POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 4 — Dynamique

Djamel Seddaoui

Département de Génie Physique

Table des matières

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié des méthodes numériques utiles pour résoudre les équations de la cinématique

1. Mouvement linéaire (particule ponctuelle ou centre de masse d'un solide)

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t, \vec{v}, \vec{r}, \vec{\omega}, \overrightarrow{\Omega})$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$$

Introduction

2. Mouvement angulaire (solides)

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(t, \vec{v}, \vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\Omega})$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t)$$

Introduction

On peut aussi remplacer la seconde équation par

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\boldsymbol{R}(t)$$

si on décide d'utiliser la matrice de rotation $\boldsymbol{R}(t)$ ou par

$$\frac{d\vec{\vec{R}}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\vec{R}}(t)\vec{\vec{\omega}}(t)$$

si l'analyse utilise le quaternion de rotation $\vec{\vec{R}}(t)$.

La cinématique des solides.

La cinématique: étude des mouvements des solides sans la prise en compte des causes de ces mouvements.

- Position
- Vitesse
- Accélération

- Translation
- Rotation

- ~~Forces~~
- ~~Masse~~

Introduction

Dynamique:

Étude des mouvements des solides en considérant les forces et les masses.

- Position
- Vitesse
- Accélération

- Translation

- Rotation

- Forces
- Moments de force
- Masse

Introduction

Les accélérations sont données par les équations de la dynamique suivantes:

$$\vec{a}\left(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t\right) = \frac{\vec{F}(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t)}{m}$$

$$\vec{\alpha}\left(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t\right) = \boldsymbol{I}^{-1}\left(\vec{\tau}\left(\vec{v},\vec{r},\vec{\omega},\vec{\Omega},t\right) - \tilde{\omega}(t)\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)\right)$$

Table des matières

- ❑ Introduction
- ❑ **Forces et mouvement linéaire**
- ❑ Moments de force et mouvement de rotation
- ❑ Roulement et glissement
- ❑ Conclusion

Champs de force

- Représente une interaction à distance entre deux objets.
- La force qui résulte de cette interaction dépend des propriétés intrinsèques de chacun des objets et de leurs positions relatives.
- Les deux exemples les plus connus sont:
  - la force électrique et
  - la force gravitationnelle.

Force électrique

- Un solide de charge q_1 situé à $\vec{r}_1$ (centre de charge) subira une force

$$\vec{F}_1^E = k\frac{q_1 q_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

en présence d'un solide de charge q_2 localisé à $\vec{r}_2$ (force répulsive si les deux charges sont de même signe et attractive si les deux charges sont opposées).

Dans le vide: $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 8.98755 \times 10^9$ ($N \times m^2/C^2$).

Force électrique

- Un solide de charge q_1 situé à $\vec{r}_1$ (centre de charge) subira une force

$$\vec{F}_1^E = k\frac{q_1 q_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{F}_1^E = q_1\vec{E}_2 \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_2^E = q_2\vec{E}_1$$

avec $\vec{E}_1 = k\frac{q_1\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$ et $\vec{E}_2 = k\frac{q_2\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$

- Cette force est rarement utilisée dans les applications multimédias.

Force gravitationnelle

- Un solide de masse m_1 situé à $\vec{r}_1$(position du centre de masse) sera attiré par un solide de masse m_2 localisé à $\vec{r}_2$(position du centre de masse). La force d'attraction entre ces deux solides est alors donnée par la relation:

$$\vec{F}_1^G = -G\frac{m_1 m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

avec $G = 6.673 \times 10^{-11}$ ($N \times m^2/kg^2$).

- On peut aussi écrire: $$\vec{F}_1^G = m_1 \vec{g}_2$$

Avec:

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Forces et mouvement linéaire

- En général $\vec{r}_1$ sera mesuré par rapport à un point sur la surface de la Terre (hauteur h). Alors

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (R_T + h)\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = (R_T + h)\,\hat{u}$$

avec R_T le rayon de la terre et $\hat{u}$ un vecteur unitaire dans la direction opposée à la direction de la force (du centre de masse de la terre vers l'objet).

- On écrira donc

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{(R_T + h\,)^2}\hat{u} = -\frac{3{,}99 \times 10^{14}}{(6{,}38 \times 10^6 + h)^2}\hat{u}$$

puisque $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg et $R_T = 6.38 \times 10^6$ m.

Forces et mouvement linéaire

- Pour les situations où la masse m_1 atteint une hauteur $h \ll R$, on peut encore simplifier cette formulation et écrire

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{(R_T)^2}\hat{u} = -\frac{3{,}99 \times 10^{14}}{(6{,}38 \times 10^6)^2}\hat{u} = -g\hat{u}$$

Avec $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

- Ici $\hat{u}$ correspondra à la direction z pour le cas ou la Terre est supposée plate (dans le plan $x-y$).

Exemple

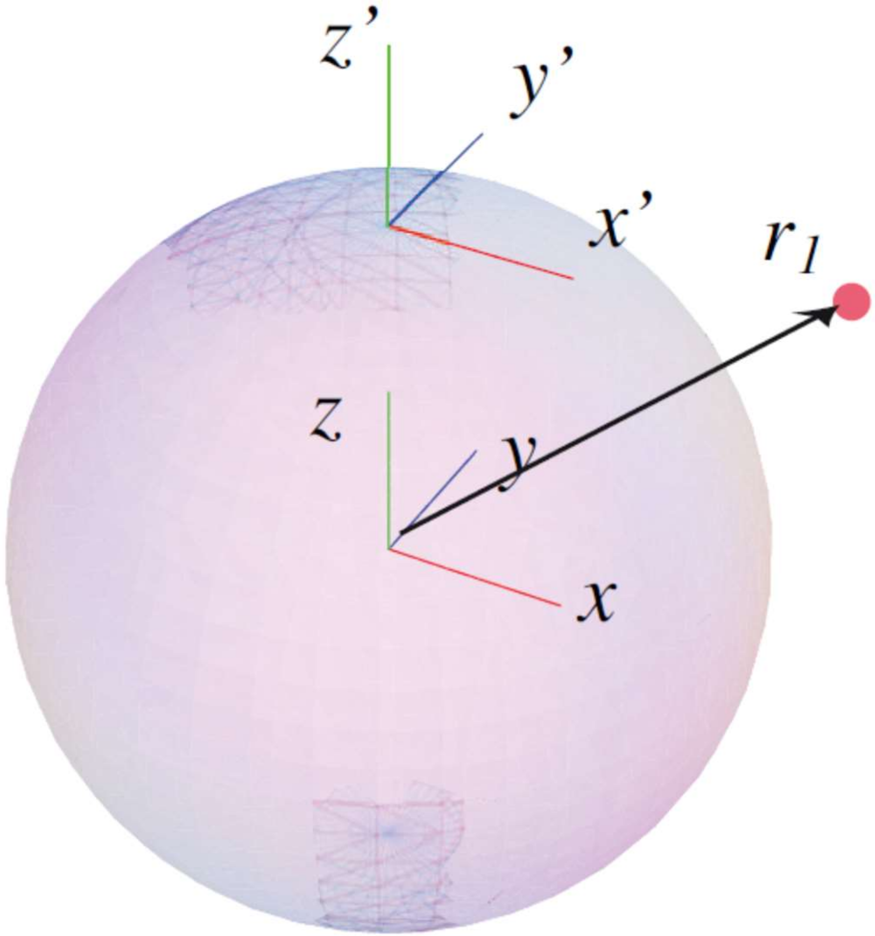
Une fusée de masse m constante partant à une vitesse v_0 et un angle θ par rapport à la verticale dans la direction x. Pour cette fusée, les conditions initiales sont:

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_T \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

