

Résolution numérique des équations du mouvement

Une fusée de vitesse initiale $v_z(0) = 0$ m/s lancée de la surface de la Terre ($z(0) = 0$ m) subit une force gravitationnelle $F_g(z, t)$ ayant la forme

$$F_g(z, t) = -9.8 \frac{m(t)}{(1 + 1.5 \times 10^{-7} z(t))^2}$$

où z est la position de la fusée par rapport au sol et $m(t)$ la masse de la fusée en fonction du temps donnée par la relation

$$m(t) = m_0 - kt$$

car la fusée de masse initiale $m_0 = 1250$ kg éjecte des gaz de combustion à un rythme de $k = 50$ kg/s. La force $F_e(t)$ que ces gaz exercent sur la fusée est donnée par

$$F_e(t) = ku$$

car ils sont éjectés avec une vitesse relative constante $u = 600$ m/s.

- (a) Quelles sont les équations du mouvement (en 1D) qui doivent être résolues afin de déterminer la vitesse $v_z(t)$ et la position $z(t)$ de la fusée en tout temps?
- (b) En utilisant la méthode de Euler avec un pas de temps $\Delta t = 1.0$ s, déterminer la vitesse et la position de la fusée à $t = 2.0$ s.

Solution

- (a) *Quelles sont les équations du mouvement (en 1D) qui doivent être résolues afin de déterminer la vitesse $v_z(t)$ et la position $z(t)$ de la fusée en tout temps?*

Les équations du mouvement sont données par

$$\begin{aligned}\frac{dv_z(t)}{dt} &= a_z(z(t), t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= v_z(t)\end{aligned}$$

avec

$$a_z(z(t), t) = \frac{1}{m(t)} (F_g(z(t), t) + F_e(t)) = \frac{ku}{m_0 - kt} - 9.8 \frac{1}{(1 + 1.5 \times 10^{-7} z(t))^2}$$

- (b) *En utilisant la méthode de Euler avec un pas de temps $\Delta t = 1.0$ s, déterminer la vitesse et la position de la fusée à $t = 2.0$ s.*

La solution de ce problème par la méthode de Euler est

$$\begin{aligned}v_z(t + \Delta t) &= v_z(t) + a_z(z(t), t) \Delta t \\ z(t + \Delta t) &= z(t) + v_z(t) \Delta t\end{aligned}$$

Ici, si on utilise un pas de temps $\Delta t = 1.0$ s, on doit appliquer la méthode de Euler deux fois pour obtenir la solution à $t = 2.0$ s. En utilisant

$$\begin{aligned}z(0) &= 0 \text{ m} \\ v_z(0) &= 0 \text{ m/s} \\ a_z(z(0), 0) &= \frac{ku}{m_0} - 9.8 = 24 - 9.8 = 14.2 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}v_z(1) &= 14.2 \text{ m/s} \\ z(1) &= 0 \text{ m}\end{aligned}$$

et en utilisant

$$a_z(z(1), 1) = \frac{ku}{m_0 - k} - 9.8 = 25 - 9.8 = 15.2 \text{ m/s}^2$$

on obtient

$$v_z(2) = v_z(1) + a_z(1)\Delta t = 29.4 \text{ m/s}$$

$$z(2) = z(1) + v_z(1)\Delta t = 14.2 \text{ m}$$