PHS4700 Physique pour les applications multimédia

Exemple d'examen final

x **Instructions :**

- Toute la documentation papier est permise.
- Les calculatrices non programmables sont permises.
- Durée de l'examen : 2.5 heures
- Rendre le questionnaire (6 pages) avec les cahiers de réponses.

Question 1. Connaissances générales (15 points)

(a) (**5 points**) Déterminer la direction de la force de Magnus pour une sphère ayant une vitesse angulaire $\vec{\omega} = (0, 1, 0)$ rad/s et une vitesse linéaire $\vec{v} = (1, 1, 1)$ m/s.

(b) (**5 points**) Une balle de golf de rayon $r_b = 2.2$ cm qui se déplace sur le gazon avec une vitesse (centre de masse) $\vec{v}_b = (25, 0, 0)$ cm/s et une vitesse de rotation $\vec{\omega} = (0, 10, 0)$ rad/s roule-t-elle ou glisse-t-elle?

(c) (**5 points**) Une auto-patrouille vous poursuit sur une autoroute à une vitesse de 150 km/h alors que vous vous déplacez à 120 km/h. Quelle sera la fréquence sonore que vous percevrez si la sirène de l'auto-patrouille émet un bref signal sonore à 500 Hz? Vous pouvez supposer que la température de l'air ambiant est de 0 C.

Solution

*(a) (**5 points**) Déterminer la direction de la force de Magnus pour une sphère ayant une vitesse angulaire $\vec{\omega} = (0, 1, 0)$ rad/s et une vitesse linéaire $\vec{v} = (1, 1, 1)$ m/s.*

La force de Magnus est donnée par

$$\vec{F}^M = 2\pi\rho L r^2(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

sa direction est donc donnée par

$$\vec{u} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}$$

En utilisant les données du problème, $\vec{\omega} \times \vec{v} = (1, 0, -1)$ et la force sera dirigée dans la de la ligne $x = -z$.

*(b) (**5 points**) Une balle de golf de rayon $r_b = 2.2$ cm qui se déplace sur le gazon avec une vitesse (centre de masse) $\vec{v}_b = (25, 0, 0)$ cm/s et une vitesse de rotation $\vec{\omega} = (0, 10, 0)$ rad/s roule-t-elle ou glisse-t-elle?*

Un objet qui roulerait sur la surface avec une vitesse de rotation $\vec{\omega}$ produirait une vitesse de déplacement linéaire du centre de masse résultant du roulement donnée par

$$\vec{v}_{\textit{roulement}} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{p,c}$$

où $\vec{p}$ est le point de contact de l'objet avec la surface par rapport au centre de masse de l'objet. Dès que $\vec{v}_{\textit{roulement}}$ est déférente de la vitesse linéaire du centre de masse du solide $\vec{v}_c$ l'objet glisse. Sinon, l'objet roule. On peut déterminer la transition entre roulement *et glissement en déterminant le temps t où $\vec{v}_c = \vec{v}_{roulement}$. On sait que pour une balle de golf, localisée à une position arbitraire (x, y) sur le terrain, $\vec{p} = (0, 0, -r_b)$. En utilisant les données du problème, on aura donc*

$$\vec{v}_{roulement} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{p,c} = (22, 0, 0) \text{ cm/s}$$

qui est inférieure à la vitesse de déplacement linéaire de l'objet. La balle glisse donc.

(c) ***(5 points)*** *Une auto-patrouille vous poursuit sur une autoroute à une vitesse de 150 km/h alors que vous vous déplacez à 120 km/h. Quelle sera la fréquence sonore que vous percevrez si la sirène de l'auto-patrouille émet un bref signal sonore à 500 Hz? Vous pouvez supposer que la température de l'air ambiant est de 0 C.*

À une température de 0 C, la vitesse du son dans l'air est de 331.3 m/s. On supposera ici que la direction de déplacement des deux autos ($\vec{v}_{vous}$ et $\vec{v}_{policier}$) est parallèle et dans la même direction que $\vec{u}$, la direction de la ligne joignant les deux autos. On pourra alors écrire

$$\beta_r = \frac{120}{331.3 \times 3.6} = 0.1006$$
$$\beta_s = \frac{150}{331.3 \times 3.6} = 0.1258$$

la fréquence que vous percevrez étant

$$\nu_r = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_s} \nu_s = 514 \text{ Hz}$$

