Patineuse artistique

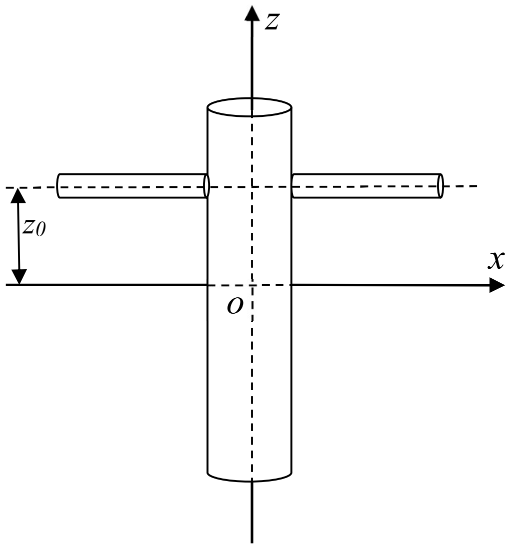
Une patineuse artistique fait des pirouettes sur la glace en tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = (0, 0, 5)$ rad/s. Lorsque la patineuse écarte les bras, son corps peut être assimilé à un assemblage de trois cylindres pleins comme illustré sur la figure ci-dessous: un cylindre principal vertical C_p représentant à la fois les jambes, le torse et la tête et deux autres petits cylindres horizontaux C_g et C_d représentant les bras gauche et droit. Le cylindre principal à une masse $M = 50$ kg, une hauteur $H = 1.8$ m et un rayon $R = 0.2$ m. Les deux cylindres représentant les bras sont identiques et chacun d'eux a une masse $m = 5\ kg$, une longueur $h = 0.6$ m et un rayon $r = 0.06$ m. On choisit le centre de masse du cylindre principal comme origine des axes et le plan contenant les centres de masse des trois cylindres comme plan xz. La position verticale des deux bras est $z_0 = 0.6$ m.

(a) Déterminer la position $\vec{r}_c$ du centre de masse de la patineuse (système formé par les 3 cylindres).

(b) Déterminer le moment d'inertie de la patineuse par rapport à son centre de masse.

(c) Déterminer le moment cinétique $\vec{L}$ de la patineuse.

(d) À un instant t_0, la patineuse décide de toucher la glace avec la pointe d'un de ses patins afin d'arrêter de tourner sur elle-même. Ceci produit un moment de force constant $\vec{\tau} = (0, 0, -0.75)$ Nm qui ralentit son mouvement de rotation jusqu'à l'arrêt complet à l'instant t_1. Quel est le temps nécessaire $\Delta t = t_1 - t_0$ à la patineuse pour s'arrêter de tourner.



Solution :

(a) Déterminer la position $\vec{r}_c$ du centre de masse de la patineuse (système formé par les 3 cylindres) comme illustré à la figure ci-dessous. et les centres de masse des trois cylindres sont dans le plan xz.

La position du centre de masse est donnée par :

$$\vec{r}_c = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \vec{r}_{c,i}$$

où m_i *et* $\vec{r}_{c,i}$ *sont la masse et la position du cylindre* i*.*

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M+2m} \left(M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} R + \frac{h}{2} \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -R - h/2 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{r}_c = (0, 0, 0.1)\ m$$

(b) Déterminer le moment d'inertie de la patineuse par rapport à son centre de masse.

Soit I_p, I_g et I_d les moments d'inertie des cylindres C_p, C_g et C_d par rapport au centre de masse de la patineuse. En appliquant la formule donnant le moment d'inertie d'un cylindre plein et en appliquant la correction due au fait que le cylindre ne tourne pas autour de son centre de masse mais plutôt autour du centre de masse de la patineuse situé à $\vec{r}_c$:

$$I_p = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} 3R^2 + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} z_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & z_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.5 & 0 & 0 \\ 0 & 14.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Kg.m^2$$

où z_c est 3^e^ composante de $\vec{r}_c$.

On fait la même chose pour I_g et I_d mais cette fois, la correction concernent les vecteur $\vec{d}_g = (x_0, 0, -z_0 + z_c)$ du centre de masse du cylindre gauche et $\vec{d}_d = (-x_0, 0, -z_0 + z_c)$ du centre de masse du cylindre droit avec $x_0 = R + h/2 = 0.5\ m$.

$$I_g = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 6r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3r^2 + h^2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} (z_0 - z_c)^2 & 0 & -x_0(z_0 - z_c) \\ 0 & x_0^2 + (z_0 - z_c)^2 & 0 \\ -x_0(z_0 - z_c) & 0 & (z_0 - z_c)^2 \end{pmatrix}$$

$$I_g = \begin{pmatrix} 0.009 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1545 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1545 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 1.25 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 1.25 & 0 & 1.25 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1.259 & 0 & 1.25 \\ 0 & 2.6545 & 0 \\ 1.25 & 0 & 1.4045 \end{pmatrix} Kg.m^2$$

$$I_d = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} 6r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2+h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3r^2+h^2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} (z_0-z_c)^2 & 0 & x_0(z_0-z_c) \\ 0 & x_0^2+(z_0-z_c)^2 & 0 \\ x_0(z_0-z_c) & 0 & (z_0-z_c)^2 \end{pmatrix}$$

$$I_d = \begin{pmatrix} 1.259 & 0 & -1.25 \\ 0 & 2.6545 & 0 \\ -1.25 & 0 & 1.4045 \end{pmatrix} Kg.m^2$$

Le moment d'inertie demandéest donc :

$$\boldsymbol{I} = I_p + I_g + I_d = \begin{pmatrix} 17.018 & 0 & 0 \\ 0 & 19.809 & 0 \\ 0 & 0 & 3.809 \end{pmatrix} Kg.m^2$$

(c) Déterminer le moment cinétique $\vec{L}$ de la patineuse.

Le moment cinétique $\vec{L}$ est donné par :

$$\vec{L} = \boldsymbol{I}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 17.018 & 0 & 0 \\ 0 & 19.809 & 0 \\ 0 & 0 & 3.809 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 19.045 \end{pmatrix} Kg.m^2/s$$

(d) À un instant t_0, la patineuse décide de toucher la glace avec la pointe d'un de ses patins afin d'arrêter de tourner sur elle-même. Ceci produit un moment de force constant $\vec{\tau} = (0, 0, -0.75)$ Nm qui ralentit son mouvement de rotation jusqu'à l'arrêt complet à l'instant t_1. Quel est le temps nécessaire $\Delta t = t_1 - t_0$ à la patineuse pour s'arrêter de tourner.

Le moment de force produit une variation du moment cinétique qui devient nul à l'arrêt de la rotation.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{\tau}dt = d\vec{L}$$

En intégrant sur toute la durée du freinage, on obtient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{\tau}.dt = \int_{\vec{L}}^{0} d\vec{L'}$$

Soit :

$$\vec{\tau}.\Delta t = -\vec{L}$$

La 3^e^ composante de cette équation donne :

$$\Delta t = \frac{-1\ \ .045}{-0.75} \approx 25.4s$$