



POLYTECHNIQUE  
MONTRÉAL

**PHS 4700**  
**Physique pour les applications multimédia**

**Chapitre 2 — Dynamique des solides**

D. Seddaoui

# Table des matières

Objets ponctuels et étendus  
Matrices de rotation  
Quaternions et rotation  
Équations de la dynamique  
Centre de masse  
Moment d'inertie  
Conclusions

- Objets ponctuels et étendus
- Matrices de rotation
- Quaternions et rotation
- Équations de la dynamique
- Centre de masse
- Moment d'inertie
- Conclusions

# Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels et étendus

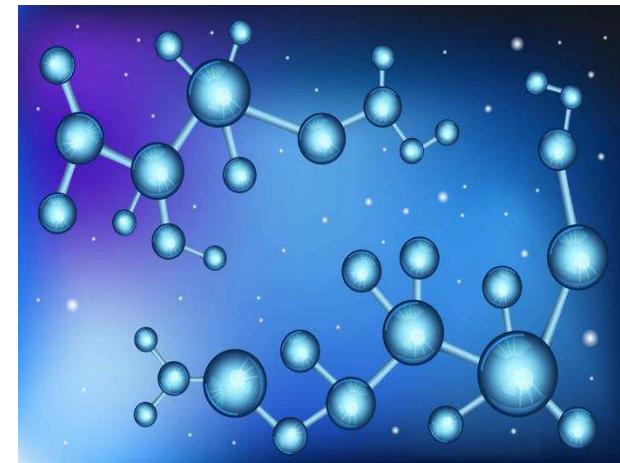
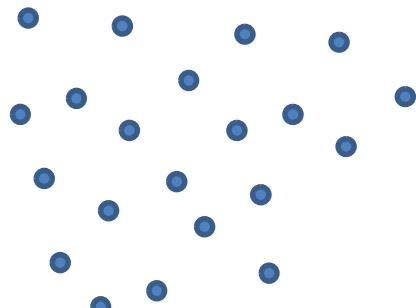
Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse  
Moment d'inertie

Conclusions

## Objets ponctuels



# Objets ponctuels et étendus

## Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

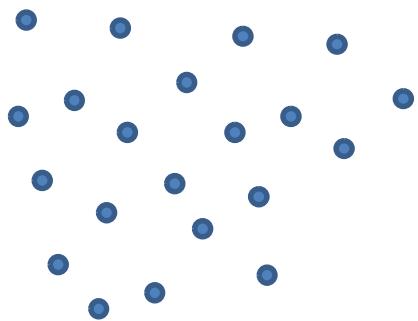
Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Objets ponctuels



Les objets ponctuels :

masse concentrée en un point,  
dimensions considérées infinitésimales.

À l'échelle macroscopique ==> Les lois de la mécanique newtonienne (classique)

À l'échelle microscopique ==> Les lois de la mécanique quantique.

# Objets ponctuels et étendus

## Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Un objet ponctuel  $p$  est caractérisé par :

sa masse  $m_p$ , sa charge électrique  $e_p$  et toute autre propriété intrinsèque qui lui est associée;  
sa position

$$\vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \\ z_p(t) \end{pmatrix} = (x_p(t), y_p(t), z_p(t))^T$$

sa vitesse de déplacement

$$\vec{v}_p(t) = \begin{pmatrix} v_{p,x}(t) \\ v_{p,y}(t) \\ v_{p,z}(t) \end{pmatrix} = (v_{p,x}(t), v_{p,y}(t), v_{p,z}(t))^T$$

# Objets ponctuels et étendus

## Objets ponctuels et étendus

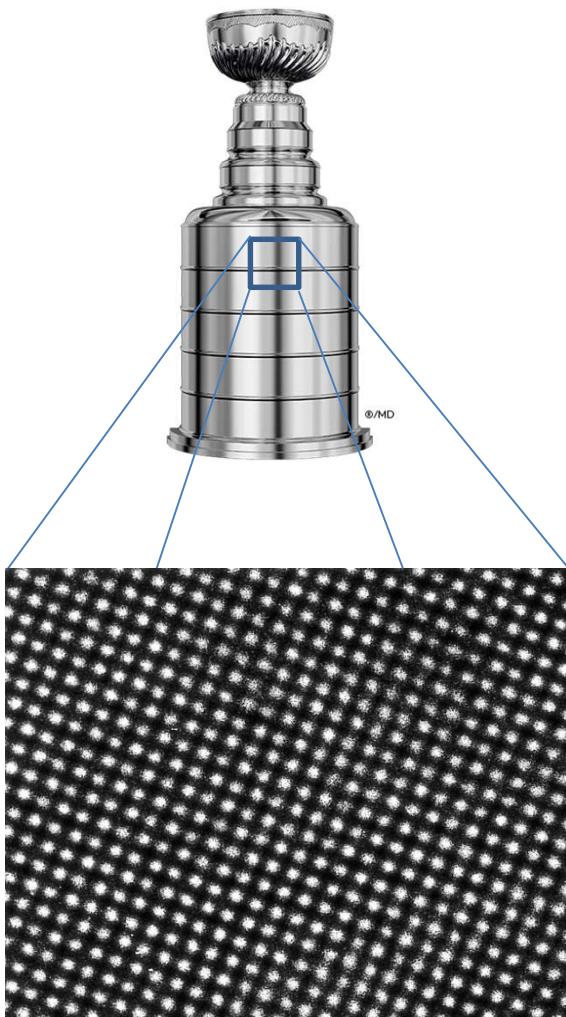
Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse  
Moment d'inertie

Conclusions

## Objets étendus



# Objets ponctuels et étendus

## Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et  
rotation

Équations de la  
dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Les objets solides (étendus)

Une extension finie dans l'espace (solides de volume  $V$ ).