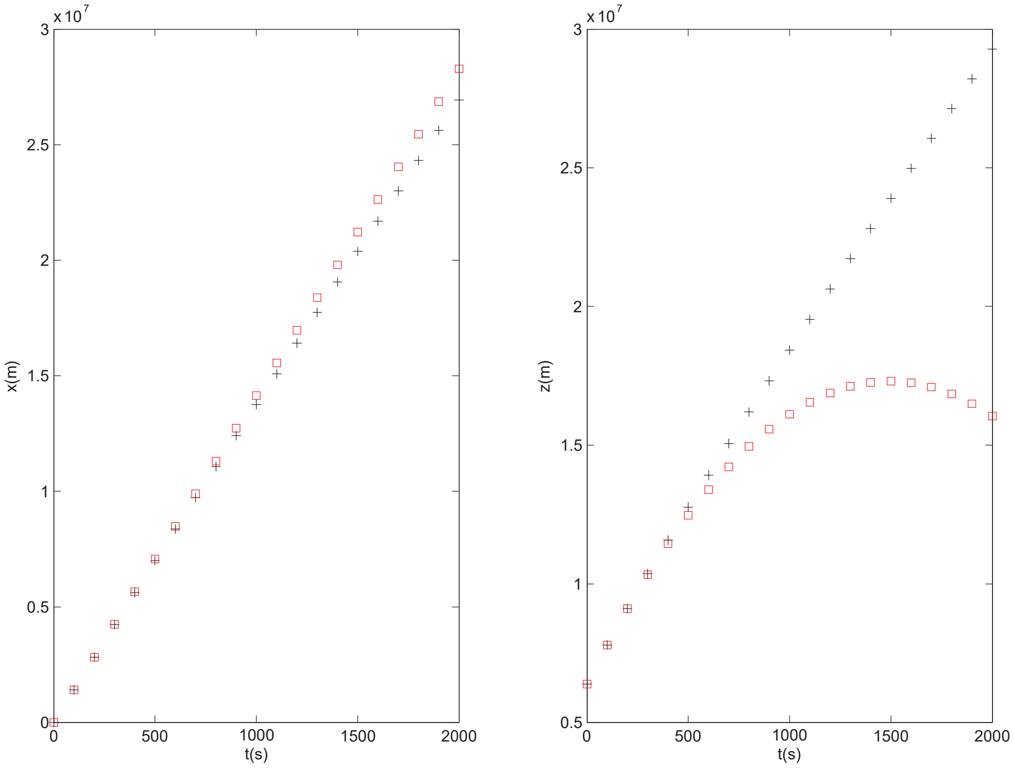
- ❑ Déterminer la trajectoire de cette fusée
- ❑ Qu'arrive-t-il si, à chaque seconde, cette fusée éjecte une masse Δm à une vitesse constante u_t dans la direction contraire à la vitesse de la fusée.

Forces et mouvement linéaire

Les axes de référence $(x, y, z)^T$ par rapport au centre de la Terre seront parallèles au système de référence associé au point de départ localisé sur la surface de la Terre $(x', y', z')^T$.



Trajectoire non balistique (noir) versus trajectoire balistique (rouge)

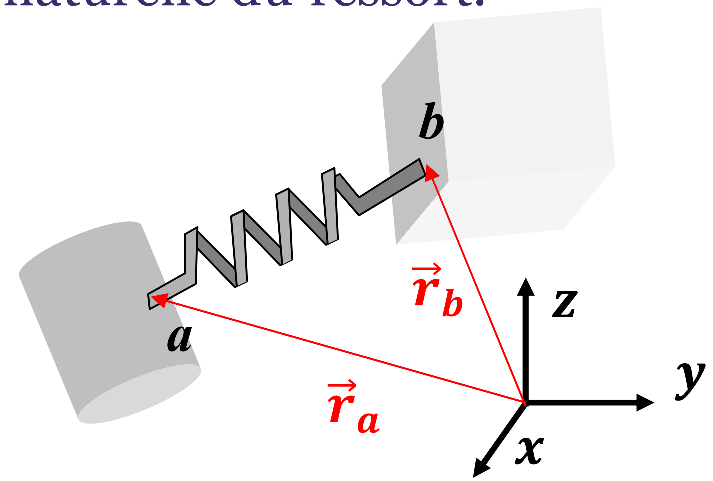


Ressorts et amortisseurs.

Si le ressort est libre de s'orienter dans toutes les directions, alors l'expression générale de la force exercée par un ressort sur un solide est:

$$\vec{F}^r = -k_r(|\vec{r}_b - \vec{r}_a| - L)\frac{\vec{r}_b - \vec{r}_a}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|}$$

Avec $\vec{r}_b$ le vecteur position du point de contact entre l'objet et le ressort, $\vec{r}_a$ est le vecteur position de l'autre extrémité du ressort et L la longueur naturelle du ressort.



Forces et mouvement linéaire

- Dans la majorité des études impliquant des collisions entre des solides, on peut simuler la force d'interaction entre ces solides lorsqu'ils sont en contact en utilisant un modèle de ressort, la constante k_r étant proportionnelle à la rigidité des solides (loi de Hook encore).

- Comme ces collisions ne sont élastiques (sans perte d'énergie) que dans des cas extrêmement rares, il est aussi utile d'introduire le concept d'amortisseur.

Forces et mouvement linéaire

La force exercée par un amortisseur attaché au solide au point ***a*** est donnée par

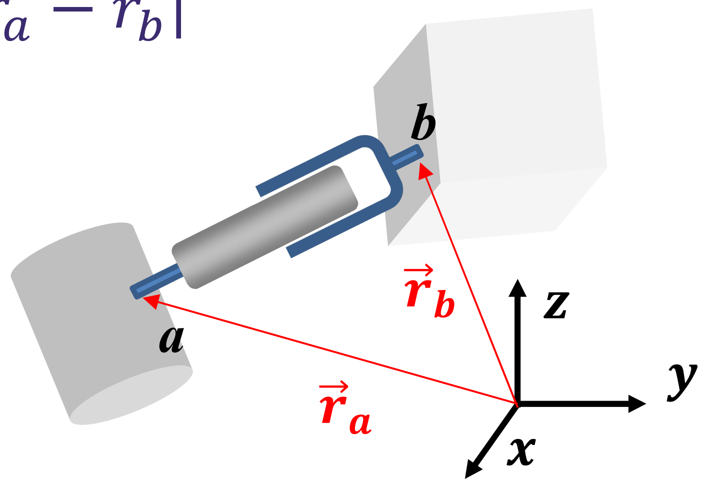
$$\vec{F}^A = -k_A[(\vec{v}_a - \vec{v}_b).\hat{u}]\hat{u}$$

Ici k_A est la constante d'amortissement.

Le vecteur $\hat{u}$ est donné par

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}$$

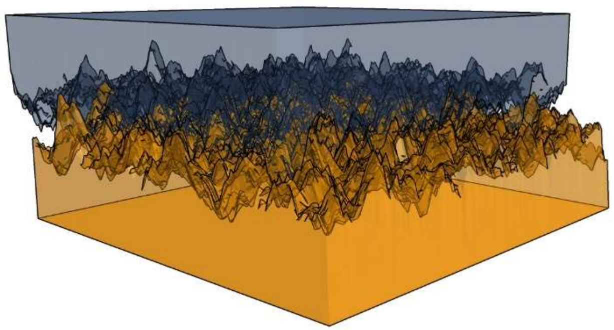
$\vec{v}_a$ et $\vec{v}_b$ sont les vitesses des points a et b.



Frottement sec

La force de frottement sec s'oppose au mouvement d'un solide qui est en contact avec une surface. Elle est due à deux effets :

1. le fait que les surfaces sont rarement planes du point de vue microscopique, des rugosités étant toujours présentes sur celles-ci ;
2. l'attraction entre les molécules des deux solides en contact.



wikipédia

Forces et mouvement linéaire

Si une force externe $\vec{F}$ s'exerce sur un objet au repos sur une surface, la force maximale de frottement sec statique $\vec{F}^f$ est donnée par

$$\vec{F}^f_{max} = -\mu_s \left|\vec{F}_\perp\right| \frac{\vec{F}_\parallel}{\left|\vec{F}_\parallel\right|}$$

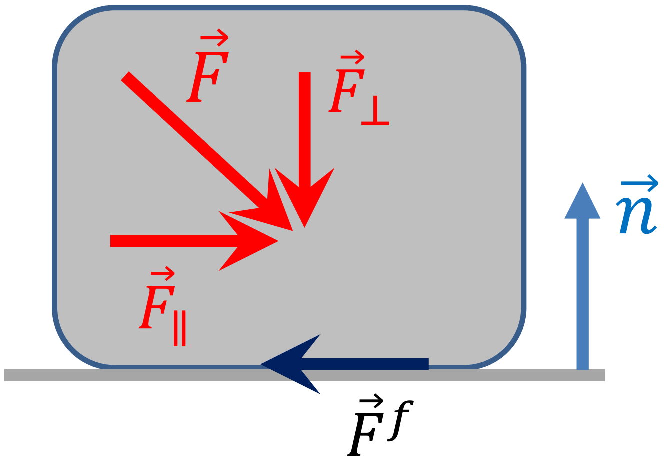
$$\vec{F}^f = \begin{cases} -\vec{F}_\parallel \; si & \left|\vec{F}_\parallel\right| \leq \left|\vec{F}^f_{max}\right| \\ 0 \quad si & \left|\vec{F}_\parallel\right| > \left|\vec{F}^f_{max}\right| \end{cases}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$$

