Devoir 2

Date de distribution : 4 octobre 2021

Date de remise : 25 octobre 2021

Coup de pied de coin au soccer

Le devoir consiste à simuler un tir de coup de pied de coin (un corner) dans un jeu de soccer. Le ballon est de forme sphérique, de masse $m_b = 450$ g et de rayon $R_b = 11$ cm. Les dimensions du terrain sont décrites dans la figure 1.

Le système d'axes *oxyz* a comme origine le coin inférieur gauche du terrain tel que montré sur la figure 1. Le plan du terrain est confondu avec le plan $z = 0$ où l'axe *oz* est sortant de la page. L'axe *ox* est dans la direction de la longueur, et l'axe *oy*, dans la direction de la largeur du terrain.

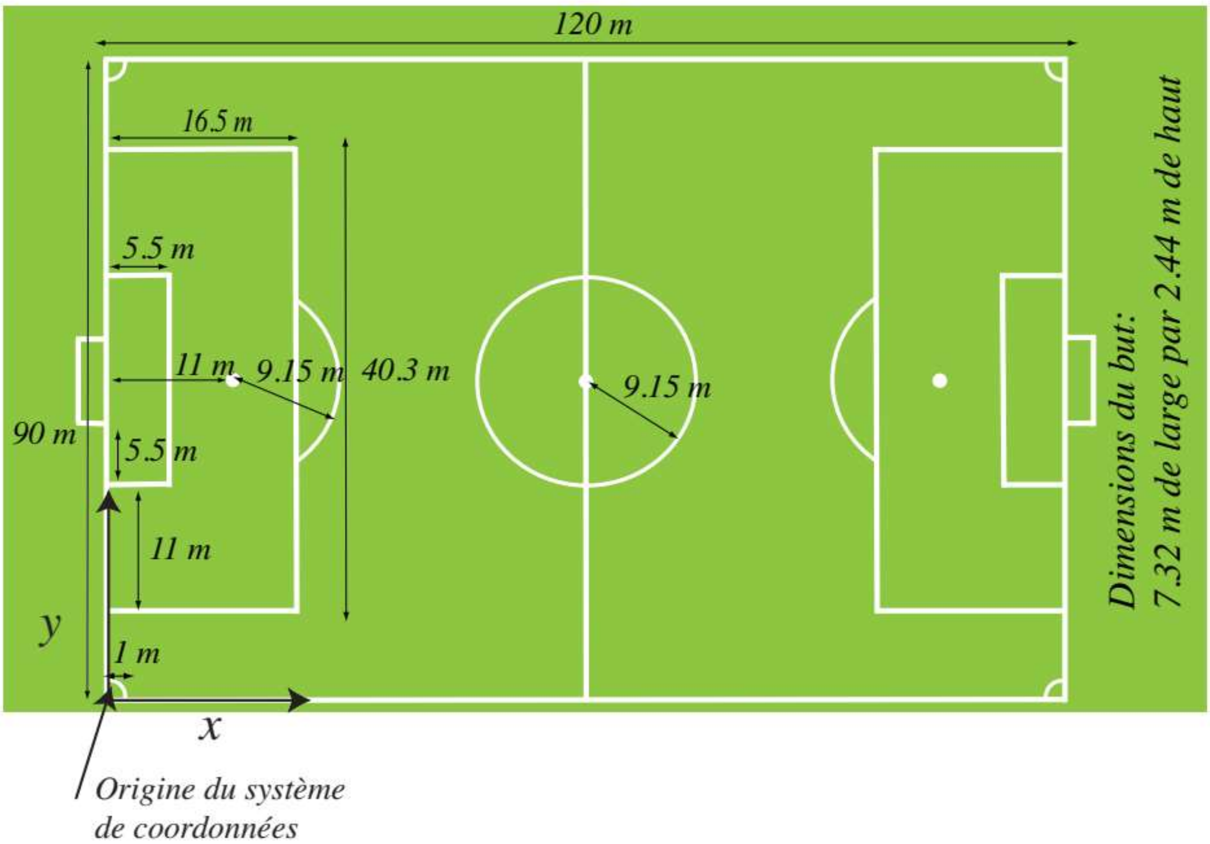


Figure 1: Dimensions d'un terrain de soccer.

