PHS4700-Physique pour les applications multimédia

Date de l'examen : 15 décembre 2019

Instructions :

- **Toute la documentation papier est permise.**
- **Les calculatrices non programmables sont permises.**
- **Durée de l'examen : 2.5 heures**
- **Rendre le questionnaire (6 pages) avec les cahiers de réponses.**

Question 1. Lancer du marteau (25 points)

Un marteau est initialement suspendu verticalement par son extrémité A qui est située à l'origine du système de coordonnées (voir figure 1.1). On le lance à l'aide d'un dispositif qui exerce un moment de force externe $\vec{\tau} = -20\hat{y}$ N×m exercé sur l'extrémité A de son bras (manche) de façon à ce qu'il pivote autour du point A. Après un temps Δt=150 ms, il est relâché et s'envole.

Le marteau est composé d'une tête de métal ayant la forme d'un parallélépipède plein de masse m_t=1.1 kg et de dimensions 4×4×8 cm^3 et d'un bras cylindrique en bois de masse m_b=0.150 kg, de longueur L=30 cm et de diamètre négligeable. Le marteau est symétrique par rapport au plan $x - z$.

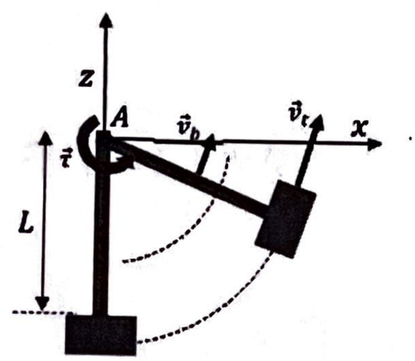

Figure 1.1: Dispositif pour lancer le marteau.

a) **(8 points)** Déterminer la distance d_{CM} entre le centre de masse du marteau et son extrémité A ainsi que le moment d'inertie du marteau par rapport à l'axe y.

b) **(8 points)** Quel est le vecteur vitesse angulaire du marteau à l'instant où celui-ci est lâché. Négligez le moment de force dû au poids du marteau pendant l'application du moment de force externe.

c) **(9 points)** Quel est le vecteur vitesse du centre de masse du marteau à l'instant où celui-ci est relâché?

Corrigé

a) (8 points) Déterminer la distance d_{CM} entre le centre de masse du marteau et son extrémité A ainsi que le moment d'inertie du marteau par rapport à l'axe y.

Le centre de masse se situe sur l'axe du marteau. Sa distance par rapport au point A est :

$$d_{CM} = \frac{m_t d_t + m_b d_b}{m_t + m_b} \tag{1.1}$$

où d_t et d_b sont les distances séparant le point A des centres de masse de la tête et du bras. On obtient donc

$$d_{CM} = \frac{1.1 \times (0.3 + 0.02) + 0.15 \times 0.15}{1.1 + 0.15} = 0.3\, m \tag{1.2}$$

Le moment d'inertie autour de l'axe y est donné par :

$$I = \frac{m_t}{12}(L_t^2 + l_t^2) + m_t d_t^2 + \frac{m_b L^2}{12} + \frac{m_b L^2}{4} \tag{1.3}$$

où L_t et l_t sont la longueur et la largeur de la tête. On obtient alors I=0.1179 kg×m^2.

b) (8 points) Quel est le vecteur vitesse angulaire du marteau à l'instant où celui-ci est lâché. Négligez le moment de force dû au poids du marteau pendant l'application du moment de force externe.

L'accélération angulaire est :

$$\vec{\alpha} = I^{-1}\left(\vec{\tau} - \frac{dI}{dt}\vec{\omega}\right) \tag{1.4}$$

Comme $\vec{\omega}$ reste dans la direction y alors $dI/dt = 0$, d'où

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = -\frac{20}{0.1179}\hat{y} = -169.6\ rad/s^2 \tag{1.5}$$

$$\vec{\omega}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \vec{\alpha} dt = \vec{\alpha}\Delta t = -25.45\,\hat{y}\ rad/s \tag{1.6}$$

c) (9 points) Quel est le vecteur vitesse du centre de masse du marteau à l'instant où celui-ci est relâché?

