PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 7 — Milieux continus et ondes

Djamel Seddaoui
Département de Génie Physique

Table des matières

Les fluides

Les fluides sont des milieux matériels parfaitement déformables.
On regroupe sous cette appellation :

- les gaz, qui sont des fluides compressibles ;
- les liquides, qui sont des fluides peu compressibles.

Les fluides

Les fluides sont constitués de molécules qui ne sont pas reliées fortement entre elles par les forces moléculaires.

- Ces molécules, si elles sont peu concentrées dans le milieu, interagissent très peu entre elles (principalement par collision). Ce sont les gaz.
- Elles peuvent aussi interagir plus fortement par l'intermédiaire de forces de van der Waals et des interactions dipolaires. Ce sont les liquides.

Ce sont ces interactions qui expliquent les propriétés physiques et chimiques des gaz et des liquides.

La dynamique des fluides

- C'est l'étude du mouvement des fluides, qu'ils soient en phase liquide ou gazeuse.
- Elle fait partie de la mécanique des fluides avec l'hydrostatique (statique des fluides).
- La résolution d'un problème de dynamique des fluides demande normalement de calculer diverses propriétés des fluides par exemple la vitesse, la pression, la densité et la température en tant que fonctions de l'espace et du temps.

Les fluides

- Les axiomes fondamentaux de la dynamique des fluides :

  la conservation des masses ;
  la conservation de la quantité de mouvement ;
  la conservation de l'énergie.

- Ces lois de conservation se traduisent en mécanique des fluide par des équations différentielles non linéaires.

- Pas de solution analytique (en général):

  - ❑ Solution numérique
  - ❑ Approximations comme oscillation cohérent à faible amplitude des molécules → ondes (vagues ou son)

https://www.gtaall.eu/fr/gta-5/mods/64668-tsunami.html

Équations de Navier-Stokes.

Les équations de Navier-Stokes décrivent le comportement des fluides d'un point de vue statistique (physique statistique).

Elles représentent des équations de bilan (énergie, masse et quantité de mouvement).
Elles peuvent prendre plusieurs formes selon le point de vue que l'on adopte :

- pour suivre les particules du fluide, on utilise la description lagrangienne ;
- si l'on veut considérer un point fixe dans l'espace, on utilise la description eulérienne.

Les fluides

Paramètres importants des équations de Navier-Stokes :

t est le temps ;
ρ est la masse volumique du fluide ;

$\vec{v}$ est la vitesse d'une particule du fluide ;
e est l'énergie par unité de masse que l'on décompose en une composante cinétique e_c et une composante interne (potentielle) e_p

$$e = e_c + e_p = \frac{v^2}{2} + e_p$$

p la pression.
$\vec{f}$ est la force massique s'exerçant dans le fluide et peut correspondre à la force gravitationnelle, électromagnétique, etc.

Les fluides

- Lorsqu'il y a des échanges thermiques entre les molécules du fluide et l'environnement, on doit aussi tenir compte du flux de chaleur $\vec{q} = \vec{q}_c + \vec{q}_r$ où

  - $\vec{q}_c$ est dû à la conduction thermique
  - $\vec{q}_r$ est dû au rayonnement.

- Si le fluide est visqueux, il faut inclure les forces de viscosité $\vec{f}_V$.

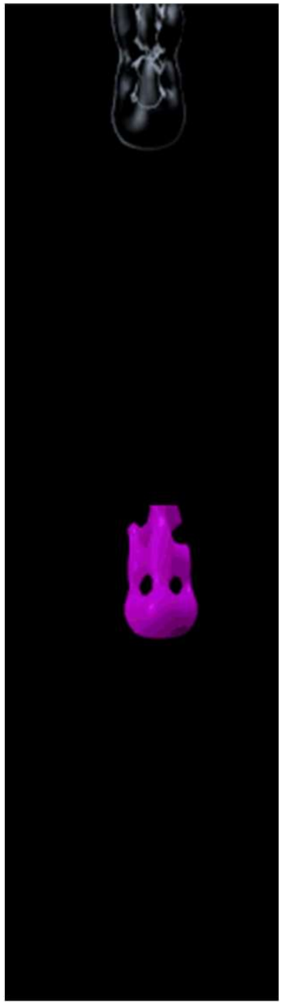
$$\vec{f}_V = \vec{\nabla}\tau$$

avec $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses.

Viscosité :

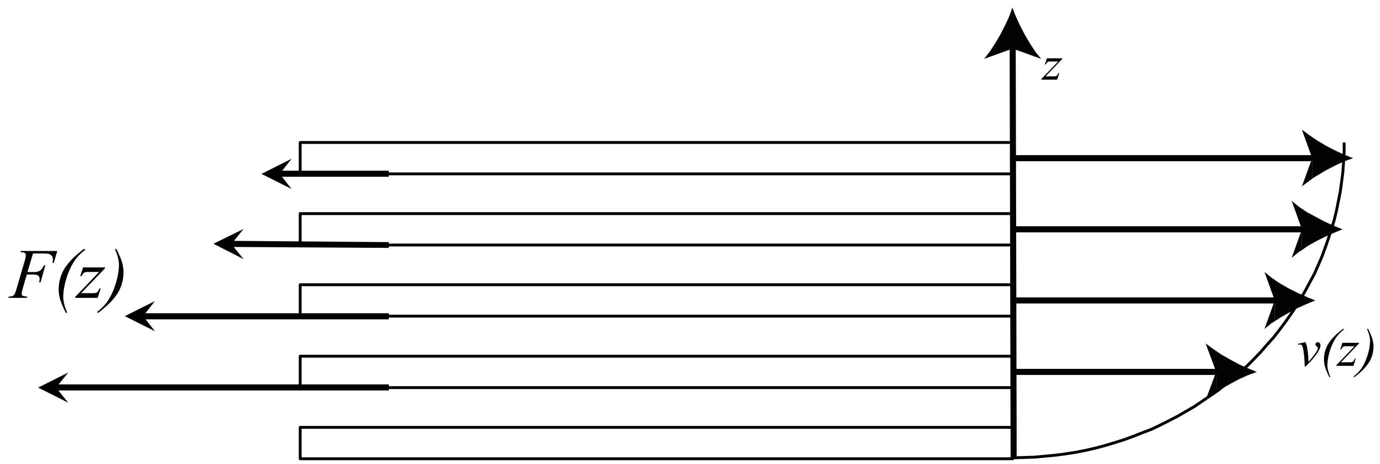
Provient de l'interaction entre les molécules du même fluide.

