Question 3. Prisme irrégulier (20 points)

On considère un prisme irrégulier uniforme dans la direction y dont deux faces dans le plan $x - z$ sont des triangles équilatéraux composés respectivement de diamant ($n_d = 2.42$) et de verre ($n_v = 1.52$). Ces régions séparées par surface rectangulaire remplie d'eau ($n_e = 1.33$). Le tout est placé à l'air ambiant ($n_a = 1$). Une onde incidente de lumière polarisée transverse magnétique (TM) rencontre une surface en diamant au point O indiqué sur la figure 3.1. En supposant que la direction du rayon de lumière incident est donnée par

$$\hat{r}_i = -\cos(\theta_i)\hat{\imath} + \sin(\theta_i)\hat{k}, \text{ tel que } \theta_i = 65°.$$

a) Dessiner sur la figure 3.1 la trajectoire du rayon lumineux jusqu'à ce qu'il pénètre dans l'eau.

b) Donner la direction du rayon de lumière après à sa première réfraction (lorsqu'il entre dans le diamant).

c) Calculer le rapport entre l'intensité de l'onde initiale et celle de l'onde pénétrant dans l'eau.

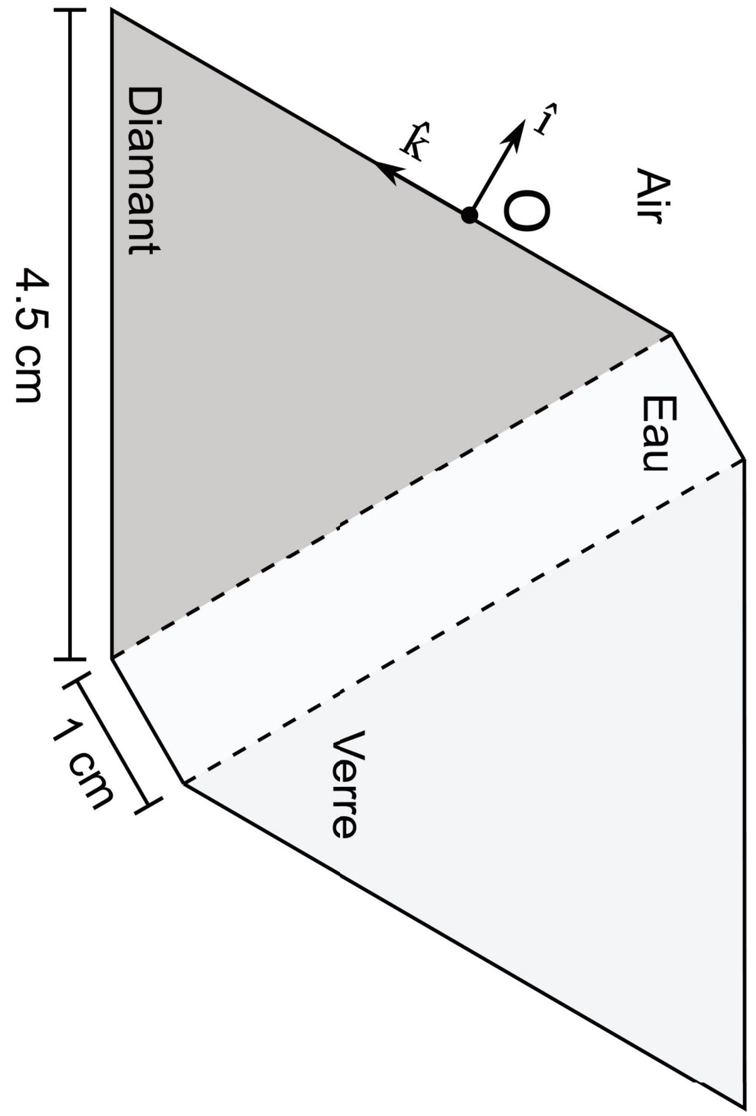

Figure 3.1: Prisme irrégulier.

Corrigé

a) *Dessiner la trajectoire du rayon jusqu'à ce qu'il pénètre dans l'eau.*

Ici, comme on travaillera en 2 dimensions, on peut se limiter aux 2e lois de Snell-Descartes. Identifions par n_i et n_t les indices de réfraction des milieux d'incidence et de transmission et par θ_i et θ_t les angles d'incidence et de transmission. On écrit alors:

$$\sin(\theta_t) = \frac{n_i}{n_t}\sin(\theta_i).$$

À chaque interface, on va rencontrer une des situations suivantes:

- *Si $(n_i/n_t)\sin(\theta_i) > 1$, alors on en déduit qu'il s'agit d'une réflexion totale interne et par conséquent:*
$$\theta_r = -\theta_i.$$
- *Si $(n_i/n_t)\sin(\theta_i) < 1$, alors on en déduit qu'il s'agit d'une diffraction et par conséquent:*
$$\theta_t = \arcsin\left[\frac{n_i}{n_t}\sin(\theta_i)\right].$$

Les interfaces rencontrées par le rayon sur son parcours jusqu'à l'eau sont alors les suivantes.

1. *À l'interface air/diamant, il y a une diffraction : comme $\theta_i = 65°$, alors $\theta_t = 21.99°$.*
2. *À l'interface diamant/air, il y a une réflexion totale interne : par symétrie*
$$\theta_i = 60° - \theta_t = 38.01°$$
et $\theta_r = 38.01°$.
3. *À l'interface diamant/eau, il y a une diffraction : par symétrie*
$$\theta_i = \theta_r + 60° = 21.99°$$
et $\theta_t = 42.96°$.

