Moment de force et vitesse angulaire en apesanteur

Un cube de masse $M_s = 1$ kg et de côté $a = 0.2$ m flotte dans l'espace, son centre de masse étant localisé au point $\vec{r}_c = (2, 3, 1)$ m. On applique une force externe $\vec{F}_e = (0, 0, -10)$ N sur le coin du cube localisé à $\vec{r}_e = (2.1, 2.9, 0.9)$. Vous supposerez que les axes du cube sont alignés avec les axes x, y, et z. La seule force dont il faut tenir compte est la force externe.

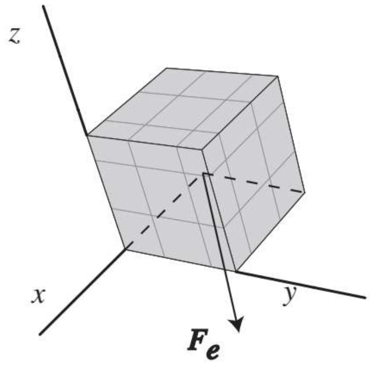

Figure 1: Cube qui flotte dans l'espace et sur lequel une force externe est appliquée.

(a) **(7 points)** Calculer le moment de force et l'accélération angulaire autour du centre de masse du cube qui résultent de la force externe.

(b) **(6 points)** Déterminer la matrice correspondant à une rotation du cube d'un angle $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x.

(c) **(7 points)** Déterminer le moment de force et l'accélération angulaire dans le système local du cube après que celui-ci ait effectué une rotation de $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x (les faces du cube après rotation sont perpendiculaires aux axes x, y' et z' du système local du cube). Vous supposerez que la force externe est toujours appliquée au même coin du cube.

Solution

(a) ***(7 points)*** *Calculer le moment de force et l'accélération angulaire autour du centre de masse du cube qui résultent de la force externe.*

Le moment de force correspond au produit vectoriel de la force externe appliquée au point $\vec{r}_e$ et du vecteur joignant le centre de masse du cube à $\vec{r}_c$ à ce point

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_e - \vec{r}_c) \times \vec{F}_e = (0.1, -0.1, -0.1) \times (0, 0, -10) = (1, 1, 0)\, N\, m$$

L'accélération angulaire est pour sa part donnée par

$$\vec{\alpha} = (\mathcal{I})^{-1}\vec{\tau}$$

avec $\mathcal{I}$ le moment d'inertie du cube donné par

$$\mathcal{I} = \frac{M_s a^2}{6}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned}(\mathcal{I})^{-1} &= \frac{6}{M_s a^2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= 150\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et donc

$$\vec{\alpha} = (150, 150, 0)\, rads/s^2$$

(b) ***(6 points)*** *Déterminer la matrice correspondant à une rotation de la sphère d'un angle $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x.*

La matrice pour une rotation d'un angle θ autour de l'axe des x est donnée par

$$R_x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Sachant que $\cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\sin(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ on obtient

$$R_x = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(c) *(**7 points**) Déterminer le moment de force et l'accélération angulaire dans le système local du cube après que celui-ci ait effectué une rotation de $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x (les faces du cube après rotation sont perpendiculaires aux axes x, y' et z' du système local du cube). Vous supposerez que la force externe est toujours appliquée au même coin du cube.*

Pour le cube ayant effectué une rotation, la force externe est toujours $\vec{F}_e = (0, 0, -10)$. On peut ramener cette force dans le système local du cube en lui faisant subir une rotation de $\pi/4$ autour de l'axe des x, ce qui correspond à utiliser la matrice de rotation $(R_x)^{-1} = (R_x)^T$. On aura donc dans ce système local

$$\vec{F}'_e = (R_x)^T \vec{F}_e = (0, 5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$$

Le moment de force est alors

$$\vec{\tau}' = (\vec{r}_e - \vec{r}_c) \times \vec{F}'_e = (0.1, -0.1, -0.1) \times (0, 5\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\, N\,m$$

et l'accélération angulaire dans le système du cube est

$$\vec{\alpha}' = (\mathcal{I})^{-1}\vec{\tau}' = 75\sqrt{2}\,(2, 1, 1)$$