POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 2 — Dynamique des solides

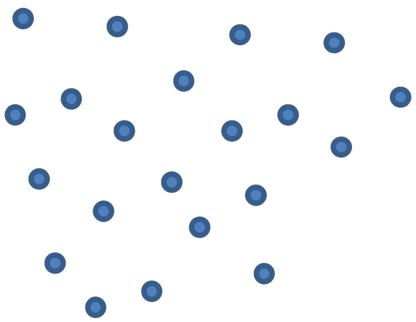
D. Seddaoui

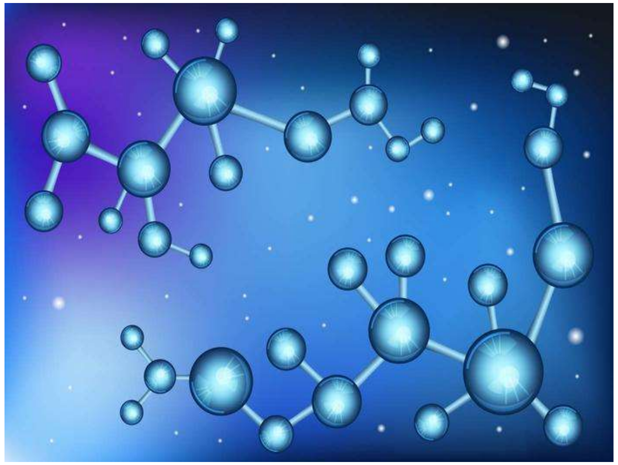
2021-09-06

Table des matières

Objets ponctuels et étendus

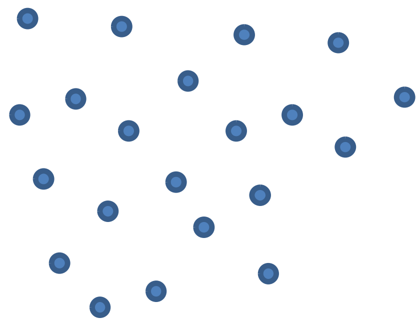
Objets ponctuels





Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels



Les objets ponctuels :

masse concentrée en un point,
dimensions considérées infinitésimales.

À l'échelle macroscopique ==> Les lois de la mécanique newtonienne (classique)

À l'échelle microscopique ==> Les lois de la mécanique quantique.

Objets ponctuels et étendus

Un objet ponctuel p est caractérisé par :

sa masse m_p, sa charge électrique e_p et toute autre propriété intrinsèque qui lui est associée ;

sa position

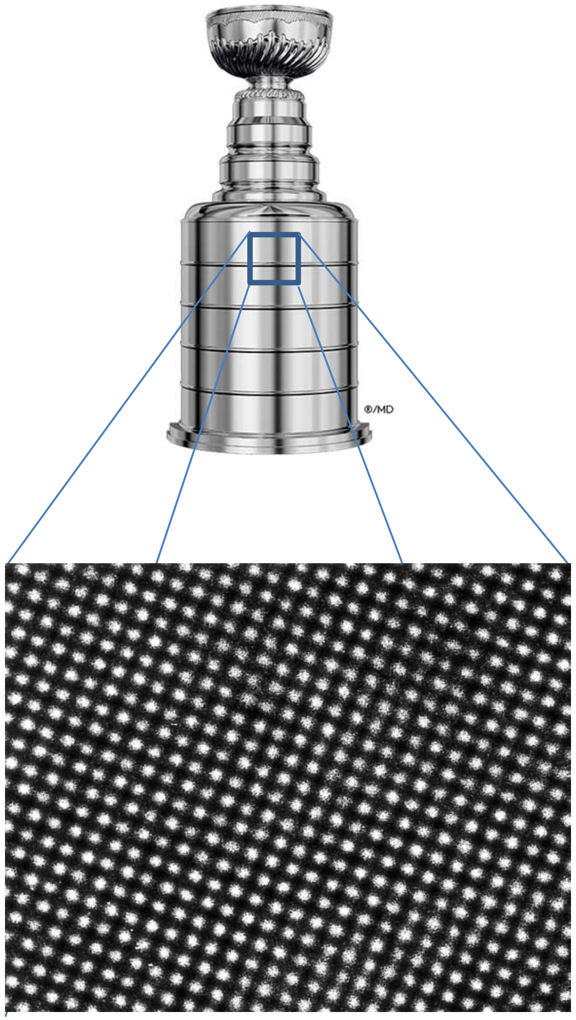
$$\vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} = (x_p(t), y_p(t), z_p(t))^T$$

sa vitesse de déplacement

$$\vec{v}_p(t) = \begin{pmatrix} v_{p,x}(t) \\ v_{p,y}(t) \\ v_{p,z}(t) \end{pmatrix} = (v_{p,x}(t), v_{p,y}(t), v_{p,z}(t))^T$$

Objets ponctuels et étendus

Objets étendus



Objets ponctuels et étendus

Les objets solides (étendus)

Une extension finie dans l'espace (solides de volume V).

Ils sont composés d'un grand nombre de particules élémentaires ($> 10^{20}$) soudées entre elles par des forces qui s'exercent au niveau microscopique.

Ces forces donnent une certaine rigidité à l'objet de telle sorte que l'application d'une force extérieure à n'importe quel point de l'objet produit un effet qui se transmet immédiatement à l'ensemble de l'objet.

Objets ponctuels et étendus

Un objet solide correspond à :

- Une distribution de masse volumique $\rho(\vec{r})$ (en kg/m^3) en tout point de l'espace ;
- une région de l'espace $\mathcal{V}(t)$ qu'ils occupent ;

Le déplacement de l'objet est relié au taux de changement de $\mathcal{V}(t)$ par rapport au temps ($d\,\mathcal{V}(t)/d\,t$).

Le volume V (m^3) et la masse m (kg) d'un solide sont donnés par

$$V = \int_{\mathcal{V}(t)} d^3 r = \int_{\mathcal{V}} dx\,dy\,dz$$

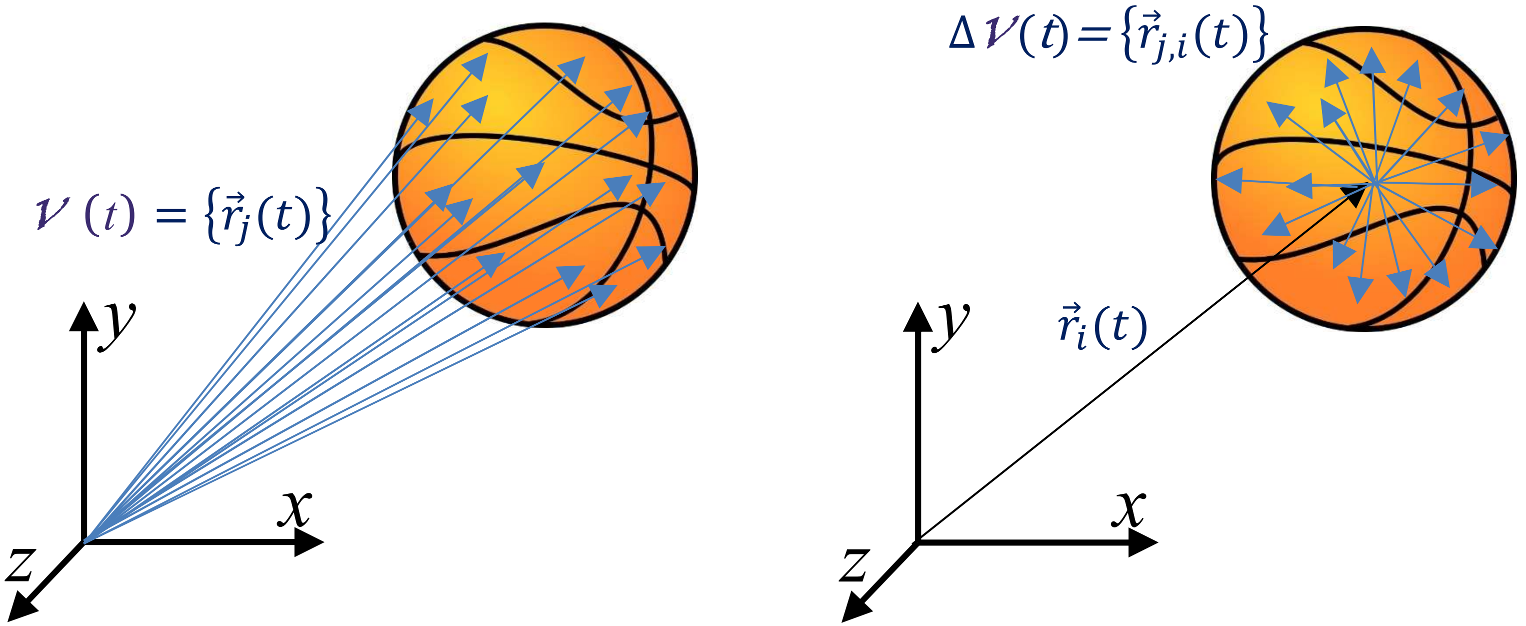
$$m = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\vec{r})\,d^3 r = \int_{\mathcal{V}} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

et sont indépendants du temps.

Objets ponctuels et étendus

On caractérise $\mathcal{V}(t)$ de la façon suivante.

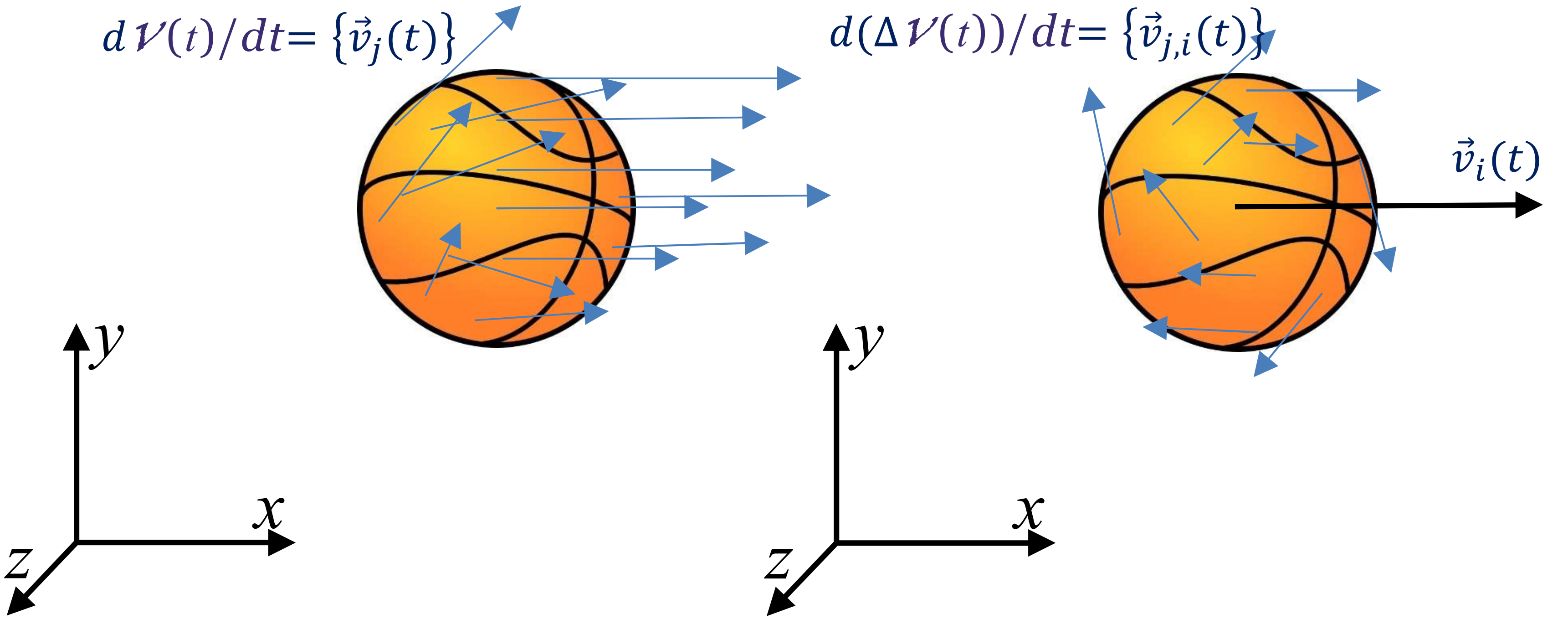
- On détermine la position $\vec{r}_i(t)$ d'un point i du solide
- L'ensemble infini de points $\Delta\mathcal{V}(t) = \{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\} = \{\vec{r}_{j,i}(t)\}$ représente la position de tous les points du solide par rapport à la position de i .



Objets ponctuels et étendus

On caractérise $d\,\mathcal{V}(t)/d\,t$ de la façon suivante.

- On détermine la vitesse $\vec{v}_i\,(t)$ d'un point *i* du solide
- L'ensemble $d\Delta\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_j(t) - \vec{v}_i(t)\} = \{\vec{v}_{j,i}(t)\}$ représente la vitesse relative de tous les points du solide par rapport à *i* .

