PHS4700

Physique pour les applications multimédia

Automne 2020

Numéro de groupe : 01

Numéro de l'équipe : 11

Numéro du devoir : 1

Nom : Sohou Signature : *S.G*	Prénom : Aubierge Gloria	Matricule : 1832523
Nom : Dorval Signature : *S.D*	Prénom : Sophie	Matricule : 1840814
Nom : Ikhelef Signature : *H.I*	Prénom : Hanane	Matricule : 1891934
Nom : Beaudoin Signature : *Laura Beaudoin*	Prénom : Laura	Matricule : 1956576

Table des matières

1. Introduction

Le chapitre 2 du cours PHS400 portait sur la dynamique des solides. Nous avons donc appris les différentes notions théoriques nécessaires à l'étude d'un solide en mouvement. Le présent rapport présente les résultats du premier travail pratique (TP) qui nous permet d'appliquer ces notions dans un contexte pratique, notamment pour l'étude d'un patineur en déplacement.

Il est question d'écrire un programme Matlab permettant calculer la position du centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire du patineur pour différentes conditions initiales. Pour y arriver, nous avons utilisé des théories et équations présentées à la section 2. Ensuite, nous présentons, dans la section 3 les résultats obtenus et une analyse minutieuse de ces derniers.

2. Théorie et équations

2.1. Calcul du centre de masse

Pour calculer le centre de masse, nous avons utilisé la formule :

$$\boldsymbol{\vec{r}_{cm,1} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{cm,i}} \qquad \text{où :}$$

- N est le nombre de sous-éléments *i* utilisés pour représenter l'objet;
- M est la masse totale du patineur;
- m_i est la masse de chaque sous-élément *i* de l'objet;
- $\vec{r}_{cm,i}$ est la position du centre de masse de chaque sous-élément *i* de l'objet.
- $\boldsymbol{\vec{r}_{cm,1}}$ **est la position du centre de masse du patineur dans son propre référentiel.**

Note : Dans notre cas, l'objet est un patineur et les sous-éléments sont les différentes parties de son corps. Les deux jambes, le tronc, les deux bras et le cou sont représentées par des cylindres, ainsi que la tête, représentée par une sphère. Afin de calculer tous les m_i, nous avons utilisé les formules suivantes :

- Sous-éléments représentés par un cylindre (jambes, tronc, bras, cou):

$$\boldsymbol{m = \rho V = \rho \pi r^2 L_i} \qquad \text{où :}$$

  - ρ est la masse volumique du sous-élément;
  - r est le rayon du cylindre;
  - $\mathrm{L_i}$ est la longueur du cylindre.

- Sous-élément représenté par une sphère (tête):

$$\boldsymbol{m = \rho V = \rho \frac{\pi r^2}{3}} \qquad \text{où :}$$

  - ρ est la masse volumique du sous élément;
  - r est le rayon de la sphère.

Afin de calculer M, nous avons utilisé la formule suivante :

$$\mathrm{M} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{m_i} \qquad \text{où :}$$

- N est le nombre de sous-éléments *i* de l'objet
- m_i est la masse de chaque sous-élément *i* de l'objet

Avec ces calculs et ces formules, nous obtenons ainsi le centre de masse du patineur dans le référentiel local. Comme l'énoncé demande d'avoir le centre de masse du patineur dans le référentiel du laboratoire, il faut donc prendre en compte la position ($\vec{\mathrm{r}}_0$) du référentiel du patineur par rapport au référentiel du laboratoire ainsi que l'orientation (θ) du référentiel local du patineur par rapport au référentiel du laboratoire.

Voici la formule utilisée afin de calculer la position du centre de masse du patineur **dans le référentiel du laboratoire** en considérant **tout d'abord la rotation et ensuite la translation** :

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{cm,2}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + (\mathbf{R}^{2\leftarrow 1}\vec{r}_{cm,1}) \qquad \text{où :}$$

- $\vec{\mathrm{r}}_0$ est le vecteur indiquant dans le référentiel du laboratoire, la position de l'origine du référentiel lié au patineur
- $\mathbf{R}^{2\leftarrow 1}$ est la matrice de rotation,
- $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm,1}}$ représente le centre de masse du patineur dans son propre référentiel,
- $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm,2}}$ représente le centre de masse du patineur dans le référentiel du laboratoire.

La matrice de rotation $\mathbf{R}^{2\leftarrow 1}$ utilisée afin de transformer le vecteur de centre de masse dans le référentiel du patineur en vecteur de centre de masse dans le référentiel global est celle-ci :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Où θ est l'angle du patineur autour de l'axe OY , soit u$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme nous nous limitons à une rotation autour de cet axe (y), nous avons uniquement besoin de cette matrice pour former la matrice de rotation.