- La viscosité représente la résistance qu'offre un fluide à des forces de déformation.
- Pour un gaz, c'est principalement l'échange de quantité de mouvement entre différentes couches de gaz (impulsion) qui donne naissance à la viscosité.
- Pour un liquide, les mécanismes exacts à la source de la viscosité ne sont pas encore complètement compris.



Wikipédia

Définition de la viscosité



La viscosité dynamique est le coefficient de proportionnalité η qui relie la différence de vitesse entre deux couches superposées de fluide et la force $\vec{F}$ qui s'exerce à l'interface de ces couches et qui s'oppose au déplacement d'une couche par rapport à l'autre.

Les fluides

La viscosité dynamique est définie par:

$$\vec{F} = -\eta S \frac{d\vec{v}}{dz}$$

Si η est indépendant de la vitesse du fluide, on dit que le fluide est newtonien. C'est le cas de la majorité des gaz et des liquides de faible masse molaire. Sinon, le fluide est dit non-newtonien (solutions de polymères, les purées, les gels, les peintures, etc.).

L'unité utilisée pour la viscosité est le Poiseuille (PI) avec
$1\ \mathrm{PI} = 1\ \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}} = 1\ \mathrm{Pa.s}$

Les fluides

Au lieu d'utiliser la viscosité dynamique, on utilise souvent la viscosité cinématique ν pour caractériser les fluides, celle-ci étant définie par

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

où ρ est la masse volumique du fluide.

Les fluides

Formes différentielles des équations de Navier-Stokes (formulation Eulérienne).

- Équation de conservation de la masse (de continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}.(\rho \vec{v})$$

- Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho e \vec{v}) = -\vec{\nabla}.(p\vec{v}) + \vec{\nabla}.(\boldsymbol{\tau}\vec{v}) + \rho\vec{f}.\vec{v} + \vec{\nabla}.\vec{q}$$

- Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla}.\rho(\vec{v}\vec{v}^T) = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\boldsymbol{\tau} + \rho\vec{f}$$

Simulations numériques

En général, il est impossible de résoudre analytiquement les équations de Navier-Stokes. Il faut donc avoir recours à des solutions numériques. Les principales méthodes utilisées pour la dépendance spatiale des équations sont :

- méthodes des différences finies ;
- méthode des volumes finis ;
- méthodes des éléments finis.

Pour la dépendance temporelle, on utilise encore la méthode d'Euler ou de Runge-Kutta (équivalent aux différences finies dans le temps).

Simulations numériques

Méthodes des différences finies.

La solution consiste à :

- diviser le problème en une série de N intervalles de largeur $h = (x_f - x_i)/N$ (aussi en y et z)
- remplacer les dérivées par des différences ;
- résoudre de point en point en utilisant les conditions initiales ou aux frontières.

Simulations numériques

Remplacement des dérivées par des différences.

- On utilise une expansion en série de Taylor limitée à l'ordre I :
  - expansion vers l'avant

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{I} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} h^i$$

  - expansion vers l'arrière

$$f(x-h) = f(x) + \sum_{i=1}^{I} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} (-h)^i$$

Simulations numériques

Les dérivées premières sont alors remplacées par :

- différences finies avant d'ordre 1 (expansion avant avec $I = 1$)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

- différences finies centrées d'ordre 2 (expansions avant et arrière avec $I = 1$)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Simulations numériques

Les dérivées secondes sont remplacées par :

- différences avant d'ordre 1 (expansions avant avec $I = 2$)

$$f''(x) \approx \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h)$$

- différences finies centrées d'ordre 2 (expansions avant et arrière avec $I = 2$)

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Simulations numériques

Exemple :

- considérons l'équation

$$\frac{df(x)}{dx} = \rho(x)$$

  avec $f(x_0)$ connu.
- on suppose ici la fonction $\rho(x)$ connue à tout point dans l'espace ;

Simulations numériques

- on défini les points x_i tels que

$$x_i = \begin{cases} x_0 & \text{si } i = 0 \\ x_{i-1} + h & \text{si } 0 < i < N \\ x_f & \text{si } i = N \end{cases}$$

- si on utilise des différences avant d'ordre 1 pour $f(x_i)$

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Simulations numériques

- l'équation différentielle devient

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \rho(x_i) = \rho_i$$

- on peut la résoudre en débutant à $i = 0$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + h\rho_i$$

- ici, la solution est identique à celle obtenue en utilisant la méthode de Euler avec un intervalle h ;
- cette méthode fonctionne aussi lorsque l'on est en présence de dérivées totales et partielles d'ordre supérieur.

Simulations numériques

Méthode des volumes finis consiste à:

- Diviser le domaine en sous-éléments de volume finis
- Intégrer les équations différentielles (Navier-Stokes par exemple) sur chaque élément.
- L'intégrale de termes qui contiennent des dérivées premières en 1-D est exacte et est reliée à la solution aux frontières de l'intervalle.
- En 3-D on peut utiliser le théorème de la divergence pour remplacer les intégrales sur le volume de la divergence d'une fonction par l'intégrale de la fonction sur les surfaces des volumes finis.

