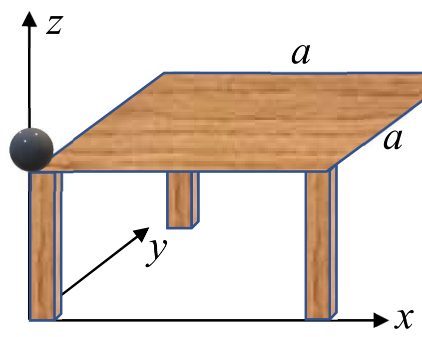
La boule qui roule sur une table

Une boule pleine de rayon $R = 0.1$ m roule sans glisser sur la surface horizontale d'une table de hauteur $z_{table} = 1.0$ m jusqu'à ce qu'elle franchisse un bord et tombe au sol. À l'instant initial $t = 0$, la boule se trouve sur un coin de la table à la position $\vec{r}_{c,0} = (0.0, 0.0, 1.1)^T \mathrm{m/s}$ (voir figure ci-dessous) et sa vitesse linéaire est $\vec{v}_{c,0} = (1.0, 2.0, 0.0)^T \mathrm{m/s}$. Cette vitesse demeure constante tant que la boule roule sur la table. On négligera tout frottement. La surface de la table est de forme carrée de côté $a = 1.5$ m.

a) Déterminer le vecteur vitesse angulaire de la boule lorsque celle-ci roule sans glisser sur la surface de la table.

b) Déterminer le vecteur position $\vec{r}_{c,1}$ de la boule à l'instant où elle quitte la surface de la table.

c) Déterminer l'instant t_1 où le module de la vitesse de la boule atteint la valeur de $v_1 = 3\ \mathrm{m/s}$. L'accélération gravitationnelle est donnée par : $\vec{g} = (0, 0, -9.8)^T \mathrm{m/s^2}$.



Solution :

a) Déterminer le vecteur vitesse angulaire de la boule lorsque celle-ci roule sans glisser sur la surface de la table.

La condition de roulement sans glissement appliquée au cas présent s'écrit:

$$\vec{v}_{c,0} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{c,p}$$

avec $\vec{r}_{c,p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$

méthode du déterminant

Si on pose $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ *alors:* $\vec{v}_{c,0} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\omega_y \\ -R\omega_x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{-v_y}{R} \\ \frac{v_x}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (rad/s)}$$

On a posé $\omega_z = 0$ *car on sait que la boule ne tourne pas autour d'un axe vertical.*

b) Déterminer le vecteur position $\vec{r}_{c,1}$ de la boule à l'instant où elle quitte la surface de la table.

La boule intercepte le plan $x = a$ *à l'instant* $t_x = \frac{a}{v_x} = \frac{1.5}{1} = 1.5$ s *et le plan* $x = a$ *à l'instant* $t_y = \frac{a}{v_y} = \frac{1.5}{2} = 0.75$ s. *Comme* $t_y < t_x$ *, alors elle quitte la table par le bord parallèle à l'axe* ox *à l'instant* t_y.

Sa position est :

$$\vec{r}_{c,1} = \vec{r}_{c,0} + t_y.\vec{v}_{c,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.1 \end{pmatrix} + 0.75 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.5 \\ 1.1 \end{pmatrix} \text{ (m)}$$

c) Déterminer l'instant t_1 où le module de la vitesse de la boule atteint la valeur de $v_1 = 3$ m/s.

À partir de l'instant t_y, la position de la boule devient :

$$\vec{v}_c(t) = \vec{v}_{c,0} + \vec{g}(t - t_y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8 \end{pmatrix}(t - 0.75) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -9.8(t - 0.75) \end{pmatrix}$$

L'instant t_1 correspond à : $\sqrt{1^2 + 2^2 + [-9.8(t_1 - 0.75)]^2} = 3$

$$\Longrightarrow (t_1 - 0.75) = \pm 0.2041 \text{ s}$$

$$\Longrightarrow t_1 = 0.9541 \text{ s}$$

Ici seule la valeur maximale est acceptée car l'autre valeur est inférieure à t_y.