Question 3. Réflexion et réfraction de la lumière (20 points)

Un rayon lumineux polarisé TE unidirectionnel d'intensité I_i provenant d'une source localisée à $\vec{r}_i = (1, 0, 3)^T$ m se propage dans le vide. Il atteint une sphère de verre transparente d'indice de réfraction $n_s = 1.5$ au point $\vec{r}_p = (1, 1.95, 4.0)^T$ m. Cette sphère de rayon $R = 5$ cm est centrée au point $\vec{r}_s = (1, 2, 4)^T$m.

(a) (**3 points**) Déterminer la direction de propagation de ce rayon lumineux (vecteur unitaire incident $\hat{u}_i$) et la normale unitaire sortante $\hat{\imath}$ à la surface de la sphère au point $\vec{r}_p$?

(b) (**10 points**) Déterminer les vecteurs unitaires $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_t$ indiquant respectivement la direction du rayon réfléchi et du rayon transmis à travers le verre.

(c) (**7 points**) Quel sera le rapport I_t/I_i entre l'intensité du rayon lumineux transmis à travers la sphère et l'intensité du rayon incident ?

Solution :

*(a) **(3 points)** Déterminer la direction de propagation de ce rayon lumineux (vecteur unitaire incident $\hat{u}_i$) et la normale unitaire sortante $\hat{\imath}$ à la surface de la sphère au point $\vec{r}_p$?*

Le vecteur unitaire incident est donné par

$$\hat{u}_i = \frac{\vec{r}_p - \vec{r}_i}{|\vec{r}_p - \vec{r}_i|} = (0, 0.8898, 0.4563)^T$$

et la normale unitaire sortante est donnée par

$$\hat{\imath} = \frac{\vec{r}_p - \vec{r}_s}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|} = (0, -1, 0)^T$$

*(b) **(10 points)** Déterminer les vecteurs unitaires $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_t$ indiquant respectivement la direction du rayon réfléchi et du rayon transmis à travers le verre.*

Le vecteur unitaire du rayon réfléchi est donné par :

$$\hat{u}_r = \hat{u}_i - 2\,\hat{\imath}(\hat{u}_i.\hat{\imath})$$

où $\hat{\imath} = (0, -1, 0)^T$ est le vecteur unitaire normal à la surface de la sphère. On obtient donc

$$\hat{u}_r = (0, 0.8898, 0.4563)^T - 2(0, 0.8898, 0)^T = (0, -0.8898, 0.4563)^T$$

Le vecteur unitaire du rayon transmis est donné par :

$$\hat{u}_t = -\,\hat{\imath}\sqrt{1 - (\sin\theta_t)^2} + \hat{k}\sin\theta_t$$

avec

$$\sin\theta_t = \frac{1}{1.5}\sin\theta_i = \frac{1}{1.5}\hat{u}_i \cdot \hat{k}$$

Pour évaluer $\hat{k}$ on utilise

$$\hat{\jmath} = \frac{\hat{u}_i \cdot \hat{\imath}}{|\hat{u}_i \cdot \hat{\imath}|} = (1, 0, 0)^T$$

suivi de $\hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = (0, 0, 1)^T$. On obtient alors $\sin\theta_i = 0.4563$ et $\sin\theta_t = 0.3042$ et le vecteur $\hat{u}_t$ est finalement donné par

$$\hat{u}_t = (0, 0.9526, 0.3042)^T$$

*(c) **(5 points)** Quel sera le rapport I_t/I_i entre l'intensité du rayon lumineux transmis à travers la sphère et l'intensité du rayon incident ?*

L'angle d'incidence θ_i *est donné par :*

$$\theta_i = \arcsin(0.4563) = 0.4739\ rad$$

L'angle de réfraction θ_t *est donné par :*

$$\theta_t = \arcsin(0.3042) = 0.3091\ rad$$

Le rapport de l'intensité transmise sur l'intensité incidente est donné par le coefficient de transmission $T_{TE} = 1 - R_{TE}$ *des ondes électromagnétiques polarisées TE :*

$$\frac{I_t}{I_i} = 1 - R_{TE} = 1 - \left(\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\sin(0.3091 - 0.4738)}{\sin(0.3091 + 0.4738)}\right)^2 \approx 0.9459$$

Le signal lumineux est donc transmis presque totalement à travers la sphère.