



**PHS4700**

## **Physique pour les applications multimédia**

**G. MARLEAU**

Département de génie physique  
École Polytechnique de Montréal  
Octobre 2019

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Quelle physique, et dans quel but? . . . . .	1
1.2	Applications multimédia où la physique joue un rôle important . . . . .	2
1.2.1	Jeu de billard . . . . .	2
1.2.2	Images de synthèse . . . . .	5
1.2.3	Environnements sonores . . . . .	8
1.3	Modèles utilisés pour les simulations . . . . .	9
1.3.1	Modélisation des solides . . . . .	10
1.3.2	Modélisation de la lumière . . . . .	10
1.3.3	Modélisation des fluides . . . . .	11
1.4	Conclusions . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Dynamique des solides</b>	<b>15</b>
2.1	Objets ponctuels et étendus . . . . .	15
2.2	Matrices de rotation . . . . .	21
2.3	Quaternions et rotation . . . . .	23
2.3.1	Opération sur les quaternions . . . . .	23
2.3.2	Quaternion de rotation . . . . .	25
2.4	Équations de la dynamique . . . . .	27
2.4.1	Mouvement de translation . . . . .	27
2.4.2	Mouvement de rotation . . . . .	30
2.5	Centre de masse . . . . .	34
2.5.1	Volumes et centre de masse pour solide de géométrie arbitraire . . . . .	35
2.6	Moment d'inertie . . . . .	37
2.6.1	Moment d'inertie de solides réguliers . . . . .	38
2.7	Conclusions . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Résolution numérique des équations de la cinématique</b>	<b>40</b>
3.1	Introduction . . . . .	40
3.2	Résolution des équations de la cinématique d'un point . . . . .	41
3.2.1	Accélération uniquement dépendante du temps . . . . .	41
3.2.2	Particule avec accélération dépendante du temps . . . . .	44
3.2.3	Accélération dépendante de la vitesse et de la position . . . . .	46
3.3	Résolution des équations de la cinématique des solides . . . . .	48

3.3.1	Exemple d'un solide en rotation dans un plan 2-D . . . . .	49
3.4	Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires . . . . .	52
3.4.1	La méthode d'Euler . . . . .	53
3.4.2	La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4 . . . . .	54
3.4.3	Solution numérique avec contrôle d'erreur . . . . .	56
3.4.4	Interpolation de Richardson . . . . .	58
3.5	Exemples . . . . .	60
3.5.1	Particule accélérée en 3D . . . . .	60
3.5.2	Parallélépipède tournant sur lui même en 3D . . . . .	61
3.5.3	Trajectoire d'une tige de métal très fine dans l'espace . . . . .	63
3.6	Solutions numériques et collisions . . . . .	66
3.7	Conclusion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Forces et moments de force</b>	<b>71</b>
4.1	Introduction . . . . .	71
4.2	Forces et mouvement linéaire . . . . .	71
4.2.1	Champs de force . . . . .	71
4.2.2	Ressorts et amortisseurs . . . . .	74
4.2.3	Frottement . . . . .	75
4.2.4	Poussée d'Archimède . . . . .	81
4.2.5	Effet Magnus . . . . .	83
4.2.6	Portance . . . . .	84
4.2.7	Autres forces résultant du mouvement de rotation . . . . .	85
4.3	Moments de force et mouvement de rotation . . . . .	87
4.3.1	Champs de force et rotation . . . . .	88
4.3.2	Ressort et rotation . . . . .	88
4.3.3	Frottement et rotation . . . . .	89
4.3.4	Poussée d'Archimède et rotation . . . . .	90
4.3.5	Effet Magnus et rotation . . . . .	90
4.3.6	Portance . . . . .	90
4.4	Roulement et glissement . . . . .	91
4.4.1	Forces et moments de force . . . . .	91
4.4.2	Transition roulement-glisement . . . . .	92
4.4.3	Application à la boule de billard . . . . .	92
4.4.4	Procédure de simulation . . . . .	94
4.5	Conclusion . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Collisions</b>	<b>96</b>
5.1	Introduction . . . . .	96
5.2	Méthode des forces . . . . .	98
5.3	Méthode des conditions initiales . . . . .	101

5.3.1	Position des solides après la collision . . . . .	102
5.3.2	Vitesse des solides après la collision . . . . .	103
5.3.3	Frottement . . . . .	107
5.3.4	Effets angulaires . . . . .	108
5.4	Détection des collisions . . . . .	110
5.4.1	Méthode des plans de division . . . . .	112
5.4.2	Méthode pour collision de sphères avec des solides réguliers . . . . .	115
5.5	Conclusions . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Mouvement constraint</b>	<b>118</b>
6.1	Introduction . . . . .	118
6.2	Équations du mouvement . . . . .	119
6.3	Cas à une contrainte . . . . .	121
6.4	Cas à plusieurs contraintes . . . . .	124
6.5	Conclusions . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Optique</b>	<b>127</b>
7.1	Lumière et ondes lumineuses . . . . .	127
7.1.1	Rayons lumineux . . . . .	131
7.2	Réflexion et réfraction de la lumière . . . . .	132
7.2.1	Réflexion . . . . .	132
7.2.2	Principe de Fermat et réfraction . . . . .	134
7.3	Reconstitution d'images . . . . .	138
7.3.1	Méthode des images virtuelles . . . . .	139
7.3.2	Méthode des rayons et réflexion . . . . .	141
7.3.3	Méthode des rayons et réfraction . . . . .	143
7.4	Réflexion diffuse . . . . .	145
7.4.1	Relations de Fresnel . . . . .	146
7.4.2	Réflexion par des surfaces imparfaites . . . . .	151
7.4.3	Absorption . . . . .	162
7.5	Perception de la lumière . . . . .	164
7.5.1	Sources de lumière . . . . .	164
7.5.2	Détection de la lumière . . . . .	166
7.5.3	Perception des couleurs . . . . .	170
7.5.4	Intensité lumineuse . . . . .	175
7.6	Conclusion . . . . .	176
<b>8</b>	<b>Milieux continus et ondes</b>	<b>177</b>
8.1	Les fluides . . . . .	177
8.1.1	Comportement des fluides . . . . .	178
8.1.2	Viscosité . . . . .	178
8.1.3	Équations de Navier-Stokes . . . . .	179

8.2 Simulations numériques . . . . .	181
8.2.1 Méthodes des différences finies . . . . .	181
8.2.2 Méthode des volumes finis . . . . .	184
8.3 Ondes de surface . . . . .	186
8.3.1 Les tsunamis . . . . .	190
8.3.2 Conclusions . . . . .	192
<b>9 Acoustique</b>	<b>193</b>
9.1 Ondes sonores . . . . .	193
9.1.1 Intensité et puissance sonores . . . . .	196
9.1.2 Effet Doppler . . . . .	198
9.2 Réflexion et réfraction des ondes sonores . . . . .	201
9.2.1 Lois de Snell-Descartes . . . . .	201
9.2.2 Impédance acoustique . . . . .	201
9.2.3 Réflexion à une interface acoustique . . . . .	204
9.3 Interférence . . . . .	207
9.3.1 Interférence de deux ondes ayant la même fréquence . . . . .	209
9.3.2 Battement . . . . .	210
9.4 Diffraction . . . . .	211
9.4.1 Analyse de la diffraction . . . . .	213
9.5 Perception des sons . . . . .	214
9.5.1 Propagation du son . . . . .	214
9.5.2 Audition . . . . .	214
9.5.3 Musique . . . . .	215
<b>Bibliographie</b>	<b>217</b>

## Liste des figures

1.1 Billard français . . . . .	2
1.2 Exemple de trajectoire curviligne d'une boule sur un billard . . . . .	6
1.3 Image de synthèse simpliste d'un intérieur . . . . .	6
1.4 Images de synthèse de scènes extérieures . . . . .	7
1.5 Image de synthèse avec réfraction de la lumière . . . . .	8
1.6 Image de synthèse d'un visage . . . . .	8
1.7 Goutte d'eau en chute libre . . . . .	12
1.8 Images de vagues . . . . .	13
2.1 Exemple d'un solide (2D) subissant une translation et une rotation . . . . .	17
2.2 Vitesse relative entre deux points d'un solide en rotation . . . . .	19
2.3 Système de coordonnées local et du laboratoire . . . . .	20
2.4 Les angles d'Euler . . . . .	22
2.5 Rotation de $\vec{v} = (1, 1, 1)^T$ de $\pi/2$ autour de l'axe $\hat{u} = \hat{z}$ . . . . .	25
3.1 Vitesse et position en fonction du temps ( $\Delta t = 1$ seconde) . . . . .	45
3.2 Vitesse et position en fonction du temps ( $\Delta t = 0.25$ seconde) . . . . .	47
3.3 Solide en rotation dans un plan 2-D . . . . .	50
3.4 Trajectoires pour $N = 10$ (gauche) et $N = 40$ (droite) intervalles de temps . . . . .	62
3.5 Solution avec la méthode d'Euler avec $\Delta t_E = 0.5$ s . . . . .	63
3.6 Solution avec la méthode d'Euler avec $\Delta t_E = 0.1$ s . . . . .	63
4.1 Système de coordonnées pour la fusée . . . . .	73
4.2 Trajectoire balistique et non balistique de la fusée . . . . .	75
4.3 Force de frottement . . . . .	77
4.4 Câble lesté glissant sur une table . . . . .	78
4.5 Disque se déplaçant suivant un axe parallèle au cylindre . . . . .	81
4.6 Poussée d'Archimède (immersion complète) . . . . .	82
4.7 Poussée d'Archimède (immersion partielle) . . . . .	82
4.8 Effet Magnus. Ici, l'air est accéléré au bas et ralenti au haut du solide . . . . .	84
4.9 Portance . . . . .	85
4.10 Moment de force visqueux . . . . .	90
4.11 Force d'Archimède et rotation . . . . .	90
4.12 Moment de force pour le roulement . . . . .	91
4.13 Boule au billard . . . . .	93

5.1	Collision d'un ballon avec le sol . . . . .	96
5.2	Deux solides de formes arbitraires en mouvement qui entrent en collision . . . . .	97
5.3	Deux boules se dirigeant l'une vers l'autre en 1D . . . . .	98
5.4	Deux boules au moment de la collision . . . . .	99
5.5	Deux boules durant la collision . . . . .	99
5.6	Collision de deux solides . . . . .	103
5.7	Collision de deux solides au point $\vec{p}$ . . . . .	104
5.8	Collision entre boules de masses identiques . . . . .	106
5.9	Trajectoire de deux parallélépipèdes dans l'espace . . . . .	110
5.10	Trajectoire de deux boules dans l'espace . . . . .	110
5.11	Trajectoire de deux parallélépipèdes entourés de sphères dans l'espace . . . . .	111
5.12	Plan de division entre deux solides . . . . .	112
5.13	Sélection des points définissant les plans de division . . . . .	113
6.1	Trajectoire de la ligne de pêche à la mouche . . . . .	118
6.2	Câble de bungee, dans sa phase descendante . . . . .	119
6.3	Deux solides dont les mouvements sont limités par une contrainte . . . . .	120
6.4	Solides dont les mouvements sont limités par une série de contraintes . . . . .	124
7.1	Sensibilité de l'oeil à différentes longueurs d'onde de la lumière . . . . .	127
7.2	Interférence . . . . .	128
7.3	Diffraction par le principe d'Huygens . . . . .	129
7.4	Variation d'intensité de la lumière près et loin de la source . . . . .	131
7.5	Comportement des rayons de lumière . . . . .	131
7.6	Notation en 3D pour la réflexion. . . . .	133
7.7	Principe de Fermat pour la réflexion et la réaction. . . . .	134
7.8	Trajectoire de la lumière pour la réfraction . . . . .	135
7.9	Exemple d'image illustrant la réfraction . . . . .	136
7.10	Principe d'Huygens–Fresnel pour la réflexion et la réfraction . . . . .	138
7.11	Images virtuelles dans un miroir plan . . . . .	139
7.12	Reconstruction d'image dans un miroir . . . . .	140
7.13	Reconstruction d'image pour deux miroirs plans perpendiculaires . . . . .	140
7.14	Images virtuelles pour miroirs à angle arbitraires . . . . .	141
7.15	Illustration de la méthode des rayons pour un miroir . . . . .	142
7.16	Reconstruction d'image pour la réfraction . . . . .	144
7.17	Exemple d'image reconstruite en 3D . . . . .	145
7.18	Réflexion et réfraction par une surface parfaite (haut) et imparfaite (bas) . . . . .	146
7.19	Réflexion et réfraction . . . . .	147
7.20	Direction du champ électrique pour des ondes transverses électriques (TE) . . . . .	148
7.21	Réflexion et transmission pour les ondes TE . . . . .	149
7.22	Direction du champ électrique pour des ondes transverses magnétiques (TM) . . . . .	149
7.23	Réflexion et transmission pour les ondes TM . . . . .	150

7.24 Réflexion et transmission pour les ondes TM . . . . .	150
7.25 Modèle de Lambert . . . . .	151
7.26 Modèle de réflexion imparfaite . . . . .	151
7.27 Combinaison de modèles de Lambert et de réflexion imparfaite . . . . .	152
7.28 Modèle de Phong . . . . .	152
7.29 Modèle de Descartes . . . . .	152
7.30 Réflexion diffuse . . . . .	153
7.31 Loi de Lambert . . . . .	154
7.32 Nombre de photons perçus à travers une ouverture $dA$ . . . . .	154
7.33 Réflexion spéculaire imparfaite . . . . .	155
7.34 Notation vectorielle pour modèle tridirectionnel . . . . .	156
7.35 Définition de $\tilde{H}$ . . . . .	157
7.36 Notation vectorielle pour modèle bidirectionnel . . . . .	157
7.37 Source imparfaite . . . . .	158
7.38 Modèle de réflexion pour microsurfaces . . . . .	159
7.39 Effet d'ombre et de masque . . . . .	160
7.40 Réflexion de Fresnel . . . . .	161
7.41 Le transport de photon dans un milieu . . . . .	163
7.42 Le transport de photon dans un milieu . . . . .	164
7.43 Loi de déplacement de Wien avec $u(\lambda) = dE/d\lambda$ . . . . .	165
7.44 Spectre d'émission (visible) du sodium et du mercure. . . . .	165
7.45 Diffusion de la lumière. . . . .	166
7.46 Réponse en longueur d'onde des cônes. . . . .	167
7.47 Réponse des émulsions aux différentes sources de lumière. . . . .	168
7.48 Composition d'un film photographique. . . . .	169
7.49 Détecteur CCD. . . . .	169
7.50 Signal CCD en fonction de la longueur d'onde. . . . .	170
7.51 Fonctions de réponse du système CIE-XYZ 1931 . . . . .	171
7.52 Spectre visible pour CIExyY . . . . .	172
7.53 Fonctions de réponse du système RGB . . . . .	173
7.54 Espaces colorimétriques (gamut de couleur) de différents périphériques. . . . .	174
7.55 Fonctions de sensibilité spectrale normalisées (jour et nuit). . . . .	175
8.1 Définition de la viscosité . . . . .	178
8.2 Simulation numérique d'une onde déferlante . . . . .	186
8.3 Mouvement des molécules de l'onde . . . . .	188
8.4 Vitesse de l'onde en fonction de la profondeur . . . . .	188
8.5 Vitesse de phase et vitesse de groupe de l'onde . . . . .	189
8.6 Vagues à l'approche de la plage . . . . .	190
8.7 Génération des vagues . . . . .	190
8.8 Propagation des tsunamis . . . . .	191

9.1	Ondes de pression . . . . .	193
9.2	Effet Doppler . . . . .	198
9.3	Son perçu par une automobiliste en mouvement . . . . .	199
9.4	Interface acoustique entre deux milieux . . . . .	204
9.5	Impédance relative de la neige par rapport à l'air . . . . .	207
9.6	Interférence d'ondes planes (gauche) et d'ondes radiales (droite) . . . . .	208
9.7	Battements . . . . .	210
9.8	Patrons de diffraction d'ondes par des trous et des obstacles . . . . .	211
9.9	Diffraction par une fente . . . . .	211
9.10	Diffraction d'ondes sonores par un mur . . . . .	212
9.11	Analyse de la diffraction . . . . .	213
9.12	Effet d'un gradient de température sur la propagation du son . . . . .	215

## Liste des tableaux

4.1	Coefficients de frottement pour différentes interfaces surface-solide . . . . .	77
4.2	Viscosité dynamique en Poiseuille pour des fluides à différentes températures .	80
4.3	Masse volumique de l'air à différentes températures . . . . .	84
7.1	Relation couleur longueur d'onde . . . . .	128
9.1	Exemples de niveaux de puissance sonore . . . . .	197
9.2	Atténuation des ondes sonores dans l'air à 20 C et 70 % d'humidité . . . . .	198
9.3	Impédance acoustique de l'air à différentes températures . . . . .	203
9.4	Impédance acoustique de différents matériaux. . . . .	203
9.5	Notes dans l'octave 3 et 4 pour la gamme juste intonation . . . . .	216
9.6	Octaves DO à 264 Hz. . . . .	216

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Quelle physique, et dans quel but?

Il existe plusieurs exemples d'applications multimédias où la physique joue un rôle très important.<sup>[1-3]</sup>

- Les jeux de balle (billard, tennis, golf, etc.) et d'action et les simulateurs où les trajectoires et les collisions entre solides sont dictées par la physique mécanique.
- Les films avec leurs environnements visuels (déplacement des nuages, mouvement des vagues, et oscillation des arbres) et sonores (sirènes d'auto-patrouille, vent). Le comportement des nuages et des vagues est contrôlé par la mécanique des fluides. Les effets sonores et visuels dérivent de l'acoustique et de l'optique (physique des ondes).

Le créateur de telles applications devra donc programmer des «moteurs de simulation physique» qui lui permettront, entre autres choses, d'animer en temps réel les objets apparaissant dans les différentes scènes, de suivre les ombres de ces objets et de reproduire fidèlement les sons que devrait percevoir une personne se retrouvant au centre de l'environnement ou se déroule chaque scène.

Il faut cependant être prudent lorsque vient le temps de concevoir ou de choisir un moteur de simulation physique car les applications multimédias imposeront souvent à ces moteurs une des trois contraintes suivantes :

- une réponse rapide du moteur de simulation physique afin de s'assurer d'un rendu en temps réel ;
- une utilisation minimale de la mémoire vive et du stockage permanent ;
- une précision élevée des résultats.

Ces trois contraintes entrent généralement en conflit et chaque moteur physique doit être optimisé de façon à minimiser l'impact de ces compromis sur la fluidité de l'application.

Lors de la conception d'une application multimédia il faut donc premièrement identifier clairement tous les processus physiques pouvant intervenir et, dans la mesure du possible, identifier les équations contrôlant ces processus et choisir les conditions (température,

heure du jour, vitesse du vent, etc.) dans lesquelles la simulation se déroulera. La seconde étape consiste à sélectionner les processus physiques qui seront importants pour assurer le réalisme de la simulation. On doit ensuite choisir des méthodes numériques qui permettent de résoudre ces équations tout en respectant les contraintes en temps, mémoire et précision. Finalement, il faut programmer ces méthodes et les optimiser.

Le but de ce cours est donc de revisiter les lois de la physique qu'il est important de connaître pour améliorer le réalisme d'applications multimédia. Nous proposerons aussi des algorithmes numériques qui permettront de résoudre efficacement une multitude de problèmes de physique que vous pourriez rencontrer lors de la création de telles applications. En général, nous nous limiterons à des méthodes assez simples mais qui sont très robustes. Cependant, nous introduirons aussi des méthodes numériques beaucoup plus avancées lorsque requises pour résoudre des problèmes de physique plus complexes.

## 1.2 Applications multimédia où la physique joue un rôle important

### 1.2.1 Jeu de billard

Un jeu qui, de prime abord semble, relativement simple à réaliser par ordinateur est le billard français (voir figure 1.1), car on peut généralement limiter les simulations aux déplacements de sphères solides sur un plan en deux dimensions (le saut d'une boule est interdit). Dans un premier temps, nous supposerons que la surface du billard est illuminée uni-

*Billard vu du haut*

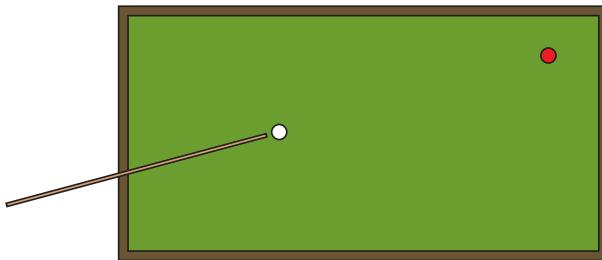


Figure 1.1: Billard français

formément et que la caméra tournant la scène est située à une grande distance directement au dessus du centre de la table. De ce fait, on peut négliger l'ombre que projette la queue et les boules sur la table. De plus, notre simulation sera silencieuse et les bruits provenant de chocs entre la queue et les boules, les boules entre elles et les boules avec les côtés du billard ne seront pas simulés.

Nous pouvons maintenant identifier les différentes composantes dynamiques décrivant le comportement de la queue de billard et d'une ou de plusieurs boules sur le jeu :

1. Suivre le mouvement accéléré de la queue dû à la force exercée par le bras jusqu'au moment où la queue touche la boule blanche.
2. Traiter la collision entre la queue et la blanche. Il faut alors déterminer la vitesse de la blanche et de la queue après la collision.
3. Suivre le mouvement de la queue après la collision jusqu'à son arrêt.
4. Suivre le mouvement de la boule blanche après la collision qui glisse initialement sur la table jusqu'à ce qu'elle commence à rouler ou entre en collision avec la boule rouge ou un des côtés de la table.
5. Suivre le roulement de la boule blanche sur la table jusqu'à ce qu'elle s'arrête ou entre en collision avec la boule rouge ou un des côtés de la table.
6. S'il y a collision entre la blanche et un des côtés, il faut déterminer la vitesse de la blanche après la collision.
7. S'il y a collision entre le boule blanche et rouge, il faut déterminer la vitesse des boules blanche et rouge après la collision.
8. Suivre le mouvement des boules blanche et rouge après la collision qui glissent initialement sur la table jusqu'à ce qu'elles commencent à rouler ou entre en collision avec l'autre boule ou un des côtés de la table.
9. Suivre le roulement des boules blanche et rouge sur la table jusqu'à ce qu'elles s'arrêtent ou entre en collision l'autre boule ou un des côtés de la table.

Les équations Ainsi, une boule, de vitesse initiale connue, se déplace en roulant ou en glissant sur la surface du billard. On doit simuler ce déplacement en tenant compte du frottement entre la boule et la table (on suppose ici que la table est fixe). Cette partie de la simulation se termine lorsque la balle atteint une vitesse nulle ou qu'une collision se produit.

La boule se déplaçant à une vitesse connue entre en contact avec une autre boule (au repos ou en mouvement), une des bandes ou une des poches du billard. Il est donc nécessaire de déterminer la position exacte de la collision, sachant les propriétés des différents objets entrant en collision, et d'évaluer les vitesses finales des objets après la collision. Lorsque la vitesse finale de tous les objets est connue, on peut retourner au point 1 pour poursuivre l'étude des trajectoires des boules.

Si une boule atteint un des paniers situés aux coins ou sur deux des côtés de la table. On doit alors passer d'une simulation 2D limitée par la table du billard à une simulation 3D où la boule est affectée par la gravité. Si la boule pénètre dans la poche et y demeure, sa trajectoire se termine. Sinon, on détermine sa vitesse finale de la boule à la sortie de la poche et on poursuit l'analyse de sa trajectoire.

La seconde étape consiste à écrire les équations qui sont requises pour simuler chacune des composantes dynamiques décrites dans la première étape. La connaissance de ces équations nous permettra ensuite de déterminer les données requises pour nos simulations. Ainsi, la trajectoire de la boule qui se déplace sur la table peut être décrite par les équations de la cinématique d'un objet qui glisse et roule sur une surface. En plus de la vitesse initiale de glissement et de rotation de la boule et de sa position initiale, les données additionnelles requises sont alors la masse de la boule, son rayon et les coefficients de frottement au glissement au roulement de la boule sur la table.

À chaque étape de la simulation, il faut vérifier si des collisions se sont produites. La position et les dimensions de chacun des objets mobiles sur le plan à tout moment seront requises en plus des dimensions de la surface de jeu (incluant les poches). Les équations contrôlant les collisions avec frottement sont nécessaires pour déterminer la vitesse de chacun des objets mobiles après une collision. Dans ce cas, les données reliées au coefficient de frottement entre les boules et avec les côtés du billard sont requises en plus des coefficients de restitution pour chaque type de collision. La trajectoire de la boule qui arrive dans une des poches peut être décrite par les équations de la cinématique d'un objet en chute libre en trois dimensions. Les données additionnelles requises sont les dimensions des poches.

La troisième étape consiste à acquérir les données pour ce jeu, soit dans des livres, des articles de journaux scientifiques ou en ligne. Par exemple, les principales caractéristiques du billard américain trouvées sur un ensemble de sites électroniques sont :

- les boules ont un rayon de 2.85 cm et une masse de 180 g ;
- la queue a une longueur 1.3 m et une masse de 0.6 kg ;
- la surface du billard de  $2.54 \times 1.27 \text{ m}^2$  est recouverte d'un feutre vert et entourée de bandes de caoutchouc ;
- les poches d'entrée situées aux quatre coins de la surface de jeu ont une ouverture de 14 cm (ouverture diagonale à 45 degrés par rapport aux bandes) et celles situées sur les côtés (au centre) ont une ouverture de 15 cm (parallèle aux bandes).

D'autres caractéristiques moins évidentes sont souvent beaucoup plus difficiles à trouver. Ceci inclut les coefficients de réflexion lors de collisions queue-boule, boule-boule et boule-côté et les coefficients de frottement queue-boule, boule-tapis et boule-côté .

La quatrième étape consiste à choisir les méthodes de résolution numérique ou analytique pour les équations décrites ci-dessus, à les programmer dans des routines spécialisées, et à les valider. Le choix des méthodes de résolution dépend de la complexité des équations à résoudre, de la précision désirée et de la rapidité requise pour la simulation. La programmation s'avère en général la partie la plus simple de processus. La validation et la qualification du logiciel sont souvent les étapes les plus ardues (on connaît rarement la solution exacte et on doit souvent se fier à la logique et à notre expérience).

Finalement, il faut construire l'algorithme de simulation. Ceci consiste à

1. Simuler la queue qui frappe la boule blanche en direction d'un des côtés du jeu ou d'une autre boule.
2. Déterminer les vitesses initiales linéaires et angulaires de la blanche après le coup.
3. Tracer la trajectoire de la blanche jusqu'à ce qu'elle subisse une collision avec un des côtés du jeu (aller à 4) ou une autre boule (aller à 5), qu'elle entre dans une des poches (arrêt de la simulation) ou qu'elle s'arrête sans collision (on retourne à l'étape 1).
4. Déterminer les nouvelles vitesses initiales linéaires et angulaires de la blanche après la collision et on retourne à 3.
5. Déterminer les nouvelles vitesses initiales linéaires et angulaires de la blanche et de la boule touchée.
6. Tracer la trajectoire de toutes les boules en mouvement jusqu'à ce que l'une d'entre elles subisse une collision avec un côté (aller à 7) ou une autre boule (aller à 8), entre dans une des poches (arrêt de la simulation pour cette boule et retour à 6) ou s'arrête (arrêt de la simulation pour cette boule et retour à 6). Si toutes les boules sont au repos, on retourne à 1.
7. Déterminer les nouvelles vitesses initiales linéaires et angulaires de la boule ayant subi la collision et on retourne à 6.
8. Déterminer les nouvelles vitesses initiales linéaires et angulaires des boules impliquées dans la collision et on retourne à 6.

Une fois l'algorithme validé, il ne reste qu'à ajouter l'interface graphique, finaliser la mise en place du jeu et le commercialiser.

Pour simplifier la mise au point de notre jeu, on débutera généralement avec des simulations simplifiées en supposant par exemple que : les boules ne possèdent pas de mouvement de rotation (vitesse angulaire nulle); les collisions sont toutes élastiques; et les boules s'arrêtent dès qu'elles ont atteint une vitesse inférieure à une valeur pré-déterminée. Ces simulations sont ensuite améliorées par étapes, en permettant par exemple à la boule de rouler sur la table, etc. jusqu'à ce que l'on puisse simuler des trajectoires plus réalistes comme celles illustrées à la figure 1.2.

### 1.2.2 Images de synthèse

Considérons une pièce carrée éclairée par une ampoule électrique située au plafond directement au-dessus d'une table et vue par un observateur adossé à un des murs de la pièce (voir figure 1.3).

Générer numériquement cette image de synthèse peut sembler trivial, cependant ceci est loin d'être le cas.<sup>[4]</sup> On peut d'ailleurs se demander à quoi peut servir une telle reconstruction

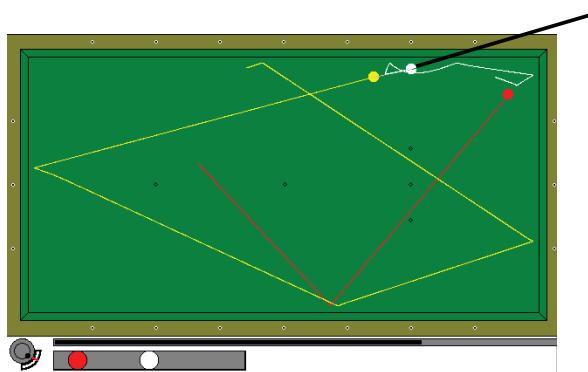


Figure 1.2: Exemple de trajectoire curviligne d'une boule sur un billard

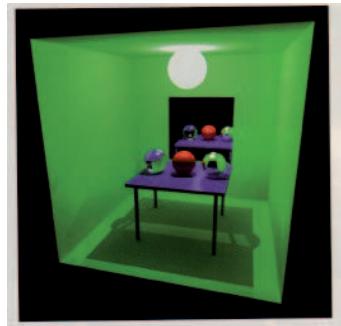


Figure 1.3: Image de synthèse simpliste d'un intérieur

sachant que l'on peut facilement prendre une photo numérique à très hautes résolutions en utilisant un simple téléphone intelligent. En réponse à ces questions on peut penser que :

- la photographie à hautes résolutions requiert un espace de stockage beaucoup plus important que le programme ayant servi à générer l'image de synthèse ;
- le programme de génération d'image de synthèse devrait fonctionner que les murs soient peints en vert ou rouge alors que pour la photo, on devra repeindre les murs et générer un autre fichier numérique ; et
- le programme de génération d'images de synthèse permet aussi de faire évoluer la scène observée dans le temps en générant une série d'images numériques alors que les photographies sont statiques (même chose pour les images d'un film).

La génération d'images est toutefois très complexe, car elle doit tenir compte de multiples effets, incluant l'atténuation de l'intensité lumineuse en fonction de la distance entre la source et l'observateur ; les réflexions de la lumière sur la table, les murs, le plancher et autres

objets présents dans la scène à simuler (ombres, éblouissements, réflexions diffuses et partielles) ; et la réfraction et l'atténuation à travers les objets transparents et semi-transparentes.



Figure 1.4: Images de synthèse de scènes extérieures

Pour construire une image de synthèse simplifiée, on peut utiliser une série d'approximations qu'il sera ensuite possible de raffiner. Ainsi on peut supposer en première approximation que la source de lumière est ponctuelle (ici, située directement au plafond), que tous les objets dans la pièce sont opaques (la lumière ne traverse pas les objets) et réfléchissent comme un miroir la lumière les atteignant et que seulement la lumière transmise directement ou réfléchie une fois est perçue par l'observateur. Nous ne verrons alors que des points lumineux ou des lignes lumineuses sur les différentes surfaces réfléchissantes, le reste de la scène se retrouvant dans l'obscurité. Une fois que nous avons simulé cette première image simplifiée, il est possible de lui apporter des améliorations.

Par exemple, on peut utiliser des coefficients de réflexion qui contiennent une composante de réflexion directe (miroir) et une composante diffuse (on voit des surfaces au lieu de lignes ou points lumineux, même si certaines régions d'ombre restent dans le noir absolu). On peut aussi considérer les réflexions multiples (les régions d'ombre et de pénombre apparaissent). On tient compte de la réflexion de la lumière sur les particules en suspension dans l'air comme la poussière, la neige, la bruine et le brouillard (voir figure 1.4).

Si des objets transparents sont présents dans la scène, les effets optiques dus à la réfraction doivent aussi être considérés (voir figure 1.5). De plus, pour les objets en mouvement, il



Figure 1.5: Image de synthèse avec réfraction de la lumière



Figure 1.6: Image de synthèse d'un visage

faut combiner la simulation visuelle avec la simulation dynamique décrite à la section 1.2.1. Ainsi, pour simuler le mouvement des cheveux sous l'effet du vent ou d'un coup de tête il faut coupler l'optique avec la dynamique des cheveux (voir figure 1.6).

### 1.2.3 Environnements sonores

Traiter le son à mesure qu'il se propage dans l'air peut sembler assez simple. Une source sonore immobile et ponctuelle qui émet des sons à une fréquence bien déterminée dans un milieu uniforme ne contenant aucun obstacle se disperse sur un front sphérique, son intensité étant atténuée en fonction du carré de la distance. Les complications apparaissent si le

milieu n'est pas uniforme, si l'on y insère des obstacles, que les sources ont des fréquences multiples ou qu'elles sont en mouvement.

Ainsi, pour simuler la perception par un chauffard de la sirène d'une auto-patrouille le poursuivant sur une autoroute droite pavée en plein désert. Il faudra tenir compte de la distance de l'auto-patrouille et de l'atténuation du son par la cabine de l'auto pour déterminer l'intensité du son transmis directement. La réflexion sur la chaussée (ici supposée rigide avec réflexion presque sans atténuation) affectera principalement l'intensité du son. Une différence de vitesse entre l'ambulance et l'auto peut modifier la fréquence de l'onde sonore perçue (effet Doppler). Si la poursuite se déroule au Québec sur une chaussée enneigée pleine de virages et en forêt, il faut aussi tenir compte de l'atténuation du son à travers la forêt en plus de considérer les réflexions sur les arbres entourant la route et sur la chaussée enneigée. La prise en compte de l'effet Doppler sera d'autant plus compliquée que cet effet dépend de la vitesse de deux autos et le son transmis directement n'aura pas nécessairement la même fréquence que le son qui a été réfléchi à de multiples reprises.

### 1.3 Modèles utilisés pour les simulations

Une question importante que nous devons maintenant aborder est :

Comment fait-on pour passer des modèles de la physique fondamentale aux modèles simplifiés qui seront utilisés pour les applications multimédia?

Cette question est d'ailleurs très semblable à celle que se pose tout scientifique lorsque vient le temps d'aborder un problème de physique :

Quel point de vue dois-je choisir pour analyser un problème spécifique : la physique des particules élémentaires elle-même, la mécanique quantique, la mécanique classique, la physique des milieux continus, la physique des ondes?

La réponse à ces questions, bien qu'étant imprécise est toutefois assez simple : il faut choisir les modèles qui permettent de simuler, de la façon la plus efficace possible et avec la précision minimale requise, le problème que nous avons défini.

Du point de vue microscopique, ceci implique que :

- toute la matière est composée de particules élémentaires qui interagissent entre elles;
- ces particules élémentaires sont considérées comme étant ponctuelles puisqu'elles ont des dimensions très faibles par rapport au monde macroscopique;
- elles sont caractérisées par leur fonction d'onde qui dépend de la position dans l'espace  $\vec{r}(t)$ , leur masse  $m$ , leur charge  $q$ , leur moment cinétique  $\vec{L}(t)$ , etc.;
- ces particules interagissent entre elles par des champs de force (force forte, électromagnétique, etc.).

Dans ce cours, nous utiliserons un point de vue macroscopique pour la majorité des problèmes que nous aborderons. Ainsi, nous ne considérerons plus des particules isolées, mais des particules liées les unes aux autres par les forces atomiques ou nucléaires (les objets étendus). Dans la majorité des cas, nous utiliserons toujours une interprétation classique de la physique. En optique (photons et lumière), c'est une interprétation ondulatoire qui sera utilisée, car les particules de lumière n'occupent plus une position bien déterminée, mais sont représentées par un champ distribué dans l'espace. En fonction de l'intensité des forces qui lient ces particules (ici, les atomes), nous aurons des solides non déformables (ou difficilement déformables), de solides déformables, et de fluides (liquides ou gaz).

### 1.3.1 Modélisation des solides

Dans le cas des solides, les interactions entre les constituants de la matière sont tellement fortes que l'on doit considérer l'ensemble des constituants comme faisant partie d'un tout. On est alors en présence d'un solide étendu qui est caractérisé par une forme donnée de dimensions et de masse finies.

En général, on caractérisera ces objets par la variable  $\rho(\vec{r})$  qui représente la distribution de masse volumique ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) dans l'espace pour ce solide et  $\mathcal{V}$  son extension spatiale. La notation que nous adopterons est la suivante

$$V = \int_{\mathcal{V}} d^3r, \quad (1.1)$$

où  $V$  est le volume de l'objet ( $\text{m}^3$ ). La masse de l'objet ( $\text{kg}$ ) est donnée par la relation

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) d^3r. \quad (1.2)$$

Cette masse est reliée à l'inertie de notre objet sous l'action d'une force (qu'elle soit gravitationnelle ou externe).

Pour les solides, on supposera que l'application d'une force externe sur l'objet ne le déforme pas (ou très peu), l'effet de la force se répercutant uniformément sur chacun de ses composants. Pour étudier ces problèmes, nous utiliserons la mécanique des milieux non déformables qui s'apparente à la mécanique des particules ponctuelles avec en plus le traitement du mouvement de rotation de l'objet résultant de son extension spatiale.

### 1.3.2 Modélisation de la lumière

La lumière est constituée de particules de masse nulle appelées photons. Ces particules interagissent peu entre elles par collisions directes. Les photons véhiculent aussi une combinaison de champs électriques et magnétiques qui sont couplés sous la forme d'une onde électromagnétique. Dans le vide (ou dans un matériel transparent), on peut supposer que les photons se comportent comme des particules libres qui voyagent en ligne

droite sans interaction. Cependant, leur nature ondulatoire de la lumière est facilement détectable lorsqu'elle traverse l'interface entre deux milieux (réfraction) ou lorsque des obstacles s'interposent dans sa trajectoire (diffraction ou interférence). Notez qu'en physique, lorsque l'on parle de photons on ne se limite pas exclusivement à la lumière, mais on considère que cette interprétation s'applique à toutes les ondes électromagnétiques incluant les micro-ondes et les ondes radio.

Lorsque l'on simulera une source ponctuelle de lumière dans un milieu uniforme, on supposera donc que cette source émet des particules de façon uniforme dans toutes les directions, ces particules se déplaçant en ligne droite (méthode des rayons), comme le dicte la mécanique classique. À une distance  $d$  de la source, le nombre de particules par unité de surface sera proportionnel à  $1/d^2$ . Donc l'intensité lumineuse sera atténuée par un facteur de  $1/d^2$ .

Si la composition du milieu change subitement (interface entre deux matériaux), on doit traiter explicitement cette transition en utilisant la physique des ondes avant de revenir au traitement par la méthode des rayons. Pour les matériaux qui ne sont pas uniformes ou qui contiennent des obstacles de dimensions comparables à la longueur d'onde de la lumière, seule une analyse complète par la méthode des ondes donne des résultats satisfaisants.

### 1.3.3 Modélisation des fluides

La simulation du comportement des liquides et des gaz en présence de forces externes très importantes est le domaine de la physique des fluides. On utilise alors la notion de champ qui représente une distribution dans l'espace et dans le temps de matière  $\rho(\vec{r}, t)$  sans frontière fixe. Ce sont les équations de transport (Navier-Stokes) qui contrôlent la dynamique de ce fluide. Elles sont dérivées de la physique statistique en utilisant une théorie du champ moyen et permettent de simuler de façon approximative les interactions entre ses différentes composantes et ainsi que l'effet de force provenant de l'extérieur. On replace donc la description ponctuelle du milieu par une description continue de la matière.

#### *Les liquides*

Dans le cas des liquides (fluides incompressibles), les interactions entre les constituants de la matière sont beaucoup plus faibles que pour les solides. En présence de forces externes suffisamment faibles, ces liquides maintiendront leurs formes et pourront être considérés comme occupant eux aussi une région de forme constante  $\mathcal{V}_o$  dans l'espace contenant une distribution de masse  $\rho$  uniforme. Cependant, si des forces externes plus fortes sont appliquées sur le liquide, il se déforme et occupe maintenant une région de forme  $\mathcal{V}_d$ , sa masse

totale et son volume ne changeant pas. Ainsi le fluide est incompressible,

$$V = \int_{\mathcal{V}_o} d^3r = \int_{\mathcal{V}_f} d^3r , \quad (1.3)$$

$$m = \int_{\mathcal{V}_o} \rho(\vec{r}) d^3r = \int_{\mathcal{V}_f} \rho(\vec{r}) d^3r . \quad (1.4)$$

On peut facilement illustrer ces concepts en prenant pour exemple la goutte d'eau sphérique tombant vers le plancher. La goutte conserve sa forme tout au long de sa chute (en absence de frottement pouvant la déformer), car la gravité exerce une force uniforme sur chaque atome d'eau constituant cette goutte. La goutte a une forme sphérique, puisque c'est la géométrie qui minimise l'énergie totale dans l'eau résultant des tensions de surface. La goutte d'eau sera partiellement déformée si l'on tient compte du frottement que l'air exerce sur sa surface (sphère allongée).

À son arrivée au sol, les forces qu'exerce le plancher sur chacune des molécules de la goutte interviennent à un moment différent. Comme elles sont très supérieures aux forces qui maintiennent la cohésion de la goutte en chute libre, cette dernière va se déformer, le niveau de déformation étant proportionnel à la vitesse initiale de la goutte et inversement proportionnelle à la force de cohésion (voir figure 1.7).

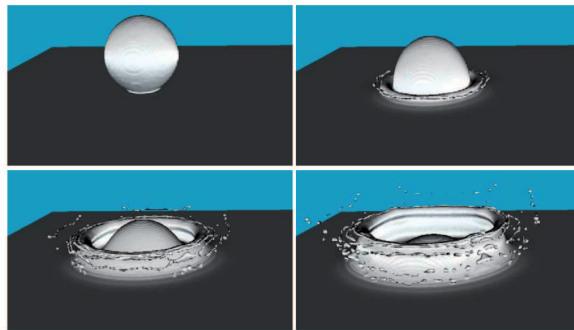


Figure 1.7: Goutte d'eau en chute libre (référence: [Jussieu](#))

Si on insère maintenant un liquide dans un récipient ouvert, il prend alors la forme de ce récipient, la surface supérieure du fluide étant plane (en première approximation). Si on exerce ensuite une force parallèle à la surface du fluide, des déformations périodiques apparaissent donnant naissance à des vagues. Ces vagues correspondent à des ondes transverses, c'est-à-dire que la déformation de la surface du liquide est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde (voir figure 1.8). Dans de tels cas, on se limitera souvent au traitement de la surface du liquide et au lieu d'utiliser la physique des fluides pour décrire l'ensemble du milieu on utilisera plutôt la physique des ondes pour décrire le comportement de la surface limitant le milieu.



Figure 1.8: Images de vagues. On peut aussi consulter les sites [Onde](#) et [Tsunami](#) pour plus d'images de vagues et de tsunamis

### *Modélisation des gaz*

Dans le cas des gaz (fluides compressibles), les interactions entre les constituants de la matière sont très faibles et les molécules se déplacent presque librement. Un gaz aura donc tendance à occuper tout le volume accessible. Dans ce cas, le concept de forme de la région de l'espace occupé par le gaz (constante ou non) n'a plus de sens.

Deux options pour effectuer des simulations impliquant les gaz sont généralement considérées. La première est déterministe et consiste, tout comme pour les liquides, à utiliser la mécanique des fluides. Cependant, elle doit maintenant être couplée fortement à la thermodynamique, les gaz étant compressibles. C'est ce qui est souvent fait en météorologie pour modéliser les nuages. Les gaz permettent aussi facilement le transport d'ondes de compression (en fait, ceci est aussi vrai pour les solides et les liquides). Dans ce cas, on se simplifie la vie en utilisant la physique acoustique qui décrit la propagation d'onde de pression dans différents milieux. On évite ainsi de traiter individuellement les différentes particules mises en mouvement par l'onde de pression en n'examinant que leur mouvement collectif.

La seconde méthode utilisée pour analyser les gaz est statistique et consiste à suivre le déplacement aléatoire d'un nombre élevé de molécules du gaz. En utilisant de tels modèles avec une méthode Monte-Carlo, on est alors à même de prédire avec une grande précision le comportement statistique des nuages.

## 1.4 Conclusions

Comme on peut le constater, le choix du modèle de simulation à utiliser pour différentes applications multimédias n'est pas toujours évident. De plus, une même simulation peut impliquer une combinaison de traitements différents. La contrainte principale associée à ces applications est l'utilisation de l'ordinateur et les conséquences qui en découlent incluant le temps de calcul, l'espace mémoire et disque requis pour le traitement, la précision de la solution numérique sur ordinateur et la résolution de la solution requise (principalement la résolution spatiale associée aux effets visuels, mais aussi la résolution temporelle pour les objets en mouvement).

Ainsi, pour créer des applications multimédia réalistes du point de vue physique, il faut :

- connaître les équations mathématiques qui régissent le comportement physique des objets ou des phénomènes que nous désirons simuler ;
- programmer des méthodes de simulation précises, rapides et faiblement consommatrices de mémoire, qui permettent de résoudre numériquement ces équations et de les intégrer dans des moteurs de simulation physique ;
- intégrer ces moteurs à un environnement multimédia permettant de suivre une scène en temps réel (jeux) ou image par image (film).

Chaque application nécessitera donc une série d'approximations qui seront choisies afin de minimiser le temps de calcul tout en optimisant la précision et la résolution de la solution. Ainsi la trajectoire des solides dans l'espace est généralement simplifiée en utilisant des trajectoires ponctuelles, les effets de rotations étant traités de façon indépendante. Les chapitres 2 à 6 sont consacrés à cette étude. Nous traiterons la majorité des cas impliquant la lumière (voir chapitre 7) en utilisant l'optique géométrique qui combine ses propriétés d'ondes et de particules. Finalement, pour les fluides, nous limiterons nos études aux deux cas relativement simples que sont les vagues à la surface de la mer (voir chapitre 8) et le son se propageant dans l'air (voir chapitre 9).

Dans le chapitre 2, nous nous intéresserons à la dynamique des solides. Nous commencerons par une discussion des objets ponctuels et étendus avant d'aborder les équations qui contrôlent leur comportement dans l'espace lorsqu'ils subissent l'effet d'une force. Nous aborderons aussi des concepts plus mathématiques tels les matrices et les quaternions de rotation, le centre de masse et le moment d'inertie qui seront très utile dans les chapitres suivant pour déterminer l'effet de forces sur la trajectoire de solides dans l'espace.

## Chapitre 2

### Dynamique des solides

Les objets ponctuels (les atomes par exemple) ont leur masse concentrée en un point, leurs dimensions étant infinitésimales. Lorsque l'on parle de solides, on se réfère plutôt à une région de l'espace dont la forme et les dimensions sont fixées. Cette région spatiale est occupée par de la matière dont la distribution volumique de masse (et donc la masse totale) est connue. Les lois de la mécanique newtonienne (classique) s'appliquent aussi bien aux objets ponctuels qu'aux objets étendus lorsqu'on les observe à un niveau macroscopique. À l'échelle microscopique, ce sont plutôt les lois de la mécanique quantique qui s'appliquent et les objets solides sont alors vus comme un ensemble d'objets ponctuels fortement liés entre eux.

Dans ce cours, nous nous limiterons à l'étude de systèmes macroscopiques et nous utiliserons uniquement la mécanique classique pour déterminer la trajectoire des particules ou des solides. Cependant, nous considérerons parfois des concepts de mécanique quantique pour expliquer des phénomènes comme le frottement.

#### 2.1 Objets ponctuels et étendus

Un objet ponctuel  $p$  est caractérisé par sa masse  $m_p$ , sa charge électrique  $e_p$  et toutes les autres propriétés intrinsèques qui lui sont associées. Cet objet est aussi caractérisé par sa position  $\vec{r}_p(t)$  dans l'espace et la vitesse  $\vec{v}_p(t)$  à laquelle il se déplace. Ces deux vecteurs, qui peuvent dépendre du temps, sont définis comme suit :

$$\vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} r_{p,x}(t) \\ r_{p,y}(t) \\ r_{p,z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} = (x_p(t), y_p(t), z_p(t))^T, \quad (2.1)$$

$$\vec{v}_p(t) = \begin{pmatrix} v_{p,x}(t) \\ v_{p,y}(t) \\ v_{p,z}(t) \end{pmatrix} = (v_{p,x}(t), v_{p,y}(t), v_{p,z}(t))^T. \quad (2.2)$$

Par définition

$$\vec{v}_p(t) = \frac{d\vec{r}_p(t)}{dt}, \quad (2.3)$$

et donc

$$v_{p,x}(t) = \frac{dx_p(t)}{dt}, \quad v_{p,y}(t) = \frac{dy_p(t)}{dt} \text{ et } v_{p,z}(t) = \frac{dz_p(t)}{dt}. \quad (2.4)$$

Contrairement à la position et la vitesse, qui sont propres à l'objet ponctuel à un temps  $t$  donné, l'accélération  $\vec{a}_p(t)$  définie par

$$\vec{a}_p(t) = \frac{d\vec{v}_p(t)}{dt}, \quad (2.5)$$

implique des interactions avec le monde externe (forces externes appliquées sur l'objet).

Dans le monde macroscopique où nous vivons, la majorité des objets ont une extension finie (solides de volume  $V$ ). Ils sont composés d'un grand nombre de particules élémentaires ( $> 10^{20}$ ) soudées entre elles par des forces qui s'exercent au niveau microscopique. Ces forces donnent une certaine rigidité aux liens entre les particules qui le composent, de telle sorte que l'application d'une force extérieure à n'importe quel point de l'objet produit un effet qui se transmet immédiatement à tout l'objet (à toutes ses composantes) sans qu'il me subisse de déformation visible et permanente.

Par analogie avec les particules, les objets solides correspondent donc à :

- une distribution de masse  $\rho(\vec{r})$  (en kg/m<sup>3</sup>) définie en tout point de l'espace ;
- la région de l'espace  $\mathcal{V}(t)$  de forme et de dimensions fixes que l'objet occupe au temps  $t$  ;
- le rythme  $d\mathcal{V}(t)/dt$  de déplacement de cette région de l'espace dans le temps.

Le volume  $V$  (m<sup>3</sup>) et la masse  $m$  (kg) de ce solide sont alors donnés par la relation

$$V = \int_{\mathcal{V}(t)} d^3r = \int_{\mathcal{V}(t)} dx dy dz, \quad (2.6)$$

$$m = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\vec{r}) d^3r = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.7)$$

Ils sont tous deux indépendants du temps, car nous sommes en présence d'un solide.

On peut décrire la région  $\mathcal{V}(t)$  de l'espace qu'occupe le solide de la façon suivante. Si on détermine  $\vec{r}_j(t)$  la position de chaque particule  $j$  composant le solide au temps  $t$ , alors  $\mathcal{V}(t) = \{\vec{r}_j(t)\}$  est un ensemble qui représente la position de tous les points du solide au temps  $t$ . Comme l'objet est solide, on aura de plus que la distance  $d_{ji}$  entre deux points arbitraires  $i$  et  $j$  de l'objet, donnée par

$$d_{ji} = |\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)| = \sqrt{(x_j(t) - x_i(t))^2 + (y_j(t) - y_i(t))^2 + (z_j(t) - z_i(t))^2}, \quad (2.8)$$

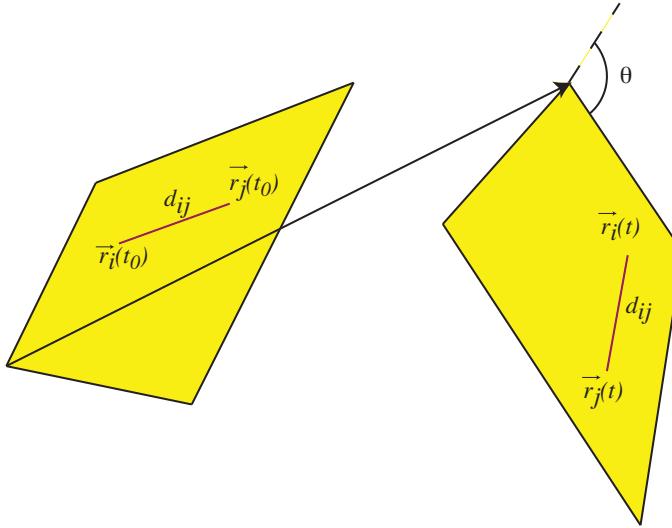


Figure 2.1: Exemple d'un solide (2D) subissant une translation et une rotation

sera indépendante du temps (voir figure 2.1). En effet, lors du déplacement de l'objet, tous ses points subiront le même mouvement de translation suivi du même mouvement de rotation autour d'un point de référence. Le rythme  $d\mathcal{V}(t)/dt$  de déplacement de cet espace correspondra donc à l'ensemble  $\{\vec{v}_j(t)\}$  qui représente la vitesse de tous les points du solide. La composante de la vitesse relative  $\vec{v}_{ji}(t) = \vec{v}_j(t) - \vec{v}_i(t)$  entre les points  $j$  et  $i$  parallèle au vecteur  $\vec{r}_{ji}(t) = \vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)$  séparant ces deux points doit demeurer nulle

$$\vec{v}_{ji}(t) \cdot \vec{r}_{ji}(t) = 0, \quad (2.9)$$

car la distance  $d_{ji}$  est constante (les deux points peuvent se déplacer à des vitesses différentes pourvu qu'ils demeurent à la même distance l'un de l'autre).

Ainsi, si un objet se déplace à une vitesse  $\vec{v}(t)$  dans l'espace sans mouvement de rotation, alors  $\mathcal{V}(t)$ , la région de l'espace qu'occupe l'objet dépendra du temps. Cependant, le volume, la forme et la configuration spatiale de l'objet demeureront constants. Ceci veut dire que chacune des particules le composant se déplace à la même vitesse  $\vec{v}(t)$ . De la même façon, si on applique à l'objet une force externe  $\vec{F}(\vec{r}, t)$  ne lui donnant aucun mouvement de rotation (forme et configuration spatiale de l'objet ne varient pas sous l'action de la force), cette force communiquera à toutes les particules qui composent le solide la même accélération  $\vec{a}_i(t) = \vec{a}(t)$  de façon à ce que la vitesse relative entre les différents points de l'objet

$$\frac{d\vec{v}_{ji}(t)}{dt} = \vec{a}_j(t) - \vec{a}_i(t) = 0, \quad (2.10)$$

demeure nulle. Lorsque le solide ne subit pas de rotation, on peut alors simplifier notre description en utilisant

- $\mathcal{V}(t_0)$  qui donne la position initiale de tous les points de l'objet ;
- $\vec{r}_i(t)$  la position d'un point de l'objet en fonction du temps ;
- $\vec{v}_i(t)$  la vitesse d'un point de l'objet en fonction du temps.

La position  $\vec{r}_j(t)$  et la vitesse  $\vec{v}_j(t)$  d'un point autre point arbitraire du solide en fonction du temps sera alors donnée par

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{ji}(t_0), \quad (2.11)$$

$$\vec{v}_j(t) = \vec{v}_i(t). \quad (2.12)$$

Donc, la connaissance de la trajectoire d'une particule de l'objet dans l'espace est suffisante pour générer automatiquement la trajectoire des autres particules qui composent cet objet.

Pour un solide qui se déplace de façon arbitraire dans l'espace (translation et rotation), le problème est un peu plus complexe. En effet, il n'est pas nécessaire que tous les points de l'objet aient la même vitesse pour que le solide conserve sa forme. Cependant, la vitesse relative entre deux points arbitraires de l'objet doit toujours avoir une composante dans la direction du vecteur joignant ces deux points qui est nulle (si ce n'est pas le cas, les deux points s'éloigneront alors l'un de l'autre et le solide se déformerait).

Maintenant, suivons la trajectoire dans l'espace d'un point  $i$  du solide en supposant que celui-ci tourne sur lui-même autour du point  $\vec{r}_c$  avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}_c$  (vitesse de rotation du solide de  $|\vec{\omega}_c|$  rad/s autour de l'axe de direction  $\vec{\omega}_c/|\vec{\omega}_c|$  passant par le point  $\vec{r}_c$ ). Comme nous sommes en présence d'un solide, tous les points du solide tourneront aussi autour du point  $\vec{r}_c$  avec la même vitesse angulaire  $\vec{\omega}_c$ . Si on définit  $\vec{\Omega}_i(t)$  comme étant la position angulaire du point  $i$  du solide au temps  $t$  par rapport à des axes centrés à  $\vec{r}_c$  alors

$$\frac{d\vec{\Omega}_i(t)}{dt} = \vec{\omega}_c(t), \quad (2.13)$$

et la position angulaire de  $i$  par rapport à tout autre point  $j$  du solide sera indépendante du temps

$$(\vec{\Omega}_j(t) - \vec{\Omega}_i(t)) = (\vec{\Omega}_j(t_0) - \vec{\Omega}_i(t_0)) = \Delta\vec{\Omega}_{ji}. \quad (2.14)$$

De plus, comme l'équation 2.13 est valide quelque soit le point considéré, on aura

$$(\vec{\Omega}_j(t) - \vec{\Omega}_j(t_{t_0})) = (\vec{\Omega}_i(t) - \vec{\Omega}_i(t_0)) = \Delta\vec{\Omega}_i(t). \quad (2.15)$$

Donc, suivre la position angulaire d'un seul point  $i$  du solide est suffisant pour connaître celle de tous les autres points du solide, car

$$\vec{\Omega}_j(t) = \vec{\Omega}_i(t) + \Delta\vec{\Omega}_{ji} = \vec{\Omega}_i(t_0) + \Delta\vec{\Omega}_i(t) + \Delta\vec{\Omega}_{ji}. \quad (2.16)$$

Comme le point  $\vec{r}_c$  du solide tourne sur lui-même, sa vitesse linéaire  $\vec{v}_c(t)$  et sa position spatiale  $\vec{r}_c(t)$  seront indépendantes de la vitesse angulaire  $\vec{\omega}_c(t)$ . Tous les autres points du solide auront une position et une vitesse qui sont décomposées en deux termes

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}_{r,i}(t), \quad (2.17)$$

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}_c(t) + \vec{v}_{r,i}(t), \quad (2.18)$$

où  $\vec{r}_{r,i}(t)$  est  $\vec{v}_{r,i}(t)$  sont la position du point  $i$  par rapport à  $\vec{r}_c$  et la vitesse de déplacement du point  $i$  due à son mouvement de rotation respectivement au temps  $t$  (voir figures 2.2).

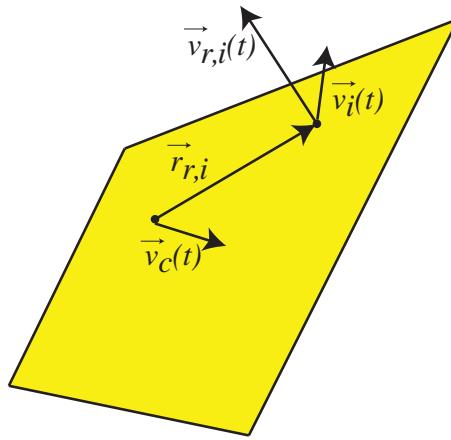


Figure 2.2: Vitesse relative entre deux points d'un solide en rotation

Le calcul de  $\vec{v}_{r,i}(t)$  est très simple si l'on connaît  $\vec{r}_{r,i}(t)$  :

$$\vec{v}_{r,i}(t) = \vec{\omega}_c(t) \times \vec{r}_{r,i}(t). \quad (2.19)$$

Déterminer  $\vec{r}_{r,i}(t)$  est cependant un peu plus compliqué. Ceci est la conséquence de travailler avec la position angulaire  $\vec{\Omega}_i(t)$ . Ce choix semble d'ailleurs naturel puisque cette variable est reliée directement à la vitesse angulaire et le vecteur  $\vec{r}_{r,i}(t)$  décrit effectivement une trajectoire circulaire dans un plan perpendiculaire  $\vec{\Omega}_i(t)$ . Cependant, si l'on connaît la position relative initiale  $\vec{r}_{r,i}(t_0)$  ainsi que le changement de la position angulaire  $\Delta\vec{\Omega}_i(t)$  de ce point par rapport au temps  $t_0$  alors, on peut écrire

$$\vec{r}_{r,i}(t) = \mathbf{R}_i(t, t_0) \vec{r}_{r,i}(t_0), \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{R}(t, t_0)$  est une matrice qui décrit l'impact de ce changement de la position angulaire sur un point arbitraire du solide. On utilisera aussi la notation  $\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_i(t, t_0)$  en supposant que le système de référence pour la rotation correspond au temps  $t_0$ .

Si nous définissons

$$\theta \hat{u} = \Delta\vec{\Omega}_i(t), \quad (2.21)$$

tel que  $\theta$  est l'angle de rotation du système autour de l'axe  $\hat{u}$ :

$$\theta = |\Delta \vec{\Omega}_i(t)|, \quad (2.22)$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{\Delta \vec{\Omega}_i(t))}{\theta}, \quad (2.23)$$

alors la matrice  $\mathbf{R}(t)$  s'écrit

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} u_x^2 + (u_y^2 + u_z^2) \cos \theta & u_x u_y (1 - \cos \theta) - u_z \sin \theta & u_x u_z (1 - \cos \theta) + u_y \sin \theta \\ u_x u_y (1 - \cos \theta) + u_z \sin \theta & u_y^2 + (u_z^2 + u_x^2) \cos \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) - u_x \sin \theta \\ u_x u_z (1 - \cos \theta) - u_y \sin \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) + u_x \sin \theta & u_z^2 + (u_x^2 + u_y^2) \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Cette matrice  $\mathbf{R}(t)$  nous indique effectivement comment transformer un vecteur défini dans le système de coordonnées locales, associé au solide (voir figure 2.3) et qui a évolué dans le temps, pour le ramener dans un système de coordonnées qui est immobile (le système du laboratoire).

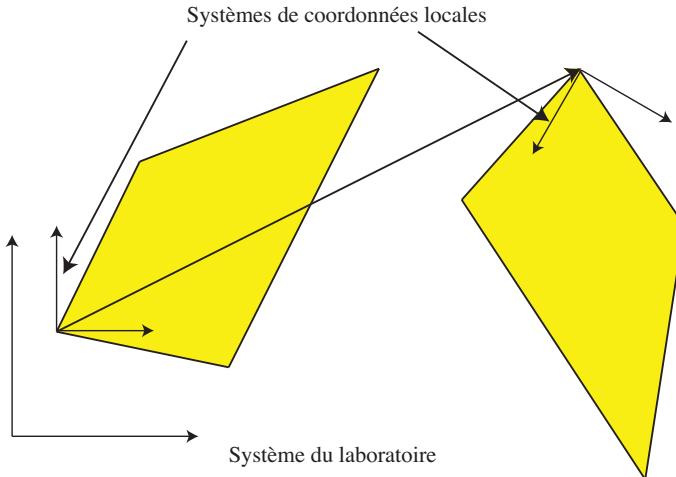


Figure 2.3: Système de coordonnées local et du laboratoire

Finalement, la position et la vitesse de tout point du solide en rotation et en translation seront données par:

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t) + (\mathbf{R}(t)\vec{r}_{r,i}(t_0)), \quad (2.25)$$

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}_c(t) + \vec{\omega}_c(t) \times (\mathbf{R}(t)\vec{r}_{r,i}(t_0)). \quad (2.26)$$

Pour déterminer la trajectoire du solide dans l'espace, nous n'aurons qu'à résoudre les équations de la dynamique pour  $\vec{r}_c(t)$ ,  $\vec{v}_c(t)$ ,  $\vec{\omega}_c(t)$  et  $\mathbf{R}(t, t_0)$ .

## 2.2 Matrices de rotation

Une matrice de rotation  $\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1}$  sert à transformer un vecteur  $\vec{v}^1$  décrit dans le système 1 en un vecteur  $\vec{v}^2$  dans le système 2, ce dernier système ayant lui-même subi une rotation par rapport à 1. Ainsi

$$\vec{v}^2 = \mathbf{R}^{2 \leftarrow 1} \vec{v}^1. \quad (2.27)$$

On peut aussi retourner dans le système original en utilisant

$$\vec{v}^1 = \mathbf{R}^{1 \leftarrow 2} \vec{v}^2 = (\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^{-1} \vec{v}^2, \quad (2.28)$$

où  $(\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^{-1} = \mathbf{R}^{1 \leftarrow 2}$  est l'inverse de  $\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1}$ .

Transformer un tenseur  $\mathbf{M}$  décrit dans le système  $L$  en un tenseur décrit dans le système  $G$  est un peu plus compliqué. On doit alors utiliser

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{R}^{2 \leftarrow 1} \mathbf{M}^1 (\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^{-1}. \quad (2.29)$$

En plus de la méthode décrite à l'équation 2.24, il existe plusieurs autres façons de définir ces matrices de rotation.

### *Rotations directes autour des axes originaux*

Si on suppose que les nouveaux axes correspondent à des rotations successives de  $\theta_x$  par rapport à l'axe des  $x$ ,  $\theta_y$  par rapport à l'axe des  $y$  et  $\theta_z$  par rapport à l'axe des  $z$ , la matrice de rotation aura la forme

$$\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1} = \mathbf{R}_z(\theta_z) \mathbf{R}_y(\theta_y) \mathbf{R}_x(\theta_x), \quad (2.30)$$

où

$$\mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

La matrice de rotation inverse correspond à effectuer le trajet inverse, c'est-à-dire une rotation de  $-\theta_z$  autour de l'axe des  $z$ , une rotation de  $-\theta_y$  autour de l'axe des  $y$  et de  $-\theta_x$  autour

de l'axe des  $x$ . On aura alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^{-1} &= \mathbf{R}_x(-\theta_x) \mathbf{R}_y(-\theta_y) \mathbf{R}_z(-\theta_z) \\ &= (\mathbf{R}_x(\theta_x))^T (\mathbf{R}_y(\theta_y))^T (\mathbf{R}_z(\theta_z))^T = (\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^T, \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec  $(\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^T$  la transposée de  $\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1}$ .

