PHS4700-Physique pour les applications multimédia

Solution de l’examen final

Date de l’examen : 20 décembre 2018

Instructions :

- Toute la documentation papier est permise.
- Les calculatrices non programmables sont permises.
- Durée de l’examen : 2.5 heures.
- Rendre le questionnaire (6 pages) avec les cahiers de réponses.

Question 1 : Mouvement d'une toupie (20 points)

Une toupie est composée d'un cône plein de hauteur H et de rayon R et masse M et d'un cylindre plein hauteur h, de rayon r et de masse m. On fait tourner la toupie sur le sol. Celle-ci décrit un mouvement de rotation autour de son axe (spin) de vitesse angulaire constante ω_s et un mouvement de précession autour de l'axe vertical avec une vitesse angulaire constante ω_p. L'axe de la toupie est incliné d'un angle θ par rapport à la verticale. La figure ci-dessous montre la position initiale (à $t = 0$) de la toupie (G dans le plan xz).

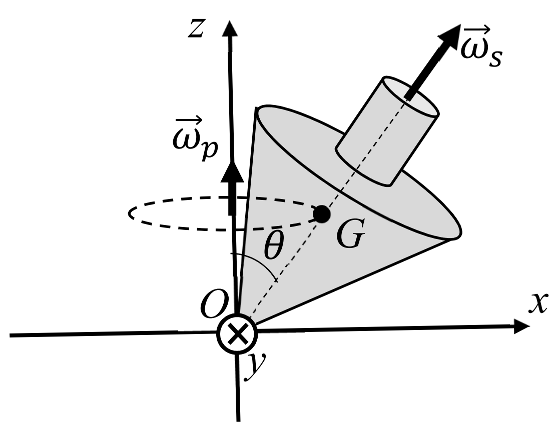
A.N : $H = 4\ cm$, $h = 2\ cm$, $R = 2\ cm$, $r = 0{,}5\ cm$, $M = 100$g et $m = 20$g, $\theta = 30^o$, $\omega_s = 50$ rad/s et l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81\ m/s^2$.

a) **(4 points)** Quelle est la distance l entre le centre de masse G de la toupie et sa pointe située à l'origine O ainsi que le moment d'inertie I_t de la toupie par rapport à son axe.

b) **(4 points)** Quel est le vecteur moment de force $\vec{\tau}$ par rapport à l'origine O que subi la toupie lorsqu'elle est dans la position montrée sur la figure.

c) **(6 points)** Donner l'expression du vecteur moment cinétique $\vec{L}$ de la toupie en fonction du temps, de I_t, ω_p, ω_s, θ. On néglige la contribution de la précession.

d) **(6 points)** Déterminer la valeur de ω_p.



Le moment d'inertie d'un cône plein par rapport à son axe est donné par : $I_{co} = \frac{3}{10}MR^2$ et son centre de masse se trouve à $H/4$ de sa base. Le moment d'inertie d'un cylindre plein par rapport à son axe est donné par : $I_{cy} = \frac{1}{2}mr^2$.

Solution :

a) *Quelle est la distance l entre le centre de masse G de la toupie et sa pointe située à l'origine O ainsi que le moment d'inertie I_t de la toupie par rapport à son axe.*

$$l = \frac{1}{M+m}\left(\frac{3}{4}HM + (H + \frac{h}{2})m\right) = \frac{10}{3}\ cm$$

$$I_t = I_{co} + I_{cy} = \frac{3}{10}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 = 1{,}225\,.10^{-5}kgm^2$$

b) *Quel est le vecteur moment de force $\vec{\tau}$ par rapport à l'origine O que subi la toupie lorsqu'elle est dans la position montrée sur la figure.*

Les seules forces extérieures que subi la toupie sont son poids et la réaction du sol. Cette dernière n'a pas de moment puisqu'elle s'applique sur le point O. Il ne reste donc que le moment du poids.

