20.5/25

Total : 16/20
Code 4.5/5

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

PHS4700
Physique pour les applications multimédia

PAGE COUVERTURE **OBLIGATOIRE** POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro du groupe : 02

Numéro de l'équipe : 09

Numéro de devoir : 1

Nom: Li	Prénom : Tai Chen	matricule: 1938857
Signature : 李泰辰 Li Tai Chen		
Nom: Niczyporuk	Prénom : Malgorzata	matricule: 1963326
Signature : Malgorzata Niczyporuk		
Nom: Morin	Prénom : Juliette	matricule: 2018957
Signature :		
Nom: Gilbert	Prénom : Mikael K.	matricule: 1998202
Signature : Mikael Gilbert		

Table des matières

Introduction

Les phénomènes de la physique sont observables dans tous les domaines de la vie réelle. Il est donc possible d'analyser et de simuler le comportement et le mouvement de divers appareils grâce aux équations de la mécanique. Dans le cadre du premier devoir, l'objectif était de simuler le comportement d'un missile en vol à l'aide du logiciel de calcul scientifique MATLAB. Plus précisément, en fonction de trois paramètres d'entrées, nous devions calculer les trois valeurs suivantes dans le référentiel du laboratoire : 1) la position du centre de masse du missile; 2) sa matrice du moment d'inertie et 3) son accélération angulaire. À des fins éducatives et de simplification, le missile a été modélisé et décomposé en solides simples : parallélépipèdes (ailerons), cylindre (corps du missile) et cône (tête du missile). Ce court rapport décrira donc la méthode de résolution employée en présentant la théorie et les équations pertinentes. S'en suivront par la suite une présentation et une discussion des résultats obtenus en analysant deux situations physiques utilisant le programme développé.

AN la prochaine fois
Revoir les accélérations et les moment

Théorie et équations 5/6

Afin de simuler adéquatement le comportement du missile et faciliter la résolution du problème, il était nécessaire de diviser les calculs en plusieurs étapes. Pour commencer, le référentiel du missile et celui du laboratoire ont été confondus de façon à ce que le missile soit dans sa position initiale (point d'origine). Il a donc été possible de calculer son centre de masse globale. Puisqu'il était composé de plusieurs solides simples, il était nécessaire de le décomposer en trouvant le centre de masse de chaque solide le composant et ensuite calculer la position moyenne. Ainsi, en calculant la position moyenne des ailerons (parallélépipèdes), celle du corps du missile (cylindre plein) et celle de la pointe (cône plein), en plus de connaître la masse de chacun, il est possible d'obtenir le centre de masse du missile avec l'équation 1 :

$$\vec{r_c} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_{c,n}$$ ok

Équation 1

Une fois le centre de masse calculé, la deuxième étape est de calculer le moment d'inertie. On commence par calculer le moment d'inertie pour chaque aileron avec a (la longueur), b (l'épaisseur), c (la hauteur), m (la masse) et les équations 2, 3 et 4:

$$I_{c,xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

Équation 2

$$I_{c,yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$ ok

Équation 3

$$I_{c,zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

Équation 4

Avec ces équations, on peut bâtir la matrice **Ic** pour chaque aileron :

$$I_c = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Équation 5

On peut ensuite avoir le moment d'inertie pour toutes les ailerons **Ic,Ailerons** :

$$I_{c,Ailerons} = I_{c,A1} + I_{c,A2} + I_{c,A3} + I_{c,A4}$$ ok

Équation 6

On peut ensuite calculer le moment d'inertie pour le cylindre plein avec m (la masse), r (le rayon), l (la longueur) et les équations 7 et 8 :

$$I_{c,zz} = \frac{m}{2}r^2$$ ok

Équation 7

$$I_{c,xx} = I_{c,xx} = \frac{m}{4}r^2 + \frac{m}{12}l^2$$

Équation 8

La matrice **Ic** du cylindre est donc :

$$I_{c,Cylindre} = \begin{pmatrix} \frac{m}{4}r^2 + \frac{m}{12}l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}r^2 + \frac{m}{12}l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2}r^2 \end{pmatrix}$$ ok

Équation 9

Pour le moment d'inertie du cône plein par rapport à son centre de masse est donnée par (extrait de l'énoncé du devoir) :

$$I_{c,Cône} = m \begin{pmatrix} \frac{12r^2 + 3h^2}{80} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12r^2 + 3h^2}{80} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3r^2}{10} \end{pmatrix}$$ ok