Il s'agit dans ce devoir, de tracer la trajectoire du ballon à partir de son point de départ jusqu'à ce qu'il rentre dans le but, touche le sol, touche un des montants du but ou sorte du terrain. Il faut aussi déterminer si un but a été marqué.

Les deux buts ont une largeur de 7.32 m et une hauteur de 2.44 m et sont situés de façon symétrique dans les plans $x = 0$ et $x = 120\text{m}$ sur les lignes gauche et droite délimitant le terrain. On considérera que les montants des buts (deux barres latérales et une barre transversale) ont une largeur nulle et que le ballon ne doit pas les toucher pour marquer un but.

La simulation s'arrête dès qu'une des situations suivantes se produit :

1. Le ballon entre dans le but (position du centre de masse en $x < 0$ ou $x > 120$ m entre les barres latérales et sous la barre transversale sans les toucher et sans toucher le sol. Un but est alors accordé.
2. Le ballon touche le sol. Le coup est un échec.
3. Le ballon touche un des montants du but. Le coup est un échec.
4. Le ballon sort du terrain sans rentrer dans les buts. Le coup est un échec.

Les forces qui s'appliquent sur le ballon durant son vol sont : la force gravitationnelle, la force de frottement visqueux de l'air et la force de Magnus.

- La force de gravitation est représentée par $\vec{F}_g = (0; 0; -m_b\text{g})^T$ avec $\text{g} = 9.8\ \text{m/s}^2$.
- La force de frottement visqueux est donnée par :

$$\vec{F}_{vis} = -A\rho C_{vis}\vec{v}$$

avec: $A = \pi R_b^2$ est l'aire effective du ballon.

$\vec{v}$ est la vitesse du centre de masse du ballon.

$\rho = 1.2754\ \text{kg/m}^3$ est la masse volumique de l'air.

C_{vis} est le coefficient de trainée visqueuse donné par :

$$C_{vis} = \begin{cases} 0.235\ |\vec{v}| & \text{si } Re < 100000 \\ 0.235\ |\vec{v}| - 0.125\ |\vec{v}| \left(\frac{Re-10000}{35000}\right) & \text{si } 100000 < Re < 135000 \\ 0.110\ |\vec{v}| & \text{sinon} \end{cases}$$

avec Re le nombre de Reynolds donné par :

$$Re = \frac{\rho|\vec{v}|R_b}{\mu}$$

où $\mu = 1.8 \times 10^{-5}\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ est la viscosité de l'air.

- La force de Magnus est donnée par :

$$\vec{F}_M(\vec{v},\vec{\omega}) = \rho C_M A|\vec{v}|^2 \frac{\vec{\omega}\times\vec{v}}{|\vec{\omega}\times\vec{v}|}$$

  où ρ, A et $\vec{v}$ sont définis ci-dessus, $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire du ballon et C_M est le coefficient de Magnus donné par :

$$C_M = 0.1925\left(\frac{|\vec{\omega}|R_b}{|\vec{v}|}\right)^{1/4}$$

On considère qu'il n'y a aucune circulation d'air sur le terrain.

But du devoir

Le but de ce devoir est de programmer une fonction Matlab ou Octave qui permet de tracer la trajectoire du ballon pour les situations décrites ci-dessous. La fonction demandée doit pouvoir être appelée comme suit :

```
[coup Vbf t x y z]=Devoir2(xy0,Vb0,Wb0)
```

Les données d'entrée pour cette fonction sont :

- `xy0` est un vecteur de deux éléments contenant respectivement les positions en x et en y (en mètre) du centre de masse du ballon. La position z est égale à R_b.
- `Vb0` est un vecteur contenant les trois composantes du vecteur vitesse linéaire initiale du centre de masse du ballon (en m/s).
- `Wb0` est un vecteur contenant les trois composantes du vecteur vitesse angulaire du ballon (en m/s). On considérera que celle-ci reste constante durant le déplacement du ballon.

Les résultats produits par cette fonction Matlab (ou Octave) sont :

- `coup` prend les valeurs suivantes :
  - `Coup=0` si un but est marqué
  - `Coup=1` si le ballon atterrit sur le terrain
  - `Coup=2` si le ballon sort du terrain sans marquer de but.
  - `Coup=3` si le ballon touche un des montants des buts.

