Question 3. Sons et effet Doppler (15 points)

Un avion ayant une vitesse constante $\vec{v}_a = (200, 0, 150)^T$ (m/s) passe directement au-dessus de la tête d'un auditeur au temps t (position $\vec{r}_{\text{tête}}(t) = (0, 0, 0)^T$). Cet avion a alors une altitude de 1000 m. L'auditeur commence alors à entendre un signal sonore continu de 5000 Hz provenant de l'avion.

(a) (**7 points**) Montrer que l'avion se trouvait à la position $\vec{r}_a(t_-) = (-484, 0, 637)$ m lorsque le premier signal sonore est perçu par l'auditeur. Ici, le son se déplace dans l'air à une vitesse $c_s = 330.6$ m/s.

(b) (**8 points**) Quelle est la fréquence de la source sonore localisée sur l'avion qui émet le son perçu par l'auditeur?

Solution

(a) *(**7 points**) Montrer que l'avion se trouvait à la position $\vec{r}_a(t_-) = (-484, 0, 637)$ m lorsque le premier signal sonore est perçu par l'auditeur. Ici, le son se déplace dans l'air à une vitesse $c_s = 330.6$ m/s.*

Le signal sonore émis par l'avion se disperse dans toutes les directions de façon uniforme. Le temps pour que ce signal parte du point $\vec{r}_a(t)$ et se rende à vous sera

$$\Delta t = (t - t_-) = \frac{|\vec{r}_{\text{tête}}(t) - \vec{r}_a(t_-)|}{c_s} = 2.42 \ s$$

Pendant ce temps, l'avion se rendra du point $\vec{r}_a(t_-) = (-484, 0, 637)$ au point

$$\vec{r}_a(t) = \vec{r}_a(t_-) + \Delta t \vec{v}_a = (0, 0, 1000) \ m$$

qui est bien la position requise. Le signal que vous avez perçu a donc été émis lorsque l'avion se trouvait à la position $\vec{r}_a(t_-)$

(b) *(**8 points**) Quelle est la fréquence de la source sonore localisée sur l'avion qui émet le son perçu par l'auditeur?*

Un signal sonore émis par une source de vitesse $\vec{v}_s$ à la fréquence ν_s sera perçu par un récepteur de vitesse $\vec{v}_r$ à la fréquence

$$\nu_r = \nu_s \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_s}$$

avec

$$\beta_r = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{u}}{c_s}$$
$$\beta_s = \frac{\vec{v}_s \cdot \vec{u}}{c_s}$$

avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire indiquant la direction de la source par rapport au récepteur

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_r - \vec{r}_s}{|\vec{r}_r - \vec{r}_s|}$$

Ainsi, comme le récepteur est au repos, on aura

$$\nu_s = \nu_r(1 - \beta_s)$$

Le vecteur $\vec{u}$ correspond à

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_{tête}(t) - \vec{r}_a(t_-)}{|\vec{r}_{tête}(t) - \vec{r}_a(t_-)|} = \frac{(484, 0, -637)}{840.37}$$

On obtient donc

$$\beta_s = 0.0045$$

La fréquence d'émission est donc 4978 Hz.