Pour considérer **la translation en plus de la rotation**, nous avons fait l'addition entre la position du centre de masse obtenue après rotation $(\mathbf{R}^{2\leftarrow 1}\vec{r}_{cm,1})$ et la position de l'origine du référentiel du patineur dans le référentiel du laboratoire($\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}$).

Il est important de noter que les deux étapes précédemment explicitées doivent absolument être faites dans cet ordre (**rotation**, puis ensuite **translation**), car sinon le résultat obtenu ne sera pas celui attendu. En effet, tant que nous n'avons pas effectué la rotation, nous nous trouvons toujours dans le référentiel local. Donc, plutôt que de se faire dans le référentiel du laboratoire, la translation se fera dans le référentiel local, puisqu'on n'a pas encore fait la rotation. Ensuite, quand on voudra appliquer la rotation, celle-ci ne sera pas appliquée de la façon désirée.

Donc, en suivant les priorités des opérations, avec des valeurs de $\vec{r}_0$ et θ (pour la matrice $\mathbf{R}^{2\leftarrow 1}$) données, cette formule nous permet d'appliquer une rotation et une translation au centre de masse de notre patineur et ainsi obtenir celui-ci dans le référentiel du laboratoire plutôt que dans le référentiel du patineur :

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{cm,laboratoire}} = \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{R}^{\mathbf{laboratoire \leftarrow patineur}} \vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{cm,patineur}}$$

2.2. Calcul du moment d'inertie

2.2.1. Moment d'inertie de chaque sous-élément par rapport à son centre de masse

Afin de calculer le moment d'inertie d'un solide composé, il faut tout d'abord calculer le moment d'inertie de chaque sous-élément du solide composé par rapport à leur propre centre de masse. Pour ce faire, on utilise différentes formules, tout dépendant de la forme du sous-élément.

Comme les jambes, le tronc, le cou et le bras **droit** sont des **cylindres pleins** alignés en l selon l'axe des z, on utilise les formules suivantes :

$$I_{cm,zz} = \frac{m}{2}\, r^2 \text{ et } I_{cm,xx} = I_{cm,yy} = \frac{m}{4}\, r^2 + \frac{m}{12}\, l^2 \quad \text{où :}$$

- m est la masse du cylindre;
- r est le rayon du cylindre;
- l est la longueur du cylindre;
- Les autres termes diagonaux sont nuls.

$$\text{Ainsi, } I_{cm,i} = \begin{pmatrix} I_{cm,xx} & I_{cm,xy} & I_{cm,xz} \\ I_{cm,yx} & I_{cm,yy} & I_{cm,yx} \\ I_{cm,zx} & I_{cm,zy} & I_{cm,zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{4}\, r^2 + \frac{m}{12}\, l^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}\, r^2 + \frac{m}{12}\, l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2}\, r^2 \end{pmatrix}$$

Comme le bras **gauche** est un **cylindre plein** aligné en l selon l'axe des x, on utilise les formules suivantes :

$$I_{cm,xx} = \frac{m}{2}\, r^2 \text{ et } I_{cm,zz} = I_{cm,yy} = \frac{m}{4}\, r^2 + \frac{m}{12}\, l^2 \quad \text{où :}$$

- m est la masse du cylindre;
- r est le rayon du cylindre;
- l est la longueur du cylindre;
- Les autres termes diagonaux sont nuls

$$\text{Ainsi, } I_{cm,i} = \begin{pmatrix} I_{cm,xx} & I_{cm,xy} & I_{cm,xz} \\ I_{cm,yx} & I_{cm,yy} & I_{cm,yx} \\ I_{cm,zx} & I_{cm,zy} & I_{cm,zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2}\, r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}\, r^2 + \frac{m}{12}\, l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{4}\, r^2 + \frac{m}{12}\, l^2 \end{pmatrix}$$

Comme la tête est une **sphère pleine**, on utilise la formule suivante :

$$I_{cm,xx} = I_{cm,yy} = I_{cm,zz} = \frac{2m}{5}\, r^2 \quad \text{où :}$$

- m est la masse de la sphère;
- r est le rayon de la sphère;
- Les autres termes diagonaux sont nuls.