Simulations numériques

Exemple :

- considérons encore l'équation

$$\frac{df(x)}{dx} = \rho(x)$$

  avec $f(x_0)$ et $\rho(x)$ connues ;
- on divise la région en N volumes finis (en 1D ces volumes correspondent à des cellules de largeur h dont le centre est noté $\bar{x}_i$ et les extrémités sont à x_{i-1} et x_i pour $i = 1, N$)

$$\bar{x}_i = (x_i + x_{i-1})/2$$
$$h = (x_i - x_{i-1})$$

Simulations numériques

- on définit ensuite la moyenne de ρ ($\bar{\rho}_i$) sur le volume en utilisant

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)\, dx = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)\, dx$$

- en intégrant l'équation différentielle sur chaque volume fini on obtient

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{df(x)}{dx} dx = f(x_i) - f(x_{i-1})$$
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x) = h\bar{\rho}_i$$

Simulations numériques

- on obtient finalement

$$f_i = f_{i-1} + h\bar{\rho}_i$$

- on résout ensuite étape par étape pour chaque volume en commençant avec $i = 1$ ($f_0 = f(x_0)$ est connu) ;
- dans ce cas la solution est semblable à celle obtenue par la méthode des différences finies avant si on remplace la valeur de ρ au point initial (x_{i-1}) par la moyenne de ρ sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

Simulations numériques

L'avantage de la méthode des volumes finis :

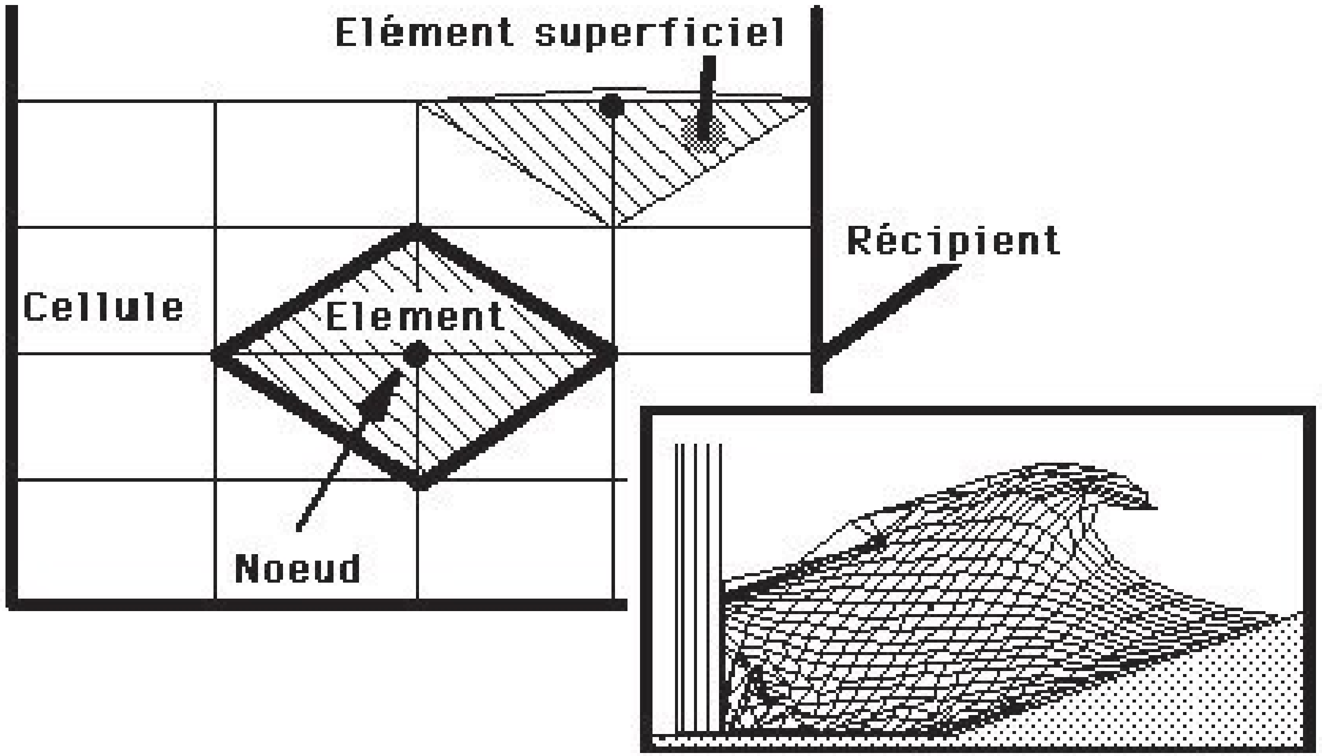
- pour les problèmes en 3-D impliquant des divergences, l'intégrale de volume peut être remplacée par une intégrale de surface ;

- la méthode des volumes finis implique seulement les termes de flux de $f(x)$ aux interfaces (qui doivent être continus d'un volume à l'autre), alors que l'on utilise la moyenne de la variable d'état ρ sur le volume ;

- dans les cas où ρ a une dépendance importante sur x dans la région elle est préférable à la méthode des différences finies.

