Devoir 3

Date de distribution : 25 octobre 2021

Date de remise : 22 novembre 2021

Jeu de billard français (carambole)

Le jeu de billard français est similaire au billard américain à la différence que la table ne possède pas de trous. Il se joue avec trois billes de couleurs différentes (généralement une rouge, une jaune et une blanche). Pour gagner un point, la bille frappée par le joueur doit percuter successivement les deux autres billes.

Les trois billes sont sous forme de sphères pleines, de masse $m = 210$ g et de rayon $R = 3.1$ cm. Les dimensions de la table sur laquelle se déplacent les billes sont données sur la figure 1. Les bords de la table sur lesquels rebondissent les billes sont verticaux de hauteur supérieure au rayon des billes.

Le système d'axes *oxyz* a comme origine le coin du tapis tel que montré sur la figure 1. Le plan du tapis est confondu avec le plan $z = 0$ où l'axe *oz* est sortant de la page.

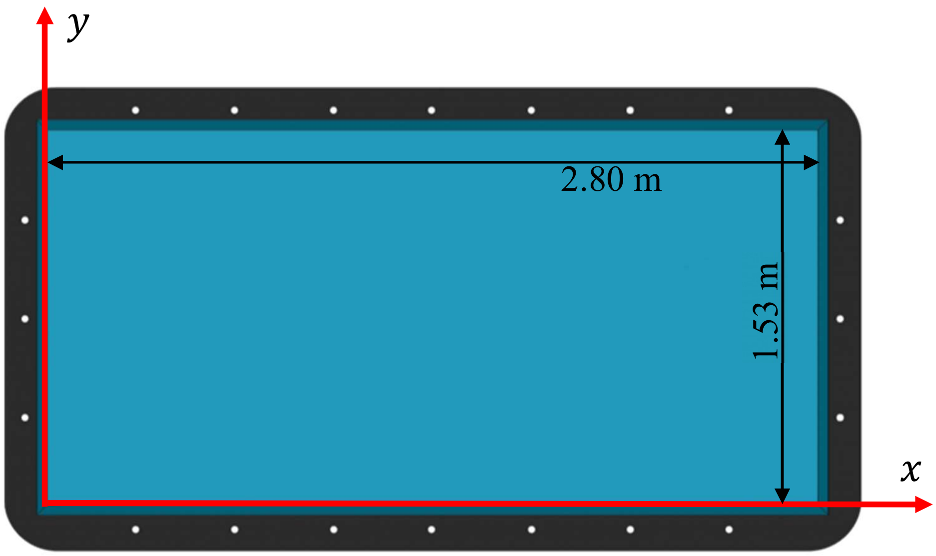


Figure 1: Dimensions d'une table de billard français.

Il s'agit dans ce devoir, de tracer les trajectoires des billes qui se mettent en mouvement. Le joueur frappe la bille blanche avec une queue afin de percuter les billes rouge et jaune (l'ordre n'est pas important). Durant leurs parcours, les billes peuvent rebondir sur le bord de la table une ou plusieurs fois, entrer en collision avec une autre bille ou s'arrêter. Après chaque collision, les vitesses linéaire et angulaire des billes concernées doivent être calculées afin de poursuivre la simulation. Pour cela, on utilisera la méthode des conditions initiales. La simulation se termine lorsque la bille blanche s'arrête même si les autres billes sont encore en mouvement. Il faut aussi déterminer les instants où la bille blanche passe d'un mouvement de roulement avec glissement vers un mouvement de roulement sans glissement.

On prendra l'origine du temps l'instant où la queue frappe la bille blanche. A cet instant, la bille blanche part avec une vitesse linéaire horizontale donnée par ces deux composantes $\vec{v}_0 = \left(v_{x,0}, v_{y,0}, 0\right)^T$. Sa vitesse angulaire initiale est nulle. Les billes jaune et rouge sont initialement immobiles.

Durant leurs mouvements, les forces que subissent les billes sont :

- La force de gravité
- La normale de la table
- La force de roulement avec $\mu_r = 0.03$ si la bille roule sans glisser.
- La force de frottement de glissement avec $\mu_c = 0.3$ (coefficient de frottement cinétique) si la bille glisse. Dans ce cas, on néglige la force due au roulement.

