Le cône

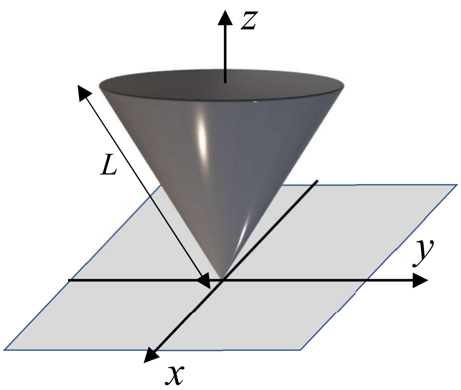
Un cône est posé à l'envers (sur la pointe) sur une table horizontale tel que représenté sur la figure ci-dessous (position initiale) puis relâché. On choisit le référentiel du laboratoire tel que son origine est confondue avec la pointe du cône et l'axe z est vertical. Le plan xy sera donc le plan de table.

Après l'avoir relâché, le cône tombe dans le 4^{e} quadrant du plan xy faisant un angle de 45° avec l'axe ox (voir la figure ci-dessous) et s'immobilise dans cette nouvelle position.
On donne pour le cône : La longueur de sa génératrice (voir la figure ci-dessous) est $L = 4$ cm et le rayon de sa base est $R = 2$ cm.

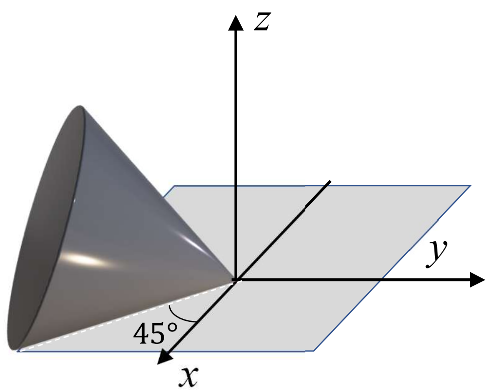
a) Obtenir l'angle θ et le vecteur unitaire $\hat{u}$ de l'axe de la rotation qu'a subi le cône.

b) Déterminer le quaternion associé à cette rotation.

c) Calculer le vecteur position final $\overrightarrow{r'}_A$ du point A appartenant au cône sachant que sa position initiale est donnée par $\vec{r}_A = (0;\ 1;\ 2)^T$cm en utilisant le quaternion de rotation obtenu en b).



Position initiale



Position finale

Solution :

a) Obtenir l'angle θ et le vecteur unitaire $\hat{u}$ de l'axe de la rotation qu'a subi le cône.

On peut obtenir directement l'angle θ en remarquant que le côté du cône est initialement incliné d'un angle α par rapport à la verticale tel que :

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{R}{L} = \frac{\pi}{6}$$

et

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{3}}$$

On peut aussi établir que l'axe de rotation est la première bissectrice du plan *xy* et $\hat{u}$ est dans le sens positif soit :

$$\boxed{\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

b) Déterminer le quaternion associé à cette rotation.

Soit $\overset{\rightrightarrows}{R}$ le quaternion recherché. Celui-ci est donné par :

$$\overset{\rightrightarrows}{R} = \begin{pmatrix}\cos\pi/6\\(\sin\pi/6)/\sqrt{2}\\(\sin\pi/6)/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overset{\rightrightarrows}{R} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

c) Calculer le vecteur position final $\overrightarrow{r'}_A$ du point A appartenant au cône sachant que sa position initiale est donnée par $\vec{r}_A = (0;\ 0.1;\ 0.2)^T$ en utilisant le quaternion de rotation obtenu en b).

On associe un quaternion $\overset{\rightrightarrows}{r}_A$ au vecteur $\vec{r}_A$:

$$\overset{\rightrightarrows}{r}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Le quaternion $\overset{\rightrightarrows}{r'}_A$ associé à $\overrightarrow{r'}_A$est donné par :

$$\vec{\vec{r'}}_A = \vec{\vec{R}}\,\vec{\vec{r}}_A\,\vec{\vec{R}}^*$$

avec $\vec{\vec{R}}^*$ le complexe conjugué de $\vec{\vec{R}}$ soit :

$$\vec{\vec{R}}^* = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\vec{\vec{r'}}_A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\2\\\sqrt{6}-2\\2\sqrt{6}+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{r'}}_A = \frac{2}{8}\begin{pmatrix}0\\1+\sqrt{6}\\3+2\sqrt{6}\\4+2\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{r'}_A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+2\sqrt{6}\\3-2\sqrt{6}\\4+\sqrt{6}\end{pmatrix}\ \text{cm}}$$