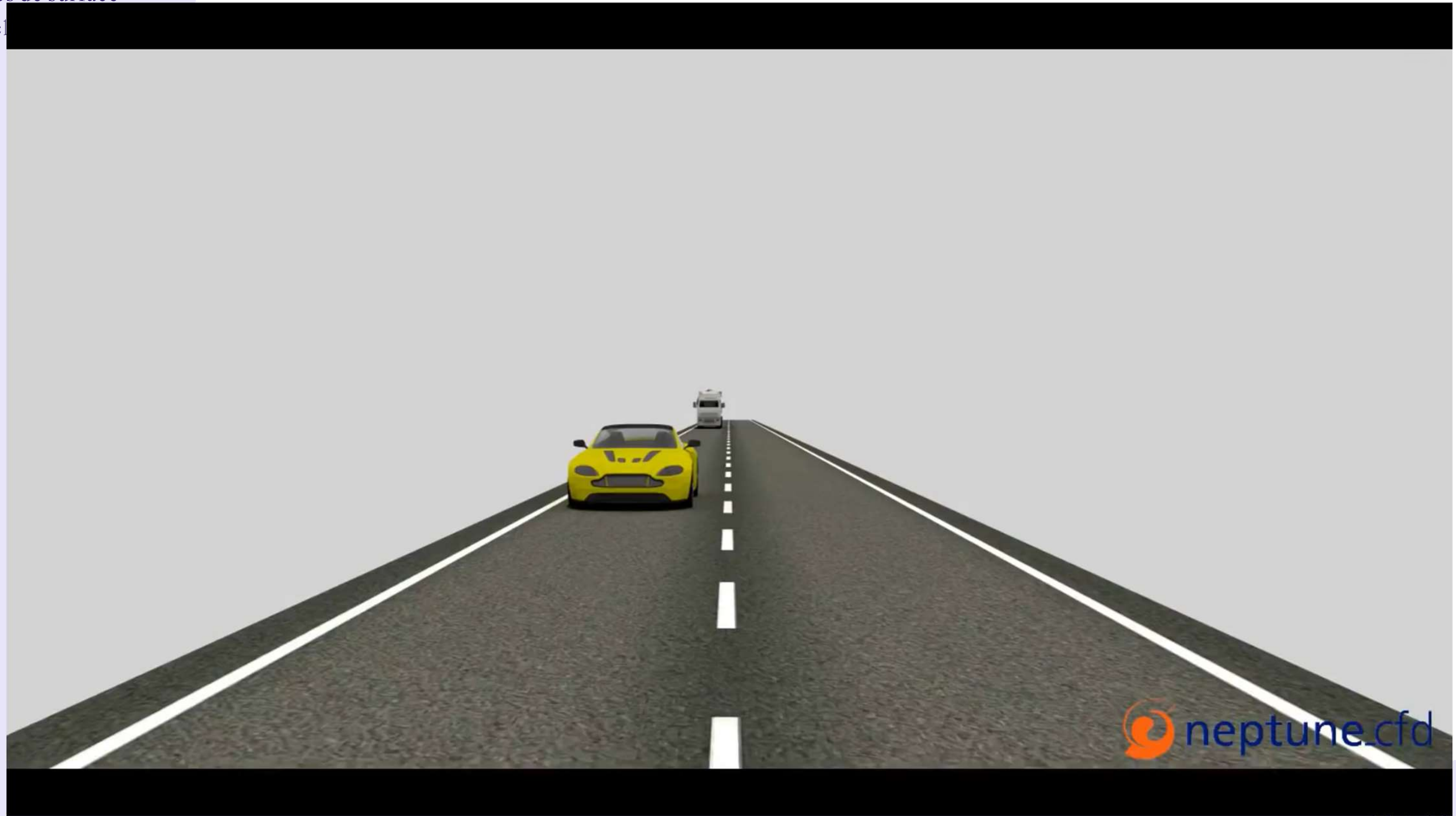
Simulations numériques

Simulation numérique décrivant le comportement d'une onde déferlante.



Simulations numériques

Simulation numérique décrivant le comportement d'un liquide dans une citerne de camion en décélération.



https://www.youtube.com/watch?v=VisSgKSLQx0

Ondes de surface et vagues

- Pour dériver les équations qui correspondent aux ondes de surface, on doit éliminer la coordonnée verticale (z) des équations de Navier-Stokes tout en préservant les influences de la structure verticale résultant de la circulation du fluide sous l'onde.

- Ce deuxième effet est important, car l'onde se déplace dans le plan horizontal alors que son comportement dans la direction verticale n'est pas ondulatoire.

Les fluides

Équations de Navier-Stokes (rappel).

- Équation de conservation de la masse (de continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}.(\rho \vec{v})$$

- Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho e \vec{v}) = -\vec{\nabla}.(p\vec{v}) + \vec{\nabla}.(\boldsymbol{\tau}\vec{v}) + \rho \vec{f}.\vec{v} + \vec{\nabla}.\vec{q}$$

- Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla}.\rho(\vec{v}\vec{v}^T) = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}.\boldsymbol{\tau} + \rho \vec{f}$$

Ondes de surface

- Ici, ce qui nous intéresse principalement c'est la propagation de l'onde à la surface de l'eau.
- Les équations qui décrivent les ondes de surface sont les équations de Boussinesq et résultent des équations pour les fluides incompressibles.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\left(\rho \vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(g \rho z)$$

où on a utilisé $p = \rho g z$, la pression hydrostatique due à une colonne d'eau de hauteur z. Ici, g est l'accélération due à la gravité.

Ondes de surface

Dérivation des équations de Boussinesq.

- On suppose que la vitesse $\vec{v}$ des molécules composant l'onde dérive d'un potentiel φ

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$$

- Le potentiel satisfait l'équation de Laplace

$$\nabla^2\varphi = 0$$

- On considère une onde de hauteur z se déplaçant en x. Le potentiel est donc une fonction de x et z seulement.
- La surface plane du bassin contenant le fluide est localisée à $z = 0$ alors que le fond du bassin se situe à $z = -h$.

Ondes de surface

Ondes se propageant selon la direction horizontale x.

- On utilise une expansion en série de Taylor du potentiel de vitesse du fluide (séparation des composantes horizontales et verticales) autour d'une élévation h

$$\varphi(x,z) = \varphi(x,-h) + \frac{(z+h)^2}{2} \left.\frac{\partial^2 \varphi(x,z)}{\partial z^2}\right|_{z=-h}$$

- On a négligé le premier terme $\partial\varphi/\partial z$, car la vitesse de l'eau à $z = -h$ (fond) est nulle.
- On a aussi limité cette expansion à l'ordre $(z+h)^2$.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Ondes de surface

On utilise l'équation de Laplace pour remplacer les dérivées partielles en z (verticales) par des dérivées partielles en x (horizontales).