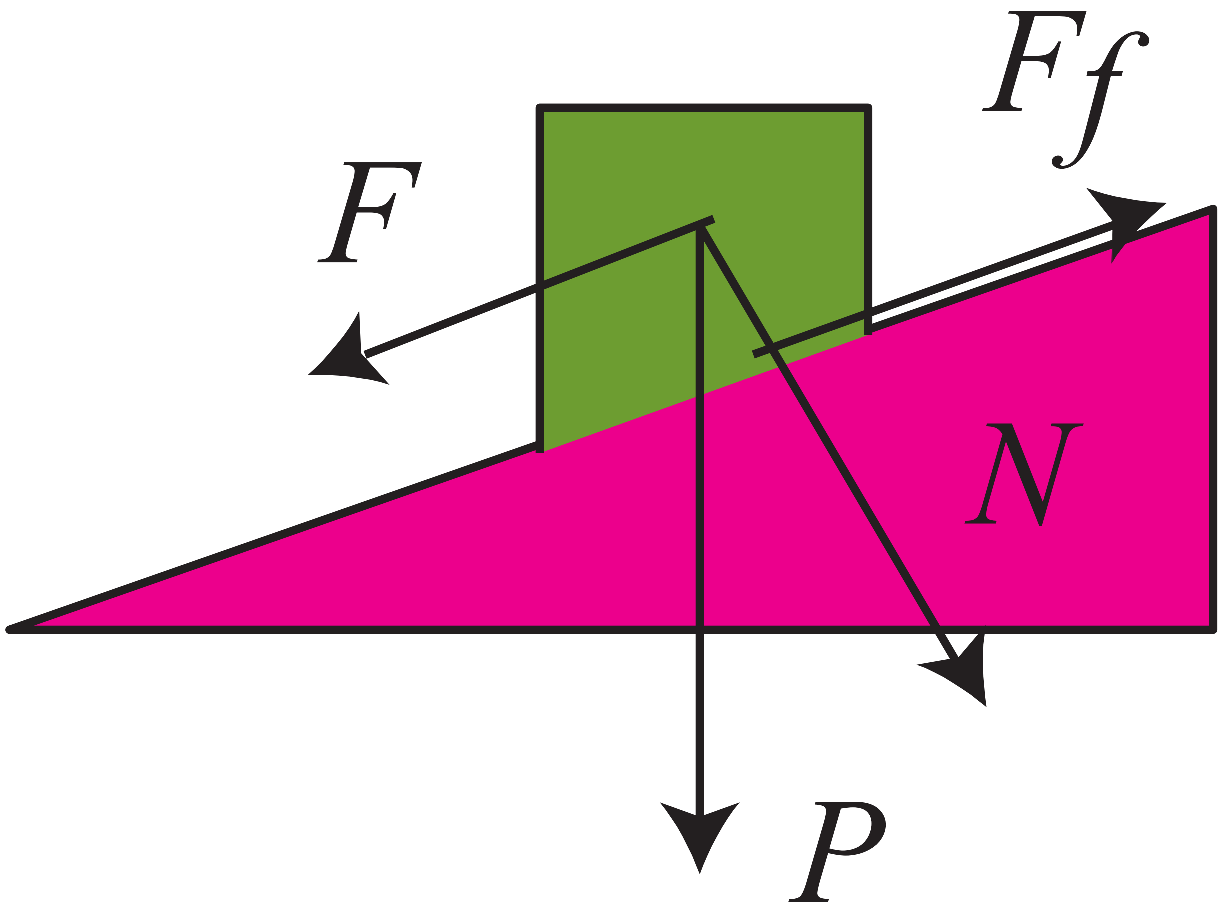
$$\vec{N} = -\vec{F}_\perp$$

$$\vec{F}_\perp = (\vec{F}.\vec{n})\,\vec{n}$$

$$\vec{F}_\parallel = \vec{F} - \vec{F}_\perp$$



Force de frottement



Forces et mouvement linéaire

Pour les cas ou l'objet se déplace à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à la surface, la force de frottement est alors donnée par

$$\vec{F}^f = \begin{cases} -\mu_c N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases}$$

avec μ_c le coefficient de frottement cinétique.

Pour les cas ou l'objet se déplace à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à la surface, la force de frottement est alors donnée par

$$\vec{F}^f = \begin{cases} -\mu_c N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases}$$

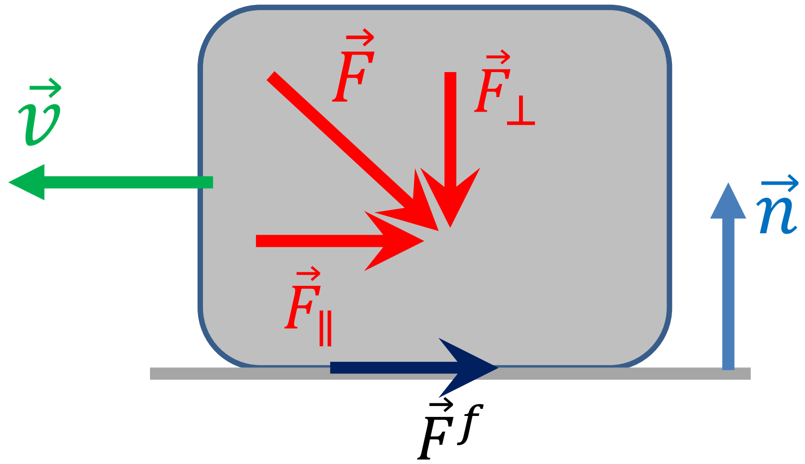
avec μ_c le coefficient de frottement cinétique.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{N} = -\vec{F}_{\perp}$$

$$\vec{F}_{\perp} = (\vec{F}.\vec{n})\,\vec{n}$$

$$\vec{F}_{\parallel} = \vec{F} - \vec{F}_{\perp}$$



Forces et mouvement linéaire

Coefficients de frottement pour différentes interfaces plan-solide

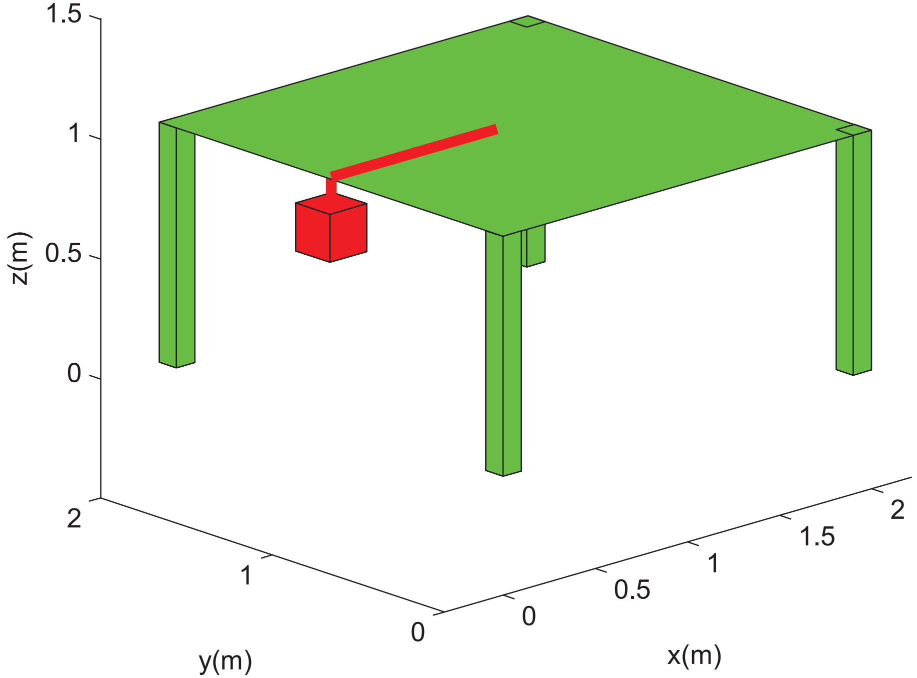
Matériaux en contact	μ_s	μ_c
Acier sur acier (sec)	0.78	0.42
Acier sur acier (gras)	0.10	0.05
Acier sur acier (surfaces polies)	100.	100.
Bois sur bois	0.5	0.3
Métal sur glace	0.03	0.01
Pneu sur route sèche	0.8	0.6
Pneu sur route mouillée	0.15	0.1
Téflon sur téflon	0.04	0.04
Cuir sur fonte	0.28	0.56
Vitre sur vitre (sèche)	0.94	0.40
Vitre sur fer	1.10	0.15
Glace sur glace	0.10	0.03

Exemple

Un câble de longueur L =1.0 m et de masse linéique ρ =0.01 kg/m auquel on a suspendu une masse (m =0.1 kg) pend par une longueur de l_0 =0.1 m au bout d'une table de hauteur h =1 m. Le coefficient de frottement statique entre la table et le câble est μ_s =0.4 alors que son coefficient de frottement cinétique est μ_c =0.1. On suppose aussi que le coin de la table exerce une force constante de f_c =0.01 N sur le câble dans une direction opposée à son mouvement.