### Angles de Euler

Les angles de Euler sont définis en considérant trois rotations successives autour d'axes ayant eux-mêmes subi des rotations

1.  $\psi$  autour de  $z$  et  $(x, y, z) \rightarrow (u, v, z)$
2.  $\theta$  autour de  $u$  et  $(u, v, z) \rightarrow (u, w, z')$
3.  $\varphi$  autour de  $z'$  et  $(u, w, z') \rightarrow (x', y', z')$

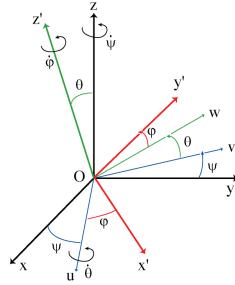


Figure 2.4: Les angles d'Euler

Matrice de rotation pour angles d'Euler.

$$\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi + \sin \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

### Évaluation directe de la matrice de rotation

Si dans le système local ( $L$ ) les axes sont donnés par

$$\hat{\mathbf{u}}_x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}_y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}_z^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

et que dans le système global ( $G$ ) ces mêmes axes correspondront à

$$\hat{u}_x^2 = \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{yx} \\ u_{zx} \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_y^2 = \begin{pmatrix} u_{xy} \\ u_{yy} \\ u_{zy} \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_z^2 = \begin{pmatrix} u_{xz} \\ u_{yz} \\ u_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

alors la matrice de rotation  $\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1}$  est donnée par

$$\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{pmatrix} = (\hat{u}_x^2 \quad \hat{u}_y^2 \quad \hat{u}_z^2). \quad (2.38)$$

## 2.3 Quaternions et rotation

Les quaternions sont des entités mathématiques qui, bien qu'ayant été développées il y a près de 100 ans par William Hamilton lors de ses travaux sur les nombres complexes, ont été peu utilisées avant l'avènement des méthodes de simulation par ordinateur. Un quaternion est en réalité un vecteur en quatre dimensions noté  $\vec{\vec{q}}$  et défini comme suit

$$\vec{\vec{q}} = (q_0, q_x, q_y, q_z)^T. \quad (2.39)$$

Les composantes  $q_x$ ,  $q_y$  et  $q_z$  du quaternion correspondent aux directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  d'un vecteur en 3D alors que la composante  $q_0$  correspond à une direction  $w$  perpendiculaire aux trois autres. Ainsi, un vecteur  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$  en trois dimensions pourra être transformé en quaternion  $\vec{\vec{v}}$  en utilisant la relation

$$\vec{\vec{v}} = (0, v_x, v_y, v_z)^T = (0, \vec{v}^T)^T. \quad (2.40)$$

### 2.3.1 Opération sur les quaternions

Un certain nombre d'opérations élémentaires qui sont valides pour les vecteurs le sont aussi pour les quaternions :

- Somme

$$\begin{aligned} \vec{\vec{q}}^1 + \vec{\vec{q}}^2 &= (q_0^1 + q_0^2, q_x^1 + q_x^2, q_y^1 + q_y^2, q_z^1 + q_z^2)^T \\ &= (q_0^1 + q_0^2, (\vec{q}^1 + \vec{q}^2)^T)^T. \end{aligned} \quad (2.41)$$

- Soustraction

$$\begin{aligned} \vec{\vec{q}}^1 - \vec{\vec{q}}^2 &= (q_0^1 - q_0^2, q_x^1 - q_x^2, q_y^1 - q_y^2, q_z^1 - q_z^2)^T \\ &= (q_0^1 - q_0^2, (\vec{q}^1 - \vec{q}^2)^T)^T. \end{aligned} \quad (2.42)$$

- Produit scalaire généralisé

$$\vec{q}^1 \cdot \vec{q}^2 = \sum_{i=0}^3 q_i^1 q_i^2 = q_0^1 q_0^2 + \vec{q}^1 \cdot \vec{q}^2. \quad (2.43)$$

- Norme

$$\|\vec{q}\| = \sqrt{\vec{q} \cdot \vec{q}} = \sum_{i=0}^3 q_i q_i = \sqrt{(q_0)^2 + \vec{q} \cdot \vec{q}} = \sqrt{(q_0)^2 + \|\vec{q}\|^2}. \quad (2.44)$$

Cependant, la présence de la composante additionnelle dans la direction  $w$  permet aussi de définir une série d'opérations additionnelles

- Produit (de Hamilton)

$$\begin{aligned} \vec{q}^1 \vec{q}^2 &= (q_0^1 q_0^2 - q_x^1 q_x^2 - q_y^1 q_y^2 - q_z^1 q_z^2, q_0^1 q_x^2 + q_x^1 q_0^2 + q_y^1 q_z^2 - q_z^1 q_y^2, \\ &\quad q_0^1 q_y^2 + q_y^1 q_0^2 + q_z^1 q_x^2 - q_x^1 q_z^2, q_0^1 q_z^2 + q_z^1 q_0^2 + q_x^1 q_y^2 - q_y^1 q_x^2)^T \\ &= (q_0^1 q_0^2 - \vec{q}^1 \cdot \vec{q}^2, q_0^1 (\vec{q}^2)^T + q_0^2 (\vec{q}^1)^T + (\vec{q}^1 \times \vec{q}^2)^T)^T. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Cette opération n'est pas commutative en général

$$\vec{q}^1 \vec{q}^2 \neq \vec{q}^2 \vec{q}^1, \quad (2.46)$$

la commutativité impliquant

$$\vec{q}^1 \times \vec{q}^2 = \vec{q}^1 \times \vec{q}^2, \quad (2.47)$$

et donc que  $\vec{q}^1$  et  $\vec{q}^2$  soient colinéaires (parallèles).

- Conjugaison

$$(\vec{q})^* = (q_0, -q_x, -q_y, -q_z)^T = (q_0, -\vec{q}^T)^T. \quad (2.48)$$

- Inverse

$$(\vec{q})^{-1} = \frac{(\vec{q})^*}{\|\vec{q}\|^2}. \quad (2.49)$$

- Division à gauche et à droite

$$\vec{r} = (\vec{q})^{-1} \vec{p}, \quad (2.50)$$

$$\vec{s} = \vec{p} (\vec{q})^{-1}. \quad (2.51)$$

En général, comme la multiplication ne commute pas,

$$\vec{r} \neq \vec{s}. \quad (2.52)$$

### 2.3.2 Quaternion de rotation

Comme nous l'avons vu à la section 2.2, les équations qui décrivent le mouvement de rotation du solide sont particulièrement simples si on utilise un vecteur de position angulaire  $\vec{\Omega} = \theta \hat{u}$ . Cependant, pour localiser tous les points d'un solide ayant subi une telle rotation, il est nécessaire de construire à partir de ce vecteur une matrice de rotation (voir 2.24). Il est aussi possible d'utiliser des quaternions pour effectuer le même type de transformation.

Ici, ce qui nous intéresse particulièrement c'est le quaternion unitaire  $\vec{r}$  défini comme suit

$$\vec{r} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \hat{u}^T)^T, \quad (2.53)$$

dont la norme

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) \|\hat{u}\|^2} = 1, \quad (2.54)$$

est effectivement l'unité.

On peut utiliser ce quaternion pour effectuer une rotation, correspondant à  $\vec{\Omega}$ , d'un vecteur arbitraire  $\vec{v}$  dans l'espace en utilisant la relation

$$\vec{q}' = (0, (\vec{v}')^T)^T = \vec{r} (0, \vec{v}^T)^T \vec{r}^* = \vec{r} \vec{q} \vec{r}^*. \quad (2.55)$$

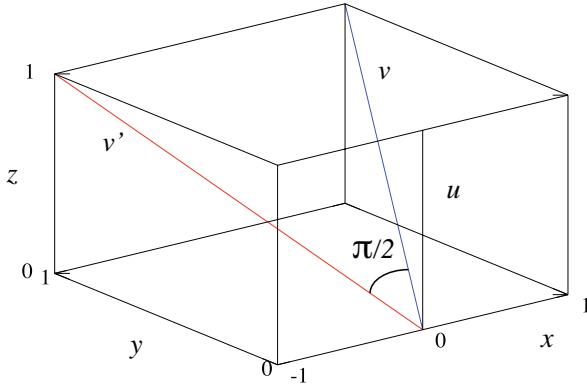


Figure 2.5: Rotation de  $\vec{v} = (1, 1, 1)^T$  de  $\pi/2$  autour de l'axe  $\hat{u} = \hat{z}$

Illustrons maintenant cette procédure en procédant à la rotation du vecteur  $\vec{v} = (1, 1, 1)^T$  présenté à la figure 2.5 d'un angle de  $\pi/2$  autour de l'axe  $\hat{u} = \hat{z}$ . Le vecteur original  $\vec{v}$  correspond au quaternion

$$\vec{q} = (0, 1, 1, 1)^T. \quad (2.56)$$

Le quaternion de rotation et son conjugué sont donnés par

$$\vec{r} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \hat{u}^T)^T = ((\cos(\pi/4), 0, 0, \sin(\pi/4))^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T, \quad (2.57)$$

$$\vec{r}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)^T. \quad (2.58)$$

et l'évaluation de  $\vec{a} = \vec{q} \vec{r}^*$  donne

$$\vec{a} = \vec{q} \vec{r}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0-0-0+1 \\ 0+1-1-0 \\ 0+1+0+1 \\ 0+1+0-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

L'étape suivante consiste à calculer  $\vec{q}' = \vec{r} \vec{a}$

$$\vec{q}' = \vec{R} \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-0-0-1 \\ 0+0-0-2 \\ 2+0+0+0 \\ 1+1+0-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (0, -1, 1, 1)^T. \quad (2.60)$$

Finalement on peut extraire de ce quaternion le vecteur  $\vec{v}' = (-1, 1, 1)^T$  qui résulte de la rotation de  $\vec{v}$ . La matrice de rotation correspondante aurait été

$$\mathbf{R}(t, t_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

et aurait produit le même résultat. Un exemple de programmation Octave permettant d'effectuer le calcul décrit ci-dessus suit.

- Définition des données et appel de la fonction procédant à la rotation.

```
% Rotation en utilisant les quaternions.
% Vecteur v=(1,1,1)
% Rotation de pi/2 autour de u=(0,0,1)
vref=[1 1 1];
theta=pi/2;
urot=[0 0 1];
vrot=QARotation(vref,theta,urot)
```

- Fonction `QARotation.m` pour effectuer la rotation d'un vecteur  $\vec{v}$  autour de  $\theta \hat{u}$ .

```
function vrotation=QARotation(v,theta,u)
% Rotation du vecteur v par theta autour de u
qv=horzcat([0],v);
qr=horzcat(cos(theta/2),sin(theta/2)*u);
v1=QProduit(qr,qv);
v2=QConjugue(qr);
qc=QProduit(v1,v2);
vrotation=qc(2:4);
```

- Fonction `QConjugue.m` pour le calcul de la conjuguée d'un quaternion.

```
function c=QConjugue(a)
% Conjuguer un quaternion
c=horzcat([a(1)], -a(2:4));
```

- Fonction `QProduit.m` pour le produit de Hamilton de deux quaternions.

```
function c=QProduit(a,b)
% Produit de 2 quaternions
v1=a(2:4);
v2=b(2:4);
vp=cross(v1,v2);
vecpc=a(1)*v2+b(1)*v1+vp;
c=horzcat((a(1)*b(1)-(v1*v2')),vecpc);
```

- Fonction `QUnitaire.m` qui sert à normaliser un quaternion à 1.

```
function c=QUnitaire(a)
% Normaliser le quaternion à 1
long=sqrt(a(1)^2+dot(a(2:4),a(2:4)));
c=a/long;
```

## 2.4 Équations de la dynamique

### 2.4.1 Mouvement de translation

Newton a énoncé trois lois qui décrivent la dynamique des particules et des solides en translation :

1. Si aucune force n'est appliquée sur un corps de masse  $m$ , celui-ci restera au repos ou continuera à se déplacer en ligne droite à une vitesse constante.

2. L'accélération d'un corps est proportionnelle à la force agissant sur le corps et dans la direction de cette force.
3. À toute force agissant sur un corps (action) correspond une force égale et opposée qui s'oppose à la première force (réaction).

Elles s'appliquent aussi bien aux molécules présentes dans un solide, qu'aux solides eux-mêmes. Pour les fluides (liquides et gaz) qui sont composés de milliards de molécules faiblement liées entre elles, ces trois lois demeurent valides. Cependant, on les applique rarement sur la totalité du volume, car le fluide peut se déformer sous l'effet de forces externes. On utilise alors une interprétation statistique de ces lois en termes de propriétés volumiques (ex. masse volumique au lieu de la masse, etc.).

On a déjà caractérisé les propriétés cinématiques (de déplacement en translation) d'un point du corps par deux quantités vectorielles (6 quantités scalaires) :

1. la position  $\vec{r}(t)$  à tout instant

$$\vec{r}(t) = (r_x(t), r_y(t), r_z(t))^T = (x(t), y(t), z(t))^T , \quad (2.62)$$

2. la vitesse  $\vec{v}(t)$  à tout instant

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))^T = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left( \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)^T . \quad (2.63)$$

L'accélération  $\vec{a}(t)$  à tout instant n'est pas propre au corps, mais résulte de la force totale externe appliquée  $\vec{F}(t)$

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))^T = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} . \quad (2.64)$$

Les lois de Newton s'appliquent à tous les points  $\vec{r}_i$  du corps solide sans rotation

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}(t) , \quad (2.65)$$

$$\vec{a}_i(t) = \vec{a}(t) . \quad (2.66)$$

qui ont tous les mêmes vitesses et accélérations. La position relative  $\vec{r}_{i,c}(t)$  d'un point  $i$  du solide par rapport à un autre point  $\vec{r}_c(t)$  étant fixe, la trajectoire de tous les points peut être calculée en utilisant

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}_{i,c}(t_0) . \quad (2.67)$$

La seconde loi de Newton se résume à

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} , \quad (2.68)$$

avec  $m$  une constante de proportionnalité définie comme étant la masse de l'objet (ici, on suppose cette valeur constante). Comme on le voit, si aucune force n'est appliquée sur l'objet, alors

$$m\vec{a}(t) = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(m\vec{v}(t))}{dt} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = 0, \quad (2.69)$$

et la vitesse (ou la quantité de mouvement  $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$ ) demeure constante ce qui mène à la première loi.

La formulation

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}, \quad (2.70)$$

est supérieure à l'expression initiale de Newton, car elle peut être utilisée lors de collision entre deux objets qui s'échangent une partie de leur masse. Cependant, il faut être prudent lors de son utilisation, car pour le cas des fusées avec éjection de masse continue ( $m(t)$ ) on ne peut écrire

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \neq \frac{d(m(t)\vec{v}(t))}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt} \vec{v}(t), \quad (2.71)$$

car la masse éjectée par le véhicule a une vitesse différente de celle du véhicule (sinon elle resterait en contact avec celui-ci). Dans ce cas, il faut avoir recours à la troisième loi de Newton pour résoudre le problème. Cette loi stipule qu'à chaque force externe ou interne agissant sur un corps (action) correspond une force égale et opposée de réaction et s'écrit

$$\vec{F}_a = -\vec{F}_r. \quad (2.72)$$

Pour le cas de la fusée, le moteur devra fournir une force

$$\vec{F}_{\text{éjection}}(t) dt = \vec{u}(t) dm(t), \quad (2.73)$$

pendant un temps  $dt$  (une impulsion) pour donner à l'élément de masse  $dm(t)$  à éjecter une vitesse relative  $u(t)$  non nulle par rapport à sa propre vitesse. La force totale appliquée sur la fusée est alors

$$\vec{F}_{\text{totale}} = \vec{F}_{\text{externe}}(t) - \vec{F}_{\text{éjection}}(t), \quad (2.74)$$

et les équations de la dynamique deviennent

$$\vec{F}_{\text{externe}}(t) - \vec{u}(t) \frac{dm(t)}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \quad (2.75)$$

Le changement  $\Delta\vec{p}$  de quantité de mouvement d'un corps subissant cette force  $\vec{F}(t)$  pendant une période de temps  $\Delta t$  est égal à l'impulsion  $\vec{J}$  reçue par ce corps

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t) dt = \int_0^{\Delta t} (F_x(t), F_y(t), F_z(t))^T dt. \quad (2.76)$$

L'énergie transférée au corps par cette force  $\vec{F}_a$  appliquée sur une distance  $L$  suivant le parcours  $d\vec{l}$  sera donnée par

$$E = \int_0^L \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (2.77)$$

et correspond à l'énergie perdue par le système due à la force  $\vec{F}_r = -\vec{F}$  appliquée sur une distance  $L$  suivant même le parcours.

En conclusion, les équations du mouvement que nous devons résoudre pour suivre un point  $c$  du solide de masse constante  $m$  qui ne subit pas de mouvement de rotation sont les suivantes

$$\frac{d\vec{v}_c(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(\vec{r}_c, \vec{v}_c, t)}{m}, \quad (2.78)$$

$$\frac{d\vec{r}_c(t)}{dt} = \vec{v}_c(t), \quad (2.79)$$

avec des conditions initiales

$$\vec{v}_c(t_0) = \vec{v}_{c,0}, \quad (2.80)$$

$$\vec{r}_c(t_0) = \vec{r}_{c,0}. \quad (2.81)$$

#### 2.4.2 Mouvement de rotation

Les lois de Newton sont insuffisantes pour décrire la dynamique des solides en rotation autour d'un point et il faut introduire des lois supplémentaires qui peuvent être vues comme une généralisation des lois de Newton. Ces lois reliées au mouvement de rotation sont

1. Si aucun moment de force n'est appliqué sur un corps, le corps conservera son mouvement de rotation autour d'un point.
2. L'accélération angulaire d'un corps dépend du moment de force agissant sur le corps.

Comme on l'a aussi vu à la section 2.1, on peut caractériser le mouvement de rotation d'un corps encore une fois par deux quantités vectorielles (6 quantités scalaires). Nous utiliserons  $\vec{\Omega}(t)$  défini par (en radians)

$$\vec{\Omega}(t) = (\Omega_x(t), \Omega_y(t), \Omega_z(t))^T, \quad (2.82)$$

pour caractériser la rotation de l'objet autour d'un point  $\vec{r}_c$  (loi de la main droite). Comme la position angulaire  $\vec{\Omega}_i^L$  de tous les points de l'objet par rapport aux axes locaux est indépendant du temps (les axes locaux tournent de  $\vec{\Omega}(t)$ ), on utilisera

$$\vec{\Omega}_i^2(t) = \vec{\Omega}_i^L(t_0) + \vec{\Omega}(t) = \mathbf{R}(\vec{\Omega}_i^2(t), \vec{\Omega}_i^2(t_0))\vec{\Omega}_i^L(t_0) = \mathbf{R}(t, t_0)\vec{\Omega}_i^L(t_0)$$

avec  $\vec{\Omega}_i^L(t_0)$  la position angulaire initiale du point dans le système global et du laboratoire (ces systèmes coïncident) et  $\vec{\Omega}_i^2(t)$  la position angulaire du point au temps  $t$  pris par rapport au système du laboratoire.

La vitesse angulaire  $\vec{\omega}_i(t)$  (rad/s) d'un point  $i$  autour de  $\vec{r}_c$  est définie par

$$\vec{\omega}_i(t) = \vec{\omega}(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))^T = \frac{d\vec{\Omega}_i(t)}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt}, \quad (2.83)$$

alors que l'accélération angulaire  $\vec{\alpha}(t)$  (rad/s<sup>2</sup>) correspondante est

$$\vec{\alpha}_i(t) = \vec{\alpha}(t) = (\alpha_x(t), \alpha_y(t), \alpha_z(t))^T = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{\Omega}(t)}{dt^2}. \quad (2.84)$$

Comme on l'a déjà vu, la position relative par rapport à  $\vec{r}_c(t)$  des points de l'objet subissant un mouvement de rotation sans aucune translation peut s'écrire

$$\vec{r}_{i,c}(t) = \mathbf{R}(t, t_0)\vec{r}_{i,c}(t_0) = \mathbf{R}(t)\vec{r}_{i,c}(t_0). \quad (2.85)$$

Donc, ce qui nous intéresse principalement c'est la matrice  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t, t_0)$ , pas  $\vec{\Omega}(t)$ . Il serait donc intéressant de remplacer l'équation différentielle pour la vitesse angulaire en fonction de la dérivée de la position angulaire (2.83) par une équation différentielle pour la matrice de rotation.

Pour ce faire, considérons le cas simple correspondant à une rotation  $\Omega_z(t)$  autour de l'axe des  $z$  ( $\vec{\Omega} = \Omega_z(t)\hat{z}$ ). La matrice de rotation est alors donnée par

$$\mathbf{R}_z(\Omega_z) = \begin{pmatrix} \cos \Omega_z(t) & -\sin \Omega_z(t) & 0 \\ \sin \Omega_z(t) & \cos \Omega_z(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

La dérivée de  $\mathbf{R}_z(\Omega_z)$  par rapport à  $t$  donne

$$\frac{d\mathbf{R}_z(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin \Omega_z(t) & -\cos \Omega_z(t) & 0 \\ \cos \Omega_z(t) & -\sin \Omega_z(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d\Omega_z(t)}{dt}. \quad (2.87)$$

Maintenant, si on écrit  $\vec{\omega}_z(t) = (0, 0, d\Omega_z(t)/dt)^T$  alors on voit que chaque colonne de  $d\mathbf{R}_z(t)/dt$  correspond au produit vectoriel de  $\vec{\omega}(t)$  et la colonne correspondante de  $\mathbf{R}_z(t)$ :

$$\frac{d\mathbf{R}_z(t)}{dt} = \left( \vec{\omega}_z(t) \times \begin{pmatrix} \cos \Omega_z(t) \\ \sin \Omega_z(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_z(t) \times \begin{pmatrix} -\sin \Omega_z(t) \\ \cos \Omega_z(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_z(t) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad (2.88)$$

De la même façon, si on considère une rotation  $\Omega_y(t)$  autour de l'axe des  $y$  ( $\vec{\Omega} = \Omega_y(t)\hat{y}$ ) on aura

$$\frac{d\mathbf{R}_y(t)}{dt} = \left( \vec{\omega}_y(t) \times \begin{pmatrix} \cos \theta_y(t) \\ 0 \\ -\sin \theta_y(t) \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_y(t) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_y(t) \times \begin{pmatrix} \sin \theta_y(t) \\ 0 \\ \cos \theta_y(t) \end{pmatrix} \right), \quad (2.89)$$

et finalement pour une rotation  $\Omega_x(t)$  autour de l'axe des  $x$  ( $\vec{\Omega} = \Omega_x(t)\hat{x}$ ) on peut écrire

$$\frac{d\mathbf{R}_x(t)}{dt} = \left( \vec{\omega}_x(t) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_x(t) \times \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\theta_x(t) \\ \sin\theta_x(t) \end{pmatrix} \quad \vec{\omega}_x(t) \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta_x(t) \\ \cos\theta_x(t) \end{pmatrix} \right). \quad (2.90)$$

La forme générale pour une rotation arbitraire en 3D est donc

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = (\vec{\omega}(t) \times \vec{R}_x(t) \quad \vec{\omega}(t) \times \vec{R}_y(t) \quad \vec{\omega}(t) \times \vec{R}_z(t)), \quad (2.91)$$

avec  $\vec{R}_x(t)$ ,  $\vec{R}_y(t)$  et  $\vec{R}_z(t)$  trois vecteurs donnant respectivement la première, deuxième et troisième colonne de  $\mathbf{R}(t)$ . Ceci correspond donc à 9 équations différentielles : une pour chacune des composantes de  $\mathbf{R}(t)$ . On peut simplifier 2.91 en remplaçant le produit vectoriel par un produit matriciel:

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{R}(t), \quad (2.92)$$

où on a défini

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Si on décide d'utiliser les quaternions de rotation au lieu des matrices de rotation, on pourra remplacer

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{R}(t), \quad (2.94)$$

par

$$\frac{d\vec{\tilde{R}}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\tilde{R}}(t)\vec{\omega}(t), \quad (2.95)$$

avec  $\vec{\tilde{\omega}}(t) = (0, \vec{\omega}(t))^T$  et  $\vec{\tilde{R}}(t)$  le quaternion de rotation associé à  $\vec{\Omega}(t)$ .

L'équation équivalant à la seconde loi de Newton pour les mouvements de rotation est

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}. \quad (2.96)$$

Ici,  $\vec{\tau}(t)$  est le moment de force («torque» en anglais) autour du point  $\vec{r}_c$  résultant d'une force appliquée au point  $\vec{r}(t)$

$$\vec{\tau}(t) = (\vec{r}(t) - \vec{r}_c) \times \vec{F}(t). \quad (2.97)$$

$\vec{L}(t)$  est le moment cinétique (*<angular momentum>* en anglais) qui est donné par

$$\vec{L}(t) = \mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t), \quad (2.98)$$

où  $\mathbf{I}(t)$  est le moment d'inertie du solide (équivalent de la masse pour le mouvement de translation) pour une rotation autour du point  $\vec{r}_c$ . Contrairement à la masse qui est un scalaire, le moment d'inertie est un tenseur (matrice) qui tient compte de la résistance d'un solide à sa mise en rotation en 3D (voir section 2.6).

On peut aussi écrire l'équation du mouvement pour la rotation en fonction de l'accélération angulaire  $\vec{\alpha}$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d(\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \mathbf{I}(t)\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega} = \mathbf{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t). \quad (2.99)$$

Contrairement aux équations de Newton où on a  $\vec{\alpha}(t) = m^{-1}\vec{F}(t)$  ici, on peut utiliser directement  $\vec{\alpha}(t) = (\mathbf{I}(t))^{-1}\vec{\tau}(t)$ , car même si la masse est constante et que le point de référence pour la rotation est fixe, une rotation de l'objet (en utilisant la matrice de rotation qui dépend du temps) modifiera en général les différentes composantes de  $\mathbf{I}(t)$

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{R}(t, t_0)\mathbf{I}(t_0)(\mathbf{R}(t, t_0))^{-1} = \mathbf{R}(t, t_0)\mathbf{I}(t_0)(\mathbf{R}(t, t_0))^T. \quad (2.100)$$

C'est donc un effet dont il faut tenir compte dans les équations du mouvement. Ainsi, seulement une partie du moment de force servira en général à donner une accélération angulaire à l'objet.

Pour évaluer  $d\mathbf{I}(t)/dt \vec{\omega}(t)$ , on peut utiliser directement l'équation 2.100 en prenant la dérivée du produit matriciel. Sachant que  $d\mathbf{I}^L(t_0)/dt = 0$ , on obtient alors

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{R}(t, t_0)}{dt}\mathbf{I}(t_0)(\mathbf{R}(t, t_0))^T + \mathbf{R}(t, t_0)\mathbf{I}(t_0)\frac{d(\mathbf{R}(t, t_0))^T}{dt}. \quad (2.101)$$

On a déjà vu que

$$\frac{d\mathbf{R}(t, t_0)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{R}(t, t_0), \quad (2.102)$$

$$\frac{d(\mathbf{R}(t, t_0))^T}{dt} = -(\mathbf{R}(t, t_0))^T\tilde{\omega}(t), \quad (2.103)$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t)\tilde{\omega}(t). \quad (2.104)$$

Finalement

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega} &= \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t) - \mathbf{I}(t)\tilde{\omega}(t)\vec{\omega}(t) = \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t) \\ &= \tilde{\omega}(t)\vec{L}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t) = -\vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t), \end{aligned} \quad (2.105)$$

et l'équation du mouvement à résoudre s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(t) &= \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\mathbf{I}(t))^{-1} [\vec{\tau}(t) - \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t_0)\vec{\omega}(t)] \\ &= (\mathbf{I}(t))^{-1} [\vec{\tau}(t) + \vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t)].\end{aligned}\quad (2.106)$$

Notez que si le moment d'inertie est proportionnel à la matrice identité ( $\mathbf{I}(t) = h(t)\mathbf{1}$ ), le moment cinétique  $\vec{L}(t)$  est parallèle à  $\vec{\omega}(t)$  et l'équation du mouvement prend la forme

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\mathbf{I}(t))^{-1}\vec{\tau}(t) = \frac{1}{h(t)}\vec{\tau}(t), \quad (2.107)$$

qui ressemble à l'équation de Newton. De la même façon, si la vitesse angulaire est nulle ( $\vec{\omega}(t) = 0$ )

$$\vec{\alpha}(t) = (\mathbf{I}(t))^{-1}\vec{\tau}(t). \quad (2.108)$$

En conclusion, les équations que nous devons résoudre pour suivre le mouvement de rotation du solide de moment d'inertie  $\mathbf{I}(t)$  autour d'un point  $c$  sont les suivantes

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\mathbf{I}(t))^{-1} [\vec{\tau}(t) - \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t)], \quad (2.109)$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t, t_0)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{R}(t, t_0), \quad (2.110)$$

où  $\mathbf{I}(t)$  est défini à l'équation 2.100 et les conditions initiales sont

$$\vec{\omega}(t_0) = \vec{\omega}_0, \quad (2.111)$$

$$\mathbf{R}(t_0, t_0) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{1}, \quad (2.112)$$

avec  $\vec{\omega}_0$  la vitesse angulaire initiale du solide autour du point  $\vec{r}$  et  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{1}$  la matrice identité (on considère toujours des rotations par rapport au système évalué à  $t = t_0$ ).

## 2.5 Centre de masse

Lorsque nous avons discuté de la trajectoire des solides dans les sections qui précèdent, nous avons toujours introduit un point de référence  $\vec{r}_c$ . Ce point est celui que nous suivons lors de la résolution des équations du mouvement pour  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$ . C'est aussi le point qui sert de référence pour le mouvement de rotation du solide. La question qui se pose maintenant est : «Quel point devons-nous choisir?». Sachant par expérience que toute force appliquée sur un objet lui donnera une accélération linéaire, mais pas nécessairement d'accélération angulaire, nous choisirons le point du solide sur lequel aucune force appliquée ne peut générer d'accélération angulaire. Ce point correspond au centre de masse  $\vec{r}_c$  de cet objet.

Pour les objets de dimensions finies, définir la position du centre de masse est assez complexe. Si on suppose que l'objet est constitué de particules de masse  $dm$  distribuées dans un volume  $\mathcal{V}$ , le centre de masse correspond à

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_m \vec{r} dm. \quad (2.113)$$

On intègre (somme) donc la contribution de chaque élément de masse pondéré par sa position dans l'espace. La notation en fonction de  $dm$  n'est pas très utile, car ce que l'on connaît généralement c'est la masse volumique  $\rho(\vec{r})$  et non pas la distribution différentielle de masse. En fait, comme  $dm = \rho(\vec{r})d^3r$  on écrira préférablement

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3r. \quad (2.114)$$

Pour un objet non uniforme que l'on peut sous-diviser en  $n = 1, N$  sous-éléments  $\mathcal{V}_n$  de masse volumique  $\rho_n(\vec{r})$ , on pourra écrire

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N \int_{\mathcal{V}_n} \vec{r} \rho_n(\vec{r}) d^3r, \quad (2.115)$$

$$m = \sum_{n=1}^N \int_{\mathcal{V}_n} \rho_n(\vec{r}) d^3r. \quad (2.116)$$

Sachant que

$$m_n = \int_{\mathcal{V}_n} \rho_n(\vec{r}) d^3r, \quad (2.117)$$

$$\vec{r}_{n,c} = \frac{1}{m_n} \int_{\mathcal{V}_n} \vec{r} \rho_n(\vec{r}) d^3r, \quad (2.118)$$

pour chacune des pièces de l'objet, on aura alors

$$m = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N m_n, \quad (2.119)$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_{n,c}. \quad (2.120)$$

Ici, on somme la contribution du centre de masse de chaque solide pondérée par la masse associée à ce solide.

### 2.5.1 Volumes et centre de masse pour solide de géométrie arbitraire

Il existe plusieurs techniques et algorithmes pour évaluer le volume et le centre de masse de solides pour les applications multimédias. Une des méthodes les plus populaires consiste à décomposer premièrement le solide en polyèdres triangulaires. On détermine ensuite le volume de chaque polyèdre et on somme le tout. Cette méthode est aussi efficace si l'on désire évaluer le centre de masse de l'objet. Son principe général est le suivant.

1. Premièrement, on divise le solide à évaluer en un ensemble de sous régions pleines.
2. Les frontières de ces sous-régions, qui peuvent être droites ou curvilignes, sont ensuite simulées en utilisant une série de triangles droits.
3. Après avoir déterminé la position en 3D de chacun des sommets de ces triangles, on procède à l'identification des surfaces externes en associant à chaque triangle un ensemble de trois sommets.
4. L'ordre des sommets est alors important, car il faut décrire le volume à l'intérieur du solide.
5. On choisit ensuite pour chaque triangle  $i$  un sommet de départ arbitraire (le vecteur  $\vec{a}_i$ ).
6. On ordonne ensuite les deux autres sommets ( $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$ ) de façon à ce qu'ils soient classés dans un ordre antihoraire lorsque la surface est vue de l'extérieur du solide.
7. Le volume du solide est alors donné par

$$V = \sum_{i=1}^{N_S} dV_i, \quad (2.121)$$

$$dV_i = \frac{\vec{a}_i \cdot (\vec{b}_i \times \vec{c}_i)}{6}. \quad (2.122)$$

8. On peut aussi utiliser cette information afin de déterminer le centre de masse de l'objet en supposant qu'il a une masse volumique uniforme

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_S} \vec{d}_i dV_i, \quad (2.123)$$

$$\vec{d}_i = \frac{\vec{a}_i + \vec{b}_i + \vec{c}_i}{4}, \quad (2.124)$$

$\vec{d}_i$  correspondant au centre de masse d'un polyèdre dont le quatrième sommet se situe à l'origine.

Cet algorithme fonctionne seulement si l'objet satisfait la relation d'Euler suivante

$$\text{nombre de sommets} + \text{nombre de faces} - \text{nombre d'arêtes} = 2. \quad (2.125)$$

## 2.6 Moment d'inertie

Le moment cinétique  $\vec{L}_{i,c}(t)$  d'un point de masse  $m_i$  se déplaçant par rapport à un point de référence  $\vec{r}_c$  est donné par

$$\vec{L}_{i,c}(t) = m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times \vec{v}_i(t), \quad (2.126)$$

où  $\vec{r}_i$  est la position de la masse et  $\vec{v}_i$  sa vitesse de déplacement. Si la vitesse  $\vec{v}_i(t)$  est due à un mouvement de rotation, on peut écrire

$$\vec{L}_{i,c}(t) = m_i \vec{r}_{i,c} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,c}). \quad (2.127)$$

Pour un solide représenté par une distribution de masse, le moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}_c = \int_V (\vec{r} - \vec{r}_c) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_c)) dm = \int_V \rho(\vec{r}) (\vec{r} - \vec{r}_c) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_c)) d^3 r. \quad (2.128)$$

En utilisant la relation

$$\vec{L}_c = \mathbf{I}_c \vec{\omega}, \quad (2.129)$$

ceci nous permet de définir  $\mathbf{I}_c$ , le moment d'inertie par rapport au centre de masse de l'objet (ici, on suppose que  $\vec{r}_c$  coïncide avec l'origine du système), comme suit

$$\mathbf{I}_c = \begin{pmatrix} I_{c,xx} & I_{c,xy} & I_{c,xz} \\ I_{c,yx} & I_{c,yy} & I_{c,yz} \\ I_{c,zx} & I_{c,zy} & I_{c,zz} \end{pmatrix} = \int_V \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(\vec{r}) d^3 r. \quad (2.130)$$

où on a utilisé  $\vec{r} = (x, y, z)^T$ . Le moment d'inertie par rapport au centre de masse représente la distribution de masse du corps autour d'un axe de rotation passant par ce le point  $\vec{r}_c$ . Cependant, il est parfois nécessaire (pour des objets composés) de connaître le moment d'inertie par rapport à un autre point  $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$ . En utilisant

$$\vec{L}_d = \int_V (\vec{r} - \vec{d}) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{d})) dm = \int_V (\vec{r} - \vec{r}_c - \vec{d}_c) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_c - \vec{d}_c)) dm, \quad (2.131)$$

avec  $\vec{d}_c = \vec{d} - \vec{r}_c = (d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z})$ , on peut alors définir

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{I}_c + m \begin{pmatrix} (d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & (d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2) & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & (d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2) \end{pmatrix} = \mathbf{I}_c + m\mathbf{T}(\vec{d}_c). \quad (2.132)$$

On voit immédiatement que même si la matrice  $\mathbf{I}_c$  est diagonale, la matrice  $\mathbf{I}_d$  ne l'est pas nécessairement. Cependant, elle demeure symétrique, car  $\mathbf{T}(\vec{d}_c)$  est symétrique.

En général, les moments d'inertie des parallélépipèdes et des cylindres sont donnés par rapport à un système d'axes qui leur est propre (en général les axes de référence de l'objet). Si le système d'axes de l'observateur (système global) correspond à une rotation  $\mathbf{R}^{G \leftarrow L}$  par rapport au système de référence du solide (système local), il faut aussi transformer les moments d'inertie de façon à refléter cette rotation (comme on l'a déjà vu)

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{R}^{G \leftarrow L} \mathbf{I}^L (\mathbf{R}^{G \leftarrow L})^T. \quad (2.133)$$

Les relations décrites ci-dessus sont utiles lorsqu'il est temps de reconstruire le moment d'inertie d'un solide composé de différentes pièces, car il permet de considérer tous les solides dans un système d'axes commun qui correspond au centre de masse commun du solide composé. Pour calculer correctement le moment d'inertie global du solide composé autour de son centre de masse, il faut donc procéder comme suit :

1. déterminer la masse totale du solide composé (équation 2.119) ;
2. déterminer la position du centre de masse du solide composé (équation 2.120) ;
3. déterminer le moment d'inertie  $\mathbf{I}_{i,c}$  de chacun des éléments  $i$  du solide composé par rapport au centre de masse et aux axes locaux de cet élément (équation 2.130) ;
4. si requis, tourner le moment d'inertie ( $\mathbf{I}_{i,c}^R$ ) de façon à ce que les axes locaux de chaque élément du solide soient parallèles aux axes du système du laboratoire en utilisant l'équation 2.133 ;
5. procéder à une translation du moment d'inertie ( $\mathbf{I}_{i,c}^{RT}$ ) dans les axes du laboratoire du point  $\vec{r}_{i,c}$  vers  $\vec{r}_c$  en utilisant l'équation 2.132 ;
6. sommer les moments d'inertie, après rotation et translation, de chacune des parties du solide

$$\mathbf{I}_c = \sum_i \mathbf{I}_{i,c}^{RT},$$

le résultat final étant le moment d'inertie du solide composé par rapport à son centre de masse dans le système du laboratoire

### 2.6.1 Moment d'inertie de solides réguliers

Le moment d'inertie par rapport à leur centre de masse pour différents solides réguliers est assez simple à évaluer. Ainsi, pour des parallélépipèdes dont les axes sont parallèles aux axes  $x$  (longueur  $a$ ),  $y$  (largeur  $b$ ) et  $z$  (hauteur  $c$ ) on aura

$$I_c = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

Pour une sphère pleine de rayon  $r$  on aura

$$I_c = \frac{2m}{5}r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.135)$$

alors que pour une sphère vide on pourra utiliser

$$I_c = \frac{2m}{3}r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.136)$$

Le moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon  $r$  et de longueur  $l$  aligné avec l'axe des  $z$  est donné par

$$I_c = \begin{pmatrix} \frac{m}{4}r^2 + \frac{m}{12}l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}r^2 + \frac{m}{12}l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2}r^2 \end{pmatrix}, \quad (2.137)$$

alors que si le cylindre est vide (parois minces) on utilise

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{2}r^2 + \frac{m}{12}l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}r^2 + \frac{m}{12}l^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2 \end{pmatrix}. \quad (2.138)$$

## 2.7 Conclusions

En conclusion, pour étudier la trajectoire d'un solide, il faut connaître et résoudre les équations du mouvement pour le centre de masse

$$d\vec{v}_c(t)/dt = \vec{a}_c(t) = \vec{F}(t)/m, \quad (2.139)$$

$$d\vec{r}_c(t)/dt = \vec{v}_c(t). \quad (2.140)$$

et les équations décrivant la rotation des solides autour de leur centre de masse

$$d\vec{\omega}(t)/dt = \vec{\alpha}(t) = (\mathbf{I}(t))^{-1} [\vec{\tau}(t) - \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t)], \quad (2.141)$$

$$d\mathbf{R}(t)/dt = \tilde{\omega}(t)\mathbf{R}(t), \quad (2.142)$$

où  $\tilde{\omega}(t)$  la matrice correspondant au produit vectoriel de  $\vec{\omega}$  avec un vecteur arbitraire.

Dans le prochain chapitre, nous verrons comment résoudre ces équations et les problèmes associés aux solutions numériques lorsque des collisions se produisent.

## Chapitre 3

# Résolution numérique des équations de la cinématique

### 3.1 Introduction

La cinématique étudie le mouvement des solides, en faisant abstraction des causes du mouvement (accélération linéaire ou angulaire, sans se préoccuper de la force ou du moment de force à la source de ces accélérations). Ici, nous proposerons des méthodes numériques qui permettent d'obtenir, à partir d'accélérations linéaires ou angulaires connues ( $\vec{a}(t)$  et  $\vec{\alpha}(t)$ ), la position  $\vec{r}(t)$ , la vitesse linéaire  $\vec{v}(t)$ , la position angulaire  $\vec{\Omega}(t)$  et la vitesse angulaire  $\vec{\omega}(t)$  de tous les points d'un solide.

Ce chapitre sera divisé en six parties. Ainsi, après la brève introduction de la section 3.1, nous examinerons le mouvement de translation d'un point (particule ponctuelle ou centre de masse d'un objet étendu) à la section 3.2. À la section 3.3, nous poursuivrons avec l'étude du mouvement angulaire qui prend toute son importance pour les solides. La section 3.4 sera consacrée à l'étude de méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles ordinaires et des exemples résolus seront présentés à la section 3.5. Finalement, nous terminerons finalement avec une discussion des problèmes numériques reliés aux collisions (section 3.6) et une conclusion.

Les équations de la cinématique reliant l'accélération linéaire, la vitesse linéaire et la position du centre de masse d'un solide en rotation sont les suivantes

$$\frac{d\vec{v}_c(t)}{dt} = \vec{a}_c(t, \vec{v}_c, \vec{r}_c, \vec{\omega}(t), \vec{\Omega}(t)), \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{r}_c(t)}{dt} = \vec{v}_c(t, \vec{v}_c, \vec{r}_c, \vec{\omega}(t), \vec{\Omega}(t)). \quad (3.2)$$

Les équations reliant l'accélération angulaire, la vitesse angulaire et la position angulaire d'un point du solide autour de son centre de masse sont

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(t, \vec{v}_c, \vec{r}_c, \vec{\omega}(t), \vec{\Omega}(t)), \quad (3.3)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t, \vec{v}_c, \vec{r}_c, \vec{\omega}(t), \vec{\Omega}(t)). \quad (3.4)$$

Ce sont des équations différentielles vectorielles couplées, chaque équation correspondant à trois équations scalaires (12 équations différentielles au total).

Au chapitre 2, nous avons aussi vu que nous pouvions remplacer l'équation 3.4 par une équation différentielle pour la matrice de rotation  $\mathbf{R}(t)$  pour obtenir

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{R}(t), \quad (3.5)$$

avec

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

On doit alors résoudre 6 équations différentielles couplées supplémentaires. Si on utilise plutôt les quaternions de rotation, l'équation à résoudre est

$$\frac{d\vec{\vec{R}}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\vec{R}}(t)\vec{\omega}(t), \quad (3.7)$$

et notre système implique maintenant 13 équations différentielles couplées (seulement une de plus que pour la position angulaire).

Ces équations sont incomplètes et pour obtenir une solution finale, il faut aussi fournir des conditions initiales, correspondant à  $\vec{r}_c(t_0)$ ,  $\vec{v}_c(t_0)$ ,  $\vec{r}_{i,c}(t_0)$ ,  $\vec{\omega}(t_0)$  et  $\vec{\Omega}(t_0)$  ( $\mathbf{R}(t_0)$  ou  $\vec{\vec{R}}(t_0)$ ). Dans les situations où le solide possède un mouvement de translation et de rotation, il faut combiner les solutions linéaires et angulaires pour obtenir

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_c(t) + \mathbf{R}(t)\vec{r}_{i,c}(t_0), \quad (3.8)$$

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}_c(t) + \vec{\omega}(t) \times (\mathbf{R}(t)\vec{r}_{i,c}(t_0)), \quad (3.9)$$

où  $i$  représente un point de l'objet,  $\vec{r}_c(t)$  la position du centre de masse de l'objet et  $\vec{r}_{i,c}(t_0)$  la position initiale du point  $i$  par rapport au centre de masse de l'objet.

## 3.2 Résolution des équations de la cinématique d'un point

### 3.2.1 Accélération uniquement dépendante du temps

Pour les particules ponctuelles et le centre de masse des solides, nous devons résoudre le système d'équations 3.1 et 3.2. Si on suppose que l'accélération dépend seulement du temps, la solution de 3.1 au temps  $t$  peut être obtenue par intégration directe

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt', \quad (3.10)$$

avec  $\vec{v}(t_0)$  la vitesse initiale du point. Ayant obtenu  $\vec{v}(t)$ , il est alors possible d'intégrer 3.2

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt', \quad (3.11)$$

où  $\vec{r}(t_0)$  est la position du point au temps  $t_0$ .

Deux cas peuvent alors se présenter :

1. les fonctions correspondant à  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$  et  $a_z(t)$  sont faciles à intégrer analytiquement ;
2. les fonctions correspondant à  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$  et  $a_z(t)$  sont difficiles ou impossibles à intégrer analytiquement.

Dans le premier cas on obtient des solutions analytiques pour  $\vec{v}(t)$  et  $\vec{r}(t)$  qui nous permettent de prédire la position et la vitesse du point à tout instant  $t$ . Dans le second cas, on doit avoir recours à des méthodes de résolution numériques et la solution sera obtenue seulement à des temps  $t_n$  pré-déterminés. Ainsi, si ce que l'on désire ultimement est la solution à  $t_f$ , on peut tenter de résoudre le problème directement entre  $t_0$  et  $t_f$ . On peut aussi procéder par étapes et résoudre le problème à  $t_1 < t_2 < t_3 < t_n \dots < t_N = t_f$ , ces points étant espacés plus ou moins régulièrement dans le temps.

Dans ce qui suit, nous choisirons généralement de procéder à la résolution numérique sur des intervalles de temps  $\Delta t$  uniformes

$$\Delta t = \frac{t_f - t_0}{N},$$

avec  $N$  un nombre suffisamment grand pour s'assurer que la solution a la précision désirée. Nous présenterons ici une méthode simple qui permet de résoudre des problèmes où l'accélération dépend uniquement du temps et qui consiste à remplacer l'accélération exacte par une expansion en série de  $\vec{a}(t)$  autour d'un point initial  $t'$ . On écrira donc

$$\vec{a}(t) \approx \vec{a}(t') + \frac{d\vec{a}(t'')}{dt''} \Big|_{t'} (t - t') + \frac{d^2\vec{a}(t'')}{dt''^2} \Big|_{t'} \frac{(t - t')^2}{2} + \frac{d^3\vec{a}(t'')}{dt''^3} \Big|_{t'} \frac{(t - t')^3}{3!} + \dots \quad (3.12)$$

Cette série converge d'autant plus rapidement que  $(t - t')$  est petit. Si on limite l'expansion à l'ordre  $L$  pour un problème divisé en  $N$  intervalles de temps, alors l'erreur sur l'accélération à  $t_n$  sera de l'ordre

$$E(\vec{a}_{t_n}) \propto \frac{d^{L+1}\vec{a}(t'')}{dt''^{L+1}} \Big|_{t_n} \frac{(\Delta t)^{L+1}}{(L+1)!}. \quad (3.13)$$

En utilisant cette expansion dans 3.10, on obtient alors facilement la vitesse pour un temps  $t$  dans l'intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ , si on connaît l'accélération et ses dérivées au temps  $t_{n-1}$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^t [\vec{a}(t')] dt' \\ &= \vec{v}(t_{n-1}) + \vec{a}(t_{n-1})(t - t_{n-1}) + \frac{d\vec{a}(t'')}{dt''} \Big|_{t_{n-1}} \frac{(t - t_{n-1})^2}{2} \\ &\quad + \frac{d^2\vec{a}(t'')}{dt''^2} \Big|_{t_{n-1}} \frac{(t - t_{n-1})^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

De la même façon, si on remplace l'équation 3.14 dans 3.11, on obtient directement la position à  $t$  en fonction de l'accélération et de ses dérivées au temps  $t_{n-1}$

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}(t_{n-1}) + \vec{v}(t_{n-1})(t - t_{n-1}) + \vec{a}(t_{n-1}) \frac{(t - t_{n-1})^2}{2} \\ &\quad + \left. \frac{d\vec{a}(t'')}{dt''} \right|_{t_{n-1}} \frac{(t - t_{n-1})^3}{3!} + \left. \frac{d^2\vec{a}(t'')}{dt''^2} \right|_{t_{n-1}} \frac{(t - t_{n-1})^4}{4!} + \dots\end{aligned}\quad (3.15)$$

Dans beaucoup de situations, on se limitera à une expansion à l'ordre  $L = 1$  (première dérivée de l'accélération) et on évaluera

$$\vec{v}(t_n) = \vec{v}(t_{n-1}) + \vec{a}(t_{n-1})\Delta t + \left. \frac{d\vec{a}(t'')}{dt''} \right|_{t_{n-1}} \frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad (3.16)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_{n-1}) + \vec{v}(t_{n-1})\Delta t + \vec{a}(t_{n-1}) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \left. \frac{d\vec{a}(t'')}{dt''} \right|_{t_{n-1}} \frac{(\Delta t)^3}{3!}. \quad (3.17)$$

Notez que l'erreur sur l'accélération lorsque  $L = 1$  est

$$E(\vec{a}_{t_n}) \propto \left. \frac{d^2\vec{a}(t'')}{dt''^2} \right|_{t_n} \frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad (3.18)$$

et varie donc en  $(\Delta t)^2$ . Pour la vitesse, l'erreur additionnelle pour chaque intervalle de temps due à l'erreur sur l'accélération à  $t_n$  est

$$\Delta E(\vec{v}_{t_n}) \propto \left. \frac{d^2\vec{a}(t'')}{dt''^2} \right|_{t_n} \frac{(\Delta t)^3}{6}, \quad (3.19)$$

et s'ajoute à l'erreur déjà commise à l'étape précédente sur  $\vec{v}(t_{n-1})$ . L'erreur totale au temps  $t_f$  sera donc

$$E(\vec{v}_{t_f}) \propto \sum_{n=1}^N \left. \frac{d^2\vec{a}(t'')}{dt''^2} \right|_{t_n} \frac{(\Delta t)^3}{6} \approx \left. \frac{d^2\vec{a}(t'')}{dt''^2} \right|_{t_0} \frac{(\Delta t)^2}{6} (t_f - t_0), \quad (3.20)$$

qui est aussi proportionnelle à  $(\Delta t)^2$ . De la même façon, si on ajoute les erreurs accumulées sur la vitesse et la position à chaque étape de temps, l'erreur finale sur la position à  $t_f$

$$E(\vec{r}_{t_f}) \propto (\Delta t)^2 (t_f - t_0)^2, \quad (3.21)$$

et est proportionnelle à  $(\Delta t)^2$  comme on s'y attend.

Pour les cas où il est difficile d'évaluer analytiquement la dérivée de l'accélération par rapport au temps  $d\vec{a}(t'')/dt''$  on peut approximer celle-ci par une différence

$$\left. \frac{d\vec{a}(t'')}{dt''} \right|_{t_{n-1}} \approx \frac{\vec{a}(t_n) - \vec{a}(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} = \frac{\vec{a}(t_n) - \vec{a}(t_{n-1})}{\Delta t} = \vec{k}_{n-1}. \quad (3.22)$$

On obtient alors

$$\vec{v}(t_n) = \vec{v}(t_{n-1}) + \vec{a}(t_{n-1})\Delta t + \vec{k}_{n-1} \frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad (3.23)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_{n-1}) + \vec{v}(t_{n-1})\Delta t + \vec{a}(t_{n-1}) \frac{(\Delta t)^2}{2} + \vec{k}_{n-1} \frac{(\Delta t)^3}{3!}. \quad (3.24)$$

Ceci permet de trouver une solution au problème de la cinématique sans jamais avoir recours ni à l'intégrale ni à la dérivée de l'accélération par rapport au temps.

### 3.2.2 Particule avec accélération dépendante du temps

Considérons une particule de vitesse initiale  $\vec{v} = (2, 1, 0)^T$  m/s localisée initialement au point  $\vec{r} = (0, 0, 1)^T$  m qui subit une accélération  $\vec{a} = (3, t, 0.1 \sin(t))^T$  m/s<sup>2</sup>. Ici, il s'agit de déterminer la vitesse et la position de cette particule à  $t = 1$  seconde pour les trois cas suivants

1. Solutions exactes.
2. Solution approximative avec une expansion de l'accélération en fonction du temps jusqu'à l'ordre  $L = 1$ .
3. Solution approximative avec une expansion de l'accélération en fonction du temps jusqu'à l'ordre  $L = 1$  et une évaluation numérique de la dérivée de l'accélération en fonction du temps.

La solution exacte est facile à obtenir par intégration directe pour ce problème. Elle est donnée par

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3(t - t_0) \\ (t^2 - t_0^2)/2 \\ -0.1(\cos(t) - \cos(t_0)) \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(t - t_0) + \begin{pmatrix} 3(t - t_0)^2/2 \\ (t^3 - 3t_0^2t - 2t_0^3)/6 \\ -0.1(\sin(t) - \sin(t_0) - \cos(t_0)(t - t_0)) \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

Pour la solution approximative avec une expansion en série pour l'accélération en fonction du temps jusqu'à l'ordre  $L = 1$  on utilisera

$$\vec{a}(t) \approx \begin{pmatrix} 3 \\ t_{n-1} \\ 0.1 \sin(t_{n-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.1 \cos(t_{n-1}) \end{pmatrix}(t - t_{n-1}), \quad (3.27)$$

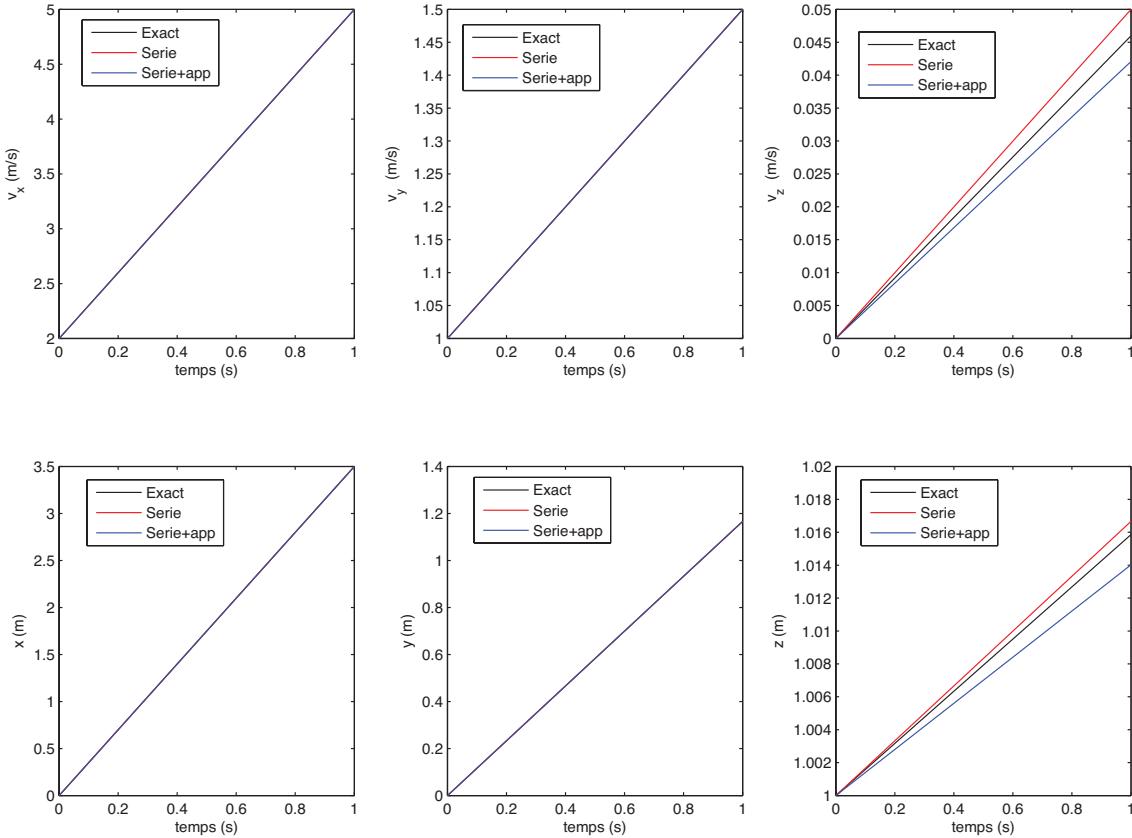


Figure 3.1: Vitesse et position en fonction du temps pour un problème avec vitesse dépendante du temps. Les solutions approximatives utilisent  $\Delta t = 1$  seconde

pour  $]t_{n-1}, t_n]$ . On obtient alors

$$\vec{v}(t_n) = \vec{v}(t_{n-1}) + \begin{pmatrix} 3 \\ t_{n-1} \\ 0.1 \sin(t_{n-1}) \end{pmatrix} (t - t_{n-1}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.1 \cos(t_{n-1}) \end{pmatrix} \frac{(t - t_{n-1})^2}{2}, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_n) = & \vec{r}(t_{n-1}) + \vec{v}(t_{n-1})(t - t_{n-1}) + \begin{pmatrix} 3 \\ t_{n-1} \\ 0.1 \sin(t_{n-1}) \end{pmatrix} \frac{(t - t_{n-1})^2}{2} \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.1 \cos(t_{n-1}) \end{pmatrix} \frac{(t - t_{n-1})^3}{6}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

Finalement, dans le cas où on utilise une approximation pour la dérivée de l'accélération

$$\frac{d\vec{a}(t_{n-1})}{dt} \approx \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} 0 \\ (t_n - t_{n-1}) \\ 0.1(\sin(t_n) - \sin(t_{n-1})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.1 \frac{\sin(t_n) - \sin(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \vec{v}(t_n) &= \vec{v}(t_{n-1}) + \begin{pmatrix} 3 \\ t_{n-1} \\ 0.1 \sin(t_{n-1}) \end{pmatrix} (t - t_{n-1}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.1 \frac{\sin(t_n) - \sin(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix} \frac{(t - t_{n-1})^2}{2}, \\ \vec{r}(t_n) &= \vec{r}(t_{n-1}) + \vec{v}(t_{n-1})(t - t_{n-1}) + \begin{pmatrix} 3 \\ t_{n-1} \\ 0.1 \sin(t_{n-1}) \end{pmatrix} \frac{(t - t_{n-1})^2}{2} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.1 \frac{\sin(t_n) - \sin(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix} \frac{(t - t_{n-1})^3}{6}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pour les deux dernières solutions, nous considérerons premièrement des intervalles de temps  $t_n - t_{n-1} = \Delta t = 1$  seconde. Le résultat final est présenté à la figure 3.1 et montre des erreurs relativement élevées à  $t = 1$  seconde. En reprenant la simulation avec  $t_n - t_{n-1} = \Delta t = 0.25$  seconde on obtient des résultats beaucoup plus fiables comme le montre la figure 3.2. La solution correspondant à l'approximation 3.30 est généralement moins précise que celle correspondant à 3.27 même si ces deux solutions convergent vers la valeur exacte lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ .

### 3.2.3 Accélération dépendante de la vitesse et de la position

Le problème devient beaucoup plus difficile à résoudre si l'accélération dépend de la vitesse et de la position, ou si la vitesse dépend de la position. Dans la majorité des situations, il faut résoudre 6 équations différentielles couplées et des solutions analytiques ne peuvent être générées que pour un nombre de cas extrêmement limité. Pour toutes les autres situations, seules des solutions numériques sont possibles.

Pour illustrer ces difficultés, nous considérerons l'exemple suivant. Une particule de vitesse initiale  $v_x(t_0 = 0) = v_{x,0} = 1$  m/s se déplace en une dimension. Elle subit une accélération donnée par

$$a_x(t) = -\frac{v_x^2(t)}{k}, \quad (3.33)$$

avec  $k = 2$  m. Ici, on désire déterminer la trajectoire de cette particule en supposant que sa position initiale est nulle ( $x(t_0 = 0) = x_0 = 0$  m). L'équation différentielle pour la vitesse à

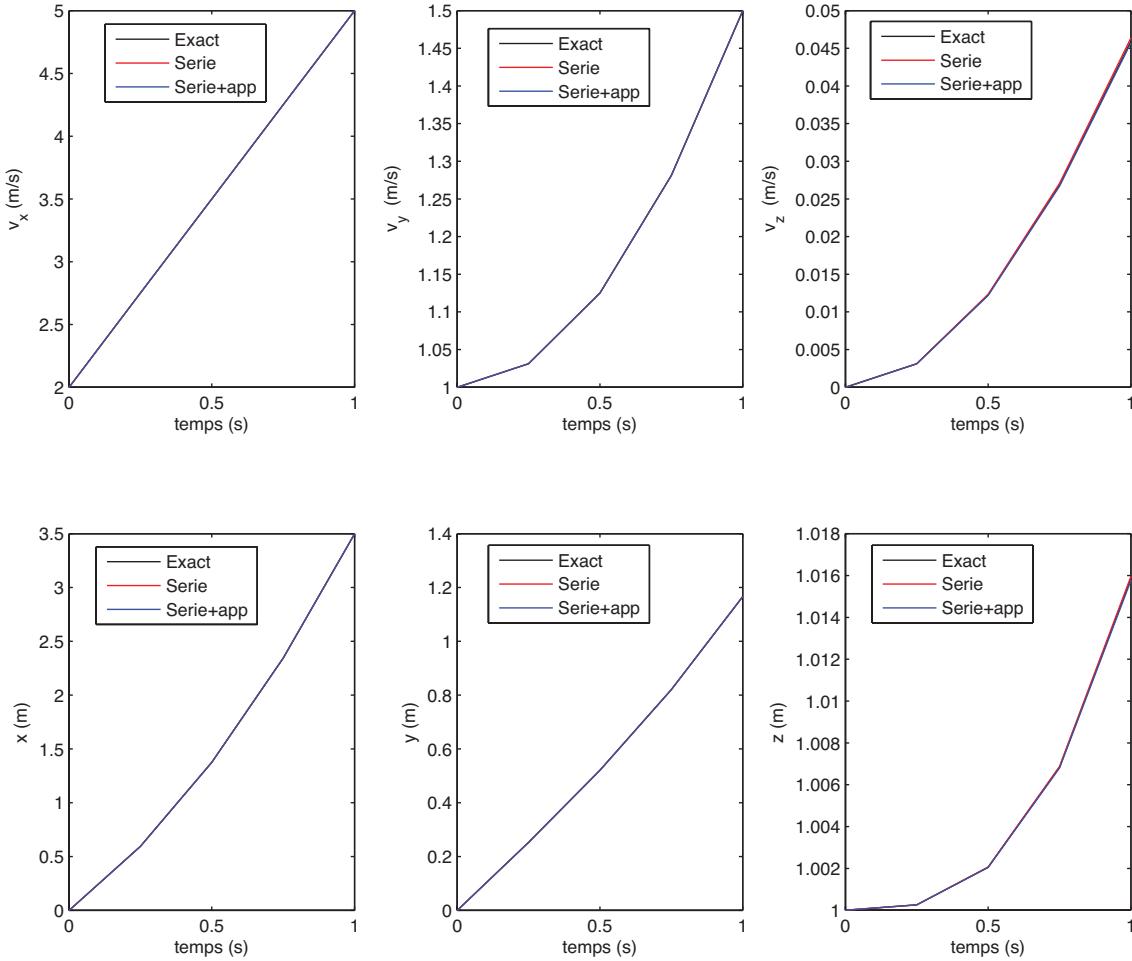


Figure 3.2: Vitesse et position en fonction du temps pour un problème avec vitesse dépendante du temps. Les solutions approximatives utilisent  $\Delta t = 0.25$  seconde

résoudre s'écrit alors

$$\frac{d v_x(t)}{dt} = -\frac{v_x^2(t)}{k}, \quad (3.34)$$

que l'on peut intégrer pour obtenir

$$(t - t_0) = k \left[ \frac{1}{v_x(t)} - \frac{1}{v_{x,0}} \right]. \quad (3.35)$$

En utilisant les conditions initiales, la solution devient

$$v_x(t) = v_{x,0} \left[ \frac{k}{k + v_{x,0} t} \right]. \quad (3.36)$$

La position est obtenue par intégration directe

$$x(t) = k \ln \left[ \frac{k + v_{x,0} t}{k} \right]. \quad (3.37)$$

L'accélération en fonction du temps est obtenue par dérivation de  $v(t)$  ou en utilisant la définition de l'accélération.

$$a_x(t) = -v_{x,0}^2 \frac{k}{(k + v_{x,0} t)^2}. \quad (3.38)$$

La méthode de résolution numérique proposée à la section précédente est impossible à implanter ici, car on ne connaît pas  $a_x(t)$  qui dépend directement de la vitesse  $v_x(t)$  qui est inconnue. Pour ce problème, il est donc nécessaire d'avoir recours à des méthodes de résolution numérique plus générales.