Équation 10

Le moment d'inertie par rapport à un point d se calcule donc de cette manière :

$$I_d = I_c + m \begin{pmatrix} d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2 & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2 & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2 \end{pmatrix} = I_c + m\boldsymbol{T}(\vec{d}_c)$$ ok

avec $\vec{d}_c = (d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z}) = \vec{d} - \vec{r}_c$

Équation 11

Les calculs du moment d'inertie sont faits par rapport au référentiel du laboratoire (1). On veut donc placer la matrice du moment d'inertie par rapport au référentiel du missile (2). Pour faire la rotation des axes du référentiel 1 vers le référentiel 2 de la matrice du moment d'inertie $\boldsymbol{I}$, on applique le calcul suivant :

$$\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1}\boldsymbol{I}^1(\boldsymbol{R}^{2\leftarrow 1})^{-1}$$

Équation 12

Finalement, pour calculer l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$, il est nécessaire de connaître la vitesse angulaire $\vec{\omega}$, le moment de force $\vec{\tau}_{j,i}$ (du point j par rapport au point i) et le moment d'inertie $\boldsymbol{I}$ de l'objet étudié (dans notre cas, le missile). Par conséquent, sachant que le moment de force est :

$$\vec{\tau}_{j,i}(t) = \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right) \times \vec{F}(t)$$

Équation 13

Alors l'accélération angulaire peut être déterminé comme suit :

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (I(t))^{-1}[\vec{\tau}(t) - \overline{\boldsymbol{\omega}}(t)\boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)]$$

$$= (I(t))^{-1}[\vec{\tau}(t) - \vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t)]$$

Équation 14

Où le moment cinétique $\vec{L}$ et la matrice de vitesse angulaire $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ sont :

$$\vec{L}(t) = \boldsymbol{I}(t)\vec{\omega}(t)$$

Équation 15

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Équation 17

Présentation et analyse des résultats 7/10

Cas 1

Pour le cas 1, on considère le référentiel du missile à l'origine du référentiel du laboratoire (càd. les deux référentiels sont confondus). Initialement, le missile a une vitesse angulaire nulle $\vec{\omega} = \vec{0}$. Le propulseur applique une force dans la direction verticale avec une valeur de $5 \times 10^6\ N$.

La Figure 1 ci-dessus résume les résultats obtenus lors du calcul de la position du centre de messe, du moment d'inertie et de l'accélération du missile quand celui-ci est au sol :

```
Resultats missile verticale
  Centre de masse = (    0.00000      0.00000      4.51675 )
  Moment inertie  =
          3148368 &             0 &             0 \\
                0 &       3148368 &             0 \\
                0 &             0 &        401853 \\
  acc angulaire   = (    0.00000      0.00000      0.00000 )
```

×

√

Figure 1 Modélisation du missile au sol

Position du centre de masse

Commençons l'analyse des résultats en discutant les valeurs trouvées pour la position du centre de masse :

$$\vec{r_c} = [0,0,4.52]^T$$

Équation 16

Selon les résultats obtenus, le centre de masse se trouve au peu près à 4 mètres et demi à partir du sol, directement en dessus du milieu de la base l'inférieure du cylindre (directement sur l'axe de z).

Ce résultat est raisonnable en raison de la géométrie du missile. En effet, le centre de masse se trouve plus bas que le la mi-hauteur du missile qui est de 6.5 m au-dessus du sol. La partie inférieure du missile est plus lourde à cause du poids apporté par les aillerons. C'est donc pour cette raison que le centre de masse ne se trouve pas exactement au centre géométrique du missile.

Moment d'inertie

En ce qui concerne le moment d'inertie par rapport au centre de masse du missile, ce résultat semble également raisonnable (en kgm²) :

$$I_{c,missile} = \begin{pmatrix} 3148868 & 0 & 0 \\ 0 & 3148868 & 0 \\ 0 & 0 & 401853 \end{pmatrix}$$

Équation 17

On peut observer que seulement les valeurs en I_{xx}, I_{yy} et I_{zz} sont non nulles. Ceci est attendu, car on modélise le missile en tant que solide régulier.