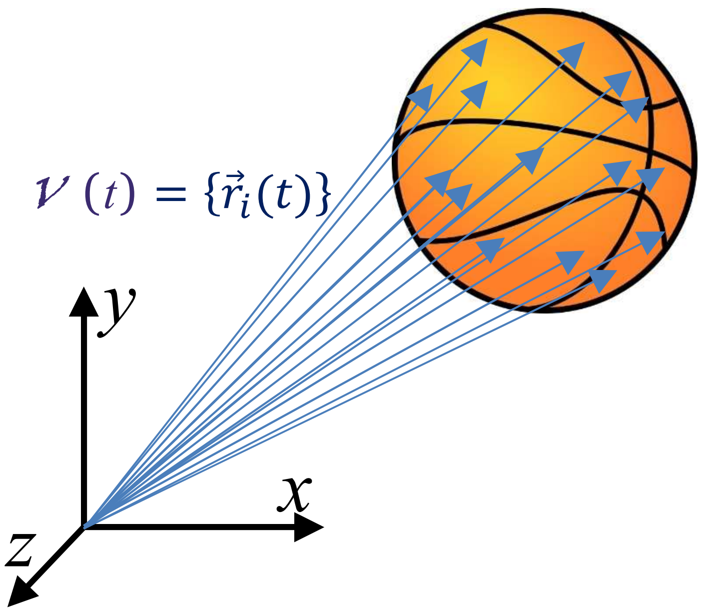


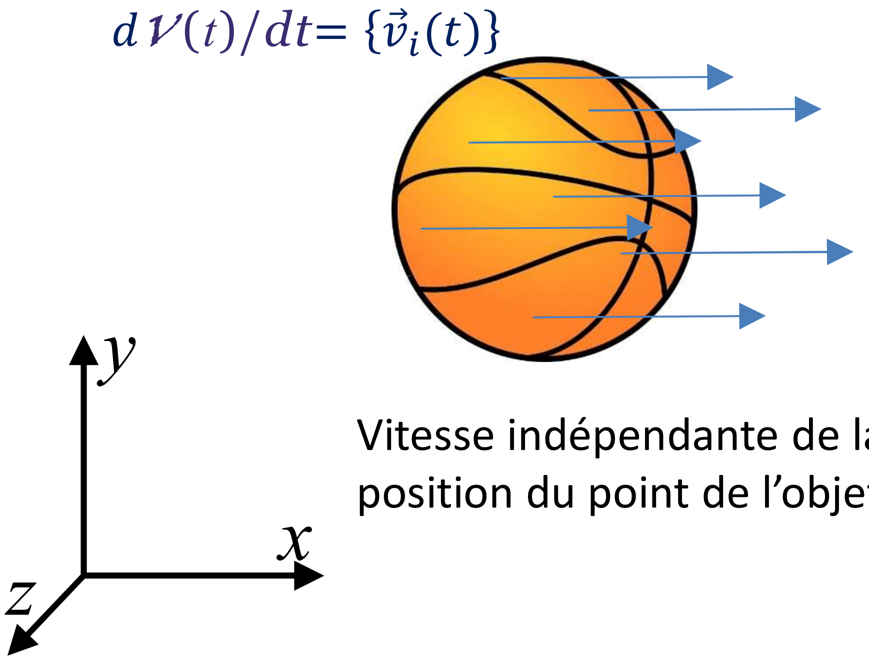
Objets ponctuels et étendus

Quelques observations:

Si un objet se déplace à une vitesse $\vec{v}(t)$ **sans mouvement de rotation** alors:

$\mathcal{V}(t)$ varie dans le temps => $d\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_i(t)\} \neq 0$





Vitesse indépendante de la position du point de l'objet.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

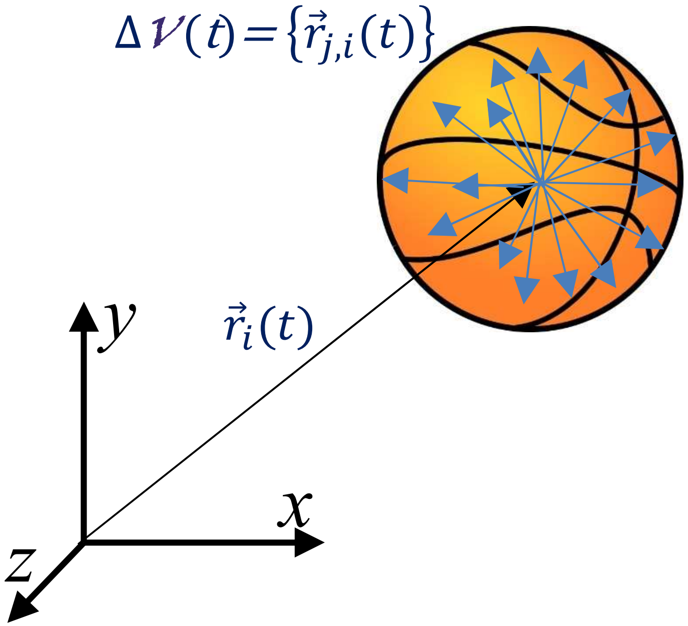
Objets ponctuels et étendus

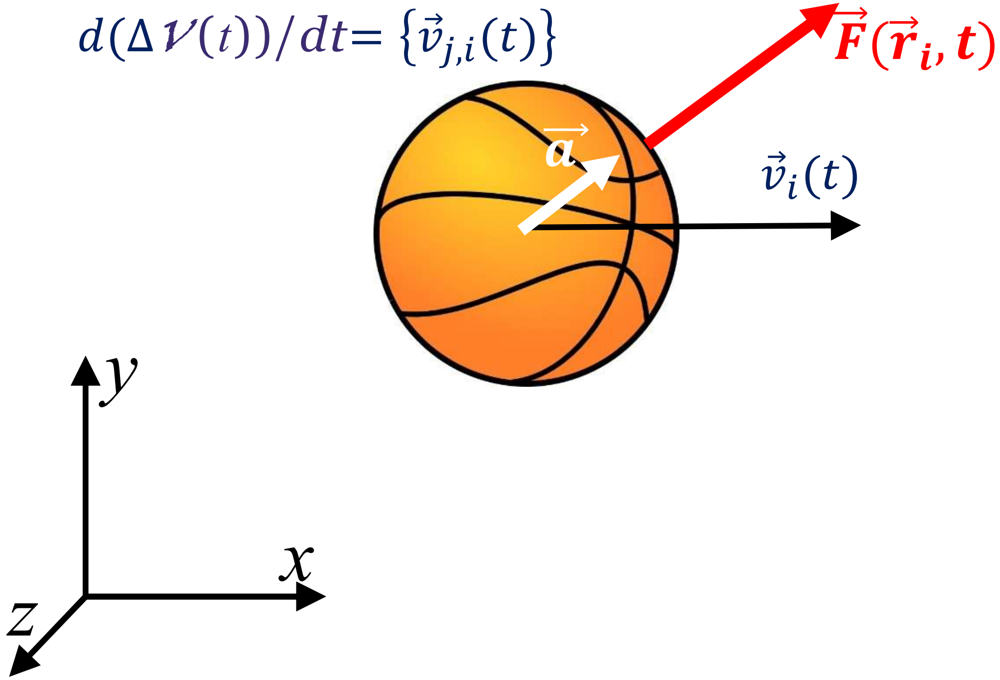
Quelques observations:

Si un objet se déplace à une vitesse $\vec{v}(t)$ **sans mouvement de rotation** alors:

$\mathcal{V}(t)$ varie dans le temps => $d\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_i(t)\} \neq 0$

Par contre: $\Delta\mathcal{V}(t)$ reste constant => $d(\Delta\mathcal{V}(t))/dt = \{\vec{v}_{j,i}(t)\} = 0$





Objets ponctuels et étendus

Donc, si le solide ne subit pas de rotation on peut simplifier notre description en utilisant :

$\Delta\mathcal{V}(t) = \{\vec{r}_{j,i}(t)\} = \{\vec{r}_{j,i}(t_0)\} = \Delta\mathcal{V}(t_0)$ la position relative de tous les points du solide est indépendante du temps (temps initial t_0).

$d\Delta\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_{j,i}(t)\} = 0$ la vitesse relative entre les points du solide est nulle.

Alors la position $\vec{r}_s(t)$ et la vitesse $\vec{v}_s(t)$ d'un point arbitraire du solide ainsi que $\Delta\mathcal{V}(t_0)$ sont suffisantes pour suivre complètement le solide dans l'espace et le temps.

Objets ponctuels et étendus

La question qui se pose alors est :

Quel point de l'objet est-il préférable de suivre ?

Réponse: Le centre de masse $\vec{r}_c(t)$ (en général)

Centre de masse est inscensible au mouvement de rotation, le centre de masse tient slm en compte la translation

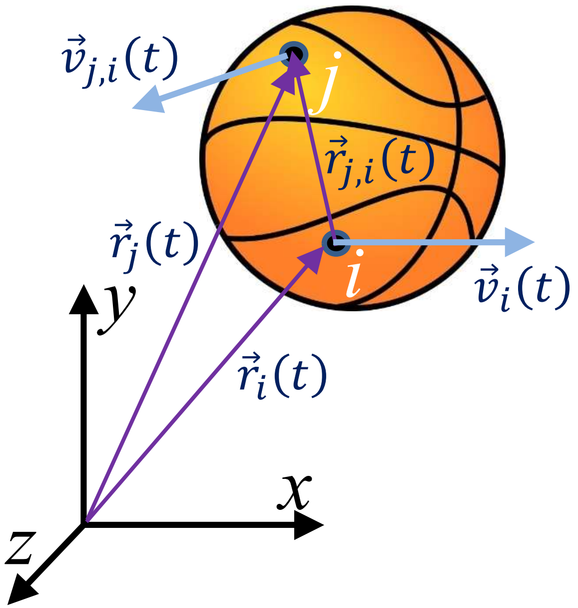
Objets ponctuels et étendus

vitesse angulaire -> un objet a slm une vitesse angulaire, une vitesse à laquelle l'objet tourne sur lui-même

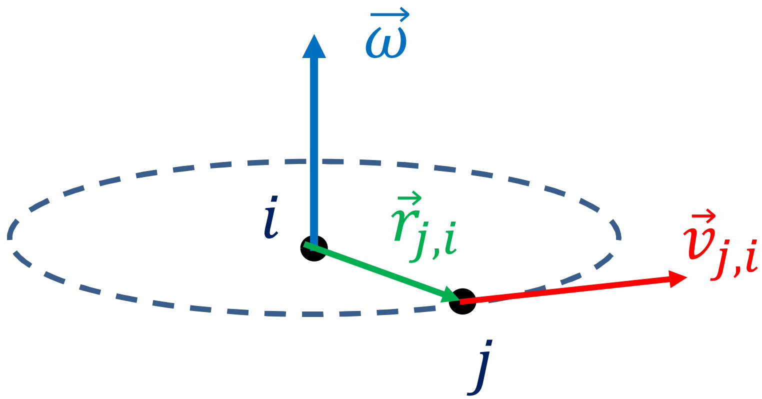
Pour un objet en rotation (vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ en rad/s) autour du point i qui se déplace à une vitesse (linéaire) $\vec{v}_i(t)$.

$\Delta\mathcal{V}(t)$ garde la même forme mais subi une rotation.

Vitesse de rotation -> Vitesse linéaire , vitesse de rotation de j par rapport à i, vitesse de rotation d'un objet sur lui-même en (m/s)



Dans le référentiel de i



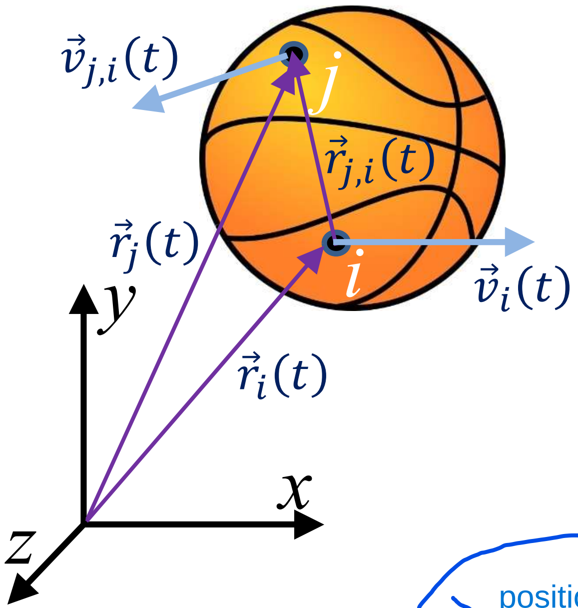
$$\vec{v}_{j,i}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)$$

Objets ponctuels et étendus

Pour un objet en rotation (vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ en rad/s) autour du point i qui se déplace à une vitesse (linéaire) $\vec{v}_i(t)$.

$\Delta \mathcal{V}(t)$ garde la même forme mais subi une rotation.

$$\vec{v}_{j,i}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)$$



$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{j,i}(t)$$

$$\vec{v}_j(t) = \vec{v}_i(t) + \vec{v}_{j,i}(t)$$

$$\vec{v}_j(t) = \vec{v}_i(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)$$

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \boldsymbol{R}(t, t_0)\ \vec{r}_{j,i}(t_0)$$

position relative de j par rapport à i

Objets ponctuels et étendus

Pour un solide en rotation:

- La position de tous les points du système est dépendante du temps et reliée à sa position initiale $\vec{r}_{j,i}(t_0)$ par une matrice de rotation $\boldsymbol{R}(t, t_0) = \boldsymbol{R}(t)$ unique :

$$\Delta\mathcal{V}(t)=\{\vec{r}_{j,i}(t)\} = \{\boldsymbol{R}(t,t_0)\ \vec{r}_{j,i}(t_0)\}= \{\boldsymbol{R}(t)\ \vec{r}_{j,i}(t_0)\}$$

- La vitesse relative de tous les points

$$d\Delta\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_{j,i}(t)\} = \{\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)\} = \{\vec{\omega}(t) \times \boldsymbol{R}(t)\ \vec{r}_{j,i}(t_0)\}$$

Avec $\vec{\omega}(t)$ la vitesse angulaire du solide dans le système immobile (global ou du laboratoire).

Objets ponctuels et étendus

Ainsi, la position et la vitesse de tout point du solide en rotation et en translation seront données par:

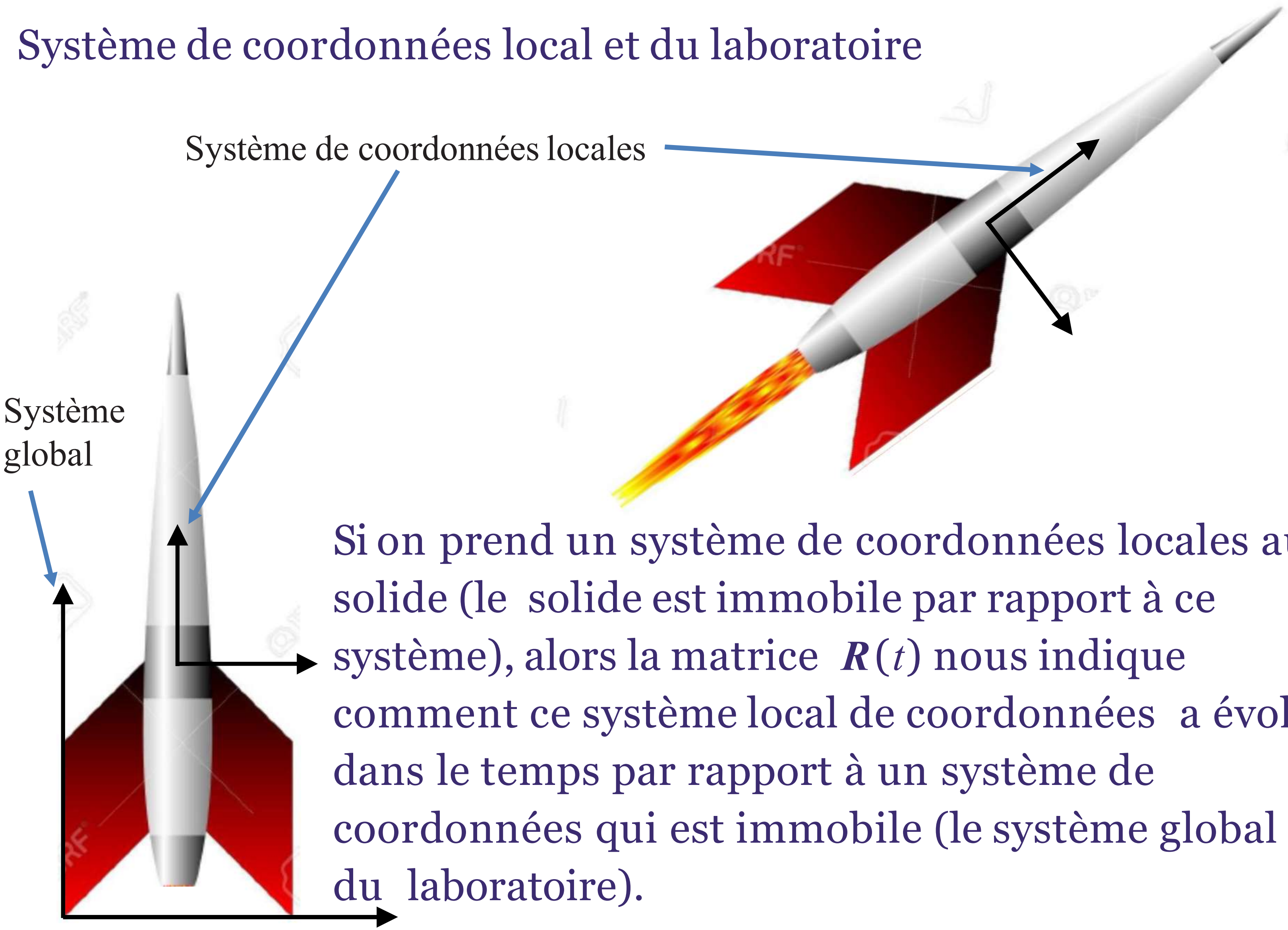
$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \boldsymbol{R}(t)\ \vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\vec{v}_j(t) = \vec{v}_i(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\boldsymbol{R}(t)\ \vec{r}_{j,i}(t_0)\right)$$

Pour déterminer la trajectoire du solide dans l'espace, nous n'aurons qu'à résoudre les équations de la dynamique pour $\vec{r}_i(t)$, $\vec{v}_i(t)$, $\vec{\omega}(t)$ et $\boldsymbol{R}(t)$.