### 3.3 Résolution des équations de la cinématique des solides

Les méthodes de résolutions que nous venons de décrire demeurent utiles lorsque l'on étudie le déplacement des solides. Cependant, les équations de la cinématique ponctuelle sont alors appliquées au centre de masse et l'accélération peut maintenant dépendre de la vitesse angulaire  $\vec{\omega}(t)$  et de la position angulaire  $\vec{\Omega}(t)$  (ou de la matrice de rotation  $\mathbf{R}(t)$ ). Nous devons aussi résoudre les équations suivantes

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(t, \vec{v}, \vec{r}, \vec{\omega}(t), \mathbf{R}(t)), \quad (3.39)$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{R}(t), \quad (3.40)$$

pour le mouvement de rotation du solide autour de son centre de masse.

Ces deux dernières équations sont très semblables à celles déjà présentées reliant la position, la vitesse linéaire et l'accélération et peuvent être résolues de la même façon. Si on définit

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \\ R_{xx}(t) \\ R_{xy}(t) \\ R_{xz}(t) \\ R_{yx}(t) \\ R_{yy}(t) \\ R_{yz}(t) \\ R_{zx}(t) \\ R_{zy}(t) \\ R_{zz}(t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{g}(\vec{q}(t), (t)) = \begin{pmatrix} \alpha_x[\vec{\omega}(t), \mathbf{R}(t), t] \\ \alpha_y[\vec{\omega}(t), \mathbf{R}(t), t] \\ \alpha_z[\vec{\omega}(t), \mathbf{R}(t), t] \\ \omega_y(t)R_{zx}(t) - \omega_z(t)R_{yx}(t) \\ \omega_y(t)R_{zy}(t) - \omega_z(t)R_{yy}(t) \\ \omega_y(t)R_{zz}(t) - \omega_z(t)R_{yz}(t) \\ \omega_z(t)R_{xx}(t) - \omega_x(t)R_{zx}(t) \\ \omega_z(t)R_{xy}(t) - \omega_x(t)R_{zy}(t) \\ \omega_z(t)R_{xz}(t) - \omega_x(t)R_{zz}(t) \\ \omega_x(t)R_{yx}(t) - \omega_y(t)R_{xx}(t) \\ \omega_x(t)R_{yy}(t) - \omega_y(t)R_{xy}(t) \\ \omega_x(t)R_{yz}(t) - \omega_y(t)R_{xz}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

alors les équations de la cinétique prennent la forme générale suivante pour un ensemble couplé d'équations différentielles

$$\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \vec{g}(\vec{q}(t), t). \quad (3.42)$$

L'avantage de cette formulation est qu'elle peut être combinée facilement aux équations décrivant le mouvement du centre de masse du solide pour former un seul système d'équations similaire à 3.42. Ici, on utilisera cependant un vecteur  $\vec{q}$  contenant 18 inconnues

$$\vec{q}(t) = \left( v_x(t), v_y(t), v_z(t), x(t), y(t), z(t), \omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t), R_{xx}(t), R_{xy}(t), R_{xz}(t), R_{yx}(t), R_{yy}(t), R_{yz}(t), R_{zx}(t), R_{zy}(t), R_{zz}(t) \right)^T, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{q}, t) = & \left( a_x(\vec{q}, t), a_y(\vec{q}, t), a_z(\vec{q}, t), q_1(t), q_2(t), q_3(t), \alpha_x(\vec{q}, t), \alpha_y(\vec{q}, t), \alpha_z(\vec{q}, t), \right. \\ & q_8(t)q_{16}(t) - q_9(t)q_{13}(t), q_8(t)q_{17}(t) - q_9(t)q_{14}(t), q_8(t)q_{18}(t) - q_9(t)q_{15}(t), \\ & q_9(t)q_{10}(t) - q_7(t)q_{16}(t), q_9(t)q_{11}(t) - q_7(t)q_{17}(t), q_9(t)q_{12}(t) - q_7(t)q_{18}(t), \\ & \left. q_7(t)q_{13}(t) - q_8(t)q_{10}(t), q_7(t)q_{14}(t) - q_8(t)q_{11}(t), q_7(t)q_{15}(t) - q_8(t)q_{12}(t) \right)^T. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Si on décide d'utiliser les quaternions de rotation au lieu des matrices de rotation, on pourra utiliser

$$\vec{q}(t) = \left( v_x(t), v_y(t), v_z(t), x(t), y(t), z(t), \omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t), R_0(t), R_1(t), R_2(t), R_3(t) \right)^T, \quad (3.45)$$

avec  $\vec{R}(t) = (R_0(t), R_1(t), R_2(t), R_3(t))^T$  et on aura

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{q}, t) = & \left( a_x(\vec{q}, t), a_y(\vec{q}, t), a_z(\vec{q}, t), q_1(t), q_2(t), q_3(t), \alpha_x(\vec{q}, t), \alpha_y(\vec{q}, t), \alpha_z(\vec{q}, t), \right. \\ & \frac{-q_{11}(t)q_7(t) - q_{12}(t)q_8(t) - q_{13}(t)q_9(t)}{2}, \frac{q_{10}(t)q_7(t) + q_{12}(t)q_9(t) - q_{13}(t)q_8(t)}{2}, \\ & \frac{q_{10}(t)q_8(t) + q_{13}(t)q_7(t) - q_{11}(t)q_9(t)}{2}, \frac{q_{10}(t)q_9(t) + q_{11}(t)q_8(t) - q_{12}(t)q_7(t)}{2} \left. \right)^T. \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.3.1 Exemple d'un solide en rotation dans un plan 2-D

Pour un solide en rotation dans un plan 2-D (plan  $x - y$ ), le mouvement de rotation doit nécessairement se faire autour du troisième axe ( $z$ ). Ici, on supposera que l'accélération angulaire est nulle et que la vitesse angulaire constante est donnée par

$$\vec{\omega}(t_0) = (0, 0, \omega_z)^T. \quad (3.47)$$

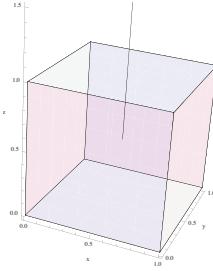


Figure 3.3: Solide en rotation dans un plan 2-D

Le solide tourne donc autour de l'axe des  $z$  avec une vitesse angulaire initiale  $\omega_z$  rad/s. Il n'est donc pas nécessaire de résoudre le système associé à la vitesse angulaire.

Examinons maintenant les 9 équations différentielles couplées à résoudre pour la matrice de rotation

$$dR_{xx}(t)/dt = -\omega_z R_{yx}(t), \quad (3.48)$$

$$dR_{xy}(t)/dt = -\omega_z R_{yy}(t), \quad (3.49)$$

$$dR_{xz}(t)/dt = -\omega_z R_{yz}(t), \quad (3.50)$$

$$dR_{yx}(t)/dt = \omega_z R_{xx}(t), \quad (3.51)$$

$$dR_{yy}(t)/dt = \omega_z R_{xy}(t), \quad (3.52)$$

$$dR_{yz}(t)/dt = \omega_z R_{xz}(t), \quad (3.53)$$

$$dR_{zx}(t)/dt = 0, \quad (3.54)$$

$$dR_{zy}(t)/dt = 0, \quad (3.55)$$

$$dR_{zz}(t)/dt = 0, \quad (3.56)$$

les conditions initiales étant (matrice de rotation identité):

$$\begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xy}(0) & R_{xz}(0) \\ R_{yx}(0) & R_{yy}(0) & R_{yz}(0) \\ R_{zx}(0) & R_{zy}(0) & R_{zz}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Les trois dernières équations (équation 3.54 à 3.56) sont indépendantes et ont pour solution

$$R_{zx} = 0, \quad (3.58)$$

$$R_{zy} = 0, \quad (3.59)$$

$$R_{zz} = 1. \quad (3.60)$$

On peut combiner les équations pour  $R_{xx}$  et  $R_{yx}$  (équations 3.48 et 3.51) pour obtenir

$$d^2R_{xx}/dt^2 = -\omega_z^2 R_{xx}, \quad (3.61)$$

qui a pour solution ( $R_{xx}(t_0) = 1$ )

$$R_{xx}(t) = \cos(\omega_z t). \quad (3.62)$$

En utilisant l'équation 3.48, on obtient directement

$$R_{yx}(t) = \sin(\omega_z t). \quad (3.63)$$

On peut procéder de la même façon pour  $R_{xy}$  et  $R_{yy}$  (équations 3.49 et 3.52) et pour  $R_{xz}$  et  $R_{yz}$  (équations 3.50 et 3.53) afin d'obtenir

$$R_{xy}(t) = -\sin(\omega_z t), \quad (3.64)$$

$$R_{yy}(t) = \cos(\omega_z t), \quad (3.65)$$

$$R_{xz}(t) = 0, \quad (3.66)$$

$$R_{yz}(t) = 0. \quad (3.67)$$

La solution finale est donc

$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) & -\sin(\omega_z t) & 0 \\ \sin(\omega_z t) & \cos(\omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Notez que cette solution est identique à celle qu'on aurait obtenue en utilisant

$$d\vec{\Omega}(t)/dt = \vec{\omega}, \quad (3.69)$$

qui est

$$\vec{\Omega}(t) = (0, 0, \omega_z t)^T. \quad (3.70)$$

La matrice correspondant à une rotation de  $\omega_z t$  autour de l'axe des  $z$  étant bien sûr

$$\boldsymbol{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) & -\sin(\omega_z t) & 0 \\ \sin(\omega_z t) & \cos(\omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

Comme on vient de le voir, on doit nécessairement utiliser une notation vectorielle pour décrire le mouvement des solides en rotation en 3D, car les axes de référence du système local ne sont pas nécessairement parallèles aux axes de référence du système global et des mouvements de rotations autour de tous les axes sont permis. De plus, même pour les cas simples, la résolution des équations de la cinématique pour  $\boldsymbol{R}(t)$  s'avère difficile et il est souvent plus simple d'utiliser des méthodes approximatives pour résoudre ces équations.

### 3.4 Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires

Ici, nous présenterons deux techniques communément utilisées pour la résolution numérique d'équations différentielles ordinaires de premier ordre (implique la première dérivée seulement).

1. La méthode d'Euler qui est de loin la plus simple, même si elle est relativement peu utilisée en physique du fait de sa faible précision (erreur d'ordre 1).
2. La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4, qui est un plus complexe à programmer, mais qui a une précision de beaucoup supérieure (erreur d'ordre 4).

Il existe aussi des versions plus simples de la méthode de Runge-Kutta, qui sont d'ordre 2 et qui ont une précision qui se situe entre celles des méthodes Runge-Kutta d'ordre 4 et d'Euler.

Les équations différentielles générales que nous tenterons de résoudre ont la forme

$$\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \vec{g}(\vec{q}(t), t), \quad (3.72)$$

avec des conditions initiales

$$\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0. \quad (3.73)$$

Dans le cas des équations de la cinématique pour un point (ou centre de masse d'un solide), le vecteur  $\vec{q}(t)$  a pour composantes

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \\ x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

alors que  $\vec{g}(t)$  est donné par

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} a_x(\vec{q}(t), t) \\ a_y(\vec{q}(t), t) \\ a_z(\vec{q}(t), t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(\vec{q}(t), t) \\ a_y(\vec{q}(t), t) \\ a_z(\vec{q}(t), t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

Ici, on a supposé que l'accélération dans chaque direction pouvait dépendre de la vitesse, de la position et du temps. La solution au temps  $t > t_0$  que nous désirons obtenir sera obtenue en résolvant le problème sur  $N$  intervalles de temps consécutifs de largeur  $\Delta t$  donné par

$$\Delta t = \frac{(t - t_0)}{N}. \quad (3.76)$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons  $t_n = t_{n-1} + \Delta t$  pour indiquer les points dans le temps auxquels seront évaluée la solution sachant que  $t_N = t$ .

### 3.4.1 La méthode d'Euler

Si l'intervalle de temps  $\Delta t$  est suffisamment petit, on peut supposer que  $\vec{g}(\vec{q}(t'), t')$  demeure constant sur l'intervalle de temps  $[t_{n-1}, t_n]$ . Donc

$$\vec{g}(\vec{q}(t'), t') \approx \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1}) \text{ pour } t_{n-1} \leq t' \leq t_n. \quad (3.77)$$

On peut alors facilement intégrer les équations de la cinématique et obtenir

$$\vec{q}(t_n) \approx \vec{q}(t_{n-1}) + \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1}) \Delta t + O(\Delta t^2), \quad (3.78)$$

qui est la solution désirée.

En fait, la méthode d'Euler consiste à remplacer, dans les équations différentielles, la dérivée par une différence

$$\frac{d\vec{q}(t')}{dt'} = \frac{\vec{q}(t_n) - \vec{q}(t_{n-1})}{\Delta t}. \quad (3.79)$$

Cette méthode est similaire à la solution numérique de la section 3.2.1 où on avait approximé la dérivée par une différence. Cependant, il existe ici une différence majeure : toutes les équations sont résolues en même temps (au lieu de résoudre pour  $\vec{v}$  et ensuite pour  $\vec{r}$ ). Notez que :

- l'erreur à chaque étape de l'algorithme est proportionnelle à  $(\Delta t)^2$  ;
- l'erreur globale après  $N$  étapes (égales) est proportionnelle à  $\Delta t$ .

Cette méthode fonctionne aussi si on choisit un intervalle de temps  $\Delta t_n$  différent à chaque étape.

L'algorithme d'Euler est très simple à programmer comme on le voit dans les fichiers MATLAB qui suivent.

- Procédure de résolution par la méthode d'Euler en MATLAB.

```
function qs=SEDEulert0(q0,t0,DeltaT,g)
% Solution equations differentielles par methode de Euler
% Equation a resoudre : dq/dt=g(q,t)
% avec
%   qs           : solution [q(t0+DeltaT) ]
%   q0           : conditions initiales [q(t0) ]
%   DeltaT       : intervalle de temps
%   g             : membre de droite de ED.
%                   C'est un m-file de matlab
%                   qui retourne la valeur de g au temps choisi
qs=q0+feval(g,q0,t0)*DeltaT;
```

- Fonction MATLAB pour évaluer  $g(q, t)$  pour le problème à une dimension décrit à la section 3.2.2.

```
function res=g(q0,t0)
% dvx(t)/dt==-(vx(t))^2/k
% dx(t)/dt=vx(t)
% q0(1)=vx(t0)
% q0(2)=x(t0)
k=2.0;
res=[-q0(1)^2/k q0(1));
```

- Fonction MATLAB Test.m pour obtenir la solution à toute les 0.1 seconde, de 0 et 1 seconde.

```
nbi=10;
qsol=zeros(nbi+1,2);
qsol(1,:)=[1 0];
t0=0;
fprintf('      t (s)      vx (m/s)      x (m) \n')
fprintf('%10.5f %10.5f %10.5f\n',t0,qsol(1,1),qsol(1,2))
DeltaT=0.1;
for n=2:nbi+1
    qsol(n,:)=SEDEulerT0(qsol(n-1,:),t0,DeltaT,'g');
    t0=t0+DeltaT;
    fprintf('%10.5f %10.5f %10.5f\n',t0,qsol(n,1),qsol(n,2))
end
```

### 3.4.2 La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4

Les méthodes de Runge-Kutta (RK) sont utilisées pour résoudre numériquement des équations différentielles. Elles ont de fortes similitudes avec la méthode d'Euler puisque cette dernière est tout simplement la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1. Elles se basent sur une méthode itérative pour prédire et ensuite corriger des estimations de la solution qui seront de plus en plus précises. En fait, plusieurs algorithmes de Runge-Kutta peuvent être définis (voir [Runge-Kutta sur Wikipédia](#)) chacun ayant plus ou moins de précision en fonction du problème à résoudre. Ici, nous ne décrirons que le plus connu (RK classique d'ordre

4) où on procède à quatre évaluations successives de  $\vec{g}(\vec{q}(t), t)$

$$\vec{k}_1 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}), t_{n-1}), \quad (3.80)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2} \vec{k}_1, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}), \quad (3.81)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{2} \vec{k}_2, t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}), \quad (3.82)$$

$$\vec{k}_4 = \vec{g}(\vec{q}(t_{n-1}) + \Delta t \vec{k}_3, t_{n-1} + \Delta t). \quad (3.83)$$

Comme on le voit  $\vec{k}_1$ , qui est la dérivée  $\vec{q}$  au temps  $t_{n-1}$ , permet d'obtenir rapidement la solution par la méthode d'Euler

$$\vec{q}(t_n) = \vec{q}(t_{n-1}) + \vec{k}_1 \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (3.84)$$

Les termes  $\vec{k}_2$  et  $\vec{k}_3$  représentent ensuite deux approximations successives de la dérivée de  $\vec{q}$  au temps  $t_{n-1} + (\Delta t)/2$ . Finalement, le terme  $\vec{k}_4$  correspond à l'utilisation d'une approximation pour l'accélération (dérivée de  $\vec{q}$ ) au temps  $t_n$  au lieu de l'accélération au temps initial. La solution est ensuite obtenue en combinant ces quatre évaluations

$$\vec{q}(t_n) = \vec{q}(t_{n-1}) + \frac{\Delta t}{6} \left[ \vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4 \right] + O(\Delta t^5). \quad (3.85)$$

L'erreur à chaque étape étant proportionnelle à  $(\Delta t)^5$ , l'erreur globale après  $n$  étapes (égales) sera d'ordre  $(\Delta t)^4$ .

Il faut noter que

- si le but est de déterminer la solution à un temps particulier (quel qu'il soit) il est toujours préférable d'utiliser la solution analytique si elle est connue ;
- si le but est de tracer la trajectoire d'un solide, il faut de toute façon évaluer la solution à de multiples pas de temps entre  $t_0$  et  $t$ . Lorsque la solution analytique est complexe, il est alors souvent plus rapide (en temps de calcul) et aussi précis de calculer la solution numérique que la solution exacte.

Une version MATLAB simple de l'algorithme Runge-Kutta suit.

- Procédure de résolution par la méthode de Runge-Kutta en MATLAB.

```
function qs=SEDRK4t0(q0,t0,DeltaT,g)
% Solution equations differentielles par methode de RK4
% Equation a resoudre : dq/dt=g(q,t)
% avec
%   qs           : solution [q(t0+DeltaT) ]
%   q0          : conditions initiales [q(t0) ]
```

```
% DeltaT      : intervalle de temps
% g           : membre de droite de ED.
%             C'est un m-file de matlab
%             qui retourne la valeur de g au temps choisi
k1=feval(g,q0,t0);
k2=feval(g,q0+k1*DeltaT/2,t0+DeltaT/2);
k3=feval(g,q0+k2*DeltaT/2,t0+DeltaT/2);
k4=feval(g,q0+k3*DeltaT,t0+DeltaT);
qs=q0+DeltaT*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
```

- Fonction MATLAB Test.m pour obtenir la solution à chaque 0.1 seconde, de 0 et 1 seconde.

```
nbi=10;
qsol=zeros(nbi+1,2);
qsol(1,:)=[1 0];
t0=0;
fprintf('      t (s)      vx (m/s)      x (m) \n')
fprintf('%10.5f %10.5f %10.5f\n',t0,qsol(1,1),qsol(1,2))
DeltaT=0.1;
for n=2:nbi+1
    qsol(n,:)=SEDRK4t0(qsol(n-1,:),t0,DeltaT,'g');
    t0=t0+DeltaT;
    fprintf('%10.5f %10.5f %10.5f\n',t0,qsol(n,1),qsol(n,2))
end
```

Pour le problème à une dimension décrit à la section 3.2.2, la fonction  $g(q, t)$  sera identique à celle utilisée pour la solution de Euler (fichier g.m).

### 3.4.3 Solution numérique avec contrôle d'erreur

Si on désire obtenir la solution numérique  $\vec{q}(t_f)$  d'un problème sans se préoccuper de choisir les sous-intervalles de temps requis pour que chaque composante  $i$  de  $\vec{q}(t_f)$  ait une précision minimale  $\epsilon_i$ , il faut alors s'assurer que le programme de résolution numérique contient un algorithme de contrôle de l'erreur. Comme en général on ne connaît pas la solution exacte, il faut utiliser l'erreur approximative qui sera calculée en comparant les résultats de deux simulations numériques ayant des pas de temps différents.

Ainsi, si on désire la solution entre  $t_0$  et  $t_f$ , l'intervalle le plus long qui peut être choisi est

$$\Delta T = t_f - t_0 . \quad (3.86)$$

Il s'agit ensuite de définir des intervalles de plus en plus courts  $\Delta t_m$  à mesure que  $m$  augmente de la façon suivante

$$\Delta t_m = \frac{\Delta T}{2^{m-1}}. \quad (3.87)$$

Les solutions numériques obtenues en utilisant  $2^{m-1}$  intervalles de largeur  $\Delta t_m$  étant notées  $\vec{q}^m(t_f)$ , on définira le vecteur d'erreur à l'itération  $m$  par

$$\vec{E}^m = \vec{q}^m(t_f) - \vec{q}^{m-1}(t_f). \quad (3.88)$$

Après avoir obtenu une première solution  $\vec{q}^1(t_f)$ , on évaluera successivement les solutions pour  $m = 2, 3, 4, \dots$  et on vérifiera si  $|E_i^m| \leq \epsilon_i$  pour tous les  $i$  à chaque étape  $m$ . Si c'est le cas, on tiendra pour acquis que la solution a la précision désirée. Sinon, on divisera de nouveau l'intervalle de temps en deux, et on poursuivra les simulations jusqu'à ce que tous nos critères de précision soient satisfaits.

Un exemple d'implantation de cet algorithme (Matlab) pour la méthode de Runge-Kutta suit.

- Procédure de résolution par la méthode de Runge-Kutta avec contrôle d'erreur en MATLAB.

```
function [qs m Err]=SEDRK4t0E(q0,t0,tf,epsilon,g)
% Contrôle d'erreur pour solution ED
% Equation a resoudre : dq/dt=g(q,t)
% avec
%   qs      : solution [q(tf)]
%   q0      : conditions initiales [q(t0) ]
%   t0      : temps initial
%   tf      : temps final
%   epsilon  : précision pour chaque variable
%   g       : membre de droite de ED.
m=1;nbi=1;DeltaT=(tf-t0);
% Solution avec m=1
qs1=SEDRK4t0(q0,t0,DeltaT,'g');
[conv Err]=ErrSol(qs1,q0,epsilon);
qs2=qs1;
% Iteration avec m>1
while not(conv)
    DeltaT=DeltaT/2;
    m=m+1;nbi=nbi*2;
    qs2=q0;t2=t0;
    for i=1:nbi
```

```

qs2=SEDRK4t0(qs2,t2,DeltaT,'g');
t2=t2+DeltaT;
end;
[conv Err]=ErrSol(qs2,qs1,epsilon);
qs1=qs2;
if m>10
    break;
end;
end
qs=qs2;

```

- La fonction MATLAB `ErrSol.m`, qui sert à évaluer l'erreur et à vérifier si la solution a convergé, est requise.

```

function [conv Err]=ErrSol(qs1,qs0,epsilon)
% Vérification si solution convergee
% conv      : variable logique pour convergence
%             Err<epsilon pour chaque éléments
% Err       : Différence entre qs1 et qs0
% qs1       : nouvelle solution
% qs0       : ancienne solution
% epsilon   : précision pour chaque variable
nbele=length(qs0);
Err=(qs1-qs0);
conv=1;
for i=1:nbele
    conv=conv & abs(Err(i)) < epsilon(i);
end

```

### 3.4.4 Interpolation de Richardson

L'erreur globale pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est d'ordre  $(\Delta t)^4$ . On peut donc supposer qu'en première approximation le coefficient qui multiplie ce terme d'erreur est constant et écrire :

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_a(t, \Delta t_m) + \vec{c}(\Delta t_m)^4, \quad (3.89)$$

où  $\vec{q}(t)$  est la solution exacte et  $\vec{q}_a(t, \Delta t_m)$  une solution approximative obtenue en utilisant un pas de temps  $\Delta t_m$ . Supposons maintenant que l'on évalue aussi la solution avec un pas de temps  $\Delta t_m/2$ , alors

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) + \vec{c}(\Delta t_{m+1})^4 = \vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) + c(\Delta t_m/2)^4, \quad (3.90)$$

avec  $\vec{q}_a(t, \Delta t_m/2)$  la solution approximative obtenue avec ce nouveau pas de temps. On peut alors utiliser ces deux relations et obtenir une approximation pour  $\vec{c}$  (chaque composante est supposée constante)

$$\vec{c} = \frac{16}{15(\Delta t_m)^4} (\vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) - \vec{q}_a(t, \Delta t_m)). \quad (3.91)$$

La solution améliorée sera alors donnée par

$$\vec{q}_c(t) = \vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) + \frac{\vec{q}_b(t, \Delta t_{m+1}) - \vec{q}_a(t, \Delta t_m)}{15}. \quad (3.92)$$

L'algorithme de Runge-Kutta avec contrôle d'erreur et interpolation de Richardson dans un format MATLAB suit.

- Procédure de résolution par la méthode de Runge-Kutta avec contrôle d'erreur et interpolation de Richardson en MATLAB.

```
function [qs m Err]=SEDRK4t0ER(q0,t0,tf,epsilon,g)
% Contrôle d'erreur pour solution ED avec
% interpolation de Richardson
% Equation à résoudre : dq/dt=g(q,t)
% avec
%   qs           : solution [q(tf)]
%   q0           : conditions initiales [q(t0)]
%   t0           : temps initial
%   tf           : temps final
%   epsilon      : précision pour chaque variable
%   g            : membre de droite de ED.
m=1;nbi=1;DeltaT=(tf-t0);
% Solution avec m=1
qs1=SEDRK4t0(q0,t0,DeltaT,'g');
[conv Err]=ErrSol(qs1,q0,epsilon);
qs2=qs1;
% Iteration avec m>1
while not(conv)
    DeltaT=DeltaT/2;
    m=m+1;nbi=nbi*2;
    qs2=q0;t2=t0;
    for i=1:nbi
        qs2=SEDRK4t0(qs2,t2,DeltaT,'g');
        t2=t2+DeltaT;
    end;
    [conv Err]=ErrSol(qs2,qs1,epsilon);
```

```

qs1=qs2;
if m>10
    break;
end;
qs=qs2+Err/15;

```

- La fonction MATLAB `ErrSol.m` est identique à celle utilisée par la méthode de Runge-Kutta avec contrôle d'erreur uniquement.

Matlab possède aussi des fonctions intrinsèques pour résoudre numériquement les équations différentielles ordinaires :

`ode15s`, `ode23s`, `ode23t`, `ode23tb`, `ode45`, `ode23`, `ode113`.

## 3.5 Exemples

### 3.5.1 Particule accélérée en 3D

Ce problème est une généralisation de l'exemple avec accélération dépendante de la vitesse pour une trajectoire 3D. On considère des accélérations

$$\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x^2(t)/2 \\ -v_y^2(t) \\ -v_z^2(t)/3 \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

La vitesse initiale de la particule est  $\vec{v}(t_0) = (1, 1, 1)^T$  m/s et la position initiale est  $\vec{r}(t_0) = (0, 0, 0)^T$  m. Il s'agit de tracer la trajectoire de cette particule à toutes les secondes pour les 10 premières secondes.

Les fonctions Matlab permettant d'obtenir cette solution sont

- Solution par algorithme d'Euler.

```

% Solutions Euler
% Utilise la fonction Matlab : g.m
% De tlimits=[t_i t_f] avec nbi étapes
nbi=10;
qsol=zeros(nbi+1,6);
tlimits=[0 10];
qsol(1,:)=[1 1 1 0 0 0];
DeltaT=(tlimits(2)-tlimits(1))/nbi;
t0=tlimits(1);
% Solution

```

```

for i=1:nbi
    qsol(i+1,:)=SEDEulerT0(qsol(i,:),t0,DeltaT,'g');
    t0=t0+DeltaT;
end;

```

- Solution par algorithme Runge-Kutta.

```

% Solutions Runge-Kutta
% Utilise la fonction Matlab : fgEx.m
% De tlimits=[t_i t_f] avec nbi étapes
nbi=10;
qsol=zeros(nbi+1,6);
tlimits=[0 10];
qsol(1,:)=[1 1 1 0 0 0];
DeltaT=(tlimits(2)-tlimits(1))/nbi;
t0=tlimits(1);
for i=1:nbi
    qsol(i+1,:)=SEDRK4t0(qsol(i,:),t0,DeltaT,'g');
    t0=t0+DeltaT;
end;

```

- Fonction externe (g.m) pour algorithme d'Euler et de Runge-Kutta en MATLAB.

```

function res=g(q0,t0)
res=[-q0(1)^2/2 -q0(2)^2 -q0(3)^2/3 q0(1) q0(2) q0(2)];

```

Les trajectoires 3D, en utilisant 10 et 40 intervalles de temps, sont présentées à la figure 3.4. Comme on le voit, la solution obtenue par la méthode d'Euler est erronée lorsque  $\Delta t = 1$  seconde, alors que la méthode de Runge-Kutta donne d'excellents résultats. Même avec un intervalle de 0.25 seconde, la solution d'Euler est moins précise que la méthode de Runge-Kutta à 10 étapes (8 cm d'erreur comparativement à 5 cm après 10 s).

### 3.5.2 Parallélépipède tournant sur lui même en 3D

Considérons un parallélépipède de dimensions  $1.0 \times 2.0 \times 3.0 \text{ m}^3$  dont le centre de masse est initialement  $\vec{r}_c = (0, 0, 10)^T \text{ m}$ . La vitesse initiale de son centre de masse est de  $\vec{v}_c = (1, 0, 0)^T \text{ m/s}$ . Il subit une accélération linéaire de  $\vec{a} = (0, 0, -1)^T \text{ m/s}^2$ . Il subit un mouvement de rotation uniforme sur lui-même autour de l'axe  $x = z$  avec une vitesse angulaire de  $\pi/10$  radians par secondes. Il ne subit aucune accélération angulaire. On vous demande ici de tracer la trajectoire du parallélépipède dans l'espace à chaque seconde pour une période de  $t = 10 \text{ s}$ .

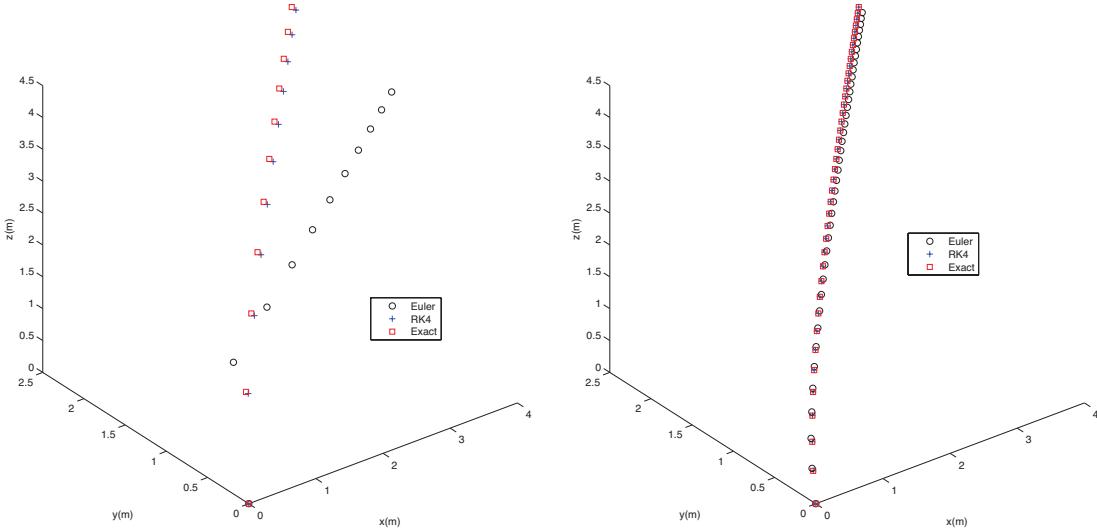


Figure 3.4: Trajectoires pour  $N = 10$  (gauche) et  $N = 40$  (droite) intervalles de temps

Ici on peut résoudre directement les équations du mouvement pour le centre de masse du parallélépipède. La solution obtenue est

$$\vec{r}_c(t) = (0 + t, 0, 10 - t^2/2)^T. \quad (3.94)$$

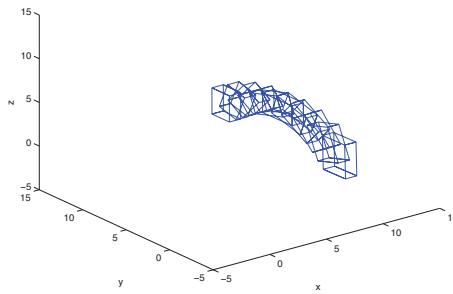
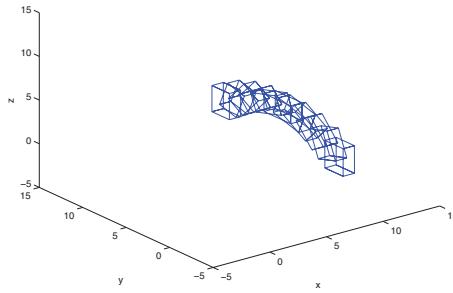
Comme l'accélération angulaire est constante  $\vec{\omega}(t) = (0, 0, \pi/10)^T$ , il reste à résoudre l'équation différentielle pour déterminer la dépendance temporelle de la matrice de rotation sachant que  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{1}$  (voir équation 3.5). Ici on utilisera la méthode d'Euler avec intervalle de temps de  $\Delta t = 0.5$  s et on trace le parallélépipède chaque seconde (2 intervalles de calcul). Le comportement du parallélépipède pour les 10 premières secondes est illustré à la figure 3.5. Si on utilise  $\Delta t_E = 0.1$  seconde, on obtient les résultats présentés à la figure 3.6.

En examinant ces deux figures, on s'aperçoit que les trajectoires diffèrent très peu. Cependant, le parallélépipède change de dimensions (il devient plus grand). Ceci s'explique facilement en examinant la matrice de rotation après une étape de la méthode de Euler de 0.5 s.

$$\mathbf{R}(0.5) = \begin{pmatrix} 1.00000 & -0.15708 & 0 \\ 0.15708 & 1.00000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00000 \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

$$\det(\mathbf{R}(0.5)) = 1.0247. \quad (3.96)$$

Comme on le voit, la matrice  $\mathbf{R}(t)$  n'est plus une matrice de rotation, car son déterminant n'est plus unitaire ( $\det(\mathbf{R}(t)) \neq 1$ ). Donc, bien que le mouvement de rotation soit relativement précis, les dimensions du parallélépipède ne sont plus respectées.

Figure 3.5: Solution avec la méthode d'Euler avec  $\Delta t_E = 0.5$  sFigure 3.6: Solution avec la méthode d'Euler avec  $\Delta t_E = 0.1$  s

Si au lieu de passer par les matrices de rotation, on utilise les quaternions de rotation (équation 3.7), la solution est très proche de celle obtenue en utilisant les matrices de rotation et le problème relié au changement dans les dimensions du solide observé persiste, car  $\vec{\tilde{R}}(t_0 + \Delta t)$  n'est plus un quaternion de rotation unitaire. On peut cependant régler ce problème simplement en normalisant le quaternion de rotation à chaque étape

$$\vec{\tilde{R}}(t_0 + \Delta t) = \frac{\vec{\tilde{R}}(t_0 + \Delta t)}{|\vec{\tilde{R}}(t_0 + \Delta t)|}. \quad (3.97)$$

Les dimensions du parallélépipède sont alors préservées tout au long de la simulation.

### 3.5.3 Trajectoire d'une tige de métal très fine dans l'espace

Une tige de métal très fine de longueur  $l = 1$  m dont le centre de masse est centré initialement à  $\vec{r}_c(0) = (0, 0, 0.5)^T$  m se déplace dans l'air. Cette tige qui est initialement alignée avec l'axe des  $z$  et possède une vitesse linéaire initiale  $\vec{v}(0) = (1, 1, 1)^T$  m/s et une vitesse angulaire

initiale  $\vec{\omega}(0) = (0, 1, 1)^T$  rads/s. Elle subit des accélérations (linéaire et angulaire) nulles. Ici, on vous demande de déterminer la position de cette tige et sa longueur après 2 secondes en utilisant

- la solution exacte ;
- la solution par méthode de Euler avec quaternions non normalisés ;
- la solution par méthode de Euler avec quaternions normalisés.

Ici on se trouve dans la même situation que pour le problème donné à la section 3.5.2, c'est-à-dire que la solution pour la position du centre de masse est obtenue analytiquement

$$\vec{r}_c(2) = \vec{r}_c(0) + 2\vec{v}(0) = (2, 2, 7)^T, \quad (3.98)$$

et la vitesse angulaire est constante. La solution pour les quaternion de rotation requiert une condition initiale. Ici, nous supposerons une rotation de  $\theta = 0$  rad autour de l'axe  $\hat{z}$ . Ceci correspond au quaternion de rotation initial suivant

$$\vec{\tilde{R}}(0) = (1, 0, 0, 0)^T, \quad (3.99)$$

et à la position angulaire initiale  $\vec{\Omega}(0) = (0, 0, 0)^T$ .

La solution exacte pour le quaternion de rotation est simple à obtenir car l'accélération angulaire est nulle. On résout donc les équations du mouvement pour la position angulaire

$$\vec{\Omega}(2) = \vec{\Omega}(0) + 2\vec{\omega}(0) = (0, 2, 2)^T = 2\sqrt{2} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T. \quad (3.100)$$

Cette nouvelle position angulaire correspond à la matrice de rotation (voir équation 2.24)

$$\mathbf{R}(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{8}) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{8}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{8}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{8}) & \frac{1}{2}(1 + \cos(\sqrt{8})) & \frac{1}{2}(1 - \cos(\sqrt{8})) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{8}) & \frac{1}{2}(1 - \cos(\sqrt{8})) & \frac{1}{2}(1 + \cos(\sqrt{8})) \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

ou au quaternion de rotation

$$\vec{\tilde{R}}(2) = \left( \cos(\sqrt{2}), 0, \frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \right)^T, \quad (3.102)$$

car

$$\vec{u}_{\omega}(t) = \vec{\omega}(t)/|\vec{\omega}(t)| = (0, 1, 1)^T/\sqrt{2}. \quad (3.103)$$

Les extrémités des tiges qui se trouvaient initialement

$$\vec{r}_{b,c}(0) = (0, 0, -0.5)^T \text{ m}, \quad (3.104)$$

$$\vec{r}_{t,c}(0) = (0, 0, 0.5)^T \text{ m}, \quad (3.105)$$

par rapport au centre de masse seront maintenant à la position

$$\vec{r}_b(2) = \vec{r}_c(2) + \mathbf{R}(2)(0, 0, -0.5)^T = (1.8911, 1.5122, 6.9878)^T \text{ m}, \quad (3.106)$$

$$\vec{r}_t(2) = \vec{r}_c(2) + \mathbf{R}(2)(0, 0, 0.5)^T = (2.1089, 2.4878, 7.0122)^T \text{ m}. \quad (3.107)$$

On voit donc que la longueur de la tige, qui est donnée par  $l = |\vec{r}_b(2) - \vec{r}_t(2)| = 1 \text{ m}$ , n'a pas changé.

Pour la solution par la méthode d'Euler, on peut procéder de la façon suivante ( $\Delta t=2 \text{ s}$ ).

- Pour la position du centre de masse, on utilise

$$\vec{r}_c(t) = \text{SEDEulerT0}(\vec{r}_c(t_0), t_0, \Delta t, 'g1'). \quad (3.108)$$

avec

```
function res=g1(q0,t0)
% dr(t)/dt=v(t)
res=[1 1 1];
```

- Pour le quaternion de rotation (position angulaire) on utilise.

$$\vec{\tilde{R}}(t_0) = (1, 0, 0, 0)^T, \quad (3.109)$$

$$\vec{\tilde{R}}(t) = \text{SEDEulerT0}(\vec{\tilde{R}}(t_0), t, \Delta t, 'g2'), \quad (3.110)$$

avec

```
function res=g2(q0,t0)
% dR(t)/dt=(R w)/2
ww=[0 0 1 1];
res=QProduit(q0,ww)/2;
```

la fonction `QProduit` étant définie à la section 2.3.2.

- Normalisation du quaternion, si nécessaire.

$$\vec{R}_n(t) = \vec{\tilde{R}}(t) / |\vec{\tilde{R}}(t)|. \quad (3.111)$$

Pour le cas où le quaternion de rotation n'est pas normalisé, nous obtenons les positions suivantes pour les extrémités de la tige

$$\vec{r}_{E,b}(2) = (1.8596, 1.4071, 6.9834)^T \text{ m}, \quad (3.112)$$

$$\vec{r}_{E,t}(2) = (2.1404, 2.5929, 7.0166)^T \text{ m}, \quad (3.113)$$

Les erreurs sur la position spatiale de la tige sont relativement larges et sa longueur est maintenant  $l_E = 1.2190 \text{ m}$ . Si on normalise le quaternion de rotation, la solution devient

$$\vec{r}_{N,b}(2) = (1.8848, 1.5136, 6.9864)^T \text{ m}, \quad (3.114)$$

$$\vec{r}_{N,t}(2) = (2.1152, 2.4864, 7.0136)^T \text{ m}, \quad (3.115)$$

Les erreurs sur la position spatiale sont beaucoup plus faibles et la tige a retrouvé sa longueur originale.

## 3.6 Solutions numériques et collisions

Dans la majorité des simulations, la trajectoire de la particule ou du solide est limitée par des objets immobiles (murs, sol, etc.) ou en mouvement (bâton de baseball, hockey, etc.). Ces contraintes au mouvement peuvent impliquer un changement dans la trajectoire de la particule ou son arrêt. Ils mettent donc fin à une partie ou à l'ensemble de la simulation.

Dans le contexte d'une résolution numérique des équations du mouvement, nous décrirons dans ce qui suit le processus de détection des collisions entre un point ou une sphère qui se déplacent et des plans immobiles. Nous reviendrons sur l'effet de telles collisions sur la trajectoire finale des solides au chapitre 5.

Considérons un tireur tentant de toucher une cible fixe avec son arme à feu. Ici, on supposera que l'élévation de l'arme par rapport au sol est  $z_a = 1.5 \text{ m}$  et que la balle sort du canon à  $x = 0$  avec une vitesse de  $v_0 = 500 \text{ m/s}$  et une inclinaison de  $\theta$  par rapport au sol de façon à ce que

$$\vec{v}_0 = v_0(\cos(\theta), 0, \sin(\theta))^T, \quad (3.116)$$

La balle subit seulement une accélération constante due à la gravité donnée par

$$\vec{a} = (0, 0, -9.8)^T \text{ m/s}^2. \quad (3.117)$$

Deux obstacles peuvent se trouver le long de la trajectoire de la balle (considérée comme ponctuelle). Une cible circulaire (rayon  $r = 20 \text{ cm}$ ) très mince dans le plan  $y - z$  localisé à  $x_c = 180 \text{ m}$  qui est centrée au point  $(y_c, z_c) = (0, 1) \text{ m}$  et le sol situé à  $z_s = 0$ . Ici, il faudra terminer la simulation lorsque la balle touche un de ces deux obstacles.

Comme la trajectoire de la balle ne varie pas en  $y$  ( $y = 0$ ), alors dans ce modèle (2-D) la cible peut être représentée par une ligne sans épaisseur de longueur finie en  $z$  ( $0.8 \text{ m} \leq z \leq 1.2 \text{ m}$ ).

1.2 m) qui est localisée à  $x_c$ . De la même façon, le sol est représenté comme une ligne sans épaisseur de longueur infinie en  $x$  localisée à  $z = 0$  m.

Dans ce cas simple, une résolution analytique est possible. La façon de procéder est la suivante. On détermine premièrement les trajectoires exactes:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta) t, \quad (3.118)$$

$$z(t) = z_a + v_0 \sin(\theta) t - \frac{g}{2} t^2. \quad (3.119)$$

En utilisant ces relations, on calcule le temps requis  $t_s$  pour que la balle traverse le plan  $z_s = 0$  correspondant au sol

$$t_s = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{(v_0 \sin(\theta))^2 + 2z_a g}}{g}. \quad (3.120)$$

Ensuite, le temps requis  $t_c$  pour que la balle traverse le plan  $x = x_c$  correspondant à la cible est calculé en utilisant

$$t_c = \frac{x_c}{v_0 \cos(\theta)}. \quad (3.121)$$

En utilisant ces deux temps, on peut classifier le type de collision associé à la balle.

1. Si  $t_s < t_c$  le sol est touché en premier, la simulation se termine au temps  $t_f = t_s$ .
2. Si  $t_c < t_s$  la cible peut être touchée. Il faut alors déterminer la position  $z_c$  où se trouve le projectile au temps  $t_c$

$$z_c = z_a + v_0 \sin(\theta) t_c - \frac{g}{2} t_c^2. \quad (3.122)$$

- (a) Si  $0.8 < z_c < 1.2$  la cible est touchée avant le sol, et on termine la simulation au temps  $t_f = t_c$ .
- (b) Sinon le projectile passe en haut ou en bas de la cible et la trajectoire se termine lorsqu'elle touche le sol à  $t_f = t_s$ .

On utilise finalement la solution analytique pour tracer la trajectoire de la balle entre  $t = 0$  seconde et  $t = t_f$ .

Si on utilise une solution numérique, la procédure est beaucoup plus complexe. La façon de procéder est alors la suivante.

1. Choisir une méthode de résolution numérique et un intervalle de temps  $\Delta t$  pour la simulation de la trajectoire. Ici, on choisit  $\Delta t$  suffisamment court pour donner une bonne précision de simulation pour la trajectoire et s'assurer que la distance parcourue par l'objet ne soit pas trop grande, car celle-ci est utilisée pour la détection des collisions. On choisit préférablement la méthode Runge-Kutta à cause de sa haute précision.

2. Déterminer la position atteinte par le projectile  $(x_i, y_i, z_i)^T = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))^T$  au temps  $t_i = t_0 + i\Delta t$  en utilisant la méthode de résolution numérique choisie. Comme notre choix pour  $\Delta t$  fera rarement coïncider la balle et un des plans de collision aux temps  $t_i$ , après chaque intervalle de calcul on vérifie si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $z_{i-1} > z_s \geq z_i$  si la balle traverse le sol ;
- $x_{i-1} < x_c \leq x_i$  et la balle traverse la position  $x_c$  de la cible.

Si aucune de ces propositions n'est satisfaite, on passe au prochain intervalle de temps.

3. Si la balle traverse le sol sans traverser la cible on suppose que la balle traversera le sol avant la cible (ceci est assuré si la solution est assez précise). On doit alors déterminer à quel temps  $t_f$  la balle traversera le sol ( $z_s = 0$ ). Pour ce faire, plusieurs options existent.

(a) Méthode d'interpolation.

Ici, on peut utiliser une approximation pour la vitesse moyenne  $\bar{v}_z(t_{i-1})$  sur l'intervalle  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$

$$\bar{v}_z(t_{i-1}) = \frac{v_z(t_i) + v_z(t_{i-1})}{2}. \quad (3.123)$$

On obtient alors

$$t_f = t_{i-1} + \frac{z_s - z(t_{i-1})}{\bar{v}_z(t_{i-1})} = t_{i-1} - \frac{z(t_{i-1})}{\bar{v}_z(t_{i-1})}. \quad (3.124)$$

On résout le problème numériquement pour une dernière fois sur l'intervalle de  $t_{i-1}$  à  $t_f$  et on évalue la position en  $x$  correspondant à  $t_f$  (on suppose ici que  $z(t_f) = z_s$ ).

(b) Méthode itérative avec  $\epsilon$  une distance faible qui est utilisée pour s'assurer de la convergence du processus.

- i. Si  $|z_s - z(t_{i-1})| < \epsilon$ , on suppose que l'intersection a eu lieu à  $t_{i-1}$  et on termine alors la simulation.
- ii. Si  $|z_s - z(t_i)| < \epsilon$ , on suppose que l'intersection a eu lieu à  $t_i$  et on termine alors la simulation.
- iii. Sinon on divise l'intervalle  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$  en  $J$  sous-intervalles de largeur  $\Delta t = \Delta t/J$  et on résout le problème pour  $t_j = t_{i-1} + j\Delta t$ .
- iv. On vérifie ensuite si l'intersection se situe entre  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ .
- v. Si  $|z_s - z(t_j)| < \epsilon$ , on suppose que l'intersection a eu lieu à  $t_j$  et on termine alors la simulation.
- vi. Sinon on remplace  $t_{i-1} = t_{j-1}$  et  $t_i = t_j$ , et on retourne à l'étape iii.

On poursuit jusqu'à l'obtention d'une solution ou bien que le nombre maximum d'itérations (nombre de fois que l'intervalle de temps est sous-divisé) soit atteint.

4. Si le projectile traverse la cible sans traverser le sol, il pourrait frapper la cible après un intervalle  $\Delta t_c$  qui est déterminé d'une façon similaire à  $\Delta t_s$ . On utilise une méthode d'interpolation (étape 3a) ou itérative (3b) avec les relations appropriées ( $x_{i-1} < x_c < x_i$ ).
5. Si  $z$  est aussi dans le bon intervalle pour la cible, on imprime la position de la balle et on termine la simulation. Sinon, on continue la simulation pour le prochain intervalle de temps.
6. Si le plan de la cible et le plan du sol ont été croisés par la balle (possible si  $\Delta t$  est trop long), on diminue le pas de temps sur le dernier intervalle et on résout sur ce pas de temps en retournant à l'étape 2.

Notez que si la précision de notre algorithme de solution numérique n'est pas suffisante, il se peut que l'on manque ou que l'on touche la cible alors que la solution analytique (si connue) nous indique que le contraire devrait se produire. Dans le cas où les intervalles de temps de simulation sont trop longs (même si la méthode de simulation est précise), il se peut aussi que l'on manque des collisions ou que l'ordre des collisions soit incorrect. Tout ceci pourrait avoir un impact important sur le reste de la simulation (s'il y a des rebonds par exemple).

Si la cible correspond à un cube en 3D posé sur le sol, et que la particule se déplace aussi dans la direction,  $y$  le problème se complique. Il faut alors vérifier la possibilité d'interaction avec toutes les faces du cube et avec le sol. Après avoir déterminé la succession de ces événements dans le temps, on peut procéder au processus itératif en prenant l'intervalle de temps le plus court. Ceci nous permet un premier classement des surfaces touchées successivement. Comme les vitesses ne sont pas nécessairement constantes, il peut arriver que ce classement soit faux. On doit donc reprendre l'analyse de toutes les surfaces à chaque itération de façon à minimiser les fausses collisions.

Finalement, si le projectile a des dimensions finies il faut généraliser cette analyse à tous les points de l'objet. Ceci s'avère relativement simple pour une sphère uniforme (tous les points de la surface sont à une distance  $r$  du centre de masse) même si elle tourne sur elle-même. Pour les solides de forme arbitraire subissant un mouvement de rotation ce problème est très difficile à résoudre et sera considéré au chapitre 5.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les méthodes numériques qui pouvaient être utilisées pour résoudre les équations pour le mouvement dans l'espace de solides isolés. Nous avons aussi étudié l'impact de telles solutions numériques sur la détection de collisions.

Dans le prochain chapitre, nous présenterons les forces et moments de force pouvant influencer le déplacement (en translation et en rotation) des solides.

## Chapitre 4

### Forces et moments de force

#### 4.1 Introduction

Notre présentation de la dynamique au chapitre 2 s'est limitée à décrire la relation entre forces et moments de force et accélérations linéaires et angulaires respectivement. Ici, le but est de décrire les forces  $\vec{F}$  et les moments de force  $\vec{\tau}$  à la source de ces accélérations sachant que

$$\vec{a}(\vec{v}, \vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}, t) = \frac{\vec{F}(\vec{v}, \vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}, t)}{m}, \quad (4.1)$$

$$\vec{\alpha}(\vec{v}, \vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}, t) = \mathbf{I}^{-1} (\vec{\tau}(\vec{v}, \vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}, t) - \vec{\omega}(\vec{v}, \vec{r}, \mathbf{R}(t), t) \mathbf{I} \vec{\omega}(\vec{v}, \vec{r}, \vec{\Omega}, t)). \quad (4.2)$$

#### 4.2 Forces et mouvement linéaire

Nous présenterons premièrement les forces qui ont un impact sur le mouvement linéaire de particules (et qui s'appliquent sur le centre de masse des solides). Certaines d'entre elles peuvent générer un moment de force et ainsi avoir un impact sur le mouvement angulaire du solide. De plus, ces forces peuvent aussi dépendre de la position angulaire et de la vitesse angulaire, même si elles ne contribuent pas à l'accélération angulaire.

##### 4.2.1 Champs de force

Les champs de force représentent l'interaction entre deux objets qui ne se touchent pas. La force qui résulte de cette interaction dépend généralement des propriétés intrinsèques de chacun des objets et de la distance qui les sépare. Les deux exemples les plus connus sont la force électrique et la force gravitationnelle.

##### Force électrique

Un solide de charge  $q_1$  située à  $\vec{r}_1$  subira une force

$$\vec{F}_1^e = \vec{F}_{1,2}^e = k \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad (4.3)$$

en présence d'un solide de charge  $q_2$  localisée à  $\vec{r}_2$  (force répulsive si les deux charges sont de même signe et attractive si les deux charges sont opposées). La force appliquée sur la charge 2 sera  $\vec{F}_2^e = -\vec{F}_1^e$  (troisième loi de Newton). Ici  $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.98755 \times 10^9 \text{ (N}\times\text{m}^2/\text{C}^2)$ . Cette force est rarement utilisée dans les applications multimédias.

### Force gravitationnelle

Un solide de masse  $m_1$  situé à  $\vec{r}_1$  (position du centre de masse) sera attiré par un solide de masse  $m_2$  localisé à  $\vec{r}_2$  (position du centre de masse). La force d'attraction entre ces deux solides est alors donnée par la relation (force que 2 exerce sur 1)

$$\vec{F}_1^G = \vec{F}_{1,2}^G = -G \frac{m_1 m_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad (4.4)$$

avec  $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ (N}\times\text{m}^2/\text{kg}^2)$ . Les simulations reliées au déplacement d'objets en 3-D impliquent l'utilisation de cette force. Le solide 2 subira une force égale en intensité, mais de direction opposée ( $\vec{F}_2^G = -\vec{F}_1^G$ ).

Dans la majorité des cas, les objets se retrouveront dans le champ gravitationnel de la terre. La masse  $m_2$  représentera la masse de la terre (notée  $M_T$ ) et  $\vec{r}_2$  la position du centre de masse de la terre par rapport à votre système de coordonnées locales. En général, le point  $\vec{r}_1$  sera défini par rapport à un point sur la surface de la Terre (hauteur  $h$ ). Alors

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (R_T + h) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = (R_T + h) \hat{u}, \quad (4.5)$$

avec  $R_T$  le rayon de la terre et  $\hat{u}$  un vecteur unitaire dans la direction opposée à la direction de la force (du centre de masse de la terre vers l'objet). On écrira donc

$$\vec{F}_1^G = -GM_T \frac{m_1}{(R_T + h)^2} \hat{u} = -3.99 \times 10^{14} \frac{m_1}{(6.38 \times 10^6 + h)^2} \hat{u}, \quad (4.6)$$

puisque  $M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$  et  $R_T = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ .

Pour les situations où la masse  $m_1$  atteint une hauteur  $h \ll R$ , on peut encore simplifier cette formulation et écrire

$$\vec{F}_1^G = -\frac{GM_T}{(R_T)^2} m_1 \hat{u} = -m_1 g \hat{u}, \quad (4.7)$$

avec  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  au niveau de la mer (montée directe suivant un rayon de la terre ou la terre considérée plate). Ici  $\hat{u}$ , qui sert à indiquer la direction de la force correspondra à la direction  $z$  pour le cas où la surface de la Terre est dans le plan  $x - y$ .

### Trajectoire d'une fusée

Une fusée de masse  $m = 100 \text{ g}$  constante part dans la direction  $x$  avec une vitesse  $v_0 = 20 \text{ km/s}$  et un angle  $\theta = \pi/4 \text{ rad}$  par rapport à la verticale. Les conditions initiales sont

$$\vec{r}_0 = (0, 0, R_T)^T, \quad (4.8)$$

$$\vec{v}_0 = v_0(\sin\theta, 0, \cos\theta)^T. \quad (4.9)$$

Les axes de référence  $(x, y, z)^T$  par rapport au centre de la Terre seront parallèles au système de référence associé au point de départ localisé sur la surface de la Terre  $(x', y', z')^T$  (voir figure 4.1).

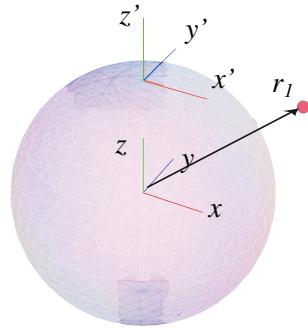


Figure 4.1: Système de coordonnées pour la fusée

Ici, on utilise

$$\vec{F}^G = -GM_T m \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad (4.10)$$

où  $\vec{r}$  est la position de la fusée par rapport à un système de référence situé au centre de masse de la terre ( $\vec{r}_T = 0$ ). Les différentes composantes de la force sont

$$F_x^G = -GM_T m \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (4.11)$$

$$F_y^G = 0, \quad (4.12)$$

$$F_z^G = -GM_T m \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (4.13)$$

Ceci correspond à une trajectoire non balistique. Comme la force et la vitesse en  $y$  sont nulles, on obtient directement  $y(t) = 0$ . Pour les composantes  $x$  et  $z$ , on considère une solution par la méthode de Runge-Kutta avec le vecteur  $\vec{q}(t)$  qui a pour composantes

$$\vec{q}(t) = (v_x(t), v_z(t), x(t), z(t))^T, \quad (4.14)$$

$$\vec{q}(0) = (v_0 \sin \theta, v_0 \cos \theta, 0, R_T)^T, \quad (4.15)$$

alors que  $\vec{g}(t)$  est donné par

$$\vec{g}(t) = \left( -GM_T \frac{q_3(t)}{(q_3^2(t) + q_4^2(t)^2)^{3/2}}, -GM_T \frac{q_4(t)}{(q_3^2(t) + q_4^2(t)^2)^{3/2}}, q_1(t), q_2(t) \right)^T. \quad (4.16)$$

Si la vitesse  $v_0$  est très faible, le projectile suivra une trajectoire  $(x(t), 0, z(t))^T$  balistique telle que  $x(t) \ll R_T$  et  $h = z(t) - R_T \ll R_T$  ( $R_T = 6.38 \times 10^6$  m). On aura alors

$$F_x^G = 0, \quad (4.17)$$

$$F_y^G = 0, \quad (4.18)$$

$$F_z^G = -gm. \quad (4.19)$$

Dans ce cas la fonction  $g(t)$  sera

$$\vec{g}(t) = (0, -g, q_1(t), q_2(t)). \quad (4.20)$$

Les trajectoires non balistiques (noir) et balistiques (rouge) obtenues pour ce problème sont illustrées à la figure 4.2.

#### 4.2.2 Ressorts et amortisseurs

La force exercée par un ressort fixé sur un solide est dictée par la loi de Hooke. Elle est une fonction linéaire de l'étirement ou de la compression du ressort. Cette force est donnée par

$$\vec{F}^r = -k_r(\vec{r} - \vec{r}_{\text{eq}}), \quad (4.21)$$

avec  $k_r$  la constante du ressort et  $\vec{r}_{\text{eq}}$  la position du solide qui ferait en sorte que le ressort soit à sa position d'équilibre (aucun étirement ni compression). Ainsi :

- si  $\vec{r} = \vec{r}_{\text{eq}}$  aucune force n'est exercée par le ressort ;
- sinon, la force est toujours exercée de façon à ramener le ressort à l'équilibre.

Si le ressort est attaché à un solide qui est aussi en mesure de se déplacer, ce solide subira une force égale et opposée à  $\vec{F}^r$ . Dans la majorité des études impliquant des collisions entre des solides, on peut simuler la force d'interaction entre ces solides lorsqu'ils sont en contact en utilisant un modèle de ressort, la constante  $k_r$  étant proportionnelle à la rigidité des solides.

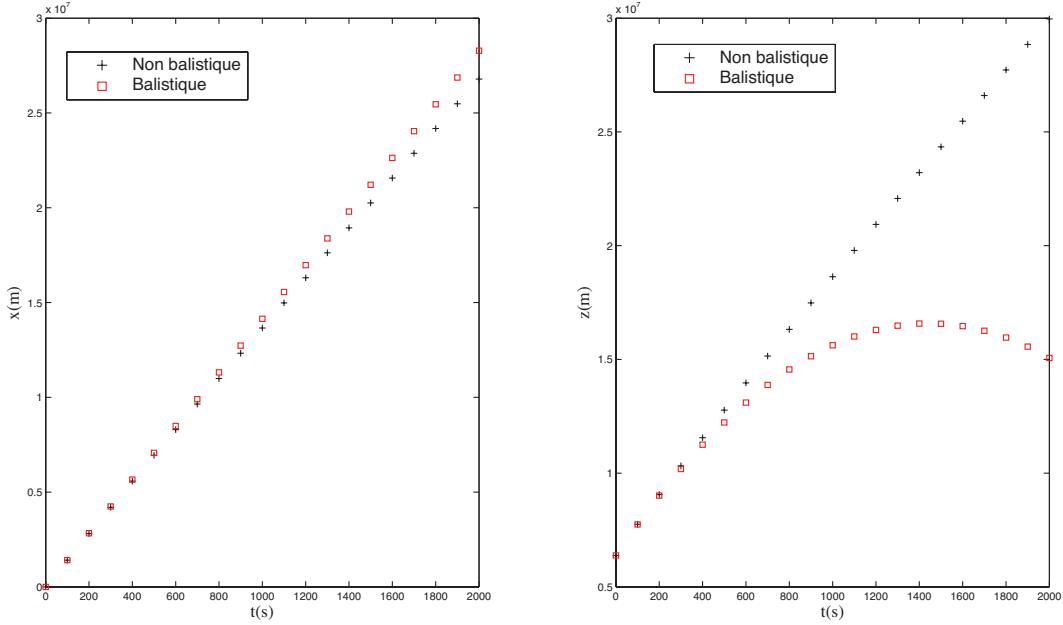


Figure 4.2: Trajectoire balistique et non balistique de la fusée

Comme ces collisions ne sont parfaitement élastiques (sans perte d'énergie) que dans des cas extrêmement rares, il est aussi utile d'introduire le concept d'amortisseur.

La force exercée par un amortisseur est donnée par

$$\vec{F}^a = -k_a [(\vec{v} - \vec{v}_a) \cdot \hat{u}] \hat{u}. \quad (4.22)$$

Ici  $k_a$  est la constante d'amortissement et  $\vec{v}_a$  la vitesse de l'amortisseur. Le vecteur unitaire  $\hat{u}$  est donné par

$$\hat{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_{\text{eq}}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\text{eq}}|}, \quad (4.23)$$

et indique la direction de compression de l'amortisseur. Ici  $\vec{r}_{\text{eq}}$  est la position de l'amortisseur à l'équilibre. Cette force s'exerce toujours de façon à réduire la vitesse relative entre les objets  $|(\vec{v} - \vec{v}_a)|$ . Il faut aussi noter que le solide exerce aussi une force  $-\vec{F}^a$  sur l'amortisseur (et le solide auquel il est attaché).

#### 4.2.3 Frottement

Deux types de frottements sont souvent considérés : le frottement sec et le frottement visqueux.

### Frottement sec

Le frottement sec s'oppose au mouvement d'un solide qui est en contact avec une surface. Cette force est due à deux effets.

1. Les surfaces sont rarement totalement lisses au point de vue microscopique, des rugosités étant toujours présentes sur celles-ci. Ces rugosités génèrent des forces qui s'opposent au mouvement.
2. L'attraction entre les molécules des deux solides en contact. Lorsque la distance entre les deux solides est faible (peu de rugosité), les forces d'attraction atomiques entre les molécules du solide et de la surface deviennent importantes et s'opposent au glissement du solide sur la surface.

Si une force externe  $\vec{F}$  est appliquée sur un objet au repos la force de frottement sec  $\vec{F}^f$  est donnée par

$$\vec{F}^f = -\mu_s N \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}, \quad (4.24)$$

où  $\mu_s$  est le coefficient de frottement statique et  $N$  est la composante du poids du solide ( $\vec{P}$  avec  $|\vec{P}| = mg$ ) normale à la surface sur laquelle il repose (voir figure 4.3) :

$$N = \vec{P} \cdot \hat{n}, \quad (4.25)$$

avec  $\hat{n}$  un vecteur unitaire normal à la surface considérée (normale entrante). La direction de cette force est telle qu'elle s'oppose toujours à la force qui est appliquée sur l'objet pour tenter de le déplacer.

Cette force est appliquée sur le solide à un point se situant à l'interface solide-plan. Du point de vue du mouvement linéaire du solide, on peut supposer que cette force se transmet directement à son centre de masse. Cependant, cette force est effectivement décalée par rapport au centre de masse et devra aussi être prise en compte lorsque nous étudierons le mouvement de rotation du même objet.

Pour les cas où l'objet se déplace à une vitesse  $\vec{v}$  par rapport à la surface, la force de frottement est alors donnée par

$$\vec{F}^f = \begin{cases} -\mu_c N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases}, \quad (4.26)$$

avec  $\mu_c$  le coefficient de frottement cinétique.

Des coefficients de frottement statique et cinétique entre deux solides de compositions différentes sont fournis au tableau 4.1. Comme on peut le constater, le coefficient de frottement statique est généralement supérieur au coefficient de frottement cinétique, bien que quelques exceptions existent.

