Question révision

Question 1.

Soit la pièce cylindrique représentée sur la figure ci-dessous. L'origine du système d'axes coïncide avec le centre de masse de la pièce. Le point A de coordonnées : $A(0,10,10)$ est situé sur son arête supérieure.

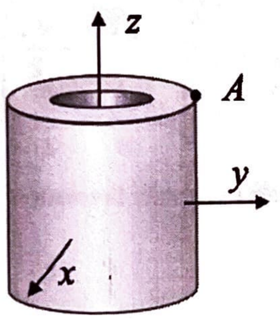
On donne pour la pièce :

- Masse volumique : $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$
- Hauteur $h = 20$ cm
- Rayon interne : $r = 5$ cm
- Rayon externe $R = 10$ cm.

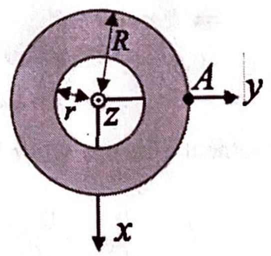
a) Déterminer la matrice moment d'inertie I_C de la pièce par rapport à son centre de masse.

b) On fait subir à la pièce une rotation autour de son centre de masse de façon à ce que le point A se retrouve sur l'axe oz. Déterminer la matrice R de cette rotation.

c) Déterminer le moment d'inertie de la pièce après avoir subi la rotation.



Vue de côté



Vue de haut

Solution :

a) Déterminer la matrice moment d'inertie I_C de la pièce par rapport à son centre de masse.
La pièce peut être vue comme un cylindre plein de rayon R et de hauteur h auquel on enlève un cylindre plein de rayon r et de hauteur h. La matrice moment d'inertie est donc :

$$I_c = m_R\begin{pmatrix} \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} - m_r\begin{pmatrix} \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}$$

avec $m_R = \rho(\pi R^2 h) = 4\pi$ kg et $m_r = \rho(\pi r^2 h) = \pi$ kg

$$\Rightarrow I_c = \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06086 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05890 \end{pmatrix}$$

b) On fait subir à la pièce une rotation autour de son centre de masse de façon à ce que le point *A* se retrouve sur l'axe oz. Déterminer la matrice *R* de cette rotation.

Pour ramener le point A sur l'axe oz il faut lui subir une rotation autour de l'axe ox d'un angle $\theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_z}\right) = \pi/4$.

La matrice de rotation est donc :

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

c) Déterminer le moment d'inertie *M'* de la pièce après avoir subi la rotation.

$$M' = RMR^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06086 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05890 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04303 & 0.04303 \\ 0 & -0.04165 & 0.04165 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05988 & 0.000976 \\ 0 & 0.000976 & 0.05988 \end{pmatrix}$$

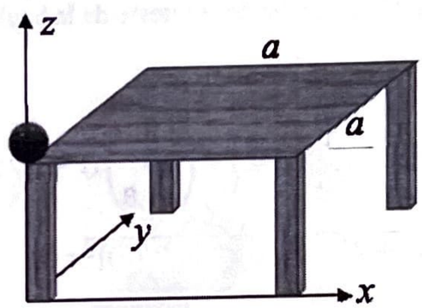
Question 2 :

Une boule pleine de rayon $R = 0.1$ m roule sans glisser sur la surface horizontale d'une table de hauteur $z_{table} = 1.0$ m jusqu'à ce qu'elle franchisse un bord et tombe au sol. À l'instant initial $t = 0$, la boule se trouve sur un coin de la table à la position $\vec{r}_{c,0} = (0.0, 0.0, 1.1)^T \mathrm{m/s}$ (voir figure ci-dessous) et sa vitesse linéaire est $\vec{v}_{c,0} = (1.0, 2.0, 0.0)^T \mathrm{m/s}$. Cette vitesse demeure constante tant que la boule roule sur la table. On négligera tout frottement. La surface de la table est de forme carrée de côté $a = 1.5$ m.

a) Déterminer le vecteur vitesse angulaire de la boule lorsque celle-ci roule sans glisser sur la surface de la table.

b) Déterminer le vecteur position $\vec{r}_{c,1}$ de la boule à l'instant où elle quitte la surface de la table.

c) Déterminer l'instant t_1 où le module de la vitesse de la boule atteint la valeur de $v_1 = 3$ m/s. L'accélération gravitationnelle est donnée par : $\vec{g} = (0, 0, -9.8)^T \mathrm{m/s^2}$.



Solution :

a) Déterminer le vecteur vitesse angulaire de la boule lorsque celle-ci roule sans glisser sur la surface de la table.

La condition de roulement sans glissement appliquée au cas présent s'écrit:

$$\vec{v}_{c,0} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{c,p}$$

avec $\vec{r}_{c,p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$

Si on pose $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ *alors:* $\vec{v}_{c,0} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\omega_y \\ -R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{-v_y}{R} \\ \frac{v_x}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (rad/s)}$$

On a posé $\omega_z = 0$ car on sait que la boule ne tourne pas autour d'un axe vertical.

b) Déterminer le vecteur position $\vec{r}_{c,1}$ de la boule à l'instant où elle quitte la surface de la table.

