \mathrm{dB}$$

Dans le dernier terme, il faut mettre r_{AB} et r_1 en km puisque $\mathcal{A}$ est donné en dB/km. On peut aussi négliger $r_1$devant r_{AB}.
Cela donne :

$$\boxed{L_I(r_{AB}) = 20.2\ \mathrm{dB}}$$