Pour simplifier le traitement de ce problème, on néglige la force de frottement visqueux de l'air. Durant les collisions bille-bille ou bille-bord, on négligera les frottements entre les billes et le tapis ainsi que toute impulsion verticale subie par les billes (cela revient à considérer que celles-ci restent tout le temps en contact avec le tapis même si parfois elles peuvent sautiller durant le choc).

Le coefficient de frottement cinétique entre la bille et le bord de la table est égal à μ_c (le bord et le tapis sont recouverts par le même tissus) alors que le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0.4$. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre deux billes sont respectivement :$\mu_{sb} = 0.15$ et $\mu_{cb} = 0.1$. Les coefficients de restitution sont $\epsilon = 0.8$ lors de la collision bille-bord et $\epsilon_b = 0.9$ lors de la collision bille-bille.

But du devoir

Le but de ce devoir est de programmer une fonction Matlab ou Octave qui permet de tracer la trajectoire à deux dimensions de la bille blanche. La fonction demandée doit pouvoir être appelée comme suit :

```
[coll tr t xb yb xr yr xj yj]=Devoir3(xyb, xyr, xyj, Vb0)
```

Les données d'entrée pour cette fonction sont :

- `xyb` est un vecteur de deux éléments contenant respectivement les positions en x et en y (en mètre) du centre de masse de la bille blanche à l'instant initial.

- `xyr` est un vecteur de deux éléments contenant respectivement les positions en x et en y (en mètre) du centre de masse de la bille rouge à l'instant initial.
- `xyj` est un vecteur de deux éléments contenant respectivement les positions en x et en y (en mètre) du centre de masse de la bille jaune à l'instant initial.
- `Vb0` est un vecteur contenant les deux composantes en x et en y du vecteur vitesse linéaire initiale du centre de masse de la bille blanche (en m/s).

Les résultats produits par cette fonction Matlab (ou Octave) sont :

- `coll` donne le nombre de billes touchées par la blanche avant de s'arrêter. Cette variable prend donc les valeurs suivantes :
  - `coll=0` si aucune bille n'est touchée par la blanche.
  - `Coll=1` si la bille rouge ou la bille jaune est touchée par la blanche.
  - `Coll=2` si la bille rouge et la bille jaune sont toutes les deux touchées par la blanche. Dans ce cas, le joueur marque un point.

- `tr` vecteur contenant les instants correspondants aux différentes transitions roulement avec glissement à roulement sans glissement de la bille blanche. Cette transition peut se produire plusieurs fois car après chaque collision, la bille blanche peut se remettre à glisser.
- `t` vecteur contenant le temps correspondant à chacune des positions enregistrées pour le tracé les trajectoires des billes. La dernière valeur doit être l'instant d'arrêt de la simulation (arrêt de la bille blanche). Le nombre d'instants utilisés pour tracer la trajectoire doit être compris entre 100 et 1000.
- `xb, xr et xj` vecteurs contenant les positions en *x* des centres de masse des billes blanche, rouge et jaune respectivement enregistrées pour le tracé de leurs trajectoires.
- `yb, yr et yj` vecteurs contenant les positions en *y* des centres de masse des billes blanche, rouge et jaune respectivement enregistrées pour le tracé de leurs trajectoires.

Simulations requises

Les conditions initiales des tirs à simuler et à analyser sont données dans le tableau 1. La précision requise pour les simulations correspond à des erreurs maximales sur les positions du ballon en x, y et z de ± 1 mm. Des graphiques (2D) illustrant la trajectoire des trois billes pour ces quatre simulations sont requis. Un fichier nommé ''RouleDevoir3.m'' sera disponible sous peu pour vous permettre de tracer les trajectoires. En attendant, vous pouvez vous créer votre propre fichier pour faire rouler votre programme.

Pour le quatrième tir, vous devez trouver une vitesse initiale de la bille blanche qui permet au joueur de marquer un point à partir des positions initiales des trois billes données dans le tableau.

Tableau 1 : conditions initiales des simulations de tir.