Objets ponctuels et étendus

Système de coordonnées local et du laboratoire



Si on prend un système de coordonnées locales au solide (le solide est immobile par rapport à ce système), alors la matrice $\boldsymbol{R}(t)$ nous indique comment ce système local de coordonnées a évolué dans le temps par rapport à un système de coordonnées qui est immobile (le système global ou du laboratoire).

Matrices de rotation

Une matrice de rotation $\boldsymbol{R}^{2\leftarrow1}$ sert à transformer un vecteur $\vec{V}^1$ décrit dans le système 1 en un vecteur $\vec{V}^2$ dans le système 2 ayant subi une rotation par rapport à 1.

$$\vec{V}^2 = \boldsymbol{R}^{2\leftarrow1}\,\vec{V}^1$$

Pour une matrice $\boldsymbol{M}$, la transformation est un peu plus compliquée. On doit utiliser

$$\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{R}^{2\leftarrow1}\boldsymbol{M}^1(\boldsymbol{R}^{2\leftarrow1})^{-1}$$

Matrice transposée : $(R^{2\leftarrow1})^T$

où $(\boldsymbol{R}^{2\leftarrow1})^{-1} = \boldsymbol{R}^{1\leftarrow2}$ est la matrice inverse de $\boldsymbol{R}^{2\leftarrow1}$

Matrices de rotation

Si on suppose que les axes du système 2 correspondent à des rotations successives de θ_x par rapport à l'axe des x, θ_y par rapport à l'axe des y et θ_z par rapport à l'axe des z du système 1, la matrice de rotation aura la forme

$$\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1} = \boldsymbol{R}_z(\theta_z)\,\boldsymbol{R}_y(\theta_y)\,\boldsymbol{R}_x(\theta_x)$$

où

$$\boldsymbol{R}_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas à apprendre par cœur

Matrices de rotation

Sachant que

$$\vec{V}^2 = \boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1}\,\vec{V}^1$$
$$\vec{V}^1 = \boldsymbol{R}^{1\leftarrow 2}\,\vec{V}^2 = (\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1})^{-1}\,\vec{V}^2$$

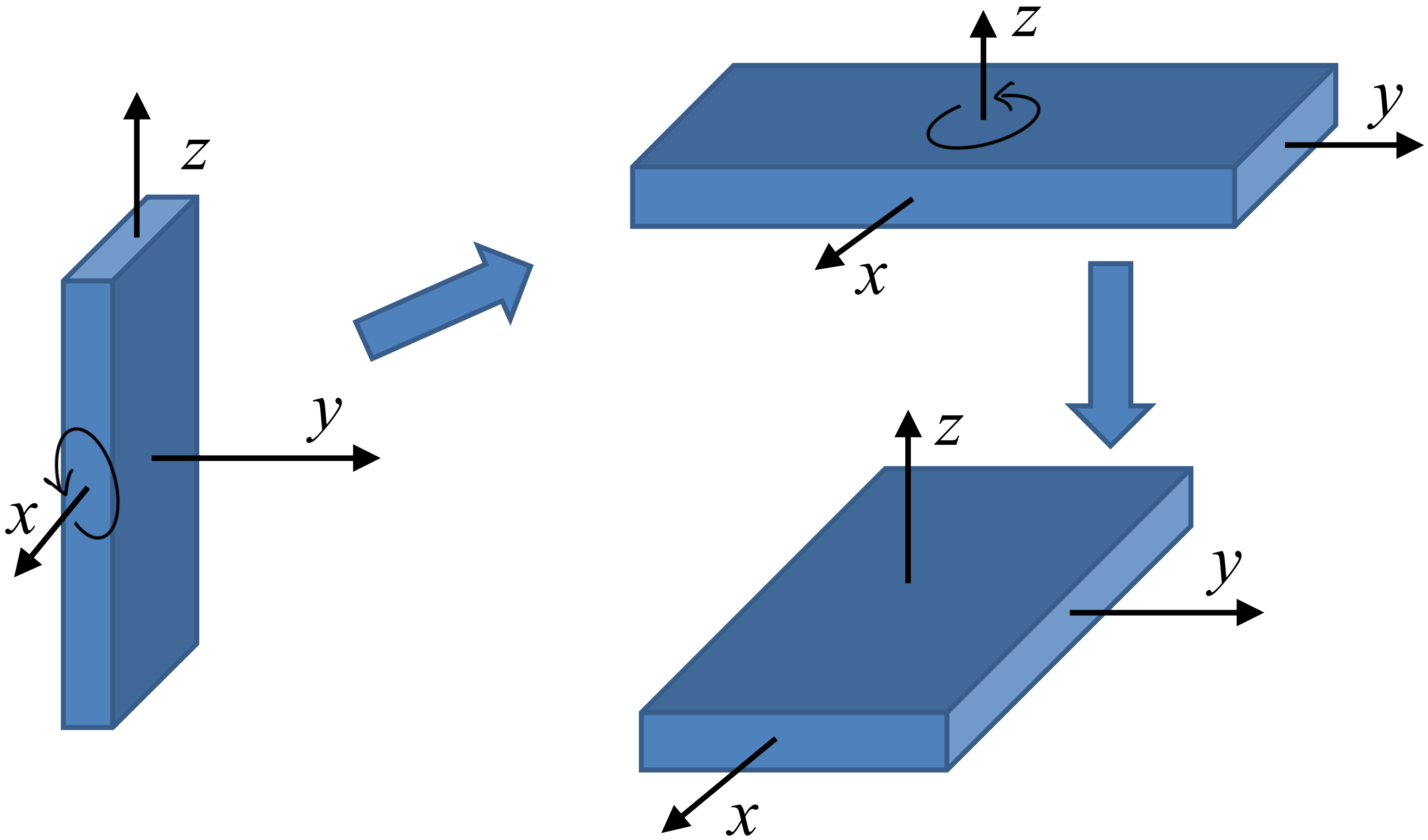
alors la matrice de rotation inverse sera donnée par

$$(\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1})^{-1} = \boldsymbol{R}_x(-\theta_x)\boldsymbol{R}_y(-\theta_y)\boldsymbol{R}_z\,(-\theta_z) = (\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1})^T$$

avec $(\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1})^T$ la transposée de $\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1}$.

Exemple 1:

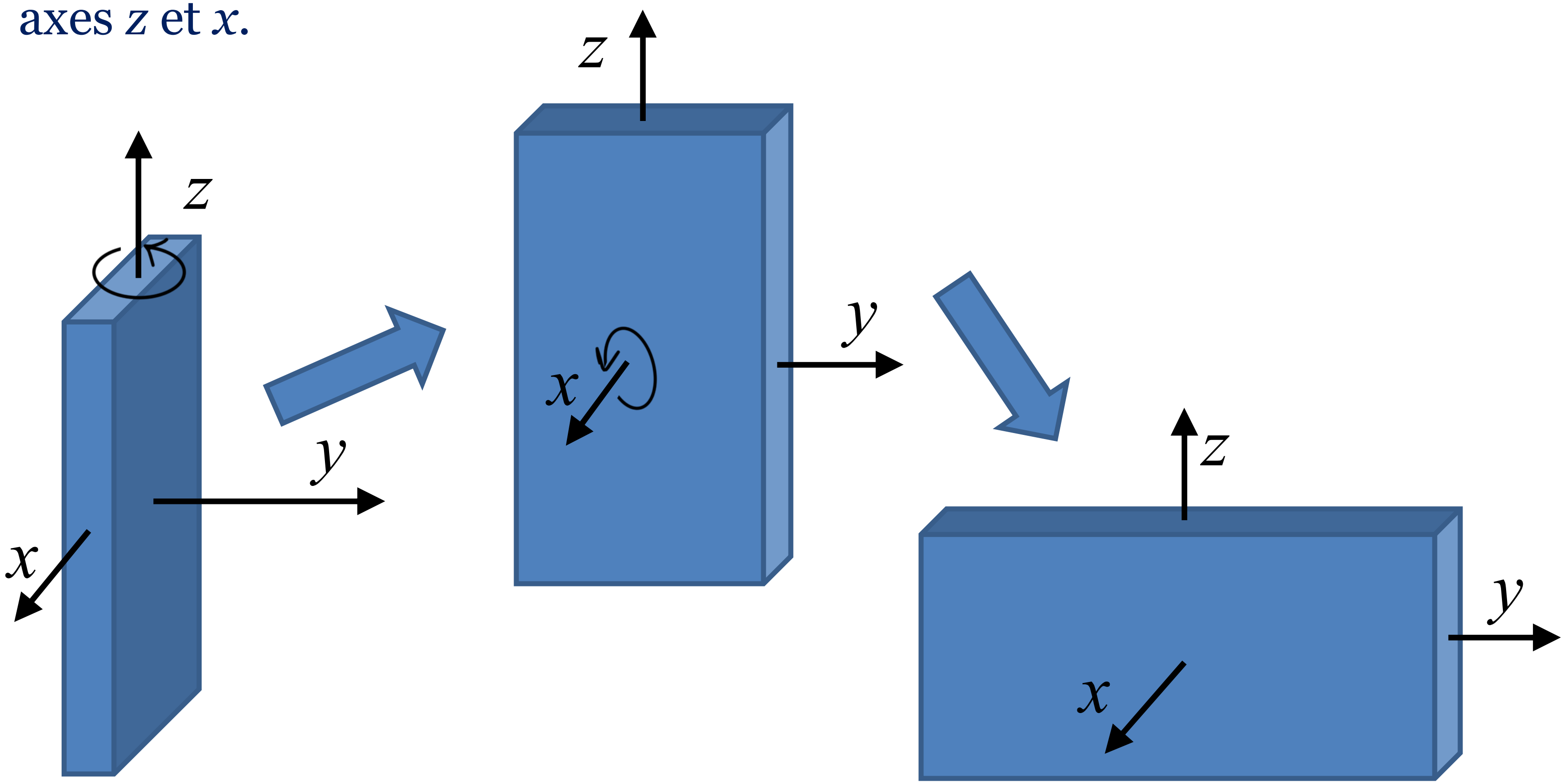
Solide subissant deux rotations successives de π/2 autour des axes x et z.



Matrices de rotation

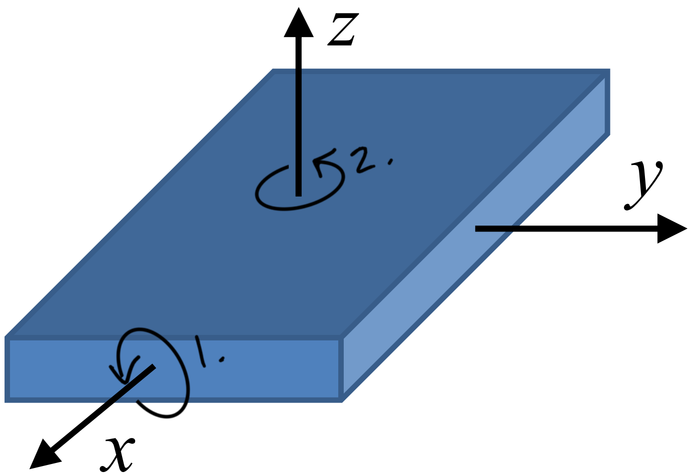
Exemple 2:

Solide subissant deux rotations successives de π/2 autour des axes *z* et *x*.

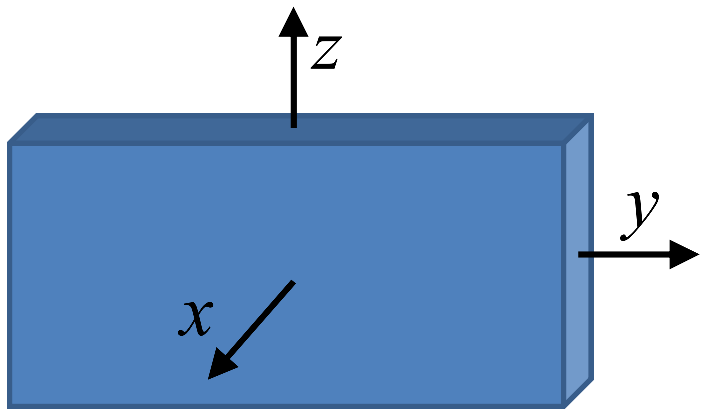


Matrices de rotation

Rotation x puis z.



Rotation z puis x.