- Déterminez ce qui arrivera si le câble est initialement au repos.
- Simulez, si requis, le comportement de la masse qui pend au bout du câble jusqu'à ce quelle touche le sol.

Câble lesté glissant sur une table



Frottement visqueux

Lorsque le solide se déplace dans un fluide (un gaz ou un liquide), il subit l'effet d'une force de frottement dont la source est multiple

- collisions directe entre le solide et les molécules composant le fluide ;
- interactions entre les molécules du solide et les molécules du fluide (viscosité).

Forces et mouvement linéaire

Si le solide est complètement immergé dans le fluide, la force s'appliquant uniformément sur la face du solide se déplaçant dans le fluide (ce qui équivaut à exercer une force directement sur le centre géométrique du solide).

- Les situations où le solide n'est que partiellement en contact avec le fluide sont beaucoup plus complexes (la force nette ne s'applique alors que sur la partie immergée du solide et donne aussi naissance à un mouvement de rotation).

On peut distinguer trois régimes de frottement visqueux.

1. À très basse vitesse ($v < 5$ m/s dans l'air), on considère le frottement visqueux comme laminaire

$$\vec{F}^{\text{vis}} = \begin{cases} -k\eta\vec{v} & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}$: vitesse du solide,

η : coefficient de viscosité dynamique du fluide

k : coefficient de proportionnalité relié aux dimensions géométriques du solide.

Forces et mouvement linéaire

- Pour une boule dans un fluide, le facteur géométrique est donné par

$$k = 6\pi R$$

avec R le rayon de la boule (formule de Stokes).

- Pour un solide quelconque, on utilisera souvent un facteur géométrique identique à celui de la boule avec

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$$

c'est-à-dire le rayon qu'aurait une boule ayant un volume égal à celui du solide (V).

Quelques valeurs de η, le coefficient de viscosité dynamique pour différents fluides à différentes températures

Fluide	0 C	20 C	40 C
air sec	0.017×10^{-3}	0.018×10^{-3}	0.019×10^{-3}
eau	1.8×10^{-3}	1.0×10^{-3}	0.7×10^{-3}
glycérine		1490×10^{-3}	

η en décapoise $= \mathrm{N\ s\ m^{-2}} = \mathrm{Pa\ s} = \mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-1}}$

Forces et mouvement linéaire

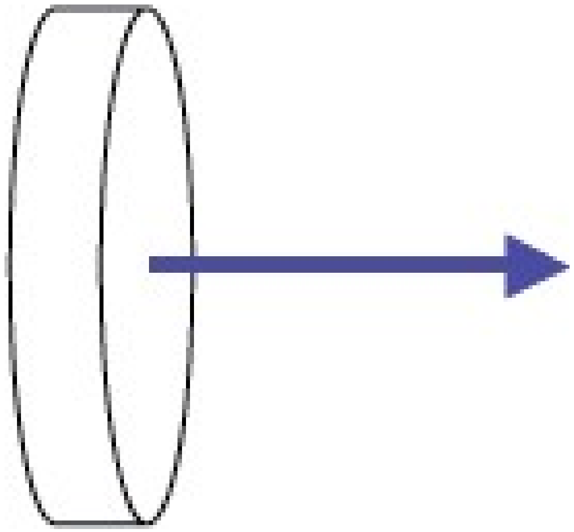
2. À vitesse intermédiaire ($5 < v < 20$ m/s dans l'air), on considère le frottement visqueux comme turbulent et $\vec{F}^{vis}$ prend la forme

$$\vec{F}^{\text{vis}} = \begin{cases} -C_x \frac{\rho}{2} |\vec{v}| \vec{v} S & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, S est l'aire du solide perpendiculaire à la vitesse et C_x un coefficient de traînée caractéristique de la géométrie du solide.

Forces et mouvement linéaire

- Pour une boule $C_x \approx 0.45$
- Pour un disque se déplaçant suivant un axe parallèle au cylindre $C_x \approx 1.32$.



Forces et mouvement linéaire

On détermine le comportement laminaire ou turbulent d'un fluide quelconque en utilisant le nombre de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L |\vec{v}|}{\eta}$$

η : coefficient de viscosité dynamique du fluide

ρ : masse volumique du fluide

$\vec{v}$: vitesse de déplacement du solide dans le fluide

L : longueur caractéristique du fluide

- L'écoulement est laminaire si $\mathrm{Re} < 2300$.
- Sinon il est turbulent (en fait la transition au régime turbulent dépend de la géométrie et le régime turbulent s'établit souvent lorsque $\mathrm{Re} \gg 2300$).

3. À très haute vitesse ($20\ m/s < v < v_s$) où v_s est la vitesse du son dans le fluide, on utilise:

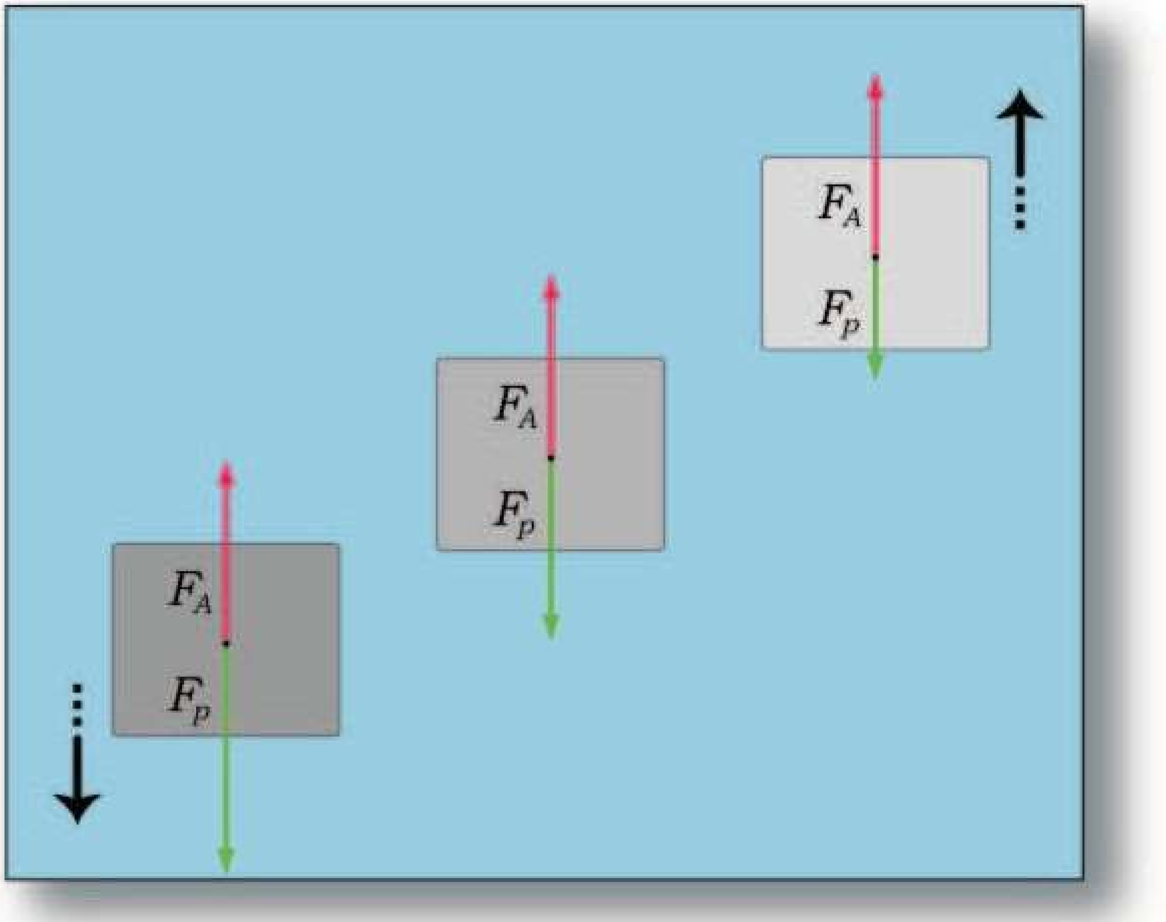
$$\vec{F}^{\text{vis}} = \begin{cases} -K|\vec{v}|^{n-1}\vec{v}S & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases}$$

avec K une constante qui dépend du fluide et $n > 2$.