Tirs	xyb (m)	xyr (m)	xyj (m)	Vb0 (m/s)
1	[0.5 ; 0.3]	[1.5 ; 1.1]	[1.45 ; 1.31]	[1.7 ; 0.5]
2	[0.5 ; 0.3]	[1.5 ; 1.1]	[1.45 ; 1.31]	[1.5074 ; 1,3145]
3	[0.5 ; 0.3]	[1.5 ; 1.1]	[1.45 ; 1.31]	[0.4 ; 0,3]
4	[0.2 ; 0.2]	[1.5 ; 1.1]	[1.45 ; 1.31]	À déterminer

Solution :

Introduction :

Équations du mouvement à résoudre :

Lorsqu'une bille est frappée par la queue ou par une autre bille, celle-ci va se mettre à glisser. Elle est donc soumise à la force de frottements cinétiques :

$$\vec{f}_k(t) = -\mu_c m g \frac{\vec{v}_{glisse}}{|\vec{v}_{glisse}|} \qquad (1)$$

Le mouvement de la bille est donc soumis aux équations suivantes :

$$\frac{d\vec{v}_c(t)}{dt} = \vec{a}_c(t) = \frac{\vec{f}_k(t)}{m} = -\mu_c g \frac{\vec{v}_{glisse}}{|\vec{v}_{glisse}|} \qquad (2)$$

$$\frac{d\vec{r}_c(t)}{dt} = \vec{v}_c(t) \qquad (3)$$

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(t) = I_c^{-1}\vec{r}_{sol/c} \times \vec{f}_k(t) = I_c^{-1}\left(-\mu_c m g \frac{\vec{r}_{sol/c} \times \vec{v}_{glisse}}{|\vec{v}_{glisse}|}\right) \qquad (4)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \qquad (5)$$

où $\vec{v}_{glisse}$ est la vitesse de glissement du point de contact avec le sol :

$$\vec{v}_{glisse} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{sol/c} \qquad (6)$$

avec $\vec{r}_{sol/c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$ et $I_c = \frac{2}{5} m R^2$.

Dans notre cas ici où les objets sont des billes, l'équation (4) est inutile.

La force de frottement de glissement va varier les mouvements linéaire et angulaire de la bille jusqu'à ce que la condition de roulement sans glissement soit respectée :

$$\vec{v}_c = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{sol/c} \ \Rightarrow \vec{v}_{glisse} = 0 \qquad (7)$$

Lorsque la bille commence à rouler sans glisser, elle va demeurer dans cette configuration jusqu'à l'arrêt ou jusqu'à la prochaine collision. La force de frottements de glissement cèdera alors sa place à la force de roulement:

$$\vec{F}_r(t) = -\mu_r m g \frac{\vec{v}_c}{|\vec{v}_c|} \qquad (8)$$

L'équation (2) devient alors :

$$\frac{d\vec{v}_c(t)}{dt} = \vec{a}_c(t) = -\mu_r g \frac{\vec{v}_c}{|\vec{v}_c|} \qquad (9)$$

en dérivant l'équation (7), on obtient l'accélération angulaire :

$$\vec{a}_c = -\vec{\alpha} \times \vec{r}_{sol/c} \;\; \Rightarrow \; \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -a_y/R \\ a_x/R \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

On peut aussi obtenir directement la vitesse angulaire en utilisant la condition de roulement sans glissement :

$$\vec{v}_c = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{sol/c} \;\; \Rightarrow \; \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -v_y/R \\ v_x/R \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Pour la résolution numérique, on utilisera l'équation:

$$\frac{d\vec{q}(t)}{dt} = \vec{g}(\vec{q}(t), t)$$

où $\vec{q}(t)$ est le vecteur d'état d'une bille:

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ x \\ y \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

dont les conditions initiales sont : $\vec{q}(0) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} \\ x_0 \\ y_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour la blanche et $\vec{q}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_0 \\ y_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour les billes rouge et jaune et :

$$\vec{g}(\vec{q}(t), t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ v_x \\ v_y \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ q_1 \\ q_2 \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on veut inclure l'équation (5), les vecteurs $\vec{q}$ et $\vec{g}$ auront chacun trois éléments supplémentaires. Lorsque la bille glisse, a_x, a_y, α_x et α_y sont donnés par les équations (2) et (4) où $\vec{v}_{glisse}$ s'écrit en fonction des éléments du vecteur $\vec{q}$:

$$\vec{v}_{glisse} = \begin{pmatrix} q_1 - q_6 R \\ q_2 + q_5 R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lorsque la bille roule sans glisser, a_x, a_y, α_x et α_y sont donnés par les équations (9) et (10) où $\vec{v}_c$ s'écrit en fonction des éléments du vecteur $\vec{q}$:

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Détection de collisions :

Collision bille-bille :

Une bille a entre en collision avec une bille b si :

$$[(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2] \leq (2R)^2$$

le vecteur position du point p de contact sera :

$$\vec{r}_p = \begin{pmatrix} (x_a + x_b)/2 \\ (y_a + y_b)/2 \\ R \end{pmatrix}$$

et la normale à la surface de contact sera :

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}} \begin{pmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs position du point p par rapport aux centres de masse des deux billes sont :

$$\vec{r}_{p/a} = -R\hat{n}$$
$$\vec{r}_{p/b} = R\hat{n}$$

Collision bille-mur :

On peut considérer la bille comme objet b et le mur comme l'objet a.