La boule intercepte le plan $x = a$ à l'instant $t_x = \frac{a}{v_x} = \frac{1.5}{1} = 1.5$ s et le plan $x = a$ à l'instant $t_y = \frac{a}{v_y} = \frac{1.5}{2} = 0.75$ s. Comme $t_y < t_x$, alors elle quitte la table par le bord parallèle à l'axe ox à l'instant t_y.

Sa position est :

$$\vec{r}_{c,1} = \vec{r}_{c,0} + t_y.\vec{v}_{c,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.1 \end{pmatrix} + 0.75 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.5 \\ 1.1 \end{pmatrix} \text{ (m)}$$

c) Déterminer l'instant t_1 où le module de la vitesse de la boule atteint la valeur de $v_1 = 3$ m/s.

À partir de l'instant t_y, la position de la boule devient :

$$\vec{v}_c(t) = \vec{v}_{c,0} + \vec{g}(t - t_y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{pmatrix}(t - 0.75) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9.8(t - 0.75) \end{pmatrix}$$

L'instant t_1 correspond à : $\sqrt{1^2 + 2^2 + [-9.8(t_1 - 0.75)]^2} = 3$

$$\Rightarrow (t_1 - 0.75) = \pm 0.2041 \text{ s}$$

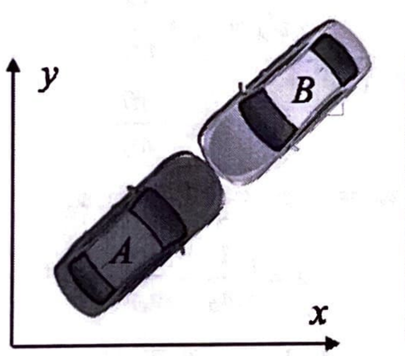
$$\Rightarrow t_1 = 0.9541 \text{ s}$$

Ici seule la valeur maximale est acceptée car l'autre valeur est inférieure à t_y.

Question 3.

Une collision frontale survient entre deux voitures identiques A et B, de mêmes masses $m_A = m_B =$ 2500 kg. Juste avant la collision, la vitesse de la voiture A est $\vec{v}_A = (25.0, 30.0, 0.0)^T$ m/s et celle de la voiture B est $\vec{v}_B = (-20.0, -24.0, 0.0)^T$m/s.

(a) Quelle est la vitesse relative de la voiture A par rapport à la voiture B juste avant l'impact.
(b) Déterminer la normale $\hat{n}$ entrante vers A aux surfaces de contacts entre les deux voitures.
(c) Déterminer les vitesses des deux voitures $\vec{v}'_A$ et $\vec{v}'_B$ juste après l'impact sachant que coefficient de restitution de la collision est $\epsilon = 0.2$. On néglige tout frottement lors de la collision.



Solution :

a) **Quelle est la vitesse relative de la voiture *A* par rapport à la voiture *B* juste avant l'impact.**
La vitesse relative de B par rapport à A avant le choc est :

$$\vec{v}_r^- = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 54 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

b) **Déterminer la normale $\hat{n}$ entrante vers *A* aux surfaces de contacts entre les deux voitures.**
Comme le choc est frontal alors $\hat{n}$ doit être dans la direction parallèle aux vitesses de deux voitures dans le sens de $\vec{v}_B$.

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}_B}{|\vec{v}_B|} = \frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) **Déterminer les vitesses des deux voitures juste après l'impact sachant que coefficient de restitution de la collision est $\epsilon = 0.2$. On néglige tout frottement lors de la collision.**

$$\vec{v}'_A = \vec{v}_A + \frac{j\hat{n}}{m_A}$$

$$\vec{v}'_B = \vec{v}_B - \frac{j\hat{n}}{m_B}$$

où $j = -\alpha(1+\epsilon)v_r^-$ *avec* $v_r^- = \hat{n} \cdot \vec{v}_r^- = -70.29 \text{ m/s}$.

$$\alpha = \left(\frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}\right)^{-1}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2500} + \frac{1}{2500}\right)^{-1} = 1250$$

$$\Rightarrow j = -\alpha(1+\epsilon)v_r^- = -1250(1+0.2)(-70.29) = 105435 \text{ kg m/s}$$

$$\vec{v}'_A = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{105435}{2500 \times \sqrt{61}}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2.4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}'_B = \begin{pmatrix} -20 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{105435}{2500 \times \sqrt{61}}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8.4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

Question 4.

Un train se déplace à une vitesse de $v = 50$ m/s sur une voie ferrée rectiligne. On place un microphone sur la voie. Si le train émet un son de fréquence $f_0 = 1$ kHz, quelle est la fréquence f_r perçue par le microphone lorsque le train se rapproche de lui. La vitesse du son est $c = 340$ m/s.

Solution :

La fréquence perçue par le microphone est donnée par :

$$f_r = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_s} f_0$$

avec $\beta_r = 0$ car la vitesse du microphone est nulle et $\beta_s = \frac{v}{c}$

Lorsque le train s'approche du microphone :

$$f_r = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} f_0 = 1172 \text{ Hz}$$