Ainsi, $I_{cm,i} = \begin{pmatrix} I_{cm,xx} & I_{cm,xy} & I_{cm,xz} \\ I_{cm,yx} & I_{cm,yy} & I_{cm,yx} \\ I_{cm,zx} & I_{cm,zy} & I_{cm,zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2}\, r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2m}{5}\, r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m}{5}\, r^2 \end{pmatrix}$

2.2.2. Matrice de rotation

Comme le référentiel de chaque sous-élément n'est pas nécessairement le même que celui du patineur (si $\theta \neq 0$), il faut effectuer une rotation du moment d'inertie afin que chaque partie du corps ait le bon angle, plutôt que d'être vertical. Pour ce faire, on fera tourner la matrice d'inertie de chaque sous-élément par rapport à son centre de masse avec la même matrice de rotation que nous avons vue plus haut.

Cependant, comme nous voulons faire la rotation d'une matrice (et non d'un vecteur comme précédemment), nous devons utiliser la formule suivante pout chaque sous élément **i** :

$$I_{cm,i}^{laboratoire} = \boldsymbol{R}^{laboratoire \leftarrow patineur} I_{cm,i}^{patineur} (\boldsymbol{R}^{laboratoire \leftarrow patineur})^T$$

- $I_{cm,i}^{laboratoire}$ est le moment d'inertie de l'élément i dans le référentiel du laboratoire
- $I_{cm,i}^{patineur}$ est le moment d'inertie de l'élément i dans le référentiel du patineur

Comme mentionné, la matrice de rotation est la suivante :

$$\boldsymbol{R}^{laboratoire \leftarrow patineur} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

2.2.3. Translation du moment d'inertie de chaque sous-élément vers le centre de masse du patineur

Maintenant que chaque partie du patineur possède la bonne orientation, **pour chaque sous-élément**, nous pouvons maintenant procéder à **la translation du moment d'inertie du sous-élément vers le centre de masse du patineur** afin d'obtenir la matrice d'inertie en ce point.

Nous avons donc besoin de la distance entre le centre de masse de chaque sous-élément (dans le référentiel du laboratoire) et le centre de masse du patineur (dans le référentiel du système), étant donné que le but de ce problème est de trouver le moment d'inertie du patineur dans le référentiel du système.

Nous avons **donc calculé la position du centre de masse de chaque sous-élément dans le référentiel du système.** Pour ce faire, nous avons à nouveau utilisé cette formule :

$$\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm,i}} = \vec{\mathrm{r}}_0 + \mathbf{R}^{\mathrm{laboratoire}\leftarrow\mathrm{patineur}}\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm,patineur}}$$

- $\vec{\mathrm{r}}_0$ est le vecteur indiquant dans le référentiel du laboratoire, la position de l'origine du référentiel lié au patineur
- $\mathbf{R}^{\mathrm{laboratoire}\leftarrow\mathrm{patineur}}$ est la matrice de rotation,
- $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm,patineur}}$ représente le centre de masse de chaque sous-élément dans le référentiel du patineur,
- $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{cm,i}}$ représente le centre de masse du patineur dans le référentiel du laboratoire.

Ensuite, comme les deux centres de masses (celui du patineur ainsi que celui de chaque sous-élément) se trouvent dans le même référentiel, il est possible d'utiliser cette formule de translation des axes afin de calculer le moment d'inertie par rapport à un point $\vec{d}$:

$$I_{i,d} = I_{cm,i} + mi\begin{pmatrix} {d_{c,y}}^2 + {d_{c,z}}^2 & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & {d_{c,x}}^2 + {d_{c,z}}^2 & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & {d_{c,x}}^2 + {d_{c,y}}^2 \end{pmatrix}$$

Avec $\vec{d}_c = \left(d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z}\right) = \vec{d} - \vec{r}_{cm,i}$ où :

- $I_{cm,i}$ est la matrice d'inertie du sous-élément i dans le référentiel du laboratoire,
- mi est la masse du sous élément,
- $\vec{r}_{cm,i}$ est le centre de masse du sous-l'élément i dans le référentiel du laboratoire.

2.2.4. Moment d'inertie final

Une fois tous les moments d'inertie de chaque sous élément par rapport au centre de masse du patineur dans le référentiel du système calculés, il suffit maintenant de sommer les moments d'inertie de chaque sous-élément du solide composé :

$$I_{cm} = \sum_{i=1}^{N} I_{i,d}$$

- N est le nombre d'éléments composant le solide;
- $I_{i,d}$ est la matrice d'inertie de chaque sous-élément du solide composé au centre de masse du solide composé.
- I_{cm} est le moment d'inertie dans le référentiel du laboratoire

2.3. Calcul de l'accélération angulaire

Afin de calculer l'accélération angulaire, nous avons utilisé la formule suivante :

$$\propto (\mathrm{t}) = \left(\mathbf{I}(\mathrm{t})\right)^{-1}(\vec{\tau}(\mathrm{t}) + \vec{\mathrm{L}}(\mathrm{t}) \times \vec{\omega}(\mathrm{t}))$$

Voyons maintenant plus en détail comment nous avons obtenu chacun des éléments de cette formule.

