POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Un avion vole à une vitesse constante horizontale $\vec{v}_A = (300; 0; 0)^T \mathrm{m/s}$ à une altitude de 500 m au-dessus de la mer. À l'instant $t = 0$, l'avion se trouvant à la position $\vec{r}_A = (0; 0; h_A)^T \mathrm{m}$, émet un bref signal sonore de fréquence 1 kHz et de puissance $P = 2000$ W. Un sous-marin en immersion reste immobile à la position $\vec{r}_S = (1000; 0; -200)^T \mathrm{m}$.

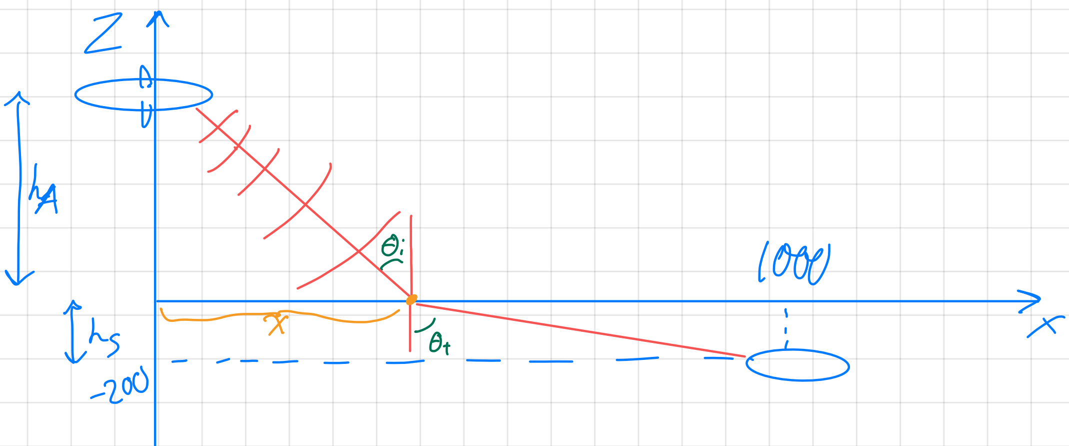
A) Déterminer l'altitude h_A de l'avion sachant que le signal sonore qui part de l'avion vers le sous-marin intersepte la surface de l'eau avec un angle d'incidence $\theta_i = 10°$.
B) À quel instant t_s le sous-marin recevra-t-il le signal émis par l'avion?
C) Quelle est la fréquence du signal reçu par le sous-marin?
D) Quelle est l'intesité en dB du signal reçu par le sous-marin? On négligera la ~~dispersion~~ dispersion du signal ~~sonor~~ sonore une fois pénétré dans l'eau.

On donne :

La vitesse du son est $c_{air} = 343$ m/s dans l'air et $c_{mer} = 1530$ m/s dans l'eau de mer.

La densité de l'air et de l'eau de mer sont respectivement $\rho_{air} = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$ et $\rho_{mer} = 1025\ \mathrm{kg/m^3}$.

Le coefficient d'atteinuation du son est $A_{air} = 5.0$ dB/km dans l'air et $A_{mer} = 0.1$ dB/km dans l'eau de mer.



$$\sin\theta_t = \frac{C_{mer}}{C_{air}} \sin\theta_i$$

a)

$$\theta_t = \arcsin \frac{C_{mer}}{C_{air}} \sin\theta_i = \arcsin \frac{1530}{343} \sin 10°$$

$$\theta_t = 50,77°$$

$$\tan\theta_t = \frac{x_s - x}{h_s}$$

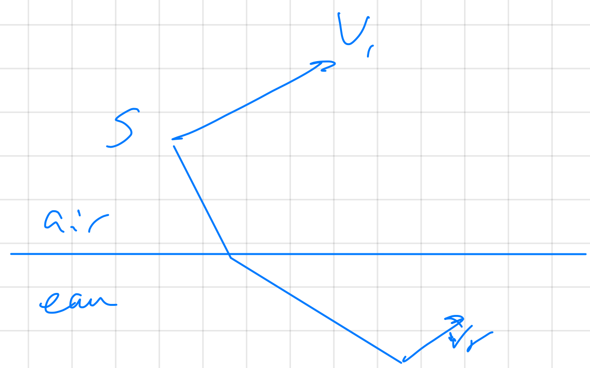
$x = x_s - h_s \tan\theta_t = 1000 - 200 \tan 50{,}77^\circ$

$$\boxed{x = 755\,m}$$

$$\tan\theta_i = \frac{x}{h_A} \Rightarrow h_A = \frac{755}{\tan 10^\circ} = 4288\,m$$

b) $$t_s = \frac{\sqrt{h_A^2 + x^2}}{C_{air}} + \frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + h_1^2}}{C_{mer}}$$