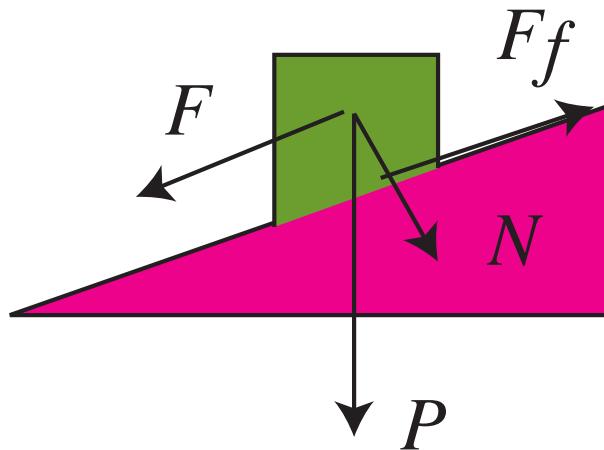


Figure 4.3: Force de frottement

Tableau 4.1: Coefficients de frottement pour différentes interfaces surface-solide

Matériaux en contact	$\mu_s$	$\mu_c$
Acier sur acier (sec)	0.78	0.42
Acier sur acier (gras)	0.10	0.05
<b>Acier sur acier (surfaces polies)</b>	100.	100.
Bois sur bois	0.5	0.3
Métal sur glace	0.03	0.01
Pneu sur route sèche	0.8	0.6
Pneu sur route mouillée	0.15	0.1
Téflon sur téflon	0.04	0.04
<b>Cuir sur fonte</b>	0.28	0.56
Vitre sur vitre (sèche)	0.94	0.40
Vitre sur fer	1.10	0.15
Glace sur glace	0.10	0.03

*Câble lesté glissant sur une table*

Un câble de longueur  $L = 1.0$  m et de masse linéique  $\rho = 0.01$  kg/m auquel on a suspendu une masse ( $m = 0.1$  kg) pend par une longueur de  $l = 0.1$  m au bout d'une table de hauteur  $h = 1$  m (voir figure 4.4). Le coefficient de frottement statique entre la table et le câble est  $\mu_s = 0.4$  alors que son coefficient de frottement cinétique est  $\mu_c = 0.1$ . On suppose aussi que le coin de la table exerce une force constante de  $f_c = 0.01$  N sur le câble dans une direction opposée à son mouvement. Ici, il s'agit de déterminer ce qui arrivera si le câble est initiale-

ment au repos. Nous terminerons la simulation lorsque la masse qui pend au bout du câble touche le sol.

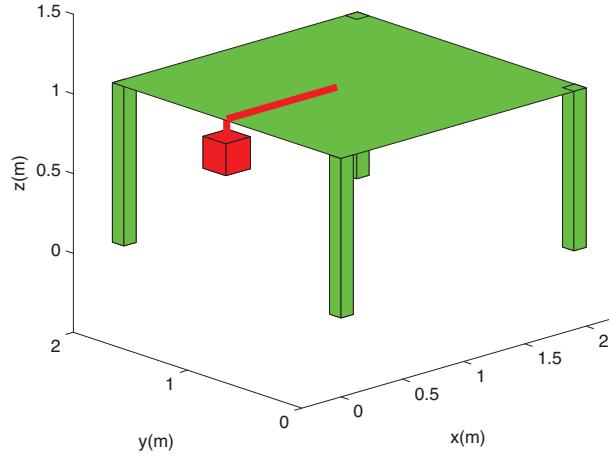


Figure 4.4: Câble lesté glissant sur une table

Les forces en présence sont les suivantes (on suppose que la masse qui pend au bout du câble est à une position  $z(t)$  par rapport au sol, la longueur qui pend correspondant à  $h - z$ ).

1. La force gravitationnelle sur la partie du câble qui pend

$$\vec{F}_1^G(t) = -(m + \rho(h - z(t)))g\hat{z}. \quad (4.27)$$

2. La force gravitationnelle sur la partie du câble qui repose sur la table

$$\vec{F}_2^G(t) = -\rho(L - h + z(t))g\hat{z}. \quad (4.28)$$

3. La force de frottement avec la table

$$\vec{F}_1^f(t) = \mu\rho(L - h + z(t))g\hat{x}, \quad (4.29)$$

qui crée une tension

$$\vec{T}_1^f(t) = \mu\rho(L - h + z(t))g\hat{z}, \quad (4.30)$$

dans le câble.

4. La force de frottement avec le coin

$$\vec{F}_2^f = f_c\hat{z}. \quad (4.31)$$

### 5. La masse totale pour le système câble poids $M = L\rho + m$ .

Pour la situation où le système est au repos,  $z = h - l = 0.9$  m correspond à la position initiale de la masse suspendue au câble.

Ici, il faut premièrement vérifier si la somme des forces sur l'ensemble câble-masse au repos (on choisit  $\mu = \mu_s$ ) permettra un déplacement du câble dans la direction  $-\hat{z}$  (le câble tombera). Pour répondre à cette question, il faut calculer la force totale en  $z$

$$F_z(t_0) = -(m + (h - z(t_0))\rho)g + \mu_s(L - h + z(t_0))\rho g + f_c. \quad (4.32)$$

Ici, on obtient  $F_z(t_0) = -0.9445$  N. Cette force est négative et donc le câble chutera. Aussitôt que le glissement débute, il faut modifier la relation 4.32 pour la force en remplaçant le coefficient de frottement statique  $\mu_s$  par le coefficient de frottement cinétique  $\mu_c$

$$F_z(t) = -(m + (h - z(t))\rho)g + \mu_c(L - h + z(t))\rho g + f_c. \quad (4.33)$$

L'accélération en  $z$  est alors donnée par

$$a_z = \frac{-(m + (h - z(t))\rho)g + \mu_c(L - h + z(t))\rho g + f_c}{M}, \quad (4.34)$$

car c'est la corde complète qui est accélérée. Ici, la solution analytique est un peu compliquée et il est préférable d'utiliser la méthode de Euler ou de Runge-Kutta pour résoudre le problème.

### Frottement visqueux

Un solide se déplaçant dans un fluide (un gaz ou un liquide) subit aussi l'effet d'une force de frottement dont la source est encore une fois multiple. Ceci est le résultat des collisions élastiques ou inélastiques entre le solide et les molécules composant le fluide (ceci correspond à la viscosité du fluide). Ici, pour nous simplifier la vie, nous ne considérerons que la situation où le solide est complètement immergé dans le fluide, la force s'appliquant seulement sur la face du solide se déplaçant dans le fluide (ce qui équivaut à exercer une force directement sur le centre de masse du solide, si celui-ci est uniforme). La situation se complique si le solide n'est pas uniforme ou qu'il n'est que partiellement en contact avec le fluide (la force ne s'applique alors que sur la partie immergée du solide et donne aussi naissance à un mouvement de rotation).

On peut distinguer trois régimes de frottement visqueux qui dépendent de la vitesse du fluide.

- À très basse vitesse ( $|\vec{v}| < 5$  m/s dans l'air), on considère le frottement visqueux comme laminaire

$$\vec{F}^{\text{vis}} = \begin{cases} -k\eta\vec{v} & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases}, \quad (4.35)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse du solide,  $\eta$  est le coefficient de viscosité dynamique du fluide et  $k$  est un coefficient de proportionnalité relié aux dimensions géométriques du solide. Pour une boule dans un fluide, le facteur géométrique est donné par

$$k = 6\pi R , \quad (4.36)$$

avec  $R$  le rayon de la boule (formule de Stokes). Pour une solide quelconque, on utilisera souvent un facteur géométrique identique à celui de la boule avec

$$R = \left( \frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} , \quad (4.37)$$

c'est-à-dire le rayon qu'aurait une boule ayant un volume égal à celui du solide ( $V$ ).

Quelques valeurs de  $\eta$ , le coefficient de viscosité dynamique pour différents fluides à différentes températures sont fournies au tableau 4.2. Comme on le voit  $\eta$ , en Poiseuille (1 PI=1 kg×m<sup>-1</sup>×s<sup>-1</sup>) dépend de la température (et en fait de la masse volumique du fluide).

Tableau 4.2: Viscosité dynamique en Poiseuille pour des fluides à différentes températures

Fluide	0 C	20 C	40 C
air sec	$0.017 \times 10^{-3}$	$0.018 \times 10^{-3}$	$0.019 \times 10^{-3}$
eau	$1.8 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$0.7 \times 10^{-3}$
glycérine		$1490 \times 10^{-3}$	

2. À vitesse intermédiaire ( $5 < |\vec{v}| < 20$  m/s dans l'air), on considère le frottement visqueux comme turbulent et  $\vec{F}^{\text{vis}}$  prend la forme

$$\vec{F}^{\text{vis}} = \begin{cases} -C_x \frac{\rho}{2} |\vec{v}| \vec{v} S & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases} , \quad (4.38)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $S$  est l'aire du solide perpendiculaire à la vitesse et  $C_x$  un coefficient de traînée caractéristique de la géométrie du solide. Pour une boule  $C_x \approx 0.45$ . Pour un disque se déplaçant suivant un axe parallèle au cylindre  $C_x \approx 1.32$  (voir figure 4.5).

3. À très haute vitesse ( $20 < |\vec{v}| < v_s$  avec  $v_s$  la vitesse du son dans le fluide) on utilise

$$\vec{F}^{\text{vis}} = \begin{cases} -K |\vec{v}|^{n-1} \vec{v} S & |\vec{v}| > 0 \\ 0 & |\vec{v}| = 0 \end{cases} , \quad (4.39)$$

avec  $K$  une constante qui dépend du fluide et  $n > 2$ .

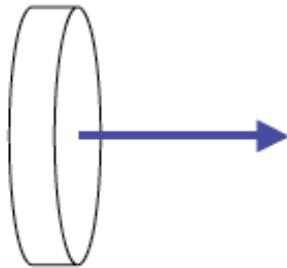


Figure 4.5: Disque se déplaçant suivant un axe parallèle au cylindre

On détermine le comportement laminaire (basse vitesse) ou turbulent (haute vitesse) d'un fluide quelconque en utilisant le nombre de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho L |\vec{v}|}{\eta}, \quad (4.40)$$

avec  $\eta$  le coefficient de viscosité dynamique du fluide,  $\rho$  sa masse volumique,  $\vec{v}$  la vitesse de déplacement du solide dans le fluide et  $L$  la longueur caractéristique du fluide. L'écoulement est laminaire si  $\text{Re} < 2300$ , sinon il est turbulent (en fait, la transition au régime turbulent dépend de la géométrie et le régime turbulent s'établit souvent lorsque  $\text{Re} \gg 2300$ ).

Notez que si l'objet subit en plus un mouvement de rotation dans le fluide, les choses se compliquent un peu. Toutes les parties de l'objet n'ont pas la même vitesse par rapport au fluide et on utilisera généralement une force moyenne qui sera évaluée en utilisant

$$\vec{F}_{\text{moyenne}}^{\text{vis}} = \frac{1}{S} \int_S \vec{F}^{\text{vis}}(\vec{r}, \vec{v}) ds. \quad (4.41)$$

La surface effective que l'objet expose au fluide (surface normale à la direction de déplacement) peut aussi varier en fonction du temps à cause du mouvement de rotation (sauf pour une sphère) ce qui affectera l'intensité de la force. Cette force produira aussi un moment de force qui fera en sorte de s'opposer au mouvement de rotation de l'objet (nous verrons ceci à la section 4.3).

#### 4.2.4 Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est une force qui s'exerce en présence du champ gravitationnel de la terre lorsqu'un solide est immergé dans un fluide. L'intensité de cette force dépend du volume de fluide déplacé par l'objet et de la masse volumique du fluide. Elle résulte de la différence entre la pression exercée par le fluide situé au-dessus du solide et celle exercée par le fluide situé au-dessous de l'objet.

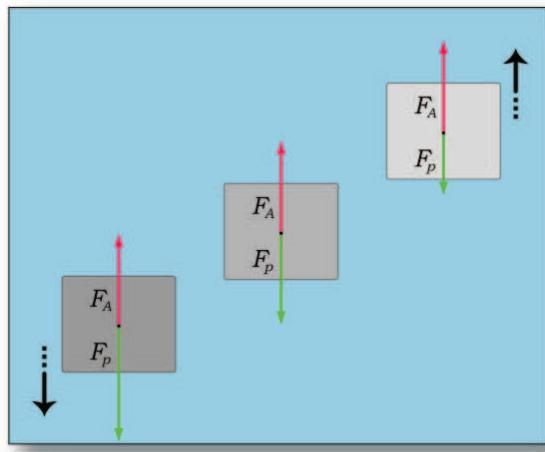


Figure 4.6: Poussée d'Archimède (immersion complète)

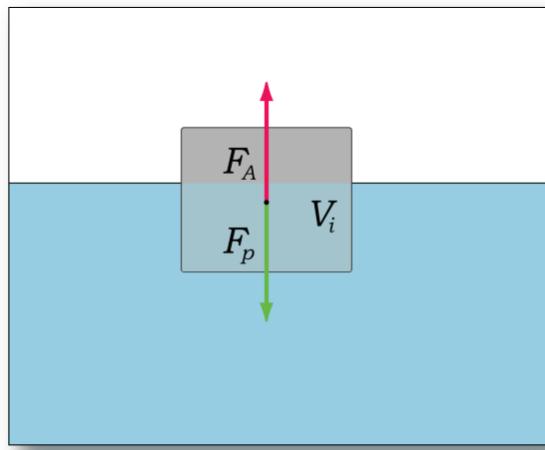


Figure 4.7: Poussée d'Archimède (immersion partielle)

La force exercée par la poussée d'Archimède prend une forme relativement simple si le fluide à une masse volumique  $\rho$  uniforme

$$\vec{F}^A = (0, 0, \rho g V_{\text{imm}})^T = \rho g V_{\text{imm}} \hat{z}, \quad (4.42)$$

où  $V_{\text{imm}}$  est le volume du fluide que le solide a déplacé et  $\hat{z}$  est un vecteur unitaire dans la direction  $z$ . Elle est directement opposée à la force due au champ gravitationnel de la terre.

Lorsque le solide est complètement immergé dans le fluide  $V_{\text{imm}} = V$ , le volume du solide (voir figure 4.6). Dans ce cas, la force s'exerce sur le centre de masse du solide. Si le solide

n'est pas totalement immergé, la force s'exerce sur le centre de masse de la partie immergée du solide (voir figure 4.7).

Notez que cette force s'applique aussi aux solides immergés dans l'air. Cependant, elle est généralement combinée directement avec la force gravitationnelle

$$\vec{F}^A + \vec{F}^G = (\rho_{\text{air}} V_{\text{solide}} g - \rho_{\text{solide}} V_{\text{solide}} g) \hat{z} = -\rho'_{\text{solide}} V_{\text{solide}} g \hat{z}, \quad (4.43)$$

où on a corrigé la densité du solide en utilisant

$$\rho'_{\text{solide}} = \rho_{\text{solide}} - \rho_{\text{air}}. \quad (4.44)$$

En fait comme  $\rho_{\text{air}} \ll \rho_{\text{solide}}$  on néglige souvent cet effet en utilisant directement  $\rho_{\text{solide}}$ . Pour les cas où la poussée d'Archimède dans l'air n'est pas négligeable (montgolfière), on devra la considérer explicitement.

#### 4.2.5 Effet Magnus

L'effet Magnus est engendré lorsqu'un solide en rotation se déplace dans un fluide. Par frottement visqueux, il va modifier la vitesse du courant d'air qui l'entoure. Cette perturbation est proportionnelle à la vitesse du solide par rapport au fluide puisque la force de frottement visqueux est proportionnelle à cette vitesse.

Pour un solide en rotation, l'effet devient dissymétrique puisque les perturbations dans la vitesse des courants d'air sont plus élevées pour les points de la surface du solide ayant une vitesse relative, par rapport au fluide, plus élevée que pour les points ayant une vitesse relative moins élevée. Cet effet est la conséquence du ralentissement (accélération) du fluide en contact avec l'objet dû au mouvement de rotation et qui s'oppose ou se combine au mouvement du fluide (voir : [Football physics](#))

Si on combine cette observation avec l'équation de Bernoulli, on obtient l'effet Magnus. En gros, on peut dire que pour une rotation du haut vers l'avant (ou "Top spin" avec axe horizontal perpendiculaire au mouvement, comme une balle roulant sur le sol), la balle plongera plus vite vers le sol (voir figure 4.8). Pour une rotation dans le sens contraire, elle sera soulevée et aura une trajectoire moins incurvée, elle volera plus loin avant de toucher le sol.

L'intensité de l'effet Magnus dépendra de la forme du solide, de ses vitesses angulaire et linéaire, de ses dimensions et des propriétés du fluide dont sa masse volumique (voir tableau 4.3 pour la masse volumique de l'air à différentes températures). La force de Magnus sera appliquée au centre de masse de l'objet et pointera dans la direction menant du point où la vitesse relative entre le solide et le fluide est la plus élevée au point où la vitesse relative est la plus faible.

Dans le cas général, on utilisera la relation<sup>[5]</sup>

$$\vec{F}^M(\vec{v}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 A C_M(|\vec{\omega}| r / 2 |\vec{v}|) \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v})}{|(\vec{\omega} \times \vec{v})|}, \quad (4.45)$$

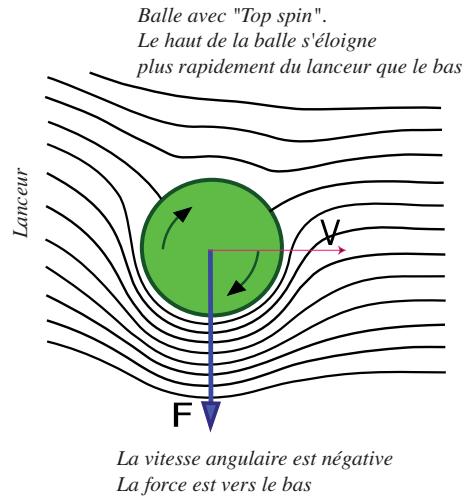


Figure 4.8: Effet Magnus. Ici, l'air est accéléré au bas et ralenti au haut du solide

où  $A$  est la surface efficace du solide (perpendiculaire à la direction de la force de Magnus) et  $C_M$  le coefficient de Magnus qui dépend du rapport de spin  $|\vec{\omega}|r/2|\vec{v}|$  et des propriétés du fluide. On note que la force de Magnus est toujours dirigée dans une direction qui est perpendiculaire à  $\vec{v}$  et  $\vec{\omega}$ . Ainsi, si le projectile se dirige dans la direction  $\hat{x}$  avec une vitesse de rotation dans la direction  $\hat{y}$ , la force de Magnus se dirigera dans la direction  $-\hat{z}$ .

Tableau 4.3: Masse volumique de l'air à différentes températures

$T$ (C)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$T$ (C)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
-10	1,341	40	1,127
0	1,293	50	1,092
10	1,247	60	1,060
20	1,204	70	1,029
30	1,164	80	1,000

#### 4.2.6 Portance

La portance est une force dont la source est l'effet Magnus. La différence majeure entre la portance et la force de Magnus est la source des différences de vitesse entre le fluide et le solide observée à différents points de la surface d'un solide. Pour l'effet Magnus, c'est le mouvement de rotation du solide qui est à la source des différences de vitesse. Pour la portance, la source est principalement de nature géométrique (voir Figure 4.9).

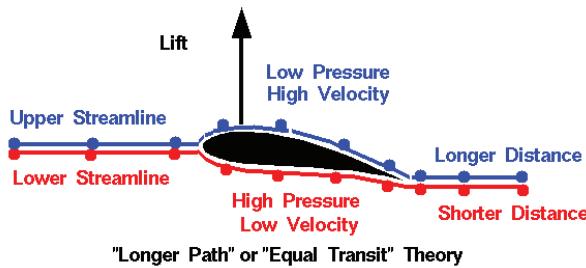


Figure 4.9: Portance. Ici par "Low velocity", on veut dire que la différence de vitesse entre le fluide collé à l'aile et le fluide éloigné de l'aile est faible (et vice versa pour "High velocity" et différence de vitesse élevée)

C'est la position et la forme asymétrique du solide se déplaçant dans le fluide qui causera ces différences de la vitesse (fluide versus solide) à différents points sur la surface du solide. La forme générale de cette force est

$$|\vec{F}^P| = \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 A C_P , \quad (4.46)$$

avec  $C_P$  le coefficient de portance qui dépend de la géométrie du solide, de son orientation et de la viscosité du fluide. Ces coefficients sont en général évalués de façon expérimentale. La direction de la force est beaucoup plus difficile à déterminer, car elle dépend de la forme du solide et de sa vitesse.

#### 4.2.7 Autres forces résultant du mouvement de rotation

Pour un solide en rotation, la direction de la force de frottement est dans la direction de la vitesse linéaire du solide au point de contact avec la surface qui est une combinaison de la vitesse linéaire due à la rotation et de celle du centre de masse. Ceci peut faire en sorte que la force de frottement change la direction de déplacement du centre de masse. Ainsi, un cylindre en verre poussé en ligne droite avec un mouvement de rotation sur une surface plane (ex. téflon) se déplacera suivant une trajectoire curviligne. Ceci est dû au fait que le cylindre aura tendance à se déporter vers l'avant à cause de la force de frottement (normale du poids à la surface plus grande à l'avant). La force de frottement normale au mouvement du centre de masse à l'avant du cylindre sera alors supérieure à celle à l'arrière du cylindre donnant naissance à une accélération perpendiculaire à la vitesse de déplacement du centre de masse.

Pour la pierre au curling (peut être considérée comme étant un cylindre vide pour la surface de contact avec la glace)), la direction de la force est inversée (voir : [Curling](#)). Ici, le fait que la pierre ait tendance à se déporter vers l'avant à cause de la force de frottement réduit le frottement à l'avant (même si la normale du poids à la surface est plus élevée). La raison

est que la force plus grande vers l'avant fait fondre plus de glace et réduit considérablement le coefficient de frottement. Les coups de balai auront aussi un impact sur le frottement (réduction du coefficient de frottement), car la température de la glace sera plus élevée (fonte plus facile).

Cette pierre se déplace dans le plan  $x - y$ , la position et la vitesse de son centre de masse sont

$$\vec{r}_c(t) = (x(t), y(t), h/2)^T, \quad (4.47)$$

$$\vec{v}_c(t) = (v_x(t), v_y(t), 0)^T = |\vec{v}_c(t)|\hat{u}_c. \quad (4.48)$$

Sa vitesse angulaire est

$$\vec{\omega}(t) = (0, 0, \omega(t))^T = \omega(t)\hat{u}_\omega. \quad (4.49)$$

Le coefficient de frottement cinétique entre la pierre et la glace dépendra de la position du point du cylindre où il y a contact pierre-glace. On aura

$$\mu(T, \theta) = \mu_0(T)(1 - f_0 \sin \theta), \quad (4.50)$$

avec  $T$  la température de la glace. Ici,  $\theta$  est l'angle qu'un vecteur  $\vec{r}_g$  partant du centre de la pierre pour rejoindre un point sur le cylindre en contact avec la glace fait avec un vecteur unitaire  $\hat{u}_\perp$  perpendiculaire à  $\hat{u}_c$  et  $\hat{u}_\omega$

$$\hat{u}_\perp = (\hat{u}_c \times \hat{u}_\omega). \quad (4.51)$$

La force de frottement dépendra donc de l'angle  $\theta$  et on aura

$$\vec{F}(T) = F_\perp(T)\hat{u}_\perp + F_c(T)\hat{u}_c, \quad (4.52)$$

avec<sup>[6, 7]</sup>

$$F_\perp(T) = -\frac{\mu_0(T)f_0Mg}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin(\theta) (\sin[G(\theta, \omega, r, v)] + \sin[H(\theta, \omega, r, v)]), \quad (4.53)$$

$$F_c(T) = -\frac{\mu_0(T)Mg}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos[G(\theta, \omega, r, v)] + \cos[H(\theta, \omega, r, v)]). \quad (4.54)$$

où nous avons utilisé

$$G(\theta, \omega, r, v) = \arctan\left(\frac{r\omega \sin \theta}{v + r\omega \sin \theta}\right), \quad (4.55)$$

$$H(\theta, \omega, r, v) = \arctan\left(\frac{r\omega \sin \theta}{v - r\omega \sin \theta}\right). \quad (4.56)$$

Notez que le moment de force  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  peut être obtenu de la même façon et on peut écrire

$$\vec{\tau}(T) = \tau \hat{z}, \quad (4.57)$$

avec

$$\tau = -\frac{r\mu_0(T)Mg}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos[\theta - G(\theta, \omega, r, v)] - \cos[\theta + H(\theta, \omega, r, v)]) . \quad (4.58)$$

On peut simplifier ces forces et ce moment de force en utilisant

$$F_{\perp}(T) = -\frac{\mu_0(T)f_0Mgr\omega(t)}{2v(t)}, \quad (4.59)$$

$$F_c(T) = -\mu_0(T)Mg, \quad (4.60)$$

$$\tau = -\frac{\mu_0(T)Mgr^2\omega(t)}{2v(t)}. \quad (4.61)$$

Le coefficient de frottement diminue légèrement avec la température (décroissance linéaire)

$$\mu_0 \approx 0.0124(1 - k(T + 5)), \quad (4.62)$$

avec  $k \approx 0.01$  et  $T$  la température en degrés Celsius. Le facteur  $f_0 \approx 0.05$  représente la différence relative entre la force sur la surface à l'avant et à l'arrière de la pierre en contact avec la glace. Notez que l'explication théorique du comportement physique de la pierre de curling fait encore l'objet de discussions scientifiques.<sup>[6-10]</sup>

### 4.3 Moments de force et mouvement de rotation

Pour les solides, en plus de considérer les forces qui agissent uniformément sur l'objet (donc s'appliquent sur le centre de masse) et affectent son mouvement linéaire, certaines forces donneront aussi naissance à un moment de force qui affectera le mouvement de rotation de l'objet autour de son centre de masse (voir section 4.2.7). On a déjà vu la relation entre le moment angulaire  $\vec{L}$  et le moment de force  $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}, \quad (4.63)$$

avec

$$\vec{L}(t) = \mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t). \quad (4.64)$$

L'accélération angulaire est alors donnée par

$$\vec{\alpha} = \mathbf{I}^{-1}(\vec{\tau} - \tilde{\omega}\mathbf{I}\vec{\omega}). \quad (4.65)$$

Le moment de force  $\vec{\tau}$  résultant d'une force  $\vec{F}$  appliquée au point  $\vec{r}_F$  situé dans ou sur le solide est donné par

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F} = \vec{r}_{c,F} \times \vec{F}, \quad (4.66)$$

Ici,  $\vec{r}_c$  et le vecteur donnant la position du centre de masse du solide et  $\vec{r}_{c,F}$  le vecteur partant de  $\vec{r}_c$  pour atteindre le point où la force est appliquée. Ces relations nous permettent de trouver facilement l'accélération angulaire de l'objet autour de son centre de masse lorsque la force et la vitesse angulaire de l'objet sont connues.

### 4.3.1 Champs de force et rotation

#### Force électromagnétique

Ici, la présence ou l'absence d'un moment de force dépendra de la position de la charge dans le solide. Si le centre de masse  $\vec{r}_c$  et la position de la charge  $\vec{r}_q$  coïncident, la force électromagnétique ne produira aucun moment de force net. Sinon le moment de force sera

$$\vec{\tau}_1^e = k \frac{q_1 q_2 [(\vec{r}_{q,1} - \vec{r}_{c,1}) \times (\vec{r}_{q,1} - \vec{r}_{q,2})]}{|\vec{r}_{q,1} - \vec{r}_{q,2}|^3}, \quad (4.67)$$

$$\vec{\tau}_2^e = k \frac{q_1 q_2 [(\vec{r}_{q,2} - \vec{r}_{c,2}) \times (\vec{r}_{q,2} - \vec{r}_{q,1})]}{|\vec{r}_{q,2} - \vec{r}_{q,1}|^3}. \quad (4.68)$$

Donc, contrairement aux forces qui sont égales et opposées, le moment de force exercé par la charge 2 sur le solide 1 ( $\vec{\tau}_1^e$ ) sera différent du moment de force exercé par la charge 1 sur le solide 2 ( $\vec{\tau}_2^e \neq -\vec{\tau}_1^e$ ).

#### Force gravitationnelle

Comme la force gravitationnelle est appliquée uniformément à tous les points du solide, elle ne produit aucun moment de force net par rapport au centre de masse du solide. On aura donc

$$\vec{\tau}_1^G = \vec{\tau}_2^G = 0. \quad (4.69)$$

### 4.3.2 Ressort et rotation

Pour les ressorts (et les amortisseurs), on supposera que la force est appliquée au point de contact  $\vec{r}_F$  entre le ressort (amortisseur) et le solide dans la direction de compression du ressort (amortisseur).

$$\vec{\tau}^r = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^r, \quad (4.70)$$

$$\vec{\tau}^a = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^a. \quad (4.71)$$

Si  $(\vec{r}_F - \vec{r}_c)$  est parallèle à  $\vec{F}^{r/a}$ , on aura

$$\vec{\tau}^r = 0, \quad (4.72)$$

$$\vec{\tau}^a = 0. \quad (4.73)$$

Cette situation est parfois utile pour les collisions face à face entre des solides où on suppose que la force d'interaction est représentée par une combinaison de ressorts et d'amortisseurs. Les forces (action et réaction) sont alors dirigées selon l'axe de l'amortisseur ou du ressort et appliquées au point de contact entre les solides.

### 4.3.3 Frottement et rotation

Le frottement sec donnera naissance à un moment de force, car il s'applique à l'interface entre le solide et le plan sur lequel il se déplace. Ce moment de force par rapport au centre de masse du solide s'écrira

$$\vec{\tau}_c^f = (\vec{r}_F - \vec{r}_c) \times \vec{F}^f(\vec{r}). \quad (4.74)$$

Ici,  $\vec{r}_F$  corresponds au point où la force de frottement sec est appliquée.

Si on est en présence d'une force distribuée uniformément sur une surface  $S$  d'aire  $A$ , on utilisera

$$\vec{\tau}_c^f = \int_S (\vec{r} - \vec{r}_c) \times d\vec{F}^f \int_S \left[ (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \frac{\vec{F}^f}{|\vec{F}^f|} \right] \mu p d^2 r, \quad (4.75)$$

avec  $p$  la pression exercée par la composante normale du poids  $N$ . La pression est donnée par

$$p = N/A, \quad (4.76)$$

pour un solide plan d'aire  $A$  reposant sur une surface plane (pression uniforme).

Le frottement visqueux ne s'applique pas de façon uniforme sur un solide en rotation, même s'il est uniforme (une boule lisse par exemple). Il ne contribue pas au moment de force si le solide est complètement immergé dans le fluide et ne subit aucun mouvement de rotation et

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = 0. \quad (4.77)$$

Pour un solide qui n'est pas uniforme (un ballon de rugby lancé en diagonal) ou un solide en rotation (uniforme ou non), le moment de force ne sera pas uniforme et sera donné par

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = \int_S (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}^{\text{vis}}(\vec{r}) d^2 r, \quad (4.78)$$

avec  $\vec{p}^{\text{vis}}$  la pression qu'exerce la force visqueuse à chaque point de la surface.

Si un solide n'est que partiellement immergé dans un fluide (voir figure 4.10), la partie du solide à l'extérieur du fluide ne subit pas la même force de frottement visqueuse que la partie hors du fluide. On pourra donc écrire

$$\vec{\tau}^{\text{vis}} = \int_{S_{\text{fluide}}} (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}_{\text{fluide}}^{\text{vis}} d^2 r + \int_{S_{\text{air}}} (\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{p}_{\text{air}}^{\text{vis}} d^2 r. \quad (4.79)$$

Et on négligera souvent la contribution de l'air.

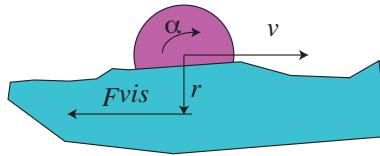


Figure 4.10: Moment de force visqueux

#### 4.3.4 Poussée d'Archimède et rotation

La poussée d'Archimède est reliée directement à la gravité et ne génère aucun moment de force net autour du centre de masse pour un solide complètement immergé dans un liquide. Si le solide est partiellement immergé (voir figure 4.11), un moment de force peut être généré.

$$\vec{\tau}^A = (\vec{r}_{c,\text{imm}} - \vec{r}_c) \times \vec{F}^A. \quad (4.80)$$

Ici,  $\vec{r}_{c,\text{imm}}$  correspond à la position du centre de masse de la partie immergée de l'objet.

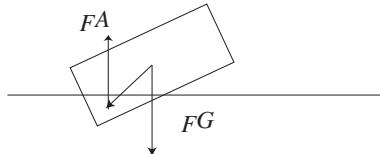


Figure 4.11: Force d'Archimède et rotation

#### 4.3.5 Effet Magnus et rotation

Pour un solide uniforme, la force générée par l'effet Magnus sera en général appliquée uniformément sur le solide et ne produira pas de moment de force net. Pour un solide non uniforme, la direction et l'intensité de l'effet Magnus changeront en chaque point du solide (la direction étant proportionnelle à la vitesse relative du solide et du fluide à chaque point dans l'espace) et celui-ci peut produire un moment de force.

#### 4.3.6 Portance

Comme la portance est proportionnelle à la vitesse relative du solide et du fluide, qui varie d'un point à l'autre de la surface du solide, elle engendre généralement un moment de force.

## 4.4 Roulement et glissement

### 4.4.1 Forces et moments de force

Dans le cas d'un objet sphérique (masse  $m$  et rayon  $R$ ) ou cylindrique (masse  $m$ , rayon  $R$  et longueur  $L$ ) en contact avec une surface :

- l'objet peut glisser sur la surface avec une vitesse  $\vec{v}_{\text{glissement}}$  ;
- l'objet peut aussi rouler sur la surface avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ .

La force de frottement est donnée par

$$\vec{F}^f = -\mu_c mg \frac{\vec{v}_{\text{glissement}}}{|\vec{v}_{\text{glissement}}|}. \quad (4.81)$$

Cette force de frottement engendre aussi un moment de force donné par

$$\vec{\tau}^f = (\vec{r}_p - \vec{r}_c) \times \vec{F}^f = \vec{r}_{p,c} \times \vec{F}^f, \quad (4.82)$$

avec  $\vec{r}_{p,c} = (0, 0, -R)$ ,  $\vec{r}_p$  est la position du point de contact entre l'objet et la surface sur laquelle il glisse (ici nous supposerons que c'est d'une sphère dont il s'agit).

Si l'objet roule sur la surface avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , il subit aussi un moment de force dû au roulement (voir figure 4.12). En effet, la surface exerce sur l'objet une force de

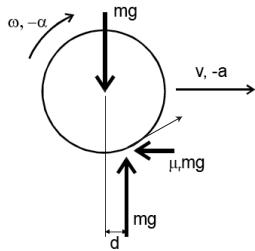


Figure 4.12: Moment de force pour le roulement

répulsion  $\vec{F}^{\text{répulsion}}$  proportionnelle à son poids  $mg$  dans la direction  $\hat{z}$  (troisième loi de Newton). Pour un objet qui roule, cette force est appliquée à un point situé à l'avant de l'objet. Cette position  $\vec{r}_{d,c}$  prise par rapport au centre de masse d'une sphère est (roulement dans la direction  $\hat{x}$ )

$$\vec{r}_{d,c} = (d, 0, -\sqrt{R^2 - d^2})^T. \quad (4.83)$$

Le moment de force résultant qui s'oppose au roulement est alors donné par

$$\tau^{\text{roulement}} = -\mu_d mgd \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}. \quad (4.84)$$

et s'oppose au mouvement de rotation. Pour une boule sur le tapis d'un billard,  $\mu_d \approx 1$  et  $d \approx 0.06$  cm.

Si le solide glisse et roule, le moment de force total est donné par

$$\tau_t = \tau^{\text{roulement}} + \tau^{\text{glissement}}. \quad (4.85)$$

On négligera parfois le moment de force dû au roulement, car il est beaucoup plus faible que celui dû au glissement. Lorsque la boule ne glisse plus, le seul moment de force qui contribue au ralentissement de l'objet est celui dû au roulement et

$$\tau_t = \tau^{\text{roulement}}. \quad (4.86)$$

#### 4.4.2 Transition roulement-glisser

Un objet qui roule sur la surface (sans glisser) avec une vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  voit son centre de masse se déplacer avec une vitesse linéaire effective résultant du roulement donnée par

$$\vec{v}_r = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{p,c}. \quad (4.87)$$

Si la vitesse du centre de masse d'un solide  $\vec{v}_c$  satisfait

$$\vec{v}_c \neq \vec{v}_r \quad (4.88)$$

alors l'objet glisse et roule. Si  $\vec{v}_c$  est dans la même direction que  $\vec{v}_r$ , le glissement cessera lorsque l'objet aura suffisamment accéléré ou ralenti pour que les deux vitesses deviennent identiques. Ensuite il continue à avancer avec une vitesse effective  $v_r$ .

Si  $\vec{v}_c$  est dans une direction opposée à  $\vec{v}_r$ , un changement dans la direction de déplacement de l'objet se produira si sa vitesse  $\vec{v}_c$  devient nulle (effet du frottement). Il change alors de direction et accélère en glissant jusqu'à ce que  $\vec{v}_c$  et  $\vec{v}_r$  deviennent identiques. À ce moment, l'objet commence à rouler sans glisser.

#### 4.4.3 Application à la boule de billard

Une boule de rayon  $R$  et de masse  $m$  ayant initialement une vitesse linéaire

$$\vec{v}(t_0) = (v_x(t_0), 0, 0), \quad (4.89)$$

se déplace initialement en glissant (pas de mouvement de rotation) sur une surface ayant un coefficient de frottement cinétique  $\mu_c$  (voir figure 4.13). La vitesse initiale de rotation de la boule autour de son centre de masse est

$$\vec{\omega}_c(t) = (0, \omega_y(t), 0)^T, \quad (4.90)$$

et la position initiale de son centre de masse est

$$\vec{r}_c(t_0) = (x(t_0), y(t_0), R)^T. \quad (4.91)$$

Ici, on vous demande de proposer une méthode pour déterminer à quel moment la boule cessera de glisser et d'évaluer la vitesse angulaire de rotation à ce moment.

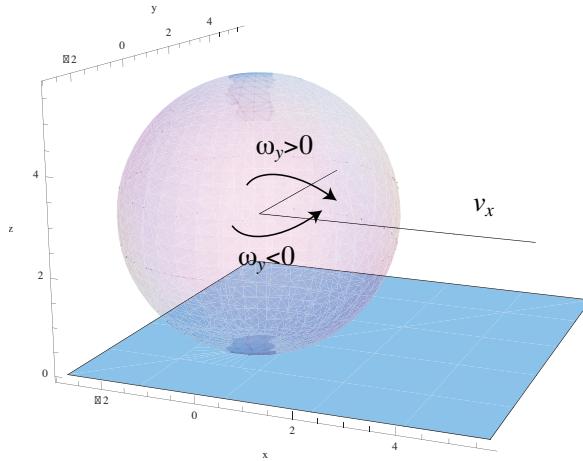


Figure 4.13: Boule au billard

Les équations du mouvement à résoudre sont

$$\vec{a}_c = d\vec{v}_c(t)/dt, \quad (4.92)$$

$$\vec{v}_c(t) = d\vec{r}_c(t)/dt, \quad (4.93)$$

$$\vec{\alpha} = d\vec{\omega}_c(t)/dt, \quad (4.94)$$

$$\vec{\omega}_c = d\vec{\Omega}_{c,p}(t)/dt, \quad (4.95)$$

avec (pour une sphère le terme provenant de  $d\mathbf{I}/dt = 0$ )

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}_f}{m}, \quad (4.96)$$

$$\vec{\alpha}_c = (\mathbf{I})^{-1}\vec{\tau}_t. \quad (4.97)$$

La force  $\vec{F}_{\text{roulement}}$  n'a pas d'impact sur  $\vec{a}_c$ , car elle est dirigée dans la direction  $\hat{z}$ . On peut déterminer si la boule roule ou glisse en comparant  $\vec{v}_r(t_r)$  et  $\vec{v}_c(t_r)$ . Ainsi, lorsque  $|\vec{v}_c(t_r) - \vec{v}_r(t_r)| = 0$ , la vitesse relative entre la boule et le plan est nulle. À ce moment, la boule commence à rouler sans glisser. La vitesse de déplacement de son centre de masse est alors donnée par  $\vec{v}_r(t_r)$ .

#### 4.4.4 Procédure de simulation

Tant que la boule glisse, on doit résoudre les équations du mouvement en utilisant les équations qui suivent.

1. L'accélération linéaire qu'elle subit est due à la force de frottement sec (coefficient de frottement cinétique  $\mu_c$ ) donnée par

$$\vec{a}_c(t) = -\frac{\mu_c mg \hat{d}(t)}{m}. \quad (4.98)$$

Le vecteur  $d$ , qui est défini par

$$\hat{d}(t) = \frac{(\vec{v}_c(t) - \vec{v}_r(t))}{|(\vec{v}_c(t) - \vec{v}_r(t))|}, \quad (4.99)$$

nous indique la direction de l'accélération (opposé à la vitesse nette entre le point de la balle touchant la surface et le plan).

2. L'accélération angulaire qu'elle subit est due au moment de la force de frottement total (coefficient de frottement cinétique  $\mu_c$  et  $\mu_d = 1$ ) appliqué au point  $\vec{r}_{c,p}(t) = (0, 0, R)^T$

$$\vec{\alpha}_c = -\frac{5}{2mr^2} \left[ mgd \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} + \mu_c mg (\vec{r}_{c,p}(t) \times \hat{d}(t)) \right], \quad (4.100)$$

car

$$\mathbf{I}^{-1} = \frac{5}{2mr^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.101)$$

Si on décide de résoudre les équations du mouvement en utilisant une méthode de numérique, on choisira un intervalle de temps  $\Delta t$  suffisamment court pour obtenir une bonne précision. On déterminera donc successivement la solution à

$$t_i = t_0 + i\Delta t = t_{i-1} + \Delta t. \quad (4.102)$$

À chaque intervalle de temps, on évaluera les deux paramètres suivants

$$b_1(t_i) = \vec{v}_c(t_{i-1}) \cdot \vec{v}_c(t_i), \quad (4.103)$$

$$b_2(t_i) = \frac{\vec{d}(t_i) \cdot \vec{d}(t_{i-1})}{|\vec{d}(t_i) \cdot \vec{d}(t_{i-1})|}. \quad (4.104)$$

Ici,  $b_1(t_i)$  nous indique si la vitesse du centre de masse a changé de direction entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$  alors que  $b_2(t_i)$  nous indique si la vitesse relative entre le point de contact de la boule sur le plan et le plan a changé de direction entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$ .

Dans les cas où  $b_1(t_i) < 0$ , la balle s'est alors certainement arrêtée à un temps  $t_{i-1} < t_r < t_i$ . On doit donc reprendre la dernière simulation de  $t_{i-1}$  à  $t_i$  en utilisant des pas de temps plus courts pour obtenir le plus précisément possible le temps de l'arrêt. On reprend ensuite les simulations à  $t_r$  en supposant que la boule glisse et roule (la direction de la boule s'est cependant inversée).

D'autre part, si  $b_1(t_i) > 0$  et  $b_2(t_i) < 0$ , la vitesse relative de déplacement du point d'intersection entre la balle et le plan a changé de signe. Ceci implique que la boule doit certainement avoir cessé de glisser à un temps  $t_a$  dans l'intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$ . On doit donc reprendre la dernière simulation de  $t_{i-1}$  à  $t_i$  en utilisant des pas de temps plus courts pour obtenir le plus précisément possible le temps où  $b_2(t_a) = 0$ . On reprend ensuite les simulations en supposant que la boule roule uniquement (la boule se dirige toujours dans la même direction).

Finalement, dans les situations où  $b_1(t_i) > 0$  et  $b_2(t_i) > 0$  la boule continue à glisser. On enregistre l'information associée à ce temps et on résout les équations du mouvement avec glissement pour le prochain intervalle de temps.

À partir de temps  $t_a$ , la boule ne fait que rouler. Le déplacement de son centre de masse sera alors contrôlé exclusivement par son mouvement de rotation.

$$\vec{v}_r = -\vec{\omega}_c(t) \times \vec{r}_{c,p}(t). \quad (4.105)$$

L'accélération angulaire, quant à elle, est due au moment de la force de frottement qui s'oppose au roulement sur une surface horizontale

$$\vec{\alpha} = -\left(\frac{5\mu_d g d}{2r^2}\right) \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}. \quad (4.106)$$

On doit alors résoudre simultanément

$$d\vec{\omega}_c(t)/dt = \vec{\alpha}, \quad (4.107)$$

$$d\vec{\Omega}_{c,p}(t)/dt = \vec{\omega}_c. \quad (4.108)$$

On débutera cette dernière partie de la simulation à  $t_a$ .

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la forme que peuvent prendre les forces et les moments de force requis pour un ensemble de simulations multimédia. Dans le prochain chapitre, nous étudierons la dynamique des collisions. Deux méthodes seront principalement étudiées: la méthode des forces et la méthode des conditions initiales. Nous présenterons aussi des algorithmes numériques qui peuvent être utilisés pour détecter les collisions entre des solides en mouvement.

## Chapitre 5

### Collisions

#### 5.1 Introduction

Nous avons étudié dans les chapitres précédents le déplacement d'un solide dans l'espace sous l'effet d'une force ou d'un moment de force. Les collisions que nous avons traitées étaient principalement utilisées pour terminer la course du solide en mouvement à la suite d'une collision avec un objet qui demeurait immobile (le solide entre en contact avec le sol, une cible ...). Ici, nous nous intéresserons aux résultats de ces collisions sachant que des solides qui entrent en contact continueront de se déplacer après une collision.<sup>[11, 12]</sup>

Les collisions de deux solides (dont au moins un est en mouvement) peuvent être interprétées en termes de forces d'interaction. Ainsi, un ballon de soccer qui touche le sol après avoir parcouru une certaine distance dans l'espace subira une force de compression dont l'intensité et la durée seront proportionnelles à la pression interne du ballon et à la rigidité du sol (voir figure 5.1). Le ballon exercera donc une force sur le sol au point de contact et l'énergie de compression emmagasinée dans le ballon propulsera celui-ci de nouveau dans l'espace à mesure qu'il retrouvera sa forme originale. L'impact du ballon créera aussi une dépression dans le sol lors de la collision. Comme le sol est partiellement élastique, il tentera de reprendre sa position initiale et exercera en retour une force de réaction qui contribuera au mouvement de rebond du ballon.

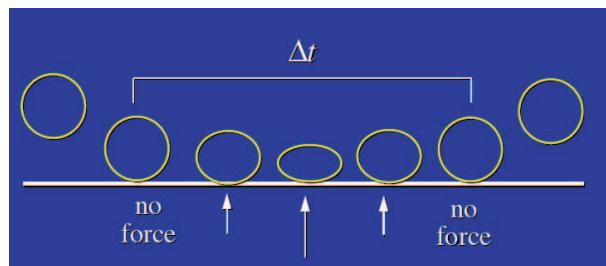


Figure 5.1: Collision d'un ballon avec le sol

Analyser la dynamique des objets qui entrent en collision est donc loin d'être simple. Il faut premièrement déterminer l'ensemble des forces impliquées dans la collision et résoudre

les équations du mouvement afin de déterminer la trajectoire des solides durant la collision. Notez que cette description s'applique aussi bien au mouvement de déplacement linéaire des solides qu'à leur mouvement de rotation, bien que dans ce cas le problème soit beaucoup plus complexe, car les solides ne sont pas nécessairement uniformes. De plus, on ne peut plus considérer les solides qui entrent en collision comme s'ils étaient indépendants, puisque chaque solide peut influencer le comportement de tous les autres (voir figure 5.2).

Deux solides de formes arbitraires en mouvement qui entrent en collision.

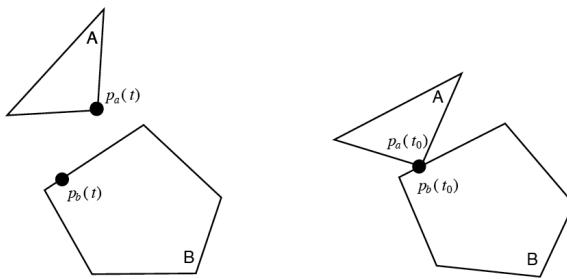


Figure 5.2: Deux solides de formes arbitraires en mouvement qui entrent en collision

Donc dans la première section de ce chapitre le principe d'analyse dynamique des collisions du point de vue des forces qui s'exercent sera présenté. Pour le physicien qui veut comprendre les phénomènes qui sont mis en cause lors de ces collisions, ce type d'étude est le plus intéressant. Pour l'ingénieur qui désire déterminer les déformations que subissent les différents solides lors de collisions, il est aussi nécessaire de recourir à ce type d'analyse. Cependant, ce qui intéresse l'observateur dans la majorité des cas c'est ce qui se passe avant et après la collision, et non pas durant la collision (sauf si l'on doit payer pour les réparations). La raison majeure pour ce manque d'intérêt est évidente : la durée de l'impact et les déformations que subissent les solides sont souvent trop faibles pour qu'elles soient perçues à l'oeil nu (c'est d'ailleurs le cas des collisions entre les boules au billard).

Nous considérerons aussi une technique de simulation qui fait abstraction des forces mises en jeu pendant la collision. Cette méthode ne s'intéresse pas à ce qui se passe dans l'intervalle de temps pendant lequel les solides sont en contact, mais au comportement des solides après la collision. Ceci simplifie considérablement l'analyse de la trajectoire des solides, car, à aucun moment, on n'a à résoudre un problème de dynamique impliquant des solides couplés.

La réponse des solides à la collision s'interprète alors grâce à de nouvelles conditions initiales (vitesses linéaire et angulaire et positions linéaire et angulaire du solide) qui sont imposées instantanément aux équations de la dynamique associées à chaque solide après la collision. Comme de raison, cette méthode s'applique difficilement lorsque la durée de l'interaction est trop longue à moins de retarder la simulation de façon à tenir compte de ce délai. Elle suppose aussi que les déformations permanentes que subissent les solides lors de

la collision sont négligeables et qu'elles n'ont aucun impact sur le reste de la simulation.

Ainsi, les dépressions laissées par le ballon de soccer sur le sol sont faibles (notre critère est donc satisfait). Les dépressions laissées par un bâton sur une balle de baseball sont beaucoup plus importantes, cependant elles n'ont aucun intérêt pour les joueurs, car la durée du contact est très courte (notre critère est encore satisfait). Notez que la déformation de la balle de baseball a par ailleurs un intérêt certain pour l'arbitre qui la retirera du jeu s'il juge qu'elle est trop déformée (ou trop molle).

En résumé, les avantages de la méthode des forces sont de permettre la simulation du comportement de la collision de façon plus physique tout en décrivant les déformations des solides lors de la collision. Elle permet aussi d'éviter l'introduction de délais dans la simulation lors de collisions en douceur (lentes). Ses inconvénients sont qu'il est difficile de définir les forces et le temps d'interaction et extrêmement difficile de simuler les mouvements de rotation des solides. Cette méthode implique aussi le couplage des équations de la dynamique pour les solides lorsqu'ils sont en contact ce qui demande des méthodes de résolution numériques très robustes.

Les avantages de la méthode des conditions initiales sont de permettre le découplage des équations de la dynamique associées à chaque solide tout en permettant de résoudre les difficultés associées aux mouvements de rotation des solides. En général, cette méthode est aussi précise que la méthode des forces. Ses inconvénients sont qu'elle demande l'introduction de délais dans la simulation (intervalles de temps où rien ne se passe). En outre, elle est moins satisfaisante du point de vue des physiciens et des ingénieurs qui désirent connaître l'ampleur des déformations que subissent les solides.

## 5.2 Méthode des forces

Pour illustrer la méthode des forces, nous considérerons un cas très simple : deux boules rigides  $a$  et  $b$  de rayon  $r_a$  et  $r_b$  qui se déplacent dans l'espace selon l'axe des  $x$  sans tourner sur elles-mêmes et qui entrent en collision face à face au temps  $t = t_i$  (voir la figure 5.3).

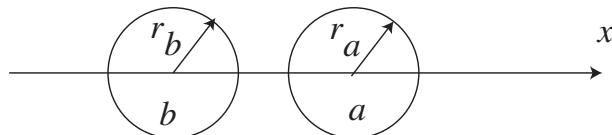


Figure 5.3: Deux boules se dirigeant l'une vers l'autre en 1D

Au moment de la collision, le ressort utilisé pour simuler l'interaction entre les deux solides n'est pas comprimé (voir figure 5.4). Son extension est donc  $L_r(t_i) = r_a(t_i) + r_b(t_i)$ . Au temps  $t > t_i$ , les deux boules se déforment sans recouvrement ce qui correspond à un ressort comprimé (voir figure 5.5). Si les centres de masse de chacun des corps sont respectivement

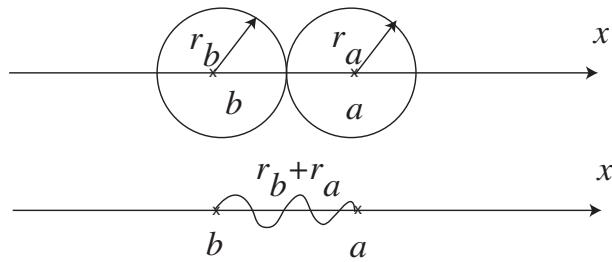


Figure 5.4: Deux boules au moment de la collision

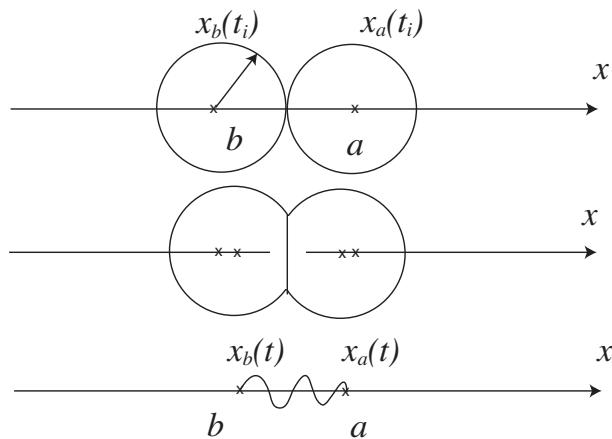


Figure 5.5: Deux boules durant la collision

$x_a(t)$  et  $x_b(t)$  et ceux-ci se déplacent avec des vitesses  $v_{x,a}$  et  $v_{x,b}$ , on aura

$$L_r(t_i) = r_a + r_b = |x_a(t_i) - x_b(t_i)|, \quad (5.1)$$

et l'étirement du ressort au temps  $t$  sera

$$L_r(t) = |x_a(t) - x_b(t)|. \quad (5.2)$$

Du point de vue de la physique ce sont les forces intermoléculaires qui assurent la cohésion de chacune des boules. Lors de la collision, les champs intermoléculaires des deux boules s'interpénètrent menant ainsi à leur déformation temporaire. Si la collision est élastique, les champs intermoléculaires associés aux deux boules reprennent leur forme originale après un certain temps et les boules se repoussent. Dans le cas d'une collision inélastique (énergie cinétique non conservée), la déformation des champs intermoléculaires des boules est si importante que certaines molécules des boules sont déplacées menant à une déformation permanente. Il est aussi possible qu'une partie de l'énergie de la collision soit transmise aux molécules des boules qui ainsi s'échauffent.

En mécanique classique, on simule cette interaction entre les champs moléculaires des boules par une combinaison de ressort de constante de rappel  $k_r$ , et d'amortisseur de constante d'amortissement  $k_a$ . La force de rappel exercée par le solide  $a$  sur le solide  $b$  est

$$F_{r,ab}(t) = +k_r(L_r(t) - L_r(t_i)) \frac{x_a(t) - x_b(t)}{|x_a(t) - x_b(t)|}, \quad (5.3)$$

une force égale et opposée est exercée sur  $b$  par la boule  $a$

$$F_{r,ba}(t) = -F_{ab}(t) = +k_r(L_r(t) - L_r(t_i)) \frac{x_b(t) - x_a(t)}{|x_b(t) - x_a(t)|}. \quad (5.4)$$

De la même façon, la force d'amortissement de la boule  $b$  sur  $a$  est donnée par

$$F_{a,ab}(t) = -k_a(v_{x,a}(t) - v_{x,b}(t)), \quad (5.5)$$

et la force d'amortissement de la boule  $a$  sur  $b$  étant

$$F_{a,ba}(t) = -k_a(v_{x,b}(t) - v_{x,a}(t)). \quad (5.6)$$

Pour une collision élastique  $k_a = 0$ . Ces forces agiront tant que  $L_r(t) < L_r(t_i)$ .

La position d'équilibre des ressorts (et amortisseurs) correspond toujours à la situation où les solides ne sont pas déformés. Ceci corresponds au temps  $t = t_i$  et au temps  $t = t_f > t_i$  tel que

$$L_r(t_f) = L_r(t_i). \quad (5.7)$$

À partir de ce moment, on supposera que les solides ne sont plus en contact et donc que les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre deviennent nulles.

Ici, on a supposé que les constantes de rappel (ou d'amortissement) entre les deux boules étaient identiques. Si les deux boules ont des compositions différentes, les constantes de rappel et d'amortissement seront généralement différentes ( $k_{r,a} \neq k_{r,b}$  et  $k_{a,a} \neq k_{a,b}$ ) et on doit utiliser des constantes de rappel et d'amortissement équivalentes données par

$$\frac{1}{k_{r,eq}} = \frac{1}{k_{r,a}} + \frac{1}{k_{r,b}}, \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{k_{a,eq}} = \frac{1}{k_{a,a}} + \frac{1}{k_{a,b}}. \quad (5.9)$$

Les équations de la dynamique à résoudre pour  $t_i < t < t_f$  deviennent alors

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{v}_{x,b}(t)/dt = \frac{1}{m_b} \left( k_r(x_a(t) - x_b(t) - L_r(t_i)) \frac{x_a(t) - x_b(t)}{|x_a(t) - x_b(t)|} \right. \\ \left. - k_a(v_{x,b}(t) - v_{x,a}(t)) + \text{autres forces} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$dx_b(t)/dt = v_{x,b}(t), \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{v}_{x,a}(t)/dt = \frac{1}{m_a} \left( k_r(x_b(t) - x_a(t) - L_r(t_i)) \frac{x_b(t) - x_a(t)}{|x_b(t) - x_a(t)|} \right. \\ \left. - k_a(v_{x,a}(t) - v_{x,b}(t)) + \text{autres forces} \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$dx_a(t)/dt = v_{x,a}(t). \quad (5.13)$$

Des conditions initiales, qui correspondent à la vitesse et la position du centre de masse de chaque boule tout juste avant la collision, sont aussi requises (à  $t = t_i$ ).

Comme on le voit, même pour le cas le plus simple correspondant à une collision élastique en 1D (aucun mouvement de rotation), l'utilisation de la méthode des forces mène à des équations différentielles couplant directement les deux boules. C'est donc une méthode qui est peu pratique lorsque l'on veut analyser des situations de la vie courante (en 3D avec des solides en rotation).

### 5.3 Méthode des conditions initiales

La méthode des conditions initiales peut être dérivée des équations de la cinématique

$$\frac{d\vec{p}_{a/b}(t)}{dt} = \frac{d(m_{a/b}\vec{v}_{a/b}(t))}{dt} = \vec{F}_{a/b}(t), \quad (5.14)$$

$$\frac{d\vec{L}_{a/b}(t)}{dt} = \frac{d(\mathbf{I}_{a/b}\vec{\omega}_{a/b}(t))}{dt} = \vec{\tau}_{a/b}(t) = \vec{r}_{a/b,p}(t) \times \vec{F}_{a/b}(t), \quad (5.15)$$

où  $\vec{p}_{a/b}(t)$  est la quantité de mouvement du centre de masse des objets ( $a$  ou  $b$ ),  $\vec{L}_{a/b}(t)$  est le moment cinétique des objets autour de leur centre de masse respectif (système local) et  $\vec{r}_{a/b,p}$  est la position du point où la force  $\vec{F}_{a/b}$  est appliquée par rapport au centre de masse des objets  $a$  et  $b$  respectivement. Ici, nous avons supposé que la masse, la position du centre de masse et le moment d'inertie des solides sont constants ce qui implique que les solides ne subissent aucune déformation durant la collision.

La première équation (en fait deux équations, une pour  $a$  et une seconde pour  $b$ ) sera intégrée pour obtenir

$$\vec{p}_{a/b}(t_f) - \vec{p}_{a/b}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{a/b}(t) dt = \vec{J}_{a/b}, \quad (5.16)$$

avec

$$\vec{J}_{a/b} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{a/b}(t) dt, \quad (5.17)$$

le vecteur impulsion.

Pour le mouvement de rotation, on utilisera

$$\vec{L}_{a/b}(t_f) - \vec{L}_{a/b}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} (\vec{r}_{a/b,p} \times \vec{F}_{a/b}(t)) dt = \vec{r}_{a/b,p} \times \vec{J}_{a/b}, \quad (5.18)$$

en supposant que  $\vec{r}_{a/b,p}$  ne change pas durant la collision (collision instantanée).

Ainsi, si on connaît la force qui agit à chaque instant et la période d'action de la force (donc l'impulsion), on pourra déterminer par simple intégration les vitesses linéaire et angulaire finales de chaque solide une fois le contact entre eux rompu.

Ces relations sont très utiles, cependant elles cachent plusieurs problèmes reliés au suivi de la trajectoire de chaque objet :

- même si on connaît la vitesse finale des solides, on ne connaît pas leurs positions respectives pendant l'intervalle de temps  $t_i < t < t_f$  ;
- en général, aussi bien la force que son temps d'action sont inconnus.

La méthode des conditions initiales propose une solution simple à ces deux problèmes.

### 5.3.1 Position des solides après la collision

On peut premièrement supposer que les solides sont très rigides et que leurs déformations respectives dues à la collision sont faibles. Dans ce cas, la durée de la collision est généralement courte et on peut supposer que la position finale de chaque solide après la collision est identique à sa position initiale.

Si la déformation des solides durant la collision est plus importante ou que le temps d'interaction entre les solides est long et mesurable, on supposera que le système composé des deux solides continuera de se déplacer durant la collision à une vitesse  $\vec{v}_s$  qui assurera la conservation de la quantité de mouvement du système en tout temps

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m_b + m_a} (\vec{p}_b(t_i) + \vec{p}_a(t_i)). \quad (5.19)$$

Une relation semblable peut être obtenue pour la vitesse angulaire en utilisant le principe de conservation du moment cinétique total

$$\vec{\omega}_s = (\mathbf{I}_b + \mathbf{I}_a)^{-1} (\vec{L}_b(t_i) + \vec{L}_a(t_i)). \quad (5.20)$$

Notez qu'ici les moments cinétiques doivent être pris par rapport à un centre de masse commun (les deux objets se déplacent comme s'ils étaient collés l'un à l'autre).

On supposera aussi que chacun des solides reprend sa forme après la collision. La position du centre de masse de chaque solide après la collision sera alors donnée par

$$\vec{r}_b(t_f) = \vec{r}_b(t_i) + \vec{v}_s \Delta t, \quad (5.21)$$

$$\vec{r}_a(t_f) = \vec{r}_a(t_i) + \vec{v}_s \Delta t, \quad (5.22)$$

$$\vec{\Omega}_b(t_f) = \vec{\Omega}_b(t_i) + \vec{\omega}_s \Delta t, \quad (5.23)$$

$$\vec{\Omega}_a(t_f) = \vec{\Omega}_a(t_i) + \vec{\omega}_s \Delta t, \quad (5.24)$$

les deux solides se déplaçant en tandem à la vitesse  $\vec{v}_s$  et avec la vitesse angulaire  $\vec{\omega}_s$  (les rotations se font par rapport au centre commun des deux objets).

Notons que lorsque l'un des solides ne peut bouger (un mur), on supposera que  $\vec{v}_b$  correspond à la vitesse du solide dans une direction parallèle à la surface avant la collision (voir figure 5.1).

### 5.3.2 Vitesse des solides après la collision

La vitesse respective de chacun des solides après la collision sera donnée par une relation empirique qui s'appelle **loi des collisions sans frottement**. Considérons une collision entre deux solides  $a$  et  $b$  au point  $p$  (voir figure 5.6).

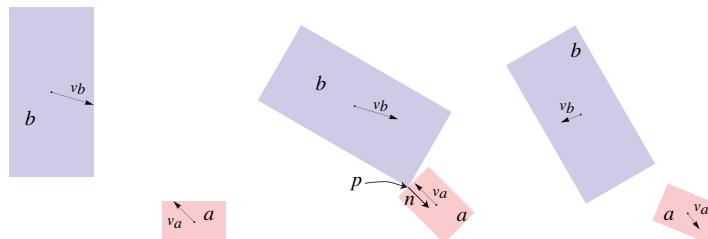


Figure 5.6: Collision de deux solides

Les vitesses relatives du point  $p$  appartenant aux deux objets avant et après la collision sont (vitesse linéaire totale du point  $p$ )

$$\vec{v}_{a-b}(t_i) = \vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i), \quad (5.25)$$

$$\vec{v}_{a-b}(t_f) = \vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f), \quad (5.26)$$

avec

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + (\vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t)), \quad (5.27)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + (\vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t)). \quad (5.28)$$

On peut alors évaluer les composantes de ces vitesses qui sont normales à la surface de contact du solide  $a$  avant ( $v_r^-$ ) et après ( $v_r^+$ ) la collision en utilisant

$$v_r^- = \hat{n} \cdot \vec{v}_{a-b}(t_i) = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i)) , \quad (5.29)$$

$$v_r^+ = \hat{n} \cdot \vec{v}_{a-b}(t_f) = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f)) . \quad (5.30)$$

où  $\hat{n}$  est la normale unitaire dirigée vers l'intérieur du solide  $a$ .

La loi des collisions sans frottement correspond tout simplement à supposer que

$$v_r^+ = -\epsilon v_r^- , \quad (5.31)$$

où  $0 \leq \epsilon \leq 1$  est le coefficient de restitution qui est mesuré expérimentalement et dépend de la composition des solides. Par définition :

- $\epsilon = 1$  implique une collision élastique (sans perte d'énergie cinétique) ;
- $\epsilon = 0$  implique que les deux solides demeurent collés après la collision (perte maximale d'énergie cinétique).