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x,z)}{\partial z^2} = 0 \,.$$

ce qui donne

$$\varphi(x,z) = \varphi(x,-h) - \frac{(z+h)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi(x,z)}{\partial x^2} \right|_{z=-h}$$

Ondes de surface

L'équation de conservation de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$$

peut être reliés au déplacement de l'eau (masse volumique constante) d'une hauteur z par rapport à la surface du liquide. On peut alors écrire $\rho(x,t) = z(x,t)\rho$.

Ondes de surface

En utilisant

- v_x la vitesse de l'onde selon l'axe x ;
- $z(x,t)$ l'élévation de la surface de l'onde par rapport à la surface plane de l'eau ;
- h la profondeur d'eau (ici nous avons supposé que cette profondeur était une constante) ;

Ondes de surface

Les équations deviennent

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial\left[(h+z(x,t))\,v_x\right]}{\partial x} = \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 v_x}{\partial x^3}$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + g\,\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2}\,h^2\,\frac{\partial^3 v_x}{\partial t\,\partial^2 x}$$

Lorsque les termes de droite sont négligés, on obtient l'approximation des ondes dans des eaux peu profondes.

Ondes de surface

En combinant ces deux équations (et quelques approximations supplémentaires), on obtient une équation d'onde

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = gh\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{3}{2}\frac{(z(x,t))^2}{h} + \frac{1}{3}h^2\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}\right)$$

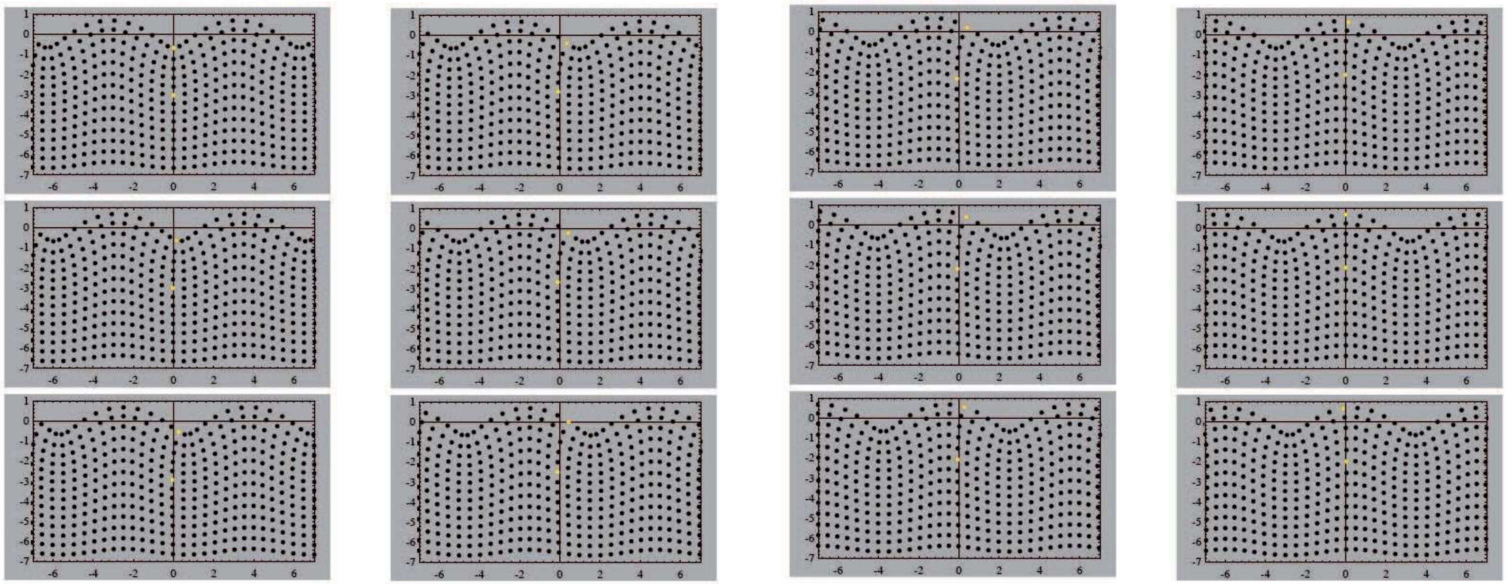
Si on néglige les termes de droite on obtient

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}$$

avec $c = \sqrt{gh}$ la vitesse de l'onde.

