Collision d’une boule et d’un cube

Une boule de masse m_b=100 g et de diamètre d=10 cm se déplaçant avec une vitesse constante $\vec{v}_b = (0.2, 0.2, 0)^T$ m/s (vitesse du centre de masse) entre en collision avec un cube d’arête $a =$ 10 cm de masse m_c=100 g se déplaçant à une vitesse constante $\vec{v}_c = (0.1, 0.1, 0)^T$ m/s (vitesse du centre de masse). La position du centre de masse de la boule lors du contact est $\vec{r}_b = (0.95, 0, 1)^T$ m et celle du centre de masse du cube est $\vec{r}_c = (1.05, 0, 1)^T$ m. Au moment où la collision se produit, les axes du cube sont alignés avec les axes x, y et z la vitesse angulaire du cube est $\vec{\omega}_c = (0, 1, 0)^T$ rad/s.

(a) Déterminer la position $\vec{r}_p$ du point de contact entre la boule et le cube et la normale entrante $\vec{n}$ à la boule à ce point.

(b) Déterminer la vitesse du point de contact $\vec{r}_p$ pour la boule ($\vec{v}_{p,b}(t_i)$) et le cube ($\vec{v}_{p,c}(t_i)$) au moment de la collision.

(c) En supposant que le coefficient de restitution pour la collision est $\epsilon = 1$, et que la collision est sans frottement, déterminer la vitesse linéaire du point de contact localisé sur le cube $\vec{v}_{p,c}\left(t_f\right)$ après la collision.

Solution :

(a) Déterminer la position $\vec{r}_p$ du point de contact entre la boule et le cube et la normale entrante $\vec{n}$ à la boule à ce point.

En examinant la position du centre de masse de la boule et du cube, on réalise immédiatement que la collision prend place avec la face du bloc perpendiculaire avec l'axe des x au point $x = 1$ m. Comme le centre de masse de la boule en y et z est le même que celui du cube, le point d'intersection est $y = 0$ et $z = 1$. La position du point $\vec{r}_p$ est donc

$$\vec{r}_p = (1, 0, 1)^T m$$

La normale entrante à la boule est dans la direction $-x$ et

$$\vec{n} = (-1, 0, 0)^T$$

(b) Déterminer la vitesse du point de contact $\vec{r}_p$ pour la boule ($\vec{v}_{p,b}(t_i)$) et le cube ($\vec{v}_{p,c}(t_i)$) au moment de la collision.

Comme la vitesse angulaire de la boule est nulle, la vitesse d'un point sur la boule est la même que la vitesse du centre de masse de la boule et $\vec{v}_{p,b}(t_i) = \vec{v}_b(t_i) = (0.2, 0.2, 0)^T$. Pour le cube, il faut prendre en compte la vitesse de rotation angulaire du cube et

$$\vec{v}_{p,c}(t_i) = \vec{v}_c + \vec{\omega}_c \times \vec{r}_{p,c}$$

où $\vec{r}_{p,c} = \vec{r}_p - \vec{r}_c = (-0.05, 0, 0)^T$ m. En utilisant les données, on obtient

$$\vec{v}_{p,c}(t_i) = (0.1, 0.1, 0.05)^T m/s$$

(c) En supposant que le coefficient de restitution pour la collision est $\epsilon = 1$, et que la collision est sans frottement, déterminer la vitesse linéaire du point de contact localisé sur le cube $\vec{v}_{p,c}(t_f)$ après la collision.

La vitesse linéaire du point de contact sur le cube après la collision est donnée par

$$\vec{v}_{p,c}(t_f) = \vec{v}_c(t_i) - \frac{j}{m_c}\hat{n} + \left(\vec{\omega}_c - j\left(I_c^{-1}(\vec{r}_{p,c} \times \vec{n})\right)\right) \times \vec{r}_{p,c}$$

avec $\vec{r}_{p,b}$ donné plus haut et $j = -\alpha(1 + \epsilon)v_{r,-}$ où

$$v_{r,-} = \vec{n} \cdot (\vec{v}_{p,b} - \vec{v}_{p,c}) = -0.1\ m/s$$

$$\alpha = \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} + G_b + G_c$$

$$G_b = \vec{n} \cdot \left(I_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \vec{n})\right) \times \vec{r}_{b,p}$$

$$G_c = \vec{n} \cdot \left(I_c^{-1}(\vec{r}_{c,p} \times \vec{n}) \right) \times \vec{r}_{c,p}$$

Comme $\vec{r}_{p,b}$, $\vec{r}_{p,c}$ *et* $\vec{n}$ *sont parallèles,* $G_b = G_c = 0$ *et on peut simplifier l'équation pour* $\vec{v}_{b,c}(t_f)$ *à la forme suivante*

$$\vec{v}_{p,c}(t_f) = \vec{v}_c(t_i) - \frac{j}{m_c}\hat{n} + \vec{\omega}_c \times \vec{r}_{p,c}$$

avec

$$\alpha = \left(\frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}\right)^{-1}$$

on obtient alors $\alpha = 0.05$ *kg et* $j = 0.01\ \ kg \times \frac{m}{s}$. *Finalement*

$$\vec{v}_{p,c}(t_f) = (0.02, 0.1, 0.05)\ m/s$$