Pour simplifier le problème, on étudiera premièrement le cas où les mouvements de rotation sont négligés. On aura alors

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) , \quad (5.32)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) . \quad (5.33)$$

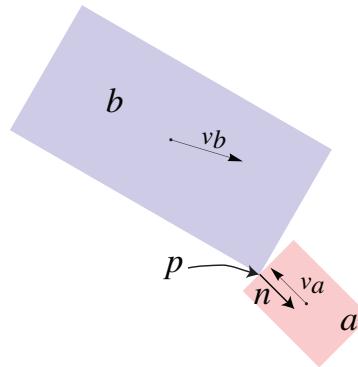


Figure 5.7: Collision de deux solides au point  $\vec{p}$

La loi des collisions sans frottement est toutefois insuffisante pour déterminer complètement les vitesses finales de chacun des solides (elle ne donne que les vitesses relatives finales). Retournerons donc à la définition du vecteur impulsion. Dans le cas d'un solide sans mouvement de rotation, la force exercée par le solide  $b$  sur le solide  $a$  devra nécessairement

être dans la direction  $\hat{n}$  qui est la normale entrante à la surface de  $a$  au point de contact  $p$  (voir figure 5.7). On aura donc

$$\frac{\vec{J}}{m_a} = \frac{\hat{n} j}{m_a} = \vec{v}_a(t_f) - \vec{v}_a(t_i). \quad (5.34)$$

Comme la force qui agit sur la boule  $b$  est identique à celle qui agit sur la boule  $a$ , mais dans la direction opposée, on aura aussi

$$-\frac{\vec{J}}{m_b} = -\frac{\hat{n} j}{m_b} = \vec{v}_b(t_f) - \vec{v}_b(t_i). \quad (5.35)$$

La prochaine étape consiste à réaliser que l'impulsion n'affectera que la composante de la vitesse dans la direction de la normale. Évaluons donc le produit scalaire de l'impulsion avec  $\hat{n}$

$$\frac{j}{m_a} = \hat{n} \cdot (\vec{v}_a(t_f) - \vec{v}_a(t_i)), \quad (5.36)$$

$$-\frac{j}{m_b} = \hat{n} \cdot (\vec{v}_b(t_f) - \vec{v}_b(t_i)). \quad (5.37)$$

En prenant la différence de ces deux équations, on obtient

$$j \left( \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \right) = v_r^+ - v_r^- . \quad (5.38)$$

Comme

$$v_r^+ = -\epsilon v_r^-, \quad (5.39)$$

alors

$$j = -\frac{(1+\epsilon)v_r^-}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}}. \quad (5.40)$$

On possède alors l'information nécessaire pour déterminer les vitesses finales de chaque solide. En utilisant les équations 5.34 et 5.35, on obtient

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n} j}{m_a}, \quad (5.41)$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\hat{n} j}{m_b}. \quad (5.42)$$

Notez que le terme de signe positif correspond au solide vers l'intérieur duquel la normale est dirigée. La vitesse relative est alors négative (pour  $\hat{n}$  vers l'intérieur de  $a$ , la vitesse relative qui correspond à  $\hat{n} \cdot (\vec{v}_a - \vec{v}_b)$  est négative).

Pour les collisions entre boules de masses identiques (voir figure 5.8), les mêmes relations peuvent être utilisées. Ainsi

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n}j}{m}, \quad (5.43)$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\hat{n}j}{m}, \quad (5.44)$$

avec la normale vers l'intérieur de la boule  $a$  et

$$j = -\frac{(1+\epsilon)}{2} m v_r^-, \quad (5.45)$$

$$v_r^- = \hat{n} \cdot (\vec{v}_a(t_i) - \vec{v}_b(t_i)). \quad (5.46)$$

Si la boule  $b$  est au repos, le tout se simplifie à la forme

$$j = -\frac{(1+\epsilon)}{2} m (\hat{n} \cdot \vec{v}_a(t_i)), \quad (5.47)$$

et

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n}j}{m}, \quad (5.48)$$

$$\vec{v}_b(t_f) = -\frac{\hat{n}j}{m}. \quad (5.49)$$

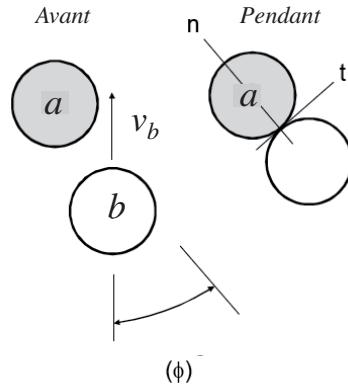


Figure 5.8: Collision entre boules de masses identiques

Pour une collision entre une boule ( $a$ ) de masse  $m = m_a$  et un mur, on utilisera (le mur ne peut bouger ce qui correspond à  $m_b = \infty$ )

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n}_a j}{m_a}, \quad (5.50)$$

$$j = -(1+\epsilon) m_a (\hat{n}_a \cdot \vec{v}_a(t_i)). \quad (5.51)$$

la normale étant dirigée vers l'intérieur de la boule en mouvement (*a*). Si on considère une normale se dirigeant vers l'intérieur du mur, on aura

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) - \frac{\hat{n}_b j}{m_a}, \quad (5.52)$$

$$j = (1 + \epsilon) m_a (\hat{n}_b \cdot \vec{v}_a(t_i)), \quad (5.53)$$

les deux façons de précéder donnant les mêmes résultats, car  $\hat{n}_a = -\hat{n}_b$ .

Lorsque le solide a un mouvement de rotation, il faut tout simplement remplacer la vitesse de déplacement linéaire par la vitesse de déplacement totale au point d'intersection

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + (\vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t)), \quad (5.54)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + (\vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t)), \quad (5.55)$$

tel que décrit plus tôt.

### 5.3.3 Frottement

Si les coefficients de frottement entre les deux solides au point de contact sont  $\mu_s$  (statique) et  $\mu_c$  (cinétique), le problème devient plus compliqué, car il faut aussi prendre en compte la composante de l'impulsion dans une direction  $\hat{t}$  tangentielle à la surface et dans le plan formé par  $\vec{v}_r^- = \vec{v}_a(t_i) - \vec{v}_b(t_i)$  et  $\hat{n}$ . On peut alors définir

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_r^- \times \hat{n}}{|\vec{v}_r^- \times \hat{n}|}, \quad (5.56)$$

$$\hat{t} = \hat{n} \times \vec{u}. \quad (5.57)$$

Notez que lorsque  $\vec{v}_r^-$  et  $\hat{n}$  sont parallèles, le terme de frottement est absent (la force tangentielle due au frottement est nulle).

L'impulsion dans la direction  $\hat{t}$  est alors reliée à l'impulsion normale par la relation

$$j_t = -\mu \hat{t} j, \quad (5.58)$$

C'est un peu comme si la force à la source de  $j$  agit comme un poids  $|\vec{P}|$  générant donc une force de frottement proportionnelle à  $\mu |\vec{P}|$ . En fait, pour être plus précis, il faut utiliser

$$j_t = \begin{cases} -\frac{|\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-|}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}} & \text{si } \mu_s(1 + \epsilon) |\vec{v}_r^-| > |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| \\ \frac{\mu_c(1 + \epsilon) \vec{v}_r^-}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}} & \text{sinon} \end{cases}. \quad (5.59)$$

Le premier terme de cette équation correspond au frottement statique (vitesse relative entre les deux objets dans la direction  $\hat{t}$  est nulle après la collision) et le second au frottement

cinétique. On obtient finalement

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n}j + \hat{t}j_t}{m_a}, \quad (5.60)$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\hat{n}j + \hat{t}j_t}{m_b}. \quad (5.61)$$

### 5.3.4 Effets angulaires

Ici, en plus de considérer l'effet de la force (représentée par l'impulsion) sur la vitesse de translation du centre de masse, il faut aussi considérer l'effet du moment de force (moment d'impulsion) résultant sur le mouvement de rotation du solide.

$$\vec{\omega}_a(t_f) = \vec{\omega}_a(t_i) + j\mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \hat{n}), \quad (5.62)$$

$$\vec{\omega}_b(t_f) = \vec{\omega}_b(t_i) - j\mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \hat{n}). \quad (5.63)$$

Ici, on travaille toujours dans le système de coordonnées globales du système (en supposant que  $\vec{j} = j\hat{n}$  et que  $dI_{a/b}/dt = 0$ ).

En considérant la vitesse linéaire totale, incluant la vitesse du point de contact de chaque objet due à son mouvement de rotation, on aura donc

$$\vec{v}_{a,p}(t_f) = \vec{v}_{a,p}(t_i) + j\left(\frac{\hat{n}}{m_a} + \mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \hat{n}) \times \vec{r}_{a,p}\right), \quad (5.64)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t_f) = \vec{v}_{b,p}(t_i) - j\left(\frac{\hat{n}}{m_b} + \mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \hat{n}) \times \vec{r}_{b,p}\right), \quad (5.65)$$

car

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + (\vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t)), \quad (5.66)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + (\vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t)). \quad (5.67)$$

Nous utiliserons encore

$$\nu_r^+ = -\epsilon \nu_r^-, \quad (5.68)$$

où  $\nu_r^-$  et  $\nu_r^+$  sont donnés par

$$\nu_r^- = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i)), \quad (5.69)$$

$$\nu_r^+ = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f)), \quad (5.70)$$

en considérant maintenant la vitesse totale du point où la collision prend place ( $\vec{r}_a(t) + \vec{r}_{a,p}(t) = \vec{r}_b(t) + \vec{r}_{b,p}(t)$ ).

On peut encore une fois résoudre ces équations pour  $j$  et obtenir

$$j = -\alpha(1 + \epsilon) v_-^r, \quad (5.71)$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_a + G_b}, \quad (5.72)$$

avec

$$G_a = \hat{n} \cdot [\mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \hat{n}) \times \vec{r}_{a,p}], \quad (5.73)$$

$$G_b = \hat{n} \cdot [\mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \hat{n}) \times \vec{r}_{b,p}], \quad (5.74)$$

où la matrice de moment d'inertie est prise par rapport au centre de masse de chaque objet dans un système d'axes commun.

Si le frottement ne peut être négligé, on généralise ces équations de la même façon que pour le cas sans rotation.

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{J}}{m_a}, \quad (5.75)$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\vec{J}}{m_b}, \quad (5.76)$$

et les vitesses angulaires finales seront

$$\vec{\omega}_a(t_f) = \vec{\omega}_a(t_i) + \mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \vec{J}), \quad (5.77)$$

$$\vec{\omega}_b(t_f) = \vec{\omega}_b(t_i) - \mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \vec{J}). \quad (5.78)$$

Finalement

$$\vec{J} = \hat{n} j + \hat{t} j_t, \quad (5.79)$$

avec  $j$  donné par l'équation 5.71 et  $j_t$  par

$$j_t = \begin{cases} -\alpha_t |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| & \text{si } \mu_s(1 + \epsilon) |v_r^-| > |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| \\ \alpha_t \mu_c(1 + \epsilon) v_r^- & \text{sinon} \end{cases}. \quad (5.80)$$

où

$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_{a,t} + G_{b,t}}, \quad (5.81)$$

et  $G_{a,t}$  et  $G_{b,t}$  sont maintenant pris par rapport à la tangentielle  $\hat{t}$  au lieu d'utiliser la normale à la collision  $\hat{n}$ :

$$G_{a,t} = \hat{n} \cdot [\mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \hat{t}) \times \vec{r}_{a,p}], \quad (5.82)$$

$$G_{b,t} = \hat{n} \cdot [\mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \hat{t}) \times \vec{r}_{b,p}]. \quad (5.83)$$

## 5.4 Détection des collisions

Maintenant que nous savons comment traiter les collisions entre les solides, tout ce qu'il nous reste à faire c'est de détecter quand et où ces collisions prennent place (voir figure 5.9). Notez que lorsqu'il s'agit de sphères (voir figure 5.10) nous savons comment procéder. En

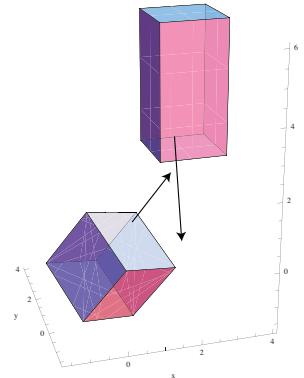


Figure 5.9: Trajectoire de deux parallélépipèdes dans l'espace

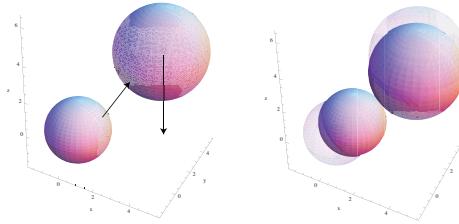


Figure 5.10: Trajet de deux boules dans l'espace

effet, si on connaît la position du centre de masse de chaque sphère  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, 2$ ) ainsi que leurs rayons  $R_i$ , alors les deux sphères sont en contact si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = R_1 + R_2 . \quad (5.84)$$

Elles se superposent si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < R_1 + R_2 . \quad (5.85)$$

Elles ne sont pas en contact si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > R_1 + R_2 . \quad (5.86)$$

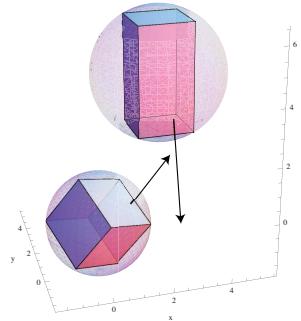


Figure 5.11: Trajectoire de deux parallélépipèdes entourés de sphères dans l'espace

On peut utiliser le même type de procédure pour déterminer si deux solides de forme arbitraire ne sont pas en contact de façon certaine. Pour ce faire, nous définirons la sphère de rayon minimal  $R_{\min,i}$  centrée sur le centre de masse du solide qui l'englobe complètement (voir figure 5.11). Le solide  $i$  a un centre de masse localisé à  $\vec{r}_{c,i}$ . Les  $j = 1, n$  coins du solide sont situés à la position  $\vec{r}_{j,i}$ . La distance entre un coin  $j$  et le centre de masse du solide est donnée par

$$\vec{d}_{j,c} = \vec{r}_{j,i} - \vec{r}_{c,i} . \quad (5.87)$$

Le rayon  $R_{\min,i}$  de la sphère qui englobe le solide sera donné par la valeur maximale des  $|\vec{d}_{j,c}|$

$$R_{\min,i} = \max_{j=1,n} (|\vec{d}_{j,c}|) . \quad (5.88)$$

On est alors assuré que les deux solides ne sont pas en contact si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > R_{\min,1} + R_{\min,2} . \quad (5.89)$$

On ne peut rien assurer si ce n'est pas le cas.

On peut aussi utiliser le même type de procédure pour déterminer si deux solides de forme arbitraire sont en contact de façon certaine. Pour ce faire, nous définirons la sphère de rayon maximal  $R_{\max,i}$  centrée sur le centre de masse du solide qui est englobée complètement par le solide. Le rayon  $R_{\max,i}$  de la sphère totalement incluse dans le solide sera donné par la valeur minimale de composantes de  $\vec{d}_{j,c}$

$$R_{\max,i} = \min_{j=1,n} (\min(d_{j,c}(1), d_{j,c}(2), d_{j,c}(3))) . \quad (5.90)$$

On est assuré que les deux solides sont en contact si

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| < R_{\max,1} + R_{\max,2} . \quad (5.91)$$

On ne peut rien assurer si ce n'est pas le cas.

Les avantages de cette méthode sont les suivantes :

- on peut déterminer, avant le début de la simulation, les valeurs de  $R_{\max,i}$  et  $R_{\min,i}$  associées à chaque solide (les solides sont indéformables) ;
- comme on suit la trajectoire du centre de masse, ces positions sont connues en tout temps ;
- une soustraction vectorielle et une norme sont suffisantes pour déterminer avec certitude si les deux solides ont des chances d'être en contact ;
- ceci fonctionne même si les solides sont en rotation.

L'inconvénient majeur est qu'on ne peut être assuré qu'il y a contact entre les solides si

$$R_{\max,1} + R_{\max,2} \leq |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq R_{\min,1} + R_{\min,2}. \quad (5.92)$$

Il faut alors passer à une méthode plus précise. Ici, nous utiliserons la méthode des plans de division (separating planes).

#### 5.4.1 Méthode des plans de division

Le principe ici consiste à déterminer si un plan de division existe entre les deux solides. Le plan de division doit être choisi parmi les surfaces qui servent à définir les deux solides.

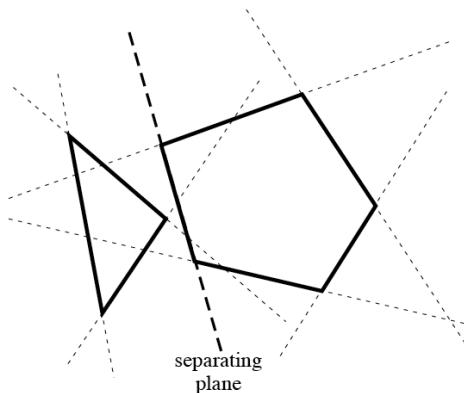


Figure 5.12: Plan de division entre deux solides

Il est choisi de façon à ce que tous les coins de solide auquel appartient la surface se situent **en dessous** du plan ou sur le plan. Tous les coins du second solide se situent **au-dessus** du plan (ou sur le plan s'il y a contact).

Pour déterminer la position **en dessous** et **au-dessus** il faut donc donner une direction à notre plan et donc lui associer une normale  $\hat{n}$ . Pour ce faire, nous utiliserons l'algorithme suivant (voir figure 5.13) :

- chacune des surfaces  $k$  de nos solides est définie par trois points  $\vec{q}_{k,1}$ ,  $\vec{q}_{k,2}$  et  $\vec{q}_{k,3}$  qui correspondent à trois coins du solide ;
- ces trois points sont classés dans le sens antihoraire lorsqu'on regarde la surface de l'extérieur du solide ;
- on détermine ensuite deux vecteurs qui donnent la direction générale de la surface  $k$  dans l'espace

$$\vec{p}_{k,1} = \vec{q}_{k,1} - \vec{q}_{k,2}, \quad (5.93)$$

$$\vec{p}_{k,2} = \vec{q}_{k,1} - \vec{q}_{k,3}. \quad (5.94)$$

La normale  $\hat{n}_k$  unitaire sortante pour le plan  $k$  est alors donnée par

$$\hat{n}_k = \frac{(\vec{p}_{k,1} \times \vec{p}_{k,2})}{|(\vec{p}_{k,1} \times \vec{p}_{k,2})|}. \quad (5.95)$$

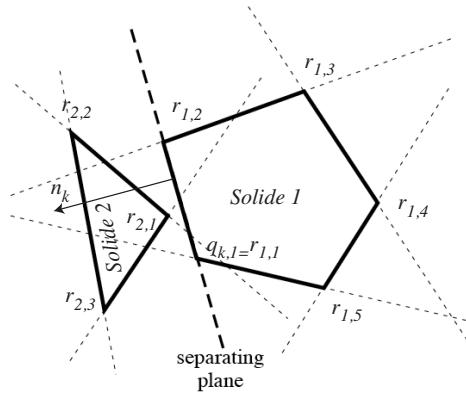


Figure 5.13: Sélection des points définissant les plans de division

La prochaine étape consiste à déterminer si les coins des solides sont au-dessus ou en dessous de la face. La distance entre le plan qui contient le point  $\vec{q}_{k,1}$  et un coin  $\vec{r}_{i,j}$  (le coin d'un des deux solides) est donnée par

$$d_{i,j,k} = \hat{n}_k \cdot (\vec{r}_{i,j} - \vec{q}_{k,1}). \quad (5.96)$$

Alors :

- Si  $d_{i,j,k} < 0$  le point est en dessous du plan.
- Si  $d_{i,j,k} > 0$  le point est au-dessus du plan.
- Si  $d_{i,j,k} = 0$  le point est sur le plan.

Comme de raison, la distance  $d_{i,j,k} \leq 0$  pour tous les coins du solide auquel la surface  $k$  appartient. Il est donc nécessaire d'évaluer  $d_{i,j,k}$  seulement pour les coins associés au second volume.

Un plan de division existe si

$$d_{i,j,k} > 0, \quad (5.97)$$

pour tous les coins du second solide. Si on est capable de trouver un plan de division, les deux solides ne sont pas en contact et ne s'interpénètrent pas. Sinon, il y a eu collision entre les deux solides.

On détermine alors le point qui a pénétré ou touché une surface de la façon suivante.

- Pour chacun des points  $\vec{r}_{i,j}$  d'un solide donnée, on évalue  $d_{i,j,k}$  pour chacune des surfaces associées au second solide.
- Le point  $\vec{r}_{i,j}$  est à l'intérieur du second volume si  $d_{i,j,k} \leq 0$  pour toutes les surfaces.

Si le point est à l'intérieur du volume on peut reculer la simulation jusqu'au moment où  $d_{i,j,k} = 0$  pour une valeur de  $k$  donnée, les autres distances étant toutes supérieures à 0. On a alors trouvé le point d'intersection requis.

On peut utiliser la même technique en 2D. Dans ce cas, on supposera que tous les solides ont une extension infinie dans la direction  $z$ . Les trois points requis pour définir un plan en 3D étant

$$\vec{q}_{k,1} = (x_{k,1}, y_{k,1}, 0), \quad (5.98)$$

$$\vec{q}_{k,2} = (x_{k,2}, y_{k,2}, 0), \quad (5.99)$$

$$\vec{q}_{k,3} = \vec{q}_{k,1} + (0, 0, z) = (x_{k,1}, y_{k,1}, z), \quad (5.100)$$

on aurait aussi pu utiliser

$$\vec{q}_{k,3} = \vec{q}_{k,2} + (0, 0, z) = (x_{k,2}, y_{k,2}, z). \quad (5.101)$$

On choisira  $z = 1$  ou  $z = -1$  de façon à assurer que les trois points décrivent un parcours antihoraire pour un observateur à l'extérieur du solide. La normale en 2D devient alors

$$\hat{n}_k = \frac{z(\vec{p}_{k,1,y}, -\vec{p}_{k,1,x})}{|z(\vec{p}_{k,1,y}, -\vec{p}_{k,1,x})|}. \quad (5.102)$$

Le reste des calculs se poursuit en utilisant exclusivement des vecteurs en 2D.

Cette procédure ne fonctionne cependant que pour des solides convexes. Pour les solides ayant des faces courbes, on peut discréteriser celles-ci en polyèdres triangulaires (procédure utilisée pour évaluer le volume et le centre de masse qui est décrite au chapitre 2) et procéder tel que décrit plus haut. Si on ne considère que des points localisés aux coins des solides, cette technique détectera les intersections entre un coin du solide et une surface, mais elle ne fonctionnera pas si ce sont les arêtes des solides qui se touchent (ou les surfaces). Dans ce cas, il faut alors considérer d'autres points du solide ou utiliser une technique différente.

Finalement, on peut toujours procéder en utilisant une analyse directe où on traite le plus grand nombre de points possibles pour chaque solide. Ceci est généralement très coûteux en temps de calcul et devrait être évité si possible.

#### 5.4.2 Méthode pour collision de sphères avec des solides réguliers

La procédure que nous décrirons fonctionne pour l'intersection de sphères avec tout autre solide régulier en 3D. Nous l'illustrons pour deux situations: les collisions de sphères avec des parallélépipèdes et des cylindres.

La première étape de toute analyse consiste à identifier tous les types de collision possibles. Pour des parallélépipèdes (arête  $a$ ,  $b$  et  $c$ ), on aura la possibilité d'avoir des collisions entre la sphère et

1. une des 6 faces du parallélépipède ;
2. une des 8 arêtes du parallélépipède ;
3. un des 8 coins du parallélépipède.

Pour les cylindres (hauteur  $L$  et rayon  $R$ ), les collisions possibles sont avec

1. une des 3 faces du cylindre (disques du haut, disque du bas et surface cylindrique) ;
2. une des 2 arêtes du cylindre (cercles du haut et du bas).

La seconde étape consiste à ramener les parallélépipèdes et les cylindres (ou autres solides réguliers) dans des systèmes de référence où les calculs seront facilités. Pour les parallélépipèdes, ce système correspondra à la situation où les arêtes du parallélépipède seront parallèles aux axes du système où nous effectuerons nos calculs avec le centre de masse à l'origine. On tournera le cylindre de façon à ce que son axe principal soit dans la direction  $z$  et on le déplacera ensuite pour que son centre de masse soit à l'origine.

Les collisions pour un parallélépipède avec une sphère de rayon  $r$  seront détectées de la façon qui suit.

1. Surfaces :

La sphère touchera ou pénètrera une face du parallélépipède si une droite partant de son centre, dans la direction  $\hat{u}$  normale à la surface, croise la surface plane à une distance  $d \leq r$  (intersection d'une droite et d'un plan).

2. Arêtes :

Une des lignes de direction  $x$ ,  $y$  ou  $z$  et de longueur finie ( $-a/2 < x < a/2$ ,  $-b/2 < y < b/2$  et  $-c/2 < z < c/2$ ) qui correspond à une arête croise la sphère (intersection d'une droite et d'une sphère).

3. Coins :

Un des coins se retrouve à l'intérieur de la sphère (intersection d'un point et d'une sphère).

Pour le cylindre la procédure est la suivante.

1. Surface du haut et du bas :

La sphère touche la surface du haut ou du bas (direction  $z$ ) si une droite partant de son centre dans la direction  $z$  croise la surface à une distance  $d \leq r$  (intersection d'une droite et d'un plan).

2. Surface cylindrique :

Pour une sphère centrée à  $(x', y', z')$  après rotation et translation du cylindre, le cercle de rayon  $r$  localisé à la hauteur  $z'$  croise la surface cylindrique.

3. Arêtes localisées à la position  $h = \pm L/2$  :

Un cercle de rayon  $r' = \sqrt{r^2 - (z' - h)^2}$  croise le cercle de rayon  $R$  correspondant à l'arête cylindrique.

## 5.5 Conclusions

Deux méthodes ont été présentées pour analyser la dynamique des collisions : la méthode des forces et la méthode des conditions initiales. Nous avons aussi introduit des algorithmes numériques qui peuvent être utilisés pour détecter les collisions entre des solides en mouvement. Dans le prochain chapitre nous étudierons le mouvement contraint de solides liés entre eux par des joints universels. La technique que nous présenterons peut s'avérer très utile pour simuler la trajectoire d'un objet souple (fouet, lasso) propulsé par une force externe.

Constraint

## Chapitre 6

### Mouvement constraint

#### 6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons presque toujours considéré que les solides se déplaçaient de façon indépendante les uns des autres. La seule exception à cette règle est survenue lorsque nous avons considéré les collisions. Cependant, même dans ce cas, l'interaction entre les solides qui s'avérait difficile à analyser a été remplacée par des états avant et après la collision, sans trop se préoccuper de ce qui se passait durant la collision. Ici, nous considérerons des situations tout à fait différentes. Les solides sont reliés entre eux par des tiges solides, liées les unes aux autres par des joints plus ou moins flexibles.



Figure 6.1: Trajectoire de la ligne de pêche à la mouche

La technique que nous allons développer, et qui suit la présentation de Hecker pour le «Game Developper magazine»,<sup>[13, 14]</sup> peut s'appliquer à plusieurs situations, incluant :

- la queue d'un cheval ou une queue de cheval ;
- la ligne pour la pêche à la mouche (voir figure 6.1) ;
- le fouet ;

- le câble de bungee (voir figure 6.2).

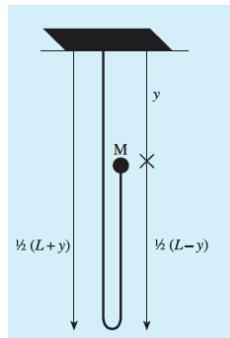


Figure 6.2: Câble de bungee, dans sa phase descendante<sup>[15]</sup>

## 6.2 Équations du mouvement

On suppose ici que les solides  $i$  et  $i + 1$  sont liés par deux tiges rigides attachées au point  $\vec{p}_{i,u} = \vec{p}_{i+1,d}$  par un joint permettant des mouvements dans toutes les directions (voir figure 6.3). Les équations du mouvement pour un solide arbitraire  $i$  sont donc

$$\frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} = \vec{v}_i(t), \quad (6.1)$$

$$\frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \vec{a}_i(t), \quad (6.2)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}_i(t)}{dt} = \vec{\omega}_i(t), \quad (6.3)$$

$$\frac{d\vec{\omega}_i(t)}{dt} = \vec{\alpha}_i(t), \quad (6.4)$$

Les accélérations linéaires du centre de masse de chacun des solides  $i$  et  $i + 1$  et les accélérations angulaires de ces mêmes solides autour de leurs centres de masse respectifs peuvent être écrites en fonction

- des forces externes  $\vec{F}_{E,i}(t)$  et  $\vec{F}_{E,i+1}(t)$  appliquées aux points  $\vec{r}_{E,i}$  et  $\vec{r}_{E,i+1}$  respectivement ;
- de la force de couplage  $\vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) = -\vec{f}_{i \rightarrow i+1}(t)$  entre les solides  $i$  et  $i + 1$  appliquée au point où ils sont en contact.

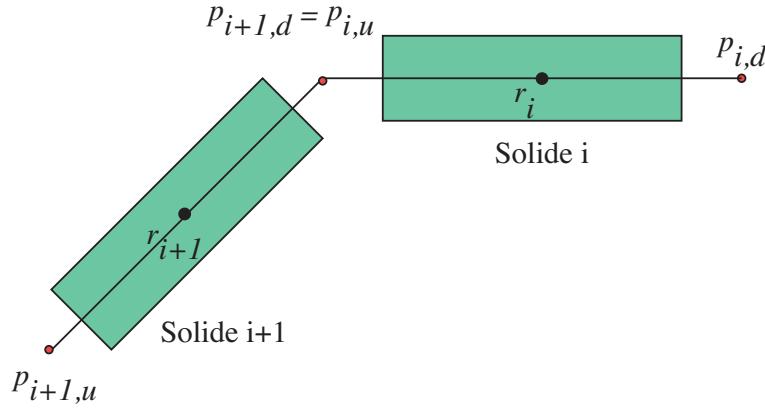


Figure 6.3: Deux solides dont les mouvements sont limités par une contrainte

La force nette qui est appliquée au point  $\vec{p}_{i+1,d} = \vec{p}_{i,u}$  est donc nulle. On obtient alors

$$\vec{a}_i(t) = m_i^{-1} \left( \vec{F}_{E,i}(t) + \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) \right) = \mathbf{M}_i^{-1} \left( \vec{F}_{E,i}(t) + \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) \right), \quad (6.5)$$

$$\vec{\alpha}_i(t) = \mathbf{I}_i^{-1}(t) \left( \vec{\tau}_{E,i}(t) + \vec{r}_{i,u}(t) \times \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) + \vec{L}_i(t) \times \vec{\omega}_i(t) \right), \quad (6.6)$$

$$\vec{a}_{i+1}(t) = m_{i+1}^{-1} \left( \vec{F}_{E,i+1}(t) + \vec{f}_{i \rightarrow i+1}(t) \right) = \mathbf{M}_{i+1}^{-1} \left( \vec{F}_{E,i+1}(t) + \vec{f}_{i \rightarrow i+1}(t) \right), \quad (6.7)$$

$$\vec{\alpha}_{i+1}(t) = \mathbf{I}_{i+1}^{-1}(t) \left( \vec{\tau}_{E,i+1}(t) + \vec{r}_{i+1,d}(t) \times \vec{f}_{i \rightarrow i+1}(t) + \vec{L}_{i+1}(t) \times \vec{\omega}_{i+1}(t) \right), \quad (6.8)$$

où  $\vec{\tau}_{E,i}(t)$  et  $\vec{\tau}_{E,i+1}(t)$  sont les moments de forces résultant de forces externes

$$\vec{\tau}_{E,i}(t) = (\vec{r}_{E,i}(t) - \vec{r}_i(t)) \times \vec{F}_{E,i}(t), \quad (6.9)$$

$$\vec{\tau}_{E,i+1}(t) = (\vec{r}_{E,i+1}(t) - \vec{r}_{i+1}(t)) \times \vec{F}_{E,i+1}(t). \quad (6.10)$$

Nous avons aussi défini

$$\vec{r}_{i,u}(t) = \vec{p}_{i,u}(t) - \vec{r}_i(t) \quad (6.11)$$

$$\vec{r}_{i+1,d}(t) = \vec{p}_{i+1,d}(t) - \vec{r}_{i+1}(t) \quad (6.12)$$

Le terme requis pour prendre en compte la dérivée temporelle du moment d'inertie est

$$\vec{L}_i(t) \times \vec{\omega}_i(t) = -\vec{\omega}_i(t) \mathbf{I}_i(t) \vec{\omega}_i(t), \quad (6.13)$$

et la matrice  $\mathbf{M}_i$  définie comme suit

$$\mathbf{M}_i = m_i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

permet d'écrire les équations du mouvement linéaire et angulaire dans le même format matriciel.

Nous considérerons les conditions initiales (temps  $t_0$ ) suivantes comme étant connues

- La position du centre de masse de chacun des blocs  $\vec{r}_i(t_0)$ .
- La position angulaire d'un point sur le bloc  $\vec{\Omega}_i(t_0)$ .
- La vitesse du centre de masse de chacun des blocs  $\vec{v}_i(t_0)$ .
- La vitesse angulaire des blocs par rapport à leur centre de masse  $\vec{\omega}_i(t_0)$ .
- Le moment cinétique des blocs par rapport au système du laboratoire  $\vec{L}_i(t_0)$ .
- La position initiale du joint universel

$$\vec{p}_{i,u}(t_0) = \vec{p}_{i+1,d}(t_0). \quad (6.15)$$

Les forces  $\vec{F}_{E,i}(t)$  et moments de force  $\vec{\tau}_{E,i}(t)$  externes doivent être connus. La force  $\vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)$  est cependant inconnue.

Pour résoudre les équations 6.1 à ??, nous utiliserons une méthode de Euler avec un pas de temps  $\Delta t$  petit

$$\vec{r}_i(t_0 + \Delta t) = \vec{r}_i(t_0) + \vec{v}_i(t_0)\Delta t, \quad (6.16)$$

$$\vec{v}_i(t_0 + \Delta t) = \vec{v}_i(t_0) + \vec{a}_i(t_0)\Delta t, \quad (6.17)$$

$$\vec{\Omega}_i(t_0 + \Delta t) = \vec{\Omega}_i(t_0) + \vec{\omega}_i(t_0)\Delta t, \quad (6.18)$$

$$\vec{\omega}_i(t_0 + \Delta t) = \vec{\omega}_i(t_0) + \vec{\alpha}_i(t_0)\Delta t, \quad (6.19)$$

$$\vec{r}_{i+1}(t_0 + \Delta t) = \vec{r}_{i+1}(t_0) + \vec{v}_{i+1}(t_0)\Delta t, \quad (6.20)$$

$$\vec{v}_{i+1}(t_0 + \Delta t) = \vec{v}_{i+1}(t_0) + \vec{a}_{i+1}(t_0)\Delta t, \quad (6.21)$$

$$\vec{\Omega}_{i+1}(t_0 + \Delta t) = \vec{\Omega}_{i+1}(t_0) + \vec{\omega}_{i+1}(t_0)\Delta t, \quad (6.22)$$

$$\vec{\omega}_{i+1}(t_0 + \Delta t) = \vec{\omega}_{i+1}(t_0) + \vec{\alpha}_{i+1}(t_0)\Delta t, \quad (6.23)$$

Tout ce qu'il manque alors pour résoudre le problème c'est  $\vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t_0)$ . Nous verrons comment évaluer cette force dans la prochaine section.

### 6.3 Cas à une contrainte

La contrainte au mouvement est que les deux solides demeurent attachés par le joint universel à tout instant  $t$ . On pourra donc écrire

$$\vec{p}_{i,u}(t) - \vec{p}_{i+1,d}(t) = 0. \quad (6.24)$$

Cette relation implique aussi

$$\frac{d\vec{p}_{i,u}(t)}{dt} - \frac{d\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt} = 0, \quad (6.25)$$

et

$$\frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} - \frac{d^2\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2} = 0. \quad (6.26)$$

La vitesse et l'accélération des deux points à tout instant  $t$  sont donc aussi identiques. Sachant que

$$\vec{p}_{i,u}(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{i,u}(t), \quad (6.27)$$

$$\vec{p}_{i+1,d}(t) = \vec{r}_{i+1}(t) + \vec{r}_{i+1,d}(t), \quad (6.28)$$

l'équation 6.26 devient alors

$$\frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_{i,u}(t)}{dt^2}, \quad (6.29)$$

$$\frac{d^2\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_{i+1}(t)}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_{i+1,d}(t)}{dt^2}, \quad (6.30)$$

où le premier terme à la droite des équations 6.29 et 6.30 correspond à l'accélération linéaire du centre de masse des objets  $i$  et  $i+1$  respectivement et le second terme correspond à l'accélération des points  $\vec{r}_{i,u}(t)$  et  $\vec{r}_{i+1,d}(t)$  due à leur mouvement de rotation autour de leurs centres de masse respectifs. Ainsi, pas définition on aura

$$\frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \vec{a}_i(t) = \mathbf{M}_i^{-1} (\vec{F}_{E,i}(t) + \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)), \quad (6.31)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{i,u}(t)}{dt^2} = \vec{\alpha}_{i,u}(t) \times \vec{r}_{i,u}(t) + \vec{\omega}_i(t) \times (\vec{\omega}_i(t) \times \vec{r}_{i,u}(t)), \quad (6.32)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{i+1}(t)}{dt^2} = \vec{a}_{i+1}(t) = \mathbf{M}_{i+1}^{-1} (\vec{F}_{E,i+1}(t) - \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)), \quad (6.33)$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{i+1,d}(t)}{dt^2} = \vec{\alpha}_{i+1,d}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t) + \vec{\omega}_{i+1}(t) \times (\vec{\omega}_{i+1}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t)), \quad (6.34)$$

où on a utilisé  $\vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) = -\vec{f}_{i \rightarrow i+1}(t)$ . Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} &= \mathbf{M}_i^{-1} (\vec{F}_{E,i}(t) + \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)) \\ &\quad + \vec{\alpha}_{i,u}(t) \times \vec{r}_{i,u}(t) + \vec{\omega}_i(t) \times (\vec{\omega}_i(t) \times \vec{r}_{i,u}(t)), \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2} &= \mathbf{M}_{i+1}^{-1} (\vec{F}_{E,i+1}(t) - \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)) \\ &\quad + \vec{\alpha}_{i+1,d}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t) + \vec{\omega}_{i+1}(t) \times (\vec{\omega}_{i+1}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t)). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Maintenant, utilisons les relations 6.6 et 6.8 que nous écrirons sous la forme

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_{i,u}(t) &= \mathbf{I}_i^{-1}(t) \left( \vec{\tau}_{E,i}(t) + \vec{r}_{i,u}(t) \times \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) + \vec{L}_i(t) \times \vec{\omega}_i(t) \right) \\ &= \vec{d}_i(t) + \mathbf{I}_i^{-1}(t) \vec{r}_{i,u} \times \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) = \vec{d}_i(t) + \mathbf{I}_i^{-1}(t) \mathbf{P}_{i,u}(t) \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t),\end{aligned}\quad (6.37)$$

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_{i+1,d}(t) &= \mathbf{I}_{i+1}^{-1}(t) \left( \vec{\tau}_{E,i+1}(t) + \vec{r}_{i+1,d}(t) \times \vec{f}_{i \rightarrow i+1}(t) + \vec{L}_{i+1}(t) \times \vec{\omega}_{i+1}(t) \right) \\ &= \vec{d}_{i+1}(t) - \mathbf{I}_{i+1}^{-1}(t) \vec{r}_{i+1,d}(t) \times \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) = \vec{d}_{i+1}(t) - \mathbf{I}_{i+1}^{-1}(t) \mathbf{P}_{i+1,d}(t) \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t),\end{aligned}\quad (6.38)$$

avec

$$\vec{d}_i(t) = \mathbf{I}_i^{-1}(t) (\vec{\tau}_{E,i}(t) + \vec{L}_i(t) \times \vec{\omega}_i(t)), \quad (6.39)$$

$$\vec{d}_{i+1}(t) = \mathbf{I}_{i+1}^{-1}(t) (\vec{\tau}_{E,i+1}(t) + \vec{L}_{i+1}(t) \times \vec{\omega}_{i+1}(t)), \quad (6.40)$$

qui sont indépendants de la force  $\vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)$ . Les matrices  $\mathbf{P}_{i,u}(t)$  et  $\mathbf{P}_{i+1,d}(t)$  sont définies par

$$\mathbf{P}_{i,u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -z_{i,u}(t) & y_{i,u}(t) \\ z_{i,u}(t) & 0 & -x_{i,u}(t) \\ -y_{i,u}(t) & x_{i,u}(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

$$\mathbf{P}_{i+1,d}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -z_{i+1,d}(t) & y_{i+1,d}(t) \\ z_{i+1,d}(t) & 0 & -x_{i+1,d}(t) \\ -y_{i+1,d}(t) & x_{i+1,d}(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.42)$$

et ont été introduites pour remplacer les produits vectoriels  $\vec{r}_{i,u} \times \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)$  et  $\vec{r}_{i+1,d}(t) \times \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t)$  par le produit d'une matrice par un vecteur. De plus si on définit

$$\vec{c}_{i,u}(t) = \mathbf{M}_i^{-1} \vec{F}_{E,i}(t) + \vec{\omega}_i(t) \times (\vec{\omega}_i(t) \times \vec{r}_{i,u}(t)), \quad (6.43)$$

$$\vec{c}_{i+1,d}(t) = \mathbf{M}_{i+1}^{-1} \vec{F}_{E,i+1}(t) + \vec{\omega}_{i+1}(t) \times (\vec{\omega}_{i+1}(t) \times \vec{r}_{i+1,d}(t)), \quad (6.44)$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{p}_{i,u}(t)}{dt^2} &= \vec{c}_{i,u}(t) + \mathbf{M}_i^{-1} \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) - \mathbf{P}_{i,u}(t) \vec{\alpha}_{i,u}(t) \\ &= \vec{c}_{i,u}(t) - \mathbf{P}_{i,u}(t) \vec{d}_i(t) + (\mathbf{M}_i^{-1} - \mathbf{P}_{i,u}(t) \mathbf{I}_i^{-1}(t) \mathbf{P}_{i,u}(t)) \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t),\end{aligned}\quad (6.45)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{p}_{i+1,d}(t)}{dt^2} &= \vec{c}_{i+1,d}(t) - \mathbf{P}_{i+1,d}(t) \vec{d}_i(t) \\ &\quad - (\mathbf{M}_{i+1}^{-1} - \mathbf{P}_{i+1,d}(t) \mathbf{I}_{i+1}^{-1}(t) \mathbf{P}_{i+1,d}(t)) \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t).\end{aligned}\quad (6.46)$$

En appliquant la contrainte 6.26, nous obtenons alors

$$(\mathbf{A}_{i,u}(t) - \mathbf{A}_{i+1,d}(t)) \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) = (\vec{b}_{i,u}(t) - \vec{b}_{i+1,d}(t)), \quad (6.47)$$

avec

$$\mathbf{A}_{i,u}(t) = (\mathbf{M}_i^{-1} - \mathbf{P}_{i,u}(t)\mathbf{I}_i^{-1}(t)\mathbf{P}_{i,u}(t)), \quad (6.48)$$

$$\mathbf{A}_{i+1,d}(t) = (\mathbf{M}_{i+1}^{-1} - \mathbf{P}_{i+1,d}(t)\mathbf{I}_{i+1}^{-1}(t)\mathbf{P}_{i+1,d}(t)), \quad (6.49)$$

$$\vec{b}_{i,u}(t) = \vec{c}_{i,u}(t) + \mathbf{P}_{i,u}(t)\vec{d}_i(t), \quad (6.50)$$

$$\vec{b}_{i+1,d}(t) = \vec{c}_{i+1,d}(t) + \mathbf{P}_{i+1,d}(t)\vec{d}_{i+1}(t), \quad (6.51)$$

dont la solution est

$$\vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) = (\mathbf{A}_{i,u}(t) - \mathbf{A}_{i+1,d}(t))^{-1}(\vec{b}_{i,u}(t) - \vec{b}_{i+1,d}(t)). \quad (6.52)$$

Pour résoudre les équations du mouvement par la méthode de Euler (équations 6.16 à 6.23), il ne reste qu'à évaluer  $\vec{a}_i(t_0)$ ,  $\vec{\alpha}_i(t_0)$ ,  $\vec{a}_{i+1}(t_0)$  et  $\vec{\alpha}_{i+1}(t_0)$  (équations 6.5 à 6.8) en utilisant l'équation 6.52 pour obtenir  $\vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t_0)$  qui est aussi  $-\vec{f}_{i \rightarrow i+1}(t_0)$ . Pour obtenir les solutions au temps  $t_0 + i\Delta t$  avec  $i \geq 2$ , on procède de la même façon, les résultats obtenus à l'étape précédente ( $t_0 + (i-1)\Delta t$ ) correspondant aux nouvelles conditions initiales.

## 6.4 Cas à plusieurs contraintes

Dans le cas général où  $N$  solides sont liés successivement les uns aux autres,  $N$  ensembles d'équations du mouvement de la forme 6.1 à 6.4 doivent être résolues ( $12N$  équations en 1D). On aura aussi des contraintes associées à chacun des  $N-1$  joints universels joignant ces  $N$  solides (voir figure 6.4).

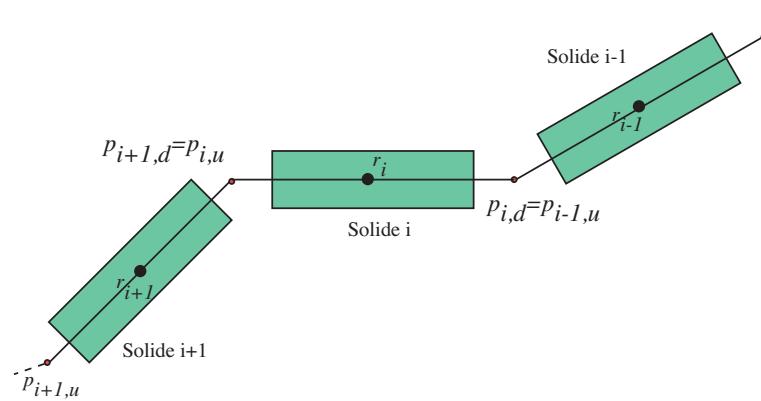


Figure 6.4: Solides dont les mouvements sont limités par une série de contraintes

Pour les calculs des accélérations linéaires et angulaires, on doit maintenant prendre en compte deux forces de couplage pour chaque volume, chacun d'entre eux étant lié à deux

autres solides (sauf le premier et le dernier de la chaîne) :

$$\vec{a}_i(t) = m_i^{-1} \left( \vec{F}_{E,i}(t) + \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) - \vec{f}_{i \rightarrow i-1}(t) \right), \quad (6.53)$$

$$\vec{\alpha}_i(t) = \mathbf{I}_i^{-1}(t) \left( \vec{\tau}_{E,i}(t) + \left( \vec{r}_{i,u}(t) \times \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) - \vec{r}_{i,d}(t) \times \vec{f}_{i \rightarrow i-1}(t) \right) + \vec{L}_i(t) \times \vec{\omega}_i(t) \right). \quad (6.54)$$

Ici, on a encore utilisé  $\vec{f}_{i \rightarrow i-1}(t) = -\vec{f}_{i-1 \rightarrow i}(t)$ . Les  $N+1$  contraintes à considérer seront alors

$$\frac{d^2 \vec{p}_{i,d}(t)}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{p}_{i-1,u}(t)}{dt^2} = 0, \quad (6.55)$$

pour  $2 < i < N$ . En suivant la même procédure qu'à la section 6.3, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{i,u}(t) - \mathbf{A}_{i+1,d}(t)) \vec{f}_{i+1 \rightarrow i}(t) - (\mathbf{A}_{i-1,u}(t) - \mathbf{A}_{i,d}(t)) \vec{f}_{i \rightarrow i-1}(t) \\ = \vec{b}_{i,u}(t) - \vec{b}_{i+1,d}(t) - \vec{b}_{i-1,u}(t) + \vec{b}_{i,d}(t) + , \end{aligned} \quad (6.56)$$

les différents termes étant identiques à ceux définis précédemment. De plus, pour le premier bloc, on supposera  $\vec{f}_{1 \rightarrow 0}(t) = 0$  et

$$(\mathbf{A}_{1,u}(t) - \mathbf{A}_{2,d}(t)) \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(t) = \vec{b}_{1,u}(t) - \vec{b}_{2,d}(t), \quad (6.57)$$

alors que pour le dernier bloc  $N$ , on supposera  $\vec{f}_{N+1 \rightarrow N}(t) = 0$  et

$$(\mathbf{A}_{N-1,u}(t) - \mathbf{A}_{N,d}(t)) \vec{f}_{N \rightarrow N-1}(t) = \vec{b}_{N-1,u}(t) - \vec{b}_{N,d}(t). \quad (6.58)$$

En définissant

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(t) \\ \vec{f}_{3 \rightarrow 2}(t) \\ \vdots \\ \vec{f}_{N \rightarrow N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (6.59)$$

et la matrice  $\mathbf{A}(t)$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}_{1,u}(t) - \mathbf{A}_{2,d}(t)) & 0 & \dots & 0 \\ -(\mathbf{A}_{1,u}(t) - \mathbf{A}_{2,d}(t)) & (\mathbf{A}_{2,u}(t) - \mathbf{A}_{3,d}(t)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\mathbf{A}_{N-1,u}(t) - \mathbf{A}_{N,d}(t)) \end{pmatrix}. \quad (6.60)$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire suivant

$$\mathbf{A}(t) \vec{f}(t) = \vec{b}(t), \quad (6.61)$$

où

$$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} (\vec{b}_{1,u}(t) - \vec{b}_{2,d}(t)) \\ (\vec{b}_{2,u}(t) - \vec{b}_{3,d}(t) - \vec{b}_{1,u}(t) + \vec{b}_{2,d}(t)) \\ \vdots \\ (\vec{b}_{N-1,u}(t) - \vec{b}_{N,d}(t)) \end{pmatrix}. \quad (6.62)$$

Encore une fois, si on utilise la méthode d'Euler, il faudra premièrement résoudre l'équation 6.61 pour  $\vec{f}(t_0)$  afin de déterminer les accélérations requises pour résoudre les équations du mouvement.

## 6.5 Conclusions

Nous venons d'étudier le mouvement contraint de solides liés entre eux par des joints universels. Cette technique s'avère très utile pour simuler la trajectoire d'un objet souple (fouet, lasso) propulsé par une force externe. Le prochain chapitre sera dédié à l'utilisation de la physique optique pour des applications multimédia. Ainsi, après une brève revue des principes de la réflexion et de la réfraction, nous nous concentrerons sur les méthodes de reconstruction d'images. Nous aborderons aussi rapidement les capteurs utilisés pour détecter la lumière et certaines contraintes reliées aux instruments servant à la reproduction d'images.

## Chapitre 7

# Optique

### 7.1 Lumière et ondes lumineuses

En physique, la lumière désigne généralement la gamme d'ondes électromagnétiques auxquelles l'oeil est sensible (voir Figure 7.1). Ceci correspond à des longueurs d'onde variant entre 380 et 780 nm. Les concepts de couleur et de lumière comme onde électromagnétique sont aussi indissociables (voir tableau 7.1). Les ondes électromagnétiques visibles de fréquences élevées (les longueurs d'onde minimales) correspondent à la couleur violette. Celles ayant les fréquences les plus faibles (les longueurs d'onde maximales) correspondent à la lumière rouge. Les «sept» couleurs de l'arc-en-ciel classées par ordre de fréquences croissantes sont donc le rouge, l'orange, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet.

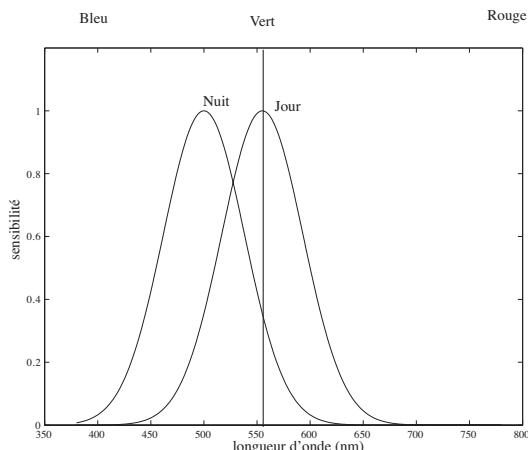


Figure 7.1: Sensibilité de l'oeil à différentes longueurs d'onde de la lumière le jour (haute intensité lumineuse) et la nuit (faible intensité lumineuse)

Un des premiers physiciens à proposer une explication du comportement de la lumière est Newton. Son interprétation corpusculaire permet entre autres choses d'expliquer la réfraction, car chaque couleur de lumière avait sa propre vitesse dans un milieu transparent. La couleur rouge était la plus rapide et la violette la plus lente. La lumière rouge passant à

Tableau 7.1: Relation couleur longueur d'onde

Couleur	longueur d'onde (nm)
Rouge	660-780
Orange	610-660
Jaune	560-610
Vert	510-560
Bleu	460-510
Indigo	440-460
Violet	400-440
Violet foncé	380-400

travers un prisme était donc moins déviée (réfractée) que la violette, ceci créant un spectre de couleurs. Son interprétation est cependant incohérente, car elle ne permet pas de répondre aux questions fondamentales suivantes :

- comment les particules peuvent-elles accélérer en passant du vide vers un autre milieu ;
- d'où vient l'énergie pour accélérer les particules.

Cette théorie est donc abandonnée relativement vite (elle ne peut expliquer la diffraction) et remplacée par l'interprétation ondulatoire même si elle reviendra hanter les physiciens plus tard (effet photoélectrique).

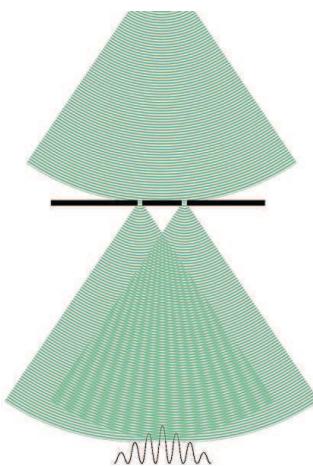


Figure 7.2: Interférence

Le premier à décrire de façon cohérente la lumière, incluant les effets d'interférence (voir figure 7.2) et de diffraction, est Christiaan Huygens dans son «Traité de la Lumière».

Il représente la propagation d'une source lumineuse dans un milieu par un front d'onde sphérique. Il suppose que chaque point du front d'onde agit comme une source de lumière ponctuelle (un nouveau front d'onde sphérique) de même fréquence et phase que l'onde originale (voir figure 7.3). Cette interprétation tient la route jusqu'en 1839 lorsque Becquerel

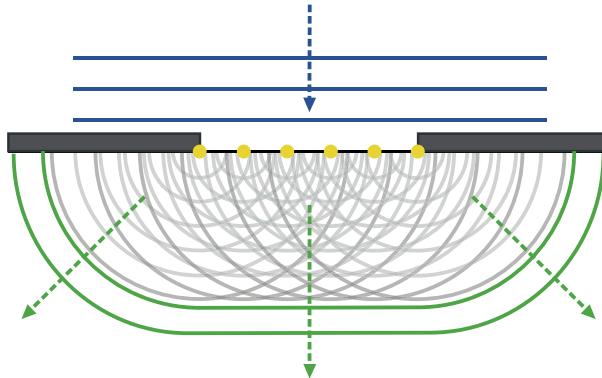


Figure 7.3: Diffraction par le principe d'Huygens

présente pour la première fois l'effet photoélectrique qui est finalement expliqué par Hertz en 1887.

En 1905, Albert Einstein analyse cet effet en supposant que la lumière a un comportement corpusculaire et véhicule un quantum d'énergie (le photon) associé aux ondes électromagnétiques. L'énergie d'un quantum de lumière, pour un champ électromagnétique de fréquence  $\nu$ , est donnée par

$$E = h\nu, \quad (7.1)$$

où  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Js est la constante de Plank. Dans le vide, les photons se propagent à la vitesse de la lumière, c'est-à-dire.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \text{ m/s}, \quad (7.2)$$

où  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m est la permittivité du vide et  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m sa perméabilité. Ces photons véhiculent une combinaison de champs électrique  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  et magnétique  $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$ .

La vitesse de la lumière  $c_m$  dans un milieu  $m$  est reliée à la permittivité  $\epsilon_m = \epsilon_{m,r} \epsilon_0$  et la perméabilité  $\mu_m = \mu_{m,r} \mu_0$  du milieu

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_m \mu_m}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{m,r} \epsilon_0 \mu_{m,r} \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{m,r} \mu_{m,r}}} c. \quad (7.3)$$

L'indice de réfraction  $n_m$  d'un milieu correspond au rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide et celle dans le milieu

$$n_m = \frac{c}{c_m} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (7.4)$$

L'indice de réfraction du vide est donc  $n_{\text{vide}} = 1$ .

La fréquence d'une onde électromagnétique  $\nu$  et sa longueur d'onde  $\lambda$  étant reliées par

$$\nu \lambda = c. \quad (7.5)$$

La fréquence d'un signal lumineux qui pénètre dans un milieu d'indice de réfraction  $n_m$  ne change pas, car son énergie ne varie pas. C'est donc la longueur d'onde de la lumière  $\lambda_m$  qui est réduite par un facteur de  $1/n_m$  lorsque la lumière passe d'un milieu à un autre :

$$\lambda_m = \frac{c_m}{\nu} = \frac{c}{\nu n_m} = \frac{\lambda}{n_m}. \quad (7.6)$$

Une question qui semble légitime à ce point est : la lumière change-t-elle de couleur en passant du vide à un milieu d'indice de réfraction  $\lambda_m > 1$ ? Si elle change de couleur, alors la couleur dépend de la longueur d'onde. Sinon, la couleur dépend de la fréquence de l'onde qui est ne change pas d'un milieu à l'autre. Du point de vue physiologique (perception par l'oeil), cette question n'est pas valable, car la lumière qui atteint la rétine doit toujours sortir préalablement de l'objet et passer par le globe oculaire (on perçoit la lumière qui atteint la rétine). Il est donc impossible de percevoir ce changement de couleur, même s'il a lieu. De plus, sachant que les cônes de l'oeil servent à convertir l'énergie lumineuse (proportionnelle à la fréquence) en potentiel électrique, il semblerait préférable d'associer la couleur à une gamme de fréquences de lumière. Cependant, ce qui est généralement fait, c'est d'associer les couleurs aux longueurs d'onde qu'aurait le champ électromagnétique s'il se retrouvait dans le vide.

La majorité des sources de lumière émet un nombre de photons très élevé, et l'oeil peut difficilement percevoir les photons individuels. La lumière se comporte comme une particule (photon d'énergie  $h\nu$ ) lorsque les photons interagissent individuellement avec des appareils microscopiques  $d \ll \lambda$  tels les électrons gravitant autour des atomes et les noyaux atomiques. Elle se comporte globalement comme une onde électromagnétique (champs électrique  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  et magnétique  $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$ ) lorsqu'elle interagit avec des appareils macroscopiques. L'énergie de l'onde (proportionnelle à  $\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2$ ) correspond à l'énergie des photons présents dans faisceau lumineux. On utilise alors une interprétation ondulatoire. Ceci est requis afin de déterminer l'intensité de la lumière transmise et réfléchie par les objets (réflexion et réfraction).

Pour la majorité des études avec des objets macroscopiques ( $d \gg \lambda$ ), on combine cependant l'interprétation ondulatoire (appliquée à l'interface entre deux milieux) avec une interprétation plus géométrique qui consiste à suivre la trajectoire de la lumière en utilisant des lignes droites (rayons) entre les interfaces ou les effets ondulatoires doivent être pris en compte. Cette méthode est très pratique lorsque l'on désire reconstituer l'image perçue par un observateur.

### 7.1.1 Rayons lumineux

Toute source de lumière émet des photons (ondes électromagnétiques) qui se propagent en ligne droite s'ils ne rencontrent pas d'obstacles. Un rayon lumineux débute à la position de la source (souvent ponctuelle) et se termine à l'observateur (aussi ponctuel). Lorsque l'on est près de la source, les rayons lumineux divergents, car la densité  $\rho(r)$  des rayons diminue à mesure que l'on s'éloigne de la source

$$\rho(r) \propto \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (7.7)$$

L'intensité du signal lumineux diminue de façon équivalente en 3D (voir figure 7.4). Si on

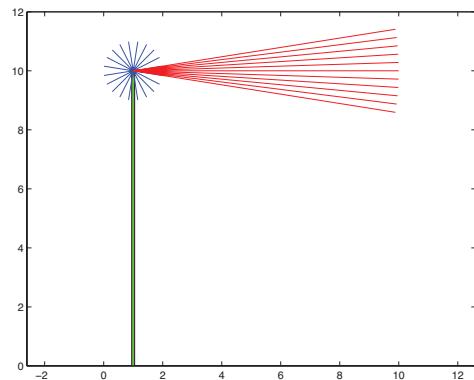


Figure 7.4: Variation d'intensité de la lumière près et loin de la source

est très loin de la source, on peut supposer que les rayons lumineux deviennent parallèles, l'intensité du signal lumineux est alors presque indépendante de la position spatiale (voir figure 7.5).

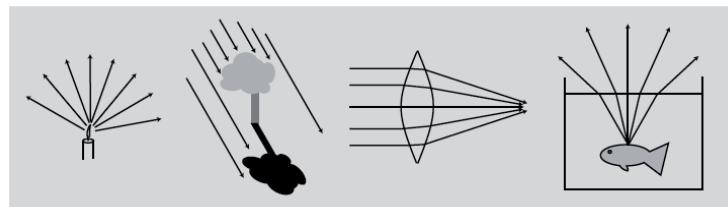


Figure 7.5: Comportement des rayons de lumière

Les avantages principaux d'utiliser des rayons pour simuler la lumière sont :

- on peut facilement visualiser graphiquement la trajectoire de la lumière lors de simulations numériques ;

- les rayons sont de lignes en 3D, ce qui est facile à traiter numériquement

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(0) + s\hat{u}, \quad (7.8)$$

avec  $s$  un paramètre quelconque,  $\vec{r}(0)$  un des points sur la ligne et  $\hat{u}$  un vecteur unitaire donnant la direction de la ligne.

Dans le cas où la lumière rencontre un obstacle solide (un miroir), il est normal qu'elle soit réfléchie de la même façon qu'une balle entrant en contact avec un mur (l'angle d'incidence égal l'angle de réflexion tous deux mesurés par rapport à un plan normal au rayon lumineux), car la lumière est une particule après tout. Le problème est cependant beaucoup plus complexe, car lors de la réflexion, les propriétés ondulatoires des ondes lumineuses affecteront la lumière réfléchie ou transmise. Tout objet qui peut être perçu par un observateur est considéré comme émettant de la lumière, même si cette lumière n'est pas générée par l'objet, mais est le résultat d'une réflexion de lumière venant d'une autre source.

## 7.2 Réflexion et réfraction de la lumière

En optique géométrique, on se concentre généralement sur des modèles idéalisés pour la réflexion et la réfraction : la réflexion parfaite (ou miroir) du rayon lumineux par une surface et la transmission parfaite du rayon lumineux entre deux milieux.

### 7.2.1 Réflexion

Supposons que l'on associe au rayon lumineux qui se déplace en 3D un vecteur unitaire  $\hat{u}_i$  qui décrit sa direction initiale de propagation

$$\hat{u}_i = \frac{\vec{r}_m - \vec{r}_s}{|\vec{r}_m - \vec{r}_s|}, \quad (7.9)$$

avec  $\vec{r}_s$  la position de départ du rayon (la source) et  $\vec{r}_m$  le point où il touche la surface réfléchissante (miroir) ou la surface à travers laquelle est transmise la lumière (réfraction).

En utilisant la normale unitaire  $\hat{i}$  (sortante) à la surface de réflexion (dioptre) au point  $\vec{r}_m$  il est alors possible de définir (voir figure 7.6)

$$\hat{j} = \frac{\hat{u}_i \times \hat{i}}{|\hat{u}_i \times \hat{i}|}, \quad (7.10)$$

$$\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}. \quad (7.11)$$

Le plan défini par  $\hat{i}$  et  $\hat{k}$  est le plan d'incidence (normale  $\hat{j}$ ) et le plan de réflexion est défini par les vecteurs  $\hat{j}$  et  $\hat{k}$ . Dans le système d'axes  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , le vecteur  $\hat{u}_i$  s'écrit

$$\hat{u}_i = -\cos\theta_i \hat{i} + \sin\theta_i \hat{k}, \quad (7.12)$$

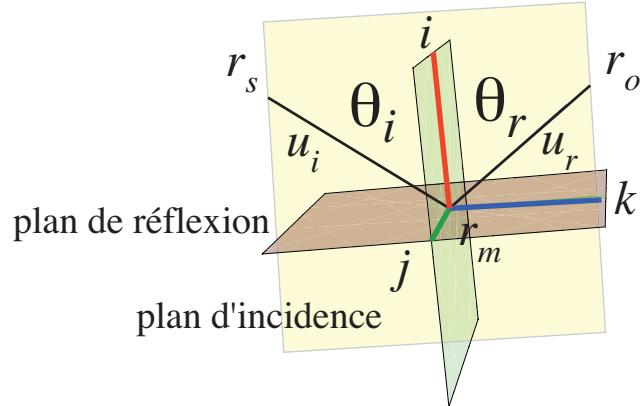


Figure 7.6: Notation en 3D pour la réflexion.

avec  $\theta_i$  l'angle entre le vecteur  $\hat{u}_i$  et  $\hat{i}$ .

Le rayon de lumière sera réfléchi dans le plan d'incidence de façon symétrique par rapport à la normale au plan de réflexion. Donc, la composante  $\hat{i}$  du vecteur  $\hat{u}_i$  s'inverse. Ainsi, la direction  $\hat{u}_r$  du rayon lumineux après réflexion sera donnée par

$$\hat{u}_r = \hat{u}_i - 2\hat{i}(\hat{u}_i \cdot \hat{i}) = \cos \theta_i \hat{i} + \sin \theta_i \hat{k}. \quad (7.13)$$

On observe aussi que

$$\hat{u}_r \cdot \hat{k} = \hat{u}_i \cdot \hat{k}, \quad (7.14)$$

et donc

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i. \quad (7.15)$$

C'est la première loi de Snell-Descartes.