- La condition d'une collision avec le mur $x = 0$ est : $x_b \leq R$ et R< $y_b < l - R$
  où L et l sont respectivement la longueur et la largeur de la table.

  La normale à la surface de contact est : $\hat{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- La condition d'une collision avec le mur $x = L$ est : $x_b \geq (L - R)$ et $R < y_b < l - R$

  La normale à la surface de contact est : $\hat{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- La condition d'une collision avec le mur $y = 0$ est : $y_b \leq R$ et R< $x_b < L - R$

  La normale à la surface de contact est : $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- La condition d'une collision avec le mur $y = l$ est : $y_b \geq (l - R)$ et $R < x_b < L - R$

  La normale à la surface de contact est : $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dans tous les cas : $\vec{r}_{p/b} = R\hat{n}$

Calcul des vitesses linéaire et angulaire d'une bille à la sortie d'une collision:

Collision bille-bille :

Pour déterminer les vitesse linéaires et angulaires des deux billes a et b identiques juste après la collision (indice *f*), en fonction de leurs valeurs juste avant la collision (indice *i*), nous devons d'abord déterminer la vitesse relative $\vec{v}_r^-$ des deux points entrant en contact juste avant la collision :

$$\vec{v}_r^- = \left(\vec{v}_{a,i} + \vec{\omega}_{a,i} \times \vec{r}_{p/a}\right) - \left(\vec{v}_{b,i} + \vec{\omega}_{b,i} \times \vec{r}_{p/b}\right)$$

Sa projection suivant $\hat{n}$ est : $v_r^- = \hat{n}.\vec{v}_r^-$

On définit le vecteur unitaire $\hat{t}$ tangent à la surface de contact entre les deux objets et parallèle au plan formé par $\hat{n}$ et $\vec{v}_r^-$.

$$\hat{t} = \frac{\hat{n} \times (\vec{v}_r^- \times \hat{n})}{|\hat{t}|}$$

ou de la façon suivant

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}_r^- - v_r^- \hat{n}}{|\hat{t}|}$$

Les vitesses après la collision sont données par :

$$\vec{v}_{a,f} = \vec{v}_{a,i} + \frac{\vec{J}}{m}$$
$$\vec{v}_{b,f} = \vec{v}_{b,i} - \frac{\vec{J}}{m}$$
$$\vec{\omega}_{a,f} = \vec{\omega}_{a,i} + I_c^{-1}(\vec{r}_{p/a} \times \vec{J})$$
$$\vec{\omega}_{b,f} = \vec{\omega}_{b,i} - I_c^{-1}(\vec{r}_{p/b} \times \vec{J})$$

où $\vec{J}$ est l'impulsion transférée d'un objet à l'autre durant la collision. Celle-ci est donné par :

$$\vec{J} = j\hat{n} + j_t\hat{t}$$

avec:

$j = -\frac{m}{2}(1 + \epsilon_b)v_r^-$ pour une collision bille-bille.

et $j_t = \begin{cases} \alpha_t \mu_{cb}(1 + \epsilon_b)v_r^- & si\ \mu_{sb}(1 + \epsilon_b)v_r^- < |\hat{t}.\vec{v}_r^-| \\ -\alpha_t|\hat{t}.\vec{v}_r^-| & sinon \end{cases}$

où $\alpha_t = \frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{5}{2m}+\frac{5}{2m}} = m/7$ pour une collision bille-bille.

Collision bille-mur :

La procédure est la même que pour une collision bille-bille. On peut considérer la bille comme objet *a* ou comme objet *b*. Comme dans la partie détection de la collision nous avons considéré que $\hat{n}$ est entrant dans le mur cela veut dire que nous avons déjà fait le choix de considérer la bille comme l'objet *b*. Nous ne calculerons que $\vec{v}_{b,f}$ et $\vec{\omega}_{b,f}$.