La position angulaire

$$\Delta\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\alpha}(\Delta t)^2 = -1.607\,\hat{y}\ rad \tag{1.7}$$

où $\Delta\vec{\Omega}$ est l'angle de rotation du marteau qui est identique à l'angle entre les vitesses de chaque point du marteau et l'axe x. La vitesse du centre de masse du marteau est donc

$$\vec{v}_{CM} = |\vec{\omega}| d_{CM} \left(\cos(|\Delta\vec{\Omega}|)\,\hat{x} + \sin(|\Delta\vec{\Omega}|)\,\hat{z} \right) \tag{1.8}$$

$$= (-2.522\,\hat{x} + 7.202\,\hat{z})\ m/s \tag{1.9}$$

Question 2. Théâtre d'opérations de sous-marins (25 points)

Deux sous-marins nucléaires lanceurs d'engins se sont trouvés en mer à 32 km des côtes. Le premier sous-marin appartient à la marine française (F) et il est de la classe «Triomphant», alors que le second, de la classe «Dolgorouki», opère sous le commandement de la flotte maritime nordique russe (R). Les caractéristiques des deux sous-marins sont présentées dans le Tableau 2.1. Les sous-marins sont à la même profondeur (z=-321 m) et une distance de 9 km

Caractéristiques	Français	Russe
Masse [tonne]	73000	91000
Vitesse [km/h]	46.2	45.6

Tableau 2.1: Caractéristiques des sous-marins français et russe.

les sépare. Leur évolution laisse présager une collision. La position du centre de masse de chacun des sous-marins (en km) avec le temps t (en heures) est donnée par

$$\vec{r}_F(t) = (20 + 46.2\,t)\,\hat{x} + 20\,\hat{y} - 0.321\,\hat{z} \tag{2.1}$$
$$\vec{r}_R(t) = 26.93\,\hat{x} + (13.16 + 45.6\,t)\,\hat{y} - 0.321\,\hat{z} \tag{2.2}$$

Ici, pour simplifier le problème vous pouvez considérer les deux sous-marins comme étant des points, leurs dimensions étant de beaucoup inférieures aux distances qu'ils ont parcourues avant de se toucher. De plus, lors de la collision, c'est le sous-marin russe qui frappera le sous-marin français, la normale entrante à la collision pour le sous-marin français étant $\hat{n}_F = \hat{y}$.

a) **10 points** Déterminer le temps t_c auquel se produira la collision entre les deux sous-marins et fournir le point de rencontre de leurs centres de masse.

b) **10 points** Déterminer les impulsions ressenties par les deux sous-marins au moment de la collision en supposant que le coefficient de restitution est $\epsilon = 0.3$.

c) **5 points** Quelle est la vitesse finale du sous-marin français après la collision ?

Corrigé

a) ***10 points*** *Déterminer le temps t_c auquel se produira la collision entre les deux sous-marins et fournir le point de rencontre de leurs centres de masse.*

Les deux trajectoires sont à la même profondeur (composante en z), alors on peut se concentrer sur les composantes en x et y du centre de masse des deux sous-marins donnés par les équations 2.1 et 2.2. On aura une collision si peut trouver l'expression de sa trajectoire comme suit:

$$x_F(t_c) = x_R(t_c) \tag{2.3}$$

et

$$y_F(t_c) = y_R(t_c) \tag{2.4}$$

L'équation 2.3 est satisfaite si

$$(20 + 46.2\,t) = 26.93$$

et donc t_c=0.15 h (9 minutes). À ce temps la position du centre de masse des deux sous-marins en y sera

$$y_F(t_c) = 20 \; km \tag{2.5}$$

$$y_R(t_c) = 13.16 + 45.6 \times t_c = 20 \; km \tag{2.6}$$

ce qui confirme bien qu'il y aura collision, cette collision se produisant au point

$$\vec{r}_c = (26.93, 20, 0.321)$$

b) ***10 points*** *Déterminer les impulsions ressenties par les deux sous-marins au moment de la collision en supposant que le coefficient de restitution est $\epsilon = 0.3$.*