Dans le cas où la source est localisée à la position  $\vec{r}_o$  et l'observateur à  $\vec{r}_s$ , la trajectoire de l'onde s'inverse et

$$\hat{u}'_i = -\hat{u}_r. \quad (7.16)$$

Comme  $\hat{i}' = \hat{i}$  alors

$$\hat{j}' = -\hat{j}, \quad (7.17)$$

$$\hat{k}' = -\hat{k}, \quad (7.18)$$

$$\hat{u}'_r = -\hat{u}_i, \quad (7.19)$$

et on a toujours

$$\hat{u}'_r \cdot \hat{k}' = \sin \theta_r = \sin \theta_i = \hat{u}'_i \cdot \hat{k}' . \quad (7.20)$$

La méthode que nous venons de décrire s'applique difficilement au problème de la réfraction, c'est-à-dire lorsque l'onde traverse une interface entre deux milieux où la vitesse de l'onde est différente (ceci correspond à des milieux ayant des indices de réfraction différents). Cependant, il existe une méthode élégante pour étudier le trajet d'une onde qu'elle soit réfléchie ou réfractée qui a été suggérée par Fermat en 1658.

### 7.2.2 Principe de Fermat et réfraction

Le principe de Fermat dit que pour aller d'un point à un autre, l'onde suit toujours le trajet dont le temps de parcours est un extrémum (un minimum ou un maximum). Ce principe est illustré à la figure 7.7 où on voit que pour l'observateur situé du même côté de l'interface que la source, deux parcours peuvent être suivis : la trajectoire directe et la trajectoire réfléchie.

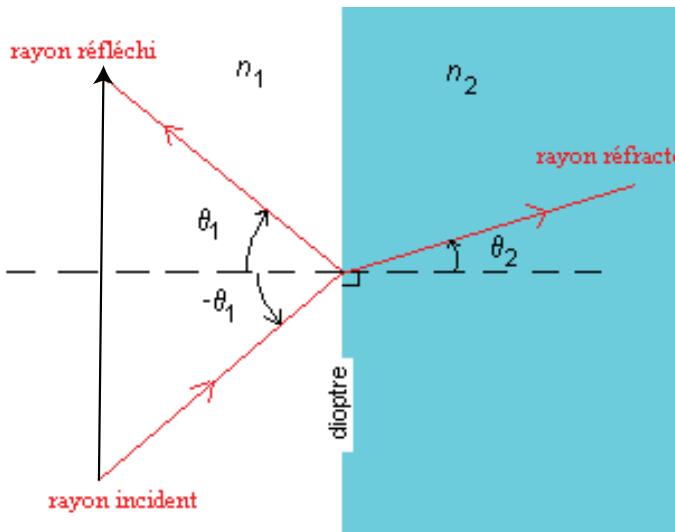


Figure 7.7: Principe de Fermat pour la réflexion et la réfraction.

Considérons maintenant le problème de la réfraction illustré à la figure 7.8. Ici, une onde lumineuse émise au point  $\vec{r}_i$  dans le milieu  $i$  se dirige vers le milieu  $t$ . Nous supposerons que l'interface entre les deux milieux correspond à un plan de normale dirigée dans la direction  $y$  ( $\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$ ) est localisé à  $y = 0$ . Nous avons aussi choisi de faire coïncider le plan d'incidence avec le plan  $x = y$  et donc  $\hat{k} = \hat{x}$ . Il s'agit maintenant de déterminer la trajectoire qui minimise ou maximise le temps de parcours entre les points  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_t$ .

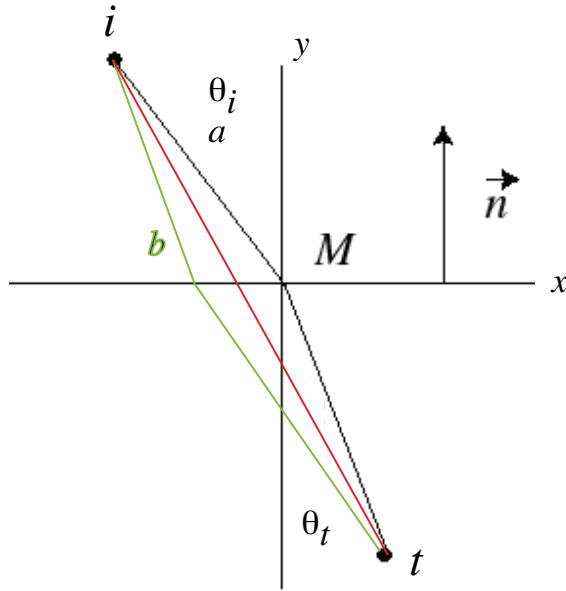


Figure 7.8: Trajectoire de la lumière pour la réfraction

Dans la figure 7.8,  $a$  et  $b$  représentent deux exemples de trajectoires. Comme le faisceau de lumière incident est dans le plan d'incidence, les temps de parcours en fonction de  $x$  est donné par (ici  $z = 0$ )

$$t_i(x) = \frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + y_i^2}}{c_i}, \quad (7.21)$$

car la vitesse de l'onde dans la région  $i$  est  $c_i$ . Dans la région  $t$  où la vitesse de l'onde est  $c_t$ , nous obtenons

$$t_t(x) = \frac{\sqrt{(x_t - x)^2 + y_t^2 + z_t^2}}{c_t}. \quad (7.22)$$

Comme on le voit, le point  $\vec{r}_t$  doit être aussi dans le plan d'incidence ( $z_t = 0$ ) si l'on veut réduire  $t_t(x)$  le plus possible. Le temps total devient donc

$$t(x) = \frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + y_i^2}}{c_i} + \frac{\sqrt{(x_t - x)^2 + y_t^2}}{c_t}. \quad (7.23)$$

Maintenant, pour trouver le trajet qui minimise le temps il faut déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle la dérivée de  $t$  est nulle

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{(x - x_i)}{c_i \sqrt{(x - x_i)^2 + y_i^2}} - \frac{(x_t - x)}{c_t \sqrt{(x_t - x)^2 + y_t^2}} = 0. \quad (7.24)$$

Comme

$$\sin(\theta_i) = \frac{(x - x_i)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + y_i^2}}, \quad (7.25)$$

$$\sin(\theta_t) = \frac{(x_t - x)}{\sqrt{(x_t - x)^2 + y_t^2}}. \quad (7.26)$$

Alors

$$\frac{\sin(\theta_i)}{c_i} = \frac{\sin(\theta_t)}{c_t}. \quad (7.27)$$

C'est la seconde loi de Snell-Descartes que l'on écrit généralement sous la forme

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t, \quad (7.28)$$

car

$$n_i = \frac{c}{c_i} \quad \text{et} \quad n_t = \frac{c}{c_t}, \quad (7.29)$$

avec  $c$  la vitesse de la lumière.

Ce principe s'applique aussi pour les ondes acoustiques et les vagues sur la mer (voir chapitres 8 et 9), cependant dans ces cas, il n'y a pas de vitesse qui peut facilement être choisie pour servir de référence absolue et, au lieu d'utiliser les indices de réfraction, on utilise directement les vitesses.



Figure 7.9: Exemple d'image illustrant la réfraction

Sachant que le sinus de l'angle d'incidence entre  $\hat{u}_i$  et  $\hat{\mathbf{i}}$  dans le plan d'incidence est donné par

$$\sin(\theta_i) = \hat{u}_i \cdot \hat{k}, \quad (7.30)$$

et que d'après la seconde loi de Snell-Descartes, le sinus de l'angle de réfraction est donné par

$$\sin \theta_t = \left( \frac{n_i}{n_t} \right) \sin \theta_i = \left( \frac{n_i}{n_t} \right) \hat{u}_i \cdot \hat{k}. \quad (7.31)$$

La direction de la lumière après réfraction est alors

$$\hat{u}_t = -\hat{\mathbf{i}} \cos \theta_t + \hat{k} \sin \theta_t. \quad (7.32)$$

Notez que

$$\sin \theta_t = \hat{u}_t \cdot \hat{k}, \quad (7.33)$$

et que le principe de réversibilité décrit ci-dessus pour la réflexion est encore valide. Ainsi, si le point de départ de la lumière est  $t$  et le point d'arrivée est  $i$ , la normale au plan de transmission  $\hat{\mathbf{i}}' = -\hat{\mathbf{i}}$ , le rayon incident devient

$$\hat{u}'_i = -\hat{u}_t, \quad (7.34)$$

$$\hat{u}'_t = -\hat{u}_i, \quad (7.35)$$

et

$$\hat{u}'_t = -\hat{i}' \cos \theta_{t'} + \hat{k}' \sin \theta_{t'}, \quad (7.36)$$

avec

$$\sin \theta_{t'} = \left( \frac{n_{i'}}{n_{t'}} \right) \sin \theta_{i'}. \quad (7.37)$$

Examinons maintenant la seconde loi de Snell-Decartes (équation 7.28) lorsque  $n_i \neq n_t$ . Deux situations se présentent :

- Si  $n_i < n_t$ , toutes les valeurs de  $\theta_i$  sont permises ( $-\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi/2$ ), et elles généreront un ensemble restreint de valeurs pour  $\theta_t$  ( $-|\arcsin(n_i/n_t)| \leq \theta_t \leq |\arcsin(n_i/n_t)|$ ).
- Si  $n_i > n_t$ , les seules valeurs de  $\theta_i$  permises sont  $-|\arcsin(n_t/n_i)| \leq \theta_i \leq |\arcsin(n_t/n_i)|$ . Elles généreront un ensemble complet de valeurs pour  $\theta_t$  ( $0 \leq \theta_t \leq \pi/2$ ) et aucun rayon de lumière ne peut pénétrer dans le second milieu pour  $\theta_i < -|\arcsin(n_t/n_i)|$  ou  $\theta_i > |\arcsin(n_t/n_i)|$ . Dans cette situation, la lumière doit donc être réfléchie vers l'intérieur du milieu  $t$  (réflexion totale interne).

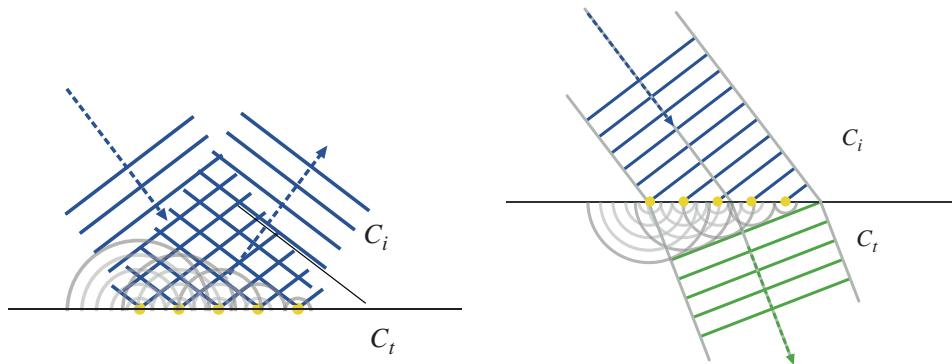


Figure 7.10: Principe d'Huygens–Fresnel pour la réflexion et la réfraction

Nous avons dérivé les relations de Snell-Descartes en utilisant le principe de Fermat. Une alternative à cette dérivation est d'utiliser la méthode d'Huygens–Fresnel qui consiste à supposer que si un point  $\vec{r}$  reçoit une onde d'amplitude  $A(\vec{r}, t)$ , il réemet lui-même une onde de fréquence, amplitude et phase identiques à celles de l'onde incidente. L'onde produite à la suite de la réflexion ou de la réfraction est la somme des contributions de toutes les ondes réémises à la surface de réflexion ou à l'interface entre les deux milieux (voir figure 7.10).

Dans la prochaine section, nous combinerons la méthode des rayons et les lois de Snell-Decartes pour la reconstruction numérique d'images.

### 7.3 Reconstitution d'images

La reconstruction numérique d'images (voir figure 7.9) se base sur les principes qui suivent :

- on peut simuler la lumière par des rayons (ce que nous avons déjà vu) ;
- toute image peut être considérée comme représentant une source de lumière (ponctuelle ou diffuse) ;
- les rayons lumineux sont réversibles (nous avons déjà vu que ceci est vrai pour les lois de Snell-Descartes).

Dans les cas où la lumière provenant d'un objet atteint une surface réfléchissante, deux options existent pour reconstruire l'image :

- la méthode des images virtuelles ;
- la méthode des rayons.

Lorsque la lumière passe à travers un objet transparent, nous utiliserons toujours la méthode des rayons.

### 7.3.1 Méthode des images virtuelles

C'est une méthode qui fonctionne très bien pour un seul miroir plan ou pour un ensemble de miroirs plans à angles droits. Cependant elle est beaucoup plus difficile à appliquer pour des miroirs plans avec angles variés, pour des miroirs incurvés, etc.

On suppose premièrement que le miroir a une extension infinie (un point du miroir est identifié par  $\vec{r}_m$ ). Pour chacun des points de l'objet  $\vec{r}$ , on trace ensuite une ligne droite entre l'objet et le miroir qui est normale au miroir (direction  $-\hat{i}$ ). Cette ligne qui a une longueur

$$d = (\vec{r} - \vec{r}_m) \cdot \hat{i}, \quad (7.38)$$

est prolongée d'une distance  $d$  supplémentaire de l'autre côté du miroir (voir figure 7.11). Le point final trouvé

$$\vec{r}_{\text{image}} = \vec{r} - 2d\hat{i}, \quad (7.39)$$

représente l'image virtuelle du point de départ dans le miroir. On répète le processus pour tous les points de la source et l'ensemble des points résultant forme l'image perçue dans le miroir.

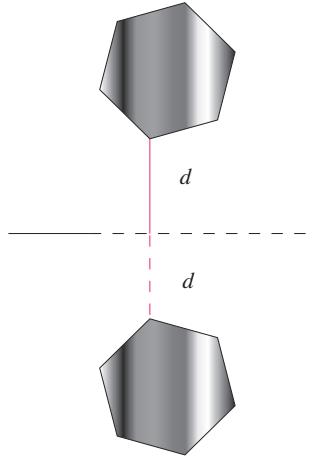


Figure 7.11: Images virtuelles dans un miroir plan

Pour reconstruire l'image vue par l'observateur dans le miroir, on a qu'à tracer toutes les lignes possibles qui passent par le miroir entre l'oeil et les images virtuelles (voir figure 7.12). Cette technique est relativement facile pour un seul miroir plan, car on connaît la position de l'objet et de son image dans l'espace.

Dans les cas où le problème implique deux miroirs plans perpendiculaires, le problème est un peu plus complexe (voir figure 7.13). On commence encore par supposer que les miroirs ont une extension infinie. Ensuite, pour chacun des points de l'objet, on trace une

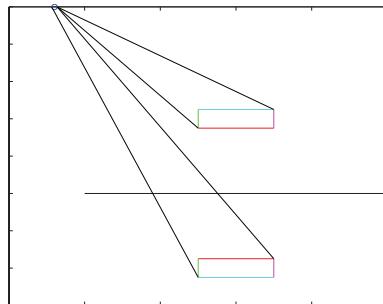


Figure 7.12: Reconstruction d'image dans un miroir

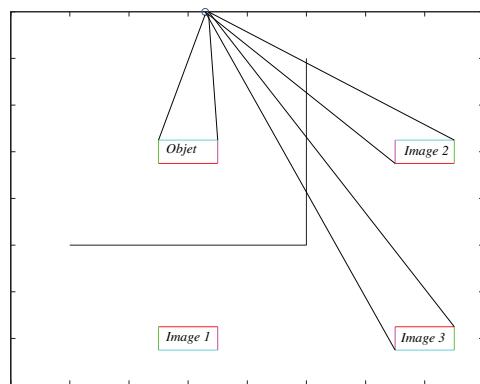


Figure 7.13: Reconstruction d'image pour deux miroirs plans perpendiculaires

ligne entre l'objet et chaque miroir qui est normale au miroir. Cette ligne, ayant une longueur  $d_i$  donnée par l'équation 7.38, est ensuite prolongée de l'autre côté des miroirs d'une distance  $d_i$  supplémentaire. On répète pour tous les points de l'objet initial pour former sa première image virtuelle pour chaque miroir.

À ce point, nous avons considéré seulement le cas où la lumière a subi une réflexion par un des deux miroirs. Pour prendre en compte les réflexions multiples, il faut répéter le processus de création d'images virtuelles pour chaque image virtuelle. Pour la configuration illustrée à la figure 7.13, on génère au total 3 images virtuelles (deux pour la première réflexion et une pour la seconde). Si on est en présence de trois miroirs qui sont tous perpendiculaires entre eux, on génère 7 images virtuelles (3 de première réflexion, 3 de seconde réflexion et une de triple réflexion). Si les miroirs ne sont pas perpendiculaires entre eux, on peut se retrouver avec un nombre infini d'images (voir figure 7.14).

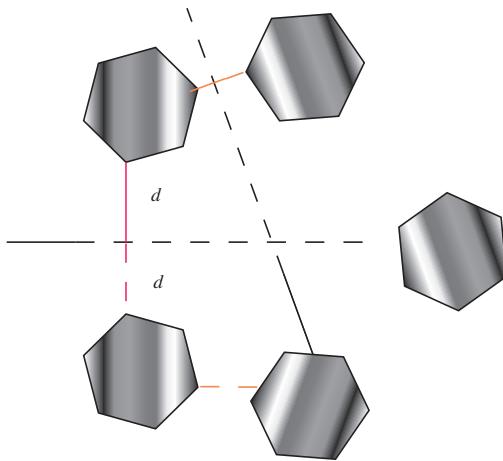


Figure 7.14: Images virtuelles pour miroirs à angle arbitraires

### 7.3.2 Méthode des rayons et réflexion

La reconstruction d'image par la méthode des rayons est relativement simple et utilise généralement la réversibilité des rayons. On génère donc premièrement un ensemble de  $N$  lignes de directions  $\hat{u}_n$  qui peuvent atteindre la position de l'observateur  $\vec{r}_0$ . Ces lignes correspondent aux rayons de lumière que l'observateur percevra. On suit ensuite ces lignes en les réfléchissant sur les miroirs, lorsque requis. On termine les lignes lorsqu'elles atteignent un objet ou les frontières de la région observée. De plus, si le rayon atteint un point tel que l'intensité du signal lumineux parvenant à l'observateur de ce point est négligeable (l'intensité lumineuse est proportionnelle à  $1/d$  avec  $d$  la distance parcourue par la lumière) le rayon est éliminé. On sauve le point de départ  $\vec{r}_0$  et les points successifs ( $\vec{r}_i$  avec  $i = 1, I$ ) où le rayon de lumière a touché un miroir ou un objet.

L'étape suivante consiste à déterminer la position de l'objet tel que vu par l'observateur. Le vecteur donnant la direction initiale du rayon de lumière à partir de l'oeil

$$\hat{u} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|}, \quad (7.40)$$

indique aussi la direction où apparaîtra l'image pour l'observateur. La distance  $d$  totale parcourue par la lumière de l'objet (source) à l'observateur est

$$d = \sum_{i=1}^I |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|, \quad (7.41)$$

et le point de l'objet touché apparaît pour l'observateur à la position

$$\vec{r}_n = \vec{r}_0 + d \hat{u}_n. \quad (7.42)$$

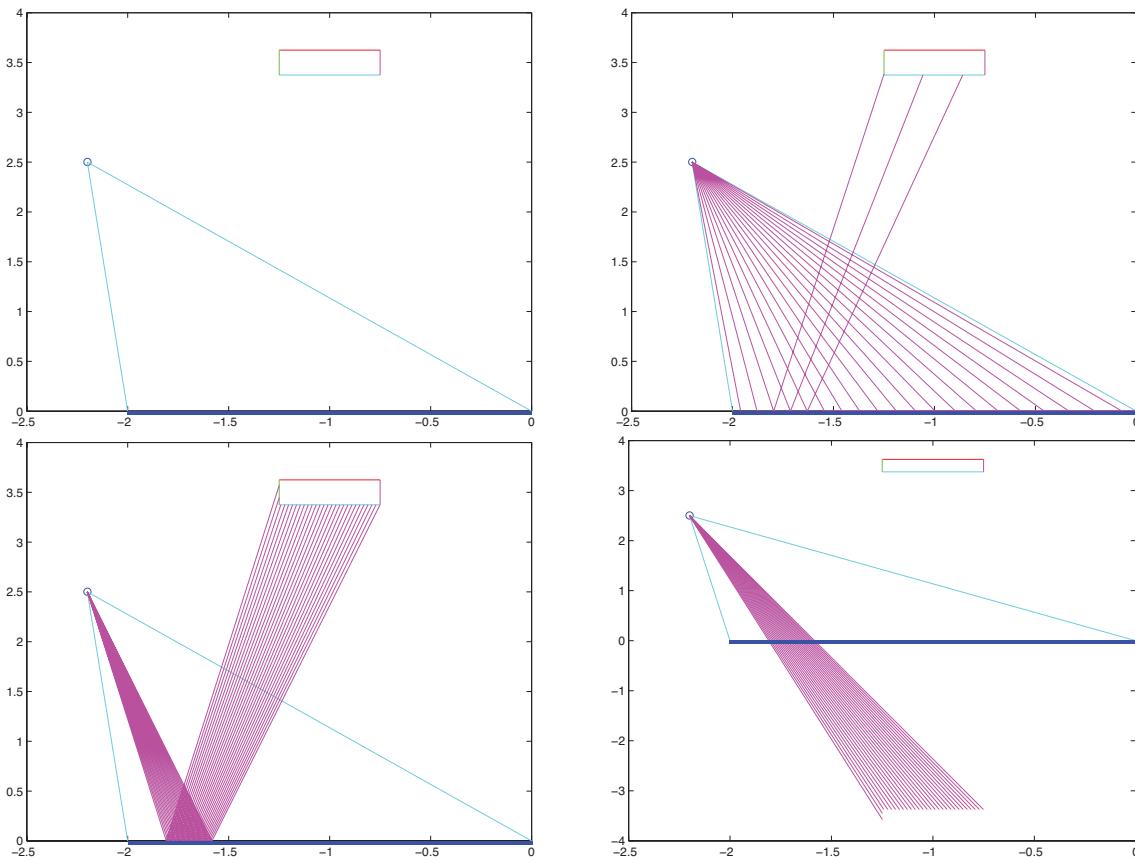


Figure 7.15: Illustration de la méthode des rayons pour un miroir

Cette procédure est illustrée à la figure 7.15 pour le cas où on a un seul miroir plan. Les étapes sont à considérer sont les suivantes

1. Choisir le secteur angulaire de départ (figure en haut à gauche).
2. Choisir  $N$  directions pour les rayons lumineux (dans le secteur de départ) et les tracer (figure en haut à droite).
3. Identifier les rayons qui atteignent l'objet (figure en bas à gauche).
4. Tracer l'image virtuelle (figure en bas à gauche).

Comme on l'a vu, cette méthode est simple et elle fonctionne, quel que soit le nombre de miroirs ou leur forme. De plus elle peut être utilisée même si des obstacles ou des milieux d'indices de réfraction différents sont traversés par la lumière, comme nous le verrons dans la section 7.3.3. Cependant, elle requiert beaucoup de calculs et ne génère pas une image complète, mais une série de points associés à l'image.

### 7.3.3 Méthode des rayons et réfraction

La méthode des rayons fonctionne aussi pour les cas où il y a des objets transparents qui s'interposent entre la source et l'observateur. Le traitement général est semblable à ce qui est utilisé pour la réflexion, c'est-à-dire que l'on trace un ensemble de rayons lumineux qui partent de l'observateur. On suit ensuite ces rayons lumineux jusqu'à ce qu'ils atteignent le solide en sautant les points successifs ( $\vec{r}_i$  avec  $i = 1, N$ ) où le rayon de lumière a touché une interface ou l'objet.

Si l'interface qu'a atteinte le rayon de lumière est un miroir, le rayon poursuit sa trajectoire dans la direction  $\hat{u}$ , donnée par l'équation 7.13. Si la lumière touche une interface entre deux milieux, il faut premièrement déterminer si elle pénètre dans le second milieu ou si elle est réfléchie. Pour un rayon qui vient du milieu 1 et pourrait se retrouver dans le milieu 2, on calcule donc

$$\sin \theta_2 = \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right). \quad (7.43)$$

Si  $|\sin \theta_2| > 1$ , alors ce rayon de lumière ne peut pénétrer dans le second milieu et la lumière subit une réflexion totale interne. On procède alors à la réflexion du rayon comme pour un miroir, le rayon continuant à se déplacer dans le milieu 1. Si  $|s_2| < 1$  la lumière croise alors l'interface entre les milieux 1 et 2. On détermine la direction transmise  $\hat{u}_t$  par l'équation 7.32 et on procède à la réfraction. On termine la simulation lorsque le rayon lumineux touche l'objet ou les frontières extérieures du problème ou qu'il s'échappe à l'infini.

Un exemple de reconstruction d'image avec réfraction dans un cube de verre est présenté à la figure 7.16 où l'observateur est identifié par le symbole «+» (figure en haut à gauche). La procédure suivie dans ce cas consistait à

1. choisir le secteur angulaire de départ (figure en haut à droite) ;
2. choisir  $N$  directions pour les lignes dans le secteur de départ (figure au centre à gauche) ;
3. tracer les trajectoires des rayons et les suivre jusqu'à la lame colorée (figure au centre à droite) ou jusqu'à ce qu'ils ressortent du bloc de verre ;
4. identifier les rayons qui atteignent l'objet et déterminer la position de l'objet tel que vu par l'observateur

$$\vec{r}_p = \vec{r}_0 + d \hat{u}, \quad (7.44)$$

$$d = \sum_{i=1}^N |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|; \quad (7.45)$$

5. répéter pour tous les points jusqu'à formation de l'image (figure au bas à gauche).

Ici l'observateur verra deux images visuelles, l'une d'entre elles semblant localisée à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du bloc de verre. La figure 7.17 illustre un second exemple en 3D qui est plus complexe et possède 4 images.

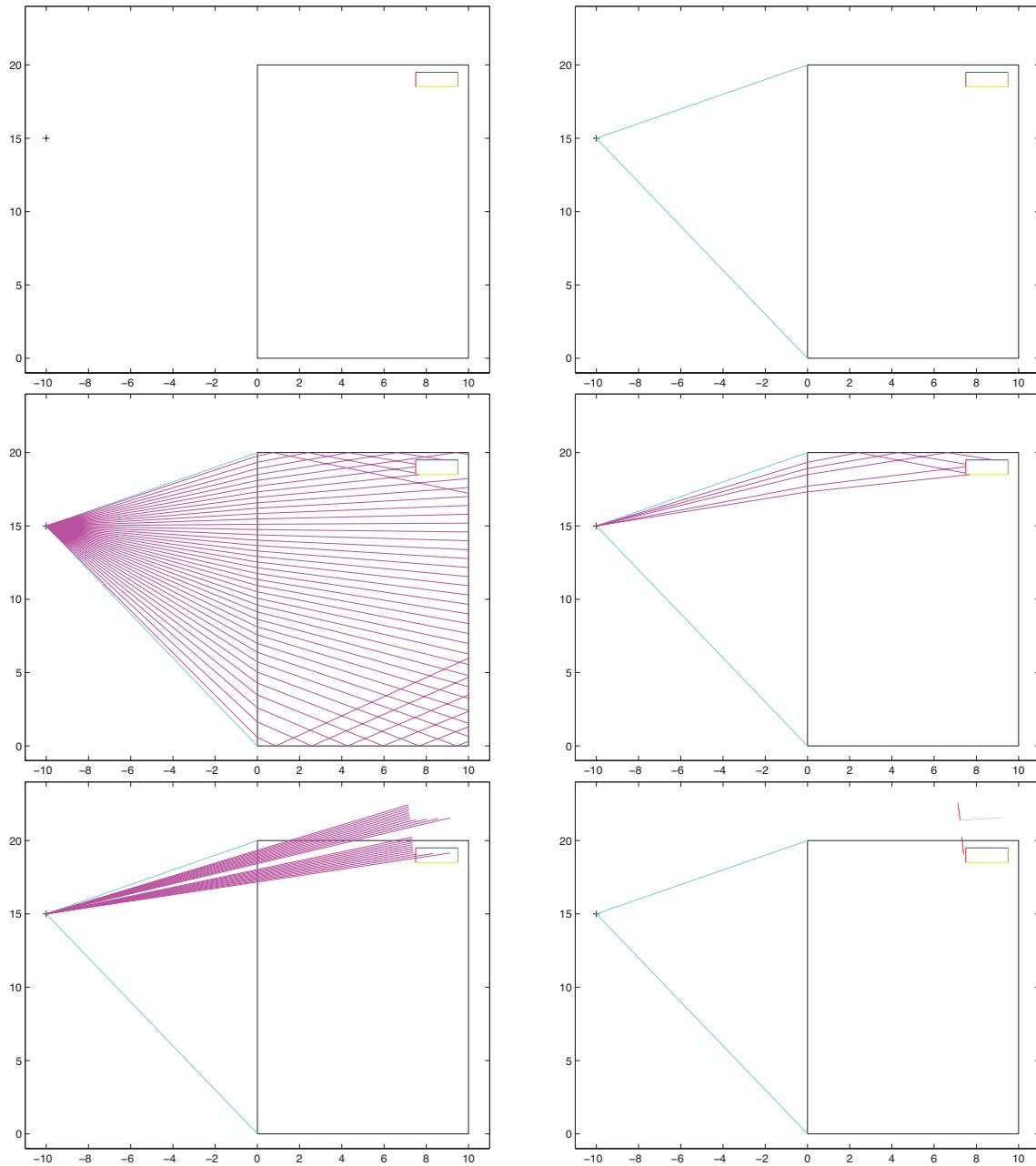


Figure 7.16: Reconstruction d'image pour la réfraction dans un le cube de verre d'indice de réfraction  $n_v = 1.5$

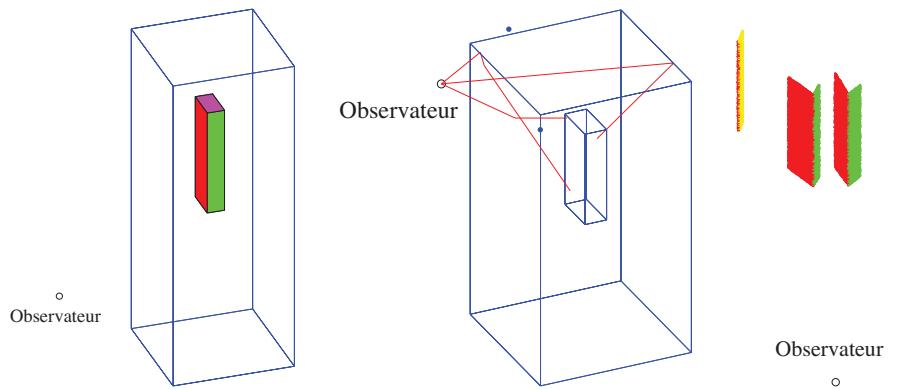


Figure 7.17: Exemple d'image reconstruite en 3D. À gauche, on voit le modèle à analyser. La figure du centre présente la trajectoire de trois différents rayons. L'image de droite est celle perçue par l'observateur

## 7.4 Réflexion diffuse

Nous venons d'étudier la réflexion et la réfraction en supposant que nous avions des surfaces parfaites et que l'intensité de la lumière réfléchie ou réfractée était égale à l'intensité incidente.

Cependant, les propriétés ondulatoires des champs électromagnétiques font que ce n'est pas nécessairement toute la lumière que sera transmise à travers une surface transparente parfaite et en général une partie de la lumière sera aussi réfléchie. Les coefficients de réflexion et de transmission qui devront être considérés dépendent de la polarisation de la lumière. De plus, bien que les lois de Snell-Descartes demeurent valides même pour les surfaces imparfaites, même des faibles variations dans la direction de la normale à la surface en chaque point, produira une dispersion des rayons qui réduira l'intensité de la lumière et rendra la réflexion plus diffuse. Nous verrons plus loin dans cette section comment simuler le comportement des rayons lumineux qui atteignent des surfaces imparfaites.

Finalement, si on considère les photons comme des particules de lumière, alors ces particules interagissent nécessairement avec les molécules composant le milieu où ils se propagent. Lorsque la lumière passe de l'air à un milieu plus dense, certains des photons seront réfléchis après interaction avec les molécules à l'interface entre l'air et le milieu réfractant. D'autres seront transmis à travers l'interface. Certains des photons peuvent aussi être absorbés par les molécules, cette absorption menant à une augmentation de la température des molécules près de l'interface et à une diminution de l'intensité de lumière pouvant être réfléchie ou transmise.

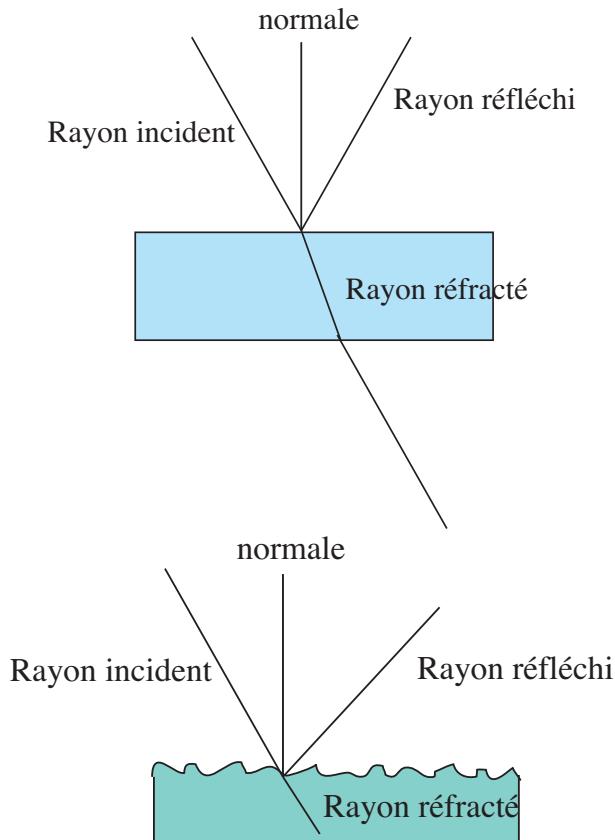


Figure 7.18: Réflexion et réfraction par une surface parfaite (haut) et imparfaite (bas)

#### 7.4.1 Relations de Fresnel

Pour déterminer les coefficients de transmission et de réflexion de la lumière à l'interface entre deux milieux, il faut retourner à une analyse ondulatoire où la lumière est représentée par une combinaison de champs électrique et magnétique (cours PHS1102 Champs électromagnétiques)

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{e}, \quad (7.46)$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}) = H_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{h}, \quad (7.47)$$

où  $\vec{k} = 2\pi \hat{n} / \lambda$  avec  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $\hat{n}$  un vecteur unitaire indiquant la direction de propagation de l'onde. Ici,  $\hat{e}$  et  $\hat{h}$  sont des vecteurs unitaires indiquant la direction des champs  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{H}}$  respectivement. La densité surfacique de puissance de la lumière incidente

est donnée par le vecteur de Poynting

$$\vec{P} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}. \quad (7.48)$$

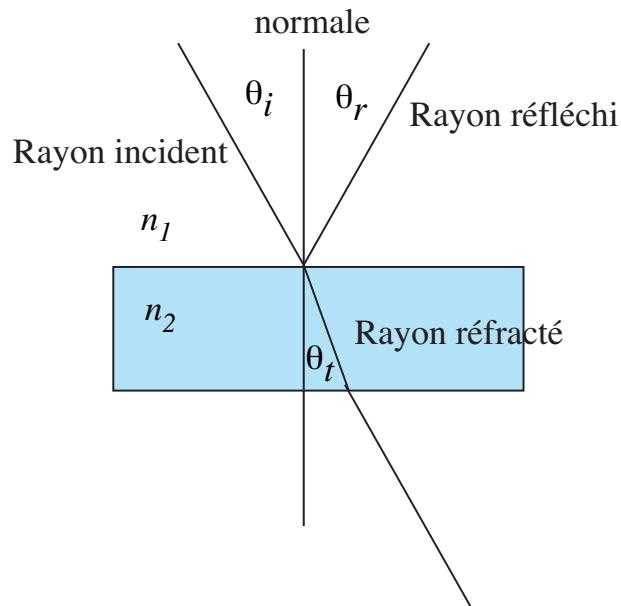


Figure 7.19: Réflexion et réfraction

Considérons maintenant une onde électromagnétique qui arrive à l'interface entre deux milieux. D'après l'électrodynamique les composantes de  $\vec{D} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}$  et de  $\vec{B} = \mu \vec{\mathcal{H}}$  qui sont normales au plan d'interface doivent être continues. De la même façon, les composantes des champs  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{H}}$  qui sont tangentes au plan de transmission doivent aussi être continues.

Pour une onde lumineuse polarisée linéairement dont le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence (voir figure 7.20 illustrant une onde transverse électrique (TE)) on aura

$$\frac{E_{0,t}}{E_0} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2(\theta_i)}} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)}, \quad (7.49)$$

$$\frac{E_{0,r}}{E_0} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2(\theta_i)}}{n_i \cos(\theta_i) + \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2(\theta_i)}} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)}, \quad (7.50)$$

où  $E_{0,t}$  et  $E_{0,r}$  sont les intensités des champs électriques transmis et réfléchis respectivement. Ici, on a supposé que les propriétés magnétiques des deux milieux étaient identiques

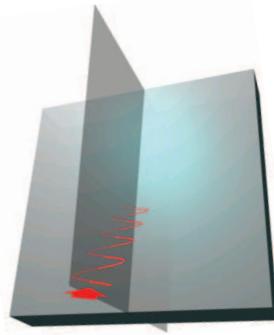


Figure 7.20: Direction du champ électrique pour des ondes transverses électriques (TE)

( $\mu_i$  et  $\mu_t$  sont identiques). En supposant que les puissances réfléchie  $I_r$  et transmise  $I_t$  sont définies comme suit

$$I_r = I_i R, \quad (7.51)$$

$$I_t = I_i T = I_i (1 - R), \quad (7.52)$$

les coefficients de réflexion  $R_{\text{TE}}$  et de transmission  $T_{\text{TE}}$  en puissance (interface air-verre) pour les ondes TE sont donnés par

$$\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[ \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 \\ 1 - R \end{pmatrix}. \quad (7.53)$$

La figure 7.21 illustre la dépendance de  $R$  et de  $T$  sur l'angle d'incidence pour les ondes TE.

Si le champ électrique de l'onde lumineuse polarisée linéairement est parallèle au plan d'incidence (voir figure 7.22) on aura une onde transverse magnétique (TM) et

$$\frac{E_{0,t}}{E_0} = \frac{2n_i n_t \cos(\theta_i)}{\cos(\theta_i) + n_i \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin(\theta_i)}} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)}, \quad (7.54)$$

$$\frac{E_{0,r}}{E_0} = \frac{n_t^2 \cos(\theta_i) - n_i \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin(\theta_i)}}{n_t^2 \cos(\theta_i) + n_i \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin(\theta_i)}} = \frac{n_i \cos(\theta_t) - n_t \cos(\theta_i)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)}. \quad (7.55)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission pour les ondes TM à l'interface air-verre sont alors

$$\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[ \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 \\ 1 - R \end{pmatrix}. \quad (7.56)$$

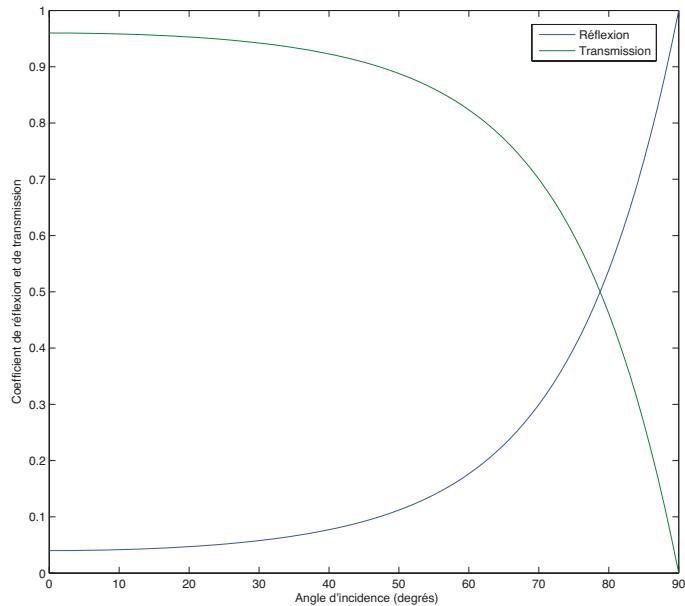


Figure 7.21: Réflexion et transmission pour les ondes TE

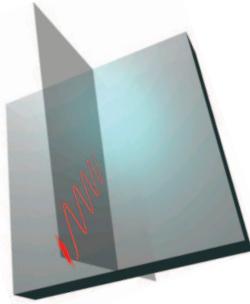


Figure 7.22: Direction du champ électrique pour des ondes transverses magnétiques (TM)

La figure 7.23 illustre la dépendance de  $R$  et de  $T$  sur l'angle d'incidence pour les ondes TM. Une comparaison des coefficients de réflexion pour les ondes TE et TM est aussi présentée à la figure 7.24. On remarque que le coefficient de réflexion et de transmission pour les ondes TE et TM pour un angle d'incidence  $\theta_i = 0$  sont identiques ( $R = 0.04$ ). De plus, la transmission est totale à l'angle de Brewster  $\theta_B$  pour une onde TM.

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right).$$

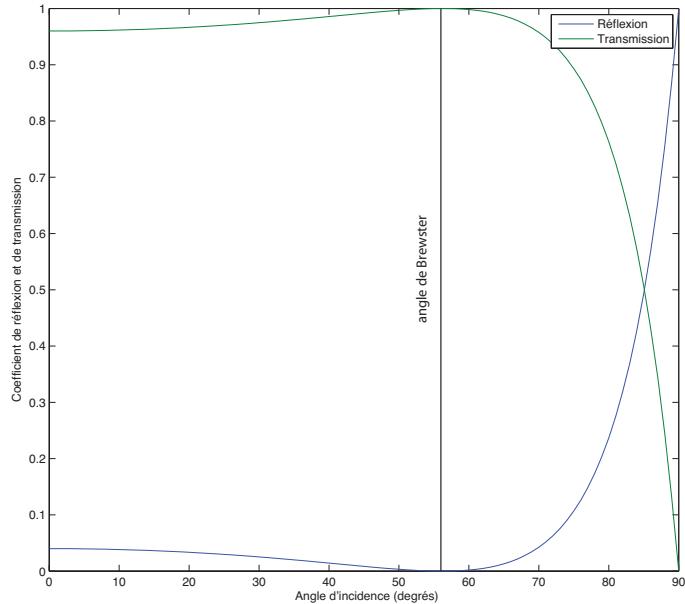


Figure 7.23: Réflexion et transmission pour les ondes TM

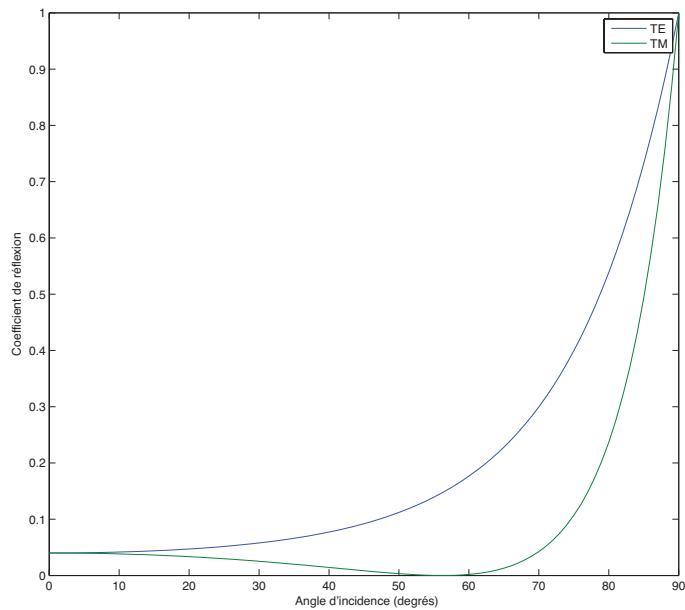


Figure 7.24: Réflexion et transmission pour les ondes TM

Dans le cas général, on supposera que la lumière n'est pas polarisée (combinaison égale

d'ondes TE et TM) et on utilisera

$$\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 + \left[ \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 \right\} \\ 1 - R \end{pmatrix}. \quad (7.57)$$

#### 7.4.2 Réflexion par des surfaces imparfaites

Plusieurs modèles peuvent être utilisés pour représenter la réflexion diffuse, dont les modèles empiriques suivants :

- la diffusion totale (modèle de Lambert) (voir figure 7.25) ;

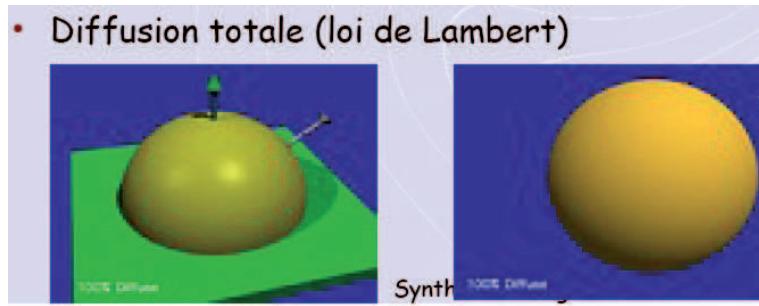


Figure 7.25: Modèle de Lambert

- la réflexion spéculaire imparfaite (voir figure 7.26) qui peut être combinée avec le modèle de Lambert (voir figure 7.27) ;

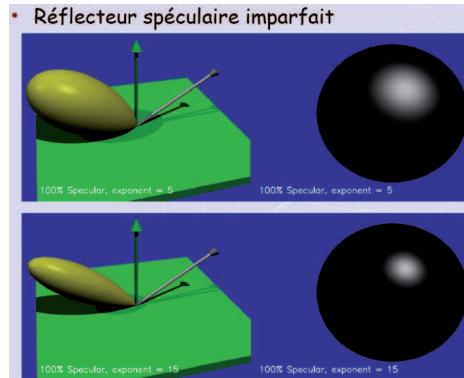


Figure 7.26: Modèle de réflexion imparfaite

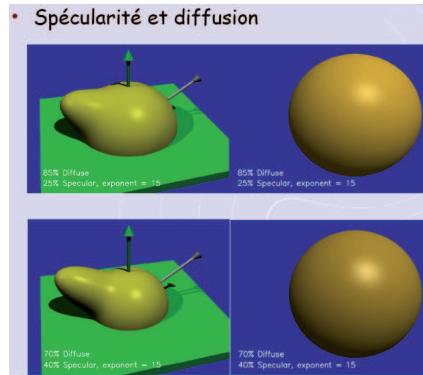


Figure 7.27: Combinaison de modèles de Lambert et de réflexion imparfaite

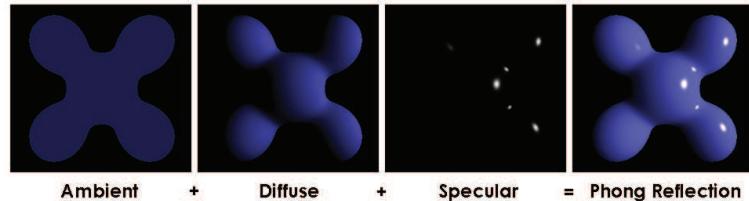


Figure 7.28: Modèle de Phong

- le modèle de Phong qui combine la réflexion spéculaire parfaite et imparfaite avec le modèle de Lambert (voir figure 7.28).

On peut aussi utiliser des modèles plus physiques basés sur la loi de Descartes (voir figure 7.29). Dans ces cas, on doit alors simuler la microgéométrie de la surface et utiliser des modèles d'ombrage, d'absorption et d'éblouissement.

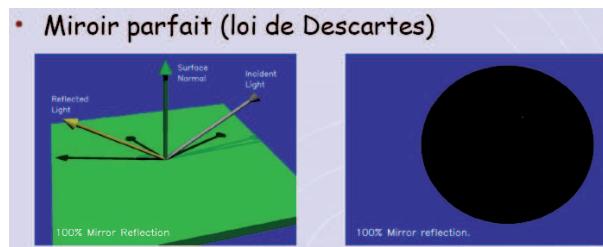


Figure 7.29: Modèle de Descartes

### Modèle de Lambert

Le principe qui sous-tend ce modèle est que la luminosité apparente d'une surface perçue par un observateur est indépendante de son angle d'observation par rapport à la normale au plan. Cette supposition mène à la loi des cosinus (voir figure 7.30)

$$I_{\text{diffuse}} = k_{d,c} I_i (\vec{L} \cdot \hat{n}) = k_{d,c} I_i \cos \theta, \quad (7.58)$$

où  $I_{\text{diffuse}}$  est l'intensité de la lumière diffuse perçue par l'observateur  $I_i$  est l'intensité de la lumière incidente et  $\vec{L}$  sa direction. La normale à la surface au point de réflexion est  $\hat{n}$ . Ici, la constante  $k_{d,c}$  représente la diminution de l'intensité de la lumière qui est une fonction de la couleur de la surface réfléchissante.

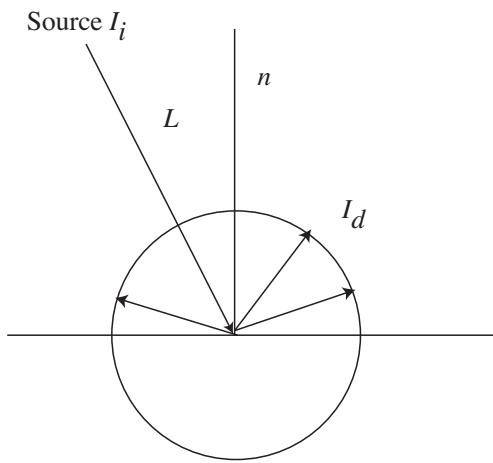


Figure 7.30: Réflexion diffuse

On peut justifier le modèle de Lambert de la façon suivante :

- Le nombre de photons émis dans un cône d'angle solide  $d\Omega$  à partir d'une source distribuée sur une surface  $dA$  est donné par

$$N_e \propto I(\vec{n} \cdot \vec{L}) d\Omega dA = I \cos(\theta) d\Omega dA. \quad (7.59)$$

Ceci correspond à la loi de Lambert (voir figure 7.31).

- Le nombre de photons perçus par un observateur à travers une ouverture  $dA_o$  observant une surface  $dA$  à partir d'une direction  $\vec{L}$  est (voir figure 7.32)

$$N_p \propto I(\vec{n} \cdot \vec{L}) d\Omega dA = I \cos(\theta) d\Omega dA, \quad (7.60)$$

avec  $d\Omega$  l'angle solide que sous-tend la surface  $dA$  pour un observateur situé directement au-dessus de la surface qui émet de la lumière.

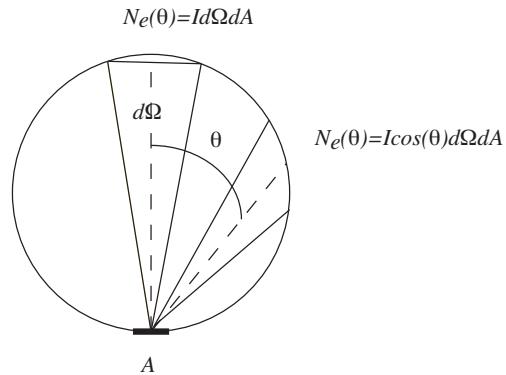
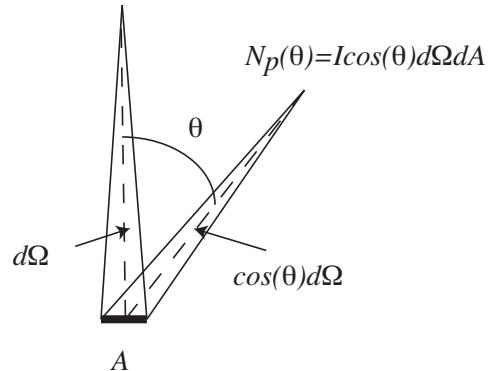


Figure 7.31: Loi de Lambert

Figure 7.32: Nombre de photons perçus à travers une ouverture  $dA$ 

- Le rapport entre  $N_e$  et  $N_p$  est donc indépendant de la position angulaire de l'observateur.
- La luminescence apparente  $I_d$  (en lm/(m<sup>2</sup>sr)) est donc indépendante de la direction de réflexion.

#### Modèle de réflexion imparfaite

Ce modèle correspond à une distribution d'intensité autour de la direction spéculaire de réflexion  $\vec{R}$  du modèle de Descartes (voir figure 7.33). Si on définit  $m$  la réflexivité de la surface, la composante spéculaire imparfaite sera alors donnée par

$$I_{si} = k_{si,c} I_i (\vec{R} \cdot \vec{V})^m. \quad (7.61)$$

La constante  $k_{si,c}$  représente la diminution de l'intensité de la lumière et est fonction de la couleur de la surface réfléchissante.

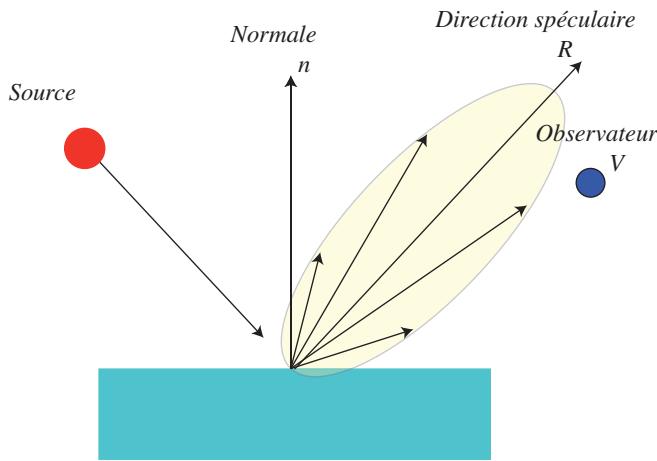


Figure 7.33: Réflexion spéculaire imparfaite

Lorsque  $m$  est faible ( $m = 1$  par exemple), la lumière est distribuée de façon diffuse autour de  $\vec{R}$ . Lorsque  $m$  est élevé ( $m \gg 1$ ), la lumière est concentrée autour de  $\vec{R}$ . Lorsque  $m$  est infini ( $m = \infty$ ), on retrouve la loi de Descartes (la lumière est émise seulement dans la direction  $\vec{R}$ ).

### Modèle de Phong

Ici, on suppose que la diffusion correspond à une combinaison des modèles de diffusion totale et de diffusion spéculaire imparfaite. On aura alors

$$I_{\text{Phong}} = k_{\text{diffuse}} I_{\text{diffuse}} + k_{\text{si}} I_{\text{si}}, \quad (7.62)$$

avec

$$k_{\text{diffuse}} + k_{\text{si}} = 1. \quad (7.63)$$

Dans les cas où la surface correspond aussi à une source (effet de lumière ambiante) on aura

$$I_{\text{Phong}} = k_{\text{ambiante}} I_{\text{ambiante}} + k_{\text{diffuse}} I_{\text{diffuse}} + k_{\text{si}} I_{\text{si}}, \quad (7.64)$$

avec

$$k_{\text{ambiante}} + k_{\text{diffuse}} + k_{\text{si}} = 1. \quad (7.65)$$

Le modèle de Phong est un modèle de réflexion tridirectionnelle de la lumière (voir figure 7.34)

$$I_{\text{RTD}} = f(\vec{L}, \vec{V}, \vec{R}) = k_{\text{ambiante}} I_{\text{ambiante}} + I_i (k_{\text{diffuse}} (\vec{L} \cdot \vec{n}) + k_{\text{si}} (\vec{R} \cdot \vec{V})^m), \quad (7.66)$$

puisque'il dépend de la direction de la source  $\vec{L}$ , de l'observateur  $\vec{V}$  et du vecteur  $\vec{R}$  donnant la direction de la lumière réfléchie de façon spéculaire (en plus de dépendre de  $\vec{n}$ , la normale au plan de réflexion). On connaîtra toujours  $\vec{L}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{n}$ . Le problème majeur consiste cependant à déterminer le vecteur  $\vec{R}$ .

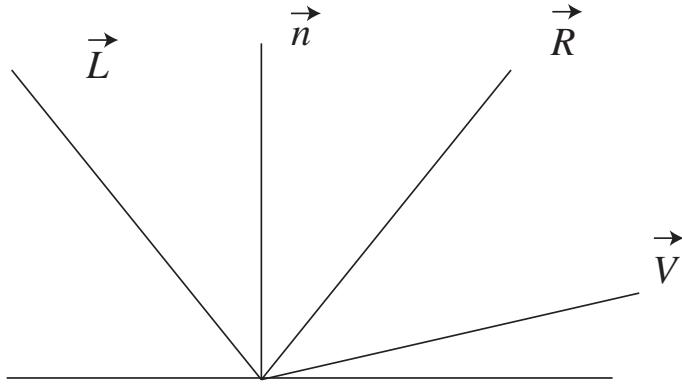


Figure 7.34: Notation vectorielle pour modèle tridirectionnel

On peut cependant simplifier le problème si on suppose alors que la source est très loin du plan de réflexion ( $\vec{L}$  est constant sur la surface) et que l'observateur est très loin du plan de réflexion ( $\vec{V}$  est aussi constant par rapport à la surface). On définira  $\vec{H}$ , un vecteur situé à mi-distance entre  $\vec{L}$  et  $\vec{V}$  (voir figure 7.35)

$$\vec{H} = \frac{\vec{L} + \vec{V}}{2}. \quad (7.67)$$

$\vec{H}$  est l'orientation que devrait avoir la surface pour que la réflexion dans la direction  $\vec{V}$  soit maximale (réflexion spéculaire). En examinant bien les vecteurs  $\vec{R}$  par  $\vec{H}$  on s'aperçoit que les termes  $\vec{R} \cdot \vec{V}$  et  $\vec{n} \cdot \vec{H}$  ont un comportement semblable. Le modèle de réflexion bidirectionnelle sera alors donné par (voir figure 7.36)

$$I_{\text{RBD}} = f(\vec{L}, \vec{H}) = k_{\text{ambiante}} I_{\text{ambiante}} + I_i (k_{\text{diffuse}} (\vec{L} \cdot \vec{n}) + k_{\text{sic}} (\vec{n} \cdot \vec{H})^m). \quad (7.68)$$

Un des problèmes les plus limitatifs de cette approximation est que l'on suppose que la source est à l'infini. On peut remédier ce problème en modifiant l'intensité incidente à partir d'un modèle semblable à celui utilisé pour la réflexion spéculaire imparfaite (voir figure 7.37)

$$\tilde{I}_i = I_i |\vec{L} \cdot \vec{L}_s|^m. \quad (7.69)$$

Le modèle de réflexion bidirectionnelle sera alors donné par

$$I_{\text{RBD}} = k_{\text{ambiante}} I_{\text{ambiante}} \quad (7.70)$$

$$+ I_i |\vec{L} \cdot \vec{L}_s|^m (k_{\text{diffuse}} (\vec{L} \cdot \vec{n}) + k_{\text{sic}} (\vec{n} \cdot \vec{H})^m). \quad (7.71)$$

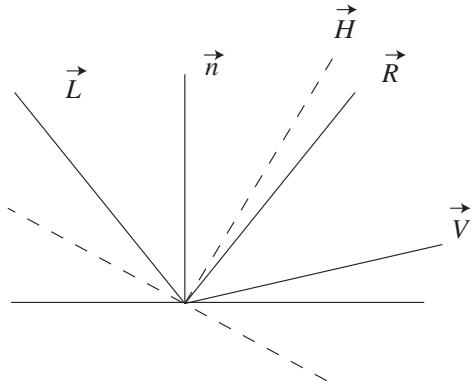
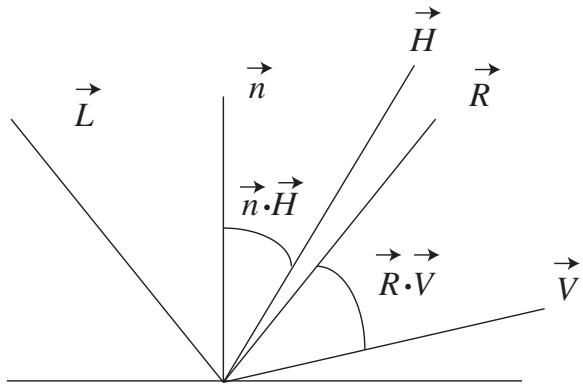
Figure 7.35: Définition de  $\vec{H}$ 

Figure 7.36: Notation vectorielle pour modèle bidirectionnel

Notez que ce modèle s'applique à la réflexion à un point dans l'espace. En général, on utilisera la méthode des rayons pour simuler l'intensité due à la réflexion provenant de différents points sur le plan de réflexion. Ceci mène aux modèles d'ombres dont celui de Gouraud.

#### *Modèle d'ombres de Gouraud*

Ici, on suppose que l'intensité de lumière réfléchie par une surface globale est construite en utilisant une interpolation linéaire à partir des intensités  $I_{RBD}$  à différents points  $x_i$  sur la

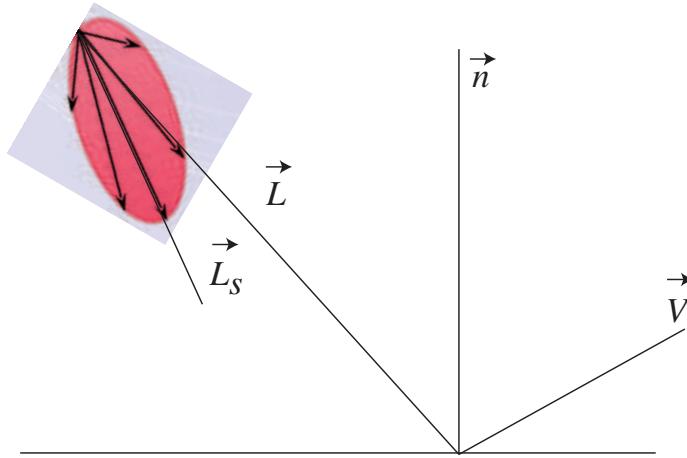


Figure 7.37: Source imparfaite

surface. Pour des surfaces planes en 2D, cette interpolation correspond à

$$\Delta I_{\text{RBD}} = \frac{(I_{\text{RBD}}(x_2) - I_{\text{RBD}}(x_1))}{x_2 - x_1}, \quad (7.72)$$

$$I_{\text{RBD}}(x) = I_{\text{RBD}}(x_1) + \Delta I_{\text{RBD}} \times (x - x_1), \quad (7.73)$$

pour tout point  $x$  entre  $x_1$  et  $x_2$ .

Pour des surfaces planes en 3D, il faut considérer une double interpolation linéaire en  $x$  et  $y$ . Pour des surfaces incurvées en 3D, le processus est beaucoup plus compliqué, mais se résume tout de même à des interpolations linéaires en  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On peut aussi utiliser des modèles d'ombres plus complexes, tel que le modèle de Phong.

### Modèles de réflexion physique

Pour les modèles de réflexion physique, on simule la réflexion en utilisant exclusivement le modèle de Descartes. On utilise aussi un modèle de Fresnel approximatif pour prendre en compte le coefficient de réflexion de la lumière. Cependant, la surface uniforme est remplacée par un ensemble de microsurfaces planes qui auront des orientations aléatoires décrites par une distribution de direction normale  $\vec{h}$  (voir figure 7.38)

$$D = k e^{-\left(\frac{(1-\vec{n} \cdot \vec{h})}{\sigma}\right)^2} = k e^{-(\frac{\alpha}{\sigma})^2}. \quad (7.74)$$

C'est une distribution gaussienne centrée à  $\alpha = (1 - \vec{n} \cdot \vec{h}) = 0$  et de largeur  $\sigma$ . Plus  $\sigma$  est grand, plus les variations d'angles seront élevées et plus la lumière sera réfléchie de façon diffuse. Ceci fonctionne seulement si le diamètre du rayon de lumière incident sur la surface est suffisamment grand pour qu'il soit réfléchi par un nombre important de microsurfaces (la

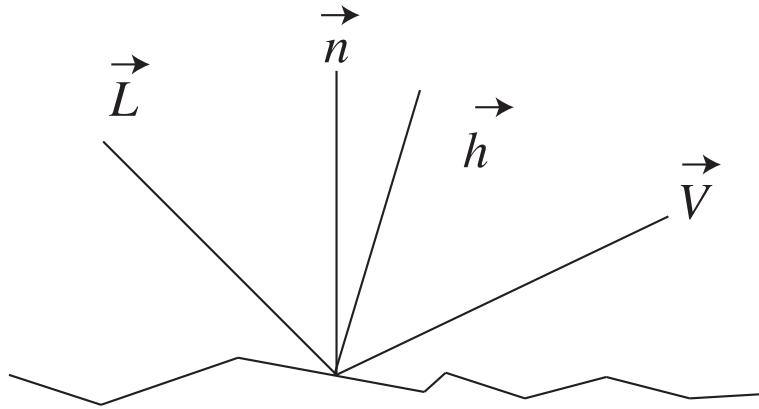


Figure 7.38: Modèle de réflexion pour microsurfaces de direction  $\vec{h}$ . La normale à la surface est  $\hat{n}$  et celle pour la microsurface est  $\hat{h}$

distribution statistique a alors en sens). De plus, on supposera que les surfaces, tout en étant petites, sont plus grandes que la longueur d'onde de la lumière (pour éviter l'apparition de patrons d'interférence).

La procédure à suivre pour analyser le problème de réflexion par des microsurfaces est la suivante.