$t_s = 12{,}88\,s$



c) $$\nu_s = \frac{1-\beta_s}{1-\beta_A}\,\nu_A$$

$$\beta_s = \frac{\vec{V_s}\cdot\hat{u}_{s,v}}{C_{air}} = 0 \qquad \beta_A = \frac{\vec{V_A}\cdot\hat{u}_{s,v}}{C_{air}} = \frac{V_A\cdot\sin\theta_i}{C_{air}}$$

$$= \frac{360\cdot\sin 10^\circ}{343}$$

$$= 0{,}15188$$

$\nu_A = 1000\,Hz$

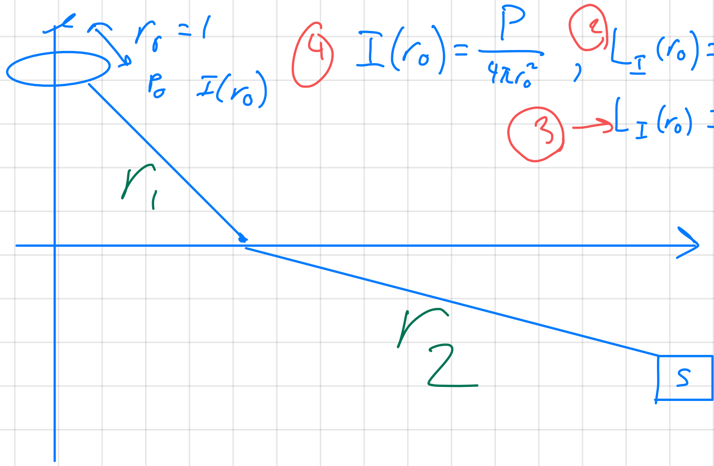
$$\nu_s = \frac{1}{1-0{,}15188} = 1179\,Hz$$

fréquence sous-marin

d) $L_I(r) = L_I(r_0) - 20\log\frac{r}{r_0} - A(r - r_0)$ (1)

$L_I = L_p - 10\log\frac{S}{S_0}$ $\quad S_0 = 1\,m^2$ (2)

$L_p = 10\log\frac{P}{P_0}$ $\quad P_0 = 10^{-12}\,m$ (3)



(4) $I(r_0) = \frac{P}{4\pi r_0^2}$, (2) $L_I(r_0) = L_p - 10\log\frac{4\pi r_0^2}{1\,m^2}$

(3) → $L_I(r_0) = 10\log\frac{P}{10^{-12}} - 10\log 4\pi$

avec $r_0 = 1\,m$

$$L_I(r_0) = 10\log\frac{2000}{10^{-12}} - 10\log 4\pi = 142\,dB$$

$$r_1 = \sqrt{h_A^2 + x^2} = 4347\,m$$

$$r_2 = \sqrt{(x_s - x)^2 + h_s^2} = 316\,m$$

(1) → $L_I(r_1 + r_2) = L_I(r_0) - 20\log\frac{r_1}{r_0} - A_{air}(r_1 - r_0)$
$+ \log T - A_{mer}\, r_2$

$$T = \frac{4 Z_{air} Z_{mer}}{(Z_{air} + Z_{mer})^2} = 1{,}05\cdot 10^{-3}$$

$$Z_{air} = \rho_{air} \cdot C_{mer} = 1,2 \cdot 343 = 411,6$$

$$Z_{mer} = \rho_{mer} \cdot C_{mer} = 1,25 \cdot 1530 = 1,368 \cdot 10^5$$

$$L_I(r_1 + r_2) = 142 - 20\log 4347 - 5 \cdot 4,346 + 10\log(1,05 \cdot 10^{-3}) - 0,1 \cdot 0,346$$

$$L_I(\text{sous-marin}) = 17,7 \text{ dB}$$

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Question : Moment d'inertie et matrice de rotation

Soit la pièce cylindrique représentée sur la figure ci-dessous. L'origine du système d'axes coïncide avec le centre de masse de la pièce. Le point A de coordonnées : $A(0, 10, 10)$ est situé sur son arête supérieure.

