PHS4700-Physique pour les applications multimédia

Solution de l'examen final

Date de l'examen : 20 décembre 2020

Instructions :

- Toute la documentation papier est permise.
- Les calculatrices non programmables sont permises.
- Durée de l'examen : 2.5 heures.

Question 1. Matrice de rotation (25 points)

Dans le référentiel global *OXYZ* (en majuscule), de vecteurs unitaire $\hat{X}, \hat{Y}$ et $\hat{Z}$, un projectile est lancé à l'instant $t = 0$, du point A de position $\vec{r}_A = (1.0, 1.0, 5.0)^T\mathrm{m}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_A = (1.0, 2.0, 0.0)^T\mathrm{m/s}$. Durant sa course, le projectile ne subit que l'accélération gravitationnelle $\vec{\mathrm{g}}$. On prendra, pour simplifier, $\vec{\mathrm{g}} = (0.0, 0.0, -10.0)^T\mathrm{m/s^2}$.

a) **(5 points)** Déterminer le vecteur position $\vec{r}_B$ du point *B* de contact du projectile avec le plan *OXY*.

La trajectoire de ce projectile étant comprise dans le plan vertical passant par les points *A* et *B*, nous souhaitons définir un référentiel local *oxyz* (en minuscule) tel que le point *A* se trouve à l'origine et le point *B* sur l'axe *ox* positif. Le plan vertical qui contient la trajectoire du projectile sera le plan *oxz* (cela signifie que l'axe *oy* sera horizontal). On désignera par $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ les vecteurs de base orthonormés de ce référentiel (vecteurs unitaires des trois axes perpendiculaires entre eux).

b) **(10 points)** Déterminer les composantes de $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ dans le référentiel global.
Remarque : l'axe *oz* n'est pas forcément vertical.

c) **(10 points)** Écrire la matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ qui, appliquée à un vecteur $\vec{V}$ décrit par ses composantes dans le référentiel locales, nous donne ses composantes dans le référentiel global.

$$\vec{V}(V_X, V_Y, V_Z)^T = \boldsymbol{R}\,\vec{V}(V_x, V_y, V_z)^T$$

Solution :

a) **(5 points)** Déterminer le vecteur position $\vec{r}_B$ du point *B* de contact du projectile avec le plan *OXY*.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{v}_A t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix}1+t\\1+2t\\5-5t^2\end{pmatrix}$$

Le projectile touche le plan OXY $\rightarrow z = 0 \rightarrow 5 - 5t^2 = 0 \Rightarrow t = 1\text{ s}$

$$\Rightarrow \vec{r}_B = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$$

b) **(10 points)** Déterminer les composantes de $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$ dans le référentiel global. Remarque : l'axe *oz* n'est pas forcément vertical.

$$\hat{x} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}$$

avec $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{30}\\2/\sqrt{30}\\-5/\sqrt{30}\end{pmatrix}$$

On sait que $\hat{y}$ est horizontal ($\perp \hat{Z}$) et normal à $\hat{x}$.

$$\hat{y} = \frac{\hat{Z}\times\hat{x}}{|\hat{Z}\times\hat{x}|} = \frac{1}{|\hat{Z}\times\hat{x}|}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1/\sqrt{30}\\2/\sqrt{30}\\-5/\sqrt{30}\end{pmatrix} = \frac{1}{|\hat{Z}\times\hat{x}|}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{30}\\1/\sqrt{30}\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \hat{x}\times\hat{y} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{30}\\2/\sqrt{30}\\-5/\sqrt{30}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

Remarque : On peut aussi trouver :

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{z} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

c) **(10 points)** Écrire la matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ qui, appliquée à un vecteur $\vec{V}$ décrit par ses composantes dans le référentiel locales, nous donne ses composantes dans le référentiel global.

