

## Question révision

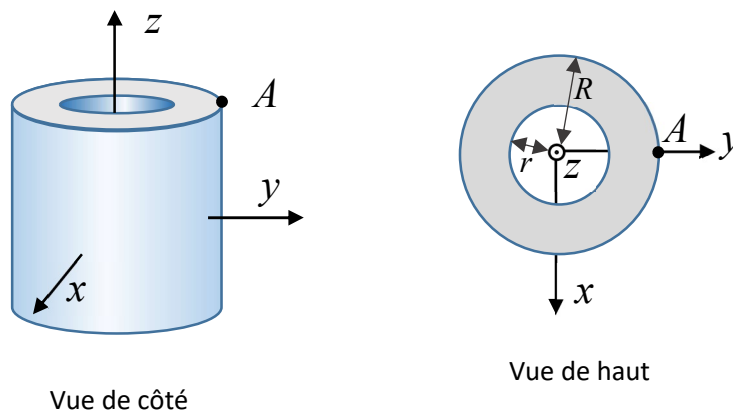
### Question 1.

Soit la pièce cylindrique représentée sur la figure ci-dessous. L'origine du système d'axes coïncide avec le centre de masse de la pièce. Le point  $A$  de coordonnées :  $A(0, 10, 10)$  est situé sur son arête supérieure.

On donne pour la pièce :

- Masse volumique :  $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$
- Hauteur  $h = 20 \text{ cm}$
- Rayon interne :  $r = 5 \text{ cm}$
- Rayon externe  $R = 10 \text{ cm}$ .

- Déterminer la matrice moment d'inertie  $\mathbf{I}_C$  de la pièce par rapport à son centre de masse.
- On fait subir à la pièce une rotation autour de son centre de masse de façon à ce que le point  $A$  se retrouve sur l'axe  $oz$ . Déterminer la matrice  $\mathbf{R}$  de cette rotation.
- Déterminer le moment d'inertie de la pièce après avoir subi la rotation.



*Solution :*

- Déterminer la matrice moment d'inertie  $\mathbf{I}_C$  de la pièce par rapport à son centre de masse.  
La pièce peut être vue comme un cylindre plein de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  auquel on enlève un cylindre plein de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . La matrice moment d'inertie est donc :

$$\mathbf{I}_c = m_R \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} - m_r \begin{pmatrix} \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}$$

avec  $m_R = \rho(\pi R^2 h) = 4\pi \text{ kg}$  et  $m_r = \rho(\pi r^2 h) = \pi \text{ kg}$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_c = \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06086 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05890 \end{pmatrix}$$

- b) On fait subir à la pièce une rotation autour de son centre de masse de façon à ce que le point  $A$  se retrouve sur l'axe  $oz$ . Déterminer la matrice  $\mathbf{R}$  de cette rotation.

Pour ramener le point  $A$  sur l'axe  $oz$  il faut lui subir une rotation autour de l'axe  $ox$  d'un angle  $\theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_z}\right) = \pi/4$ .

La matrice de rotation est donc :

$$\Rightarrow \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

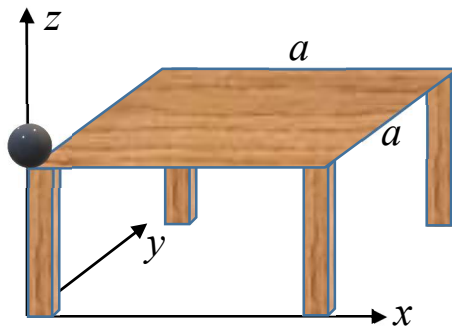
- c) Déterminer le moment d'inertie  $\mathbf{M}'$  de la pièce après avoir subi la rotation.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \mathbf{R} \mathbf{M} \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06086 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05890 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04303 & 0.04303 \\ 0 & -0.04165 & 0.04165 \end{pmatrix} \\ \mathbf{M}' &= \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05988 & 0.000976 \\ 0 & 0.000976 & 0.05988 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Question 2 :

Une boule pleine de rayon  $R = 0.1$  m roule sans glisser sur la surface horizontale d'une table de hauteur  $z_{table} = 1.0$  m jusqu'à ce qu'elle franchisse un bord et tombe au sol. À l'instant initial  $t = 0$ , la boule se trouve sur un coin de la table à la position  $\vec{r}_{c,0} = (0.0, 0.0, 1.1)^T$  m/s (voir figure ci-dessous) et sa vitesse linéaire est  $\vec{v}_{c,0} = (1.0, 2.0, 0.0)^T$  m/s. Cette vitesse demeure constante tant que la boule roule sur la table. On négligera tout frottement. La surface de la table est de forme carrée de côté  $a = 1.5$  m.

- Déterminer le vecteur vitesse angulaire de la boule lorsque celle-ci roule sans glisser sur la surface de la table.
- Déterminer le vecteur position  $\vec{r}_{c,1}$  de la boule à l'instant où elle quitte la surface de la table.
- Déterminer l'instant  $t_1$  où le module de la vitesse de la boule atteint la valeur de  $v_1 = 3$  m/s. L'accélération gravitationnelle est donnée par :  $\vec{g} = (0, 0, -9.8)^T$  m/s<sup>2</sup>.



*Solution :*

- Déterminer le vecteur vitesse angulaire de la boule lorsque celle-ci roule sans glisser sur la surface de la table.

*La condition de roulement sans glissement appliquée au cas présent s'écrit:*

$$\vec{v}_{c,0} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{c,p}$$

$$\text{avec } \vec{r}_{c,p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$$

$$\text{Si on pose } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \text{ alors: } \vec{v}_{c,0} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\omega_y \\ -R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{-v_y}{R} \\ \frac{v_x}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (rad/s)}$$

On a posé  $\omega_z = 0$  car on sait que la boule ne tourne pas autour d'un axe vertical.

b) Déterminer le vecteur position  $\vec{r}_{c,1}$  de la boule à l'instant où elle quitte la surface de la table.