Question 2. Moment de force et vitesse angulaire en apesanteur (20 points)

Un cube de masse $M_s = 1$ kg et de côté $a = 0.2$ m flotte dans l'espace, son centre de masse étant localisé au point $\vec{r}_c = (2, 3, 1)$ m. On applique une force externe $\vec{F}_e = (0, 0, -10)$ N sur le coin du cube localisé à $\vec{r}_e = (2.1, 2.9, 0.9)$. Vous supposerez que les axes du cube sont alignés avec les axes x, y, et z. La seule force dont il faut tenir compte est la force externe.

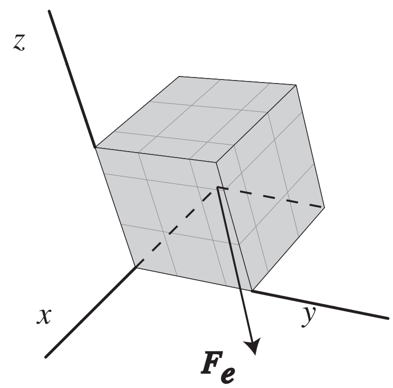

Figure 1: Cube qui flotte dans l'espace et sur lequel une force externe est appliquée.

(a) (**7 points**) Calculer le moment de force et l'accélération angulaire autour du centre de masse du cube qui résultent de la force externe.

(b) (**6 points**) Déterminer la matrice correspondant à une rotation du cube d'un angle $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x.

(c) (**7 points**) Déterminer le moment de force et l'accélération angulaire dans le système local du cube après que celui-ci ait effectué une rotation de $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x (les faces du cube après rotation sont perpendiculaires aux axes x, y' et z' du système local du cube). Vous supposerez que la force externe est toujours appliquée au même coin du cube.

Solution

(a) ***(7 points)*** *Calculer le moment de force et l'accélération angulaire autour du centre de masse du cube qui résultent de la force externe.*

Le moment de force correspond au produit vectoriel de la force externe appliquée au point $\vec{r}_e$ et du vecteur joignant le centre de masse du cube à $\vec{r}_c$ à ce point

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_e - \vec{r}_c) \times \vec{F}_e = (0.1, -0.1, -0.1) \times (0, 0, -10) = (1, 1, 0)\ \textit{N m}$$

L'accélération angulaire est pour sa part donnée par

$$\vec{\alpha} = (\mathcal{I})^{-1}\vec{\tau}$$

avec $\mathcal{I}$ le moment d'inertie du cube donné par

$$\mathcal{I} = \frac{M_s a^2}{6}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et donc

$$(\mathcal{I})^{-1} = \frac{6}{M_s a^2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$= 150\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et donc

$$\vec{\alpha} = (150, 150, 0) \textit{ rads/s}^2$$

(b) ***(6 points)*** *Déterminer la matrice correspondant à une rotation de la sphère d'un angle $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x.*

La matrice pour une rotation d'un angle θ autour de l'axe des x est donnée par

$$R_x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Sachant que $\cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\sin(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ on obtient

$$R_x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(c) ***(7 points)*** *Déterminer le moment de force et l'accélération angulaire dans le système local du cube après que celui-ci ait effectué une rotation de $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x (les faces du cube après rotation sont perpendiculaires aux axes x, y' et z' du système local du cube). Vous supposerez que la force externe est toujours appliquée au même coin du cube.*

Pour le cube ayant effectué une rotation, la force externe est toujours $\vec{F}_e = (0, 0, -10)$. *On peut ramener cette force dans le système local du cube en lui faisant subir une rotation de* $\pi/4$ *autour de l'axe des* x*, ce qui correspond à utiliser la matrice de rotation* $(R_x)^{-1} = (R_x)^T$. *On aura donc dans ce système local*

$$\vec{F}_e' = (R_x)^T \vec{F}_e = (0, 5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$$

Le moment de force est alors

$$\vec{\tau}' = (\vec{r}_e - \vec{r}_c) \times \vec{F}_e' = (0.1, -0.1, -0.1) \times (0, 5\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\ \textit{N m}$$

et l'accélération angulaire dans le système du cube est

$$\vec{\alpha}' = (\mathcal{I})^{-1}\vec{\tau}' = 75\sqrt{2}\,(2, 1, 1)$$

Question 3. Résolution numérique des équations du mouvement (20 points).