La trajectoire est présentée à la figure 3.2.

b) *Donner la direction du rayon de lumière après à sa première réfraction (lorsqu'il entre dans le diamant).*

La direction du rayon transmis dans le diamant est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{u}_t &= -\hat{n}\cos(\theta_t) + \hat{k}\sin(\theta_t) \\
&= -\hat{\imath}\cos\left[\arcsin\left(\frac{n_i}{n_t}\sin(\theta_i)\right)\right] + \hat{k}\frac{n_i}{n_t}\sin(\theta_i) \\
&= -\hat{\imath}\cos(21.99°) + \hat{k}\sin(21.99°) \\
&= -0.92725\,\hat{\imath} + 0.37444\,\hat{k}
\end{aligned}$$

c) *Calculer le rapport entre l'intensité de l'onde initiale et celle de l'onde pénétrant dans l'eau.*

Une onde est dite polarisée TM si le champ magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence et le champ électrique lui est parallèle. En décomposant l'onde en une composante magnétique $\vec{B}$ *et une seconde électrique* $\vec{E}$*, on a démontré que les coefficients de réflexion et de transmission à chaque interface sont donnés par:*

$$\frac{I_R}{I_i} = R = \left[\frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)}\right]^2$$
$$\frac{I_T}{I_i} = T = 1 - R$$

On peut ainsi considérer les interfaces une à une

1. *Air - Diamant : diffraction (*$\theta_i = 65°, \theta_t = 21.99°$*). L'intensité réfractée sera réduite par un facteur* T_1 *donné par*

$$T_1 = 1 - \left[\frac{\tan(21.99° - 65°)}{\tan(21.99° + 65°)}\right]^2 = 0.9976$$

2. *Diamant - Air : réflexion (*$\theta_i = 38.01°, \theta_r = 38.01°$*). C'est une réflexion totale interne et* R_2*=1.*
3. *Diamant - Eau : diffraction (*$\theta_i = 21.99°, \theta_t = 42.96°$*). L'intensité réfractée sera réduite par un facteur* T_3 *donné par*

$$T_3 = \left\{1 - \left[\frac{\tan(42.96° - 21.99°)}{\tan(42.96° + 21.99°)}\right]^2\right\} = 0.9679$$

L'intensité de l'onde initiale sera donc réduite d'un facteur $T_1 \times R_2 \times T_3$*=0.9656.*

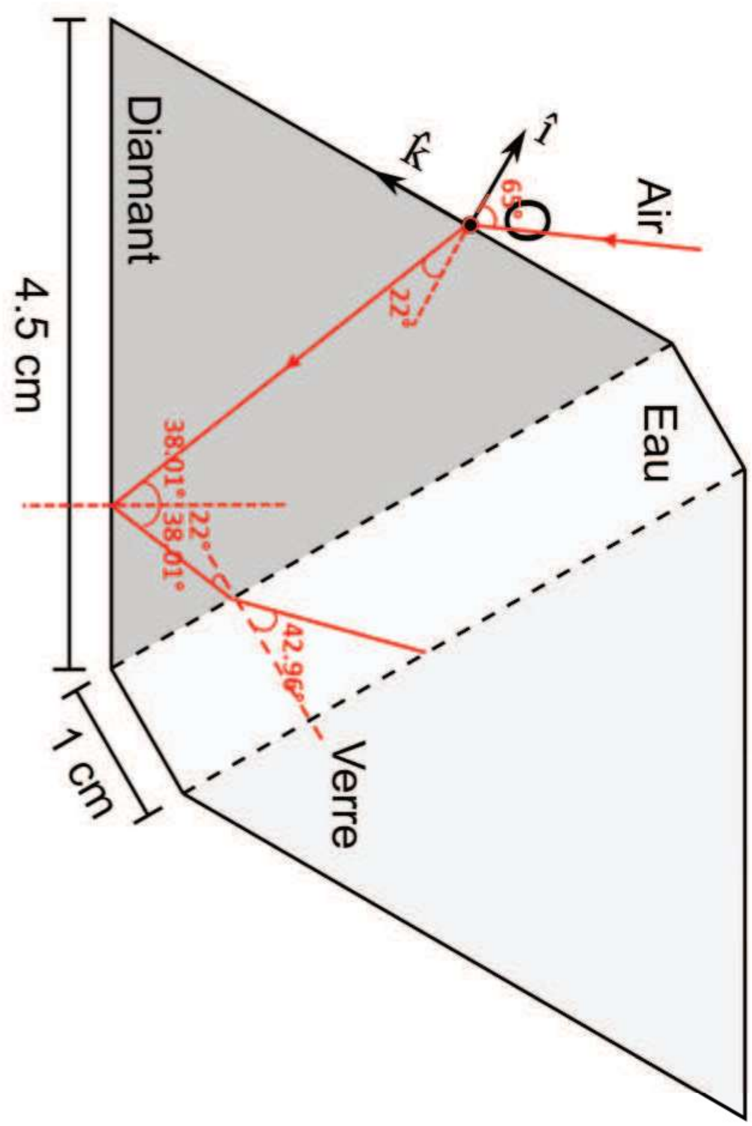

Figure 3.2: Trajectoire dans le prisme irrégulier.