Soit un vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ écrit dans le référentiel local. Dans le référentiel global, $\vec{V}$ s'écrit :

$$\vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z} = V_x\begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \end{pmatrix} + V_y\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + V_z\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_x}{\sqrt{30}} - \frac{2V_y}{\sqrt{5}} + \frac{V_z}{\sqrt{6}} \\ \frac{2V_x}{\sqrt{30}} + \frac{V_y}{\sqrt{5}} + \frac{2V_z}{\sqrt{6}} \\ \frac{-5V_x}{\sqrt{30}} + \frac{V_z}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Donc la matrice demandée est :

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Remarque 1 : la matrice peut aussi être :

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Remarque 2 : Si l'étudiante ou l'étudiant donne directement la matrice **R** sans démonstration (comme vu en classe), la note complète lui sera accordée.

PHS4700-Physique pour les applications multimédia : *Examen final*

Question 2 : Méthode d'Euler (25 points)

On souhaite simuler le mouvement d'un cône plein homogène en liège lorsqu'il émerge de l'eau. Le cône demeure à la position verticale, la pointe vers le haut (voir figure ci-bas) et ne subit pas de rotation. À l'instant initial $t = 0$, la vitesse de son centre de masse est $\vec{v}_{c,0} = (0.0, 0.0, 0.2)^T \mathrm{m/s}$ et sa pointe est au niveau de la surface de l'eau (plan *xy*).

On donne pour le cône : Sa hauteur est $H = 0.2$ m, la surface de sa base (circulaire) est $A = 0.01\ \mathrm{m}^2$ et sa masse est $m = 80$ g. son volume est donné par $V = \frac{AH}{3}$ et son centre de masse est situé sur son axe à une distance $d = \frac{3}{4}H$ de la pointe.

L'accélération gravitationnelle est $\mathrm{g} = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ et la masse volumique de l'eau est $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$. On néglige toutes les forces de viscosité ainsi que la poussée d'Archimède dans l'air.

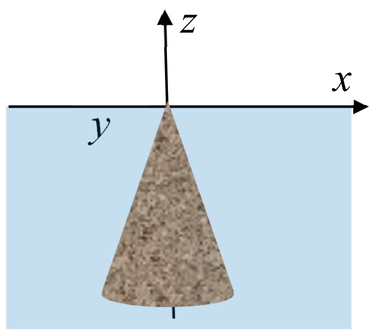
Note : pour un angle de sommet constant, la surface de la base du cône est proportionnelle au carré de sa hauteur.

a) **(10 points)** Sans faire d'application numérique, déterminer l'expression de l'accélération $\vec{a}_c$ du cône en fonction de la position verticale z_c de son centre de masse. Utiliser le même système d'axes que celui de la figure.

   Astuce : trouvez d'abord l'accélération en fonction de la position *z* de la pointe puis réécrivez-la en fonction de z_c.

b) **(10 points)** Définir le vecteur d'état $\vec{q}(t)$ (de dimension minimale) et sa dérivée par rapport au temps $\vec{g}(t, \vec{q}(t))$ ainsi que le vecteur initial $\vec{q}_0 = \vec{q}(0)$ qui permettent une simulation numérique du mouvement du cône à partir du temps $t = 0$.

c) **(5 points)** Utiliser la méthode d'Euler avec un pas de temps $\Delta t = 0.001\ s$ pour déterminer la position et la vitesse du centre de masse du cône à l'instant $t = 0.001\ s$.



PHS4700-Physique pour les applications multimédia : *Examen final*

Solution :

a) **(10 points)** Sans faire d'application numérique, déterminer l'expression de l'accélération $\vec{a}_c$ du cône en fonction de la position verticale z_c de son centre de masse. Utiliser le même système d'axes que celui de la figure.

Le cône est soumis à son propre poids et à la poussée d'Archimède. Soit z la position verticale de la pointe du cône. $z = z_c + d$.