Accélération angulaire

Finalement, la valeur calculée de l'accélération angulaire (en rad/s²) semble également raisonnable :

$$\vec{\alpha} = [0,0,0]^T$$

Équation 18

L'accélération angulaire est nulle puisque le missile est au sol et il n'est pas encore en train de tourner sur lui-même. De plus, cela peut être expliqué à l'aide des équations présentées dans la section précédente. En particulier, ce sont les équations 13 et 14 qui nous intéressent. Puisque $\vec{\omega}(t) = 0\ \frac{rad}{s}$, l'équation 14 devient :

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I(t)^{-1}\vec{\tau}_{j,i}(t)$$

Équation 19

L'équation 14 nous permet de trouver la valeur de $\vec{\tau}_{j,i}(t)$. Cette dernière est également nulle car le vecteur de la force F appliqué sur le missile est parallèle au vecteur $(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$. Le produit croisé de deux vecteurs parallèles et nul. Étant donné que $\vec{\tau}_{j,i}(t) = 0$, l'équation 21 devient nulle aussi.

Cas 2

Pour le cas 2, le référentiel du laboratoire est toujours les axes oxyz. Par contre, le référentiel du missile est différent. En effet, le missile est en vol avec la position du point o qui est $\vec{r_o} = (0.0,\ -20.0,\ 300.0)\ m$. Il se fait propulser avec une force de $5 \times 10^6\ N$.dont l'orientation est de $\theta = 0.10\ \ rad$ et de $\varphi = 1.40\ rad$. Une rotation de $0.5\ rad$ autour de l'axe *OX* est subite par le missile qui a une vitesse angulaire de $\vec{\omega} = 0.05,\ 0.0,\ 0.01\ rad/s$. Le figure 2 résume les résultats qu'on a obtenu pour cette partie :

```
Resultats missile incline
  Centre de masse = (    0.00000   -22.16544   303.96382 )   OK
  Moment inertie  =
          3148868 &             0 &               0 \\
                0 &       2254229 &         1174434 \\
                0 &       1174434 &         1296492 \\
  acc angulaire   = (    4.04048    -0.14274    -0.01245 )
```

Figure 2 : Modélisation du missile incliné pendant le vol

Position du centre de masse

On peut observer que la valeur de centre de masse est différente par rapport à celle dans le cas 1 :

$$\vec{r_c} = [0, -22.17, 303.96]^{\mathrm{T}}$$

Équation 20

Cela est normale puisque le missile ainsi que son référentiel ont subi une rotation par rapport à l'axe OX et donc les valeurs ont dû être convertis au référentiel du laboratoire. Les résultats obtenus sont exprimés par rapport à ce dernier et ene se basant sur les valeurs calculées avec notre programme, on peut bien déduire que le missile a subi une rotation dans le plan ZY du référentiel du laboratoire. Ce résultat semble tout à fait raisonnable : la fusée est orientée toujours vers le haut (la composante $r_{c,z}$ est positive) mais légèrement inclinée vers un coté (la composante $r_{c,y}$ est négative).

Moment d'inertie

Dans ce cas, on peut observer que le moment d'inertie du missile n'a plus non plus les mêmes valeurs que dans le premier cas étudié :

$$I_{c,missile} = \begin{pmatrix} 3148868 & 0 & 0 \\ 0 & 2254229 & 1174434 \\ 0 & 1174434 & 1296492 \end{pmatrix}$$

Équation 21

On peut également observer des très grandes valeurs des composantes qui constituent la matrice du moment d'inertie de missile. Cela peut être expliqué par quelques facteurs. Tout d'abord, c'est une information qui nous indique la grandeur du moment de force qui aurait être dû appliquer sur le missile pour la faire tourner autour de son centre de masse. Comparé au cas 1, toutes les valeurs des composantes ont une plus grande magnitude. Aussi, il y a moins de composantes non-nulles.

Accélération angulaire

Tout comme les autres valeurs étudiées, l'accélération angulaire du système a également changé de valeur comparativement au premier cas :

$$\vec{\alpha} = [4.04048, -0.14274, -0.01245]^T$$

Équation 22

L'accélération angulaire n'est plus nulle, car le missile est en train tourner autour de lui-même. En effet, la vitesse angulaire n'a pas été nulle comme c'était le cas dans la situation numéro 1. On peut bien voir que la magnitude de la composante x de l'accélération angulaire est beaucoup plus prononcée que les autres composantes du vecteur. Cela est logique, car le missile a subi une rotation autour de l'axe OX. Les composantes y et z de ce vecteur sont négligeables.