Roulement et glissement de boule

Une boule, de rayon $R = 5$ cm et de masse de $m = 100$ g, se déplace sur la surface d'une table de billard avec une vitesse linéaire (centre de masse) $\vec{v}_c(t_0) = (60, 0, 0)^T$ cm/s et une vitesse angulaire autour de son centre de masse $\vec{\omega}(t_0) = (0, 5, 0)^T$ rad/s.

Les équations contrôlant $v_{x,c}(t)$, la vitesse en x du centre de masse de cette boule (vitesses $v_{y,c}(t) = v_{z,c}(t) = 0$) ainsi que $\omega_y(t)$ sa vitesse angulaire en y autour du centre de masse ($\omega_x(t) = \omega_z(t) = 0$) sont :

- si la boule glisse sur la table

$$\frac{d\omega_y(t)}{dt} = \frac{5g\mu_g}{2R} \quad \text{et} \quad \frac{dv_{x,c}(t)}{dt} = -\mu_g g \;;$$

- si la boule roule sur la table

$$\frac{d\omega_y(t)}{dt} = -\frac{5g\mu_r}{2R} \quad \text{et} \quad v_{x,c}(t) = \omega_y(t)R \;.$$

Ici $\mu_g = 0.1$ est le coefficient de frottement cinétique au glissement entre la boule et la surface du billard et $\mu_r = 0.01$ le coefficient de frottement au roulement.

(a) Déterminer si la boule glisse ou roule sur la table au temps $t = t_0$.

(b) Résoudre ces équations du mouvement pour $v_{x,c}(t)$ et $\omega_y(t)$ en utilisant la méthode d'Euler pour deux intervalles successifs de temps $\Delta t = 0.1$ s (temps $t = t_0 + \Delta t$ et $t = t_0 + 2\Delta t$). Ici, il faut utiliser $g = 10$ m/s^2 pour simplifier les calculs.

Solution

(a) Déterminer si la boule glisse ou roule sur la table au temps $t = t_0$.

La balle roulera sur la table si sa vitesse de déplacement due au roulement est identique à la vitesse de son centre de masse. La vitesse de déplacement due au roulement étant donnée par

$$\vec{v}_{c,r} = -\vec{\omega}(t_0) \times \vec{r}_{t,c} = (25 \text{ cm/s}, 0, 0)^T$$

avec $\vec{r}_{t,c} = (0, 0, -R)^T$ la position du point de contact entre la table et la balle et le centre de masse de la balle. Donc la balle glisse sur la table, car

$$|\vec{v}_c(t_0) - \vec{v}_{c,r}(t_0| \neq 0$$

(b) Résoudre ces équations du mouvement pour $v_{x,c}(t)$ et $\omega_y(t)$ en utilisant la méthode d'Euler pour deux intervalles successifs de temps $\Delta t = 0.1$ s (temps $t = t_0 + \Delta t$ et $t = t_0 + 2\Delta t$). Ici, il faut utiliser $g = 10$ m/s^2 pour simplifier les calculs.

Pour le premier intervalle de temps, on sait que la boule roule. On utilisera dons les équations 2.1 pour déterminer la vitesse angulaire et la vitesse du centre de masse de la boule à $t = t_0 + 0.1$ s. On aura donc

$$\omega_y(t_0 + \Delta t) = \omega_y(t_0) + 5 = 10 \text{ rad/s}$$
$$v_{x,c}(t_0 + \Delta t) = v_{x,c}(t_0) - 0.10 = 0.5 \text{ m/s} = 50 \text{ cm/s}$$

Avant de résoudre le problème pour le second intervalle de temps, il faut déterminer si la balle roule ou glisse. En utilisant le résultat pour $\omega_y(t_0 + \Delta t)$, on voit que la vitesse que le centre de masse aurait si la balle roulait est

$$\vec{v}_{c,r}(t_0 + \Delta t) = -\vec{\omega}(t_0 + \Delta t) \times \vec{r}_{t,c} = (50 \text{ cm/s}, 0, 0)^T$$

qui est identique à $\vec{v}_c(t_0 + \Delta t)$. On peut donc conclure qu'à $t_0 + \Delta t$ la boule s'est mise à glisser. Pour obtenir la vitesse angulaire et la vitesse du centre de masse de la boule à $t = t_0 + 0.2$ s nous utiliserons alors l'équation 2.2:

$$\omega_y(t_0 + 2\Delta t) = \omega_y(t_0 + \Delta t) - \frac{5g\mu_r}{2R} = 9.5 \text{ rad/s}$$

pour une vitesse du centre de masse de $v_c(t_0 + 2\Delta t) = 47.5$ cm/s