Pour une position z entre 0 et H : la poussée d'Archimède est :

$$F_A = \rho\text{g}\left(\frac{AH}{3} - \frac{\left(A\frac{z^2}{H^2}\right)z}{3}\right).$$

L'accélération est donc :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\text{g}\hat{z} + \frac{\rho\text{g}A}{3m}\left(H - \frac{z^3}{H^2}\right)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\text{g}\hat{z} + \frac{\rho\text{g}A}{3m}\left(H - \frac{(z_c+d)^3}{H^2}\right)\hat{z}$$

b) **(10 points)** Définir le vecteur d'état $\vec{q}(t)$ (de dimension minimale) et sa dérivée par rapport au temps $\vec{\text{g}}(t, \vec{q}(t))$ ainsi que le vecteur initial $\vec{q}_0 = \vec{q}(0)$ qui permettent une simulation numérique du mouvement du cône à partir du temps $t = 0$.

Le vecteur $\vec{q}$, $\vec{g}$ *et* $\vec{q}_0$ *peuvent être définis comme suit :*

$\vec{q} = \begin{pmatrix} v_c \\ z_c \end{pmatrix}$,

$$\vec{\text{g}} = \begin{pmatrix} \frac{\rho\text{g}AH}{3m} - \text{g} - \frac{\rho\text{g}A}{3mH^2}(q_2+d)^3 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71.8667 - 16{,}333(q_2 + 0.15)^3 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

et $\vec{q}_0 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.15 \end{pmatrix}$

c) **(5 points)** Utiliser la méthode d'Euler avec un pas de temps $\Delta t = 0.001\ s$ pour déterminer la position et la vitesse du cône à l'instant $t = 0.001\ s$.

La méthode d'Euler donne :

$$\vec{q}_1 = \vec{q}(\Delta t) = \vec{q}_0 + \vec{g}(\vec{q}_0)\,.\Delta t = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 71.8667 - 16{,}333(-0.15 + 0.15)^3 \\ 0.2 \end{pmatrix} \times 0{,}001$$
$$= \begin{pmatrix} 0.2719 \\ -0.1498 \end{pmatrix}$$

Selon la méthode d'Euler, la vitesse à $t = 0.001$ s *est 0.2719* m/s et la position du centre de masse est

$$z_c = -0.1498 \text{ m.}$$

Question 3. Collision d'un projectile et d'un cylindre (25 points)

On tire une balle de fusil qui part ricocher sur un cylindre métallique plein lancé en l'air. Juste avant l'impact, la position du centre de masse du cylindre est $\vec{r}_c = (2.0, 2.0, 3.5)^T$m et sa vitesse $\vec{v}_c = (5.0, 0.0, 10.0)^T$m/s. Son axe est orienté dans la direction $\vec{u}_c = (0, 0, 1)^T$et sa vitesse angulaire est nulle $\vec{\omega}_c = (0.0, 0.0, 0.0)^T$rad/s. Le rayon du cylindre est $R = 4$ cm et sa masse est $m_c = 0.5$ kg. La balle, de dimensions négligeables, possède une masse $m_b = 50$ g et sa vitesse juste avant l'impact est $\vec{v}_b = (100, 100, 150)^T$ m/s. La position du point d'impact est $\vec{r}_p = (1.96, 2.0, 3.54)^T$ m.

(a) (**3 points**) Sachant que la matrice moment d'inertie du cylindre (par rapport à son centre de masse) est proportionnelle à la matrice unité ($\mathbb{I}$), déterminer la valeur de la longueur L du cylindre et son moment d'inertie.

(b) (**2 points**) Déterminer la position relative $\vec{r}_{c,p}$ du point d'impact par rapport au centre de masse du cylindre.

(c) (**3 points**) Déterminer la vitesse relative du point de contact du cylindre ($\vec{v}_r^-$) par rapport à la balle juste avant la collision.

(d) (**7 points**) Sachant que le point d'impact se trouve sur la surface latérale (cylindrique) du cylindre, déterminer la normale entrante $\hat{n}$ au cylindre en ce point.

(e) (**10 points**) En supposant que le coefficient de restitution pour la collision est $\epsilon = 0.6$, et que la collision est sans frottement, déterminer la vitesse $\vec{v}'_b$ de la balle juste après la collision.

PHS4700-Physique pour les applications multimédia : *Examen final*

Solution :

a) (**3 points**) Sachant que la matrice moment d'inertie du cylindre (par rapport à son centre de masse) est proportionnelle à la matrice unité ($\mathbb{I}$), déterminer la valeur de la longueur L du cylindre et son moment d'inertie.