Les modifications à apporter au calcul concernant la collision bille-bille sont le remplacement de ϵ_b, μ_{cb} et μ_{sb} par ϵ, μ_c et μ_s respectivement et la masse de la bille *a* par celle du mur considérée comme étant infinie. Les seules équations à modifier sont donc les suivants :

$$\vec{v}_r^- = -\left(\vec{v}_{b,i} + \vec{\omega}_{b,i} \times \vec{r}_{p/b}\right)$$

$$j = -m(1 + \epsilon)v_r^-$$

$$j_t = \begin{cases} \alpha_t \mu_c(1 + \epsilon)v_r^- & si\ \mu_s(1 + \epsilon)v_r^- < |\hat{t}.\vec{v}_r^-| \\ -\alpha_t|\hat{t}.\vec{v}_r^-| & sinon \end{cases}$$

avec:

$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{5}{2m}} = 2m/7$$

Méthode de résolution et précision :

On utilise la méthode de Rung-Kutta pour suivre dans le temps chaque bille en mouvement. Lorsqu'une bille entre en collision, on néglige la durée de cette collision.
En ce qui concerne la précision, l'erreur sur la position ne doit pas dépasser $\pm$ 1mm. Pour s'asssurer de cette précision, plusieur façon de procéder sont possibles. Comme les billes peuvent subir des collisions et des transitions roulement avec glissement-roulement sans glissement (RAG-RSG), le choix de Δt est crutial car une erreur de moins de 1mm dans la position des billes avant la collision peut engendrer une grande erreur dans la position finale. La façon la plus simple de s'assurer de respecter la précision requise serait de faire deux simulations avec deux valeurs différentes de Δt puis de vérifier que les positions finales des billes respectent cette précisions sinon on réduit davantage Δt. La réduction de Δt peut générer des temps de calcul trop longs alors la solution idéale serait de réduire Δt seulement à l'approche d'une colision ou une transition RAG-RSG. Cela signife que lorsqu'une collision ou une transition RAG-RSG est détectée, on recule le temps d'un interval Δt puis reprendre la simulation avec un interval de temps bien plus petit jusqu'à ce que la collision ou la RAG-RSG soit effectuée.

On peut aussi utiliser la méthode de contrôle d'erreur en choisissant un Δt initial assez grand (de l'ordre de la seconde) puis le diviser par 2 et recommencer la simulation et ainsi de suite jusqu'à ce que la position finale du ballon ne varie que d'une distance $< \pm$ 1mm entre deux simulations successives.

Il est aussi facile de comparer le résultat de la simulation avec le résultat de calculs analytiques notament pour des cas simples comme le tir 3.
Par exemple, la simulation du tir 3 indique que la bille blanche s'arrête sans entrer en collision. On vérifie si le calcul est correct et qu'il vérifie la condition de précision de la façon suivante :
lorsque la bille blanche est tirée par la queue, celle-ci décrit un mouvement uniformément déccéléré. Sa vitesse est donc :

$$v_c(t) = v_{c,0} - \mu_c g t$$

alors que la vitesse de roulement $v_r$subit une variation constante $\frac{dv_r}{dt} = \frac{5}{2}\mu_c g$ tel que vu en cours.

$$\Rightarrow v_r(t) = \frac{5}{2}\mu_c g t$$

La transition RAG-RSG se produit lorsque

$$v_c(t_1) = v_r(t_1)$$

soit :

$$t_1 = \frac{2v_{c,0}}{7\mu_c g}$$

Remarque : cette démarche n'est valable que si $\vec{\omega}$ n'a pas de composante dans la direction de $\vec{v}_c$ c'est-à-dire que $\vec{v}_{glisse}$ est colinéaire avec $\vec{v}_c$.

À l'instant t_1, la vitesse de la bille est

$$v_{c,1} = \frac{5}{2}\mu_c g t_1$$

et la distance parcourue est

$$s_1 = v_{c,0} t_1 - \frac{1}{2}\mu_c g t_1^2$$

Après l'instant t_1, la bille roulle sans glisser, sa vitesse sera alors donnée par :

$$v_c(t) = v_{c,1} - \mu_r g(t - t_1)$$

La bille s'arrête à l'instant t_f donné par $v_c(t_f) = 0$ soit:

$$t_f = t_1 + \frac{v_{c,1}}{\mu_r g}$$

et la distance totale parcourue sera :

$$s_f = s_1 + v_{c,1}(t_f - t_1) - \frac{1}{2}\mu_r g (t_f - t_1)^2$$

Dans le cas du tir 3 où $v_{c,0} = 0.5\ \mathrm{m/s}$, on peut résumer la comparaison dans le tableau suivant:

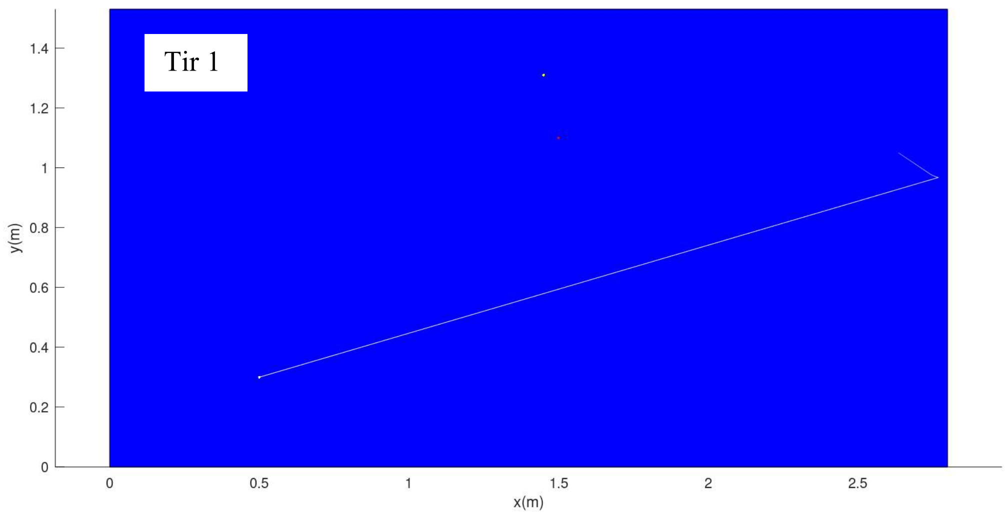
	t_1 (s)	$v_{c,1}$ (m/s)	s_1 (m)	t_f (s)	s_f (m)
Calcul analytique	0.04854	0.3571	0.02080	1.2621	0.2375
Calcul numérique	0.04845	0.3574	0.02077	1.2595	0.2378

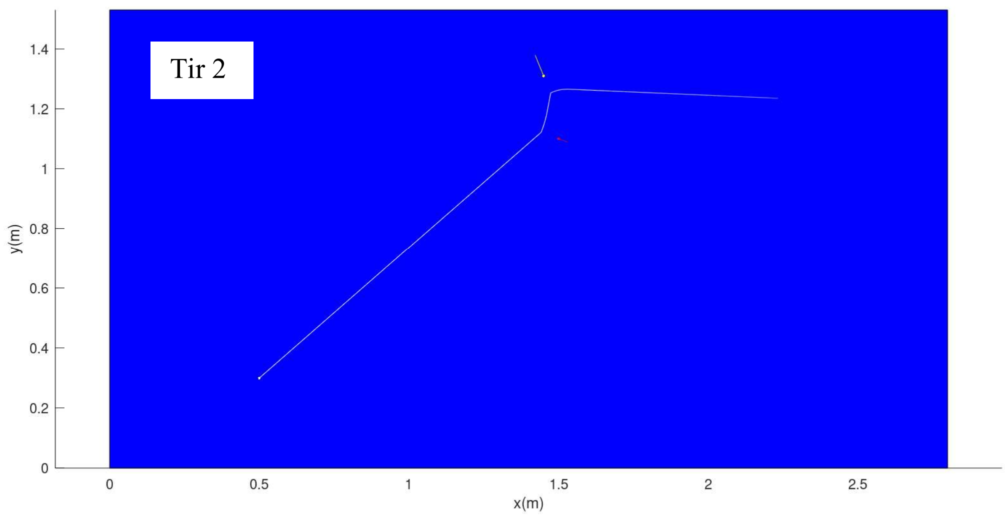
Ici, le pas de temps utilisé est $\Delta t = 10^{-6} s$ lorsque la transition RAG-RSA est détectée et $\Delta t = 10^{-4} s$ sinon. La condition d'arrêt de la simulation est $|\vec{v}_c| \leq 10^{-3}\mathrm{m/s}$ et $|\vec{\omega}| \leq 10^{-1}\mathrm{rad/s}$. On remarque que l'erreur sur la position finale est bien inférieure à $\pm$ 1mm.