Une fusée de vitesse initiale $v_z(0) = 0$ m/s lancée de la surface de la Terre ($z(0) = 0$ m) subit une force gravitationnelle $F_g(z,t)$ ayant la forme

$$F_g(z,t) = -9.8\frac{m(t)}{(1 + 1.5 \times 10^{-7} z(t))^2}$$

où z est la position de la fusée par rapport au sol et $m(t)$ la masse de la fusée en fonction du temps donnée par la relation

$$m(t) = m_0 - kt$$

car la fusée de masse initiale $m_0 = 1250$ kg éjecte des gaz de combustion à un rythme de $k = 50$ kg/s. La force $F_e(t)$ que ces gaz exercent sur la fusée est donnée par

$$F_e(t) = ku$$

car ils sont éjectés avec une vitesse relative constante $u = 600$ m/s.

(a) (**8 points**) Quelles sont les équations du mouvement (en 1D) qui doivent être résolues afin de déterminer la vitesse $v_z(t)$ et la position $z(t)$ de la fusée en tout temps?

(b) (**12 points**) En utilisant la méthode de Euler avec un pas de temps $\Delta t = 1.0$ s, déterminer la vitesse et la position de la fusée à $t = 2.0$ s.

Solution

*(a) (**8 points**) Quelles sont les équations du mouvement (en 1D) qui doivent être résolues afin de déterminer la vitesse $v_z(t)$ et la position $z(t)$ de la fusée en tout temps?*

Les équations du mouvement sont données par

$$\frac{dv_z(t)}{dt} = a_z(z(t),t)$$
$$\frac{dz(t)}{dt} = v_z(t)$$

avec

$$a_z(z(t),t) = \frac{1}{m(t)}\left(F_g(z(t),t) + F_e(t)\right) = \frac{ku}{m_0 - kt} - 9.8\frac{1}{(1 + 1.5 \times 10^{-7} z(t))^2}$$

(b) ***(12 points)*** *En utilisant la méthode de Euler avec un pas de temps $\Delta t = 1.0$ s, déterminer la vitesse et la position de la fusée à $t = 2.0$ s.*

La solution de ce problème par la méthode de Euler est

$$\begin{aligned} v_z(t+\Delta t) &= v_z(t) + a_z(z(t),t)\Delta t \\ z(t+\Delta t) &= z(t) + v_z(t)\Delta t \end{aligned}$$

Ici, si on utilise un pas de temps $\Delta t = 1.0$ s, on doit appliquer la méthode de Euler deux fois pour obtenir la solution à $t = 2.0$ s. En utilisant

$$\begin{aligned} z(0) &= 0 \text{ m} \\ v_z(0) &= 0 \text{ m/s} \\ a_z(z(0),0) &= \frac{ku}{m_0} - 9.8 = 24 - 9.8 = 14.2 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} v_z(1) &= 14.2 \text{ m/s} \\ z(1) &= 0 \text{ m} \end{aligned}$$

et en utilisant

$$a_z(z(1),1) = \frac{ku}{m_0 - k} - 9.8 = 25 - 9.8 = 15.2 \text{ m/s}^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} v_z(2) &= v_z(1) + a_z(1)\Delta t = 29.4 \text{ m/s} \\ z(2) &= z(1) + v_z(1)\Delta t = 14.2 \text{ m} \end{aligned}$$

Question 4. Tir d'une boîte de conserve en chute libre avec une balle (25 points).

Le but du jeu est de frapper une boîte de conserve cylindrique avec une balle de façon à la faire dévier. La balle à un rayon $R_{\text{balle}} = 5$ cm et une masse $m_{\text{balle}} = 150$ g. La boîte de conserve pleine, de hauteur $h_{\text{boîte}} = 12$ cm, de rayon $R_{\text{boîte}} = 3$ cm et de masse $m_{\text{boîte}} = 450$ g, est alignée avec l'axe de z.

(a) (**15 points**) En supposant qu'au temps t, le centre de masse de la balle est localisé à $\vec{r}_{\text{balle}}(t)$ et que celui de la boîte de conserve est à $\vec{r}_{\text{boîte}}(t)$, décrire l'algorithme requis pour déterminer s'il y a un contact entre la balle et la boîte.