La matrice d'inertie du cylindre est donnée par :

$$\boldsymbol{I_c} = m_c \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} I$$

Cette matrice est proportionnelle à la matrice unité si :

$$\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12} = \frac{R^2}{2} \Rightarrow L = \sqrt{3}R$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_c} = m_c \begin{pmatrix} \frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} = 4.0 \times 10^{-4} \times \mathbb{I}$$

b) (**2 points**) Déterminer la position relative $\vec{r}_{c,p}$ du point d'impact par rapport au centre de masse du cylindre.

$$\vec{r}_{c,p} = \vec{r}_p - \vec{r}_c = \begin{pmatrix} 1.96 \\ 2 \\ 3.54 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix} = 4.0 \times 10^{-2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) (**3 points**) Déterminer la vitesse relative du point de contact du cylindre ($\vec{v}_r^-$) par rapport à la balle juste avant la collision.

$$\vec{v}_r^- = \vec{v}_{c,p} - \vec{v}_b = \vec{v}_c - \vec{v}_b = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 0.0 \\ 10.0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100.0 \\ 100 \\ 150.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -95 \\ -100 \\ -140 \end{pmatrix}$$

d) (**7 points**) Sachant que le point d'impact se trouve sur la surface latérale (cylindrique) du cylindre, déterminer la normale entrante $\hat{n}$ au cylindre en ce point.

Surface latérale $\Rightarrow$ $\hat{n}$ est normal à l'axe du cylindre et dans le plan formé par $\vec{r}_{c,p}$ et $\hat{u}_c$. Donc $\hat{n}$ est parallèle à la direction de la composante de $\vec{r}_{c,p}$normale à $\hat{u}_c$.

$$\hat{n} = -\frac{\vec{r}_{c,p} - (\vec{r}_{c,p}.\hat{u}_c)\hat{u}_c}{|\vec{r}_{c,p} - (\vec{r}_{c,p}.\hat{u}_c)\hat{u}_c|}$$

$$\vec{r}_{c,p} - (\vec{r}_{c,p}.\hat{u}_c)\hat{u}_c = 4.0 \times 10^{-2}\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\hat{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Une réponse donnée directement avec une explication géométrique sera acceptée.

e) (**10 points**) En supposant que le coefficient de restitution pour la collision est $\epsilon = 0.6$, et que la collision est sans frottement, déterminer la vitesse $\vec{v}'_b$ de la balle juste après la collision.

$$\vec{v}'_b = \vec{v}_b - \frac{j\hat{n}}{m_b}$$

où $j = -\alpha(1+\epsilon)v_r^-$ *avec* $v_r^- = \hat{n}\cdot\vec{v}_r^- = -95\ \mathrm{m/s}$.

$$\alpha = \left(\frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} + G_b + G_c\right)^{-1}$$

$$G_b = \hat{n}\cdot\left[\left(I_b^{-1}(\vec{r}_{b,p}\times\hat{n})\right)\times\vec{r}_{b,p}\right] = 0$$ *car les dimensions de la balle sont négligeables* $\vec{r}_{b,p} \approx 0$.

$$G_c = \hat{n}\cdot\left[\left(I_c^{-1}(\vec{r}_{c,p}\times\hat{n})\right)\times\vec{r}_{c,p}\right] = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.\left[\frac{(4\times10^{-2})^2}{4\times10^{-4}}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right] = 4\ \mathrm{kg}^{-1}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.5} + 4\right)^{-1} = 26^{-1}$$

$$\Rightarrow j = -\alpha(1+\epsilon)v_r^- = -\frac{1}{26}(1+0.6)(-95) = 5.8462\ \mathrm{kg\ m/s}$$

$$\vec{v}'_b = \vec{v}_b - \frac{j\hat{n}}{m_b} = \begin{pmatrix}100.0\\100\\150.0\end{pmatrix} - \frac{5.8462}{0.05}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16.92\\100\\150\end{pmatrix}\ \mathrm{m/s}$$