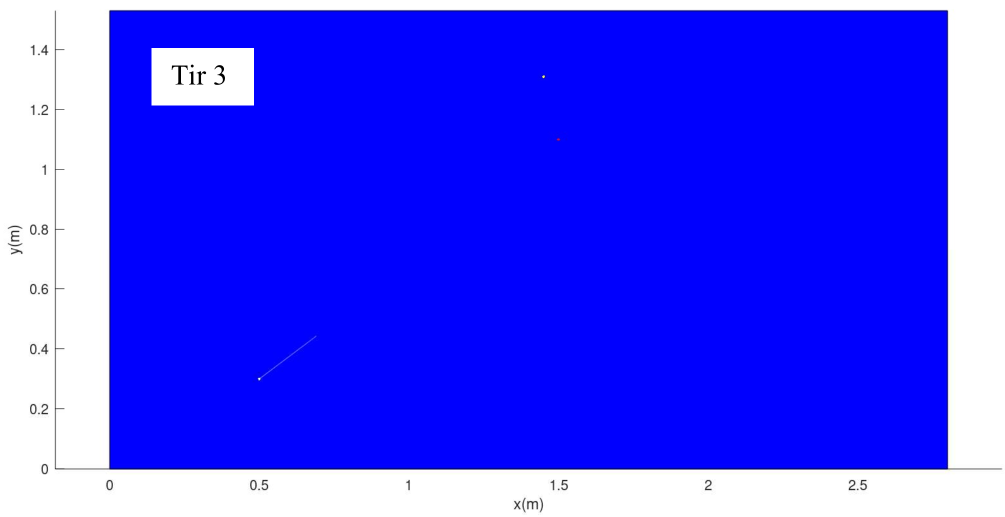
Résultats :
Pour les trois tirs mentionnés dans le tableau 1, on obtient les résultats suivants :

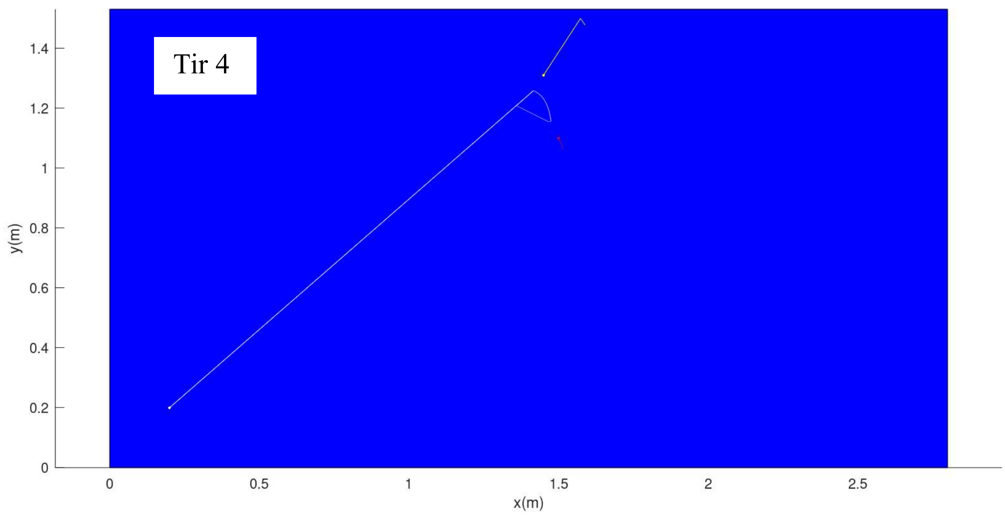
Tirs	Instants des transitions RAG-RSG (s)	Résultats
1	0.1719; 2.5029	Aucune bille touchée
2	0.1941; 0.9557; 1.1176	Les deux billes sont touchées
3	0.048445	Aucune bille touche
4	0.2573; 1.0244; 1.1258	Les deux billes sont touchées

On remarque qu'après chaque collision, la bille blanche se met à glisser puis à rouler sans glisser jusqu'à la prochaine collision ou l'arrêt. Le quatrième tir doit mener à un point. Les étudiants doivent choisir la direction et le module de la vitesse initiale de la blanche afin qu'elle rentre en collision avec les deux autres bille au moins une fois chacune.


Tir 1
y(m)
x(m)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5


Tir 2
y(m)
x(m)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5


Tir 3
y(m)
x(m)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5


Tir 4
y(m)
x(m)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5