- `Vbf` est un vecteur contenant les trois composantes du vecteur vitesse linéaire du centre de masse du ballon (en m/s) lorsque la simulation est terminée.

- `t` vecteur contenant le temps correspondant à chacune des positions enregistrées pour le tracé de la trajectoire. La dernière valeur doit être l'instant d'arrêt de la simulation. Le nombre d'instants utilisés pour tracer la trajectoire doit être compris entre 100 et 1000.
- `x` vecteur contenant les positions en *x* du centre de masse du ballon enregistrées pour le tracé de la trajectoire.

- y vecteur contenant les positions en y du centre de masse du ballon enregistrées pour le tracé de la trajectoire.
- z vecteur contenant les positions en z du centre de masse du ballon enregistrées pour le tracé de la trajectoire. La première valeur doit être égale à R_b.

Simulations requises

Les conditions initiales du ballon pour les tirs à simuler et à analyser sont données dans le tableau 1. La précision requise pour les simulations correspond à des erreurs maximales sur les positions du ballon en x, y et z de ± 1 mm. Des graphiques illustrant la trajectoire du ballon pour ces quatre simulations sont requis (voir un exemple à la figure 2). Un fichier nommé ‘’RouleDevoir2.m’’ sera disponible sous peu pour vous permettre de tracer les trajectoires.

Pour le quatrième tir, vous devez trouver une combinaison des vitesses linéaire et angulaire qui permet de marquer un but du côté gauche à partir de la position initiale donnée dans le tableau.

Tableau 1 : conditions initiales des simulations de tir.

Tirs	$xy0$ (m)	Vb0 (m/s^2)	Wb0 (rad/s)
1	[0.2 ; 89.8]	[5.3 ; -21.0 ; 16.5]	[0 ; 0 ; 6.3]
2	[0.2 ; 89.8]	[5.3 ; -21.0 ; 16.5]	[0 ; -5 ; -6.3]
3	[0.2 ; 89.8]	[5.3 ; -21.0 ; 16.5]	[0 ; 0 ; -6.3]
4	[0 ; 1]	À déterminer	À déterminer

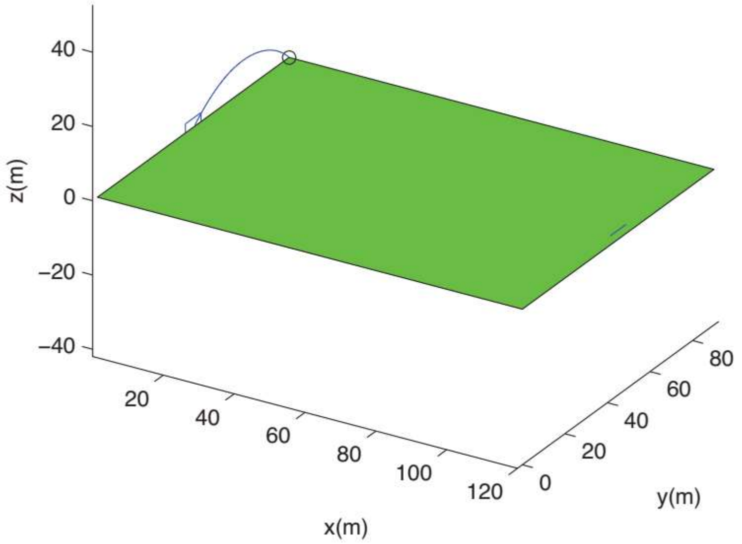


Figure 2 : exemple de trajectoire simulée.

Solution :

Équations du mouvement à résoudre :

Le mouvement du ballon est soumis aux équations suivantes :

$$\frac{d\vec{v}_c(t)}{dt} = \vec{a}_c(t) = \frac{1}{m_b}\left[\vec{F}_g + \vec{F}_{vis}(\vec{v}_c) + \vec{F}_M(\vec{v}_c, \vec{\omega})\right]$$

$$\frac{d\vec{r}_c(t)}{dt} = \vec{v}_c(t)$$

où $\vec{F}_g$ est le poids, $\vec{F}_{vis}$ et $\vec{F}_M$ sont respectivement la force de viscosité et la force de Magnus données dans l'énoncé.
On regroupe ces deux équations sous forme :

$$\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \vec{g}(\vec{q}(t), t)$$

Pour ce problème, le vecteur d'état $\vec{q}(t)$ du ballon est composé de 6 éléments:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où les trois premiers éléments sont les composantes du vecteur vitesse du centre de masse $\vec{v}_c(t)$ du ballon et les trois derniers éléments sont les composantes de son vecteur position $\vec{r}_c(t)$.
Ici la vitesse angulaire est constante donc elle ne figure pas dans le vecteur d'état du ballon.