Question 4. Optique (25 points)

Soit une boule transparente homogène de rayon R dont le centre est situé au point $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)^T$ m. Une source lumineuse située à l'origine $O(0\,,0,0)$ émet un rayon dans la direction $\hat{u} = (u_x, u_y, 0)^T$ qui vient atteindre la boule au point p. On traitera le problème en deux dimensions dans le plan Oxy car la trajectoire du rayon ne sortira pas de ce plan. On donne : $x_0 = 1$ m, $R = 0.4$ m, $u_x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et $u_y = \frac{1}{\sqrt{10}}$

(a) (**10 points**) Déterminer le vecteur position $\vec{r}_p$ du point *p*.

(b) (**6 points**) Déterminer le vecteur unitaire $\hat{n}_p$ normal à la surface de la boule au point *p*.

(c) (**6 points**) Quel est l'indice de réfraction de la boule n_{boule} si le rayon transmis (réfracté) est parallèle à l'axe *Ox* ? L'indice de réfraction de l'air (milieu extérieur) est : $n_{air} = 1$.

(d) (**3 points**) Ce rayon interceptera-t-il à nouveau l'axe *Ox*? Si oui, à quelle position?

PHS4700-Physique pour les applications multimédia : *Examen final*

Solution :

*a)(**10 points**) Déterminer le vecteur position* $\vec{r}_p$ *du point p.*

Dans le plan Oxy, la boule est décrite par un cercle d'équation :

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$$

L'équation du rayon lumineux est : $\vec{r} = \vec{r}_{source} + s\hat{u} = s\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ *où s est un paramètre.*

Le point p correspond à la valeur s_p *de s qui vérifie les deux équations :*

$$\left(s_p u_x - x_0\right)^2 + (s_p\, u_y)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow s_p{}^2 - 2u_x x_0\, s_p + x_0^2 - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow s_p = u_x x_0 \pm \sqrt{u_x^2 x_0^2 - x_0^2 + R^2} = 0.8887$$

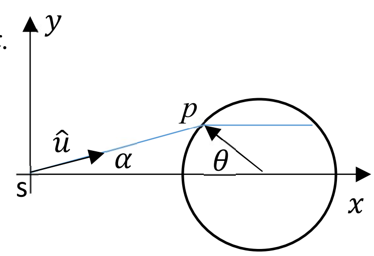
(On prend la valeur de s_p *la plus petite car il s'agit de la première intersection avec la boule).*

$$\Rightarrow \vec{r}_p = s_p\hat{u} = \begin{pmatrix} 0.6676 \\ 0.2225 \end{pmatrix} \text{ m}$$

*b) (**6 points**) Déterminer le vecteur unitaire* $\hat{n}_p$ *normal à la surface de la boule au point p.*

$$\hat{n}_p = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

avec θ *l'angle d'inclinaison de* $(\vec{r}_p - \vec{r}_0)$ *de module R par rapport à l'axe ox.*



$$\sin(\theta) = \frac{y_p}{R} = \frac{0.2225}{0.4} = 0.55625$$

$$\Rightarrow \hat{n}_p = \begin{pmatrix} -0.8310 \\ 0.55625 \end{pmatrix}$$

c) (**6 points**) Quel est l'indice de réfraction du verre si le rayon transmis est parallèle à l'axe *Ox* ?

L'angle d'incidence θ_i *est :*

$$\theta_i = \theta + \alpha = \arcsin\left(\frac{y_p}{R}\right) + \arcsin\left(u_y\right) = 52.23°$$

L'angle de réfraction θ_t *est :* $\theta_t = \theta = 33.80°$

On a :

$$n_{boule} \sin\theta_t = n_{air} \sin\theta_i \Longrightarrow n_{boule} = n_{air} \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = 1.421$$

d) (**3 points**) Ce rayon interceptera-t-il à nouveau l'axe *Ox*? Si oui, à quelle position?
Par symétrie, on peut déduire que le rayon va intercepter l'axe Ox à la position $x = 2\,x_0 = 2$ m.