Pour ce qui est du $\left(\mathbf{I}(\mathrm{t})\right)^{-1}$, comme l'énoncé du devoir spécifie que les simulations seraient uniquement effectuées à un instant où le patineur est face à nous, nous pouvons donc prendre en considération que la matrice d'inertie ne varie pas en fonction du temps. Ainsi, $\mathbf{I}(\mathrm{t}) = \mathbf{I}$ que nous avons calculée à l'étape précédente. Ensuite, il suffit simplement de l'inverser pour obtenir le premier élément de notre équation.

Maintenant, pour le moment de force $\vec{\tau}(\mathrm{t})$ d'une force appliquée à un point j et avec un point de rotation i, nous avons utilisé cette formule :

$$\vec{\tau}_{\mathrm{i,j}}(\mathrm{t}) = (\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{j}}(\mathrm{t}) - \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}) \times \vec{\mathrm{F}}(\mathrm{t}) \qquad \text{où :}$$

- $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{j}}(\mathrm{t})$ est le point où la force est appliquée en fonction du temps;
- $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}$ est le point de rotation;
- $\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{t})$ est la force appliquée à ce point en fonction du temps.

Comme le point d'application de la force ainsi que la force elle-même sont constants dans notre problème, nous n'avons pas besoin de considérer le temps. Le moment de force $\vec{\tau}_{\mathrm{i,j}}(\mathrm{t})$ est constant tout au long de notre problème. Dans notre cas, $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}$ est le centre de masse de notre patineur.

Note : Comme le problème demande de donner l'accélération angulaire dans le référentiel du système et que notre centre de masse $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}}$ est dans le référentiel du système, afin d'être cohérents, nous avons donc transformé le point où la force est appliqué ainsi que la force appliquée qui nous sont tous les deux donnés dans le référentiel du patineur afin de les obtenir dans le référentiel du système. Nous avons encore une fois utilisé la même formule pour le point de force $\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{j}}(\mathrm{t})$ afin de changer son référentiel, soit :

$$\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{j,2}} = \vec{\mathrm{r}}_0 + \mathbf{R}^{2\leftarrow1}\vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{j,1}}$$

En revanche, pour la force $\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{t})$, comme celle-ci n'est pas influencée par la position où elle se trouve, nous lui avons uniquement appliqué la matrice de rotation, sans la position.

$$\vec{\mathrm{F}}_2 = \mathbf{R}^{2\leftarrow1}\vec{\mathrm{F}}_1$$

Note : Comme dans le cadre des deux situations de notre problème, la force est uniquement appliquée en y et que notre patineur tourne autour de l'axe y, faire la rotation de la force n'est pas vraiment nécessaire. Cependant, avec d'autres situations, appliquer la rotation pourrait être nécessaire, et c'est pourquoi nous l'avons incluse dans nos calculs.

Ensuite, pour ce qui est du moment cinétique $\vec{L}(t)$, nous l'avons obtenu avec la formule ci-dessous :

$$\vec{L}(t) = \mathbf{I}(t) \times \vec{\omega}(t)$$

Note : Encore une fois, comme dans l'énoncé du devoir on spécifie que les simulations seraient uniquement effectuées à un instant où le patineur est face à nous, nous pouvons donc prendre en considération que la matrice d'inertie ne varie pas en fonction du temps. Il s'agit alors encore de la même matrice que nous avons calculée dans la partie précédente.

Pour sa part, la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ est obtenue grâce au ω_z fourni. En effet, il est possible d'obtenir le vecteur en utilisant cette formule :

$$\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix}$$

Note : Dans notre cas, la vitesse angulaire est constante, car ω_x et ω_y sont nuls, et ω_z est constant.

Ensuite, nous avons changé le référentiel du vecteur de vitesse angulaire afin que celui-ci concorde avec les autres. Tout comme pour le vecteur force, nous avons uniquement appliqué la matrice de rotation, puisque la vitesse angulaire n'est pas influencée par la position du patineur dans le référentiel global.

Finalement, en remplaçant tous les termes dans la formule, nous avons pu obtenir notre accélération angulaire $\propto (t)$. Étant donné que tous les éléments de la formule sont dans le référentiel du système, cela fait en sorte qu'il s'agit bien de l'accélération angulaire du patineur dans le référentiel demandé pour le travail, soit celui du système.

