Signal sonore entre deux avions

Deux avions, A et B volent en même temps à vitesses constantes. À l'instant $t = 0$, l'avion A se trouvant à la position $\vec{r}_A = (0, 2000, 3500)^T$m et volant à vitesse $\vec{v}_A = (150, -80, 0)^T \mathrm{m/s}$, émet un bref signal sonore de fréquence $f_A = 1$ kHz et d'une puissance telle qu'un décibelmètre posé sur cet avion et situé à une distance $r_1 = 1$m de l'émetteur, affiche une intensité $L_I(r_1) = 140$ dB. À cet instant ($t = 0$), l'avion B est situé à $\vec{r}_B = (4000, 0, 2500)^T$m et garde une vitesse constante $\vec{v}_B = (-100, 50, 30)^T m/s$. L'avion B reçoit le signal à l'instant $t = 10$ s.
La vitesse du son dans l'air est $c = 342{,}6$ m/s et son coefficient d'atténuation est $\mathcal{A} = 5.0$ dB/km.

(a) Déterminer le vecteur positon $\vec{r}_{B1}$ de l'avion B lorsque celui-ci reçoit le signal sonore.

(b) Quelle est la fréquence du signal sonore reçu par l'avion B?

(c) Déterminer la puissance P du signal sonore émis par l'avion A.

(d) Quelle est l'intensité du signal sonore reçu par l'avion B?

Solution :

(a) Déterminer le vecteur positon $\vec{r}_{B1}$ de l'avion B lorsque celui-ci reçoit le signal sonore.

Le vecteur position de l'avion B à l'instant t est donné par :

$$\vec{r}_{B1} = \vec{r}_B + \vec{v}_B t = \begin{pmatrix} 4000 \\ 0 \\ 2500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} \times 10$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{r}_{B1} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 500 \\ 2800 \end{pmatrix} \text{ m}}$$

(b) Quelle est la fréquence du signal sonore reçu par l'avion B?

Le vecteur unitaire de la droite reliant la source au récepteur est :

$$\hat{u}_{s,r} = \frac{\vec{r}_{B1} - \vec{r}_A}{|\vec{r}_{B1} - \vec{r}_A|} = \frac{1}{34{,}26} \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix}$$

La fréquence reçue par l'avion B est donnée par :

$$f_B = \frac{1 - \beta_B}{1 - \beta_A} f_A$$

avec:

$$\beta_A = \frac{\hat{u}_{s,r} . \vec{v}_A}{C} = \frac{1}{342.6 \times 34{,}26} \begin{pmatrix} 150 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix} = 0.4856$$

$$\beta_B = \frac{\hat{u}_{s,r} . \vec{v}_B}{C} = \frac{1}{342.6 \times 34{,}26} \begin{pmatrix} -100 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix} = -0.3374$$

$$\Longrightarrow \boxed{f_B = \frac{1.3374}{0.5144} \times 1 = 2.6 \text{ kHz}}$$

(c) Déterminer la puissance P du signal sonore émis par l'avion A.

Sachant que l'intensité en dB à 1 mètre de la source est relié à la puissance de la source par:

$L_I(r_1) = L_P - 10 \log\left(\frac{4\pi r_1^2}{1}\right)$ avec $L_P = 10 \log\left(\frac{P}{10^{-12}}\right)$

$$\Longrightarrow L_I(r_1) = 10 \log\left(\frac{P}{4\pi r_1^2 \times 10^{-12}}\right)$$

$$P = 4\pi r_1^2 \times 10^{-12} \times 10^{L_I(r_1)/10} \quad \Longrightarrow \boxed{P = 400\pi \ (W)}$$

Remarque : on peut aussi utiliser la formule :

$$I(r_1) = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

où $I(r_1)$ est l'intensité en $\mathrm{W/m^2}$ à une distance r_1 de la source. Elle est relié à sa valeur $L_I(r_1)$ en dB par :

$$L_I(r_1) = 10\log\left(\frac{I(r_1)}{10^{-12}}\right) \Longrightarrow \quad I(r_1) = 10^{-12} \times 10^{\frac{L_I(r_1)}{10}} = 100\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\Longrightarrow P = I(r_1) \times 4\pi r_1^2 = 400\pi\ (\mathrm{W})$$

d) (**5 points**) Quelle est l'intensité du signal sonore reçu par l'avion B?

Lorsque le signal atteint l'avion B, celui-ci à parcouru une distance de $r_{AB} = |\vec{r}_{B1} - \vec{r}_A| = 3426\ \mathrm{m}$

L'intensité reçue par B est donc:

$$L_I(r_{AB}) = L_I(r_1) - 20\log\left(\frac{r_{AB}}{r_1}\right) - \mathcal{A}(r_{AB} - r_1)$$

soit:

$$L_I(r_{AB}) = 140 - 20\log\left(\frac{3426}{1}\right) - 5.0\ (3.426 - 0.001)\ \mathrm{dB}$$

Dans le dernier terme, il faut mettre r_{AB} et r_1 en km puisque $\mathcal{A}$ est donné en dB/km. On peut aussi négliger $r_1$devant r_{AB}.

Cela donne :

$$\boxed{L_I(r_{AB}) = 52.2\ \mathrm{dB}}$$