$\vec{\tau} = (M+m)g\,\vec{r}_G \times (-\hat{z}) = (M+m)gl\sin\theta\,\hat{y} = 1{,}962\,\hat{y}$ *(N.cm)*

c) *Donner l'expression du vecteur moment cinétique $\vec{L}$ de la toupie en fonction du temps, de I_t, ω_p, ω_s, θ. On néglige la contribution de la précession.*

Le moment cinétique est donné par :

$$\vec{L} = I\vec{\omega}_s$$

Le vecteur $\vec{\omega}_s$ précesse autour de l'axe z avec la vitesse angulaire ω_p, on peut donc l'écrire, en prenant en compte sa position initiale, comme suit :

$$\vec{\omega}_s = \omega_s\begin{pmatrix}\sin\theta\ \cos\omega_p t\\ \sin\theta\ \sin\omega_p t\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Alors :

$$\vec{L} = I\omega_s\begin{pmatrix}\sin\theta\ \cos\omega_p t\\ \sin\theta\ \sin\omega_p t\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

d) *Déterminer la valeur de ω_p.*

On sait que :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \omega_s\omega_p\begin{pmatrix}-\sin\theta\ \sin\omega_p t\\ \sin\theta\ \cos\omega_p t\\ 0\end{pmatrix}$$

À la position montrée dans la figure $sin\,\omega_p t = 0$ *et* $cos\,\omega_p t = 1$ *alors :*

$\omega_s \omega_p \, sin\,\theta = \tau$

D'où :

$$\omega_p = \frac{\tau}{\omega_s \, sin\,\theta} = 7{,}85\,.\,10^{-4}\ rad/s$$

Question 2. Force et moment dipolaire - Méthode de Euler (20 points)

Un dipôle électrique composé de deux billes *a* et *b* de dimensions et de masses négligeables chargées respectivement de $+Q$ et $-Q$. Les billes sont situées aux deux extrémités d'une tige de longueur d , de diamètre négligeable et de masse *m*. Le dipôle évolue dans un champ électrique $\vec{E} = (kx, 0, 0)$ où k est une constante positive. On posera $\hat{u} = \vec{r}_{a/b}/d$ le vecteur unitaire du vecteur position de la particule *a* par rapport à la particule *b*.

À l'instant initial *t* = 0, le dipôle est orienté tel que $\hat{u} = (0, 0, 1)$. On prendra cette orientation comme position angulaire de référence $\vec{\Omega} = (0, 0, 0)$. Le centre de masse se trouve à $\vec{r}_c(0) = (x_0, 0, 0)$. La vitesse du centre de masse est nulle $\vec{v}_c(0) = 0$ et la vitesse angulaire est $\vec{\omega}(0) = (0, \pi/3,\ 0)$ rad/s.

a) **(3 points)** Sachant que le dipôle restera toujours dans le plan *xz*, écrire le vecteur unitaire $\hat{u}(t)$ en fonction de la composante Ω_y(t) du vecteur position angulaire $\vec{\Omega}(t)$.

b) **(7 points)** Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}_c$ du centre de masse du dipôle et l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ en fonction de Q, d, k, m et Ω_y. On néglige la force de gravité devant la force électrique.

c) **(5 points)** Définir le vecteur d'état $\vec{q}$ (de dimension minimale) et sa dérivée par rapport au temps $\vec{g}$ ainsi que le vecteur initiale $\vec{q}_0$ qui permettent une simulation numérique du mouvement du dipôle.

d) **(5 points)** Utiliser la méthode d'Euler avec un pas de temps $\Delta t = 0{,}1\ s$ pour déterminer la position et la vitesse du dipôle à l'instant $t = 0{,}2\ s$. $Q = 2.10^{-6} C$, $d = 20\ cm$, $k = 6.10^{6}\ Vm^{-2}$, $m = 25\ g$ et $x_0 = 1\ mm$.

Solution :

a) *Sachant que le dipôle restera toujours dans le plan xz, écrire le vecteur unitaire* $\hat{u}(t)$ *en fonction de la composante* $\Omega_y(t)$ *du vecteur position angulaire* $\vec{\Omega}(t)$.

Le mouvement du dipôle est un mouvement dans le plan xz alors le vecteur $\hat{u}$ *est aussi dans ce plan. La position angulaire et la vitesse angulaire n'auront de composantes que dans la direction y.*

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \sin \Omega_y \\ 0 \\ \cos \Omega_y \end{pmatrix}$$

b) *Donner l'expression de l'accélération* $\vec{a}_c$ *du centre de masse du dipôle et l'accélération angulaire* $\vec{\alpha}$ *en fonction de* Q, d, k, m *et* Ω_y. *On néglige la force de gravité devant la force électrique.*

La force qui s'applique sur le dipôle est :

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_b = [(+Qkx_a) + (-Qkx_b)]\hat{x}$$

$$\vec{F} = Qk(x_a - x_b)\hat{x} = Qk(\hat{x}.\vec{r}_{a/b})\hat{x} = Qkd(\hat{x}.\hat{u})\hat{x} = Qkd \sin \Omega_y \, \hat{x}$$