Matrices de rotation

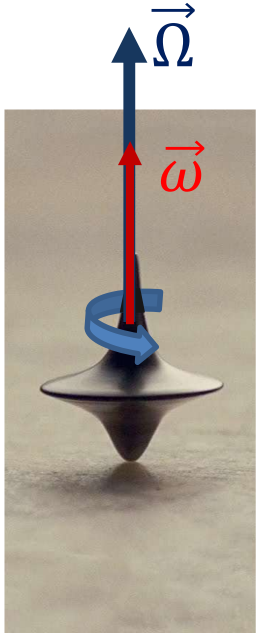
Cas général d’une rotation autour d’un axe $\hat{u}$:

Définissons $\theta\hat{u} = \Delta\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}(t) - \vec{\Omega}(t_0)$

tel que θ est l’angle de rotation du système au temps t autour de l’axe $\hat{u}$. Pour $\hat{u}$ un vecteur unitaire, on aura

$$\theta = \left|\Delta\vec{\Omega}(t)\right|$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$



Matrices de rotation

La matrice $\boldsymbol{R}(t)$ s'écrit

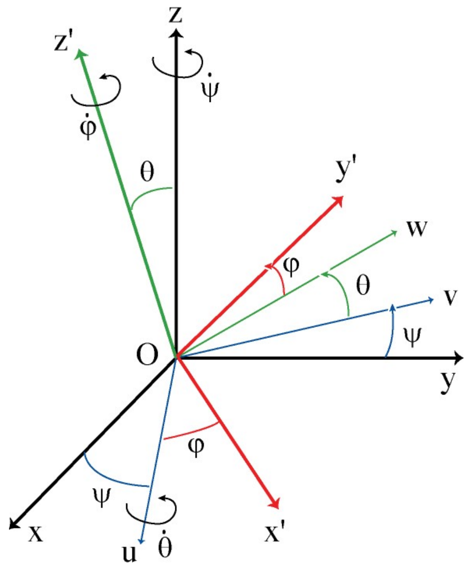
$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} u_x^2 + (u_y^2 + u_z^2)\cos\theta & u_x u_y(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & u_x u_z(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta \\ u_x u_y(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & u_y^2 + (u_z^2 + u_x^2)\cos\theta & u_y u_z(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta \\ u_x u_z(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta & u_y u_z(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta & u_z^2 + (u_x^2 + u_y^2)\cos\theta \end{pmatrix}$$

Cette matrice nous indique effectivement comment transformer un vecteur défini dans le système de coordonnées locales, associé au solide et qui a évolué dans le temps ($\vec{\Omega}(t)$), pour le ramener dans un système de coordonnées qui est immobile (le système du laboratoire $\vec{\Omega}(t_0)$).

Matrices de rotation

Matrice de rotation et angles de Euler.

1. ψ autour de z et $(x, y, z) \rightarrow (u, v, z)$
2. θ autour de u et $(u, v, z) \rightarrow (u, w, z')$
3. φ autour de z' et $(u, w, z') \rightarrow (x', y', z')$



N'EST PAS À L'EXAMEN

$$\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi - \sin\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi - \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\theta\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Matrices de rotation

Évaluation directe de la matrice de rotation.

Dans le système 1 (initial) les axes du cube sont données par

$$\vec{e}_x^{\,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y^{\,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z^{\,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le système 2 (après rotation) ces mêmes axes correspondent à

$$\vec{e}_x^{\,2} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{xy} \\ e_{xz} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y^{\,2} = \begin{pmatrix} e_{yx} \\ e_{yy} \\ e_{yz} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z^{\,2} = \begin{pmatrix} e_{zx} \\ e_{zy} \\ e_{zz} \end{pmatrix}.$$

La matrice de rotation $\boldsymbol{R}^{1\leftarrow 2}$ correspond donc à

$$\boldsymbol{R}^{1\leftarrow 2} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x^{\,2} & \vec{e}_y^{\,2} & \vec{e}_z^{\,2} \end{pmatrix}$$

$\vec V \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = V_x \vec e_x + V_y \vec e_y + V_z \vec e_z = V_x \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{xy} \\ e_{xz} \end{pmatrix} + \dots + V_z \begin{pmatrix} e_{zx} \\ e_{zy} \\ e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x e_{xx} + V_y e_{yx} + V_z e_{zx} \\ V_x e_{xy} + V_y e_{yy} + V_z e_{zy} \\ V_x e_{xz} + V_y e_{yz} + V_z e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & \dots \\ & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

Quaternions et rotation

Les quaternions sont des entités mathématiques qui, bien qu'ayant été développées il y a près de 100 ans par William Hamilton lors de ses travaux sur les nombres complexes, ont été peu utilisées avant l'avènement des méthodes de simulation par ordinateur.

$z = a + ib \quad i^2 = -1$

$\vec{q} = a + ib + jc + kd \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = k \quad ji = -k$

$jk = i \quad kj = -i$

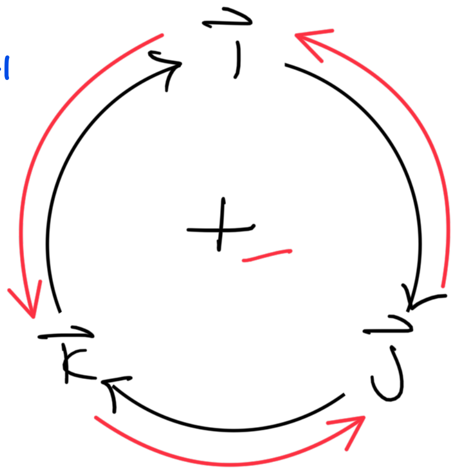
$ki = j \quad ik = -j$

$\vec{q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ v \end{pmatrix}$ avec $\vec{V} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$\vec{V} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{\vec{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{V} \end{pmatrix}$

$\vec{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{\vec{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{\vec{q}}_1 + \vec{\vec{q}}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix}$



$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j} \cdot \vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j}^2 = \vec{k} = -1$

Quaternions et rotation

Un quaternion est en réalité un vecteur, en quatre dimensions, ici noté $\vec{\vec{q}}$ et défini comme suit

$$\vec{\vec{q}} = \left(q_0\ , q_x, q_y, q_z\right)^T$$

Les composantes q_x, q_y et q_z du quaternion correspondent aux directions x, y et z d'un vecteur en 3D.
La composante q_0 correspond à une direction w perpendiculaire aux trois autres.
Ainsi, un vecteur $\vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)^T$ en trois dimensions pourra être transformé en quaternion $\vec{\vec{v}}$ en utilisant la relation suivante

$$\vec{\vec{v}} = \left(0, v_x, v_y, v_z\right)^T = (0, \vec{v}^T)^T$$

Quaternions et rotation

Opérations sur les quaternions.

Somme

$$\vec{\vec{q}}^1+\vec{\vec{q}}^2=\left(q_0^1+q_0^2,\ q_x^1+q_x^2,q_y^1+q_y^2,q_z^1+q_z^2\right)^T$$
$$=(q_0^1+q_0^2,(\vec{q}^1+\vec{q}^2)^T)^T$$

Soustraction

$$\vec{\vec{q}}^1-\vec{\vec{q}}^2=\left(q_0^1-q_0^2,\ q_x^1-q_x^2,q_y^1-q_y^2,q_z^1-q_z^2\right)^T$$
$$=(q_0^1-q_0^2,(\vec{q}^1-\vec{q}^2)^T)^T$$

Quaternions et rotation

Produit (de Hamilton)

$$\vec{q}^{\,1}\,\vec{q}^{\,2} = (q_0^1 q_0^2 - q_x^1 q_x^2 - q_y^1 q_y^2 - q_z^1 q_z^2,$$
$$q_0^1 q_x^2 + q_x^1 q_0^2 + q_y^1 q_z^2 - q_z^1 q_y^2,$$
$$q_0^1 q_y^2 + q_y^1 q_0^2 + q_z^1 q_x^2 - q_x^1 q_z^2,$$
$$q_0^1 q_z^2 + q_z^1 q_0^2 + q_x^1 q_y^2 - q_y^1 q_x^2)^T$$

$$= (q_0^1 q_0^2 - \vec{q}^{\,1} . \vec{q}^{\,2}, q_0^1 (\vec{q}^{\,2})^T + q_0^2 (\vec{q}^{\,1})^T + (\vec{q}^{\,1} \times \vec{q}^{\,2})^T\,)^T$$

$$\vec{q}_1 \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 \\ a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2 \\ a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 \end{pmatrix}$$

car $kj = -i$

$(a_1 + i b_1 + j c_1 + k d_1)(a_2 + i b_2 + j c_2 + b d_2)$

<u>imaginaire</u> $i^2 = -1$ $|z^* = a - ib)$

$\vec{q}^{\,*} = a - ib - jc - kd$

$$\vec{q}^{\,*} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \\ -d \end{pmatrix} \quad \|\vec{q}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{\vec{q}\,\vec{q}^{\,*}}$$

Quaternions et rotation

La multiplication n'est pas commutative en général

$$\vec{\vec{q}}^1\,\vec{\vec{q}}^2 \neq \vec{\vec{q}}^2\,\vec{\vec{q}}^1$$

La commutativité implique

$$\vec{q}^1 \times \vec{q}^2 = \vec{q}^2 \times \vec{q}^1 = \vec{0}$$

et donc que $\vec{q}^1$ et $\vec{q}^2$ soient colinéaires (parallèles).

Quaternions et rotation

Conjugaison

conjugué

la partie imaginaire est mise négative

$$\left(\vec{\vec{q}}\right)^* = \left(q_0 \left[-q_x, -q_y, -q_z\right]^T\right)^T$$
$$= \left(q_0\, , -\vec{q}^T\right)^T$$

Norme

$$\left\|\vec{\vec{q}}\right\| = \sqrt{(q_0)^2 + \vec{q}.\vec{q}} = \sqrt{(q_0)^2 + \|\vec{q}\|^2}$$

Inverse

$$\left(\vec{\vec{q}}\right)^{-1} = \frac{\left(\vec{\vec{q}}\right)^*}{\|\vec{q}\|^2}$$

Quaternions et rotation

Pour les problèmes où on doit tenir compte des rotations de solides d'un angle θ par rapport à un axe arbitraire représenté par le vecteur unitaire $\hat{u}$,ce qui nous intéressera particulièrement c'est le quaternion unitaire $\vec{\vec{r}}$ défini comme suit

$$\vec{\vec{r}} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\,\hat{u}^T)^T$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ u_x \sin(\frac{\theta}{2}) \\ u_y \sin(\frac{\theta}{2}) \\ u_z \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

dont la norme est

$$\|\vec{\vec{r}}\| = \sqrt{\cos^2(\theta/2) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\|\hat{u}\|^2} = 1$$

$$= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + u_x \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + u_y \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + u_z \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Rotation de θ autour de $\hat{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ $\|\hat{u}\| = 1$

$$\vec{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \cdot u_x \\ \sin\frac{\theta}{2} \cdot u_y \\ \sin\frac{\theta}{2} \cdot u_z \end{pmatrix} \qquad \vec{\vec{r}}^{\,*} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} \cdot u_x \\ -\sin\frac{\theta}{2} \cdot u_y \\ -\sin\frac{\theta}{2} \cdot u_z \end{pmatrix}$$

Quaternions et rotation

On peut utiliser ce quaternion pour tourner un vecteur arbitraire $\vec{v}$ dans l'espace en utilisant la relation

$$\vec{\vec{v}}' = (0,(\vec{v}')^T)^T = \vec{\vec{r}}\ (0,(\vec{v})^T)^T\ \vec{\vec{r}}^* = \vec{\vec{r}}\ \vec{\vec{v}}\ \vec{\vec{r}}^*$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\vec{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \qquad (\hat{u}, \theta)$$

Avec

$$\vec{\vec{r}}^* = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ -u_x \sin\frac{\theta}{2} \\ -u_y \sin\frac{\theta}{2} \\ -u_z \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{r}}^* = (\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2)\,\hat{u}^T)^T$$

$$\vec{\vec{v}}' = \vec{\vec{r}}\ \vec{\vec{v}}\ \vec{\vec{r}}^*$$

Exemples

$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Rotation du vecteur $\vec{v} = (1,1,1)^T$ de $\pi/2$ autour de l'axe $\vec{u} = (0,0,1)^T$.

$\vec{v}' = (-1,1,1)^T$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}\\0\\0\\\sin\frac{\pi}{4}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

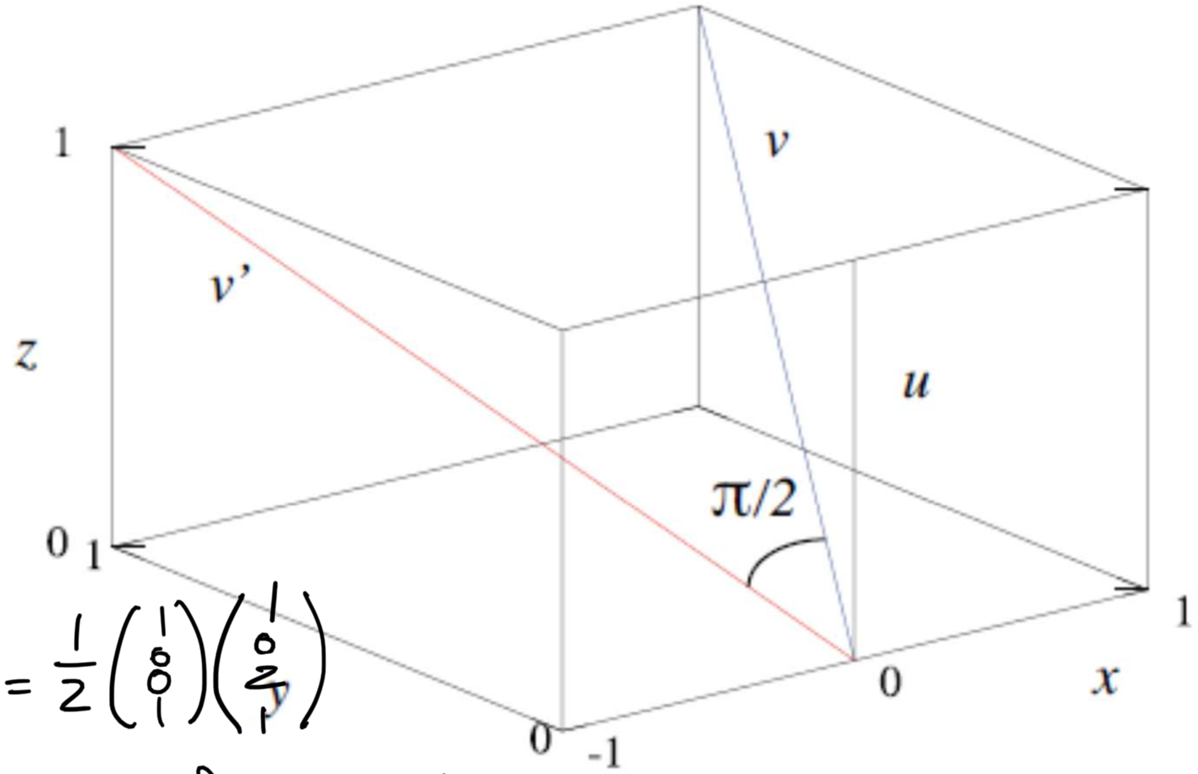
$$\vec{r}^* = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}\\0\\0\\\sin\frac{\pi}{4}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = \vec{r}\,\vec{v}\,\vec{r}^*$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0-0-0+1\\0+1-1+0\\0+1+0+1\\0+1+0-0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-0-0-1\\0+0+0-2\\2+0+0+0\\1+1+0+0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$



Exemples

rendre unitaire

Rotation de $\pi/4$ autour de l'axe $\vec{u} = (0,1,1)^T/\sqrt{2}$.