Les sous-marins ont des vitesses tout juste avant la collision données par

$$\vec{v}_{F,-} = \frac{d\vec{r}_F}{dt} = 46.2\,\hat{x} \; km/h$$

$$\vec{v}_{R,-} = \frac{d\vec{r}_R}{dt} = 45.6\,\hat{y} \; km/h$$

Comme la normale entrante vers le sous-marin français est $\hat{n}_F = \hat{y}$, l'impulsion que ce sous-marin reçoit est

$$\vec{J}_F = j\hat{n} = -\left(\frac{\epsilon + 1}{\frac{1}{m_T} + \frac{1}{m_F}} v_r^-\right)\hat{n} = -\left[\frac{\epsilon + 1}{\frac{1}{m_T} + \frac{1}{m_F}} v_r^-\right] j\,\hat{y}. \tag{2.7}$$

(2.8)

alors que l'impulsion ressentie par le sous-marin russe est

$$\vec{J}_R = -j\hat{n} = \left[\frac{\epsilon + 1}{\frac{1}{m_T} + \frac{1}{m_F}} v_r^-\right] \hat{y}. \tag{2.9}$$

$$\tag{2.10}$$

La vitesse relative v_r^- entre les deux sous-marins tout juste avant la collision est donnée par

$$v_r^- = \hat{n} \cdot \vec{v}_{RF,-}(t_i) = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{F,-}(t_i) - \vec{v}_R(t_i)) = -45.6 \text{ km/h} \tag{2.11}$$

En substituant dans l'équation pour l'impulsion on obtient alors

$$\vec{J}_F = -\left[\frac{0.3 + 1}{\frac{1}{91\times10^6} + \frac{1}{73\times10^6}} \left(\frac{-45.6}{3.6}\right)\right] \hat{y} = 6.67 \times 10^8 \, N\,s\,\hat{y} \tag{2.12}$$

pour le sous-marin français et $\vec{J}_R = -6.67 \times 10^8 \, N\,s\,\hat{y}$ pour le sous-marin russe.

c) **5 points** *Quelle est la vitesse finale du sous-marin français après la collision ?*

La vitesse finale du sous-marin français après la collision sera

$$\vec{v}_{F,+} = \vec{v}_{F,-} + \frac{\vec{J}_F}{m_F} = (46.2\,\hat{x} + 9.14\,\hat{y}) \text{ km/h}. \tag{2.13}$$

Question 3. Prisme irrégulier (20 points)

On considère un prisme irrégulier uniforme dans la direction y dont deux faces dans le plan $x - z$ sont des triangles équilatéraux composés respectivement de diamant ($n_d = 2.42$) et de verre ($n_v = 1.52$). Ces régions séparées par surface rectangulaire remplie d'eau ($n_e = 1.33$). Le tout est placé à l'air ambiant ($n_a = 1$). Une onde incidente de lumière polarisée transverse magnétique (TM) rencontre une surface en diamant au point O indiqué sur la figure 3.1. En supposant que la direction du rayon de lumière incident est donnée par

$$\hat{r}_i = -\cos(\theta_i)\hat{\imath} + \sin(\theta_i)\hat{k}, \text{ tel que } \theta_i = 65°.$$

a) Dessiner sur la figure 3.1 la trajectoire du rayon lumineux jusqu'à ce qu'il pénètre dans l'eau.

b) Donner la direction du rayon de lumière après à sa première réfraction (lorsqu'il entre dans le diamant).

c) Calculer le rapport entre l'intensité de l'onde initiale et celle de l'onde pénétrant dans l'eau.