- On choisit les dimensions des microsurfaces ( $> 10\mu\text{m}$ ).
- On s'assure que le diamètre du rayon de lumière est suffisamment grand pour qu'un grand nombre de surfaces soient touchées.
- On génère un grand nombre de rayons de lumière  $N_s$  partant de la source (représentant l'ensemble des rayons de lumière pouvant quitter la source et atteindre la surface) et pour chacun de ces rayons, on choisit en utilisant d'un processus aléatoire l'orientation de la microsurface à traiter.
- On suit la trajectoire de chacun de ces rayons lumineux et on vérifie si ces rayons atteignent l'observateur
- L'intensité de lumière atteignant l'observateur  $I_o$  est obtenue en évaluant le rapport entre le nombre  $N_o$  de rayons atteignant l'observateur et le nombre total  $N_s$  de rayons quittant la source

$$I_o = I_s \frac{N_o}{N_s}, \quad (7.75)$$

avec  $I_s$  l'intensité de la source. Dans un modèle RBS, cette intensité détermine la contribution spéculaire imparfaite.

Comme de raison, cette méthode ne prend pas en compte l'effet d'ombre, car seulement une surface est traitée à la fois. Elle ne prend pas en compte non plus l'effet de masque. On

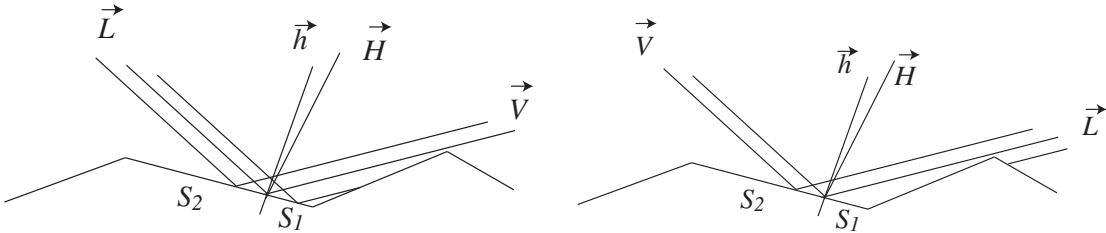


Figure 7.39: Effet d'ombre (gauche) et de masque (droite)

tient compte des effets d'ombre et de masque (voir figure 7.39) en réduisant l'intensité de la lumière perçue par un facteur  $G$  qui est proportionnel au rapport entre la surface qui peut transmettre de la lumière à l'observateur  $S_2$  et la surface totale  $s_t = S_1 + S_2$  de la microsurface

$$G = \frac{S_2}{S_1 + S_2} = \frac{S_2}{S_t}. \quad (7.76)$$

Dans le cas où  $S_1 = 0$ ,  $G = 1$ , l'effet d'ombre disparaît. Une analyse détaillée de la dépendance de  $S_2/S_t$  sur les vecteurs  $\vec{L}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{H}$  pour l'ombrage mène à la relation

$$G_o = \frac{2(\vec{h} \cdot \vec{H})(\vec{h} \cdot \vec{V})}{(\vec{V} \cdot \vec{H})}. \quad (7.77)$$

Pour l'effet de masque on n'a qu'à échanger  $\vec{V}$  et  $\vec{L}$  sachant que  $(\vec{V} \cdot \vec{H}) = (\vec{L} \cdot \vec{H})$

$$G_m = \frac{2(\vec{h} \cdot \vec{H})(\vec{h} \cdot \vec{L})}{(\vec{V} \cdot \vec{H})}. \quad (7.78)$$

Finalement, le terme  $G$  se calcule en utilisant

$$G = \min(1, G_o, G_m). \quad (7.79)$$

On a déjà vu que le coefficient de réflexion de Fresnel pour une réflexion parfaite était donné par

$$R = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 + \left[ \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right]^2 \right\}, \quad (7.80)$$

avec

$$\cos(\theta_i) = (\vec{L} \cdot \vec{n}), \quad (7.81)$$

$$\cos(\theta_t) = -(\vec{T} \cdot \vec{n}). \quad (7.82)$$

Cet effet peut aussi être pris en compte direction dans l'équation 7.75 en utilisant

$$I_o = I_s \frac{\prod_{i=1}^{N_0} R_{r,i}}{N_s}, \quad (7.83)$$

avec  $R_{r,i}$ , le coefficient de réflexion pour le rayon lumineux  $i$  atteignant l'observateur. On utilisera généralement un coefficient de réflexion approximatif de la forme

$$\tilde{R}_{r,i} = \frac{(\mu - 1)^2}{(\mu + 1)^2} + (1 - (\vec{L} \cdot \vec{n}))^5 \frac{(\mu + 1)^2 - (\mu - 1)^2}{(\mu + 1)^2}, \quad (7.84)$$

où  $\mu$  est une constante qui dépend du matériel.

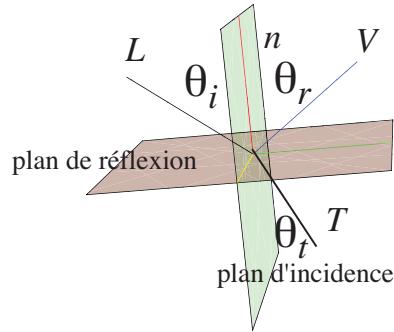


Figure 7.40: Réflexion de Fresnel

Un dernier effet dont il faut tenir compte dans le modèle physique est le terme d'éblouissement («glare effect»). Cet effet est entièrement géométrique et représente le fait que lorsque l'observateur se situe à 90 degrés de la normale ( $\vec{n} \cdot \vec{V} \rightarrow 0$ ) il voit de plus en plus de microsurfaces. L'intensité doit alors être multipliée par

$$k_G = \frac{1}{\vec{n} \cdot \vec{V}}. \quad (7.85)$$

Cet effet étant contrecarré par les effets d'ombrage et de masque que nous avons déjà vu. Il est surtout utile pour amplifier certains effets de couleur pour des surfaces observées de côté.

### 7.4.3 Absorption

L'absorption de la lumière peut être due à plusieurs causes telle l'absorption par une surface (une surface colorée réfléchit une seule couleur et absorbe toutes les autres) ou par son passage à travers un matériel turbide (nuages, eau trouble). C'est ce second effet que nous discuterons ici. Lorsque la lumière traverse un matériel turbide la réduction dans son intensité est principalement due à la diffusion de la lumière par les solides ou liquides en suspension dans le milieu. Si tout ce qui nous intéresse c'est l'intensité de la lumière transmise à travers un milieu uniforme, on peut alors utiliser

$$L(\vec{r} + d\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = L_0(\vec{r}, \vec{\Omega}) e^{-\Sigma_a d}, \quad (7.86)$$

où  $\Sigma_a$  est le coefficient d'atténuation linéaire de la lumière dans le milieu par unité de longueur,  $d$  est la distance parcourue par la lumière et  $L_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$  est l'intensité lumineuse dans la direction  $\vec{\Omega}$  au point  $\vec{r}$  en  $\text{W}/(\text{m}^2 \times \text{sr})$

Dans le cas plus général où le milieu est hétérogène (fumée, flocons de neige), le problème devient beaucoup plus difficile à résoudre. On doit alors utiliser l'équation de transport de la lumière :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} L(\vec{r}, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \int d^2\Omega' L(\vec{r}, \vec{\Omega}') \Sigma_d(\vec{r}) P(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) - \Sigma(\vec{r}) L(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (7.87)$$

Ici,  $Q(\vec{r}, \vec{\Omega})$  est la source lumineuse dans la direction  $\vec{\Omega}$  au point  $\vec{r}$  et  $\Sigma$  est la probabilité totale d'interaction par unité de distance de la lumière avec le milieu au point  $\vec{r}$  avec

$$\Sigma(\vec{r}) = \Sigma_s(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}), \quad (7.88)$$

où  $\Sigma_s(\vec{r})$  représente la probabilité de diffusion. La distribution  $P(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ , qui est la probabilité pour que la lumière de direction  $\vec{\Omega}'$  soit diffusée dans la direction  $\vec{\Omega}$ , satisfait l'équation

$$\int d^2\Omega' P(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = 1. \quad (7.89)$$

L'équation 7.87 est une équation de bilan qui dit que la dispersion de la lumière au point  $\vec{r}$  dans la direction  $\vec{\Omega}$  (terme  $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} L(\vec{r}, \vec{\Omega})$ ) est égale à la quantité de lumière produite à ce point par la source à laquelle on a ajouté la lumière provenant d'autres directions qui est diffusée dans la direction  $\vec{\Omega}$  et où on a soustrait les absorptions. Cette équation intégro-différentielle peut aussi s'écrire sous une forme intégrale (équation de radiance)

$$L(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^h e^{-\int_0^s \Sigma(t) dt} \left[ Q(\vec{r} - s\vec{\Omega}) + \int d^2\Omega' L(\vec{r} - s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \Sigma_d(\vec{r} - s\vec{\Omega}) P(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \right] ds + e^{-\int_0^h \Sigma(t) dt} L(\vec{r} - h\vec{\Omega}, \vec{\Omega}), \quad (7.90)$$

où  $h$  est la distance dans la direction  $\vec{\Omega}$  entre le point d'observation et un point sur la surface entourant le milieu (voir figure 7.41). Cette équation peut alors être résolue facilement en utilisant une méthode Monte-Carlo.

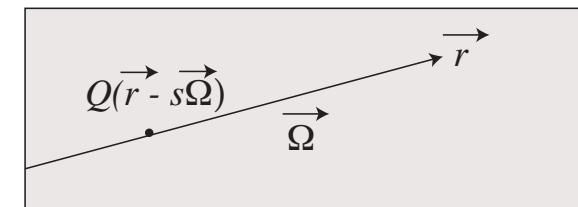


Figure 7.41: Le transport de photon dans un milieu

*Exemple*

Considérons par exemple le problème illustré à la figure 7.42 où nous avons une source de lumière distribuée sur une surface (les sources internes  $Q(\vec{r} - s\vec{\Omega})$  sont nulles). On supposera que  $\Sigma = 0$  dans l'air et que  $\Sigma_s = \Sigma/2 = 0.01 \text{ cm}^{-1}$  dans l'eau et que la diffusion est isotrope

$$\int d^2\Omega' P(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}. \quad (7.91)$$

Le processus de résolution est alors le suivant

1. Choisir le nombre  $N$  de rayons lumineux à simuler (si possible un nombre élevé) et associer à chaque rayon une intensité qui correspond à l'intensité de la source divisée par  $N$ .
2. Pour chaque rayon, choisir en utilisant des nombres aléatoires une position de départ sur la surface de la source et une direction du rayon.
3. Suivre ce rayon lumineux et vérifier s'il atteint la surface de l'eau. Si c'est le cas poursuivre la simulation. Sinon retourner à 2 pour le rayon suivant.
4. Choisir, à partir de la distribution 7.74 la direction de la surface de réflexion et de transmission.
5. Évaluer la direction réfléchie et transmise. En utilisant les relations de Fresnel (équation 7.80), évaluer l'intensité réfléchie et transmise de ce rayon lumineux.
6. Suivre le rayon lumineux réfléchi et vérifier s'il atteint l'oeil. Si c'est le cas, ajouter la contribution de l'intensité réfléchie à l'intensité atteignant l'oeil de cette direction. Si ce rayon lumineux était réfléchi par la surface de l'eau, continuer à la prochaine étape. Sinon (le rayon s'est déplacé dans l'eau), retourner à l'étape 2.
7. Déterminer la distance que le rayon transmis dans l'eau parcourt à partir de la distribution

$$d = -\frac{\ln(n)}{\Sigma}, \quad (7.92)$$

où  $n$  est un nombre aléatoire entre 0 et 1, et vérifier si le rayon lumineux est toujours dans l'eau à cette distance.

- Si le rayon sort de l'eau, choisir, à partir de la distribution 7.74 la direction de la surface de réflexion et évaluer la direction et l'intensité transmise de ce rayon lumineux. Poursuivre la simulation dans l'air (étape 6).
- Si le rayon touche le fond, évaluer la direction et l'intensité transmise de ce rayon lumineux. Poursuivre la simulation dans l'eau (étape 7).
- Si le rayon est toujours dans l'eau, déterminer si l'interaction est une collision  $m < 0.5$  ou une diffusion  $m > 0.5$  en utilisant un nombre aléatoire  $m$  entre 0 et 1. Si c'est une absorption, la trajectoire est complétée et on retourne à 2. Sinon, choisir une direction de diffusion pour le photon et poursuivre la simulation dans l'eau (étape 7).

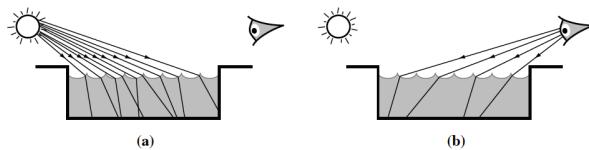


Figure 7.42: Le transport de photon dans un milieu

Lorsque l'ensemble des rayons a été traité, l'image perçue par l'observateur peut être recréée (on connaît la distance totale parcourue, l'intensité lumineuse et la direction des rayons touchant l'oeil).

## 7.5 Perception de la lumière

### 7.5.1 Sources de lumière

Il existe deux différents types de sources de lumière.

- La lumière chaude (incandescente) qui est due au rayonnement d'un corps à haute température. Le spectre est continu et donné par la loi de déplacement de Wien (voir figure 7.43).
- La lumière froide (luminescente) due à la désexcitation d'un électron atomique dans un état d'énergie élevé vers un état plus faible. Le spectre est discontinu et dépend de la composition du matériel émettant les photons (voir figure 7.44).

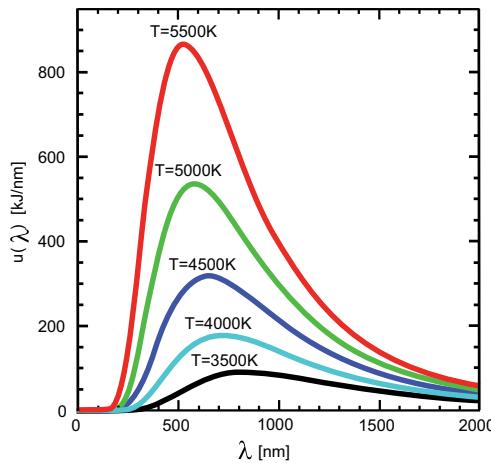


Figure 7.43: Loi de déplacement de Wien avec  $u(\lambda) = dE/d\lambda$ .

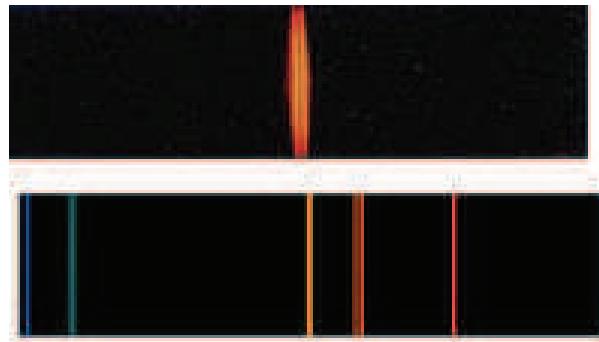


Figure 7.44: Spectre d'émission (visible) du sodium et du mercure.

La lumière du soleil a une composante incandescente (température à la surface du soleil) et une composante luminescente (spectre discontinu dû à la composition du soleil).

La lumière atteignant la surface de la Terre est aussi influencée par la diffusion dans l'atmosphère (voir figure 7.45). Le ciel bleu et les couchers de soleil rouge résultent de la diffusion de la lumière dans l'atmosphère. La lumière blanche du soleil lorsqu'elle entre en contact avec des molécules d' $\text{O}_2$  (20 % de l'air) est diffusée, cette diffusion (diffusion de Rayleigh) étant plus importante pour la lumière bleue. L'observateur qui regarde le ciel (sans fixer le soleil) voit le résultat de cette diffusion (un ciel bleu). Si la couche d'air que la lumière doit traverser est trop importante, il ne reste presque plus de bleu qui réussit à rejoindre l'observateur (le ciel est alors teinté de rouge).

On peut expliquer la diffusion de Rayleigh de la façon suivante. Le champ électrique de l'onde électromagnétique lumineuse déforme le nuage électronique des atomes d'oxygène.

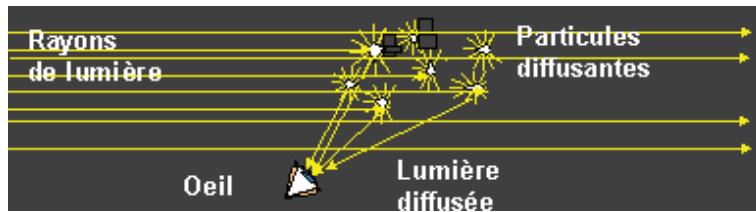


Figure 7.45: Diffusion de la lumière.

Les charges négatives se mettent alors à osciller autour du noyau (charge positive). Le dipôle électrostatique ainsi créé se libère de son énergie en réémettant de la lumière. On peut calculer la puissance rayonnée dans une direction donnée en fonction de la longueur d'onde. Le rayonnement se fait dans toutes les directions, mais avec une intensité qui varie en fonction de l'angle  $\theta$  d'émission par rapport à l'onde incidente

$$I = I_0 \left( \frac{8\pi^4 N(1 + \cos^2 \theta)}{\lambda^4 R^2} \right), \quad (7.93)$$

avec  $N$  le nombre de particules de rayon  $R$  diffusant la lumière et  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière incidente.

### 7.5.2 Détection de la lumière

Les principaux instruments utilisés pour détecter et qualifier la lumière sont :

- détecteur photobiologique (l'oeil) ;
- détecteur photochimique (la pellicule photo et le papier photo), qui est de moins en moins utilisé ;
- détecteur photoélectrique (photorésistance, phototransistor, photopile).

#### L'oeil

L'oeil se présente sous la forme d'un globe maintenu en place dans une cavité conique, l'orbite, par des muscles qui assurent également sa mobilité. Son fonctionnement peut être assimilé à celui de la chambre noire d'un appareil photo. La rétine qui est le détecteur photosensible qui enregistre l'intensité et la fréquence (couleur) de la lumière reçue et transforme le tout sous la forme d'un signal électrique qui est transmis au cerveau. Elle est composée de plusieurs parties. La macula qui représente le point sensible de la rétine. La fovéa qui est une dépression de la rétine située près de l'axe optique de l'oeil, au centre de la macula. Elle permet la plus grande précision visuelle, en éclairage diurne, pour la vision des détails.

La papille, qui est le point d'entrée du nerf optique dans l'oeil, est cependant insensible à la lumière.

L'oeil possède deux types de cellules photosensibles. Les bâtonnets qui permettent de déterminer l'intensité de la lumière perçue par l'oeil ( $\approx 10^8$ ). C'est la vision en noir et blanc qui correspond à différents niveaux de gris, du blanc absolu au noir profond. Les cônes permettent de distinguer les couleurs ( $\approx 5 \times 10^6$ ). Ils sont divisés en trois types en fonction de leur réponse aux différentes fréquences : bleu (S), vert (M) et rouge (L). En réalité, les cônes rouges ont leur maximum d'efficacité pour la lumière jaune (voir figure 7.46).

Les bâtonnets qui sont très sensibles à la lumière réagissent aussi bien à la lumière directe que diffusée. Ils sont à peu près absents de la fovéa et ont une résolution spatiale faible et un long temps de réaction. Par ailleurs, les cônes sont beaucoup moins sensibles à la lumière (d'où la vision en noir et blanc la nuit) et réagissent seulement à la lumière directe. Ils sont concentrés dans la fovéa, ont une bonne résolution spatiale et un court temps de réaction.

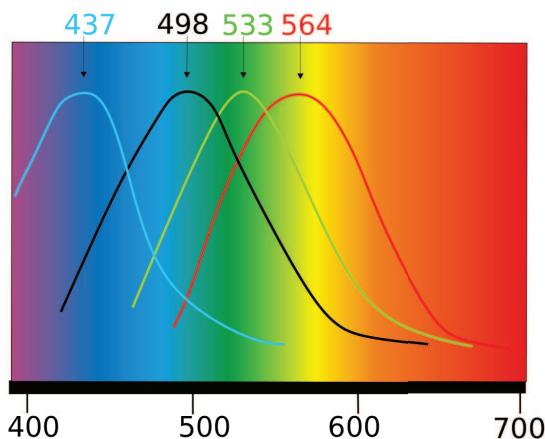


Figure 7.46: Réponse en longueur d'onde des cônes.

L'image que le cerveau perçoit se forme sur la rétine. Un facteur qui influence son excitation est la longueur d'onde de la lumière (seules les longueurs d'onde entre 380 et 780 nm sont détectées par l'oeil humain). L'oeil peut détecter des photons isolés, mais en général pour une perception acceptable de 5 à 10 photons sont requis dans un intervalle de 100 ms. L'image qui se forme sur la rétine est inversée et le cerveau la transforme automatiquement pour la remettre à l'endroit. L'image persiste sur la rétine pour des périodes allant de 0.02 (1/50) à 0.033 (1/30) seconde. Cette persistance est utilisée au cinéma où des images successives fixes sont interprétées par le cerveau comme correspondant à un mouvement continu.

### Capteurs photochimiques (pellicule photographique)

La pellicule photographique est composée de deux parties : le support (papier ou cellulose) sur lequel est déposée l'émulsion contenant des sels d'argent sensibles à la lumière. En exposant l'émulsion à la lumière, les sels d'argent s'ionisent (un électron est éjecté par effet photoélectrique). Le patron d'ionisation représente l'image (les régions les plus ionisées correspondant aux régions ayant reçu le plus de lumière). On développe ensuite l'émulsion en la mettant en contact avec un second sel (NaCl). Le chlore s'attache aux ions d'argent qui noircissent l'émulsion formant un négatif de l'image. On transpose ce négatif sur un papier qui a les mêmes propriétés que la pellicule et on obtient l'image finale. Pour les photos en noir et blanc, ce processus est direct. Pour les photos en couleur, on doit utiliser des filtres et des émulsions qui ont une différente sensibilité aux différentes couleurs (voir figures 7.47 et 7.48).

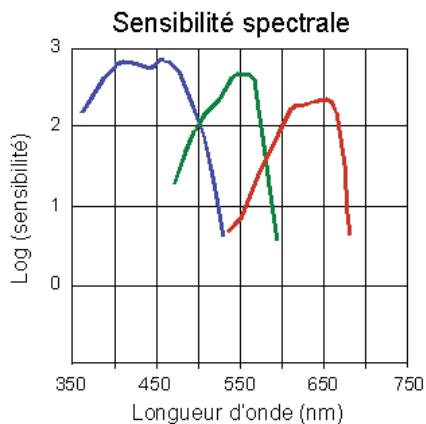


Figure 7.47: Réponse des émulsions aux différentes sources de lumière.

### Capteurs électroniques

Les capteurs électroniques convertissent la lumière (les photons) en signal électronique (en utilisant l'effet photoélectrique) qui est amplifié puis numérisé en utilisant des convertisseurs et enfin interprété afin de générer une image numérique. Le capteur est l'équivalent d'une plaque photographique. Les deux principaux types de capteurs numériques sont les CCD (Charge Coupled Device) et le CMOS (Complementary Metal Oxyde semi-conducteur).

Les capteurs CCD sont des assemblages de photodiodes (voir figure 7.49). Les photons atteignent la région active (sensible à la lumière) du détecteur (la photodiode) et éjectent des électrons par effet photoélectrique. Ces électrons sont ensuite capturés dans une région semi-conductrice dans laquelle ils s'accumulent. Le nombre d'électrons capturés dans la

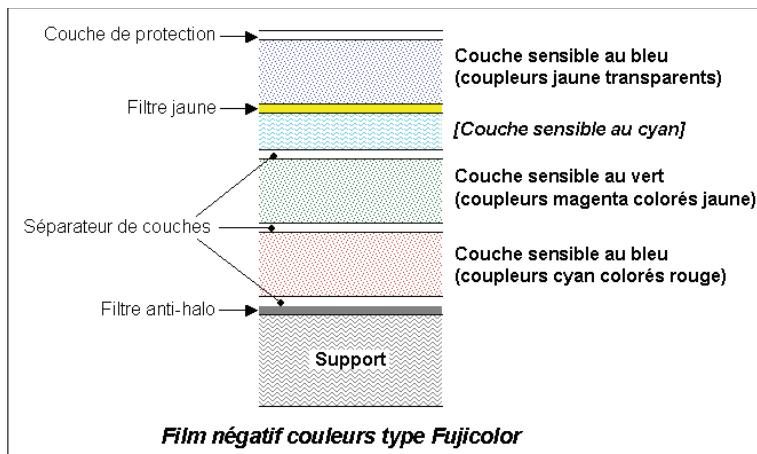


Figure 7.48: Composition d'un film photographique.

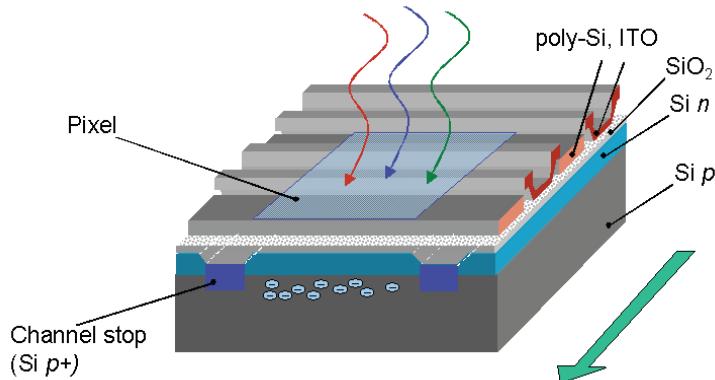


Figure 7.49: DéTECTEUR CCD.

La région semi-conductrice est proportionnel à l'intensité de la lumière reçue. On calcule ce nombre en évaluant la différence de tension dans le semi-conducteur due à l'accumulation de charges. Ils sont sensibles à l'ensemble du spectre de la lumière et ne permettent pas en principe de détecter la couleur. Pour s'assurer de pouvoir identifier les couleurs, on doit insérer entre les cellules photosensibles et la source un filtre qui permet de transmettre à chaque point photosensible (un pixel) une couleur unique. De plus, afin de simuler correctement la vision humaine, la combinaison filtre/photosenseur est choisie de façon à reproduire la sensibilité de l'oeil aux couleurs (voir figure 7.50).

Les capteurs CCD sont généralement beaucoup plus efficaces (de 50 % en moyenne à 99 % pour certains détecteurs très spécialisés) que les pellicules photographiques (environ 5%).

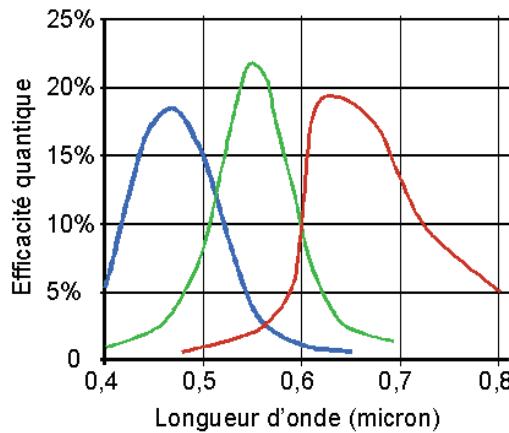


Figure 7.50: Signal CCD en fonction de la longueur d'onde.

Ces détecteurs, qui n'existent que depuis 1969, sont en constante évolution.

Les capteurs CMOS fonctionnent sur le même principe que les capteurs CCD (les photodiodes). La principale différence est que le détecteur intègre à la photodiode une logique d'amplification et d'obturation. Ils consomment donc moins d'énergie que les CCD, réagissent plus rapidement, et peuvent être miniaturisés davantage. Ils sont aussi plus résistants aux lumières intenses.

### 7.5.3 Perception des couleurs

Lorsque vient le temps d'utiliser des capteurs électrochimiques ou électroniques, pour reproduire des images, il est important d'avoir une définition commune des couleurs afin de pouvoir les reproduire le plus exactement possible. C'est à cette fin qu'ont été définis les espaces colorimétriques qui associent des nombres à toutes les couleurs perceptibles par l'oeil humain. Sachant que les cônes de la rétine peuvent détecter trois couleurs (bleu, vert et rouge), cet espace est généralement défini par un triplet, chaque couleur visible étant associée à un point dans cet espace tridimensionnel. Plusieurs espaces colorimétriques peuvent être définis chacun s'adaptant à une situation particulière (éclairage, peinture, écrans vidéo, imprimantes).

La Commission internationale de l'éclairage (CIE) a été créée pour caractériser rationnellement les couleurs des lumières telles que les voit le cerveau humain. Pour ce faire, elle a mené des expériences systématiques de comparaison de couleurs par de nombreux observateurs de manière à définir un observateur moyen. Ces expériences ont été interprétées dans le cadre de la définition physique des lumières comme ondes électromagnétiques contenant des longueurs d'onde comprises entre approximativement 400 et 700 nm (une couleur pure correspond à une longueur d'onde spécifique). Alors que pour le physicien, toute nouvelle

superposition d'un nombre quelconque de couleurs pures définit une nouvelle couleur distincte de toutes les autres, le cerveau pour sa part distingue les couleurs à travers des cônes une couleur est caractérisée par trois paramètres, ceux-ci étant les intensités mesurées par les trois types de cônes. Ce système contient beaucoup moins de couleurs subjectives qu'il n'y a de couleurs objectives en physique (deux couleurs indiscernables pour l'oeil humain peuvent être distinctes pour les appareils de physique). D'autre part, on peut construire une multitude de systèmes équivalents reliés entre eux par trois équations.

Le premier espace colorimétrique, créé en 1931 est le CIEXYZ. Il décrit de manière précise la vision des couleurs en utilisant des fonctions de réponse aux couleurs  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$  et  $\bar{z}(\lambda)$  qui sont dérivées de la réponse des cônes aux stimulations lumineuses. Les réponses  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  à un signal  $I(\lambda)$  (puissance du signal à une longueur d'onde définie par unité de surface et par unité de longueur d'onde en  $\text{W/m}^3$ ) étant donné par

$$X = \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda, \quad (7.94)$$

$$Y = \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda, \quad (7.95)$$

$$Z = \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda. \quad (7.96)$$

Les fonctions de réponses  $\bar{x}(\lambda)$ ,  $\bar{y}(\lambda)$  et  $\bar{z}(\lambda)$  sont illustrés à la figure 7.51.

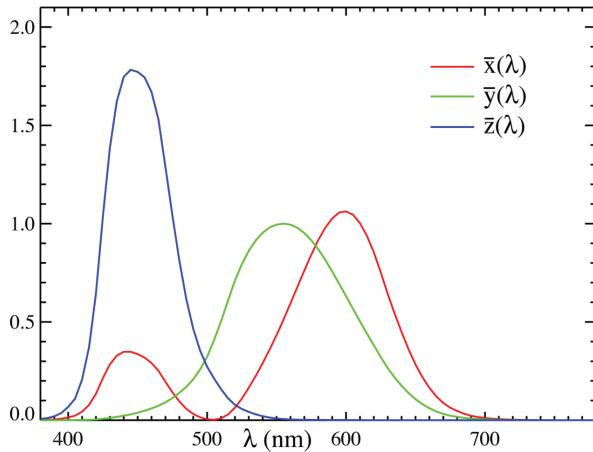


Figure 7.51: Fonctions de réponse du système CIE-XYZ 1931

Un second système, le CIExyY, qui remplace la décomposition en trois primaires par une décomposition en luminance (luminosité  $Y$ ) et chrominance ( $x$  et  $y$  pour la composante

chromatique) est défini par la suite

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad (7.97)$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z}, \quad (7.98)$$

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z} = 1 - x - y. \quad (7.99)$$

Dans ce système, la luminosité relative du blanc correspond à la normalisation  $Y = 1$  (voir figure 7.52).

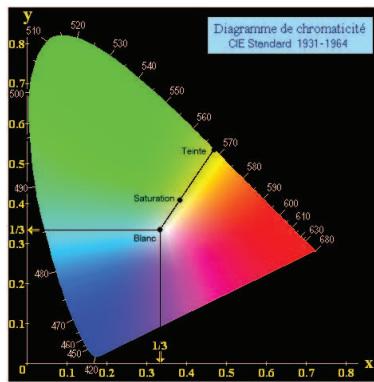


Figure 7.52: Spectre visible pour CIExyY. Le blanc correspond à  $x = y = z = 1/3$

Le système RGB défini initialement pour les écrans cathodiques est semblable au système CIE-XYZ, mais utilise des fonctions de réponse différentes.

$$R = \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{r}(\lambda) d\lambda, \quad (7.100)$$

$$G = \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{g}(\lambda) d\lambda, \quad (7.101)$$

$$B = \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{b}(\lambda) d\lambda. \quad (7.102)$$

Les fonctions de réponses  $\bar{r}(\lambda)$ ,  $\bar{g}(\lambda)$  et  $\bar{b}(\lambda)$  sont illustrés à la figure 7.53. On peut convertir le système RGB-CIE en CIE-XYZ en utilisant la relation linéaire de l'équation 7.103.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{0.17697} \begin{pmatrix} 0.49 & 0.31 & 0.20 \\ 0.17697 & 0.81240 & 0.01063 \\ 0.00 & 0.01 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}. \quad (7.103)$$

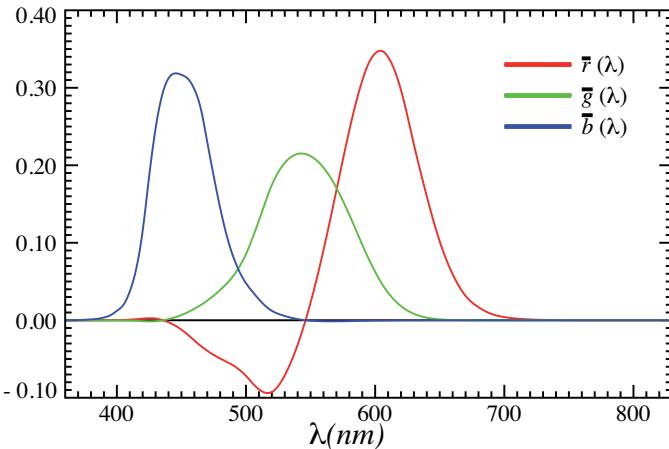


Figure 7.53: Fonctions de réponse du système RGB

Cependant, si l'on considère les couleurs RGB d'un moniteur (écran cathodique) au lieu des couleurs RGB-CIE, une relation différente sera obtenue.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.584 & 0.188 & 0.179 \\ 0.311 & 0.6140 & 0.075 \\ 0.047 & 0.103 & 0.939 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}. \quad (7.104)$$

Notons que pour les écrans, on ne mélange pas réellement trois couleurs, on utilise plutôt des points de différentes couleurs et on se fie à la capacité de l'oeil de mélanger des points de lumières de couleurs différentes situés à des positions spatiales différentes. De plus chaque moniteur est différent (écran cathodique, à cristal liquide, OLED) et construit suivant de paramètres qui diffèrent d'une compagnie à l'autre. En général, une transformation linéaire est requise pour relier le modèle CIE-RGB et RGB moniteur.

Il faut aussi noter que la luminosité du signal lumineux provenant d'un écran n'est pas nécessairement proportionnelle à la puissance nécessaire à sa production. Ainsi, les écrans réagissent très peu à de faibles signaux électriques (proportionnels à la luminosité) et beaucoup plus à des signaux lumineux plus élevés, il faut corriger cette réponse non linéaire afin que l'intensité de la lumière perçue à l'écran représente la réalité. La relation entre l'intensité perçue  $I$  et la tension appliquée  $V$  a la forme générale

$$I = kV^\gamma. \quad (7.105)$$

La valeur de  $\gamma$  dépendra en général de la couleur et du périphérique. Pour les tubes cathodiques,  $\gamma = 2.5$  en moyenne alors que pour les écrans DEL  $\gamma = 2.2$ . Pour les écrans plasma, la relation est linéaire ( $\gamma = 1$ ), mais pour les écrans à cristaux liquides, la relation est beaucoup plus compliquée.

Pour la synthèse d'images, les ombres produiront souvent des couleurs qui ne peuvent être affichées par le moniteur. On doit alors transformer ces couleurs dans l'espace colorimétrique de l'écran (le gamut). En plus des écrans, plusieurs autres systèmes tels les films photographiques, les imprimantes et photocopieurs sont utilisés pour reproduire la couleur. Chacun de ces systèmes aura alors son propre espace colorimétrique dont on devra tenir compte lors de la fabrication, l'équilibrage et l'impression d'images colorées (voir figure 7.54).

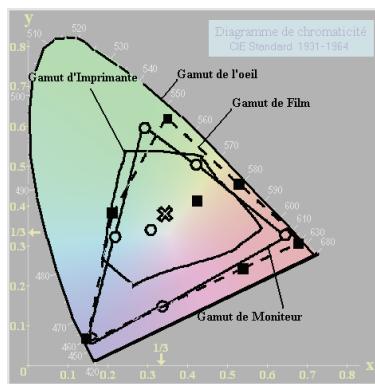


Figure 7.54: Espaces colorimétriques (gamut de couleur) de différents périphériques.

Il existe des méthodes qui permettent d'associer l'espace colorimétrique d'un écran à celui d'une imprimante. Ces méthodes consistent à limiter les espaces colorimétriques de chaque appareil à l'intersection entre des espaces colorimétriques respectifs de chaque appareil (ainsi on ne pourra voir à l'écran que des couleurs pouvant être reproduites par l'imprimante ou la pellicule photographique). Les couleurs non imprimables sont transformées, en utilisant des recettes spéciales, en couleurs approchées qui elles sont imprimables (ou reproduisibles par l'écran). Comme de raison, plusieurs couleurs disponibles sur l'imprimante ne seront jamais utilisées, car elles ne sont pas visibles à l'écran. Ces recettes de transformation correspondent au profil ICC (International Color Consortium) du périphérique. Elles correspondent à des fichiers numériques qui décrivent comment chaque périphérique interprète et restitue les couleurs.

Il faut aussi noter que les couleurs affichées par un écran dépendent aussi du système d'exploitation :

- Windows gère les couleurs en utilisant le «Windows Color System» qui est basé sur une norme ICC compatible (CIECAM02).
- Mac OS (Apple a cofondé l'ICC) gère la couleur en utilisant «ColorSync» qui est un système compatible avec la dernière version d'ICC (CIEXYZ).
- Linux utilise aussi des profils ICC, mais de façon assez primaire (Argyll Color Management System, LPROF, dispCalGIU).

### 7.5.4 Intensité lumineuse

Le flux lumineux  $F_l$  correspond à la puissance lumineuse émise par une source et est mesuré en lumen (lm). Il est différent du flux d'énergie électromagnétique  $F_e(\lambda)$  émis par une source (W/m). Un lumen correspond au flux émis dans un angle solide d'un stéradian (sr) par une source dont l'intensité uniforme vaut une candela (cd).

$$1 \text{ candela} = 4\pi \text{ lumen} = 12.566 \text{ lumen}. \quad (7.106)$$

Le flux lumineux  $F_l$  est cependant relié au flux d'énergie électromagnétique d'une source ( $F_e(\lambda)$ ), mais il tient compte de l'efficacité de l'oeil humain pour détecter certaines longueurs d'onde. Il est calculé en utilisant

$$F_l = K_M \int_{380 \text{ nm}}^{780 \text{ nm}} F_e(\lambda) \nu(\lambda) d\lambda, \quad (7.107)$$

avec  $K_M=683 \text{ lm/W}$  et  $\nu(\lambda)$  est une fonction de sensibilité spectrale normalisée (voir figure 7.55).

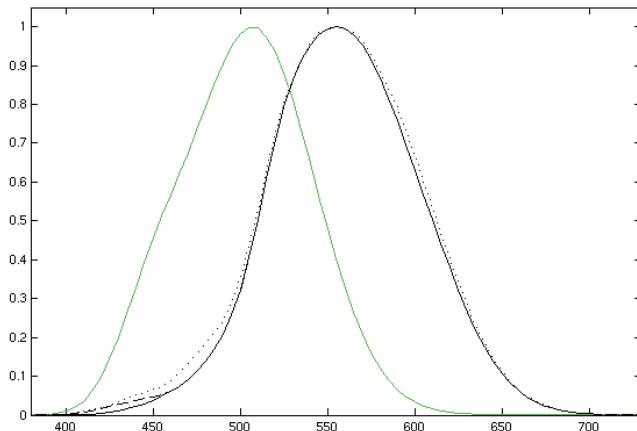


Figure 7.55: Fonctions de sensibilité spectrale normalisées (jour et nuit).

Un flux énergétique d'un watt de lumière à 555 nm (vert jaune) correspond à 683 lm. Un flux énergétique d'un watt de lumière à 510 nm (vert) ou 610 nm (orange) correspond à un flux lumineux deux fois plus faible (344 lm). Ceci explique la différence de rendement lumineux de différentes sources. Si la puissance est générée dans la zone payante (lampe fluorescente et DEL), la puissance lumineuse est maximale pour une puissance électromagnétique donnée. Si elle est générée loin du maximum d'efficacité (ampoule classique ou halogène), le rendement lumineux pour une même puissance électromagnétique est beaucoup plus faible.

Un lux est l'éclairement d'une surface qui reçoit un flux lumineux de un lumen par mètre carré. C'est l'unité qui est utilisée pour caractériser l'éclairage. Par exemple

- 0.5 lux correspond à une nuit de pleine lune ;
- l'intervalle 20–70 lux correspond à une rue, la nuit, bien éclairée ;
- l'intervalle 200–400 lux correspond à un appartement bien éclairé ;
- 25000 lux correspond à une journée à l'extérieur par ciel couvert ;
- l'intervalle 50000–100000 lux correspond à une journée à l'extérieur en plein soleil.

## 7.6 Conclusion

Ce chapitre était dédié à l'utilisation de la physique optique pour des applications multimédia. Il contenait une brève revue des principes de la réflexion et de la réfraction et proposait des méthodes simples qui peuvent être utilisées pour reconstruire des images. Nous avons aussi abordé rapidement les capteurs utilisés pour détecter la lumière et certaines contraintes reliées aux instruments servant à la reproduction d'images.

Dans le prochain chapitre, nous nous intéresserons aux équations décrivant le mouvement des fluides. Nous analyserons aussi les propriétés que possèdent les ondes pouvant apparaître à la surface de ces fluides.

## Chapitre 8

### Milieux continus et ondes

#### 8.1 Les fluides

Les fluides sont des milieux matériels parfaitement déformables. On regroupe sous cette appellation :

- les liquides, qui sont des fluides peu compressibles ;
- les gaz, qui sont des fluides compressibles.

Dans certaines conditions (hautes températures et pressions), le milieu n'est ni liquide ni gazeux, il reste cependant un fluide (fluide supercritique).

Les fluides, contrairement aux solides, sont constitués de molécules qui ne sont pas fortement reliées entre elles. Si ces molécules sont peu concentrées dans le milieu et interagissent très faiblement entre elles (principalement par collision), alors elles forment un gaz. Les molécules peuvent aussi interagir plus fortement par l'intermédiaire de forces de Van der Waals et des interactions dipolaires et le milieu devient un liquide. Ce sont donc ces interactions qui expliquent les propriétés physiques et chimiques des gaz et des liquides.

La dynamique des fluides c'est l'étude du mouvement des fluides, qu'ils soient en phase liquide ou gazeuse. Elle fait partie de la mécanique des fluides avec l'hydrostatique (statique des fluides). La résolution d'un problème de dynamique des fluides demande normalement de calculer diverses propriétés des fluides par exemple la vitesse, la pression, la masse volumique et la température en tant que fonctions de l'espace et du temps.

Les axiomes fondamentaux de la dynamique des fluides sont des lois de conservation :

- la conservation des masses ;
- la conservation de la quantité de mouvement ;
- la conservation de l'énergie.

Les équations différentielles non linéaires qui résultent de ces lois de conservation décrivent le mouvement des fluides dans l'espace et le temps. Ces équations n'ont généralement pas de solutions analytiques et ne sont donc utiles que pour des simulations numériques. Elles peuvent cependant être simplifiées en utilisant différentes approximations de façon à les rendre plus faciles à résoudre. Des exemples sont :

- les équations pour les ondes à la surface des liquides (les vagues) que nous discuterons à la section 8.3 ;
- les équations pour les ondes de pression dans les gaz (ce qui est perçu comme un son) que nous verrons à la section 9.1.

### 8.1.1 Comportement des fluides

Ce sont les équations de Navier-Stokes qui gouvernent le comportement des fluides. Malgré leur relative simplicité, ces équations peuvent générer des comportements extrêmement complexes comme la turbulence. Comme il est difficile d'aborder facilement de tels phénomènes chaotiques en utilisant des équations déterministes, on considère souvent le comportement du fluide d'un point de vue statistique (la physique statistique). Cependant, les phénomènes turbulents restent tout de même difficiles à prédire. Le problème est que la majorité des fluides (eau, air) ont un comportement turbulent dans la vie de tous les jours (écoulement d'une rivière, vent, etc.).

### 8.1.2 Viscosité

L'interaction entre les molécules dans un gaz ou dans un liquide donne naissance au concept de viscosité. Elle représente la résistance qu'offre un fluide à des forces de déformation. Pour un gaz, c'est principalement l'échange de quantité de mouvement entre différentes couches de gaz qui donne naissance à cet effet. Pour un liquide, les mécanismes exacts à la source de la viscosité ne sont pas encore complètement compris.

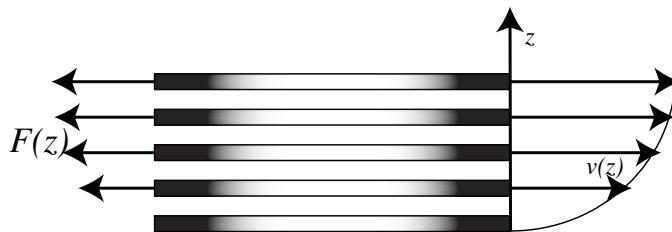


Figure 8.1: Définition de la viscosité. Des couches de fluide de surface  $S$  glissent les unes sur les autres avec une vitesse  $\vec{v}$  qui dépend de leur position en  $z$ . La force  $\vec{F}$  de frottement visqueux est dans une direction qui s'oppose à la différence de vitesse entre deux plans

La viscosité dynamique est le coefficient de proportionnalité  $\eta$  qui relie la force  $\vec{F}$  qui s'exerce à l'interface entre deux couches superposées de fluide et qui s'oppose au déplacement d'une couche par rapport à l'autre. Cette force est aussi proportionnelle à la différence de vitesse  $\Delta \vec{v}$  entre les deux couches de surface  $S$  (voir figure 8.1)

$$\vec{F} = -\eta S \frac{d\vec{v}}{dz}. \quad (8.1)$$

En effet, si les couches ont la même vitesse, il n'y a aucun déplacement des couches, l'une par rapport à l'autre et la force de frottement est nulle. L'unité utilisée pour la viscosité est le Poiseuille (PI) avec  $1 \text{ PI} = 1 \text{ kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-1}$ . Notez qu'au lieu d'utiliser la viscosité dynamique, on utilise souvent la viscosité cinématique  $\nu$  pour caractériser les fluides, celle-ci étant définie par

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (8.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

Lorsque  $\eta$  est indépendant de la vitesse du fluide, on dit que le fluide est newtonien. Ceci est le cas de la majorité des gaz, et des liquides de faible masse molaire. Sinon, le fluide est dit non-newtonien (solutions de polymères, les purées, les gels, les peintures, etc.).

### 8.1.3 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes correspondent à des équations de bilan (bilan d'énergie, de masse et de quantité de mouvement). Elles peuvent prendre différentes formes selon le point de vue que l'on adopte :

- pour suivre dans son déplacement un micro volume de fluide, on utilise la description lagrangienne ;
- si l'on préfère considérer le comportement du fluide pour un micro volume localisé à un point fixe dans l'espace, on utilise la description eulérienne.

Les principaux paramètres utilisés pour écrire les équations de Navier-Stokes (excluant le temps  $t$  et la position  $\vec{r}$ ) sont

- $\rho$  : la masse volumique du fluide ;
- $\vec{v}$  : la vitesse du fluide ;
- $p$  : la pression thermodynamique exercée sur le fluide ;
- $\vec{f}$  : la force massique externe s'exerçant dans le fluide et qui peut correspondre à la force gravitationnelle, électromagnétique, etc. ;
- $e$  : l'énergie par unité de masse du fluide que l'on décompose en une composante cinétique  $e_c$  et une composante interne (potentielle)  $e_p$

$$e = e_c + e_p = \frac{v^2}{2} + e_p. \quad (8.3)$$

En utilisant ces paramètres, on peut écrire les équations de Navier-Stokes sous une forme différentielle en utilisant une formulation eulérienne (comportement du fluide à un point  $\vec{r}$ ).

- Équation de conservation de la masse (de continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) . \quad (8.4)$$

- Équation de conservation de la quantité de mouvement (deuxième loi de Newton)

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho (\vec{v} \vec{v}^T) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \tau + \rho \vec{f} , \quad (8.5)$$

où  $\vec{\nabla} \tau$  représente la force de résistance due à la déformation du fluide avec  $\tau$  le tenseur des contraintes visqueuses.

- Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\tau \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} , \quad (8.6)$$

où  $\vec{q} = \vec{q}_c + \vec{q}_r$  est le flux de chaleur par conduction thermique ( $\vec{q}_c$ ) et par rayonnement ( $\vec{q}_r$ ).

Les fluides sont classés selon les différentes approximations utilisées pour simplifier les équations de Navier-Stokes :

- fluide newtonien ;
- fluide newtonien compressible (un gaz) ;
- fluide newtonien incompressible (un liquide).

### *Fluide newtonien*

Pour les fluides newtoniens (viscosité constante), on peut supposer que le tenseur des contraintes visqueuses prend la forme

$$\tau = \nu \left( \vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \right) - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \mathbf{I} , \quad (8.7)$$

avec  $\nu$ , la viscosité dynamique et  $\mathbf{I}$ , le tenseur unité. En général, on supposera aussi que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de la température

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T , \quad (8.8)$$

avec  $\lambda$  la conductivité thermique du fluide et  $T$  sa température.

Cette approximation fonctionne très bien pour de nombreux fluides comme l'eau et l'air. Cependant, des fluides comme le miel et la pâte dentifrice ne sont pas newtoniens.

### *Fluides compressibles*

Un fluide est dit compressible lorsqu'on ne peut négliger ses variations de masse volumique au cours du temps. Dans ce cas, on décrit le système à l'aide d'une équation d'état du fluide :  $f(p, \rho, T) = 0$ . Pour un gaz parfait, cette équation d'état s'écrit

$$f(p, \rho, T) = p - \rho \frac{R}{M} T = 0, \quad (8.9)$$

avec  $R = 8.314 \text{ J/(K mol)}$ ,  $\rho$  la masse volumique du gaz et  $M$  sa masse molaire.

### *Fluides incompressibles*

Pour un fluide visqueux newtonien incompressible (masse volumique constante), l'équation de l'énergie est découplée des équations de continuité et de quantité de mouvement. On peut alors déterminer la vitesse et la pression du fluide indépendamment de son énergie. Les équations de continuité et de quantité de mouvement sont alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}), \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\rho \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{v}^T) + \rho \vec{f}. \quad (8.11)$$

## 8.2 Simulations numériques

En général, il est impossible de résoudre analytiquement les équations de Navier-Stokes. Il faut donc avoir recours à des solutions numériques. Les principales méthodes utilisées pour la dépendance spatiale des équations sont :

- méthodes des différences finies (voir section 8.2.1) ;
- méthode des volumes finis (voir section 8.2.2).
- méthodes des éléments finis.

Pour la dépendance temporelle, on utilise encore la méthode d'Euler ou de Runge-Kutta.

### 8.2.1 Méthodes des différences finies

La solution consiste à :

- diviser le problème en une série de  $N$  intervalles de largeur  $h = (x_f - x_0)/N$  (aussi en  $y$  et  $z$ ) ;
- remplacer les dérivées par des différences ;

- résoudre de point en point en utilisant les conditions initiales ou aux frontières.

Pour remplacer les dérivées par des différences on utilise une expansion en série de Taylor limitée à l'ordre  $I$ . Deux choix se présentent :

- expansion vers l'avant

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^I \frac{f^{(i)}(x)}{i!} h^i ; \quad (8.12)$$

- expansion vers l'arrière

$$f(x-h) = f(x) + \sum_{i=1}^I \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (-h)^i . \quad (8.13)$$

Les dérivées premières peuvent alors être remplacées par des :

- différences finies avant d'ordre 1 (expansion avant avec  $I = 1$ )

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) ; \quad (8.14)$$

- différences finies centrées d'ordre 2 (expansions avant et arrière avec  $I = 1$ )

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) . \quad (8.15)$$

Pour les dérivées secondes, on utilisera généralement

- les différences avant d'ordre 1 (expansions avant avec  $I = 2$ )

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h) ; \quad (8.16)$$

- différences finies centrées d'ordre 2 (expansions avant et arrière avec  $I = 2$ )

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) . \quad (8.17)$$

Des expressions similaires existent aussi pour les dérivées d'ordre supérieures. Cette méthode fonctionne, quel que soit l'ordre des dérivées totales ou partielles dans l'équation différentielle.

*Exemple 1*

Considérons l'équation

$$\frac{df(x)}{dx} = \rho(x) + af(x), \quad (8.18)$$

où on suppose que la fonction  $\rho(x)$  est connue à tout point dans l'espace. Nous désirons résoudre ce problème entre  $x_0$  et  $x_f$  sachant que  $f(x_0)$  est connu. Ici, nous diviserons l'intervalle  $[x_0, x_f]$  en  $N$  sous-intervalles de largeur  $h = (x_f - x_0)/N$  et les points  $x_i$  sont définis comme suit

$$x_i = \begin{cases} x_0 & \text{si } i = 0 \\ x_{i-1} + h & \text{si } 1 \leq i \leq N-1 \\ x_f & \text{si } i = N \end{cases}. \quad (8.19)$$

Si on utilise des différences avant d'ordre 1 pour  $f'(x_i)$  l'équation différentielle devient

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \rho(x_{i-1}) + af(x_{i-1}). \quad (8.20)$$

Nous pourrons donc obtenir successivement les  $N$  solutions suivantes

$$\begin{aligned} f(x_1) &= h\rho(x_0) + (1 + ha)f(x_0), \\ f(x_2) &= h\rho(x_1) + (1 + ha)f(x_1)), \\ &\vdots \\ f(x_N) &= \rho(x_{N-1}) + (1 + ha)f(x_{N-1})). \end{aligned}$$

*Exemple 2*

Considérons l'équation

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \rho(x), \quad (8.21)$$

où on suppose que la fonction  $\rho(x)$  est connue à tout point dans l'espace. Ici, nous connaissons la valeur de la fonction aux deux frontières du système ( $x_0$  et  $x_f$ ). Nous diviserons de nouveau l'intervalle  $[x_0, x_f]$  en  $N$  sous-intervalles de largeur  $h = (x_f - x_0)/N$  et les points  $x_i$  sont définis à l'équation 8.19. Si on utilise des différences centrées d'ordre 2 pour  $f''(x_i)$  l'équation différentielle devient

$$\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} = \rho(x_i). \quad (8.22)$$

Nous devrons donc résoudre simultanément les  $N - 1$  équations suivantes

$$\begin{aligned} f(x_2) - 2f(x_1) &= h^2 \rho(x_1) - f(x_0), \\ f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1) &= h^2 \rho(x_2), \\ f(x_4) - 2f(x_3) + f(x_2) &= h^2 \rho(x_3), \\ &\vdots \\ f(x_{N-1}) - 2f(x_{N-2}) + f(x_{N-3}) &= h^2 \rho(x_{N-2}), \\ -2f(x_{N-1}) + f(x_{N-1}) &= h^2 \rho(x_{N-1}) - f(x_f). \end{aligned}$$

On peut écrire ce système d'équations linéaires sous la forme

$$\mathbf{A}\vec{f} = \vec{b}, \quad (8.23)$$

avec

$$\vec{f} = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_{N-2}), f(x_{N-1}))^T, \quad (8.24)$$

$$\vec{g} = (h^2 g(x_1) - f(x_0), h^2 g(x_2), h^2 g(x_3), \dots, h^2 g(x_{N-2}), h^2 g(x_{N-1}) - f(x_f))^T, \quad (8.25)$$

et

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

La solution pour  $\vec{f}$  est finalement donnée par

$$\vec{f} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b},$$

### 8.2.2 Méthode des volumes finis

La solution dans ce cas consiste à diviser le domaine en sous-éléments  $i$  de volume finis  $V_i$  (en 1D ceci correspond à des intervalles de largeur  $h_i$ ). Ensuite, il faut intégrer les équations différentielles (Navier-Stokes par exemple) sur chaque élément. L'intégrale de termes qui contiennent des dérivées premières en 1D est exacte et est reliée à la solution aux frontières de l'intervalle. En 3D on peut utiliser le théorème de la divergence pour remplacer les intégrales sur le volume de la divergence d'une fonction par l'intégrale de la fonction sur

les surfaces des volumes finis. Nous illustrerons cette méthode en considérant de nouveau l'équation différentielle

$$\frac{df(x)}{dx} = \rho(x) + af(x), \quad (8.27)$$

où la fonction  $\rho(x)$  est supposée connue à tout point dans l'espace.

Nous désirons résoudre ce problème pour tout  $x$  dans l'intervalle  $[x_0, x_f]$  sachant que  $f(x_0)$  est connu. Le domaine spatial  $x_0 \leq x \leq x_f$  est ensuite sous-divisé en  $N$  volumes uniformes où les points  $x_i$  qui délimitent les volumes finis sont encore définis par l'équation 8.19.

En intégrant l'équation différentielle sur chaque région  $i$  on obtient

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\rho(x) + af(x)) dx. \quad (8.28)$$

On définit ensuite la moyenne de  $\rho$  ( $\bar{\rho}_i$ ) sur le volume en utilisant

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x) dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x) dx. \quad (8.29)$$

On peut aussi approximer l'intégrale de  $f(x)$  sur l'intervalle  $i$  par la méthode du trapèze

$$\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = h_i \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2}. \quad (8.30)$$

On obtient finalement

$$f(x_i) = \frac{2h_i}{2 - ah_i} \bar{\rho}_i + f(x_{i-1}), \quad (8.31)$$

que l'on résout encore étape par étape pour chaque volume en commençant avec  $i = 1$  ( $f(x_0)$  est connu). Dans le cas où  $a = 0$ , la solution est semblable à celle obtenue par la méthode des différences finies avant si on remplace la valeur de  $\rho$  au point initial ( $x_{i-1}$ ) par la moyenne de  $\rho$  sur l'intervalle  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ .

En 3D, la méthode des volumes finis permet de traiter facilement des problèmes impliquant l'opérateur de la divergence, l'intégrale de volume étant alors remplacée par une intégrale de surface. De plus, la méthode des volumes finis implique seulement les termes de circulation  $f(x)$  aux interfaces (qui doivent être continus d'un volume à l'autre), alors que l'on utilise la moyenne de la variable d'état  $\rho$  sur le volume. Dans les cas où  $\rho$  a une dépendance importante sur  $x$  dans la région elle est préférable à la méthode des différences finies. La figure 8.2 illustre les éléments de volumes utilisés pour simuler une vague déferlante (ré-solution des équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien non compressible) par la méthode des volumes finis.

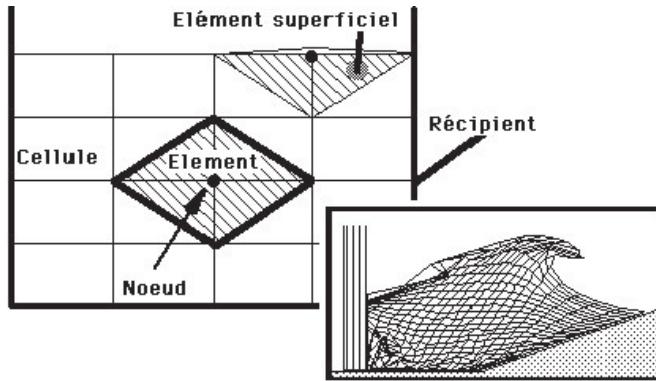


Figure 8.2: Simulation numérique d'une onde déferlante

### 8.3 Ondes de surface

Les équations de Navier-Stokes nous permettent de dériver des équations qui décrivent le comportement d'ondes à la surface d'un fluide (ex. : vagues à la surface d'un volume d'eau). Pour ce faire, on doit éliminer de ces équations les dérivées partielles par rapport à la coordonnée verticale ( $z$ ) tout en préservant les influences de cette variable de la distribution verticale du fluide qui résulte de la circulation du fluide sous l'onde. Ce deuxième effet est important, car l'onde se déplace dans le plan horizontal alors que le déplacement du fluide dans la direction verticale n'est pas ondulatoire.

Ici, nous considérerons les équations de conservation de la quantité de mouvement (équation 8.11) et de la masse (équation 8.10) pour un fluide incompressible et non visqueux sans force externe

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}), \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\rho \vec{v}) = -\vec{\nabla}(g \rho z), \quad (8.33)$$

où on a utilisé  $p = \rho g z$ , la pression hydrostatique due à une colonne d'eau de hauteur  $z$ . Ici,  $g$  est l'accélération due à la gravité.

Les équations qui nous intéressent pour les ondes de surface sont les équations de Boussinesq qui dérivent des précédentes. En supposant que le rotationnel de  $\vec{v}$  est nul, la vitesse des molécules qui composent l'onde dérive alors d'un potentiel  $\varphi$

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi. \quad (8.34)$$

De plus, ce potentiel satisfait approximativement l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \varphi \approx 0. \quad (8.35)$$

Ici, on considérera une onde plane de hauteur  $z$  se déplaçant dans la direction  $x$ . Le potentiel sera donc une fonction de  $x$  et  $z$  seulement ( $\varphi(x, z)$ ). La surface plane du bassin contenant le fluide (sans onde) sera localisée à  $z = 0$  alors que le fond du bassin se situe à  $z = -h$ .

L'onde se propageant selon la direction horizontale  $x$ , on utilisera une expansion en série de Taylor du potentiel de vitesse du fluide (séparation des composantes horizontales et verticales) autour d'une élévation  $z = -h$  (fond du bassin). On peut alors écrire

$$\varphi(x, z) = \varphi(x, -h) + \frac{(z + h)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi(x, z)}{\partial z^2} \right|_{z=-h}. \quad (8.36)$$

Ici, on a négligé le premier terme  $\partial\varphi/\partial z$ , car la vitesse  $v_z$  de l'eau à  $z = -h$  est supposée nulle. On a aussi limité cette expansion à l'ordre  $(z + h)^2$ . On utilise ensuite l'équation de Laplace pour remplacer les dérivées partielles en  $z$  (verticales) par des dérivées partielles en  $x$  (horizontales)

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (8.37)$$

On peut alors écrire

$$\varphi(x, z) = \varphi(x, -h) - \frac{(z + h)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi(x, z)}{\partial x^2} \right|_{z=-h}. \quad (8.38)$$

L'équation de conservation de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}), \quad (8.39)$$

peut être reliés au déplacement de l'eau (masse volumique constante) d'une hauteur  $z(x, t)$  par rapport à la surface du liquide. On peut alors écrire  $\rho(x, t) = z(x, t)\rho$  et l'équation de conservation de la masse devient

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [(h + z(x, t)) v_x]}{\partial x} = \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 v_x}{\partial x^3}, \quad (8.40)$$

où  $v_x$  est la vitesse de l'onde selon l'axe  $x$ . En outre, l'équation de conservation de la quantité de mouvement prend alors la forme

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + g \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^3 v_x}{\partial t \partial^2 x}. \quad (8.41)$$

Lorsque les termes de droite des équations 8.40 et 8.41 sont négligés, on obtient l'approximation des ondes en eau peu profonde.

En combinant les équations 8.40 et 8.41 avec quelques approximations supplémentaires, on obtient l'équation d'onde suivante

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} - g h \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} = g h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{3}{2} \frac{(z(x, t))^2}{h} + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right). \quad (8.42)$$

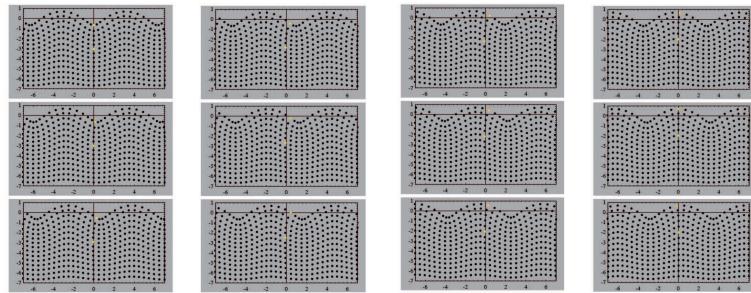


Figure 8.3: Mouvement des molécules de l'onde (voir aussi [Molécules et onde](#))

La figure 8.3 illustre la position des molécules d'eau due au passage de l'onde (différents points dans le temps). Cette équation d'ondes peut aussi se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{1}{2} \psi^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) = 0, \quad (8.43)$$

avec

$$\psi = 3 \frac{z}{h}, \quad (8.44)$$

$$\tau = \sqrt{3} t \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad (8.45)$$

$$\xi = \sqrt{3} \frac{x}{h}. \quad (8.46)$$

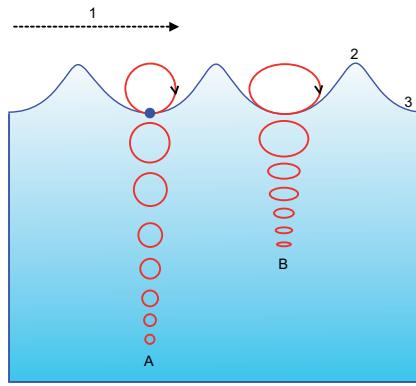


Figure 8.4: Vitesse de l'onde en fonction de la profondeur

Les ondes de différentes longueurs d'onde se déplacent à différentes vitesses de phase. La relation entre la vitesse et la longueur d'onde est reliée à la relation de dispersion. Pour

l'équation d'onde que nous avons dérivée la relation de dispersion est donnée par

$$\nu(\lambda) = \sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}, \quad (8.47)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde et  $\nu$  la fréquence de cette onde. La vitesse de phase de l'onde  $c_\phi$  (vitesse des crêtes) est donnée par

$$c_\phi = \lambda\nu = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}. \quad (8.48)$$

En eau très profonde (voir figure 8.4), la vitesse de phase de l'onde sera donnée par

$$c_\phi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (8.49)$$

alors qu'en eau peu profonde, elle sera donnée par

$$c_\phi = \sqrt{gh}. \quad (8.50)$$

La vitesse de groupe de l'onde (enveloppe de l'onde) est donnée par

$$c_g = \frac{\partial\nu}{\partial k}, \quad (8.51)$$

avec  $k = 1/\lambda$  (voir figure 8.5).