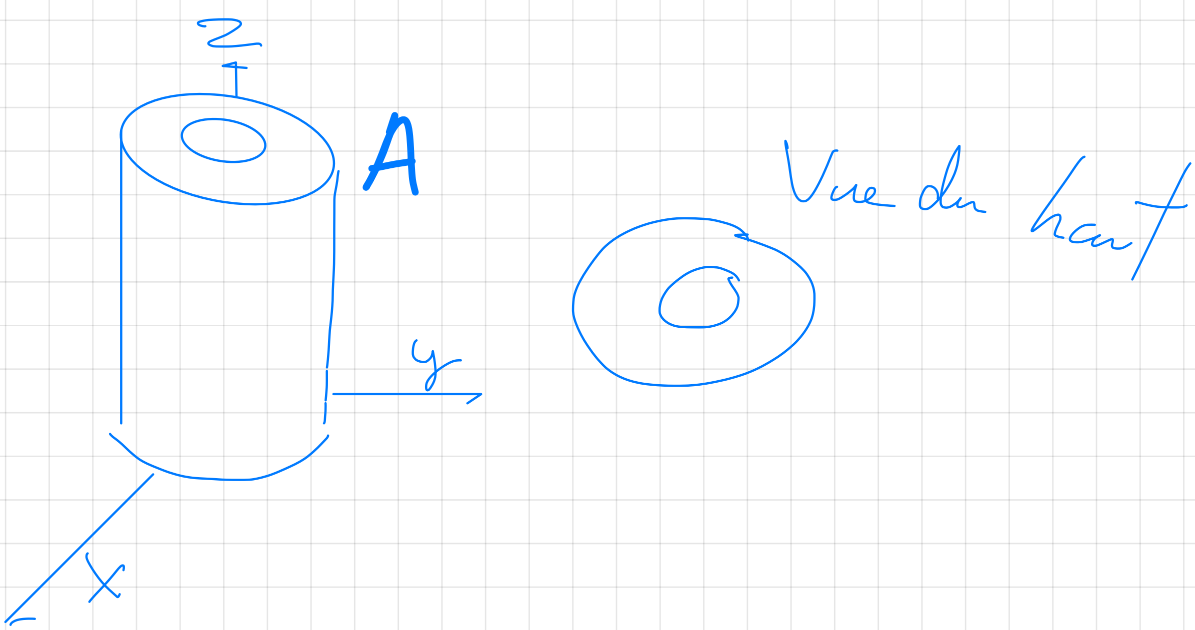
On donne pour la pièce :

- Masse volumique : $\rho = 2000\ \mathrm{kg/m^3}$
- Hauteur $h = 20$ cm
- Rayon interne : $r = 5$ cm
- Rayon externe $R = 10$ cm.

a) Déterminer la matrice moment d'inertie $\boldsymbol{I_C}$ de la pièce par rapport à son centre de masse.

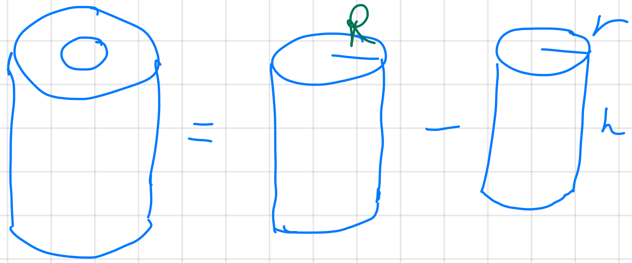
b) On fait subir à la pièce une rotation autour de son centre de masse de façon à ce que le point A se retrouve sur l'axe oz. Déterminer la matrice $\boldsymbol{R}$ de cette rotation.

c) Déterminer le moment d'inertie de la pièce après avoir subi la rotation.



a) $$I_C = m\begin{pmatrix} \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$I_C = I_{C,1} - I_{C,2}$$

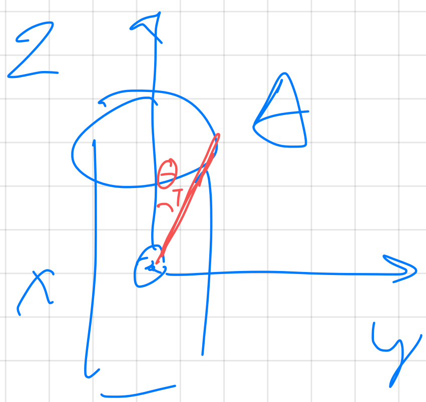


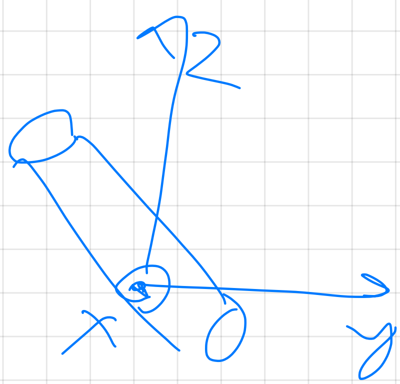
$m_1 = \rho h \cdot \pi R^2 \qquad m_2 = \rho h \cdot \pi \cdot r^2$

