Moment d'inertie et matrice de rotation

Soit la pièce cylindrique représentée sur la figure ci-dessous. L'origine du système d'axes coïncide avec le centre de masse de la pièce. Le point A de coordonnées : $A(0, 10, 10)$ est situé sur son arête supérieure.

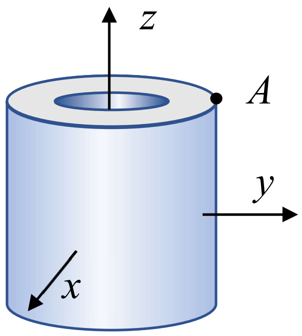
On donne pour la pièce :

- Masse volumique : $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$
- Hauteur $h = 20$ cm
- Rayon interne : $r = 5$ cm
- Rayon externe $R = 10$ cm.

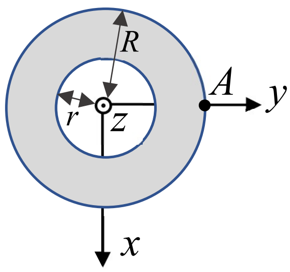
a) Déterminer la matrice moment d'inertie $\boldsymbol{I_C}$ de la pièce par rapport à son centre de masse.

b) On fait subir à la pièce une rotation autour de son centre de masse de façon à ce que le point A se retrouve sur l'axe oz. Déterminer la matrice $\boldsymbol{R}$ de cette rotation.

c) Déterminer le moment d'inertie de la pièce après avoir subi la rotation.



Vue de côté



Vue de haut

Solution :

a) Déterminer la matrice moment d'inertie $\boldsymbol{I_C}$ de la pièce par rapport à son centre de masse.
La pièce peut être vue comme un cylindre plein de rayon R et de hauteur h auquel on enlève un cylindre plein de rayon r et de hauteur h. La matrice moment d'inertie est donc :

$$\boldsymbol{I_c} = m_R \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} - m_r \begin{pmatrix} \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}$$

avec $m_R = \rho(\pi R^2 h) = 4\pi$ kg et $m_r = \rho(\pi r^2 h) = \pi$ kg

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_c} = \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06086 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05890 \end{pmatrix}$$

b) On fait subir à la pièce une rotation autour de son centre de masse de façon à ce que le point A se retrouve sur l'axe oz. Déterminer la matrice $\boldsymbol{R}$ de cette rotation.

Pour ramener le point A sur l'axe oz il faut lui subir une rotation autour de l'axe ox d'un angle $\theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_z}\right) = \pi/4$.

La matrice de rotation est donc :

$$\Rightarrow \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

c) Déterminer le moment d'inertie $\boldsymbol{M'}$ de la pièce après avoir subi la rotation.

$$\boldsymbol{M'} = \boldsymbol{RMR^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06086 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05890 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04303 & 0.04303 \\ 0 & -0.04165 & 0.04165 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}' = \begin{pmatrix} 0.06086 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05988 & 0.000976 \\ 0 & 0.000976 & 0.05988 \end{pmatrix}$$