Figure 8.5: Vitesse de phase et vitesse de groupe de l'onde

La densité d'énergie (énergie par unité de surface) d'une onde est donnée par

$$E = \frac{1}{8}\rho g z^2. \quad (8.52)$$

La vitesse de propagation de cette énergie est donnée par la vitesse de groupe. La vitesse de la vague diminue lorsqu'elle atteint la plage ( $h$  diminue) et sa hauteur augmente. Cependant, ce ralentissement n'atteint pas toutes les molécules de la vague en même temps et on se retrouve alors dans la situation où les molécules au haut de la vague se déplacent plus rapidement que les molécules près de la surface. La vague se brise alors et on est en présence d'une vague déferlante. Ce phénomène se produit lorsque la profondeur  $h$  devient inférieure à une valeur de  $1.3A$  avec  $A$  l'amplitude de la vague (voir figure 8.6).

En général, les ondes de surface sont atténuées à mesure qu'elles se déplacent. Ceci est dû aux forces de frottement internes du fluide qui sont reliées à sa viscosité. Sur la mer, cette atténuation des vagues est compensée par un apport constant d'énergie dû au vent (voir figure 8.7). On obtient alors un équilibre, fonction de la vitesse des vents, qui déterminera aussi bien l'amplitude de la vague que sa longueur d'onde.

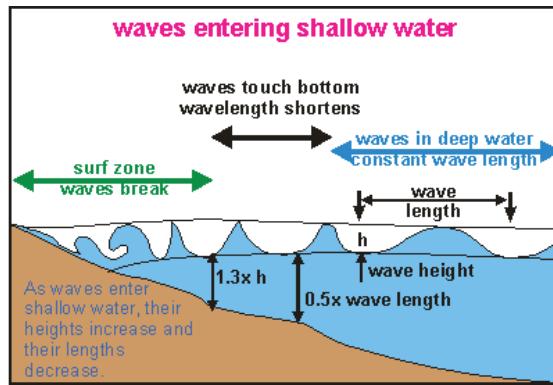


Figure 8.6: Vagues à l'approche de la plage

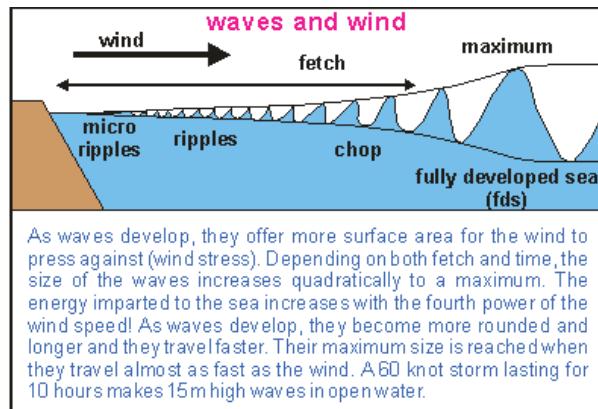


Figure 8.7: Génération des vagues

### 8.3.1 Les tsunamis

Un tsunami est une onde provoquée par un mouvement rapide d'un grand volume d'eau (océan ou mer). Ce mouvement est en général dû à un séisme ou bien un glissement de terrain sous-marin de grande ampleur. Contrairement aux vagues, un tsunami n'est pas créé par le vent. Les tsunamis peuvent atteindre une vitesse de 800 km/h quand l'océan est profond. Ils sont imperceptibles au large, car leur amplitude y dépasse rarement le mètre pour une période (temps entre deux vagues successives) de plusieurs minutes à plusieurs heures. Ils peuvent provoquer d'énormes dégâts sur les côtes où ils se manifestent par une baisse du niveau de l'eau ou un raz-de-marée. Environ 75 % d'entre eux se produisent dans l'océan Pacifique, la plupart des autres dans l'océan Indien. Dans certains cas assez rares, le tsunami peut prendre la forme d'une vague déferlante (un soliton). Ils peuvent alors se propager sur des milliers, voire une dizaine de milliers de kilomètres, sans être atténués.

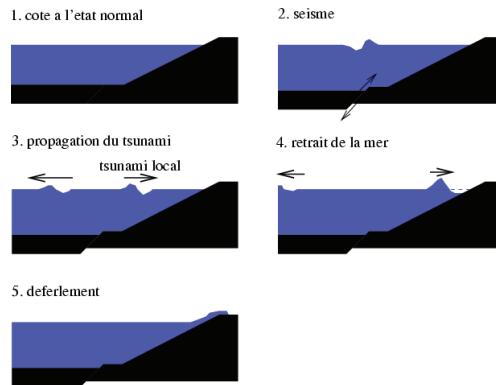


Figure 8.8: Propagation des tsunamis

Le déplacement d'eau crée un mouvement de grande longueur d'onde (généralement quelques centaines de kilomètres) et de grande période (quelques dizaines de minutes). Ce n'est pas principalement la hauteur du tsunami qui est responsable de sa force destructrice, mais la durée de l'élévation du niveau de l'eau et la quantité d'eau déplacée à son passage. Si des vagues de plusieurs mètres de hauteur font légions sur les côtes de l'océan Pacifique, elles ne transportent généralement pas assez d'eau pour pénétrer dans les terres.

Un tsunami d'une hauteur d'un ou deux mètres peut s'avérer ravageur, car la quantité d'eau qu'il transporte lui permet de déferler jusqu'à plusieurs centaines de mètres à l'intérieur des terres si le relief est plat et sans obstacle naturel (arbres, par exemple). On peut voir le phénomène sous un autre angle : une vague classique, d'une période d'au plus une minute, n'élève pas le niveau de l'eau suffisamment longtemps pour qu'elle pénètre profondément, tandis que le niveau des eaux s'élève au-dessus de son niveau normal pendant 5 à 30 minutes lors du passage d'un tsunami. En pleine mer, le tsunami se comporte comme la vague, les particules d'eau sont alors animées d'un mouvement elliptique à son passage. Il n'y a (presque) pas de déplacement global de l'eau, une particule retrouve sa position initiale après le passage du tsunami. Contrairement à la vague, le tsunami provoque une oscillation de l'eau aussi bien en surface qu'en profondeur. La quantité d'eau mise en mouvement est donc très importante.

La vitesse du tsunami (approximation profondeur faible, car  $\lambda \gg h$ ) est donnée par

$$v = \sqrt{gh} \approx 360\sqrt{h} \text{ km/h}, \quad (8.53)$$

avec  $h$  la profondeur de la mer en km et sa longueur d'onde est

$$\lambda = \left( \frac{T}{60} \right) v, \quad (8.54)$$

avec  $T = 1/v$  sa période en minutes et  $v$  la vitesse en km/h. La majorité des tsunamis d'origine tectonique ont une longueur d'onde supérieure à la centaine de kilomètres et des périodes supérieures à 1 heure.

L'amplitude  $A$  du tsunami peut être approximée par la relation :

$$A \approx \sqrt{\frac{E}{r\sqrt{h}}}, \quad (8.55)$$

avec  $E$  l'énergie emmagasinée dans le tsunami,  $h$  la profondeur et  $r$  la distance qu'il a parcourue depuis son point d'origine. L'amplitude augmente lorsque l'eau devient moins profonde, en particulier à l'approche des côtes et quand l'énergie est plus élevée. Elle diminue avec la distance, car l'énergie se répartit sur un front d'onde plus grand. Lorsque le tsunami s'approche des côtes sa période et sa vitesse diminuent, son amplitude augmente. Si son amplitude devient comparable à la profondeur de l'eau, une partie de la vitesse d'oscillation de l'eau se transforme en un mouvement horizontal global, appelé courant de Stokes. C'est plus ce mouvement horizontal qui est la cause des dégâts que l'élévation du niveau de l'eau. À l'approche des côtes, le courant de Stokes d'un tsunami a pour vitesse théorique

$$u \approx \frac{A^2}{2h^2} v. \quad (8.56)$$

La source des tsunamis n'étant pas le vent (contrairement à la vague) on s'attend à ce qu'ils soient beaucoup plus affectés par la force de frottement (aucune source additionnelle d'énergie) et donc plus atténusés que les vagues à mesure qu'ils se déplacent à la surface de l'eau. Cependant, le facteur d'atténuation d'une onde est inversement proportionnel à sa longueur d'onde. Les tsunamis ayant de très grandes longueurs d'onde, leur atténuation est donc relativement faible, ce qui leur permet de se propager sur de très longues distances.

### 8.3.2 Conclusions

Ce chapitre s'est intéressé aux équations décrivant le mouvement des fluides. Les propriétés des ondes pouvant apparaître à la surface de ces fluides sont aussi analysées. Finalement, une courte discussion des Tsunamis a été présentée. Au chapitre 9, nous dériverons premièrement les équations décrivant le comportement des ondes de pression dans un gaz. Ceci sera suivi par une discussion des propriétés des ondes sonores et de la perception des sons par les humains.

## Chapitre 9

### Acoustique

L'acoustique est la branche de la physique qui étudie le son (production, transmission et détection), or un son correspond à une onde de pressions qui se déplace dans l'air et interagit avec notre appareil auditif.<sup>[16, 17]</sup> Nous commencerons donc ce chapitre en dérivant les équations qui décrivent les ondes sonores à partir des équations de la dynamique des fluides que nous avons vues au chapitre 8.

#### 9.1 Ondes sonores

On peut dériver le comportement des ondes de pression dans un fluide compressible (un gaz) à partir des équations de Navier-Stokes (voir figure 9.1)

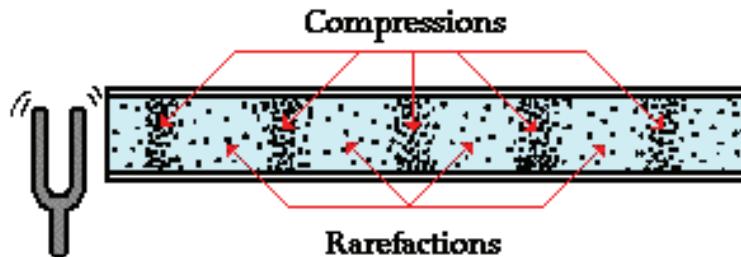


Figure 9.1: Ondes de pression

- Équation de conservation de la masse (équation 8.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) . \quad (9.1)$$

- Équation de conservation de la quantité de mouvement (équation 8.5) pour un gaz non turbulent ( $\vec{\nabla} \cdot \rho (\vec{v} \times \vec{v}^T) = 0$ ) et non visqueux ( $\vec{\nabla} \tau = 0$ ) lorsqu'aucune force externe n'est appliquée ( $\vec{f} = 0$ )

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = -\vec{\nabla} p . \quad (9.2)$$

Nous supposerons aussi que le gaz dans lequel notre onde de pression se déplace est idéal. Nous utiliserons donc l'équation d'état

$$p = \frac{\rho RT}{M} = \gamma \rho, \quad (9.3)$$

où  $\gamma$  est fonction de la température. Nous supposerons finalement que le déplacement de l'onde de pression se fera sans échange de chaleur (processus adiabatique et l'équation 8.6 pour la conservation de l'énergie est inutile). Dans ce cas,  $\gamma$  est supposé constant (indépendant de  $\rho$ ) et donné par

$$\gamma = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (9.4)$$

Maintenant, procédons à la dérivation des équations qui contrôlent le comportement d'une onde de pression qui se déplace dans la direction  $x$  dans de l'air de masse volumique  $\rho_0$  à la pression  $p_0$ . Lors du passage de l'onde, la pression de l'air passera de  $p_0$  à  $p$ , ce changement de pression modifiant localement la masse volumique l'air de  $\rho_0$  à  $\rho$ . Si on définit  $s$  la variation relative de la masse volumique par rapport à  $\rho_0$

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad (9.5)$$

et on pourra écrire  $\rho = \rho_0(1 + s)$ . Une expansion de  $p$  au premier ordre en  $\rho$  autour des conditions d'équilibre donne alors

$$p = p_0 + \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) = p_0 + \gamma \rho_0 s = p_0 + \tilde{p}, \quad (9.6)$$

où  $\tilde{p} = p - p_0 = \gamma \rho_0 s$  est la pression exercée par l'onde.

En utilisant cette notation on peut réécrire les équations 9.1 et 9.2 en termes de  $\tilde{p} = \gamma \rho_0 s$  et  $v$  en fonction de  $t$  et de la position  $x$ .

- L'équation de conservation de masse devient

$$\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial((1+s)v)}{\partial x}. \quad (9.7)$$

Si on admet que le terme  $s$  était négligeable par rapport à 1 on obtient alors

$$\frac{1}{\gamma \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9.8)$$

- L'équation de conservation de la quantité de mouvement (on ne conserve que les termes dominants) s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}. \quad (9.9)$$

On peut ensuite combiner l'équation de conservation de masse et de quantité de mouvement en prenant la dérivée de la première par rapport à  $t$  et de la seconde par rapport à  $x$  et en éliminant le terme vitesse  $v$

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2}, \quad (9.10)$$

qui est l'équation pour une onde dont la vitesse  $c$  est donnée par

$$c = \sqrt{\gamma} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}, \quad (9.11)$$

en se rappelant que  $\tilde{p}$  est la variation de pression dans l'air due au passage de l'onde. Si on élimine  $\tilde{p}$  au lieu de  $v$  des équations de conservation on obtient plutôt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (9.12)$$

qui est aussi une équation d'onde de vitesse  $c = \sqrt{\gamma}$ . Les molécules ont donc des vitesses qui ont un comportement ondulatoire au passage de l'onde.

Pour l'air, on utilise plutôt

$$c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{c_p \cdot p}{c_v \rho}} = \sqrt{\frac{\beta \cdot p}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\beta \cdot p_0}{\rho_0}}, \quad (9.13)$$

où  $c_p$  et  $c_v$  sont les capacités thermiques massiques à pression et volume constants et  $\beta = c_p/c_v = 1.4$ . On peut aussi écrire la dépendance en température comme suit :

$$c_{\text{air}} = \sqrt{\beta R_s T}, \quad (9.14)$$

avec  $R_s = 287 \text{ J/kg/K}$  et  $T$  la température en K. On utilisera préférablement une approximation pour  $c(T) = c(\Theta)$  de la forme

$$c_{\text{air}}(T) = c_{\text{air}}(\Theta) = (331.3 + 0.606\Theta) \text{ m/s}, \quad (9.15)$$

avec  $\Theta = T - 273.16$  la température en C. Cette relation est valide pour des températures variant de -20 C à 40 C avec une erreur inférieure à 0.2%. Ainsi, à 20 C on obtient  $c_{\text{air}} = 343.3 \text{ m/s}$ .

La solution générale de l'équation d'onde 9.10 est

$$\tilde{p}(x, t) = f\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi\nu t + \theta_f\right) + g\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + 2\pi\nu t + \theta_g\right), \quad (9.16)$$

avec  $f$  et  $g$  des fonctions arbitraires. Ici,  $\theta_f$  et  $\theta_g$  sont des constantes de phase,  $\nu$  est la fréquence et  $\lambda = c/\nu$  la longueur d'onde de l'onde. Le signe + indique une onde qui se dirige

dans la direction  $-x$  et les signes – une onde qui se dirige dans la direction  $+x$ . Pour une onde plane en 1D on utilisera

$$\tilde{p}(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \pm 2\pi\nu t + \theta\right). \quad (9.17)$$

Notons qu'il est aussi possible de généraliser les équations 9.10 et 9.12 au cas en trois dimensions pour obtenir

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \tilde{p}, \quad (9.18)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \tilde{p}. \quad (9.19)$$

La solution pour une onde sphérique en 3D est alors

$$\tilde{p}(r, t) = \frac{A}{r} \sin\left(\frac{2\pi r}{\lambda} \pm 2\pi\nu t + \theta\right). \quad (9.20)$$

### 9.1.1 Intensité et puissance sonores

L'intensité  $I$  d'une onde sonore est donnée par la relation  $I = \nu \tilde{p}$  où  $\nu$  est la vitesse des particules qui se déplacent dans l'onde (pas la vitesse de l'onde qui est notée  $c$ ). Pour une source d'intensité  $I$  ( $\text{W/m}^2$ ), la puissance  $P$  véhiculée par l'onde sonore est donnée par

$$P = \int I dS. \quad (9.21)$$

Une source de puissance  $P$  émettant uniformément dans toutes les directions en 3D aura une intensité

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (9.22)$$

Comme ces particules se déplacent sous l'action de la pression, la force exercée sur les particules est proportionnelle à l'accélération de celles-ci et donc

$$\rho \nu = - \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{p}) dt \approx \frac{\tilde{p}}{c}, \quad (9.23)$$

pour une onde sinusoïdale en 3D. Ainsi

$$I \approx \frac{\tilde{p}^2}{\rho c}. \quad (9.24)$$

L'ouïe humaine peut détecter des différences de pression dans l'air variant de  $20 \mu\text{Pa}$  à environ  $100 \text{ Pa}$  (seuil de la douleur). Ceci donne des valeurs de la puissance sonore  $P$

variant de plus de 14 ordres de grandeur. On utilise en général une échelle logarithmique pour qualifier le niveau de puissance sonore  $L_P$  :

$$L_P = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right) \text{ dB}, \quad (9.25)$$

avec  $P_0 = 10^{-12}$  W. Le niveau d'intensité  $L_I$  sonore est relié au niveau de puissance sonore par :

$$L_I = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = L_P - 10 \log\left(\frac{S}{S_0}\right) \text{ dB}, \quad (9.26)$$

avec  $S_0 = 1 \text{ m}^2$  et  $S$  la surface sur laquelle est distribuée la puissance  $P$ . Quelques exemples de niveaux de puissance sonore que l'on peut rencontrer dans notre environnement sont présentés au tableau 9.1.

Tableau 9.1: Exemples de niveaux de puissance sonore

Émetteur	$P$ (W)	$L_P$ (dB)
Fusée	1,000,000	180
Avion à réaction	10,000	160
Sirène	1,000	150
Concert rock	100	140
Hélicoptère	0.01	100
Cris	0.001	90
Frigo	$10^{-7}$	50
Seuil d'audition (à 28 cm)	$10^{-12}$	0

La principale raison de l'atténuation du son est sa dispersion. Comme nous l'avons déjà vu, la pression d'une onde sonore sphérique diminue en  $1/r$ , son intensité variant comme  $1/S$ . Si on connaît l'intensité d'une onde sonore à une distance  $r_0$  de la source, son intensité à une distance  $r$  sera alors donnée par

$$L_I(r) = L_I(r_0) - 20 \log\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{ dB}. \quad (9.27)$$

L'intensité du son diminue donc d'environ 6 dB chaque fois que l'on double la distance. L'atténuation des ondes sonores peut aussi être due à leur perte d'énergie à mesure qu'elles se déplacent dans le milieu. Cette perte d'énergie est souvent faible puisqu'elle est reliée aux collisions entre les molécules du gaz dans le milieu. Elle dépend fortement de la fréquence de l'onde sonore (voir tableau 9.2).

Tableau 9.2: Atténuation des ondes sonores dans l'air à 20 °C et 70 % d'humidité

Fréquence	Coefficient d'atténuation
125 Hz	0.3 dB/km
250 Hz	1.1 dB/km
500 Hz	2.8 dB/km
1000 Hz	5.0 dB/km
2000 Hz	9.0 dB/km
8000 Hz	76.6 dB/km

### 9.1.2 Effet Doppler

L'effet Doppler (voir figure 9.2) c'est le décalage de fréquence d'une onde entre la mesure à l'émission et la mesure à la réception lorsque la distance entre l'émetteur et le récepteur varie au cours du temps (la vitesse relative entre la source et l'objet n'est pas nulle). Cet effet fut décrit la première fois par Christian Doppler en 1842 et confirmé pour les sons en écoutant des musiciens jouant une note calibrée sur un train de la ligne Utrecht-Amsterdam.

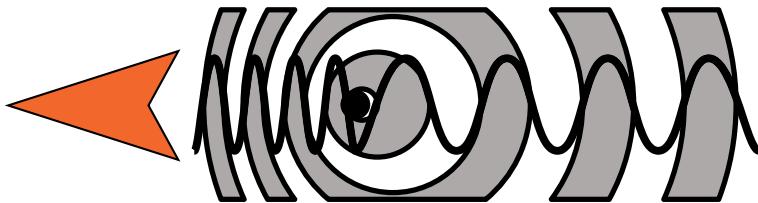


Figure 9.2: Effet Doppler

L'effet Doppler se manifeste par exemple pour les ondes sonores dans la perception de la hauteur du son d'un moteur de voiture, ou de la sirène d'un véhicule d'urgence (voir figure 9.3). Le son est différent selon que l'on est dans le véhicule (l'émetteur est immobile par rapport au récepteur), que le véhicule se rapproche du récepteur (le son devient plus aigu) ou qu'il s'éloigne (le son devient plus grave). Cet effet peut être utilisé pour mesurer une vitesse, par exemple celle d'une voiture, ou bien celle du sang lorsqu'on réalise des examens médicaux (notamment les échographies en obstétrique ou en cardiologie). Il s'applique aussi à la lumière et est donc d'une grande importance en astronomie, car il permet de déterminer directement la vitesse d'approche ou d'éloignement des objets célestes (étoiles, galaxies, nuages de gaz, etc.). Il s'applique aussi aux ondes de surface (vagues) même si on en tient peu compte, les vitesses mises en jeu étant trop faibles.

On peut facilement décrire l'effet Doppler en utilisant un exemple simple : une personne qui se trouve sur une plage houleuse les pieds dans l'eau. Lorsqu'il est au repos, la crête des vagues l'atteint à une fréquence fixe  $f$ . S'il commence à marcher et se dirige vers le large,

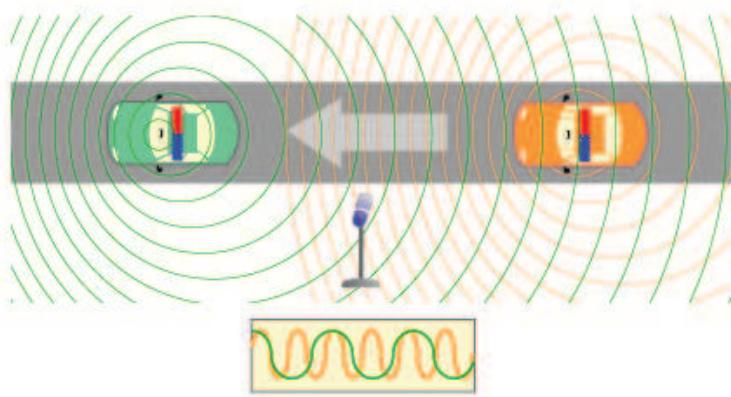


Figure 9.3: Son perçu par une automobiliste en mouvement

les crêtes des vagues l'atteignent plus rapidement et la fréquence de la houle qu'il perçoit est plus élevée que  $f$ . De la même façon, s'il fait demi-tour et retourne dans la direction de la plage les crêtes des vagues l'atteignent moins fréquemment et la fréquence de la houle qu'il perçoit est inférieure à  $f$ . Finalement, s'il se déplace de façon parallèle à la plage, la fréquence des vagues lui semble inchangée. Ainsi, la fréquence des vagues ne dépend pas du mouvement de la personne par rapport à l'eau, mais elle dépend du mouvement de la personne par rapport à la source (émetteur de vagues).

Dans le cas où on considère une source mobile de vagues et un observateur au repos, si la source se déplace dans la direction de l'observateur alors il observera des vagues plus resserrées. Si elle se déplace en s'éloignant de l'observateur alors il observera des vagues plus espacées. Pour dériver l'effet Doppler, il faut donc considérer trois référentiels :

1. le référentiel du milieu dans lequel se propage l'onde de vitesse  $c$  (par exemple l'air pour une onde sonore) ;
2. le référentiel de vitesse  $\vec{v}_s$  lié à l'émetteur (source) et situé à  $\vec{r}_s(t)$  ;
3. le référentiel de vitesse  $\vec{v}_r$  lié au récepteur et situé à  $\vec{r}_r(t)$ .

On supposera d'abord que l'onde se déplace en ligne droite de la source au récepteur dans la direction de propagation du signal

$$\hat{u}_{s,r} = \frac{\vec{r}_r(t) - \vec{r}_s(t)}{|\vec{r}_r(t) - \vec{r}_s(t)|}. \quad (9.28)$$

On définira aussi

$$\beta_s = \frac{(\vec{v}_s \cdot \hat{u}_{s,r})}{c}, \quad (9.29)$$

$$\beta_r = \frac{(\vec{v}_r \cdot \hat{u}_{s,r})}{c}. \quad (9.30)$$

Ainsi,  $\beta_s > 0$  ( $\beta_r > 0$ ) si la vitesse de déplacement de la source (récepteur) est dans la direction de propagation  $\hat{u}_{s,r}$  du signal et  $\beta_s < 0$  ( $\beta_r < 0$ ) si la vitesse de déplacement est dans la direction opposée à  $\hat{u}_{s,r}$ . On utilisera aussi  $v_s$  pour identifier la fréquence de l'onde dans le référentiel de la source, alors que  $v_r$  correspondra à la fréquence reçue par le récepteur.

Maintenant, on suppose que l'émetteur produit des bips à une fréquence  $v_s$ . Lorsque le second bip est produit, le premier bip a parcouru une distance

$$d_{e,0} = \frac{c}{v_s}. \quad (9.31)$$

La source s'étant déplacée de  $c\beta_s/v_s$  dans la direction  $\hat{u}_{s,r}$ , la distance séparant les deux bips dans cette direction est donc

$$d_{e,1} = \frac{c(1 - \beta_s)}{v_s}. \quad (9.32)$$

Si récepteur reçoit le premier bip après un temps  $t_1$  et le deuxième bip après un temps  $t_2$ , il aura lui-même parcouru la distance

$$d_{r,1} = c\beta_r(t_2 - t_1), \quad (9.33)$$

dans la direction  $\hat{u}_{s,r}$ . La fréquence perçue par le récepteur est donc  $v_r = 1/(t_2 - t_1)$ . Le déplacement total du second bip par rapport au premier pour le récepteur étant

$$d_{r,2} = d_{e,1} + d_{r,1} = \frac{c}{v_r}. \quad (9.34)$$

On écrira alors

$$\frac{c(1 - \beta_s)}{v_s} + \frac{c\beta_r}{v_r} = \frac{c}{v_r}, \quad (9.35)$$

d'où

$$v_r = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_s} v_s. \quad (9.36)$$

Dans le cas où l'émetteur est immobile et le récepteur est en mouvement on obtient

$$v_r = (1 - \beta_r)v_s. \quad (9.37)$$

Si c'est l'émetteur qui est en mouvement et le récepteur qui est immobile, on obtient

$$v_r = \frac{1}{1 - \beta_s} v_s \approx (1 + \beta_s)v_s, \quad (9.38)$$

la dernière approximation étant valide seulement lorsque  $\beta_s \ll 1$ .

## 9.2 Réflexion et réfraction des ondes sonores

### 9.2.1 Lois de Snell-Descartes

En acoustique physique on considère la réflexion et la réfraction du son d'une façon tout à fait semblable à ce que l'on fait pour la lumière (voir chapitre 7). Le son étant une onde (de pression) et se déplaçant en ligne droite dans un milieu on supposera qu'il subira.

- une réflexion parfaite (ou miroir) par une surface rigide ;
- une réflexion partielle et une transmission partielle à l'interface entre deux milieux.

Les équations de Snell-Descartes dérivées pour l'optique (voir équations 7.15 et 7.27) s'appliquent aussi dans le cas des ondes acoustiques. Ici, au lieu d'utiliser l'indice de réfraction, nous utilisons explicitement la vitesse des ondes sonores dans les deux milieux. Alors, en examinant la seconde loi de Snell-Descartes :

- Si  $c_i = c_t$ , toutes les valeurs de  $\theta_i$  sont permises ( $-\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi/2$ ), et elles généreront l'ensemble des valeurs permises pour  $\theta_t$  ( $\pi/2 \leq \theta_t \leq \pi/2$ ).
- Si  $c_i > c_t$  toutes les valeurs de  $\theta_i$  sont permises ( $-\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi/2$ ), et elles généreront un ensemble restreint de valeurs pour  $\theta_t$  ( $-|\arcsin(c_t/c_i)| \leq \theta_t \leq |\arcsin(c_t/c_i)|$ ). Aucune onde pénétrant dans le second milieu ne pourra atteindre des angles  $\theta_t > |\arcsin(c_t/c_i)|$  et  $\theta_t < -|\arcsin(c_t/c_i)|$ .
- Si  $c_i < c_t$ , les seules valeurs de  $\theta_i$  permises sont  $-|\arcsin(c_i/c_t)| \leq \theta_i \leq |\arcsin(c_i/c_t)|$  et elles généreront un ensemble complet de valeurs pour  $\theta_t$  ( $-\pi/2 \leq \theta_t \leq \pi/2$ ). Ainsi, aucune onde ne peut pénétrer dans le second milieu pour  $\theta_i < -|\arcsin(c_i/c_t)|$  ou  $\theta_i > |\arcsin(c_i/c_t)|$ . Les ondes avec des angles  $\theta_i < -|\arcsin(c_i/c_t)|$  et  $\theta_i > |\arcsin(c_i/c_t)|$  seront totalement réfléchies par la surface, même si elle est transparente au son.

Ici, il est important de noter que les coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel (voir équations 7.53 pour les ondes transverses électriques et 7.56 pour les ondes transverses magnétiques) à l'interface entre deux milieux dérivés pour la lumière ne sont pas valides pour les ondes acoustiques. Nous verrons dans la prochaine section que la relation entre les coefficients de réflexion et de transmission en énergie des ondes sonores est reliée à l'impédance caractéristique des milieux.

### 9.2.2 Impédance acoustique

L'impédance acoustique  $Z$  caractérise la résistance qu'un milieu oppose à sa mise en mouvement lorsqu'il est traversé par une onde acoustique. Elle est définie comme le rapport

entre la pression acoustique et la vitesse locale de déplacement dans un milieu ouvert (c'est-à-dire en l'absence d'ondes réfléchies)

$$Z \propto \frac{p}{c_{\text{milieu}}}, \quad (9.39)$$

avec  $Z$  en  $\text{Pa} \times \text{s/m}$ . On peut comparer cette impédance avec l'impédance électromagnétique, qui est définie par

$$Z \propto \frac{V}{I}, \quad (9.40)$$

et qui représente la résistance du milieu au déplacement des charges sous l'effet d'un potentiel  $V$ .

On a déjà vu que pour un gaz

$$c_{\text{gaz}} = \sqrt{\beta \frac{p}{\rho}}, \quad (9.41)$$

avec  $\beta = c_p/c_v = 1.4$  pour l'air. L'impédance caractéristique est donc égale au produit de la masse volumique du matériau  $\rho$  par la vitesse du son  $c_{\text{milieu}}$  dans ce même matériel

$$Z = \rho c_{\text{milieu}}. \quad (9.42)$$

Si on définit l'indice de réfraction acoustique (ou optique) entre deux milieux  $n_{1,2}$  comme suit

$$n_{1,2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_{\text{milieu } 1}}{c_{\text{milieu } 2}}, \quad (9.43)$$

alors le rapport d'impédance pour deux milieux sera

$$\frac{Z_1}{Z_2} = n_{1,2} \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (9.44)$$

Notez qu'en optique, l'onde se propage dans le vide et la densité d'un milieu  $\rho_i$  ne correspond à rien de physique.

On peut retrouver au tableau 9.3 des valeurs pour la masse volumique, vitesse du son et impédance acoustique de l'air à différentes températures alors que les impédances acoustiques de différents matériaux (liquides et solides) sont fournies au tableau 9.4.

On peut aussi associer une impédance spécifique à des composantes acoustiques (silencieux, orgue, flûte). Pour ce faire, on doit retourner à la définition originale de l'impédance  $Z$  donnée à l'équation 9.39. Pour une composante acoustique, la vitesse est mesurée à l'entrée du composant et la pression acoustique à sa sortie. Ainsi, si l'on connaît la section  $S$  de la

Tableau 9.3: Masse volumique, vitesse du son et impédance acoustique de l'air à différentes températures.

$T$ (C)	$c$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$Z$ (Pa × s/m)
-10	325.4	1.341	436.5
-5	328.5	1.316	432.4
0	331.5	1.293	428.3
+5	334.5	1.269	424.5
+10	337.5	1.247	420.7
+15	340.5	1.225	417.0
+20	343.4	1.204	413.5
+25	346.3	1.184	410.0
+30	349.2	1.164	406.6

Tableau 9.4: Impédance acoustique de différents matériaux.

Matériel	$c$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$Z$ MPa × s/m
Eau (20 C)	1480	1000	1.48
Eau de mer (20 C)	1531	1025	1.57
Huile d'olive	1445	918	1.32
Quartz	5500	2200	12.1
Acier	5790	7800	4.52
Béton	5650	2300	0.84
Plomb	2160	11400	2.46

composante (surface à travers laquelle le son se déplace dans l'instrument), il est alors possible de définir une impédance mécanique  $Z_m$  telle que

$$Z_m = \frac{Sp}{v} = SZ, \quad (9.45)$$

avec  $Sp$  la force exercée sur la colonne d'air. On peut aussi définir une impédance hydraulique

$$Z_h = \frac{p}{Sv} = \frac{Z}{S}, \quad (9.46)$$

avec  $S \times v$  le débit volumique acoustique à l'entrée du composant.

Lorsqu'une onde acoustique rencontre l'interface séparant deux milieux d'impédances acoustiques différentes (voir figure 9.4), une partie de l'onde est transmise dans l'autre milieu tandis qu'une autre partie est réfléchie à l'interface. La notion d'impédance acoustique

permet d'étudier complètement et quantitativement ce phénomène et d'estimer les quantités d'énergie acoustique transmises et réfléchies.

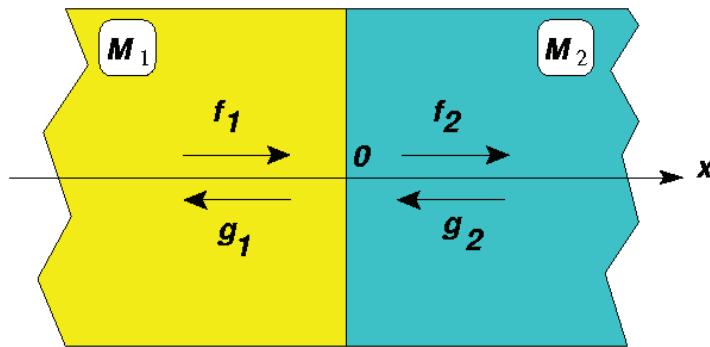


Figure 9.4: Interface acoustique entre deux milieux

### 9.2.3 Réflexion à une interface acoustique

L'étude de la propagation des ondes à l'interface de deux milieux acoustiques peut se faire en se limitant aux ondes d'incidence normale à l'interface (ici on supposera que l'onde se déplace dans la direction  $x$ ). Dans ce cas, la dynamique des fluides fournit les équations d'onde (voir équation 9.10 et 9.12).

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (9.47)$$

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}, \quad (9.48)$$

avec

$$\rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}. \quad (9.49)$$

La vitesse  $v$  étant solution d'une équation d'onde, on peut rechercher une solution de propagation sous la forme de la somme d'une onde  $f_1$  dans la direction  $+x$  et d'une onde  $g_1$  dans la direction  $-x$  pour une onde se déplaçant dans le milieu 1 à la vitesse  $c_1$  (voir figure 9.4)

$$v_1(x, t) = f_1(x - c_1 t) + g_1(x + c_1 t). \quad (9.50)$$

Pour la pression acoustique, on utilisera

$$p_1(x, t) = h_1(x - c_1 t) + k_1(x + c_1 t). \quad (9.51)$$

Si l'onde provient de la gauche, alors

$$v_1(x, t) = f_1(x - c_1 t) \quad \text{et} \quad p_1(x, t) = h_1(x - c_1 t). \quad (9.52)$$

En utilisant l'équation 9.49 ou obtient

$$-\rho_1 c_1 \frac{df_1(u)}{du} = -\frac{dh_1(u)}{du}. \quad (9.53)$$

Cette équation est satisfaite si

$$h_1(x - c_1 t) = Z_1 f_1(x - c_1 t). \quad (9.54)$$

De la même façon, pour une onde provenant de la gauche

$$v_1(x, t) = g_1(x + c_1 t) \quad \text{et} \quad p_1(x, t) = k_1(x + c_1 t), \quad (9.55)$$

et on obtient

$$\rho_1 c_1 \frac{dg_1(u)}{du} = -\frac{dk_1(u)}{du}. \quad (9.56)$$

Cette équation sera satisfaite si

$$k_1(x + c_1 t) = -Z_1 g_1(x + c_1 t). \quad (9.57)$$

Pour une onde arbitraire pouvant contenir une composante provenant de la gauche et une composante provenant de la droite, on utilisera

$$v_1(x, t) = f_1(x - c_1 t) + g_1(x + c_1 t), \quad (9.58)$$

$$p_1(x, t) = Z_1(f_1(x - c_1 t) - g_1(x + c_1 t)). \quad (9.59)$$

Considérons les cas où nous sommes en présence de deux milieux d'impédance acoustique  $Z_1$  et  $Z_2$ , séparés par une interface au point  $x = 0$  (voir figure 9.4). Si on définit :

- $f_1(x - c_1 t)$  et  $g_1(x + c_1 t)$  les fonctions d'onde dans le milieu 1 ;
- $f_2(x - c_2 t)$  et  $g_2(x + c_2 t)$  les fonctions d'onde dans le milieu 2.

alors en  $x = 0$  (intersection entre les deux milieux), la condition de continuité des vitesses et des pressions s'écrit

$$v(0, t) = f_1(-c_1 t) + g_1(c_1 t) = f_2(-c_2 t) + g_2(c_2 t), \quad (9.60)$$

$$p(0, t) = Z_1(f_1(-c_1 t) - g_1(c_1 t)) = Z_2(f_2(-c_2 t) - g_2(c_2 t)). \quad (9.61)$$

Maintenant, considérons successivement une l'onde venant de la gauche dans le milieu 1 ( $g_1 = 0$ ) et une onde venant de la droite dans le milieu 2 ( $f_2 = 0$ ). Pour chacune de ces situations, on peut résoudre les équations 9.60 et 9.61 pour les ondes  $f_2$  et  $g_1$  et obtenir

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} Z_1 - Z_2 & 2Z_2 \\ 2Z_1 & Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ g_2 \end{pmatrix}. \quad (9.62)$$

On a alors que

- $\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} = t_{12}$  est le coefficient de transmission en amplitude des ondes de 1 vers 2 ;
- $\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2} = r$  est le coefficient de réflexion en amplitude des ondes venant de 1 à l'interface ;
- $\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} = -r$  est le coefficient de réflexion en amplitude des ondes venant de 2 à l'interface ;
- $\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2} = t_{21}$  est le coefficient de transmission en amplitude des ondes de 2 vers 1.

Trois cas sont d'intérêt particulier :

- $Z_2/Z_1 = 0$  et  $r = 1$  pour une onde parfaitement réfléchie ;
- $Z_2/Z_1 = 1$  et  $t_{12} = 1$  pour une onde transmise complètement ;
- $Z_2/Z_1 = \infty$  et  $r = -1$  pour une onde parfaitement réfléchie avec changement de phase.

Comme la densité de puissance d'une onde acoustique est donnée dans le cas général par

$$P(x, t) = p(x, t)v(x, t) = Z(x)v^2(x, t), \quad (9.63)$$

alors le coefficient de réflexion de puissance exprime la quantité d'énergie contenue dans l'onde réfléchie  $g_1$ , étant donné une onde incidente  $f_1$

$$R = r^2 = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2. \quad (9.64)$$

Le coefficient de transmission énergétique exprime la quantité d'énergie contenue dans l'onde transmise  $f_2$ , étant donnée une onde incidente  $f_1$

$$T = \frac{Z_2 t_{12}^2}{Z_1} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (9.65)$$

On voit aussi que l'énergie est conservée, car

$$R + T = 1. \quad (9.66)$$

Ces relations (équations 9.64 et 9.65) sont équivalentes pour l'acoustique aux formules de Fresnel développées pour l'optique au chapitre 7. Notez aussi que comme le niveau de puissance sonore est généralement exprimé en décibel, les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques pour les ondes acoustiques sont souvent exprimés de la même façon

$$R(dB) = 10 \log(R), \quad (9.67)$$

$$T(dB) = 10 \log(T). \quad (9.68)$$

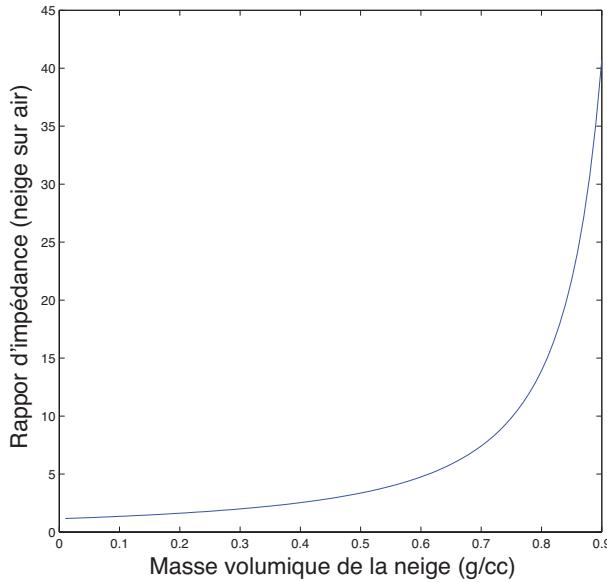


Figure 9.5: Impédance relative de la neige par rapport à l'air

#### Onde acoustique incidente sur une interface air-eau et air-neige

Si l'on considère l'interface entre l'air ( $Z_1 = 430 \text{ Pa} \times \text{s/m}$ ) et l'eau ( $Z_2 = 1.5 \text{ MPa} \times \text{s/m}$ ), on trouve des coefficients de réflexion et transmission

$$R = -0.005 \text{ dB}, \quad (9.69)$$

$$T = -30 \text{ dB}. \quad (9.70)$$

Les sons se transmettent donc très peu d'un milieu à l'autre et l'eau se comporte dans ce cas comme un réflecteur presque parfait. On peut comparer ce résultat avec celui pour de la neige fraîchement tombée (masse volumique de  $0.1 \text{ g/cm}^3$ ). En utilisant la figure 9.5 on obtient

$$\frac{Z_{\text{neige}}}{Z_{\text{air}}} = 1.3518,$$

ce qui donne une valeur de  $R = -16.5 \text{ dB}$ . Donc, le son est peu réfléchi et presque entièrement transmis dans la neige ( $T = -0.1 \text{ dB}$ ).

### 9.3 Interférence

L'interférence est le résultat de la combinaison linéaire de deux ondes et plus, ces ondes étant de même type (ondes sonores, ondes lumineuses). En fait, on parle surtout de patrons

d'interférence lorsque deux ondes sont totalement ou partiellement corrélées, c'est-à-dire qu'elles proviennent de sources à peu près identiques.

On obtient les patrons d'interférence en utilisant le principe de superposition des ondes (voir figure 9.6) :

- La fonction associée à la superposition d'ondes à un point donné est égale à la somme vectorielle des différentes fonctions qui décrivent les ondes individuelles à ce même point.
- Si les maxima de deux ondes se combinent, on aura une interférence constructive alors que si un maximum et un minimum de chacune des ondes se combinent, on aura une interférence destructive.

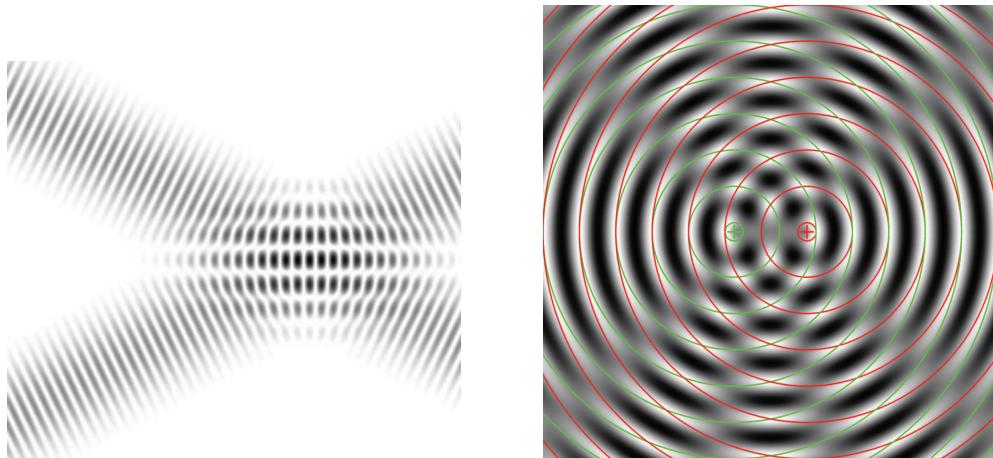


Figure 9.6: Interférence d'ondes planes (gauche) et d'ondes radiales (droite)

Ainsi, si chaque onde  $i$  est représentée par une fonction  $A_i(\vec{r}, t)$ , alors la combinaison de ces ondes donnera

$$A(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N A_i(\vec{r}, t). \quad (9.71)$$

Deux cas sont d'intérêt particulier en acoustique physique :

- l'interférence de deux ondes ayant la même fréquence ;
- l'interférence de deux ondes ayant des fréquences légèrement différentes (le battement).

### 9.3.1 Interférence de deux ondes ayant la même fréquence

Considérons deux ondes sonores planes de même fréquence  $\nu$  se déplaçant dans la direction  $\hat{u}_1$  et  $\hat{u}_2$ . Chaque onde  $i$  est représentée par

$$p_i(\vec{r}, t) = A_i \sin\left(\frac{2\pi(\vec{r} \cdot \hat{u}_i)}{\lambda} - 2\pi\nu t\right). \quad (9.72)$$

La pression au point  $\vec{r}$  sera alors

$$p(\vec{r}, t) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi(\vec{r} \cdot \hat{u}_1)}{\lambda} - 2\pi\nu t\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi(\vec{r} \cdot \hat{u}_2)}{\lambda} - 2\pi\nu t\right). \quad (9.73)$$

Maintenant, on peut simplifier l'analyse en choisissant un point  $\vec{r}$  fixe dans l'espace (position de l'auditeur)

$$p(t) = A_1 \sin(\phi_1 - 2\pi\nu t) + A_2 \sin(\phi_2 - 2\pi\nu t), \quad (9.74)$$

où on a défini

$$\phi_i = \frac{2\pi(\vec{r} \cdot \hat{u}_i)}{\lambda}. \quad (9.75)$$

En utilisant

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b), \quad (9.76)$$

nous allons tenter de représenter l'onde résultante au point  $\vec{r}$  sous la forme

$$p(t) = A \sin(\varphi - 2\pi\nu t). \quad (9.77)$$

On obtient alors

$$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2), \quad (9.78)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}\right). \quad (9.79)$$

Si les ondes sont en phase ( $\phi_1 = \phi_2$ ), on obtient

$$A = \pm(A_1 + A_2), \quad (9.80)$$

et on a une interférence constructive. Si les ondes sont hors phase par  $\pi$  ( $\phi_1 - \phi_2 = \pi$ ) on obtient

$$A = \pm(A_1 - A_2), \quad (9.81)$$

et on a une interférence destructive. Si deux ondes de même amplitude sont déphasées de  $\pi$  on aura

$$A = 0. \quad (9.82)$$

Le signal au point  $\vec{r}$  est alors nul (aucun son n'est perçu par l'auditeur à cette position).

### 9.3.2 Battement

Le battement est une perception sonore due au mélange de deux sons, de fréquences fondamentales voisines, ou contenant des fréquences harmoniques voisines. Au lieu d'entendre un son composé de deux signaux, l'oreille perçoit plutôt une fréquence moyenne agrémentée d'un battement dont la fréquence est la différence de fréquence entre les deux sons.

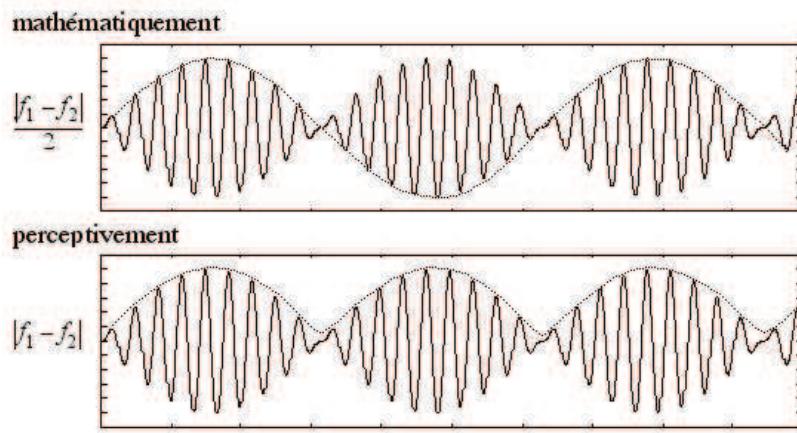


Figure 9.7: Battements

Ainsi, considérons deux ondes sonores planes de même intensité et de fréquences  $v_1$  et  $v_2$  se déplaçant dans la même direction (on supposera encore que le point d'audition est  $\vec{r} = 0$ ). Chaque onde  $i$  est représentée par

$$p_i(t) = A \sin(2\pi v_i t). \quad (9.83)$$

La pression totale sera encore donnée par la somme des pressions

$$p(t) = A(\sin(2\pi v_1 t) + \sin(2\pi v_2 t)). \quad (9.84)$$

Utilisons maintenant la relation

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right). \quad (9.85)$$

On obtient

$$p(t) = 2A \sin\left(\frac{2\pi(v_1 + v_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi(v_1 - v_2)t}{2}\right). \quad (9.86)$$

On aura donc une onde de fréquence  $(v_1 + v_2)/2$  élevée et une onde de fréquence  $(v_1 - v_2)/2$  basse qui correspond au battement (voir figure 9.7).

## 9.4 Diffraction

La diffraction est le comportement des ondes lorsqu'elles rencontrent sur leur chemin des obstacles solides de dimensions comparables ou inférieures à la longueur d'onde de l'onde (voir figure 9.8). Elle résulte de l'interférence de l'onde avec elle-même et peut être simulée en utilisant le principe d'Huygens-Fresnel.

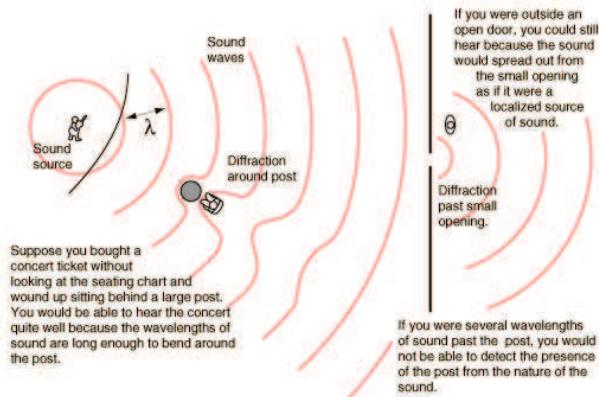


Figure 9.8: Patrons de diffraction d'ondes par des trous et des obstacles

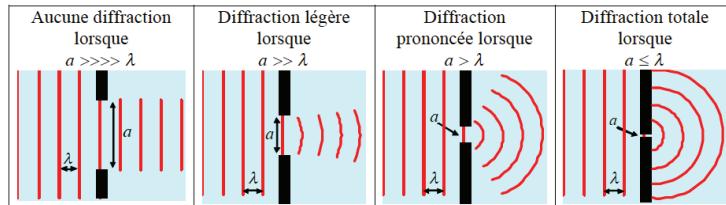


Figure 9.9: Diffraction par une fente

Ainsi, pour une onde sonore se dirigeant vers une ouverture en forme de fente (ex. une porte) nous aurons les possibilités qui suivent (voir figure 9.9).

- Si la fente est beaucoup plus large que la longueur d'onde, on aura un comportement de type rayon (aucune diffraction) et le son continuera en ligne droite,
- Si la fente est beaucoup plus étroite que la longueur d'onde, on aura le même comportement que pour une source ponctuelle et la fente se comportera comme une source d'onde.
- Si la fente a des dimensions ( $d \approx \lambda$ ) de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, on aura un patron de diffraction (interférence de l'onde avec elle-même). Les minimums

du patron de diffraction seront localisés à des angles  $\theta_n$ , par rapport à la normale à la surface de la fente, donnés

$$\theta_n = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{d}\right), \quad (9.87)$$

avec  $n$  un entier. Il est cependant très difficile de prédire de façon générale l'intensité des maxima. Cependant, si on suppose que l'auditeur est très loin de la fente, on peut utiliser les intégrales de Fraunhofer pour obtenir

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin(\pi d \sin \theta / \lambda)}{\pi d \sin \theta / \lambda} \right)^2. \quad (9.88)$$

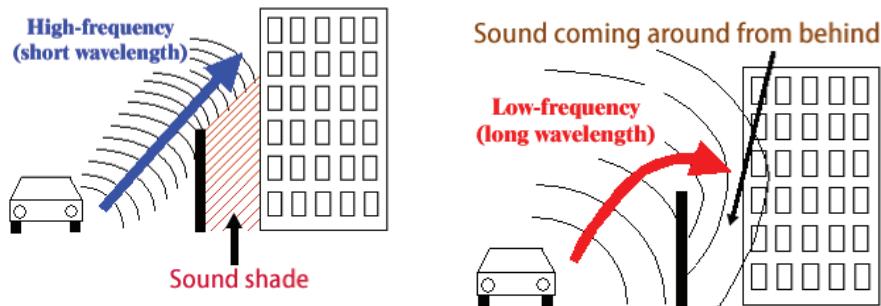


Figure 9.10: Diffraction d'ondes sonores par un mur à hautes (gauche) et basses (droite) fréquences

Le processus de diffraction s'applique aussi lorsque ce sont des objets qui obstruent le passage de l'onde. Encore une fois, c'est la dimension de l'objet par rapport à la longueur d'onde qui dictera le patron de diffraction.

- Si l'objet est beaucoup plus grand que la longueur d'onde, on aura un comportement de type rayon (aucune diffraction) et le son continuera en ligne droite (comportement identique aux rayons de lumière).
- Si l'objet est beaucoup plus petit que la longueur d'onde il aura peu d'impact sur l'onde et deviendra transparent au passage de l'onde.
- Si l'objet a des dimensions de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, on aura un patron d'interférence qui apparaîtra à l'arrière de l'objet et qui s'atténuerà à mesure qu'on s'éloignera de celui-ci.

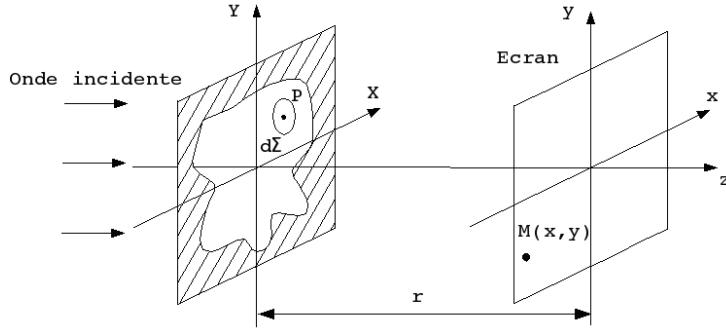


Figure 9.11: Analyse de la diffraction

#### 9.4.1 Analyse de la diffraction

On supposera que chaque point  $(X, Y)$  dans le plan  $\Sigma$  donne naissance à une onde sphérique d'intensité constante  $A$ . La pression  $p$  au point  $(x, y)$  due à une source au point  $(X, Y)$  est donnée par

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{A}{R} \sin\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right) = \frac{A}{r} \sin(kR), \quad (9.89)$$

avec

$$R = \sqrt{r^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2}. \quad (9.90)$$

La pression totale au point  $(x, y)$  due à l'ensemble des ondes est donnée par

$$p(x, y) = \int_{\Sigma} \frac{A}{R} \sin(kR) dXdY. \quad (9.91)$$

Pour le cas où  $R \approx r$  (ouverture faible)

$$R = r + \frac{1}{2} ((x - X)^2 + (y - Y)^2), \quad (9.92)$$

et on obtient alors la transformation de Fresnel

$$p(x, y) = \frac{A}{r} \int_{\Sigma} \sin\left(\frac{k}{r} ((x - X)^2 + (y - Y)^2)\right) dXdY. \quad (9.93)$$

Si  $r \rightarrow \infty$  (ondes planes au point d'observation) on obtient

$$p(x, y) = \frac{A}{r} \sin\left(\frac{k(x^2 + y^2)}{r}\right) \int_{\Sigma} \sin\left(\frac{k(X^2 + Y^2)}{r}\right) dXdY, \quad (9.94)$$

et pour une ouverture carrée de dimensions  $a \times b$ , on obtient

$$I(x, y) \propto |p(x, y)|^2 = I_0 \frac{\lambda^4 r^4}{\pi^4 x^2 a^2 y^2 b^2} \sin^2\left(\frac{\pi x a}{\lambda r}\right) \times \sin^2\left(\frac{\pi y b}{\lambda r}\right). \quad (9.95)$$

## 9.5 Perception des sons

Nous avons déjà défini le son comme étant une onde de pression qui se propage dans un fluide ou un solide. La vitesse de propagation du son dépend principalement de la densité et de la température du milieu

$$c = \sqrt{\beta p / \rho} = 1 / \sqrt{\rho \chi}, \quad (9.96)$$

où  $\rho$  est la densité du gaz et  $\chi$  sa compressibilité. La vitesse du son diminue lorsque la densité du gaz augmente (effet d'inertie) et lorsque sa compressibilité (son aptitude à changer de volume sous l'effet de la pression) augmente.

### 9.5.1 Propagation du son

Seule l'onde de compression se déplace et non les molécules d'air, si ce n'est de quelques micromètres (un son intense ne peut vous décoiffer). Le son se propage également dans les solides sous forme de vibrations des atomes appelées phonons. Là encore, seule la vibration se propage, et non les atomes qui ne font que vibrer très faiblement autour de leur position d'équilibre.

Pour prédire la propagation du son dans l'air, il est nécessaire de connaître la structure thermique de la masse d'air (voir figure 9.12) traversée ainsi que la direction du vent, car :

- le son se propage moins bien à l'horizontale que sous des angles montants à cause du changement de densité (cette propriété est prise en compte dans la conception des théâtres en plein air) ;
- l'atténuation est nettement moins forte sous le vent (régime peu turbulent) ;
- le son peut être littéralement porté par une inversion de température (changement de masse volumique de l'air et de la vitesse du son ce qui conduit à la réfraction) et il est possible d'entendre un train à 5 km d'une voie ferrée sous le vent malgré les obstacles.

### 9.5.2 Audition

L'audition est le fruit d'un mécanisme complexe assuré par les deux oreilles pour permettre la perception d'ondes sonores qui se propagent dans l'air. Par extension, le son désigne aussi la perception auditive de cette onde.

Tout être vivant doté d'une ouïe ne peut percevoir qu'une partie du spectre sonore. L'oreille humaine moyenne ne perçoit les sons que dans une plage de fréquences située entre 20 Hz (en dessous, les sons sont qualifiés d'infrasons) et 20 kHz (au-delà, les sons sont qualifiés d'ultrasons). Cette gamme de fréquences varie également avec l'âge, la culture, etc. Dans le cas du chat, il peut percevoir des sons jusqu'à 25 kHz alors que le chien perçoit les sons

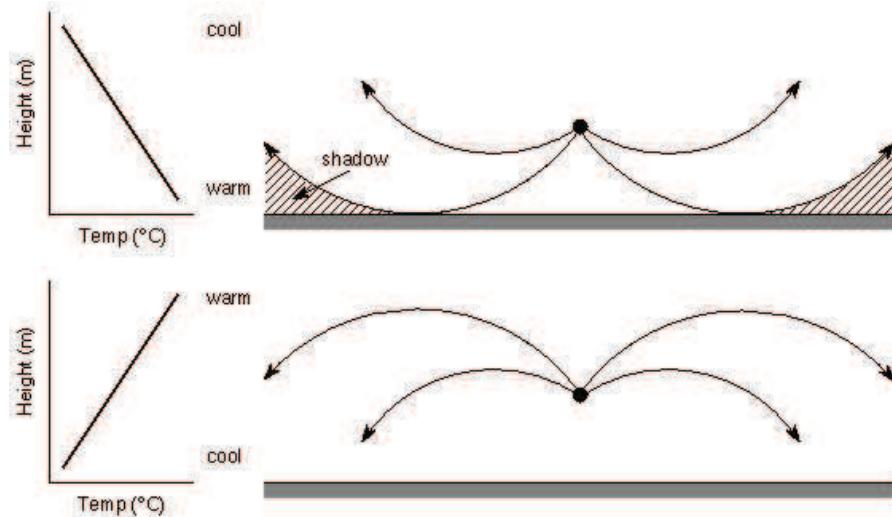


Figure 9.12: Effet d'un gradient de température sur la propagation du son. Cas standard (figure du haut) et inversion de température (figure du bas)

jusqu'à 35 kHz. La chauve-souris et le dauphin peuvent percevoir les sons de fréquence 100 kHz.

Deux seuils sont également importants pour l'ouïe humaine :

- le seuil temporel de reconnaissance de la hauteur (10 ms) donnant la durée minimale d'un son détectable ;
- le temps d'intégration de l'oreille (50 à 100 ms) représentant le temps requis pour détecter la fréquence et l'intensité d'un son.

Pour des signaux plus courts, le signal est perçu comme un claquement.

### 9.5.3 Musique

La gamme de son musical perceptible à l'oreille humaine est divisée en 8 octaves ( $\approx 70$  Hz à  $\approx 17$  kHz) ;

- une octave correspond à un intervalle de fréquence  $[v, 2v]$  ;
- chaque octave est sous-divisée en 12 intervalles à peu près égaux dont les limites correspondent aux notes (7) b mol et dièses ;
- plusieurs types de gammes existent (tempérée, Pythagore, juste intonation présentée au tableau 9.5) et elles peuvent être associées à des fréquences de référence différentes (DO à 264 Hz comme au tableau 9.6 ou LA à 440 Hz).

Tableau 9.5: Notes dans l'octave 3 et 4 pour la gamme juste intonation

Note	Octave 3 ( $\nu$ en Hz)	Octave 4 ( $\nu$ en Hz)
DO	264	528
RÉ	297	594
MI	330	660
FA	352	704
SOL	396	792
LA	440	880
SI	495	990

Tableau 9.6: Octaves DO à 264 Hz.

Octave	$\nu_{\min}$ (Hz)	$\nu_{\max}$ (Hz)
1	66	132
2	132	264
3	264	528
4	528	1056
5	1056	2112
6	2112	4224
7	4224	8448
8	8448	16896

Les diapasons sont basés sur le LA à 440 Hz.

Le timbre d'un son est en quelque sorte la couleur propre de ce son. Il varie en fonction de la source sonore indépendamment de sa fréquence, son intensité et sa durée. Du point de vue de l'acoustique, le timbre dépend de la corrélation entre la fréquence fondamentale, et les harmoniques (une fréquence multiple de la fréquence fondamentale). L'intensité respective de chaque harmonique est déterminante dans la caractérisation du timbre. Plus les fréquences de ces harmoniques sont proches des multiples entiers de la fréquence fondamentale, plus le son est pur ou harmonique (clavecin). Plus elles s'éloignent des multiples entiers, plus le son est anharmonique (piano, cloche).

## Bibliographie

- [1] D. M. Bourg, *Physics for game developers*, O'Reilly, Sebastopol (2002).
- [2] D. H. Eberly, *Game Physics*, Elsevier, New York (2004).
- [3] G. Palmer, *Physics for game programmers*, Apress, New York (2005).
- [4] A. Watt, *3D computer graphics, third edition*, Addison-Wesley, New York (2000).
- [5] K. Bray, et D. Kerwin, "Modelling the flight of a soccer ball in a direct free kick," *Journal of Sports Sciences*, **2003**, 75–85 (2003).
- [6] M. Shegelski, "The motion of a curling rock: Analytical approach," *Canadian Journal of Physics*, **78**, 857–864 (2000).
- [7] M. Shegelski, "The motion of a rapidly rotating cylinders sliding on smooth surfaces," *Canadian Journal of Physics*, **79**, 841–846 (2001).
- [8] M. Shegelski, et M. Reid, "The motion of rotating cylinders sliding on pebbled ice," *Canadian Journal of Physics*, **77**, 847–862 (1999).
- [9] M. Shegelski, et R. Holenstein, "Rapidly rotating sliding cylinders: Trajectories with large lateral displacements," *Canadian Journal of Physics*, **80**, 141–147 (2002).
- [10] E. Jensen, et M. Shegelski, "The motion of curling rocks: Experimental investigation and semi-phenomenological description," *Canadian Journal of Physics*, **82**, 791–809 (2004).
- [11] D. Baraff, *An Introduction to Physically Based Modeling : Rigid body simulation I* (2017), *lien au site web*.
- [12] D. Baraff, *An Introduction to Physically Based Modeling : Rigid body simulation II* (2017), *lien au site web*.
- [13] C. Hecker, *How to simulate a poyntail* (2000), *lien au site web*.
- [14] C. Hecker, *How to simulate a poyntail part 2.* (2000), *lien au site web*.
- [15] A. Heck, P. Uylings, et E. Kedzierska, "Understanding the physics of bungee jumping," *Physics education*, **45**, 63–72 (2010).

- [16] B. Crowell, *Light and matter* (2017), *lien au site web*.
- [17] D. R. Raichel, *The science and applications of acoustics, 2nd edition*, Springer, New York (2006).