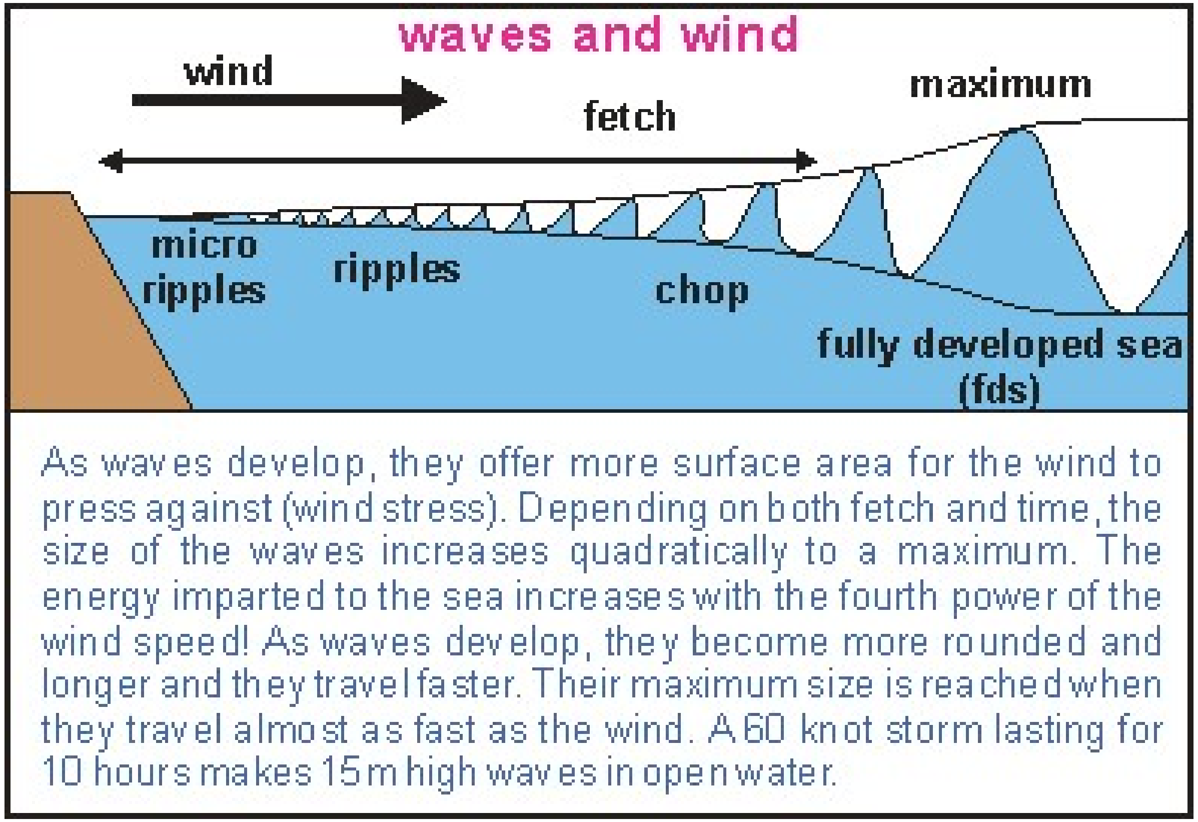
Ondes de surface

Mouvement des molécules de l'onde.



Voir aussi WaveMotion.

Génération des vagues.



Ondes de surface

Relation de dispersion.

- Les ondes de différences longueurs d'onde se déplacent à différentes vitesses de phase.
- Cette relation entre la vitesse et la longueur d'onde est reliée à la relation de dispersion.
- Pour l'équation d'onde que nous avons dérivée la relation de dispersion est donnée par

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{2\pi\lambda}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

avec ν la fréquence de l'onde.

Ondes de surface

- La vitesse de phase de l'onde c_ϕ (vitesse des crêtes) est donnée par

$$c_\phi = \lambda\nu = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

pour une longueur d'onde λ.

- La vitesse de groupe de l'onde (enveloppe de l'onde) est donnée par

$$c_g = \frac{\partial \nu}{\partial k}$$

avec $k = 1/\lambda$.

Ondes de surface

Vitesse de l'onde.

Ondes de surface

- En eaux très profondes, la vitesse de phase de l'onde sera donnée par

$$c_\phi = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

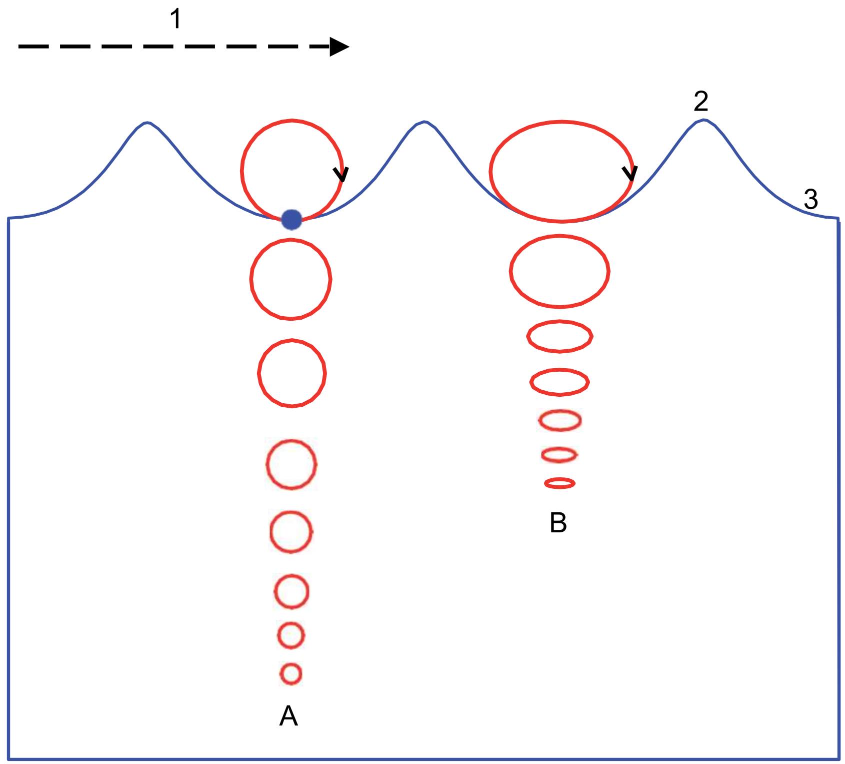
- En eaux peu profondes, la vitesse de phase de l'onde sera donnée par

$$c_\phi = \sqrt{gh}$$

Cette relation explique pourquoi les vagues sont toujours parallèles à la plage.