Poussée d’Archimède

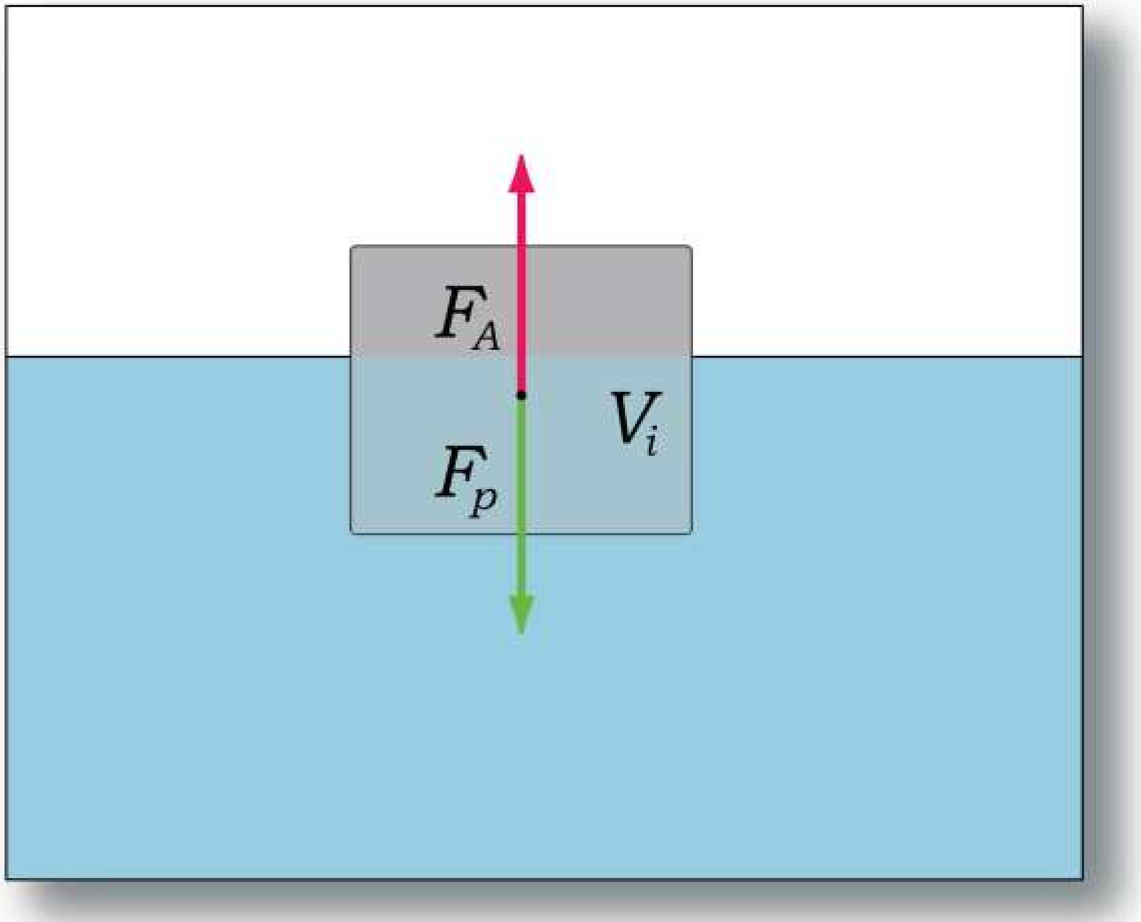
La poussée d’Archimède est une force qui s’exerce en présence du champ gravitationnel de la Terre lorsqu’un solide est immergé dans un fluide. L’intensité de cette force dépend du volume de fluide déplacé par l’objet et de la masse volumique du fluide (sa densité). Elle résulte de la différence entre la pression exercée par le fluide situé au-dessus du solide et celle exercée par le fluide situé au-dessous de l’objet.

Forces et mouvement linéaire



$$\vec{F}_A = \rho g V_{imm} \hat{z}$$

Forces et mouvement linéaire



$$\vec{F}_A = \rho g V_{imm} \hat{z}$$

Forces et mouvement linéaire

Notez que cette force s'applique aussi aux solides immergés dans l'air. Cependant, elle est généralement combinée directement avec la force gravitationnelle

$$\vec{F}^A + \vec{F}^G = \left(\rho_{\text{air}} V_{\text{solide}} g - \rho_{\text{solide}} V_{\text{solide}} g\right) \hat{z} = -\rho'_{\text{solide}} V_{\text{solide}} g \hat{z}$$

où on a corrigé la densité du solide en utilisant

$$\rho'_{\text{solide}} = \rho_{\text{solide}} - \rho_{\text{air}}$$

En fait comme $\rho_{\text{air}} \ll \rho_{\text{solide}}$ on néglige souvent cet effet dans l'air en utilisant directement ρ_{solide}.

Pour le cas où la poussée d'Archimède dans l'air n'est pas négligeable (montgolfière avec $\rho_{\text{air}}(z)$), on devra la considérer explicitement.

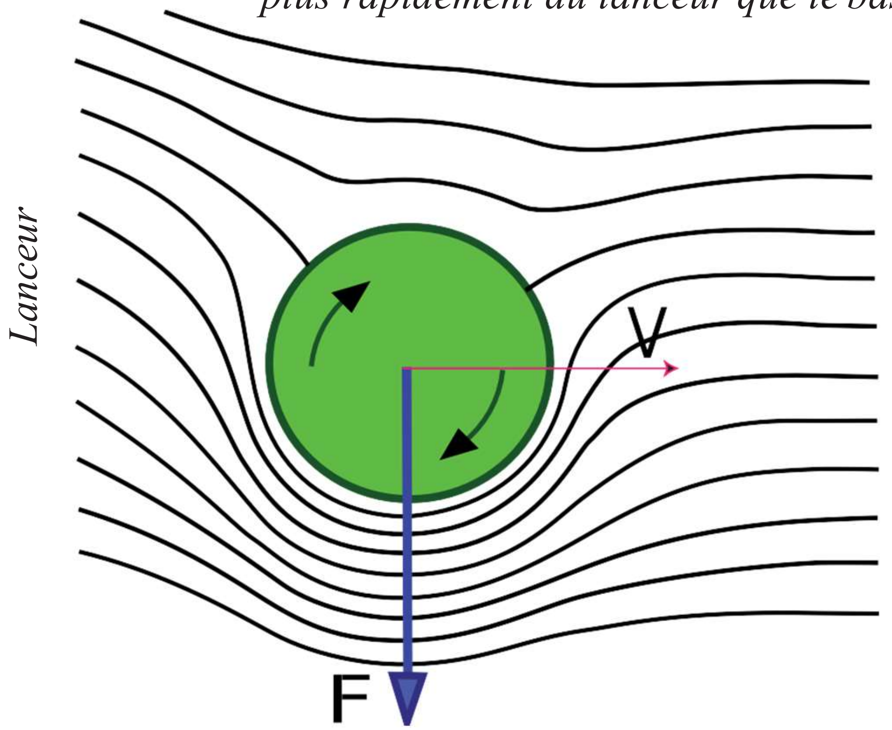
Effet Magnus

L'effet Magnus est engendré lorsqu'un solide en rotation se déplace dans un fluide.

- Lorsqu'un solide se déplace dans l'air, il va, par frottement visqueux, modifier la vitesse du courant d'air qui l'entoure.
- Cette perturbation est proportionnelle à la vitesse du solide par rapport au fluide puisque la force de frottement visqueux est proportionnelle à cette vitesse.

Forces et mouvement linéaire

Balle avec "Top spin".
Le haut de la balle s'éloigne
plus rapidement du lanceur que le bas



La vitesse angulaire est négative
La force est vers le bas

L'air est accéléré au bas et ralenti au haut.

