Assemblage de deux cubes

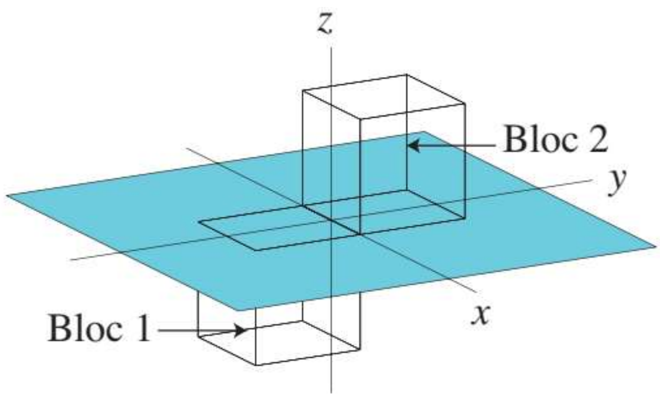
Deux blocs cubiques identiques de côtés $a = 0.1$ m, de masses $m = 0.5$ kg chacun sont collés par une arête. Cet assemblage de blocs est déposé dans l'eau (masse volumique $\rho = 1000\ \mathrm{kg}/m^3$) tel que le bloc 1 est complétement immergé alors que le bloc 1 est hors de l'eau (voir la figure ci-dessous).
L'accélération gravitationnelle est $\vec{\mathrm{g}} = (0, 0, -9.8)^T \mathrm{m/s^2}$.

a) Déterminer le moment d'inertie de cet assemblage par rapport à son centre de masse.

b) Quelle est l'accélération $\vec{a}_c$ du centre de masse de l'assemblage juste après l'avoir déposé sachant que la partie immergée dans l'eau (de volume V_{im}) subit, à son centre géométrique, la poussée d'Archimède donnée par :

$$\vec{P}_A = -\rho V_{im} \vec{\mathrm{g}}$$

c) Quel est son accélération angulaire $\vec{\alpha}$ à cet instant?



Solution :

a) Déterminer le moment d'inertie de cet assemblage par rapport à son centre de masse.

Le centre de masse de cet assemblage est situé au milieu de l'arête commune entre les deux blocs. Le moment d'inertie de l'assemblage est donné par :

$$\boldsymbol{I}_c = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2$$

avec $\boldsymbol{I}_1$ et $\boldsymbol{I}_2$ les moments d'inertie des blocs 1 et 2 par rapport au centre de masse de l'assemblage.
On a :

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_{c,1} + m\boldsymbol{T}$$

où $\boldsymbol{I}_{c,1}$ est la matrice moment d'inertie du bloc 1 par rapport à son centre de masse et $\boldsymbol{T}$ est la matrice translation du moment d'inertie du centre de masse du bloc 1 au centre de masse de l'assemblage. Le vecteur translation est :

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$$

Selon les notes de cours: $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_y d_x & d_x^2 + d_z^2 & -d_y d_z \\ -d_z d_x & -d_z d_y & d_y^2 + d_y^2 \end{pmatrix}$

Cela donne :

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par symétrie : $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_2$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{I}_c = 2\boldsymbol{I}_1 = \begin{pmatrix} 6.\bar{6} & 0 & 0 \\ 0 & 4.1\bar{6} & -2.5 \\ 0 & -2.5 & 4.1\bar{6} \end{pmatrix} \times 10^{-3}\ \mathrm{kg.m^2}}$$

b) Quelle est l'accélération $\vec{a}_c$ du centre de masse de l'assemblage juste après l'avoir déposé.

L'assemblage est soumis à son propre poids et à la poussée d'Archimède.
À l'instant où on lâche les blocs, on a :

$$(2m)\vec{a}_c = 2m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \rho a^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\vec{a}_c = 0}$$

c) Quel est son accélération angulaire $\vec{\alpha}$ à cet instant?

L'accélération angulaire est donnée par :

$$\vec{\alpha} = \boldsymbol{I}_c^{-1}(\vec{\tau} + (\boldsymbol{I}_c\vec{\omega}) \times \vec{\omega}) = \boldsymbol{I}_c^{-1}\vec{\tau}$$

Ici $\vec{\omega} = 0$ est la vitesse angulaire de l'assemblage. $\vec{\tau}$ est le moment de la poussée d'Archimède par rapport au centre de masse de l'assemblage.

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a/2 \\ -a/2 \end{pmatrix} \times \left[\rho a^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}\right] = -\rho g \frac{a^4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\rightarrow\ \vec{\alpha} = -\rho g \frac{a^4}{2I_{xx}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -73.5\ \mathrm{rad/s^2}}$$