3. Présentation et analyse des résultats

Voici les 2 situations que nous devions analyser pour ce problème :

Situation	$\vec{r}_0$ (m)	Θ (rad)	ω_z (rad/s)	$\vec{F}$ (N)
1	(0.0, 0.0, 0.0)	0.0	0.0	(0, −200, 0)
2	(2.5, 3.0, 0.0)	$-\pi/15$	10.0	(0, −200, 0)

Voici un tableau présentant les résultats que nous avons obtenus pour les deux situations :

	Situation 1	Situation 2
$\vec{r}_{cm,laboratoire}$	$[-0.01035;\ 0;\ 0.97015]$	$[2.28817;\ 3.00000;\ 0.94680]$
I_{cm}	$\begin{pmatrix} 12.9391 & 0 & 0.48476 \\ 0 & 13.9008 & 0 \\ 0.48476 & 0 & 1.54442 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12.24935 & 0 & 2.76016 \\ 0 & 13.90081 & 0 \\ 2.76016 & 0 & 2.23415 \end{pmatrix}$
$\vec{\alpha}(t)$	$[10.68432;\ 0.00000;\ -4.69380]$	$[11.42674;\ -3.48727;\ -2.36983]$

3.1. Centre de masse

Pour ce qui est du centre de masse, nous pouvons facilement observer que les résultats obtenus sont logiques

Pour la situation 1, le bras gauche du patineur étant perpendiculaire à son corps, aura donc tendance à faire basculer son centre de masse de ce côté. C'est donc pour cette raison que nous obtenons une coordonnée en x du centre de masse pour la situation 1 légèrement négatif. On voit aussi que la composante en Y du centre de masse est nulle en raison de la symétrie du problème par rapport à l'axe Oy.

Pour la situation 2, on voit que la composante en y n'est pas nulle puisque la symétrie qui fait qu'elle est nulle dans la situation 1 est perturbée par la rotation subie par le patineur. Comme nous avons uniquement une rotation autour de l'axe des y dans la situation 2, le patineur est parallèle au plan xz. Cela fait donc en sorte que la coordonnée en y du centre de masse doit être la même que la coordonnée en y du vecteur $\vec{r}_0$ indiquant la position de l'origine du référentiel du patineur. Avec une valeur de 3 m pour la composante en y du vecteur centre de masse, nos résultats confirment cette prédiction.

3.2. Moment d'inertie

Pour ce qui est du moment d'inertie, on remarque que quatre des termes sont nuls. En effet, c'est logique, puisque pour avoir une valeur différente de 0, il faudrait que certaines des parties du patineur aient subi une translation en y (voir la formule utilisée plus haut pour effectuer une translation de la matrice du moment d'inertie). Or, comme nous avons mentionné, le patineur est parallèle au plan xz. Donc, chaque centre de masse des sous-éléments a la même coordonnée en y que le centre de masse du patineur et il n'y a ainsi pas de translation de la matrice du moment d'inertie en y.

De plus, comme nous avons vu, chaque sous-élément du patineur a une matrice d'inertie avec des termes non-diagonaux non nuls. Donc, il serait vraiment impossible d'avoir une valeur nulle à ces trois endroits (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}).

3.3. Accélération angulaire

Pour l'accélération angulaire, une force de -200N est appliquée sur l'axe y sur la tête du patineur et les résultats obtenus sont logiques. En effet, le mouvement de rotation est dominant sur l'axe des x, cependant le bras gauche perpendiculaire cause un mouvement de rotation sur l'axe des z. Cette accélération en z est négatif ce qui implique que le patineur tourne dans le sens horaire.

Dans la situation 2, on observe que le patineur tourne sur les trois axes de rotation autour de son centre de masse. En effet, il y a une augmentation de l'accélération en z, ainsi une diminution de l'accélération dans les z négatifs, causant ainsi une accélération négative en y.

4. Conclusion

Dans ce devoir, nous avons réussi à simuler le comportement d'un patineur qui est représenté par des cylindres et une sphère en utilisant Matlab et les lois de la physique qu'on a vu en cours. Les difficultés qu'on a rencontrées étaient liées à l'utilisation de Matlab notamment comment exécuter le programme final, ainsi que la corrélation entre les classes de centre de masse, du moment d'inertie et de l'accélération angulaire. Vu que chaque membre de l'équipe a travaillé sur une classe, il fallait implémenter nos classes d'une façon adéquate pour que le tout fonctionne également. La vérification des résultats était un défi que nous avons eu. Afin de s'assurer que les résultats obtenues étaient correctes, nous avons vérifié les calculs manuellement.