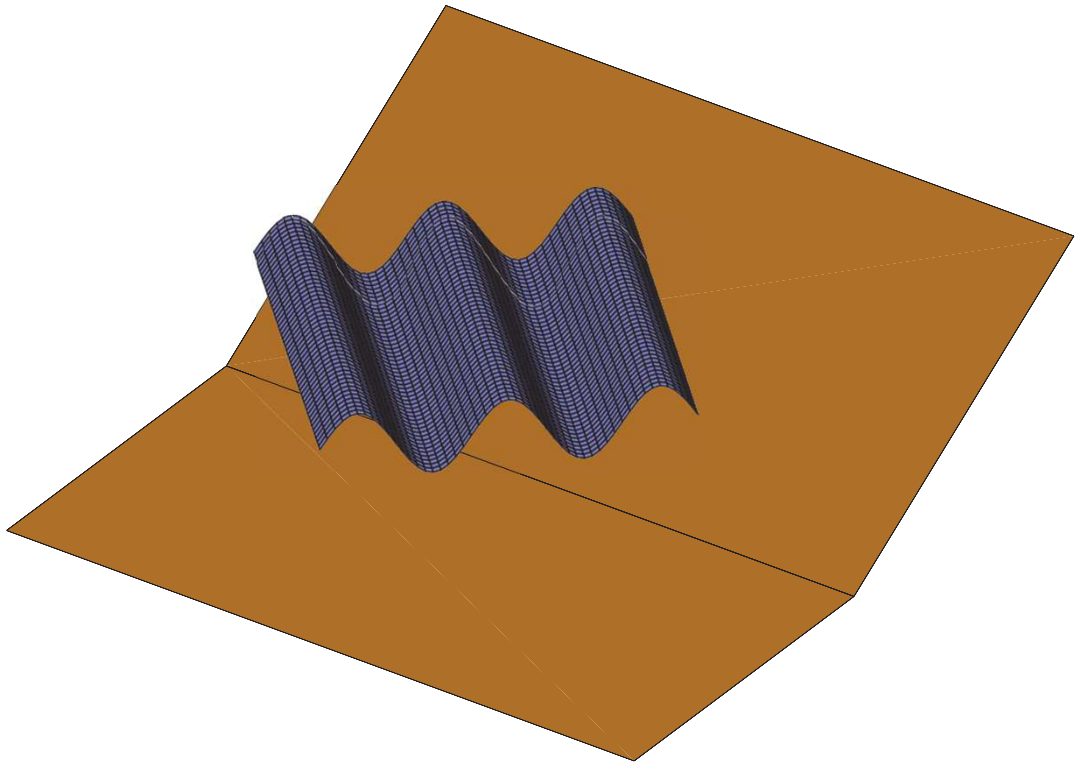
Ondes de surface

Vitesse de l'onde en fonction de la profondeur.



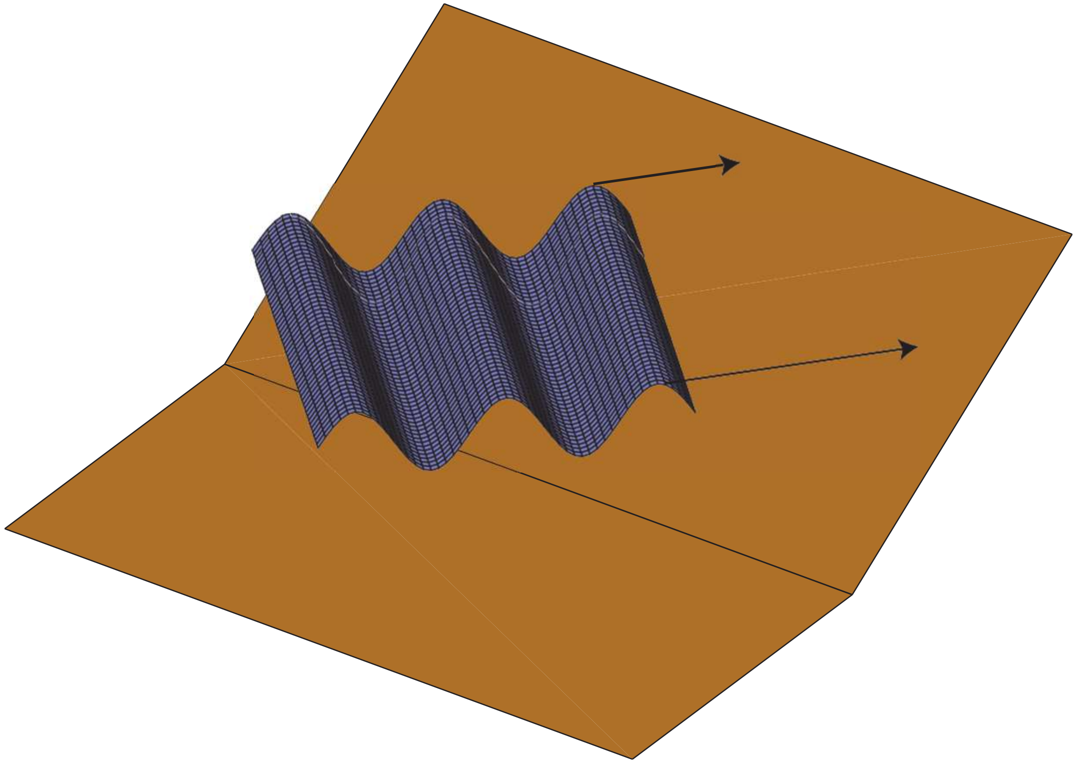
Ondes de surface

Vagues rencontrant un plan incliné (plage).



Ondes de surface

Vitesse des vagues rencontrant un plan incliné (plage).



Ondes de surface

Énergie de l'onde et amplitude.

