Mouvement d'une toupie

Une toupie est composée d'un cône plein de hauteur H, de rayon R et masse M et d'un cylindre plein hauteur h, de rayon r et de masse m. On fait tourner la toupie sur le sol. Celle-ci décrit un mouvement de rotation autour de son axe (spin) de vitesse angulaire constante ω_s et un mouvement de précession autour de l'axe vertical avec une vitesse angulaire constante ω_p. L'axe de la toupie est incliné d'un angle θ par rapport à la verticale. La figure ci-dessous montre la position initiale (à $t = 0$) de la toupie (G dans le plan xz).

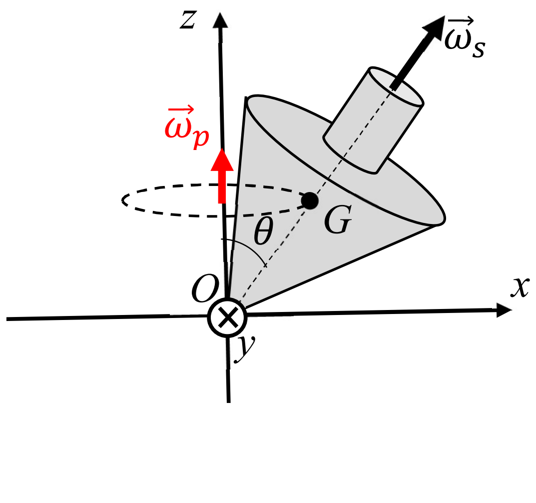
Les données pour ce problème sont: $H = 4\ cm$, $h = 2\ cm$, $R = 2\ cm$, $r = 0{,}5\ cm$, $M = 100$g et $m = 20$g, $\theta = 30^o$, $\omega_s = 200$ rad/s et l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81\ m/s^2$.

a) Quelle est la distance l entre le centre de masse G de la toupie et sa pointe située à l'origine O ainsi que le moment d'inertie I_t de la toupie par rapport à son axe.

b) Quel est le vecteur moment de force $\vec{\tau}$ par rapport à l'origine O que subi la toupie lorsqu'elle est dans la position montrée sur la figure.

c) Donner l'expression du vecteur moment cinétique $\vec{L}$ de la toupie en fonction du temps, de I_t, ω_p, ω_s, θ. On néglige la contribution de la précession.

d) Déterminer la valeur de ω_p.



Le moment d'inertie d'un cône plein par rapport à son axe est donné par : $I_{co} = \frac{3}{10}MR^2$ et son centre de masse se trouve à $H/4$ de sa base. Le moment d'inertie d'un cylindre plein par rapport à son axe est donné par : $I_{cy} = \frac{1}{2}mr^2$.

Solution :

a) *Quelle est la distance l entre le centre de masse G de la toupie et sa pointe située à l'origine O ainsi que le moment d'inertie I_t de la toupie par rapport à son axe.*

$$l = \frac{1}{M+m}\left(\frac{3}{4}HM + (H + \frac{h}{2})m\right) = \frac{10}{3}\ cm$$

$$I_t = I_{co} + I_{cy} = \frac{3}{10}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 = 1{,}225\,.10^{-5}kgm^2$$

b) *Quel est le vecteur moment de force $\vec{\tau}$ par rapport à l'origine O que subi la toupie lorsqu'elle est dans la position montrée sur la figure.*

Les seules forces extérieures que subi la toupie sont son poids et la réaction du sol. Cette dernière n'a pas de moment puisqu'elle s'applique sur le point O. Il ne reste donc que le moment du poids.

$\vec{\tau} = (M+m)g\,\vec{r}_G \times (-\hat{z}) = (M+m)gl\sin\theta\,\hat{y} = 1{,}962\,\hat{y}$ *(N.cm)*

c) *Donner l'expression du vecteur moment cinétique $\vec{L}$ de la toupie en fonction du temps, de I_t, ω_p, ω_s, θ. On néglige la contribution de la précession.*

Le moment cinétique est donné par :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}_s$$

Le vecteur $\vec{\omega}_s$ précesse autour de l'axe z avec la vitesse angulaire ω_p, on peut donc l'écrire, en prenant en compte sa position initiale, comme suit :

$$\vec{\omega}_s = \omega_s \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\omega_p t \\ \sin\theta\ \sin\omega_p t \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\vec{L} = I_t\omega_s \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\omega_p t \\ \sin\theta\ \sin\omega_p t \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

d) *Déterminer la valeur de ω_p.*

On sait que :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_t\omega_s\omega_p \begin{pmatrix} -\sin\theta\ \sin\omega_p t \\ \sin\theta\ \cos\omega_p t \\ 0 \end{pmatrix}$$

À la position montrée dans la figure $\sin \omega_p t = 0$ *et* $\cos \omega_p t = 1$ *alors :*

$I_t \omega_s \omega_p \sin \theta = \tau$

D'où :

$$\omega_p = \frac{\tau}{I_t \omega_s \sin \theta} = 16.016\, rad/s$$