Forces et mouvement linéaire

- L'intensité de la force due à l'effet Magnus dépendra de la forme du solide, de sa vitesse de rotation angulaire et de sa vitesse linéaire, de ses dimensions et des propriétés du fluide (sa densité entre autres choses).
- La force de Magnus sera appliquée au centre de masse de l'objet et pointera de la direction où la vitesse du fluide par rapport an centre de masse de l'objet est plus faible vers le point où elle est plus élevée.

Forces et mouvement linéaire

- Pour un cylindre de rayon r et de longueur L se déplaçant en rotation (vitesse angulaire $\vec{\omega}$) à une vitesse $\vec{v}$ (vitesse du centre de masse) dans un fluide de densité ρ, elle prendra la forme

$$\vec{F}^M = 2\pi\rho L r^2 (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

- Si le solide a une forme sphérique, on utilisera plutôt

$$\vec{F}^M = \pi\rho r^3 (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

Forces et mouvement linéaire

Pour le cas général, on utilisera la relation

$$\vec{F}^M = \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 A C_M \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v})}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}$$

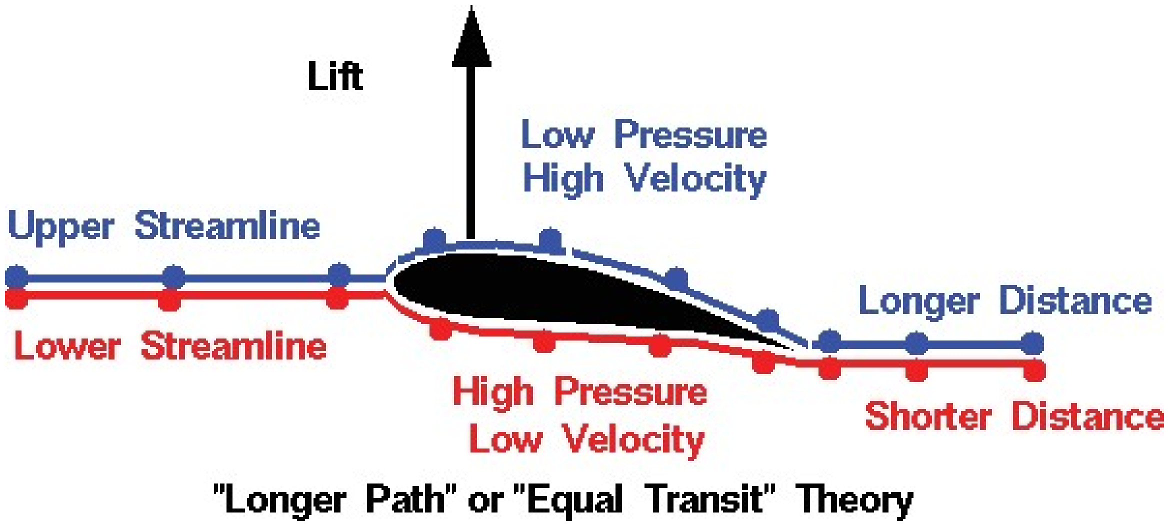
A : la surface efficace du solide (perpendiculaire à la direction de la force de Magnus)

C_M : coefficient de Magnus qui dépend du rapport de spin $\omega r/2v$ et des propriétés du fluide.

Portance

La portance est une force dont la source est la même que celle produisant l'effet Magnus (théorème de Bernoulli). La différence majeure entre la portance et la force de Magnus est la source des différences de vitesse fluide-solide observée à différents points de la surface d'un solide. Pour l'effet Magnus, c'est le mouvement de rotation du solide qui est à la source des différences de vitesse. Pour la portance, la source est principalement de nature géométrique.

Forces et mouvement linéaire



Ici par "Low velocity", on veut dire que la différence de vitesse entre le fluide collé à l'aile et le fluide éloigné de l'aile est faible (et vice versa pour "High velocity" et différence de vitesse élevée).

Forces et mouvement linéaire

C'est la position et la forme asymétrique du solide se déplaçant dans le fluide qui causera les différences dans la vitesse fluide/solide a différents points sur la surface du solide. La forme générale de cette force est

$$|\vec{F}^P| = \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2 A C_P$$

avec C_P le coefficient de portance qui dépend de la géométrie du solide, de son orientation et de la viscosité du fluide. Ces coefficients sont en général évalués de façon expérimentale. La direction de la force est beaucoup plus difficile à déterminer, car elle dépend de $\vec{v}$ et de la forme du solide.

Autres situations où le mouvement de rotation a un impact sur le mouvement linéaire

- La force de frottement n'est pas uniforme pour le solide (force de frottement sec ou visqueux).
- Pour un solide en rotation, la direction de la force de frottement est dans la direction de la vitesse linéaire du solide au point de contact avec la surface qui est une combinaison de la vitesse linéaire due à la rotation et de celle du centre de masse. Ceci peut faire en sorte que la force de frottement change la direction de déplacement du centre de masse.

Forces et mouvement linéaire

Exemples :

- Un cylindre (verre) poussé en ligne droite avec un mouvement de rotation sur une surface plane (Téflon) se déplacera suivant une trajectoire curviligne.
- Ceci est dû au fait que le cylindre aura tendance à se déporter vers l'avant à cause de la force de frottement (normale du poids à la surface plus grande à l'avant).
- La force de frottement normale au mouvement du centre de masse à l'avant du cylindre sera alors supérieure à celle à l'arrière du cylindre donnant naissance à une accélération perpendiculaire à la vitesse de déplacement du centre de masse.

Moments de force et mouvement de rotation

Pour les solides, en plus de considérer les forces qui agissent uniformément sur l'objet (donc s'appliquent sur le centre de masse) et affectent son mouvement linéaire, certaines forces donneront aussi naissance à un moment de force qui affectera le mouvement de rotation de l'objet autour de son centre de masse.

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}$$

avec

$$\vec{L}(t) = \mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t)$$

Moments de force et mouvement de rotation

L'accélération angulaire est alors donnée par

$$\vec{\alpha} = \boldsymbol{I}^{-1}(\vec{\tau} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{I}\vec{\omega})$$

Pour des objets symétriques en x, y et z (cubes et sphères) le moment d'inertie est proportionnel à la matrice identité alors:

$$\vec{\alpha}(t) = I^{-1}\vec{\tau}(t) - \vec{\omega} \times \vec{\omega} = I^{-1}\vec{\tau}(t)$$

Ceci est aussi vrai si $\vec{\omega}$ et $\boldsymbol{I}\vec{\omega}$ sont parallèles ou si $\vec{\omega} = 0$.

Moments de force et mouvement de rotation

Le moment de force $\vec{\tau}$ résultant d'une force $\vec{F}$ appliquée au point $\vec{r}_F$ situé dans ou sur le solide est donné par:

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F} = \vec{r}_{c,F} \times \vec{F}$$

$\vec{r}_c$: le vecteur donnant la position du centre de masse du solide

$\vec{r}_{c,F}$: point d'application de la force par rapport au centre de masse.

Champs de force gravitationnel et rotation

- Comme la force gravitationnelle est appliquée uniformément à tous les points du solide, elle ne produit aucun moment de force net par rapport au centre de masse du solide. On aura donc

$$\vec{\tau}^{\,G}_{1,2} = \vec{\tau}^{\,G}_{2,1} = 0$$

Champs de force électromagnétique et rotation

- Ici, tout dépendra de la distribution des charges dans le solide. Si le centre de masse et les centres des charges positives et négatives coïncident, la force électromagnétique ne produira aucun moment de force net par rapport au centre de masse du solide (les moments de force électromagnétique s'annulent).

Ressort et rotation

Pour les ressorts (et les amortisseurs), on supposera que la force est appliquée au point de contact $\vec{r}_F$ entre le ressort (amortisseur) et le solide dans la direction de compression du ressort (amortisseur).

$$\vec{\tau}^{\,r} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^{\,r}$$

$$\vec{\tau}^{\,a} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^{\,a}$$

Moments de force et mouvement de rotation

Si $\vec{r}_F - \vec{r}_c$ est parallèle à $\vec{F}^{r/a}$, on aura

$$\vec{\tau}^{r/a} = 0$$

Frottement et rotation

Frottement sec

Le frottement sec donnera naissance à un moment de force, car il s'applique à l'interface entre le solide et le plan sur lequel il se déplace. Ce moment de force par rapport au centre de masse du solide s'écrira

$$\vec{\tau}_c^{\,f} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^{\,f}(\vec{r})$$

Moments de force et mouvement de rotation

Si on est en présence d'une force distribuée uniformément sur une surface S d'aire A (une pression $\vec{P}^f$) on utilisera:

$$\vec{\tau}_c^f = \int_S (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{P}^f(\vec{r}) ds = -\mu_k \int_S P_N(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}_c) \times \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} ds$$

avec $P_N(\vec{r})$ la pression qu'exercent les deux surfaces (en contacte) l'une sur l'autre et $\vec{v}(\vec{r})$ est la vitesse relative des deux surfaces au point de contact $\vec{r}$.

$$\vec{P}^f(\vec{r}) = -\mu_k P_N(\vec{r}) \frac{\vec{v}(\vec{r})}{|\vec{v}(\vec{r})|}$$

Cube sur une surface

On pousse par une de ses arêtes supérieures un cube de masse $m = 2$ kg et de dimensions $20 \times 20 \times 20$ cm^3 qui repose sur une surface de coefficient de frottement statique $\mu = 0.7$. La force appliquée $F = 12$ N est horizontale.