D'où l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{Qkd \sin \Omega_y}{m}\hat{x}$$

Le moment de force qui s'applique sur le dipôle est :

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{a/c} \times \vec{F}_a + \vec{r}_{b/c} \times \vec{F}_b$$

Sachant que $\vec{r}_{a/c} = -\vec{r}_{b/c} = \frac{1}{2}\vec{r}_{a/b}$ *alors :*

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{a/c} \times \left(\vec{F}_a - \vec{F}_b\right) = \frac{d}{2}\hat{u} \times \left(\vec{F}_a - \vec{F}_b\right)$$

Et : $\vec{F}_a - \vec{F}_b = Qk(x_a + x_b)\hat{x} = 2Qkx_c\hat{x}$

$$\vec{\tau} = Qkdx_c(\hat{u} \times \hat{x}) = Qkdx_c \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \sin \Omega_y & 0 & \cos \Omega_y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = Qkdx_c \cos \Omega_y \, \hat{y}$$

L'accélération angulaire est alors donnée par : $\vec{\alpha} = \vec{\tau}/I_c$ *avec* $I_c = md^2/12$.

$$\vec{\alpha} = \frac{12Qkx_c \cos \Omega_y}{md} \hat{y}$$

c) *Définir sous la forme la plus simple les d'état $\vec{q}$ et sa dérivée par rapport au temps $\vec{g}$ ainsi que le vecteur initiale $\vec{q}_0$ qui permettent une simulation numérique du mouvement du dipôle.*

Le vecteur $\vec{q}$, $\vec{g}$ et $\vec{q}_0$ peuvent être définis comme suit :

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} v_{cx} \\ x_c \\ \omega_y \\ \Omega_y \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} Qkd\,\sin(q_4)\,/m \\ q_1 \\ 12\,Qkq_2\cos(q_4)\,/md \\ q_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ \pi/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) *Utiliser la méthode d'Euler avec un pas de temps $\Delta t = 0.1\,s$ pour déterminer la position et la vitesse du dipôle à l'instant $t = 0{,}2\,s$. On donne : $Q = 2.10^{-6}C$, $d = 20\,cm$, $k = 6.10^6\,Vm^{-2}$, $m = 25\,g$ et $x_0 = 1\,mm$.*

Selon les données : $Qkd/m = 96{,}0$ *(SI) et* $12Qk/md = 2{,}88\,.\,10^4$ *(SI)*

La méthode d'Euler donne :

$$\vec{q}_1 = \vec{q}(\Delta t) = \vec{q}_0 + \vec{g}(\vec{q}_0)\,.\,\Delta t = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ \pi/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}88.\,10^4.\,10^{-3} \\ \pi/3 \end{pmatrix} \times 0{,}1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ 3{,}297 \\ \pi/30 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_2 = \vec{q}(2\Delta t) = \vec{q}_1 + \vec{g}(\vec{q}_1)\,.\,\Delta t = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ 3{,}297 \\ \pi/30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 96\,sin(\pi/30) \\ 0 \\ 28{,}8\cos\pi/30 \\ 3{,}297 \end{pmatrix} \times 0{,}1 = \begin{pmatrix} 1{,}755.\,10^{-2} \\ 10^{-3} \\ 6{,}177 \\ 0{,}4344 \end{pmatrix}$$

Question 3. Collision d'une boule et d'un cube (20 points)

Une boule de masse m_b=100 g et de diamètre d=10 cm se déplaçant avec une vitesse constante $\vec{v}_b = (0.2, 0.2, 0)^T$ m/s (vitesse du centre de masse) entre en collision avec un cube d'arête $a = 10$ cm de masse m_c=100 g se déplaçant à une vitesse constante $\vec{v}_c = (0.1, 0.1, 0)^T$ m/s (vitesse du centre de masse). La position du centre de masse de la boule lors du contact est $\vec{r}_b = (0.95, 0, 1)^T$ m et celle du centre de masse du cube est $\vec{r}_c = (1.05, 0, 1)^T$ m. Au moment où la collision se produit, les axes du cube sont alignés avec les axes x, y et z la vitesse angulaire du cube est $\vec{\omega}_c = (0, 1, 0)^T$ rad/s.