(b) (**10 points**) En utilisant cet algorithme, déterminer le point de contact entre la balle et la boîte si les positions des centres de masse de la balle et de la boîte de conserve sont respectivement $\vec{r}_{\text{balle}} = (-0.06, 0.0, 4)$ m et $\vec{r}_{\text{boîte}} = (0, 0, 3.90)$ m.

Solution

(a) ***(15 points)*** *En supposant qu'au temps t, le centre de masse de la balle est localisé à $\vec{r}_{\textit{balle}}(t)$ et que celui de la boîte de conserve est à $\vec{r}_{\textit{boîte}}(t)$, décrire l'algorithme requis pour déterminer s'il y a un contact entre la balle et la boîte.*

Ici, nous considérerons successivement les trois types de collision possibles:

- *Collision avec le dessous ou le dessus de la boîte.*
- *Collision avec le côté de la boîte.*
- *Collision avec un coin (dessous ou dessus) de la boîte.*

Nous déplacerons aussi le système de façon à ce qu'il soit centré à $\vec{r}_{\textit{boîte}}(t)$. Dans ce nouveau système

$$\vec{r}_{t,\textit{boîte}}(t) = (0,0,0)^T$$
$$\vec{r}_{t,\textit{balle}}(t) = \vec{r}_{\textit{balle}}(t) - \vec{r}_{\textit{boîte}}(t)$$

L'algorithme de détection est alors le suivant.

i. *Collision avec le fond ou le dessus de la boîte. Le centre de masse de la balle dans le plan $x - y$ doit alors être tel qu'il se retrouve dans la projection du cylindre dans ce même plan. Donc*

$$(x_{t,\textit{balle}})^2 + (y_{t,\textit{balle}})^2 < (R_{\textit{boîte}})^2$$

la collision avec la face du haut correspondant à

$$z_{t,balle} - h_{\text{boîte}}/2 \leq R_{balle}$$

le cas $<$ *correspondant à une pénétration (il faut alors reculer la simulation pour atteindre l'égalité). Le point de contact se situe à*

$$\vec{r}_{contact} = (x_{t,balle}, y_{t,balle}, h_{\text{boîte}}/2)^T$$

Pour la collision avec la surface du bas, on utilise la condition

$$z_{t,balle} + h_{\text{boîte}}/2 \geq -R_{balle}$$

le cas $>$ *correspondant à une pénétration (il faut encore reculer la simulation pour atteindre l'égalité). Le point de contact se situe à*

$$\vec{r}_{contact} = (x_{t,balle}, y_{t,balle}, -h_{\text{boîte}}/2)^T$$

ii. Collision avec le côté de la boîte.

Dans ce cas, le centre de masse de la balle dans la direction z *doit se retrouver entre les surfaces du bas et du haut*

$$-h_{\text{boîte}}/2 < z_{t,balle} < h_{\text{boîte}}/2$$

De plus, dans le plan 2D, les deux cercles correspondant aux rayons de la boîte et de la balle doivent se toucher. Donc la condition de collision est

$$R_{xy} \leq R_{\text{boîte}} + R_{balle}$$

avec

$$R_{xy} = \sqrt{(x_{t,balle})^2 + (y_{t,balle})^2}$$

Ici, le cas $<$ *correspondant toujours à une pénétration (reculer la simulation pour atteindre l'égalité).*

Le point de contact dans le plan $x - y$ *se retrouve à une distance* $R_{\text{boîte}}$ *du centre de masse de la boîte dans la direction* $(x_{t,balle}, y_{t,balle})^T$

$$(x_{contact}, y_{contact})^T = (x_{t,balle}, y_{t,balle})^T \frac{R_{\text{boîte}}}{R_{xy}}$$

et donc

$$\vec{r}_{contact} = (x_{contact}, y_{contact}, z_{t,balle})^T$$

iii. *Collision avec un coin de la boîte.*

Pour le coin du haut, le centre de masse de la balle doit satisfaire

$$0 \leq z_{t,balle} - h_{boîte}/2 \leq R_{balle}$$

et

$$R_{boîte} < R_{xy} \leq R_{boîte} + R_{balle}$$

Ceci correspondra donc à l'intersection de deux cercles dans le plan $x - y$ à la hauteur $z = h_{boîte}/2$ de rayons $R_{boîte}$ et $R_{contact}$ donné par

$$R_{contact} = \sqrt{(R_{balle})^2 - (z_{t,balle} - h_{boîte}/2)^2}$$

la condition de collision étant

$$R_{xy} \leq R_{boîte} + R_{contact}$$

le cas $<$ correspondant encore à une pénétration.