Les conditions initiales sont regroupées dans le vecteur $\vec{q}(0) = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \\ x_0 \\ y_0 \\ R_b \end{pmatrix}$ où les 5 premières valeurs sont données dans le tableau 1 selon le numéro du tir.

Le vecteur $\vec{g}(\vec{q}(t), t)$ est:

$$\vec{g}(\vec{q}(t), t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de a_x, a_y et a_z à mettre dans $\vec{g}(\vec{q}(t), t)$ dépendent du nombre de Reynolds.
Le nombre de Reynolds doit être calculé à chaque pas de temps Δt :

$$R_e = \frac{\rho R_b \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\mu}$$

et vérifier :

Si $R_e < 100000$ alors $C_{vis} = 0.235\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$

Si $R_e \geq 100000$ et $R_e \leq 135000$ alors $C_{vis} = \left(0.235 - \frac{R_e - 100000}{35000}\right)\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$
Si $R_e > 135000$ alors $C_{vis} = 0.11\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$

Les composantes de la force de viscosité s'écrivent donc :

$$F_{vis,x} = -\pi R_b^2 \rho C_{vis} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\, q_1$$
$$F_{vis,y} = -\pi R_b^2 \rho C_{vis} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\, q_2$$
$$F_{vis,z} = -\pi R_b^2 \rho C_{vis} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\, q_3$$

Les composantes de la force de Magnus s'écrivent :

$$F_{M,x} = \pi R_b^2 \rho (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) C_M \frac{\omega_y q_3 - \omega_z q_2}{\left((\omega_y q_3 - \omega_z q_2)^2 + (\omega_z q_1 - \omega_x q_3)^2 + (\omega_x q_2 - \omega_y q_1)^2\right)^{1/2}}$$
$$F_{M,y} = \pi R_b^2 \rho (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) C_M \frac{\omega_z q_1 - \omega_x q_3}{\left((\omega_y q_3 - \omega_z q_2)^2 + (\omega_z q_1 - \omega_x q_3)^2 + (\omega_x q_2 - \omega_y q_1)^2\right)^{1/2}}$$
$$F_{M,z} = \pi R_b^2 \rho (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) C_M \frac{\omega_x q_2 - \omega_y q_1}{\left((\omega_y q_3 - \omega_z q_2)^2 + (\omega_z q_1 - \omega_x q_3)^2 + (\omega_x q_2 - \omega_y q_1)^2\right)^{1/2}}$$

avec:

$$C_M = 0.1925 \left(\frac{R_b \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right)^{1/4}$$

où ω_x, ω_y et ω_z sont les coposantes du vecteur vitesse angulaire du ballon. Celles-ci sont données dans le tableau 1 selon le numéro du tir.
Quant aux composantes de la force gravitationnelle :

$$F_{g,x} = F_{g,y} = 0$$
$$F_{g,z} = -m_b g$$

Le vecteur $\vec{g}(\vec{q}(t), t)$ sera donc:

$$\vec{g}(\vec{q}(t), t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_b}(F_{vis,x} + F_{M,x}) \\ \frac{1}{m_b}(F_{vis,y} + F_{M,y}) \\ \frac{1}{m_b}(F_{g,z} + F_{vis,z} + F_{M,z}) \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Méthode de résolution et précision :

On utilise la méthode de Rung-Kutta car c'est la plus précise. En ce qui concerne la précision, l'erreur sur la position ne doit pas dépasser $\varepsilon = \pm$ 1mm. Pour s'asssurer de cette précision, plusieur façon de procéder sont possibles. La plus simple, serait de prendre un pas de temps Δt assez petit de façon à ce que le ballon se déplace d'une fraction de ε pendant ce lapse de temps. Sachant que la vitesse initiale est la vitesse maximale du ballon, on peut choisir $\Delta t = \frac{\varepsilon/10}{|\vec{v}_i|}$. Cette méthode risque de prolonger la durée d'execusion du programme mais comme celui-ci ne prend qu'une fraction de seconde, cela ne dérange pas. On peut aussi utiliser la méthode de contrôle d'erreur en choisissant un Δt initial assez grand (de l'ordre de la seconde) puis le diviser par 2 et recommencer la simulation et ainsi de suite jusqu'à ce que la position finale du ballon ne varie que d'une distance $< \varepsilon$ entre deux simulations successives.