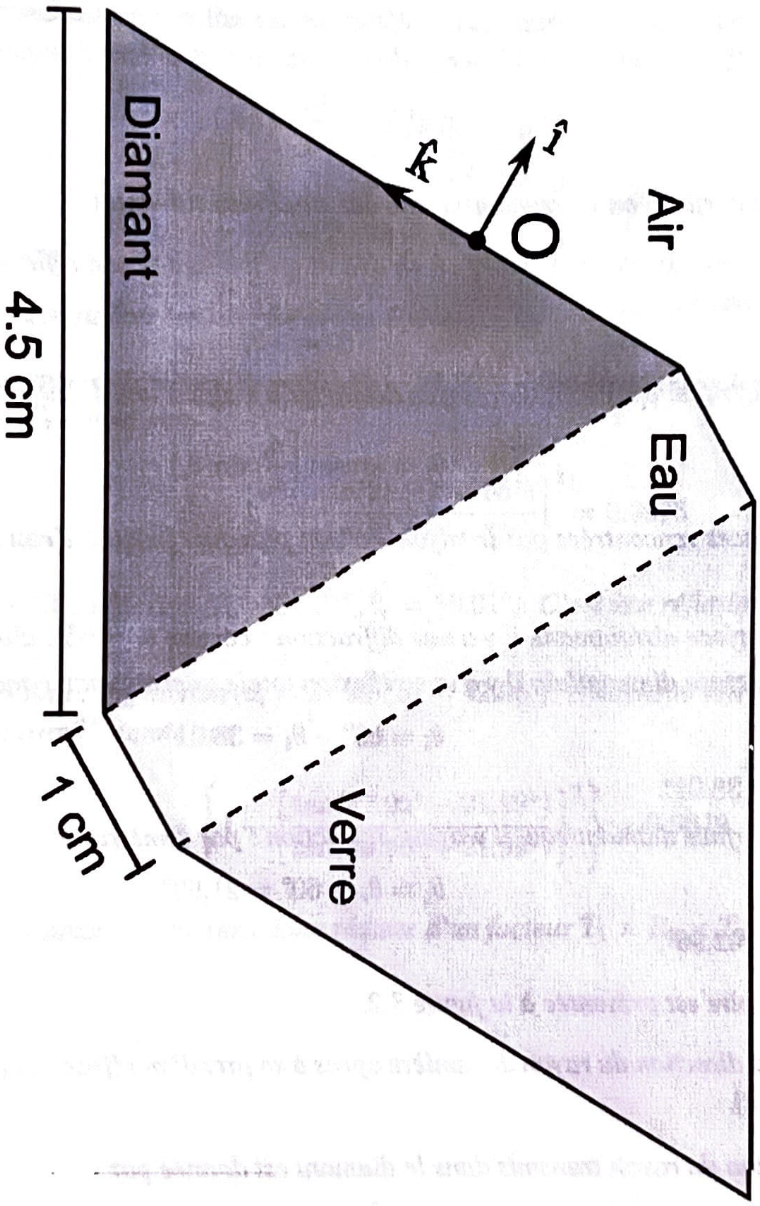

Figure 3.1: Prisme irrégulier.

Corrigé

a) Dessiner la trajectoire du rayon jusqu'à ce qu'il pénètre dans l'eau.

Ici, comme on travaillera en 2 dimensions, on peut se limiter aux 2^e lois de Snell-Descartes. Identifions par n_i et n_t les indices de réfraction des milieux d'incidence et de transmission et par θ_i et θ_t les angles d'incidence et de transmission. On écrit alors:

$$\sin(\theta_t) = \frac{n_i}{n_t}\sin(\theta_i).$$

À chaque interface, on va rencontrer une des situations suivantes:

- *Si $(n_i/n_t)\sin(\theta_i) > 1$, alors on en déduit qu'il s'agit d'une réflexion totale interne et par conséquent:*

$$\theta_r = -\theta_i.$$

- *Si $(n_i/n_t)\sin(\theta_i) < 1$, alors on en déduit qu'il s'agit d'une diffraction et par conséquent:*

$$\theta_t = \arcsin\left[\frac{n_i}{n_t}\sin(\theta_i)\right].$$

Les interfaces rencontrées par le rayon sur son parcours jusqu'à l'eau sont alors les suivantes.