Le point de contact dans le plan $x - y$ se retrouve à une distance $R_{boîte}$ du centre de masse de la boîte dans la direction $(x_{t,balle}, y_{t,balle})^T$

$$(x_{contact}, y_{contact})^T = (x_{t,balle}, y_{t,balle})^T \frac{R_{boîte}}{R_{xy}}$$

et donc

$$\vec{r}_{contact} = (x_{contact}, y_{contact}, h_{boîte}/2)^T$$

Pour le coin du bas, le centre de masse de la balle doit satisfaire

$$-R_{balle} \leq z_{t,balle} + h_{boîte}/2 < 0$$

et

$$R_{boîte} < R_{xy} \leq R_{boîte} + R_{balle}$$

Ceci correspondra à l'intersection de deux cercles dans le plan $x - y$ à la hauteur $z = -h_{boîte}/2$ de rayons respectifs $R_{boîte}$ et $R_{contact}$ donné par

$$R_{contact} = \sqrt{(R_{balle})^2 - (z_{t,balle} + h_{boîte}/2)^2}$$

la condition de collision étant

$$R_{xy} \leq R_{boîte} + R_{contact}$$

le cas $<$ correspondant à une pénétration .

Le point de contact dans le plan $x - y$ se retrouve à une distance $R_{boîte}$ du centre de masse de la boîte dans la direction $(x_{t,balle}, y_{t,balle})^T$

$$(x_{contact}, y_{contact})^T = (x_{t,balle}, y_{t,balle})^T \frac{R_{boîte}}{R_{xy}}$$

et donc

$$\vec{r}_{contact} = (x_{contact}, y_{contact}, -h_{boîte}/2)^T$$

(b) ***(10 points)*** *En utilisant cet algorithme, déterminer le point de contact entre la balle et la boîte si les positions des centres de masse de la balle et de la boîte de conserve sont respectivement $\vec{r}_{balle} = (-0.06, 0.0, 4)$ m et $\vec{r}_{boîte} = (0, 0, 3.90)$ m.*

En utilisant $\vec{r}_{balle} = (-0.06, 0.0, 4)$ m et $\vec{r}_{boîte} = (0, 0, 3.90)$ m, on voit immédiatement que

$$\vec{r}_{t,balle} = (-0.06, 0.0, 0.1)$$

et

$$z_{t,balle} - R_{balle} < h_{boîte}/2 < z_{t,balle}$$

qui correspond à la possibilité de collision avec le rebord supérieur de la boîte de conserve. Le rayon du disque équivalent correspondant à la position $z_{t,contact} = h_{boîte}/2$ est donc

$$R_{e,i} = \sqrt{R_{balle}^2 - (z_{t,contact}(t))^2} = 3 \text{ cm}$$

On observe alors que

$$\sqrt{(x_{t,balle}(t))^2 + (y_{t,balle}(t))^2} = 0.06$$

correspond effectivement à $R_{e,c} + R_{e,i}$. On sait déjà que l'intersection en z se fera à $z_{t,contact} = h_{boîte}/2$. Pour l'intersection dans le plan x-y, il faut trouver le point à une distance $R_{e,c}$ du centre d'un disque localisé à $(x_{t,boîte}, y_{t,boîte})$ dans la direction $\vec{u}$ définie

$$\vec{u} = \frac{(x_{balle}, y_{balle}, z_{boîte} + h_{boîte}/2) - (x_{boîte}, y_{boîte}, z_{boîte} + h_{boîte}/2)}{|(x_{balle}, y_{balle}, z_{boîte} + h_{boîte}/2) - (x_{boîte}, y_{boîte}, z_{boîte} + h_{boîte}/2)|} = (-1, 0, 0)$$

Le point d'intersection est donc

$$\vec{r}_{int} = (-0.03, 0, 3.96)$$