La boule intercepte le plan  $x = a$  à l'instant  $t_x = \frac{a}{v_x} = \frac{1.5}{1} = 1.5 \text{ s}$  et le plan  $x = a$  à l'instant  $t_y = \frac{a}{v_y} = \frac{1.5}{2} = 0.75 \text{ s}$ . Comme  $t_y < t_x$ , alors elle quitte la table par le bord parallèle à l'axe  $ox$  à l'instant  $t_y$ .

Sa position est :

$$\vec{r}_{c,1} = \vec{r}_{c,0} + t_y \cdot \vec{v}_{c,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.1 \end{pmatrix} + 0.75 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.5 \\ 1.1 \end{pmatrix} \text{ (m)}$$

c) Déterminer l'instant  $t_1$  où le module de la vitesse de la boule atteint la valeur de  $v_1 = 3 \text{ m/s}$ .

À partir de l'instant  $t_y$ , la position de la boule devient :

$$\vec{v}_c(t) = \vec{v}_{c,0} + \vec{g}(t - t_y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{pmatrix} (t - 0.75) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9.8(t - 0.75) \end{pmatrix}$$

L'instant  $t_1$  correspond à :  $\sqrt{1^2 + 2^2 + [-9.8(t_1 - 0.75)]^2} = 3$

$$\Rightarrow (t_1 - 0.75) = \pm 0.2041 \text{ s}$$

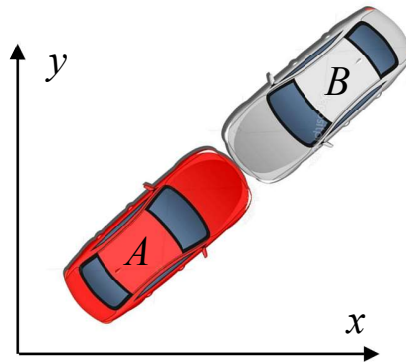
$$\Rightarrow t_1 = 0.9541 \text{ s}$$

Ici seule la valeur maximale est acceptée car l'autre valeur est inférieure à  $t_y$ .

### Question 3.

Une collision frontale survient entre deux voitures identiques  $A$  et  $B$ , de mêmes masses  $m_A = m_B = 2500$  kg. Juste avant la collision, la vitesse de la voiture  $A$  est  $\vec{v}_A = (25.0, 30.0, 0.0)^T$  m/s et celle de la voiture  $B$  est  $\vec{v}_B = (-20.0, -24.0, 0.0)^T$  m/s.

- (a) Quelle est la vitesse relative de la voiture  $A$  par rapport à la voiture  $B$  juste avant l'impact.
- (b) Déterminer la normale  $\hat{n}$  entrante vers  $A$  aux surfaces de contacts entre les deux voitures.
- (c) Déterminer les vitesses des deux voitures  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  juste après l'impact sachant que coefficient de restitution de la collision est  $\epsilon = 0.2$ . On néglige tout frottement lors de la collision.



**Solution :**

- a) Quelle est la vitesse relative de la voiture  $A$  par rapport à la voiture  $B$  juste avant l'impact.  
La vitesse relative de  $B$  par rapport à  $A$  avant le choc est :

$$\vec{v}_r^- = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 54 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

- b) Déterminer la normale  $\hat{n}$  entrante vers  $A$  aux surfaces de contacts entre les deux voitures.  
Comme le choc est frontal alors  $\hat{n}$  doit être dans la direction parallèle aux vitesses de deux voitures dans le sens de  $\vec{v}_B$ .

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}_B}{|\vec{v}_B|} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) Déterminer les vitesses des deux voitures juste après l'impact sachant que coefficient de restitution de la collision est  $\epsilon = 0.2$ . On néglige tout frottement lors de la collision.

$$\vec{v}'_A = \vec{v}_A + \frac{j\hat{n}}{m_A}$$

$$\vec{v}'_B = \vec{v}_B - \frac{j\hat{n}}{m_B}$$

où  $j = -\alpha(1 + \epsilon)v_r^-$  avec  $v_r^- = \hat{n} \cdot \vec{v}_r^- = -70.29 \text{ m/s}$ .

$$\alpha = \left( \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \right)^{-1}$$

$$\alpha = \left( \frac{1}{2500} + \frac{1}{2500} \right)^{-1} = 1250$$

$$\Rightarrow j = -\alpha(1 + \epsilon)v_r^- = -1250(1 + 0.2)(-70.29) = 105435 \text{ kg m/s}$$

$$\vec{v}'_A = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{105435}{2500 \times \sqrt{61}} \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2.4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}'_B = \begin{pmatrix} -20 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{105435}{2500 \times \sqrt{61}} \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8.4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

**Question 4.**

Un train se déplace à une vitesse de  $v = 50$  m/s sur une voie ferrée rectiligne. On place un microphone sur la voie. Si le train émet un son de fréquence  $f_0 = 1$  kHz, quelle est la fréquence  $f_r$  perçue par le microphone lorsque le train se rapproche de lui. La vitesse du son est  $c = 340$  m/s.

***Solution :***

La fréquence perçue par le microphone est donnée par :

$$f_r = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_s} f_0$$

avec  $\beta_r = 0$  car la vitesse du microphone est nulle et  $\beta_s = \frac{v}{c}$

Lorsque le train s'approche du microphone :

$$f_r = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} f_0 = 1172 \text{ Hz}$$