- Pour le quaternion, c'est toujours aussi simple

$$\vec{\vec{r}} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\vec{u}^T)^T$$
$$= ((\cos(\pi/8), 0, \sin(\pi/8)/\sqrt{2}, \sin(\pi/8)/\sqrt{2})^T$$

$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} u_x^2 + (u_y^2 + u_z^2)\cos\theta & u_x u_y(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & u_x u_z(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta \\ u_x u_y(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & u_y^2 + (u_z^2 + u_x^2)\cos\theta & u_y u_z(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta \\ u_x u_z(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta & u_y u_z(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta & u_z^2 + (u_x^2 + u_y^2)\cos\theta \end{pmatrix}$$

Équations de la dynamique

Mouvement de translation et lois de Newton.

1. Si aucune force n'est appliquée sur un corps de masse m, celui-ci restera au repos ou continuera à se déplacer en ligne droite à une vitesse constante.

2. L'accélération d'un corps est proportionnelle à la force agissant sur le corps et dans la direction de cette force.

3. À toute force agissant sur un corps (action) correspond une force égale et opposée qui s'oppose à la première force (réaction).

Équations de la dynamique

Le mouvement de translation d'un point du corps est caractérisé par:

1. la position $\vec{r}(t)$ à tout instant

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

2. la vitesse $\vec{v}(t)$ à tout instant

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)^T$$

Équations de la dynamique

L'accélération $\vec{a}(t)$ à tout instant n'est pas propre au corps, mais résulte de la force totale externe $\vec{F}(t)$ appliquée sur le solide

$$\vec{a}(t) = \left(a_x(t), a_y(t), a_z(t)\right)^T = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\vec{a}(t) = \left(a_x(t), a_y(t), a_z(t)\right)^T = \dot{\vec{v}}\,(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

dérivée seconde par rapport au temps

dérivée par rapport au temps

Équations de la dynamique

Pour un corps solide sans rotation, les lois de Newton s'appliquent à tous les points $\vec{r}_i$ du solide

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}(t)$$

$$\vec{a}_i(t) = \vec{a}(t)$$

qui ont tous les mêmes vitesses et accélérations.

La position relative $\vec{r}_{j,i}(t)$ d'un point j du solide par rapport à un autre point $\vec{r}_i(t)$ étant fixe, la trajectoire de tous les points peut être calculée en utilisant

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{j,i}(t_0)$$

Équations de la dynamique

La première loi (principe de l'inertie) et la seconde loi de Newton se résument à

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

si aucune force n'est appliquée sur l'objet, alors

$$m\,\vec{a}(t) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(m\vec{v}(t))}{dt} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = 0$$

et la vitesse (ou la quantité de mouvement $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$) demeure constante. et la direction ne varient pas non plus.

Équations de la dynamique

Forme générale de la 2e loi de Newton:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \quad \therefore \quad \frac{\text{variation de qté de mouvement}}{\text{par rapport au temps}}$$

Avec $\vec{p} = m\vec{v}$ --> quantité de mouvement

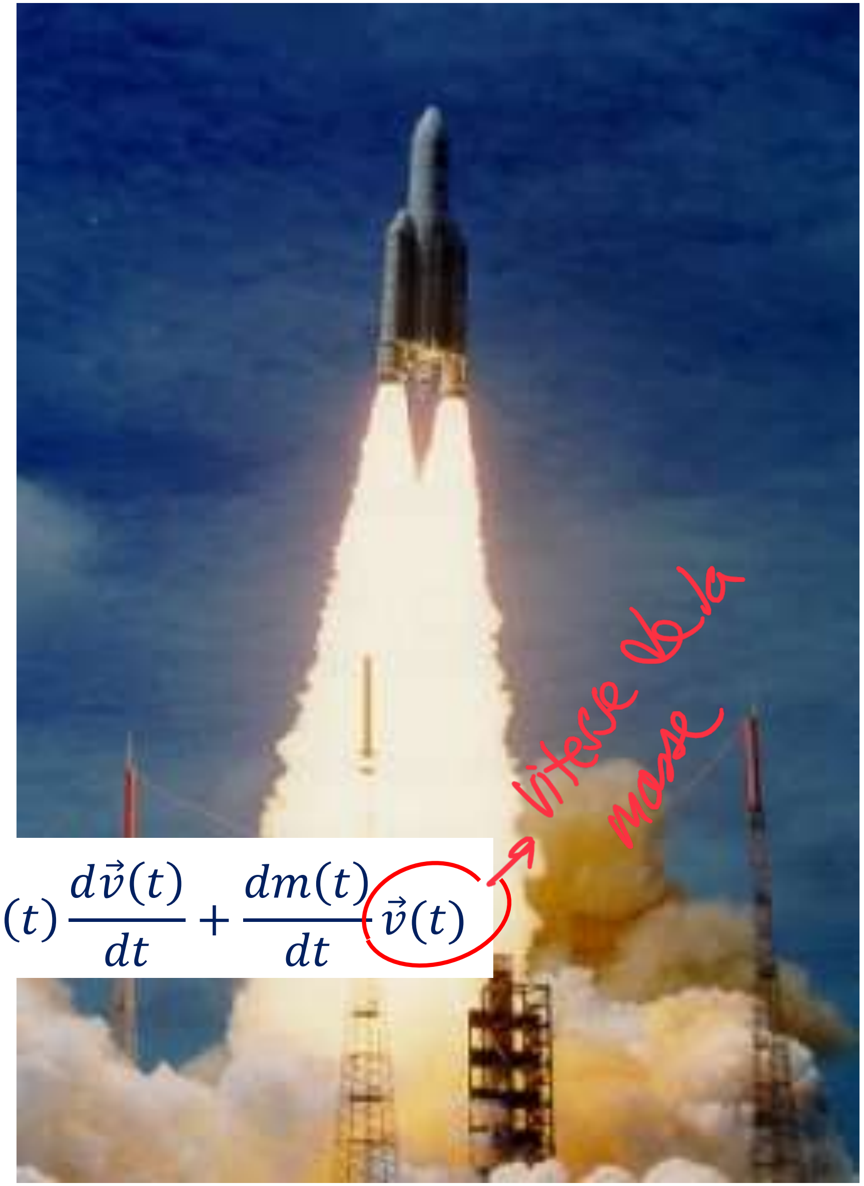
Si la masse est constante :

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\vec{a}$$

Si la masse varie dans le temps: *m(t)*

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{d\left(m(t)\vec{v}(t)\right)}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt}\vec{v}(t)$$

Équations de la dynamique



$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{d\big(m(t)\vec{v}(t)\big)}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt}\vec{v}(t)$$

vitesse de la masse

Équations de la dynamique

Forme générale de la 2e loi de Newton:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{F}(t)dt = d\vec{p}(t)$$

Entre les instants *t* et *t*+*dt*:

Système: fusée de masse *m* + gaz de masse *dm* (éjecté pendant un intervalle de temps *dt*)

système	Fusé de masse $m(t)$	Gaz éjecté de masse dm
Vitesse à l'instant *t*	$\vec{v}$	$\vec{v}$
Vitesse à l'instant *t*+*dt*	$\vec{v} + d\vec{v}$	$\vec{v}_{gaz}$

$$\vec{F}(t)dt = m(t)d\vec{v} + dm\,(\vec{v}_{gaz} - \vec{v})$$

$$\vec{F} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}_{gaz} - \vec{v})$$

Équations de la dynamique

$$\vec{F}(t) = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt}\vec{u}(t)$$

avec $\vec{u}(t) = \vec{v}_{gaz} - \vec{v}$

$$\boxed{m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) - \underbrace{\left|\frac{dm(t)}{dt}\right|\vec{u}(t)}_{\text{Force de propulsion}}}$$

$$\vec{F}(t)dt = m(t)d\vec{v} + dm\,(\vec{v}_{gaz} - \vec{v})$$

Équations de la dynamique

Autres concepts de dynamique utiles.

- L'énergie transférée à un corps par une force $\vec{F}_a$ appliquée sur une distance L suivant le parcours $d\vec{l}$ est donnée par

Travail →

$$E = \int_0^L \vec{F}_a \cdot d\vec{l}$$

Force scalaire

- La variation $\Delta\vec{p}$ de quantité de mouvement d'un corps subissant une force $\vec{F}(t)$ pendant une période de temps Δt (impulsion $\vec{J}$):

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t)dt = \int_0^{\Delta t} \left(F_x(t), F_y(t), F_z(t)\right)^T dt$$

Équations de la dynamique

Mouvement de rotation.

Les lois de Newton sont insuffisantes pour décrire la dynamique des solides en rotation autour d'un point et il faut introduire des lois supplémentaires qui peuvent être vues comme une généralisation des lois de Newton.

Lois reliées au mouvement de rotation.

1. Si aucun moment de force n'est appliqué sur un corps, le corps conservera son mouvement de rotation autour d'un point.
2. L'accélération angulaire (autour d'un axe) d'un corps dépend du moment de force (par rapport à cet axe) agissant sur le tous corps.

$\vec{\tau}_i$: moment de la force $\vec{F}_j$)

$\vec{\tau}_i^{o} = \vec{r}_{j,i} \cdot \vec{F}_j$

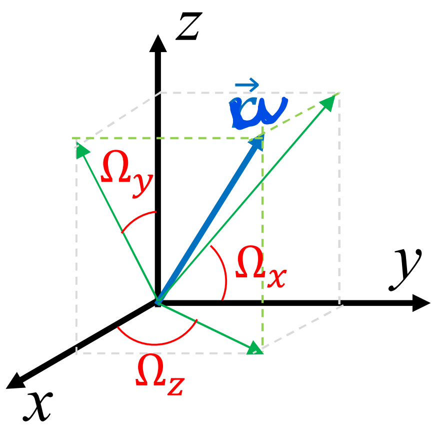
2e loi Newton : $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

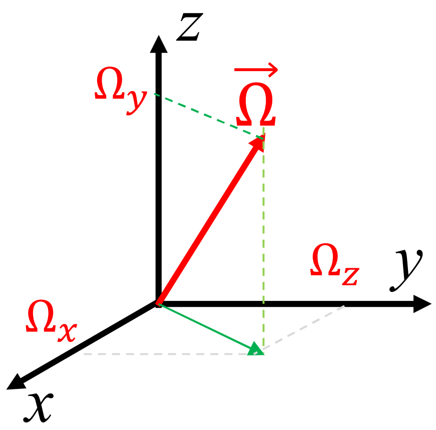
Équations de la dynamique

Mouvement de rotation est caractérisé par:

- Vecteur position angulaire (rapporté à la position angulaire initiale):

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} \Omega_x(t) \\ \Omega_y(t) \\ \Omega_z(t) \end{pmatrix} = \left|\vec{\Omega}(t)\right| \hat{u}(t)$$





Équations de la dynamique

Mouvement de rotation est caractérisé par:

- Vecteur position angulaire :

$$\Delta\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}(t) - \vec{\Omega}(t_0) = \begin{pmatrix} \Delta\Omega_x(t) \\ \Delta\Omega_y(t) \\ \Delta\Omega_z(t) \end{pmatrix} = \left|\Delta\vec{\Omega}(t)\right|\hat{u}(t)$$

- Vecteur vitesse angulaire :

$$\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \frac{d\Delta\vec{\Omega}(t)}{dt}$$

Équations de la dynamique

Finalement, on peut aussi définir l'accélération angulaire $\vec{\alpha}(t)$ rad/s²)

$$\vec{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_x(t) \\ \alpha_y(t) \\ \alpha_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{\omega}\,(t)}{dt} = \frac{d^2\Delta\vec{\Omega}(t)}{dt^2}$$

qui dépend du moment de force (par rapport à cet axe) agissant sur le corps.

$\Delta\vec{\Omega}(t)$, $\vec{\omega}(t)$ et $\vec{\alpha}(t)$ sont les mêmes pour tous les points du solide.

Équations de la dynamique

Si un solide subi une rotation, la position (à l'instant t) d'un point j par rapport à un point de référence i est:

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \boldsymbol{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

Et sa position angulaire est donnée par :

$$\vec{\Omega}_j(t) = \vec{\Omega}_j(t_0) + \Delta\vec{\Omega}(t) = \boldsymbol{R}\left(\vec{\Omega}_j(t), \vec{\Omega}_j(t_0)\right)\vec{\Omega}_j(t_0) = \boldsymbol{R}(t)\,\vec{\Omega}_j(t_0)$$

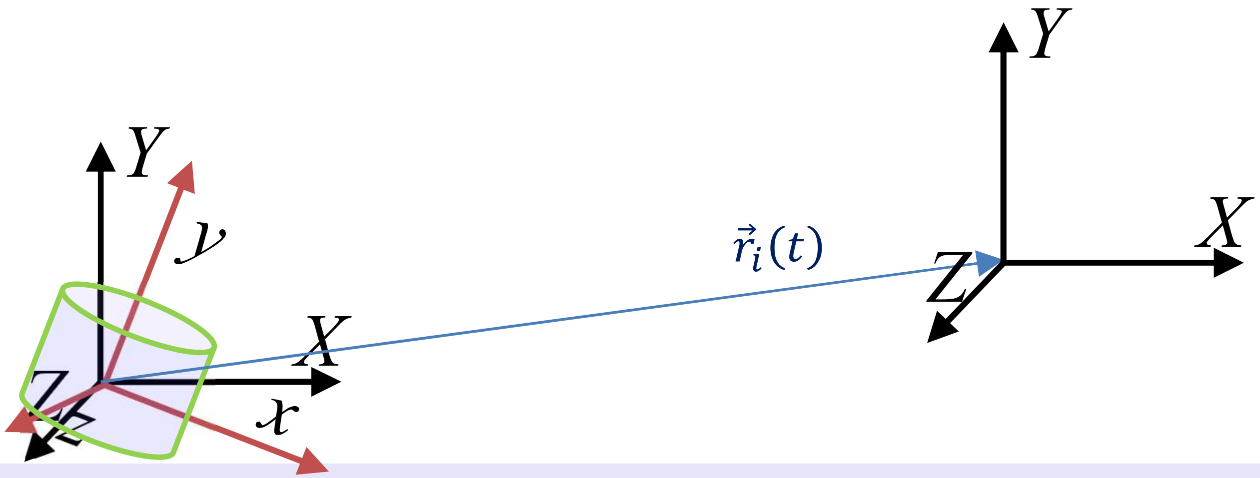
Donc, ce qui nous intéresse principalement c'est la matrice $\boldsymbol{R}\,(t)$, pas $\Delta\vec{\Omega}(t)$. Il serait donc intéressant de remplacer l'équation différentielle pour la vitesse angulaire en fonction de la dérivée de la position angulaire par une équation différentielle pour la matrice de rotation.