(a) (**3 points**) Déterminer la position $\vec{r}_p$ du point de contact entre la boule et le cube et la normale entrante $\vec{n}$ à la boule à ce point.

(b) (**5 points**) Déterminer la vitesse du point de contact $\vec{r}_p$ pour la boule ($\vec{v}_{p,b}(t_i)$) et le cube ($\vec{v}_{p,c}(t_i)$) au moment de la collision.

(c) (**12 points**) En supposant que le coefficient de restitution pour la collision est $\epsilon = 1$, et que la collision est sans frottement, déterminer la vitesse linéaire du point de contact localisé sur le cube $\vec{v}_{p,c}(t_f)$ après la collision.

Solution :

(a) **(3 points)** *Déterminer la position $\vec{r}_p$ du point de contact entre la boule et le cube et la normale entrante $\vec{n}$ à la boule à ce point.*

En examinant la position du centre de masse de la boule et du cube, on réalise immédiatement que la collision prend place avec la face du bloc perpendiculaire avec l'axe des x au point $x = 1$ m. Comme le centre de masse de la boule en y et z est le même que celui du cube, le point d'intersection est $y = 0$ et $z = 1$. La position du point $\vec{r}_p$ est donc

$$\vec{r}_p = (1, 0, 1)^T m$$

La normale entrante à la boule est dans la direction $-x$ et

$$\vec{n} = (-1, 0, 0)^T$$

(b) **(5 points)** *Déterminer la vitesse du point de contact $\vec{r}_p$ pour la boule ($\vec{v}_{p,b}(t_i)$) et le cube ($\vec{v}_{p,c}(t_i)$) au moment de la collision.*

Comme la vitesse angulaire de la boule est nulle, la vitesse d'un point sur la boule est la même que la vitesse du centre de masse de la boule et $\vec{v}_{p,b}(t_i) = \vec{v}_b(t_i) = (0.2, 0.2, 0)^T$. Pour le cube, il faut prendre en compte la vitesse de rotation angulaire du cube et

$$\vec{v}_{p,c}(t_i) = \vec{v}_c + \vec{\omega}_c \times \vec{r}_{p,c}$$

où $\vec{r}_{p,c} = \vec{r}_p - \vec{r}_c = (-0.05, 0, 0)^T$ m. En utilisant les données, on obtient

$$\vec{v}_{p,c}(t_i) = (0.1, 0.1, 0.05)^T m/s$$

(c) **(12 points)** *En supposant que le coefficient de restitution pour la collision est $\epsilon = 1$, et que la collision est sans frottement, déterminer la vitesse linéaire du point de contact localisé sur le cube $\vec{v}_{p,c}(t_f)$ après la collision .*

La vitesse linéaire du point de contact sur le cube après la collision est donnée par

$$\vec{v}_{p,c}(t_f) = \vec{v}_c(t_i) - \frac{j}{m_c}\hat{n} + \left(\vec{\omega}_c - j\left(I_c^{-1}(\vec{r}_{p,c} \times \vec{n})\right)\right) \times \vec{r}_{p,c}$$

avec $\vec{r}_{p,b}$ donné plus haut et $j = -\alpha(1+\epsilon)v_{r,-}$ où

$$v_{r,-} = \vec{n} \cdot (\vec{v}_{p,b} - \vec{v}_{p,c}) = -0.1\ m/s$$

$$\alpha = \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} + G_b + G_c$$

$$G_b = \vec{n} \cdot \left(I_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \vec{n})\right) \times \vec{r}_{b,p}$$

$$G_c = \vec{n} \cdot \left(I_c^{-1} \left(\vec{r}_{c,p} \times \vec{n} \right) \right) \times \vec{r}_{c,p}$$

Comme $\vec{r}_{p,b}$, $\vec{r}_{p,c}$ *et* $\vec{n}$ *sont parallèles,* $G_b = G_c = 0$ *et on peut simplifier l'équation pour* $\vec{v}_{b,c}\left(t_f\right)$ *à la forme suivante*

$$\vec{v}_{p,c}\left(t_f\right) = \vec{v}_c(t_i) - \frac{j}{m_c}\hat{n} + \vec{\omega}_c \times \vec{r}_{p,c}$$

avec

$$\alpha = \left(\frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}\right)^{-1}$$

on obtient alors $\alpha = 0.05$ *kg et* $j = 0.01\ \ kg \times \frac{m}{s}$. *Finalement*

$$\vec{v}_{p,c}\left(t_f\right) = (0.02, 0.1, 0.05)\ m/s$$

Question 3. Réflexion et réfraction de la lumière (20 points)

Un rayon lumineux polarisé TE unidirectionnel d'intensité I_i provenant d'une source localisée à $\vec{r}_i = (1, 0, 3)^T$ m se propage dans le vide. Il atteint une sphère de verre transparente d'indice de réfraction $n_s = 1.5$ au point $\vec{r}_p = (1, 1.95, 4.0)^T$ m. Cette sphère de rayon $R = 5$ cm est centrée au point $\vec{r}_s = (1, 2, 4)^T$m.

