

Question 3. Réflexion et réfraction par une sphère (15 points)

Une source localisée au point $\vec{r}_s = (6, -4, 0)^T$ cm dans le vide émet de la lumière unidirectionnelle de polarisation transverse électrique (TE) vers un cylindre de verre d'indice de réfraction $n_r = 1.5$, de rayon $R = 2$ cm et de hauteur $h = 10$ cm. Ce cylindre (axe dans la direction z) est centré à $z = 5$ cm. Vous supposerez que le rayon lumineux touche la surface du cylindre au point $\vec{r}_c = (2, 0, 2)^T$ cm.

- (a) **(10 points)** Déterminez la direction du faisceau de lumière réfléchi et réfracté par la sphère.
- (b) **(5 points)** Calculez le rapport entre l'intensité lumineuse du rayon réfracté et celle du rayon réfléchi.

Solution

(a) **(10 points)** Déterminez la direction du faisceau de lumière réfléchi et réfracté par la sphère.

La direction initiale du faisceau de lumière est

$$\hat{u}_i = \frac{\vec{r}_c - \vec{r}_s}{|\vec{r}_c - \vec{r}_s|}$$

en utilisant les données fournies dans le devoir on obtient

$$\hat{u}_i = (-2/3, 2/3, 1/3)^T$$

Nous avons aussi besoin de la normale sortante à la surface. Comme $0 \leq z_c \leq h$, la normale correspond à un rayon du cylindre partant du point $\vec{a} = (0, 0, z_c)$ et se dirigeant vers \vec{r}_c . On obtient donc

$$\hat{i} = \frac{\vec{r}_c - \vec{a}}{|\vec{r}_c - \vec{a}|} = (1, 0, 0)^T$$

Pour définir le plan plan de réflexion ou de réfraction, nous aurons besoin aussi de

$$\begin{aligned}\hat{j} &= \frac{\hat{u}_i \times \hat{i}}{|\hat{u}_i \times \hat{i}|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (0, 0.4472, -0.8944)^T \\ \hat{k} &= \hat{i} \times \hat{j} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (0, 0.8944, 0.4472)^T\end{aligned}$$

Le sinus de l'angle d'incidence (ou de réflexion) est donc

$$\sin(\theta_i) = \hat{u}_i \cdot \hat{k} = 0.7453$$

alors que le sinus de l'angle de réfraction est

$$\sin(\theta_t) = \frac{n_i}{n_t} \sin(\theta_i) = 0.4969$$

Finalement la direction du faisceau réfléchi sera

$$\hat{u}_r = \hat{i} \cos(\theta_i) + \hat{k} \sin(\theta_i) = (2/3, 2/3, 1/3)^T$$

et la direction du faisceau réfracté (transmis) sera

$$\hat{u}_t = -\hat{i} \cos(\theta_t) + \hat{k} \sin(\theta_t) = (-0.8678, 0.444, 0.2222)^T$$

(b) (**5 points**) Calculez le rapport entre l'intensité lumineuse du rayon réfracté et celle du rayon réfléchi.

Pour une onde transverse électrique, les intensités réfléchie R et réfractée T sont

$$R = \left(\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right)^2$$
$$T = 1 - R$$

On obtient donc

$$\frac{I_t}{I_r} = \frac{1 - R}{R} = 8.61$$