Équations de la dynamique

Si un solide subi une rotation, la position (à l'instant t) d'un point j par rapport à un point de référence i est:

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \boldsymbol{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \boldsymbol{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$



Équations de la dynamique

Si un solide subi une rotation, la position (à l'instant *t*) d'un point *j* par rapport à un point de référence *i* est:

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \boldsymbol{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\vec{v}_{j,i}(t) = \frac{d\vec{r}_{j,i}(t)}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0))}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt}\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = ?$$

$$\vec{v}_{j,i}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{j,i}(t) = \vec{\omega} \times \boldsymbol{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt}\vec{A} = \vec{\omega} \times (\boldsymbol{R}(t)\vec{A})$$

$\vec{A}$ vecteur quelconque

Équations de la dynamique

Je remplace le vecteur $\vec{\omega}$ par une matrice $\widetilde{\omega}$ qui produit le même effet sur le vecteur $\vec{A}$

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt}\vec{A} = \widetilde{\omega}(t)\left(\boldsymbol{R}(t)\vec{A}\right) = (\widetilde{\omega}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{R}(t))\vec{A}$$

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \widetilde{\omega}(t)\boldsymbol{R}(t)}$$

(Algèbre de Lie)

$$\widetilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt}\vec{A} = \vec{\omega} \times (\boldsymbol{R}(t)\vec{A})$$

$\vec{A}$ vecteur quelconque

Équations de la dynamique

Méthode du déterminant

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_y A_z - w_z A_y \\ w_z A_x - w_x A_z \\ w_x A_y - w_y A_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_z & w_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -w_z A_y + w_y A_z \\ w_y A_x - w_x A_z \\ -w_y A_x + w_x A_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \widetilde{\omega}(t)\boldsymbol{R}(t)}$$

$$\boxed{\widetilde{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}}$$

Équations de la dynamique

Si on décide d'utiliser les quaternions au lieu des matrices de rotation, on pourra remplacer

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\, \boldsymbol{R}(t)$$

par

$$\frac{d\vec{\vec{R}}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\vec{R}}(t)\vec{\vec{\omega}}(t)$$

avec $\vec{\vec{\omega}}(t) = (0, \vec{\omega}(t))^T$ et $\vec{\vec{R}}(t)$ le quaternion de rotation associé à la matrice de rotation $\boldsymbol{R}(t)$.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Équations de la dynamique

L'équation équivalente à la seconde loi de Newton pour les mouvements de rotation est

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{p} = m\vec{v}$

moment de force (to)

$$\vec{\tau}_{j,i}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}$$

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\vec{L}_{j,i} = \vec{r}_{j,i} \cdot (m_j \vec{v}_{j,i})$

où $\vec{\tau}_{j,i}$ est le moment de force (torque en anglais) autour du point de rotation i résultant d'une force appliquée au point $\vec{r}_j(t)$

$$\vec{\tau}_{j,i}(t) = \left(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i\right) \times \vec{F}(t)$$

et $\vec{L}(t)$ est le moment cinétique (angular momentum en anglais) qui est donné par

$$\vec{L}(t) = \boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)$$

Équivalences

$\vec{v} \to \vec{\omega}$
$\vec{a} \to \vec{\alpha}$
$\vec{F} \to \vec{\tau}$
$\vec{p} \to \vec{L}$
$m \to I$

$\vec{p} = m\vec{v}$
$\vec{L} = I\vec{\omega}$

Équations de la dynamique

Moment d'inertie.

- I est le moment d'inertie du solide (équivalent de la masse pour le mouvement de translation) pour une rotation autour du point $\vec{r}_i$.

- Le moment cinétique $\vec{L}_{j,i}(t)$ d'un point de masse m_j par rapport à un point de référence $\vec{r}_i$ est donné par

$$\vec{L}_{j,i}(t) = m_j \vec{r}_{j,i}(t) \times \vec{v}_{j,i}(t)$$

où $\vec{r}_{j,i}$ et et $\vec{v}_{j,i}$ sont la position et la vitesse de la masse par rapport au point de référence. $\vec{v}_{j,i}(t)$ est une vitesse de rotation pure, alors:

$$\vec{L}_{j,i}(t) = m_j \vec{r}_{j,i}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)\right)$$

Équations de la dynamique

Pour un solide représenté par une distribution de masse autour du point $\vec{r}_i$, le moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}_i = \int_{\mathcal{V}} \vec{r}_{m,i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{m,i}) dm = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}_i) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)) d^3 r$$

Les composantes de $\vec{L}_i$ seront

$$\begin{aligned} L_{i,x} &= I_{i,xx}\,\omega_x + I_{i,xy}\,\omega_y + I_{i,xz}\,\omega_z \\ L_{i,y} &= I_{i,yx}\,\omega_x + I_{i,yy}\,\omega_y + I_{i,yz}\,\omega_z \\ L_{i,z} &= I_{i,zx}\,\omega_x + I_{i,zy}\,\omega_y + I_{i,zz}\,\omega_z \end{aligned}$$

Ceci permet de définir les composantes de $\boldsymbol{I}_i$ via la relation

$$\vec{L}_i = \boldsymbol{I}_i \vec{\omega}$$

Équations de la dynamique

$\boldsymbol{I}$, le moment d'inertie par rapport au point $\vec{r}_i = 0$ est défini comme suit

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$= \int_V \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(\vec{r}) d^3 r$$

Équations de la dynamique

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d(\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \boldsymbol{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$$

On peut aussi écrire l'équation du mouvement pour la rotation en fonction de l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$

$$\boxed{\vec{\tau}(t) = \frac{d(\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \boldsymbol{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)}$$

Contrairement aux équations de Newton où on peut utiliser $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$ lorsque la masse est constante, ici le problème est beaucoup plus compliqué:

- Même si la masse est constante, une rotation de l'objet modifiera en général les composantes individuelles de $\boldsymbol{I}(t)$. C'est donc un effet dont il faut tenir compte dans les équations du mouvement.
- Ainsi, seulement une partie du moment de force servira en général à donner une accélération angulaire à l'objet.

Comment évaluer $\dfrac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$?

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d(\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \boldsymbol{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$$

$$\boldsymbol{I}(t) = \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{I}(t_0)\big(\boldsymbol{R}(t)\big)^{-1} = \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{I}(t_0)(\boldsymbol{R}(t))^T$$

$$\frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt}\boldsymbol{I}(t_0)(\boldsymbol{R}(t))^T + \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{I}(t_0)\frac{d(\boldsymbol{R}(t))^T}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\,\boldsymbol{R}(t) \qquad \text{et} \qquad (\tilde{\omega}(t))^T = -\tilde{\omega}(t)$$

$$\frac{d(\boldsymbol{R}(t))^T}{dt} = -(R(t))^T\tilde{\omega}(t)$$

Équations de la dynamique

$$\boxed{\vec{\tau}(t) = \frac{d(\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \boldsymbol{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)}$$

On obtient alors

$$\frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\boldsymbol{I}(t) - \boldsymbol{I}(t)\tilde{\omega}(t)$$

Finalement

$$\frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t) = \tilde{\omega}(t)\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t) - \cancel{\boldsymbol{I}(t)\tilde{\omega}(t)\vec{\omega}(t)}$$

$$\frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t) = \tilde{\omega}(t)\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)$$

$$\frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t) = \tilde{\omega}(t)\vec{L}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t) = -\vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t)$$

L'équation différentielle à résoudre étant

$$\boxed{\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\boldsymbol{I}(t))^{-1}\left(\vec{\tau}(t) + \vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t)\right)}$$

Équations de la dynamique

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\boldsymbol{I}(t))^{-1}\left(\vec{\tau}(t) + \vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t)\right)$$

Notez que si le moment d'inertie est proportionnel à la matrice identité ($\boldsymbol{I}(t) = h(t)\mathbf{1}$)

Le moment cinétique $\vec{L}(t)$ est parallèle à $\vec{\omega}(t)$

L'équation différentielle à résoudre devient

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\boldsymbol{I})^{-1}(t)\vec{\tau}(t) = \frac{1}{h(t)}\vec{\tau}(t)$$

qui ressemble à l'équation de Newton.

De la même façon, si $\vec{\omega}(t) = 0$:

$$\vec{\alpha}(t) = (\boldsymbol{I})^{-1}(t)\vec{\tau}(t)$$

Centre de masse

Définition du centre de masse.

- Le centre de masse d'un objet est le point de l'objet sur lequel aucune force ne produit de mouvement de rotation de l'objet sur lui même.

Pour un objet ponctuel.

- Le centre de masse $\vec{r}_c$ correspond à sa position $\vec{r}$

Centre de masse

Pour les objets de dimensions finies, définir la position du centre de masse est plus complexe.

- Il faut choisir la position où aucun mouvement de rotation n'est induit, quelle que soit la force appliquée.
- Si on suppose que l'objet est constitué de particules de masse dm distribuées dans un volume $\mathcal{V}$, le centre de masse correspond à

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int_m \vec{r}\,dm$$

$$dm = \rho(\vec{r})d^3r$$

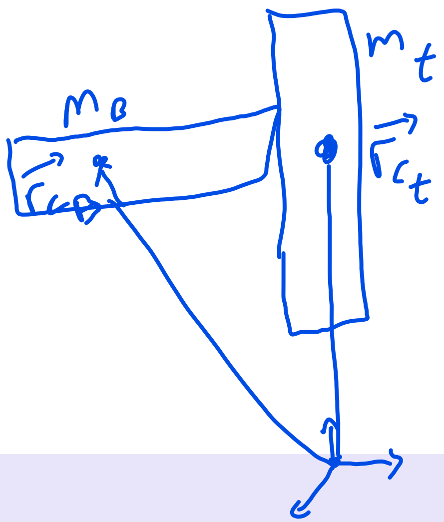
$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int_{\mathcal{V}} \vec{r}\rho(\vec{r})d^3r$$

Centre de masse

Pour un objet non uniforme que l'on peut sous-diviser en $n = 1, N$ sous-éléments V_n de masse volumique $\rho_n(\vec{r})$ on pourra écrire

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}\int_{V_n} \vec{r}\rho_n(\vec{r})d^3r$$

$$m = \sum_{n=1}^{N}\int_{V_n} \rho_n(\vec{r})d^3r$$



$$\vec{r}_c = \frac{1}{m_B + m_t}\left(m_B \vec{r}_{cB} + m_t \vec{r}_{ct}\right)$$

Centre de masse

Sachant que

$$m_n = \int_{V_n} \rho_n(\vec{r})\, d^3 r$$

$$\vec{r}_{n,c} = \frac{1}{m_n} \int_{V_n} \vec{r} \rho_n(\vec{r})\, d^3 r$$

On aura alors

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_{c,n}$$

Ici, on somme la contribution du centre de masse de chaque solide pondérée par sa masse.

Centre de masse

Volumes et centre de masse pour solide de géométrie arbitraire.

- Il existe plusieurs techniques et algorithmes pour évaluer le volume et le centre de masse de solides pour les applications multimédias.
- Une des méthodes les plus populaires consiste à décomposer premièrement le solide en polyèdres triangulaires, à déterminer le volume de chaque polyèdre et à sommer le tout.
- Cette méthode est aussi efficace si l'on désire évaluer le centre de masse de l'objet.

Centre de masse

Le principe général est le suivant.

1) Premièrement, on divise le solide à évaluer en un ensemble de sous régions pleines.

2) Les frontières de ces sous-régions, qui peuvent être droites ou curvilignes, sont ensuite simulées en utilisant une série de triangles droits.

3) Après avoir identifié la position en 3-D de chacun des sommets de ces triangles, on procède à l'identification des surfaces externes en associant à chaque triangle un ensemble de trois sommets.

4) L'ordre des sommets est alors important, car il faut décrire le volume à l'intérieur du solide.

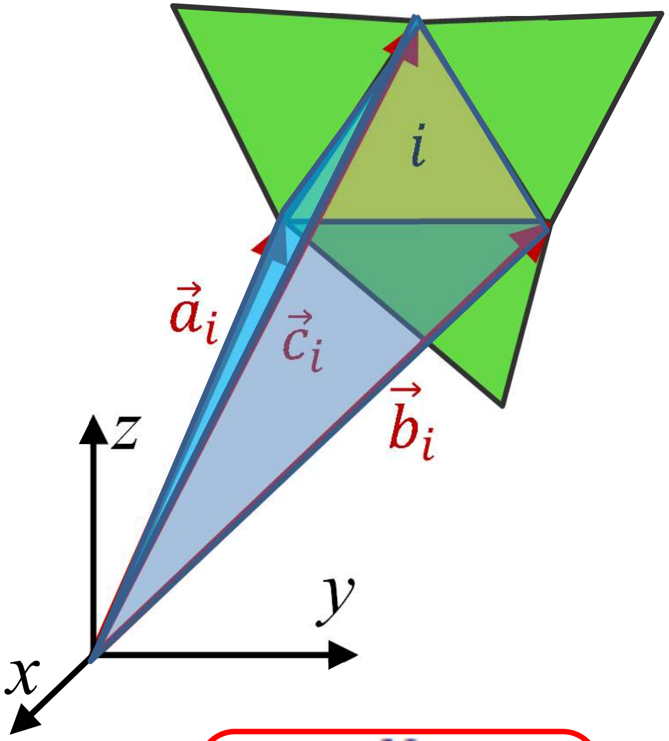
Centre de masse

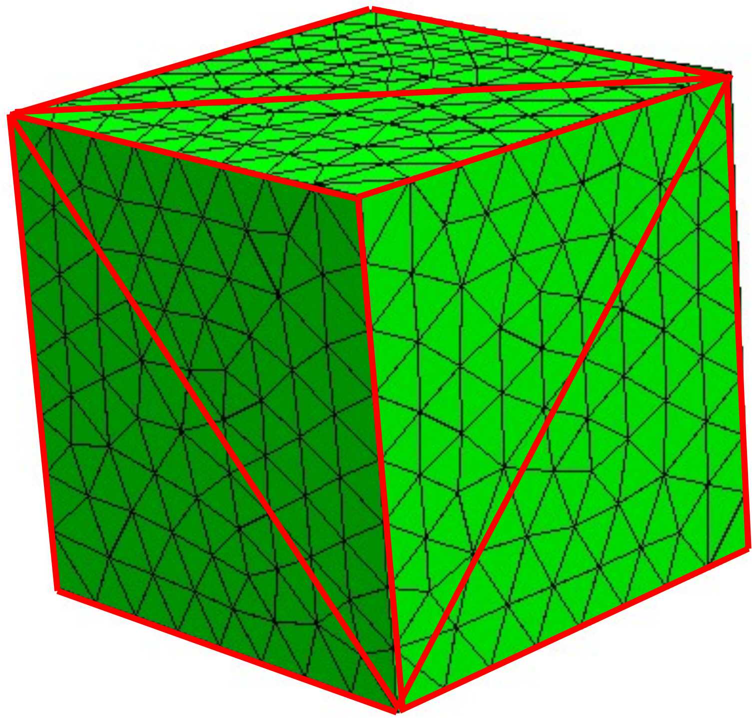
On procède de la manière suivante.

1) On choisit premièrement pour chaque triangle i un sommet de départ arbitraire (le vecteur $\vec{a}_i$).

2) On ordonne ensuite les deux autres sommets ($\vec{b}_i$ et $\vec{c}_i$) de façon à ce qu'ils soient classés dans un ordre antihoraire lorsque la surface est vue de l'extérieur du solide.