$$I_C = I_{C,1} - I_{C,2} = \rho h \pi R^2 \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$- \rho h \pi r^2 \begin{pmatrix} \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$I_C = \begin{pmatrix} 0{,}06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}06086 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05890 \end{pmatrix} kg \cdot m^2$$





$$R = R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

$$\tan\theta_x = \frac{R}{h/2} \Rightarrow \theta_x = \frac{\pi}{4}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_c' = R\, I_c\, R^T = \frac{2}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}06086 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0589 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05989 & 9{,}76\cdot 10^{-4} \\ 0 & 9{,}76\cdot 10^{-4} & 0{,}05988 \end{pmatrix}$$

donc non diagonale

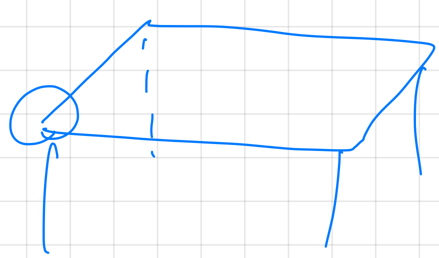
Question: Roulement et glissement

Une boule pleine de rayon $R = 0.1$ m roule sans glisser sur la surface horizontale d'une table de hauteur $z_{table} = 1.0$ m jusqu'à ce qu'elle franchisse un bord et tombe au sol. À l'instant initial $t = 0$, la boule se trouve sur un coin de la table à la position $\vec{r}_{c,0} = (0.0, 0.0, 1.1)^T \mathrm{m/s}$ (voir figure ci-dessous) et sa vitesse linéaire est $\vec{v}_{c,0} = (1.0, 2.0, 0.0)^T \mathrm{m/s}$. Cette vitesse demeure constante tant que la boule roule sur la table. On négligera tout frottement. La surface de la table est de forme carrée de côté $a = 1.5$ m.

a) Déterminer le vecteur vitesse angulaire de la boule lorsque celle-ci roule sans glisser sur la surface de la table.

b) Déterminer le vecteur position $\vec{r}_{c,1}$ de la boule à l'instant où elle quitte la surface de la table.

c) Déterminer l'instant t_1 où le module de la vitesse de la boule atteint la valeur de $v_1 = 3\ \mathrm{m/s}$. L'accélération gravitationnelle est donnée par : $\vec{g} = (0, 0, -9.8)^T \mathrm{m/s^2}$.



A) $V_i = -\vec{\omega} \times \vec{r}_p \qquad \vec{r}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -R \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +R\omega_y \\ -R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\omega_z = 0 \qquad 1 = -R\omega_y \Rightarrow \omega_y = +\frac{1}{R}$

$2 = R\omega_x \Rightarrow \omega_x = -2/R \qquad \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{r}_c = \vec{r}_{c,0} + \vec{v}_c \cdot t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot t$$

t_x = le temps qu'il faut pour que la boule traverse le plan $x = a$

t_y = " $y = a$

$t_x = \frac{a}{V_x}$ et $t_y = \frac{a}{V_y}$ sachant que $V_y = 2V_x \Rightarrow t_y < t_x$

b) à t_y : $\vec{r}(t_y) = \begin{pmatrix} 0 + t_y \\ 0 + 2t_y \\ 1,1 \end{pmatrix}$ $t_y = \frac{1,5}{2} = 0,75$

$$\vec{r}_{c,1} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 1,5 \\ 1,1 \end{pmatrix}$$

c) uniformément accéléré

$$\vec{r} = \vec{r}_{c,1} + \vec{v} \cdot (t - t_1) + \frac{\vec{a}}{2}(t - t_1)^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{V}_0 (t - t_1) + \vec{a}(t - t_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9,8 \end{pmatrix} (t - t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9,8(t - t_1) \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 9,8^2 (t - t_1)^2} = 3 \, m/s$$

$$9{,}8^2 (t - t_1)^2 = 4$$

$$(t - t_1)^2 = \frac{4}{9{,}8^2}$$

$$t = t_1 \overset{+}{\cancel{-}} \frac{2}{9{,}8}$$

$$\boxed{t = 0{,}9541\ s}$$