1. *À l'interface air/diamant, il y a une diffraction : comme $\theta_i = 65°$, alors $\theta_t = 21.99°$.*
2. *À l'interface diamant/air, il y a une réflexion totale interne : par symétrie*

$$\theta_i = 60° - \theta_t = 38.01°$$

et $\theta_r = 38.01°$.

3. *À l'interface diamant/eau, il y a une diffraction : par symétrie*

$$\theta_i = \theta_r + 60° = 21.99°$$

et $\theta_t = 42.96°$.

La trajectoire est présentée à la figure 3.2.

b) Donner la direction du rayon de lumière après à sa première réfraction (lorsqu'il entre dans le diamant).

La direction du rayon transmis dans le diamant est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{u}_t &= -\hat{n}\cos(\theta_t) + \hat{k}\sin(\theta_t)\\
&= -\hat{\imath}\cos\left[\arcsin\left(\frac{n_i}{n_t}\sin(\theta_i)\right)\right] + \hat{k}\frac{n_i}{n_t}\sin(\theta_i)\\
&= -\hat{\imath}\cos(21.99°) + \hat{k}\sin(21.99°)\\
&= -0.92725\,\hat{\imath} + 0.37444\,\hat{k}
\end{aligned}$$

c) *Calculer le rapport entre l'intensité de l'onde initiale et celle de l'onde pénétrant dans l'eau.*

Une onde est dite polarisée TM si le champ magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence et le champ électrique lui est parallèle. En décomposant l'onde en une composante magnétique $\vec{B}$ et une seconde électrique $\vec{E}$, on a démontré que les coefficients de réflexion et de transmission à chaque interface sont donnés par:

$$\frac{I_R}{I_i} = R = \left[\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}\right]^2$$
$$\frac{I_T}{I_i} = T = 1 - R$$

On peut ainsi considérer les interfaces une à une

1. *Air - Diamant : diffraction ($\theta_i = 65°, \theta_t = 21.99°$). L'intensité réfractée sera réduite par un facteur T_1 donné par*

$$T_1 = 1 - \left[\frac{\tan(21.99° - 65°)}{\tan(21.99° + 65°)}\right]^2 = 0.9976$$

2. *Diamant - Air : réflexion ($\theta_i = 38.01°, \theta_r = 38.01°$). C'est une réflexion totale interne et R_2=1.*
3. *Diamant - Eau : diffraction ($\theta_i = 21.99°, \theta_t = 42.96°$). L'intensité réfractée sera réduite par un facteur T_3 donné par*

$$T_3 = \left\{1 - \left[\frac{\tan(42.96° - 21.99°)}{\tan(42.96° + 21.99°)}\right]^2\right\} = 0.9679$$

L'intensité de l'onde initiale sera donc réduite d'un facteur $T_1 \times R_2 \times T_3$=0.9656.