Centre de masse

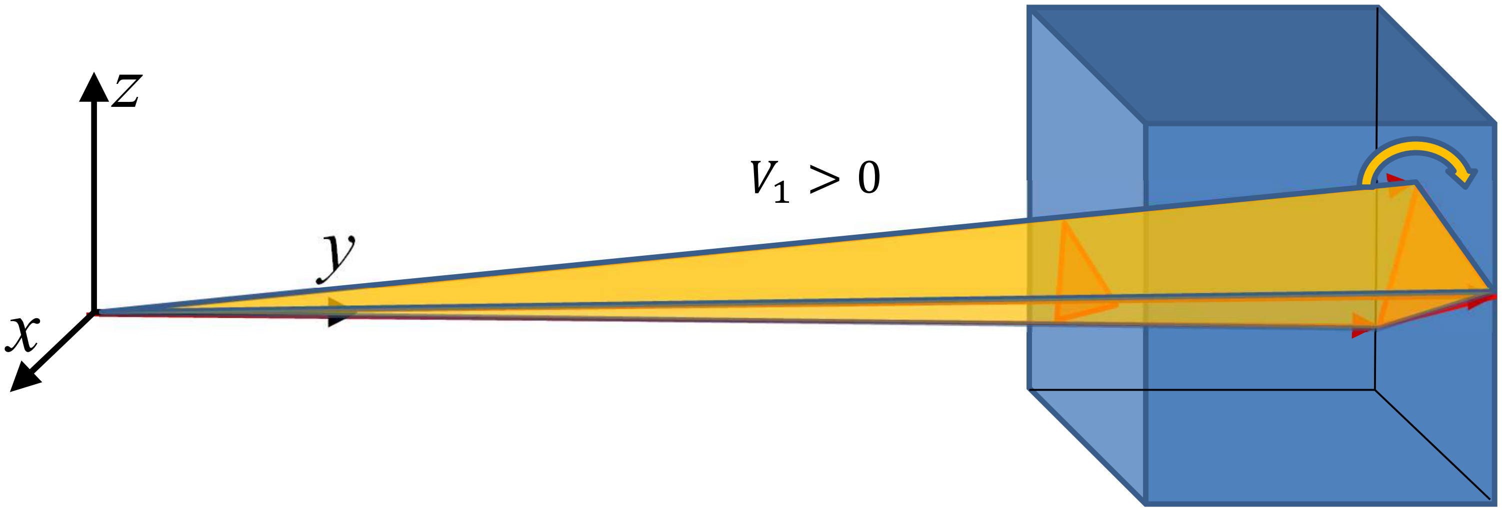




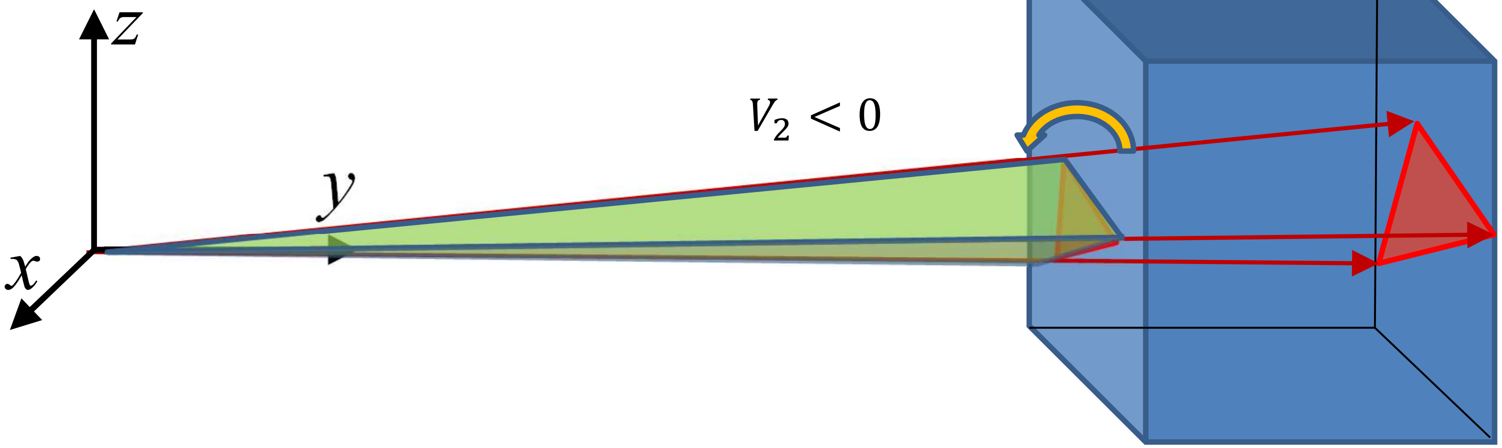
$$V = \sum_{i=1}^{N_S} dV_i$$

$$dV_i = \frac{\vec{a}_i \cdot \left(\vec{b}_i \times \vec{c}_i\right)}{6}$$

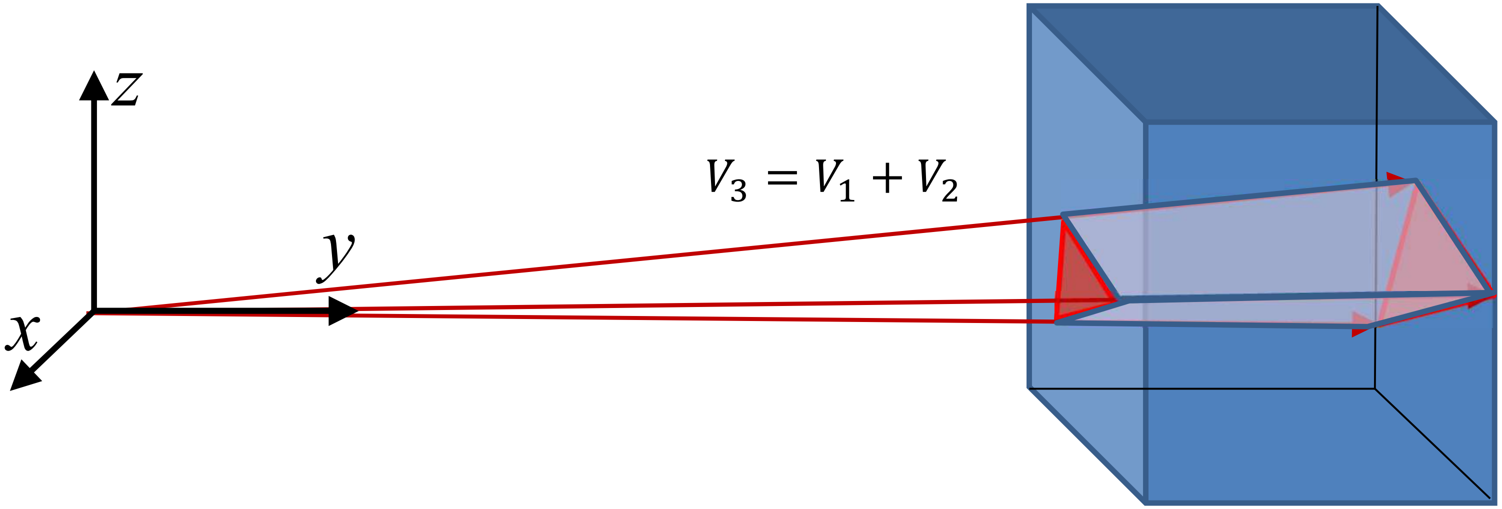
Centre de masse



Centre de masse



Centre de masse



Centre de masse

On peut aussi utiliser cette information afin de déterminer le centre de masse de l'objet en supposant qu'il a une masse volumique uniforme

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N_S} \vec{d}_i dV_i$$

$$\vec{d}_i = \frac{\vec{a}_i + \vec{b}_i + \vec{c}_i}{4}$$

$\vec{d}_i$ correspondant au centre de masse d'un polyèdre dont le quatrième sommet se situe à l'origine.

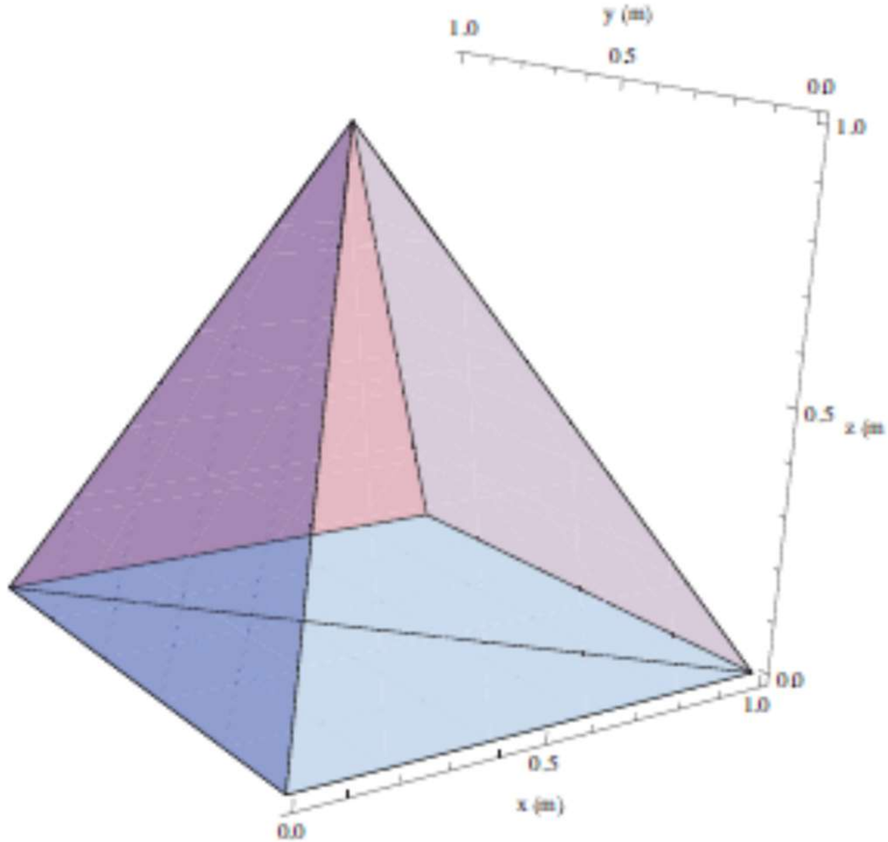
Centre de masse

Cet algorithme fonctionne seulement si l'objet satisfait la relation d'Euler suivante

$$\text{nombre de sommets} + \text{nombre de faces} - \text{nombre d'arrêtes} = 2$$

Exemple:

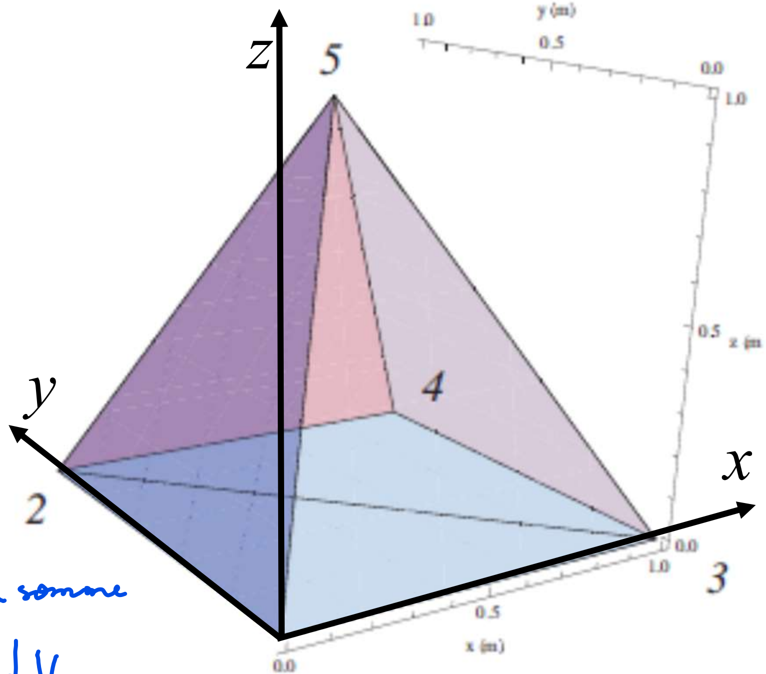
Volume et centre de masse d'une pyramide déformée



Exemple:

Volume et centre de masse d'une pyramide déformée

Sommet	x (m)	y (m)	z (m)
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0
3	1.0	0.0	0.0
4	1.0	1.0	0.0
5	0.2	0.2	1.0



triangle	$\vec{a}_i$	$\vec{b}_i$	$\vec{c}_i$	$\vec{dV}_i$	$\vec{d}_i$
1	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0,2\\0,2\\1\end{pmatrix}$	0	
2	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0,2\\0,2\\1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2,2\\1,2\\1\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0,2\\0,2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1,2\\2,2\\1\end{pmatrix}$
4				0	
5				0	
6				0	

la somme

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,2\\0,2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\begin{pmatrix}0,2\\0,2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1 \div 6=\frac{1}{6}$$

$$dV_i = \frac{\vec{a}_i\cdot(\vec{b}_i\cdot\vec{c}_i)}{6}$$

$$d_i = \frac{\vec{a}_i+\vec{b}_i+\vec{c}_i}{4}$$

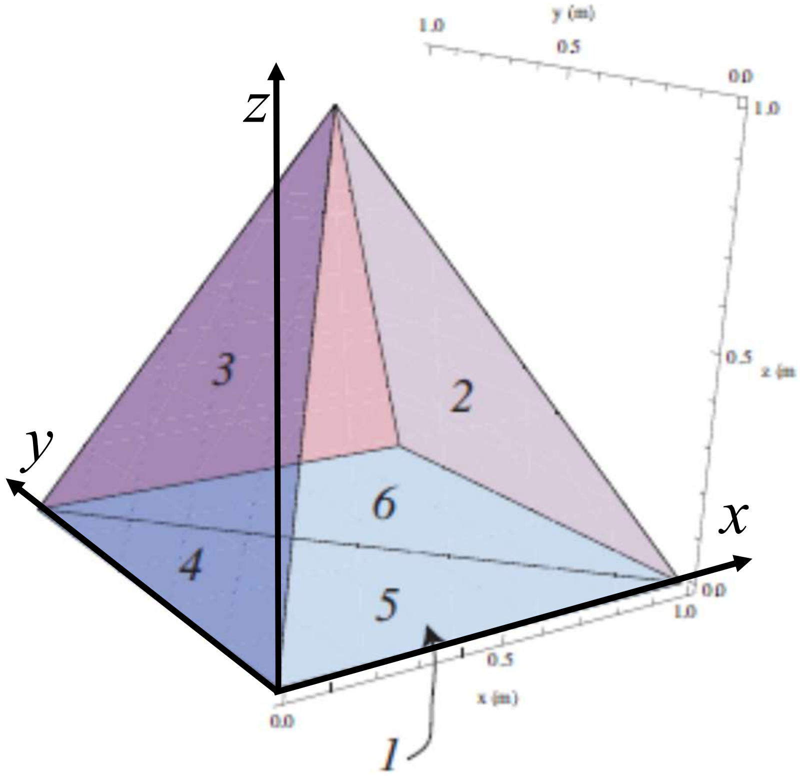
$$V=\sum_i dV_i = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V}\sum \vec{d}_i\, dV_i$$

$$=\frac{3}{6\cdot 4}\left[\begin{pmatrix}2,2\\1,2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1,2\\2,2\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0,425\\0,425\\0,25\end{pmatrix}$$

Exemple:

Volume et centre de masse d'une pyramide déformée



Moment d'inertie

Pour les solides, le moment d'inertie est utilisé dans les équations du mouvement pour la rotation.