Conditions d'arrêt de la simulation :

À chaque pas de temps, il faut vérifier si le ballon touche le sol ou le but, sort du terrain ou marque un but. On posera x, y et z les composantes du vecteur position du centre de masse du ballon. Pour alléger les formules on notera :

- $z_t = 2.44$ m la hauteur de la barre transversale du but
- $y_{p,1} = 41.34$ m la position en y du premier poteau
- $y_{p,2} = 48.66$ m la position en y du deuxième poteau

Le ballont touche le sol (coup=1) si :

$$z \leq R_b$$

Le ballon sort du terrain (coup=2) si :

Le ballon ne touche pas le sol et $[(x < 0)$ ou $(x > 120)$ ou $(y < 0)$ ou $(y > 90)]$. À vérifer si le but est inscrit ou pas.

Le ballon touche les buts (coup=3) si :

Le ballon ne touche pas le sol, ne sort pas du terrain et une des conditions suivantes et vérifiée :

Le ballon touche le premier poteau du but gauche si :

$$\left[x^2 + (y - y_{p,1})^2 \leq R_b^2\right] \text{ et } z \leq z_t$$

Le ballon touche le deuxième poteau du but gauche si :

$$\left[x^2 + (y - y_{p,2})^2 \leq R_b^2\right] \text{ et } z \leq z_t$$

Le ballon touche le premier poteau du but droit si :

$$\left[(x - 120)^2 + (y - y_{p,1})^2 \leq R_b^2\right] \text{ et } z \leq z_t$$

Le ballon touche le deuxième poteau du but droit si :

$$\left[(x - 120)^2 + (y - y_{p,2})^2 \leq R_b^2\right] \text{ et } z \leq z_t$$

Le ballon touche la barre transversale du but gauche si :

$$\left[x^2 + (z - z_t)^2 \leq R_b^2\right] \text{ et } y \geq y_{p,1} \text{ et } y \leq y_{p,2}$$

Le ballon touche la barre transversale du but droit si :

$$\left[(x - 120)^2 + (z - z_t)^2 \leq R_b^2\right] \text{ et } y \geq y_{p,1} \text{ et } y \leq y_{p,2}$$

Le but est marqué (coup=0) s'il ne touche pas le sol et à l'instant où il sort du terrain toutes les contitions suivantes sont vériées:

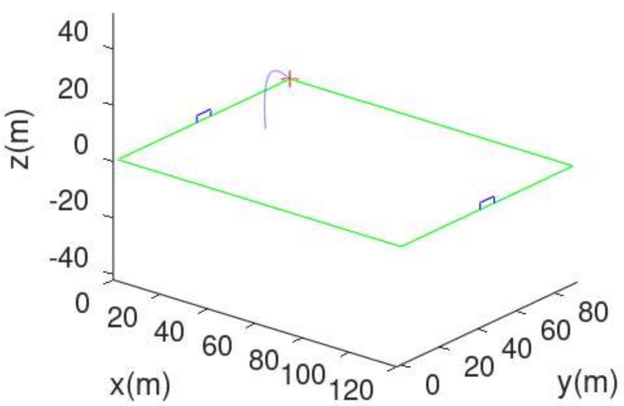
$$(y > y_{t,1} + R_b) \text{ et } (y < y_{t,2} - R_b) \text{ et } (z < z_t - R_b)$$

Dès que le but est marqué, le résultat ''coup=2'' est remplacé par ''coup=0''.