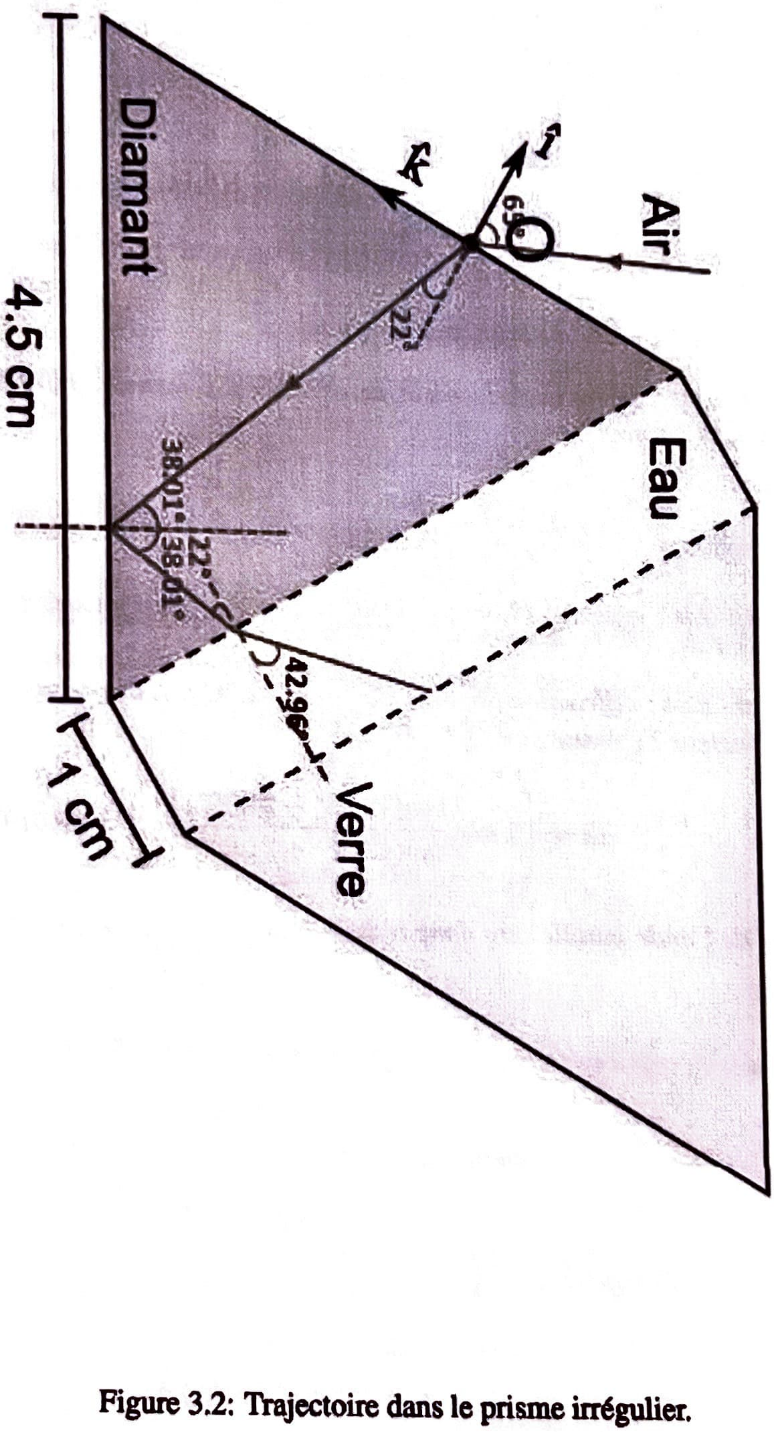

Figure 3.2: Trajectoire dans le prisme irrégulier.

Question 4. Son perçu par un avion (25 points)

Un avion A, se déplaçant à une vitesse v=100 m/s et à une altitude constante de h=2.5 km, survole une source sonore S posée au sol (voir figure 4.1). La source émet un son d'une puissance P=2000 W et d'une fréquence f_s=1000 Hz. La vitesse du déplacement du son dans l'air est c=340 m/s. On prend comme origine du système de coordonnées la position de la source et on suppose que la direction x est parallèle à la direction du déplacement de l'avion. On prend comme origine du temps l'instant où l'avion passe exactement au-dessus de la source sonore.