(a) (**3 points**) Déterminer la direction de propagation de ce rayon lumineux (vecteur unitaire incident $\hat{u}_i$) et la normale unitaire sortante $\hat{\imath}$ à la surface de la sphère au point $\vec{r}_p$?

(b) (**10 points**) Déterminer les vecteurs unitaires $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_t$ indiquant respectivement la direction du rayon réfléchi et du rayon transmis à travers le verre.

(c) (**7 points**) Quel sera le rapport I_t/I_i entre l'intensité du rayon lumineux transmis à travers la sphère et l'intensité du rayon incident ?

Solution :

*(a) (**3 points**) Déterminer la direction de propagation de ce rayon lumineux (vecteur unitaire incident $\hat{u}_i$) et la normale unitaire sortante $\hat{\imath}$ à la surface de la sphère au point $\vec{r}_p$?*

Le vecteur unitaire incident est donné par

$$\hat{u}_i = \frac{\vec{r}_p - \vec{r}_i}{|\vec{r}_p - \vec{r}_i|} = (0, 0.8898, 0.4563)^T$$

et la normale unitaire sortante est donnée par

$$\hat{\imath} = \frac{\vec{r}_p - \vec{r}_s}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|} = (0, -1, 0)^T$$

*(b) (**10 points**) Déterminer les vecteurs unitaires $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_t$ indiquant respectivement la direction du rayon réfléchi et du rayon transmis à travers le verre.*

Le vecteur unitaire du rayon réfléchi est donné par :

$$\hat{u}_r = \hat{u}_i - 2\,\hat{\imath}(\hat{u}_i.\hat{\imath})$$

où $\hat{\imath} = (0, -1, 0)^T$ est le vecteur unitaire normal à la surface de la sphère. On obtient donc

$$\hat{u}_r = (0, 0.8898, 0.4563)^T - 2(0, 0.8898, 0)^T = (0, -0.8898, 0.4563)^T$$

Le vecteur unitaire du rayon transmis est donné par :

$$\hat{u}_t = -\,\hat{\imath}\sqrt{1 - (\sin\theta_t)^2} + \hat{k}\sin\theta_t$$

avec

$$\sin\theta_t = \frac{1}{1.5}\sin\theta_i = \frac{1}{1.5}\hat{u}_i \cdot \hat{k}$$

Pour évaluer $\hat{k}$ on utilise

$$\hat{\jmath} = \frac{\hat{u}_i \cdot \hat{\imath}}{|\hat{u}_i \cdot \hat{\imath}|} = (1, 0, 0)^T$$

suivi de $\hat{k} = \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = (0, 0, 1)^T$. On obtient alors $\sin\theta_i = 0.4563$ et $\sin\theta_t = 0.3042$ et le vecteur $\hat{u}_t$ est finalement donné par

$$\hat{u}_t = (0, 0.9526, 0.3042)^T$$

*(c) (**5 points**) Quel sera le rapport I_t/I_i entre l'intensité du rayon lumineux transmis à travers la sphère et l'intensité du rayon incident ?*

L'angle d'incidence θ_i est donné par :

$$\theta_i\text{=arcsin}(0.4563) = 0.4739\, rad$$

L'angle de réfraction θ_t est donné par :

$$\theta_t\text{=arcsin}(0.3042) = 0.3091\, rad$$

Le rapport de l'intensité transmise sur l'intensité incidente est donné par le coefficient de transmission $T_{TE} = 1 - R_{TE}$ des ondes électromagnétiques polarisées TE :

$$\frac{I_t}{I_i} = 1 - R_{TE} = 1 - \left(\frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\sin(0.3091 - 0.4738)}{\sin(0.3091 + 0.4738)}\right)^2 \approx 0.9459$$

Le signal lumineux est donc transmis presque totalement à travers la sphère.