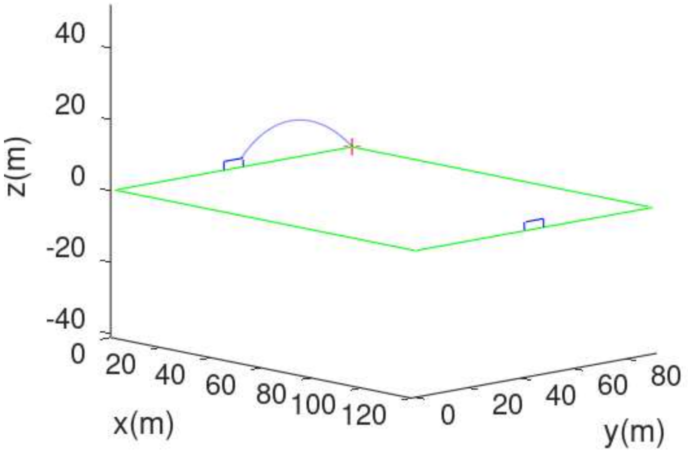
Résultats :
Pour les trois tirs mentionnés dans le tableau 1, on obtient les résultats suivants :

Tirs	Temps final (s)	Positions finales (m)	Vitesses finales (m/s)	résultat
1	2.9904	(21.2851 ; 51.0203 ; 0.1099)	(6.7746 ; -6.6538 ; -12.4944)	Touche le sol
2	2.8118	(0.0384 ; 47.9523 ; 2.5430)	(-2.2741 ; -8.9362 ; -11.8189)	Touche les montants du but
3	2.9748	(0 ; 45.8085 ; 0.3043)	(-2.8213 ; -9.1079 ; -12.3925)	But!
4	2.90256	(0 ; 44.3252 ; 1.1827)	(-2.7150 ; 9.3345 ; -11.9199)	But!

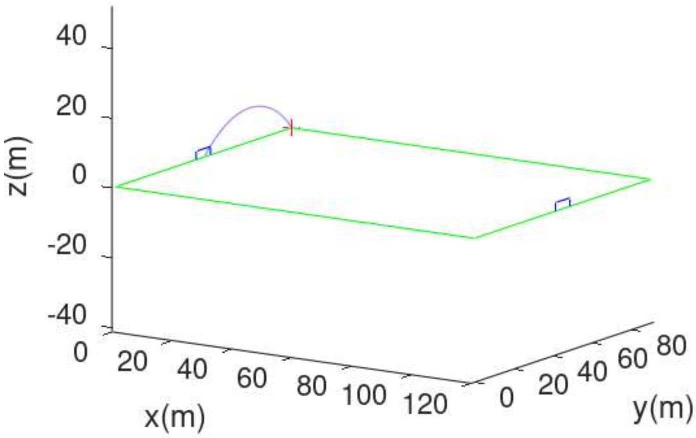
Le quatrième tir doit mener à un but. On peut procéder par ajustement des vitesses initiales (linéaire et angulaire) jusqu'à ce que le ballon entre dans le but. On peut aussi se servir du tir 3 où le but est marqué pour obtenir les vitesses initiales. Ùil suffit d'appliquer la symétrie.



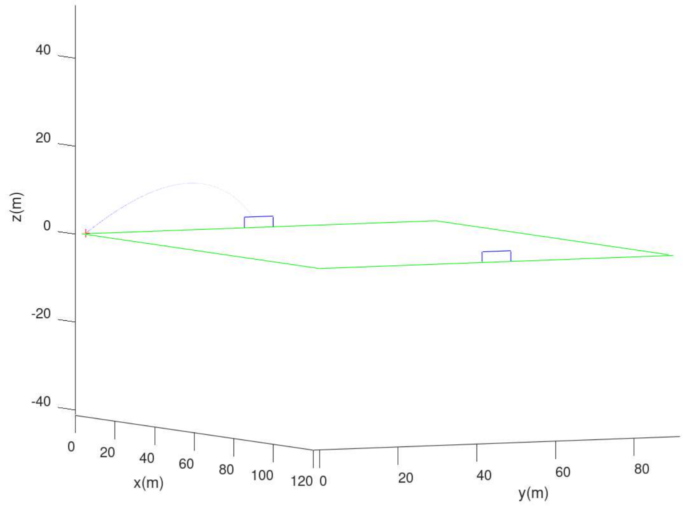
Tir 1



Tir 2



Tir 3



Tir 4