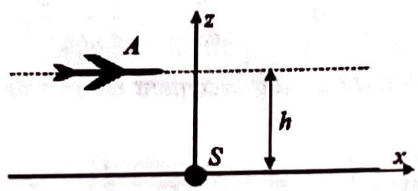

Figure 4.1: Trajectoire de l'avion et position de la source.

a) (10 points) Sans faire d'application numérique, déterminer l'expression de la fréquence du son reçu par l'avion en fonction du temps et de sa vitesse.

b) (5 points) Sans faire d'application numérique, déterminer l'expression de l'intensité du signal sonore reçu par l'avion en fonction du temps si on néglige l'atténuation du son par perte d'énergie dans l'air. On néglige aussi la réflexion du son par le sol.

c) (5 points) Quelle est la valeur en décibel de l'intensité maximale $L_{I,\max}$ du son reçu par l'avion ?

d) (5 points) L'atténuation du son dans l'air n'est pas négligeable et le coefficient d'atténuation pour ce signal est A_{air}=5.0 dB/km. Dans ce cas, quelle est l'intensité en dB du signal maximal reçu par l'avion ?

Corrigé

a) *(10 points) Sans faire d'application numérique, déterminer l'expression de la fréquence du son reçu par l'avion en fonction du temps et de sa vitesse.*

Soit x la position de l'avion dans la direction $\hat{x}$ et r la distance entre l'avion et la source sonore alors $r = \sqrt{h^2 + x^2}$. La fréquence du son reçu par l'avion est donné par

$$f_r = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_s} f_s \tag{4.1}$$

avec:

$$\beta_r = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_{r/s}}{c} = \frac{v}{c} \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \tag{4.2}$$

où $\vec{u}_{r/s}$ est le vecteur unitaire du déplacement du son de la source au récepteur et β_s=0. Ceci donne :

$$f_r = \left(1 - \frac{v}{c}\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right) f_s = \left(1 - \frac{v}{c}\frac{vt}{\sqrt{h^2 + (vt)^2}}\right) f_s \tag{4.3}$$

b) *(5 points) Sans faire d'application numérique, déterminer l'expression de l'intensité du signal sonore reçu par l'avion en fonction du temps si on néglige l'atténuation du son par perte d'énergie dans l'air. On néglige aussi la réflexion du son par le sol.*

L'intensité du signal est donnée par

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \tag{4.4}$$

C'est-à-dire :

$$I(t) = \frac{P}{4\pi(h^2 + x^2)} = \frac{P}{4\pi(h^2 + (vt)^2)} \tag{4.5}$$

c) *(5 points) Quelle est la valeur en décibel de l'intensité maximale $L_{I,\max}$ du son reçu par l'avion ?*

L'intensité maximale est obtenue pour t=0, car $r = h$ est alors minimal. On obtient donc

$$I_{\max} = \frac{P}{4\pi h^2} \tag{4.6}$$

On sait que :

$$L_{I,\max} = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right) - 10 \log\left(\frac{4\pi h^2}{S_0}\right) \tag{4.7}$$

avec P_0=10^{-12} W et S_0=1 m^2, ceci donne

$$L_{I,\max} = 10 \log\left(\frac{4\pi h^2 I_{\max}}{P_0}\right) - 10 \log\left(\frac{4\pi h^2}{S_0}\right) = 10 \log\left(\frac{S_0 I_{\max}}{P_0}\right) = 74.06\ dB \tag{4.8}$$

d) *(5 points) L'atténuation du son dans l'air n'est pas négligeable et le coefficient d'atténuation pour ce signal est A_{air}=5.0 dB/km. Dans ce cas, quelle est l'intensité en dB du signal maximal reçu par l'avion ?*

On sait que

$$L_I(r) = L_I(r_0) - 20\log\left(\frac{r}{r_0}\right) - A_{air}(r - r_0) \tag{4.9}$$

À $t = 0$,

$$L_I(r_0) - 20\log\left(\frac{r}{r_0}\right) = L_{I,\text{max}} \tag{4.10}$$

et

$$L_I(t = 0) = L_{I,\text{max}} - A_{air}h = 61.56\ dB \tag{4.11}$$