- Déterminez si ce cube glissera ou roulera.
- S'il roule, évaluez l'accélération angulaire du cube autour de son centre de masse à l'instant où il commence à rouler.

Moments de force et mouvement de rotation

Frottement visqueux

Le frottement visqueux ne contribue pas au moment de force si le solide est uniforme et régulier et complètement immergé dans le fluide et ne subit aucun mouvement de rotation :

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = 0$$

Pour un solide en rotation, même uniforme (une boule lisse par exemple), la force de frottement ne s'applique pas de façon uniforme car elle dépend de la vitesse d'un point du solide par rapport à l'air environnant et

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = \int_S (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}^{\text{vis}} d^2 r$$

Moments de force et mouvement de rotation

Pour un solide qui n'est pas uniforme (un ballon de rugby lancé en diagonal) ou subit un mouvement de rotation, le moment de force ne sera pas uniforme et sera donné par

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = \int_S (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}^{\text{vis}}(\vec{r})\, d^2 r$$

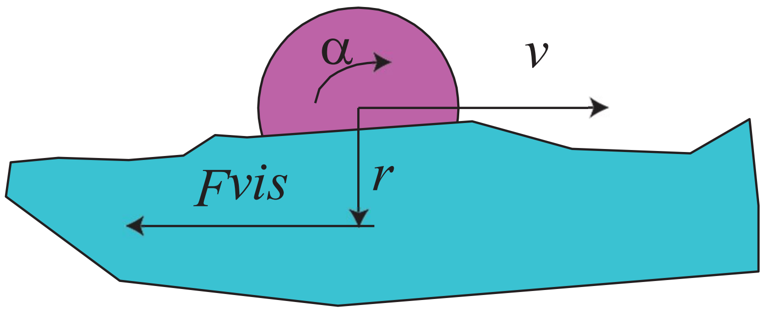
avec $\vec{P}^{\text{VIS}}(\vec{r})$ la pression qu'exerce la force visqueuse à chaque point de la surface.

Moments de force et mouvement de rotation

Si un solide n'est que partiellement immergé dans un fluide, la partie du solide à l'extérieur du fluide ne subit pas la même force de frottement visqueuse que la partie hors du fluide. On pourra donc écrire

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = \int_{S_{\text{fluide}}} (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}^{\,\text{vis}}_{\text{fluide}} d^2 r + \int_{S_{\text{air}}} (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}^{\,\text{vis}}_{\text{air}} d^2 r$$

Et on négligera souvent la contribution de l'air.

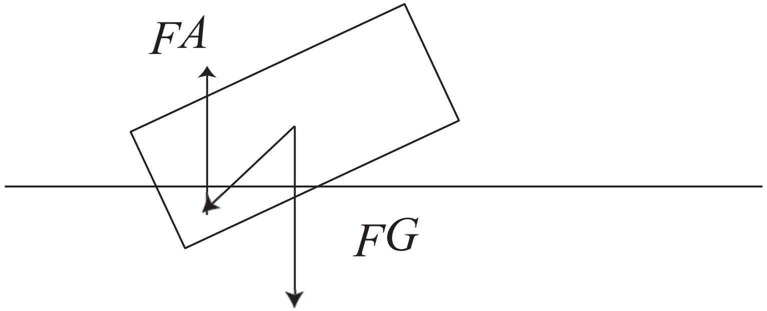


Poussée d'Archimède et rotation

- La poussée d'Archimède ne génère aucun moment de force net autour du centre de masse pour un solide homogène complètement immergé dans un liquide.
- Si le solide est inhomogène, un moment de force peut être généré
- Si le solide est partiellement immergé, un moment de force peut être généré.

Moments de force et mouvement de rotation

$$\vec{\tau}^{a} = (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{F}^{A}$$



La position du point $\vec{r}$ correspond ici à la position du centre géométrique de la partie immergée de l'objet (et donc de la position angulaire de l'objet).

Effet Magnus et rotation

- Pour un solide uniforme, la force générée par l'effet Magnus sera en général appliquée uniformément sur le solide et ne produira pas de moment de force net.
- Pour un solide non uniforme, la direction et l'intensité de l'effet Magnus changera en chaque point du solide (la direction étant proportionnelle à la vitesse relative du solide et du fluide à chaque point dans l'espace) et celui-ci peut produire un moment de force.

Portance

Comme la portance est proportionnelle à la vitesse relative du solide et du fluide, qui varie d'un point à l'autre de la surface du solide, elle engendre généralement un moment de force.

Roulement et glissement

Dans le cas d'un objet sphérique ou cylindrique en contact avec une surface :

- l'objet peut glisser sur la surface avec une vitesse $\vec{v}_{glissement}$;
- l'objet peut aussi glisser et rouler sur la surface avec une vitesse $\vec{v}_{glissement}$ de déplacement linéaire et unevitesse $\vec{\omega}$de rotation.
- L'objet peut aussi rouler sans glisser.

Roulement et glissement

La force de frottement (glissement) est donnée par

$$\vec{F}^f = -\mu_c N \frac{\vec{v}_{\text{glissement}}}{|\vec{v}_{\text{glissement}}|}$$

Cette force de frottement engendre un moment de force donné par

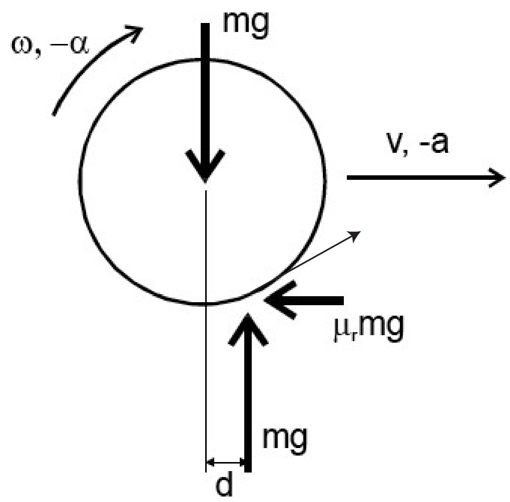
$$\vec{\tau}^{\text{glissement}} = (\vec{r}_p - \vec{r}_c) \times \vec{F}^f = \vec{r}_{p,c} \times \vec{F}^f$$

avec $\vec{r}_p$ la position du point de contact entre l'objet qui roule et la surface sur laquelle il roule (ici nous supposerons que c'est d'une sphère dont il s'agit et $\vec{r}_{p,c} = (0, 0, -R)^T$)

Roulement etglissement

Moment de force pourle roulement

- L'objet qui roule sur la surface avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ subit aussi un moment de force dû au roulement



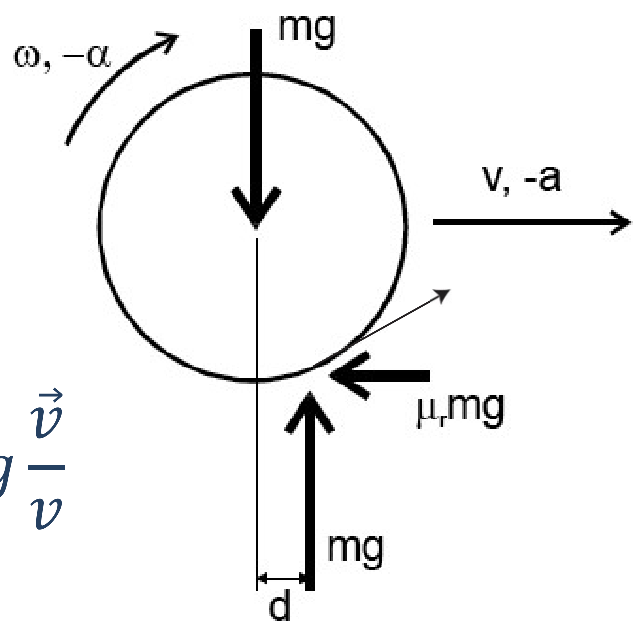
Roulement et glissement

- La force de répulsion qu'exerce le plan sur la boule $\vec{N}$ à un point situé à l'avant de la boule (position $\vec{r}_{d,c}$ par rapport au centre de masse de la boule et coefficient de frottement au roulement μ_r).