- Le moment d'inertie par rapport au centre de masse représente la distribution de masse du corps autour d'un axe de rotation passant par ce centre de masse $\vec{r}_c$.
- En géométrie cartésienne, on peut définir le moment d'inertie $\boldsymbol{I}_c$ comme étant un vecteur représentant l'inertie de l'objet par rapport à une rotation autour des axes x, y et z.

$$I_c = \begin{pmatrix} I_{c,xx} & I_{c,xy} & I_{c,xz} \\ I_{c,yx} & I_{c,yy} & I_{c,yz} \\ I_{c,zx} & I_{c,zy} & I_{c,zz} \end{pmatrix} = \int_V \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} \rho(\vec{r})d^3r$$

en supposant le centre de masse localisé à l'origine.

Moments d’inertie de quelques géométries simples:

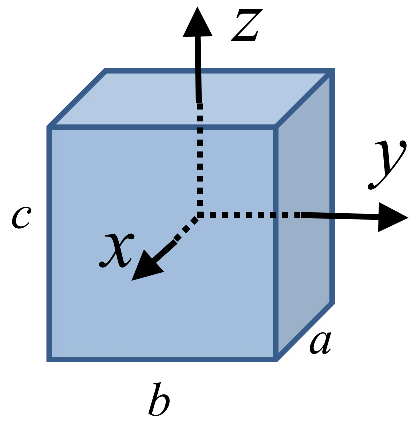
Parallélépipède dont les axes sont parallèles aux axes x (longueur a), y (largeur b) et z (hauteur c) par rapport à son centre de masse

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{c,xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_{c,yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$I_{c,zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$



Les termes non diagonaux sont nuls.

Moment d'inertie

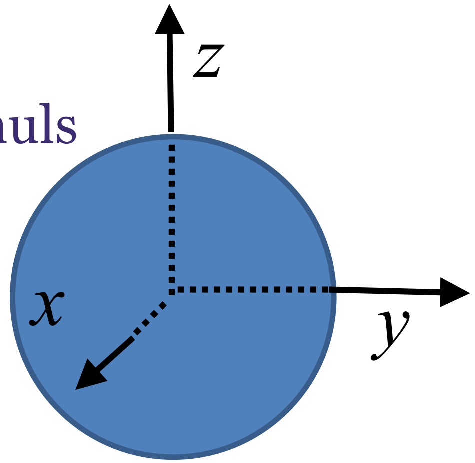
Moments d'inertie de quelques géométries simples:

Sphères de rayon r par rapport à son centre de masse

- ❑ Pleine

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = I_{c,zz} = \frac{2m}{5} r^2$$

Les termes hors de la diagonale sont nuls



- ❑ Creux

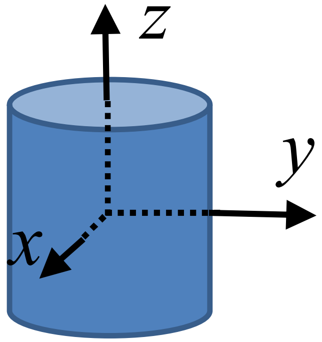
$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = I_{c,zz} = \frac{2m}{3} r^2$$

Les termes hors de la diagonale sont nuls.

Moment d'inertie

Moments d'inertie de quelques géométries simples:

Cylindre de rayon r et de longueur l aligné avec l'axe des z par rapport à son centre de masse



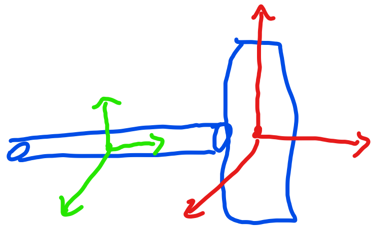
- Plein

$$I_{c,zz} = \frac{m}{2} r^2$$

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m}{4} r^2 + \frac{m}{12} l^2$$

Les termes hors de la diagonale sont nuls.

- Creux



$$I_{c,zz} = m r^2$$

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m}{2} r^2 + \frac{m}{12} l^2$$

Les termes hors de la diagonale sont nuls.

Moment d'inertie

Translation des axes (moment d'inertie par rapport à un point arbitraire).

On supposera que le moment d'inertie par rapport au centre de masse est donné par $\boldsymbol{I}_c$.
Le moment d'inertie par rapport au point $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$ devient

$$\boldsymbol{I}_d = \boldsymbol{I}_c + m\begin{pmatrix} d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2 & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2 & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_c + m\boldsymbol{T}(\vec{d}_c)$$

avec $\vec{d}_c = (d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z}) = \vec{d} - \vec{r}_c$

On voit immédiatement que même si la matrice $\boldsymbol{I}_c$ est diagonale, la matrice $\boldsymbol{I}_d$ ne l'est pas nécessairement. Cependant, elle demeure symétrique, car $\boldsymbol{T}(\vec{d}_c)$ est symétrique.

Moment d'inertie

Rotations des axes (moments d'inertie par rapport à des directions arbitraires).

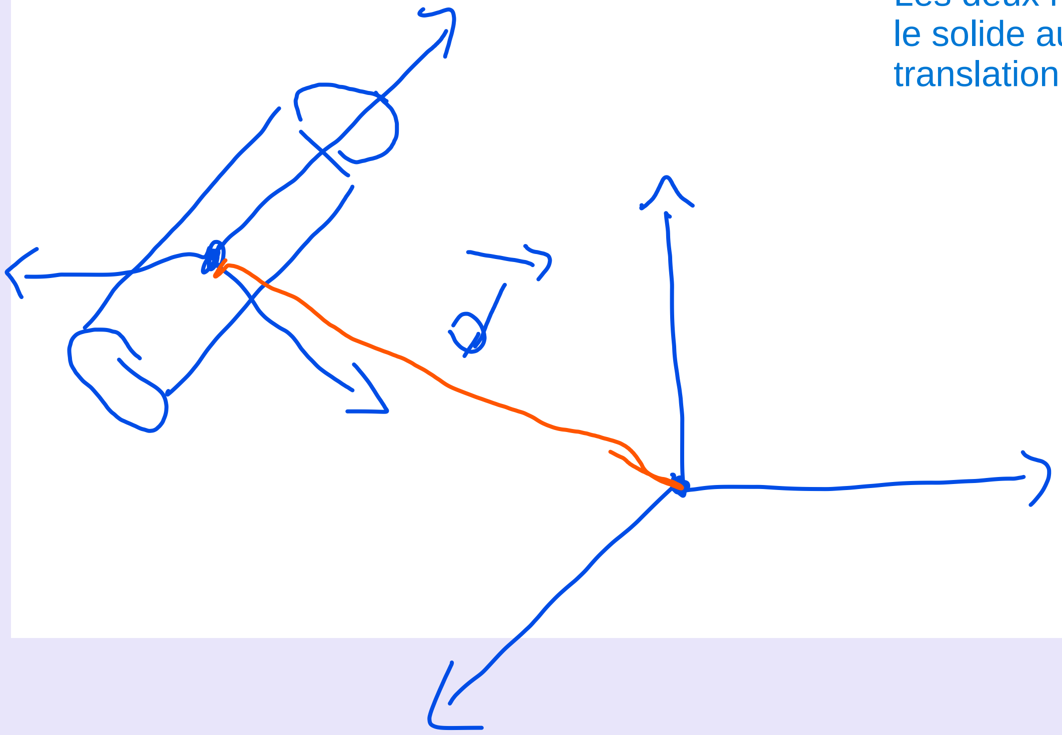
- Les moments d'inertie des parallélépipèdes et des cylindres sont donnés par rapport à un système d'axes qui leur est propre (en général les axes de référence de l'objet).
- Si le système d'axes de l'observateur (système 2) correspond à une rotation $\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1}$ par rapport au système de référence du solide (système 1), il faut aussi transformer les moments d'inertie de façon à refléter cette rotation (comme on l'a déjà vu)

$$\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1}\boldsymbol{I}^1(\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1})^T$$

Moment d'inertie

Les relations de transformation décrites ci-dessus sont utiles lorsqu'il est temps de reconstruire le moment d'inertie associé à un solide composé de différentes pièces, car il permet de ramener tous les solides dans un système d'axes parallèles, le moment d'inertie étant calculé par rapport au centre de masse commun (et de calculer correctement le moment d'inertie global du solide).

Les deux n'ont pas le même référentiel, donc on ramène le solide au point initial du référentiel principal par translation et ensuite on le tourne



Moment d'inertie

Pour calculer correctement le moment d'inertie du solide composé autour de son centre de masse, il faut donc procéder comme suit :

1. déterminer la masse totale du solide composé ;
2. déterminer la position du centre de masse du solide composé ;
3. déterminer le moment d'inertie $\boldsymbol{I}_{i,c}$ de chacun des éléments i du solide composé par rapport au centre de masse et aux axes locaux de cet élément ;

Moment d'inertie

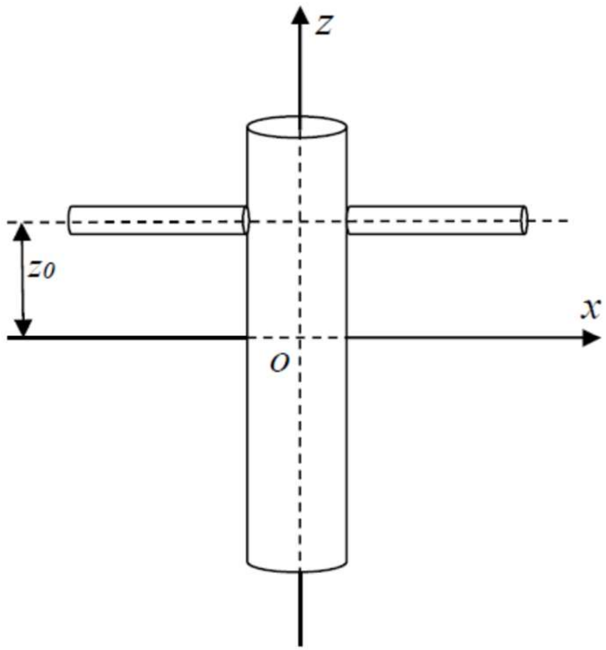
4. si requis, tourner le moment d'inertie ($\boldsymbol{I}_{i,c}^{R}$) de façon à ce que les axes locaux de chaque élément du solide soient parallèles aux axes du système du laboratoire ;
5. procéder à une translation du moment d'inertie ($\boldsymbol{I}_{i,c}^{RT}$) dans les axes du laboratoire du point $\vec{r}_{i,c}$ vers $\vec{r}_c$;
6. sommer les moments d'inertie, après rotation et translation, de chacune des parties du solide

$$\boldsymbol{I}_c = \sum_i \boldsymbol{I}_{i,c}^{RT} ,$$

Moment d'inertie: Exemple

Question 1. Patineuse artistique (20 points)

Une patineuse artistique fait des pirouettes sur la glace en tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = (0, 0, 5)$ rad/s. Lorsque la patineuse écarte les bras, son corps peut être assimilé à un assemblage de trois cylindres pleins comme illustré sur la figure ci-dessous: un cylindre principal vertical C_p représentant à la fois les jambes, le torse et la tête et deux autres petits cylindres horizontaux C_g et C_d représentant les bras gauche et droit. Le cylindre principal à une masse $M = 50$ kg, une hauteur $H = 1.8$ m et un rayon $R = 0.2$ m. Les deux cylindres représentant les bras sont identiques et chacun d'eux a une masse $m = 5\ kg$, une longueur $h = 0.6$ m et un rayon $r = 0.06$ m. On choisit le centre de masse du cylindre principal comme origine des axes et le plan contenant les centres de masse des trois cylindres comme plan xz. La position verticale des deux bras est $z_0 = 0.6$ m.



Moment d'inertie

Question 1. Patineuse artistique (20 points)

Une patineuse artistique fait des pirouettes sur la glace en tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = (0, 0, 5)$ rad/s. Lorsque la patineuse écarte les bras, son corps peut être assimilé à un assemblage de trois cylindres pleins comme illustré sur la figure ci-dessous: un cylindre principal vertical C_p représentant à la fois les jambes, le torse et la tête et deux autres petits cylindres horizontaux C_g et C_d représentant les bras gauche et droit. Le cylindre principal à une masse $M = 50$ kg, une hauteur $H = 1.8$ m et un rayon $R = 0.2$ m. Les deux cylindres représentant les bras sont identiques et chacun d'eux a une masse $m = 5\ kg$, une longueur $h = 0.6$ m et un rayon $r = 0.06$ m. On choisit le centre de masse du cylindre principal comme origine des axes et le plan contenant les centres de masse des trois cylindres comme plan xz. La position verticale des deux bras est $z_0 = 0.6$ m.

(a) **(3 points)** Déterminer la position $\vec{r}_c$ du centre de masse de la patineuse (système formé par les 3 cylindres).

(b) **(10 points)** Déterminer le moment d'inertie de la patineuse par rapport à son centre de masse.

(c) **(2 points)** Déterminer le moment cinétique $\vec{L}$ de la patineuse.

(d) **(5 points)** À un instant t_0, la patineuse décide de toucher la glace avec la pointe d'un de ses patins afin d'arrêter de tourner sur elle-même. Ceci produit un moment de force constant $\vec{\tau} = (0, 0, -0.75)$ Nm qui ralentit son mouvement de rotation jusqu'à l'arrêt complet à l'instant t_1. Quel est le temps nécessaire $\Delta t = t_1 - t_0$ à la patineuse pour s'arrêter de tourner.

Conclusions

Pour étudier la trajectoire d'un solide, il faut connaître :

les équations du mouvement pour le centre de masse

$$d\vec{v}_c(t)/dt = \vec{a}_c(t) = \vec{F}(t)/m$$

$$d\vec{r}_c(t)/dt = \vec{v}_t(t)$$

les équations du mouvement de rotation du solide

$$d\vec{\omega}(t)/dt = (\boldsymbol{I}(t))^{-1}[\vec{\tau}(t) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)]$$

$$d\boldsymbol{R}(t)/dt = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{R}(t)$$

avec $\widetilde{\omega}(t)$ la matrice correspondant au produit vectoriel de $\vec{\omega}(t)$ avec un vecteur arbitraire.

Conclusions

Dans le prochain chapitre, nous verrons:

1. comment résoudre les équations de la cinématique des particules ;
2. comment résoudre les équations de la cinématique des solides ;
3. des méthodes robustes pour résoudre numériquement des équations différentielles ordinaires ;
4. les problèmes associés aux solutions numériques de problèmes de cinématique lorsque des collisions se produisent.