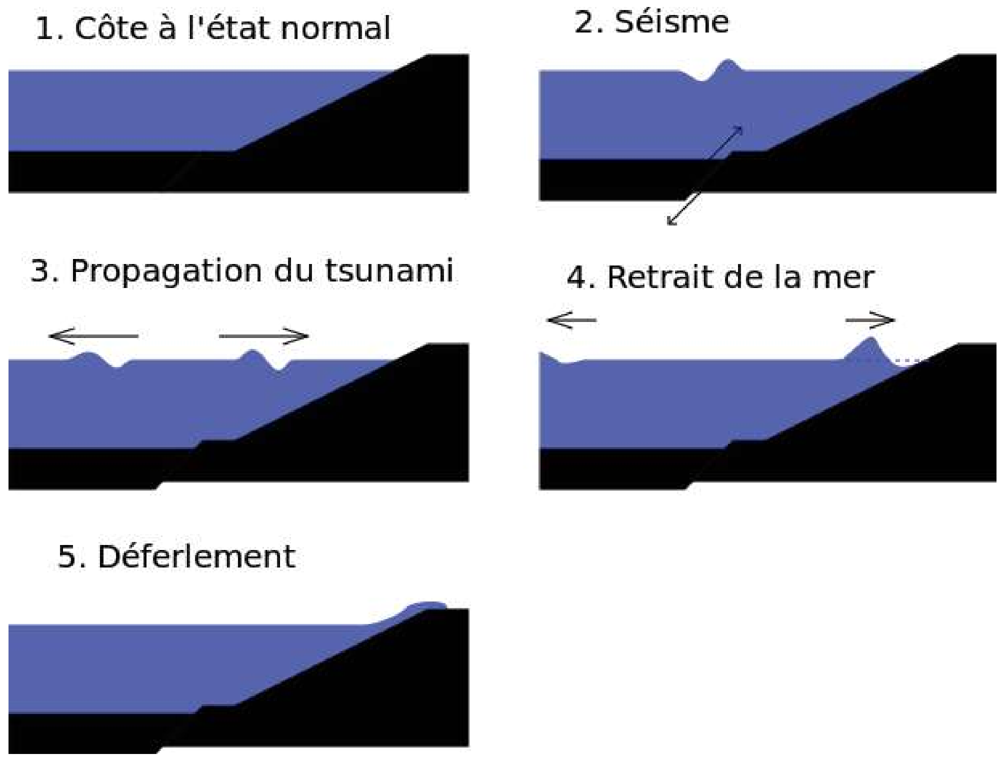
- La densité d'énergie (énergie par unité de surface) d'une onde est donnée par

$$E = \frac{1}{8}\rho g z^2$$

- La vitesse de propagation de cette énergie est donnée par la vitesse de groupe.

Ondes de surface

Hauteur de l'onde en fonction de sa vitesse.

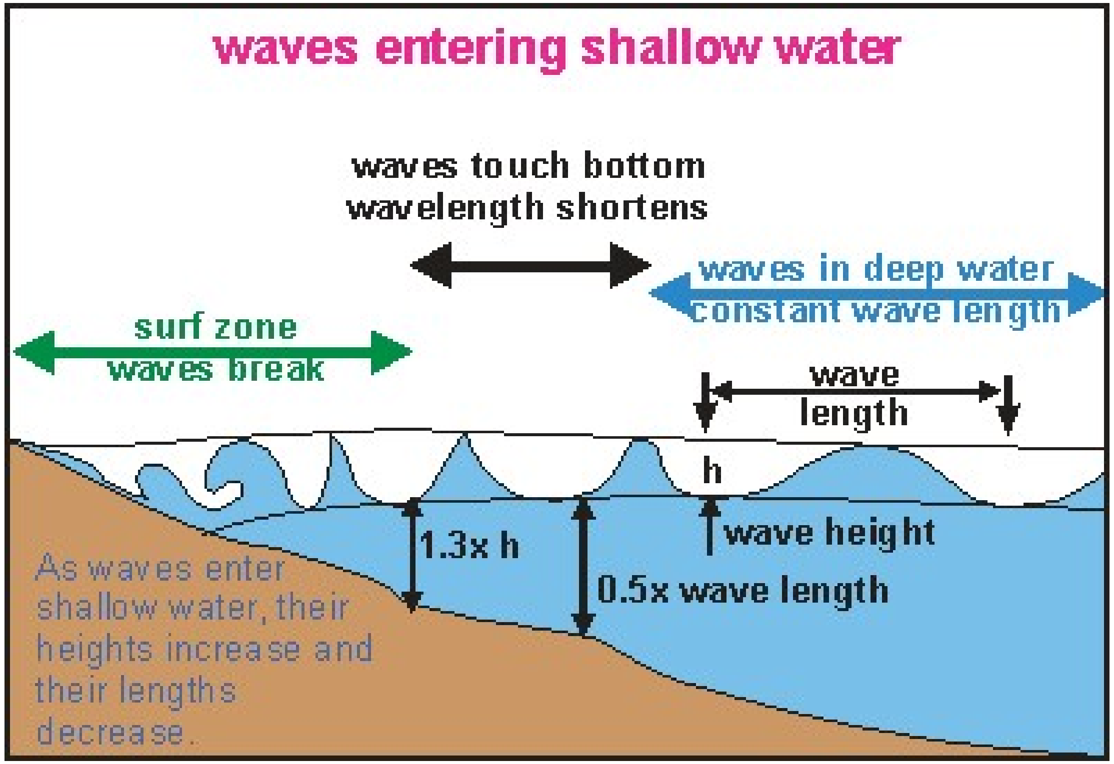


Ondes de surface

Déferlante.

- La vitesse de la vague diminue lorsqu'elle atteint la plage (h diminue) et sa hauteur augmente.
- Cependant, ce ralentissement n'atteint pas toutes les molécules de la vague en même temps et on se retrouve alors dans la situation où les molécules au haut de la vague se déplacent plus rapidement que les molécules près de la surface.
- La vague se brise et devient une vague déferlante. Ce phénomène se produit lorsque la profondeur h devient inférieure à une valeur de $1{,}3 \times A$ avec A l'amplitude de la vague.

Déferlante.


waves entering shallow water
waves touch bottom
wavelength shortens
waves in deep water
constant wave length
surf zone
waves break
wave
length
h
wave height
1.3x h
0.5x wave length
As waves enter shallow water, their heights increase and their lengths decrease.

Conclusions

Dans le prochain chapitre, nous étudierons l'acoustique en nous intéressant plus particulièrement à l'acoustique physique. Nous aborderons aussi les concepts de son et d'audition.