$$\vec{\tau}^{roulement} = \vec{r}_{d,c} \times \vec{N}$$

$$\vec{r}_{d,c} = \left(d, 0, -\sqrt{R^2 - d^2}\right)^T$$

$$\vec{F}^{roulement} = -\mu_r N \frac{\vec{v}}{v} = -\mu_r mg \frac{\vec{v}}{v}$$



Roulement et glissement

- Le moment de force total si la boule roule et glisse sera

$$\tau = \tau^{\text{roulement}} + \tau^{\text{glissement}}$$

- Si on suppose que la boule ne fait que rouler, on utilisera

$$\tau = \tau^{\text{roulement}}$$

Roulement et glissement

Roulement et glissement ou roulement seulement

- Un objet qui roulerait sur la surface (sans glisser) avec une vitesse de rotation $\vec{\omega}$ produirait une vitesse de déplacement linéaire du centre de masse résultant du roulement donnée par

$$\vec{v}_r = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{p,c}$$

Dès que la vitesse de déplacement du centre de masse de la boule $\vec{v}_c$ est différente de $\vec{v}_r$, l'objet glisse.

Roulement et glissement

Donc

- Si la vitesse du centre de masse du solide qui glisse est $\vec{v}_c$ et que la vitesse linéaire du centre de masse due au mouvement de rotation angulaire $\vec{v}_r$ sont égales alors le glissement cessera. La vitesse du solide lorsque le glissement cesse devient alors $\vec{v}_r$ (il continue à avancer dans la même direction en roulant).

- Si $\vec{v}_c$ est dans une direction opposée à $\vec{v}_r$, un changement dans la direction de déplacement de l'objet se produira si sa vitesse $\vec{v}_c$ devient nulle (effet du frottement). Il change alors de direction et accélère en glissant jusqu'à ce que $\vec{v}_c$ et $\vec{v}_r$ deviennent identiques. À ce moment, l'objet commence à rouler sans glisser.

Application à la boule de billard

- La boule a une masse m et un rayon R.
- Elle se déplace dans le plan $x-y$.
- Son centre de masse est identifié par

$$\vec{r}_c(t) = (x(t), y(t), R)^T$$

- La vitesse du centre de masse est

$$\vec{v}_c(t) = (v_x(t), 0, 0)^T$$

Roulement etglissement

- La vitesse de rotation autour du centre de masse est

$$\vec{\omega}_C(t) = (0, \omega_y(t), 0)^T$$

- La position angulaire d'un point *p* sur la boule est

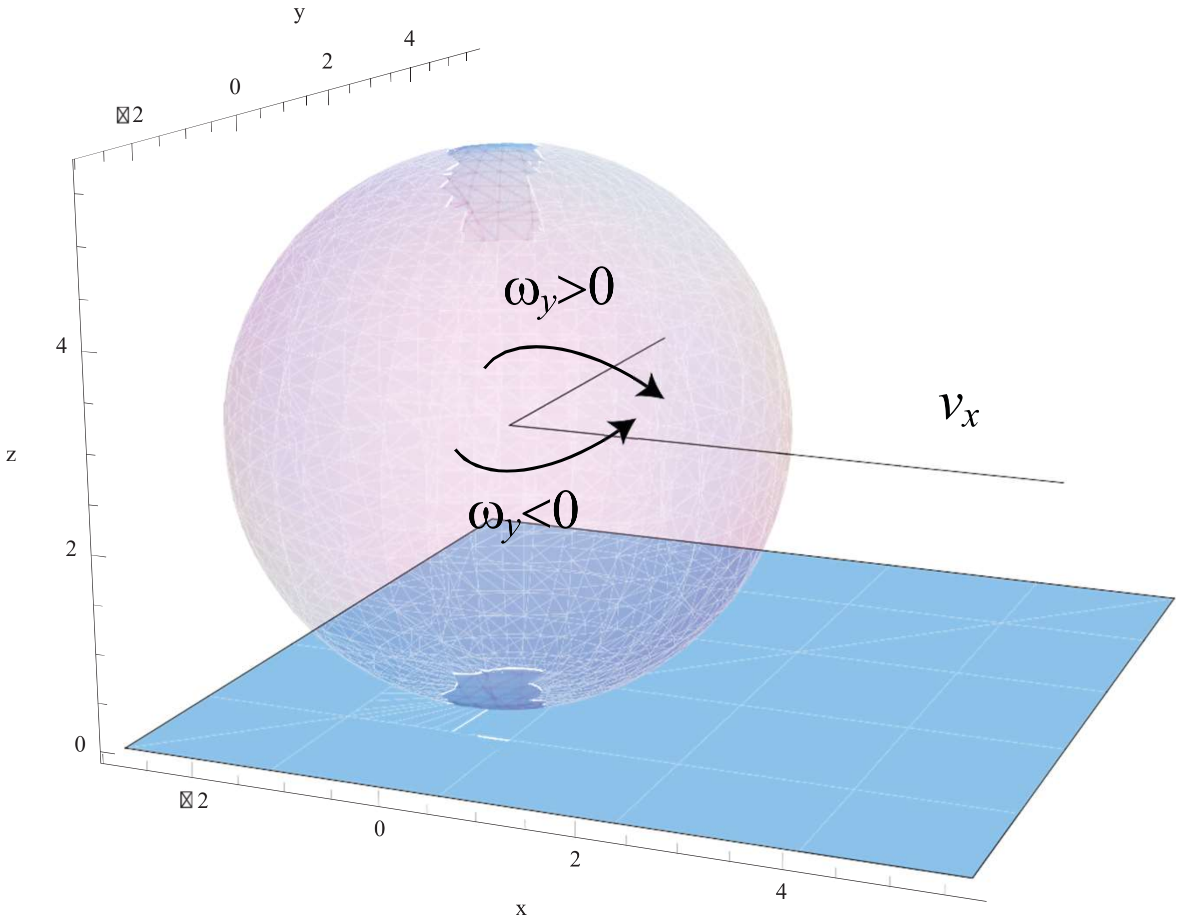
$$\vec{\Omega}_C(t) = \left(0, \Omega_y(t), 0\right)^T$$

(aucune rotation autour de l'axe des *x* et des *z*).

- Les conditions initiales sont:

$$\vec{r}_C(t_0), \vec{v}_C(t_0), \vec{\omega}_C(t_0), \text{et } \vec{\Omega}_C(t_0)$$

Roulement etglissement



Roulement etglissement

- Les équations du mouvement à résoudre sont

$$\vec{a}_c = d\vec{v}_c(t)/dt$$

$$\vec{v}_c(t) = d\vec{r}_c(t)/dt$$

$$\vec{\alpha} = d\vec{\omega}_c(t)/dt$$

$$\vec{\omega}_c = d\vec{\Omega}_{p,c}(t)/dt$$

avec (pour une sphère le terme provenant de $d\mathbf{I}/dt = 0$)

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_c}{m}$$

$$\vec{\alpha}_c = (\mathbf{I})^{-1}\vec{\tau}_c$$

Roulement et glissement

Transition glissement-roulement à roulement uniquement

Trois options sont possibles:

- $|\vec{v}_c(t_r)| = 0$, la vitesse du centre de masse de la boule résultant de son déplacement linéaire est nulle. La boule commence à accélérer dans la direction opposée, car elle glisse toujours sur la surface (glissement dû à son mouvement de rotation).

- $|\vec{v}_r(t_r)| = 0$, la vitesse de rotation de la boule est nulle. La boule commence à tourner dans la direction opposée, car elle glisse toujours sur la surface (glissement dû à son mouvement de translation).

- $|\vec{v}_c(t_r) - \vec{v}_r(t_r)| = 0$, la vitesse relative entre la boule et le plan est nulle. À ce moment, la boule commence à rouler sans glisser. La vitesse du déplacement de son centre de masse est alors donnée par $\vec{v}_r(t_r)$. Seul le frottement de roulement subsiste.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Conclusion

Dans le prochain chapitre, nous étudierons la dynamique des collisions incluant

1. Dynamique des collisions
2. Méthode des forces
3. Méthode des conditions initiales
4. Détection des collisions