Solution de l'exemple du chapitre 2 (patineuse) :

(a) Déterminer le moment d'inertie de la patineuse par rapport à l'origine des axes lorsque la patineuse écarte les bras comme illustré à la figure ci-dessous. La position verticale de ses bras par rapport au centre de masse du cylindre principal est $z_0 = 0.5$ m et les centres de masse des trois cylindres sont dans le plan xz..

Soit I_p, I_g et I_d les moments d'inertie des cylindres C_p, C_g et C_d par rapport au centre de masse de la patineuse qui se trouve à l'origine des coordonnées. En appliquant la formule donnant le moment d'inertie d'un cylindre plein on obtient :

$$I_p = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} 3R^2 + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Kg.m}^2$$

On fait la même chose pour I_g et I_d mais cette fois, en ajoutant la correction résultant du fait que ces cylindres ne tournent pas autour de leur centre de masse, mais plutôt autour d'un point situé à $\vec{d}_g = (x_0, 0, -z_0)$ du centre de masse du cylindre gauche et $\vec{d}_d = (-x_0, 0, -z_0)$ du centre de masse du cylindre droit avec $x_0 = R + h/2 = 0.5$ m.

$$I_g = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} 6r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3r^2 + h^2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} z_0^2 & 0 & -x_0 z_0 \\ 0 & x_0^2 + z_0^2 & 0 \\ -x_0 z_0 & 0 & x_0^2 \end{pmatrix}$$

$$I_g = \begin{pmatrix} 0.009 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1545 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1545 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 1.25 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 1.25 & 0 & 1.25 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1.259 & 0 & 1.25 \\ 0 & 2.6545 & 0 \\ 1.25 & 0 & 1.4045 \end{pmatrix} \text{Kg.m}^2$$

$$I_d = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} 6r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3r^2 + h^2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} z_0^2 & 0 & x_0 z_0 \\ 0 & x_0^2 + z_0^2 & 0 \\ x_0 z_0 & 0 & x_0^2 \end{pmatrix}$$

$$I_d = \begin{pmatrix} 1.259 & 0 & -1.25 \\ 0 & 2.6545 & 0 \\ -1.25 & 0 & 1.4045 \end{pmatrix} \text{Kg.m}^2$$

Le moment d'inertie demandé est donc :

$$\mathbf{I} = I_p + I_g + I_d = \begin{pmatrix} 16.518 & 0 & 0 \\ 0 & 19.309 & 0 \\ 0 & 0 & 3.809 \end{pmatrix} \text{Kg.m}^2$$

(b) Déterminer le moment cinétique $\vec{L}$ de la patineuse.

Le moment cinétique $\vec{L}$ est donné par :

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 16.518 & 0 & 0 \\ 0 & 19.309 & 0 \\ 0 & 0 & 3.809 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 19.045 \end{pmatrix} \text{Kg.m}^2/\text{s}$$

(c) À un instant t_0, la patineuse décide de toucher la glace avec la pointe d'un de ses patins afin d'arrêter de tourner sur elle-même. Ceci produit un moment de force constant $\vec{\tau} = (0, 0, -0.75)$ Nm qui ralentit son mouvement de rotation jusqu'à l'arrêt complet à l'instant t_1. Quel est le temps nécessaire $\Delta t = t_1 - t_0$ à la patineuse pour s'arrêter de tourner.

Le moment de force produit une variation du moment cinétique qui devient nul à l'arrêt de la rotation.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Longrightarrow \vec{\tau}dt = d\vec{L}$$

En intégrant sur toute la durée du freinage, on obtient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{\tau}.\,dt = \int_{\vec{L}}^{0} d\overrightarrow{L'}$$

Soit :

$$\vec{\tau}.\,\Delta t = -\vec{L}$$

La 3^{e} composante de cette équation donne :

$$\Delta t = \frac{-1\ \ .045}{-0.75} \approx 25.4\text{s}$$