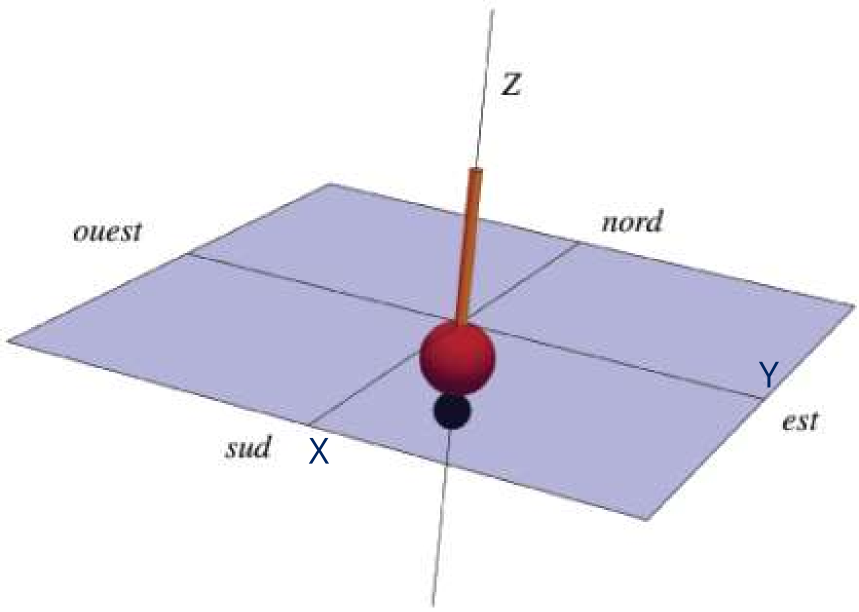
Exemple du chapitre 2

Calculer le moment d'inertie d'une bouée compose de trois éléments :

- un ballon (rouge) qui assure la flottaison de la bouée ;
- une tige cylindrique (orange) au bout de laquelle flotte un fanion (ni illustré ni simulé) ;
- un lest (sphère noire) qui assure la stabilité du système (il agit comme une ancre et empêche le déplacement, mais non l'oscillation de la bouée sous l'effet du vent).

Les différentes composantes de la bouée (volumes et masses du ballon, du lest et de la tige) sont choisies de façon à ce que seulement la tige se retrouve à l'air libre.



On supposera que l'origine du système de coordonnées est localisée à la surface de la mer et correspond au bas de la tige (centre radial). Les propriétés de la tige, du ballon et du lest sont :

- la tige est un cylindre creux (aluminium) de masse $m_t = 1.690$ kg, de rayon externe $r_t = 4$ cm et de longueur $l_t = 1.5$ m ;
- le ballon est une sphère creuse (caoutchouc) de masse $m_b = 0.561$ kg et de rayon $r_b = 23$ cm ;
- le lest est une sphère pleine (acier) de masse $m_l = 55.951$ kg et de rayon $r_l = 12$ cm.

Vous devrez analyser deux situations :

1. la bouée est à la verticale ;
2. la bouée est inclinée à 45 degrés de la verticale dans la direction sud-est (angle de 45 degrés par rapport à la verticale).

Vous devrez déterminer pour chacune de ces situations:

- la position du centre de masse de la bouée ;
- le moment d'inertie de la bouée par rapport au système de référence.

Solution :

Bouée verticale

La position du centre de masse d'un objet composé de trois éléments est donnée par

$$\vec{r}_{c,\text{bouée},V} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \vec{r}_{c,i,V}\, m_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

On connaît déjà la masse de chaque élément, et la masse totale est

$$\sum_{i=1}^{3} m_i = 58.202 \text{ kg}$$

- La position du centre de masse de la tige est $\vec{r}_{c,t,V} = (0, 0, l_t/2)^T = (0, 0, 0.75)^T$
- La position du centre de masse du ballon est $\vec{r}_{c,b,V} = (0, 0, -r_b)^T = (0, 0, -0.23)^T$
- La position du centre de masse du lest est $\vec{r}_{c,l,V} = (0, 0, -2r_b - r_l)^T = (0, 0, -0.58)^T$

La position du centre de masse de la bouée est donc

$$\vec{r}_{c,\text{bouée},V} = (0, 0, -0.538)^T$$

Moment d'inertie de la bouée par rapport à son centre de masse.

- Le moment d'inertie de la tige (cylindre creux) par rapport à son centre de masse est

$$I_t = \begin{pmatrix} \frac{m_t}{12}(6r_t^2 + l_t^2)) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_t}{12}(6r_t^2 + l_t^2)) & 0 \\ 0 & 0 & m_t r_t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.3182 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3182 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 \end{pmatrix}$$

- Le centre de masse de la bouée est à une position $d_t = (\vec{r}_{c,\text{bouée}} - \vec{r}_{c,t}) = (0, 0, -1.288)$ par rapport au centre de masse de la tige. Le moment d'inertie de la tige par rapport au centre de masse de la bouée est donc

$$I_{t,\text{bouée}} = I_t + m_t \begin{pmatrix} (d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & (d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & (d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.1218 & 0 & 0 \\ 0 & 3.1218 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0027 \end{pmatrix}$$

- Le moment d'inertie du ballon (sphère creuse) par rapport au centre de masse de la bouée est

$$I_{b,\text{bouée}} = \begin{pmatrix} 0.073 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0730 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0198 \end{pmatrix}$$

- Le moment d'inertie du lest (sphère pleine) par rapport au centre de masse de la bouée est

$$I_{l,\text{bouée}} = \begin{pmatrix} 0.4209 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4209 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3223 \end{pmatrix}$$

- Le moment d'inertie de la bouée par rapport à son centre de masse est donc

$$\begin{aligned} I_{\text{bouée},V} &= I_{t,\text{bouée}} + I_{b,\text{bouée}} + I_{l,\text{bouée}} \\ &= \begin{pmatrix} 3.6158 & 0 & 0 \\ 0 & 3.6158 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3448 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bouée inclinée
Comme on connaît déjà la position du centre de masse et le moment d'inertie de la bouée pour le cas de la tige verticale, nous utiliserons cette information pour déterminer les propriétés de la bouée inclinée. Pour ce faire, nous déterminerons premièrement la matrice de rotation qui permet de passer du système d'axes d'axes de la bouée inclinée (on vient de déterminer le moment d'inertie et le centre de masse pour ce système) et le ramener au système global.

Le système d'axes incliné est obtenu en combinant deux rotations :

- Rotation du système original de 45 degrés autour de l'axe des y correspondant à la matrice

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & 0 & \sin(\pi/4) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\pi/4) & 0 & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Rotation du système précédent de 45 degrés autour de l'axe des z correspondant à la matrice

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de rotation totale est donc

$$R = R_z R_y = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Position du centre de masse de la bouée

$$\vec{r}_{c,\text{bouée},I} = R\vec{r}_{c,\text{bouée},V} = (-0.269, -0.269, -0.3804)$$

- Moment d'inertie de la bouée inclinée par rapport à son centre de masse est donné par

$$I_{\text{bouée},I} = RI_{\text{bouée},V}R^{-1} = \begin{pmatrix} 2.7981 & -0.8178 & -1.1565 \\ -0.8178 & 2.7981 & -1.1565 \\ -1.1565 & -1.1565 & 1.9803 \end{pmatrix}$$