Force dipolaire - Méthode d'Euler

Un dipôle électrique composé de deux billes a et b de dimensions et de masses négligeables chargées respectivement de $+Q$ et $-Q$. Les billes sont situées aux deux extrémités d'une tige de longueur d, de diamètre négligeable et de masse m. Le dipôle évolue dans un champ électrique $\vec{E} = (kx, 0, 0)$ où k est une constante positive. On posera $\hat{u} = \vec{r}_{a/b}/d$ le vecteur unitaire du vecteur position de la particule a par rapport à la particule b.

À l'instant initial $t = 0$, le dipôle est orienté tel que $\hat{u} = (0, 0, 1)$. On prendra cette orientation comme position angulaire de référence $\vec{\Omega} = (0, 0, 0)$. Le centre de masse se trouve à $\vec{r}_c(0) = (x_0, 0, 0)$. La vitesse du centre de masse est nulle $\vec{v}_c(0) = 0$ et la vitesse angulaire est $\vec{\omega}(0) = (0, \pi/3,\ 0)$ rad/s.

a) Sachant que le dipôle restera toujours dans le plan xz, écrire le vecteur unitaire $\hat{u}(t)$ en fonction de la composante Ω_y(t) du vecteur position angulaire $\vec{\Omega}(t)$.

b) Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}_c$ du centre de masse du dipôle et l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ en fonction de Q, d, k, m et Ω_y. On néglige la force de gravité devant la force électrique.

c) Définir le vecteur d'état $\vec{q}$ (de dimension minimale) et sa dérivée par rapport au temps $\vec{g}$ ainsi que le vecteur initiale $\vec{q}_0$ qui permettent une simulation numérique du mouvement du dipôle.

d) Utiliser la méthode d'Euler avec un pas de temps $\Delta t = 0{,}1\ s$ pour déterminer la position et la vitesse du dipôle à l'instant $t = 0{,}2\ s$. $Q = 2.10^{-6} C$, $d = 20\ cm$, $k = 6.10^{6}\ Vm^{-2}$, $m = 25\ g$ et $x_0 = 1\ mm$.

Solution :

a) *Sachant que le dipôle restera toujours dans le plan xz, écrire le vecteur unitaire $\hat{u}(t)$ en fonction de la composante $\Omega_y(t)$ du vecteur position angulaire $\vec{\Omega}(t)$.*

Le mouvement du dipôle est un mouvement dans le plan xz alors le vecteur $\hat{u}$ est aussi dans ce plan. La position angulaire et la vitesse angulaire n'auront de composantes que dans la direction y.

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \sin \Omega_y \\ 0 \\ \cos \Omega_y \end{pmatrix}$$

b) *Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}_c$ du centre de masse du dipôle et l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ en fonction de Q, d, k, m et Ω_y. On néglige la force de gravité devant la force électrique.*

La force qui s'applique sur le dipôle est :

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b = [(+Qkx_a) + (-Qkx_b)]\hat{x}$$

$$\vec{F} = Qk(x_a - x_b)\hat{x} = Qk(\hat{x}.\vec{r}_{a/b})\hat{x} = Qkd(\hat{x}.\hat{u})\hat{x} = Qkd \sin \Omega_y \,\hat{x}$$

D'où l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{Qkd \sin \Omega_y}{m}\hat{x}$$

Le moment de force qui s'applique sur le dipôle est :

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{a/c} \times \vec{F}_a + \vec{r}_{b/c} \times \vec{F}_b$$

Sachant que $\vec{r}_{a/c} = -\vec{r}_{b/c} = \frac{1}{2}\vec{r}_{a/b}$ *alors :*

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{a/c} \times \left(\vec{F}_a - \vec{F}_b\right) = \frac{d}{2}\hat{u} \times \left(\vec{F}_a - \vec{F}_b\right)$$

Et : $\vec{F}_a - \vec{F}_b = Qk(x_a + x_b)\hat{x} = 2Qkx_c\hat{x}$

$$\vec{\tau} = Qkdx_c(\hat{u} \times \hat{x}) = Qkdx_c \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \sin\Omega_y & 0 & \cos\Omega_y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = Qkdx_c \cos\Omega_y \, \hat{y}$$

L'accélération angulaire est alors donnée par : $\vec{\alpha} = \vec{\tau}/I_c$ *avec* $I_c = md^2/12.$

$$\vec{\alpha} = \frac{12Qkx_c \cos\Omega_y}{md} \hat{y}$$

c) *Définir sous la forme la plus simple les d'état* $\vec{q}$ *et sa dérivée par rapport au temps* $\vec{g}$ *ainsi que le vecteur initiale* $\vec{q}_0$ *qui permettent une simulation numérique du mouvement du dipôle.*

Le vecteur $\vec{q}$*,* $\vec{g}$ *et* $\vec{q}_0$ *peuvent être définis comme suit :*

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} v_{cx} \\ x_c \\ \omega_y \\ \Omega_y \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} Qkd\sin(q_4)/m \\ q_1 \\ 12\,Qkq_2\cos(q_4)/md \\ q_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ \pi/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) *Utiliser la méthode d'Euler avec un pas de temps* $\Delta t = 0.1\ s$ *pour déterminer la position et la vitesse du dipôle à l'instant* $t = 0{,}2\ s$*. On donne :* $Q = 2.10^{-6}C$*,* $d = 20\ cm$*,* $k = 6.10^6\ Vm^{-2}$*,* $m = 25\ g$ *et* $x_0 = 1\ mm$*.*

Selon les données : $Qkd/m = 96{,}0$ *(SI) et* $12Qk/md = 2{,}88\,.10^4$ *(SI)*

La méthode d'Euler donne :

$$\vec{q}_1 = \vec{q}(\Delta t) = \vec{q}_0 + \vec{g}(\vec{q}_0)\,.\Delta t = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ \pi/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}88.10^4.10^{-3} \\ \pi/3 \end{pmatrix} \times 0{,}1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ 3{,}297 \\ \pi/30 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_2 = \vec{q}(2\Delta t) = \vec{q}_1 + \vec{g}(\vec{q}_1)\,.\Delta t = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ 3{,}297 \\ \pi/30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 96\sin(\pi/30) \\ 0 \\ 28{,}8\cos\pi/30 \\ 3{,}297 \end{pmatrix} \times 0{,}1 = \begin{pmatrix} 1{,}755.10^{-2} \\ 10^{-3} \\ 6{,}177 \\ 0{,}4344 \end{pmatrix}$$