

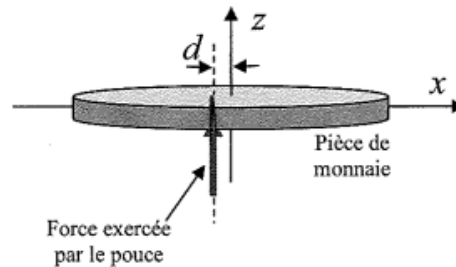
**Question 1. (25 points)**

On lance une pièce de monnaie vers le haut à partir d'une position initiale  $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)^T$  avec une vitesse initiale verticale  $\vec{v}_0 = (0, 0, 4)^T$  m/s et une vitesse angulaire initiale  $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)^T$ . La pièce est un disque plein de masse  $m = 7$  grammes, de rayon  $r = 1.3$  cm et d'épaisseur négligeable. Durant sa course, on considérera que la pièce ne subit que la force de son poids. L'accélération gravitationnelle est  $\vec{g} = (0, 0, -9.8)^T$  m/s<sup>2</sup>.

- a) **(5 points)** Déterminer la durée de vol de la pièce avant qu'elle n'arrive au niveau du sol situé à  $z = -1$  m.

En fait, la pièce a été lancée en la frappant par l'angle du pouce pendant qu'elle reposait immobile sur l'index plié (tir de pile ou face, voire la figure ci-dessous). Le point de contact entre le pouce et la pièce est situé à  $\vec{r}_p = (-d, 0, 0)^T$  avec  $d = 2$  mm. Le pouce, que l'on considérera comme ayant une masse infinie comparativement à la masse de la pièce, la frappe avec une vitesse  $\vec{V}$  dirigée vers le haut.

- b) **(10 points)** Déterminer le module de la vitesse  $\vec{V}$  sachant que la collision pouce-pièce est élastique.
- c) **(5 points)** Calculer le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  de la pièce immédiatement après la collision.
- d) **(5 points)** Combien de tours fera la pièce autour d'elle-même avant d'atteindre le sol? Approximez votre réponse au demi-tour près.



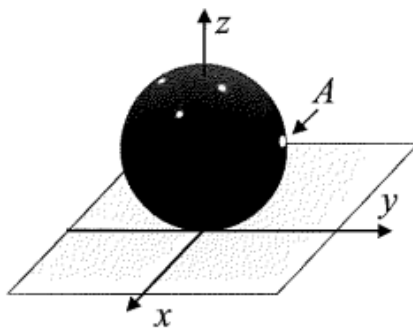
## Question 2 : (25 points)

Une sphère de rayon  $R = 2$  cm est posée sur une table. On choisit le référentiel du laboratoire tel que son origine coïncide avec le point de contact de la sphère avec la table et l'axe  $z$  est vertical. Le plan  $xy$  sera donc le plan de table.

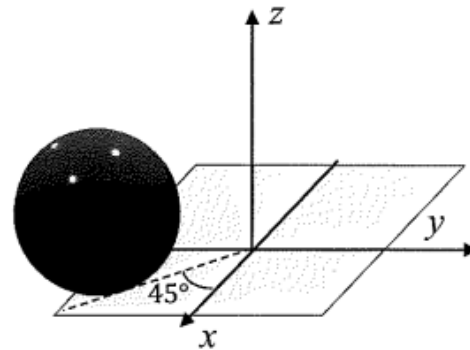
On fait une marque blanche sur la surface de la sphère au point A situé à  $\vec{r}_A = (0; 2; 2)^T$  cm puis, on fait rouler cette sphère sans glisser sur un segment de droite situé dans le 4<sup>e</sup> quadrant du plan  $xy$  faisant un angle de  $45^\circ$  avec l'axe  $ox$  (voir la figure ci-dessous). La sphère parcourt ainsi une distance  $d = \pi$  (cm) puis s'immobilise.

- (5 points)** Quels est l'angle  $\theta$  de la rotation subie par la sphère et le vecteur unitaire  $\hat{u}$  de son axe entre la configuration initiale et la configuration finale?
- (5 points)** Déterminer le quaternion associé à cette rotation.
- (2 points)** Déterminer le vecteur position  $\vec{r}_{A/C}$  du point A par rapport au centre de masse de la sphère dans la configuration initiale.
- (3 points)** Déterminer le vecteur position finale  $\vec{r}'_C$  du centre de masse de la sphère.
- (10 points)** Calculer le vecteur position finale  $\vec{r}'_A$  du point A dans le référentiel du laboratoire en utilisant la méthode des quaternions.

rr



Configuration initiale



Configuration finale

**Question 3 : (25 points)**

On désire étudier la trajectoire d'un rayon lumineux émis par une source  $S$  située à  $\vec{r}_s = (1, 0, 0)^T \text{ m}$ . Ce rayon se propage dans la direction  $\hat{u}_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$  et intercepte un miroir défini par trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  appartenant à sa surface. Les coordonnées de ces points sont  $A(1, 2, 0) \text{ m}$ ,  $B(2, 2, 0) \text{ m}$  et  $C(0, 1, 1) \text{ m}$ .

- (a) **(10 points)** Déterminer la normale sortante  $\hat{n}$  du miroir.
- (b) **(10 points)** Déterminer le vecteur position  $\vec{r}_p$  du point  $P$  d'impact du rayon lumineux avec le miroir.
- (c) **(5 points)** Quel est le vecteur unitaire  $\hat{u}_r$  du rayon réfléchi par le miroir?

**Question 4 : (25 points)**

22/25

Deux avions, A et B volent en même temps à vitesses constantes. À l'instant  $t = 0$ , l'avion A se trouvant à la position  $\vec{r}_A = (0, 2000, 3500)^T \text{ m}$  et volant à vitesse  $\vec{v}_A = (150, -80, 0)^T \text{ m/s}$ , émet un bref signal sonore de fréquence  $f_A = 2 \text{ kHz}$  et d'une puissance telle qu'un décibelmètre posé sur cet avion et situé à une distance  $r_1 = 1 \text{ m}$  de l'émetteur, affiche une intensité  $L_I(r_1) = 120 \text{ dB}$ . À cet instant, l'avion B est situé à  $\vec{r}_B = (4000, 0, 2500)^T \text{ m}$ . lorsque l'avion B reçoit le signal, sa position est  $\vec{r}_{B1} = (3000, 500, 2800)^T \text{ m}$ .

La vitesse du son dans l'air est  $c = 342,6 \text{ m/s}$  et son coefficient d'atténuation est  $\mathcal{A} = 8.5 \text{ dB/km}$ .

- (a) **(7 points)** Déterminer la vitesse  $\vec{v}_B$  de l'avion B sachant que celle-ci est constante.
- (b) **(8 points)** Quelle est la fréquence du signal sonore reçu par l'avion B?
- (c) **(5 points)** Déterminer la puissance  $P$  du signal sonore émis par l'avion A.
- (d) **(5 points)** Quelle est l'intensité du signal sonore reçu par l'avion B?