Ils sont composés d'un grand nombre de particules élémentaires ( $> 10^{20}$ ) soudées entre elles par des forces qui s'exercent au niveau microscopique.

Ces forces donnent une certaine rigidité à l'objet de telle sorte que l'application d'une force extérieure à n'importe quel point de l'objet produit un effet qui se transmet immédiatement à l'ensemble de l'objet.

# Objets ponctuels et étendus

## Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Un objet solide correspond à :

- Une distribution de masse volumique  $\rho(\vec{r})$  (en kg/m<sup>3</sup>) en tout point de l'espace ;
- une **région de l'espace**  $\mathcal{V}(t)$  qu'ils occupent ;

Le déplacement de l'objet est relié au taux de changement de  $\mathcal{V}(t)$  par rapport au temps ( $d\mathcal{V}(t)/dt$ ).

Le volume  $V$  (m<sup>3</sup>) et la masse  $m$  (kg) d'un solide sont donnés par

$$V = \int_{\mathcal{V}(t)} d^3 r = \int_{\mathcal{V}} dx dy dz$$

$$m = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(\vec{r}) d^3 r = \int_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

et sont indépendants du temps.

# Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

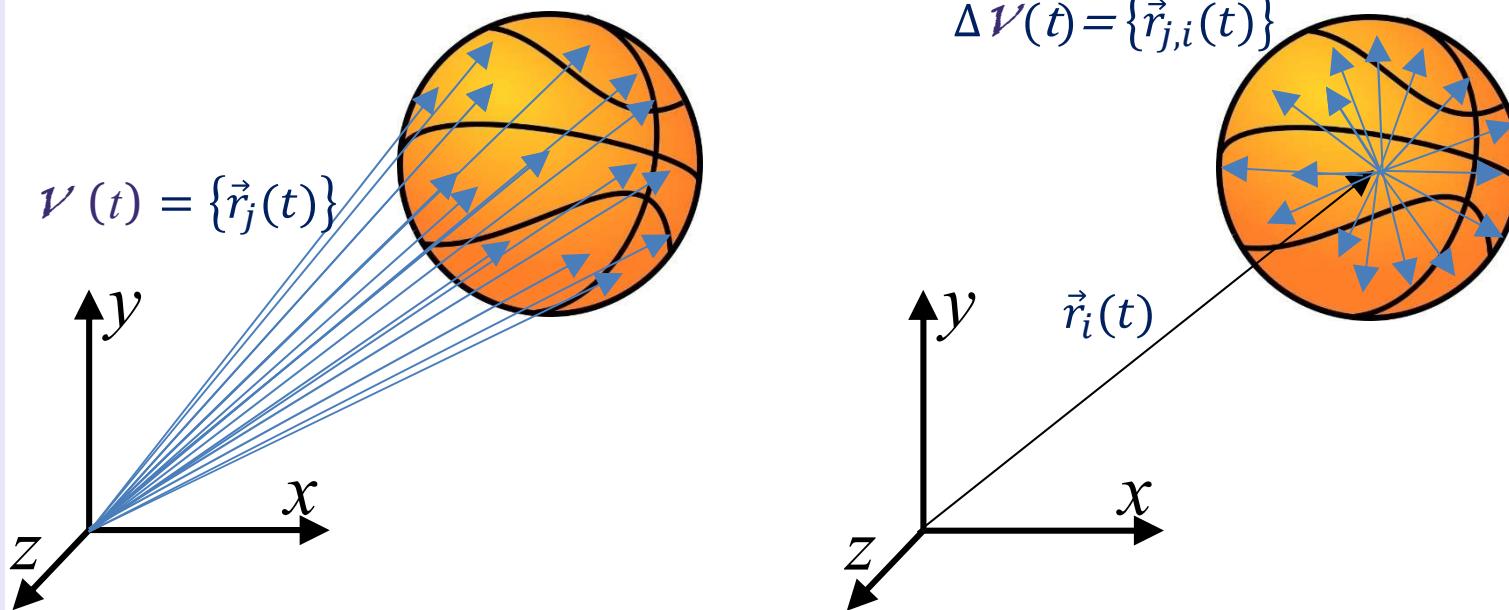
Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

On caractérise  $\mathcal{V}(t)$  de la façon suivante.

- On détermine la position  $\vec{r}_i(t)$  d'un point  $i$  du solide
- L'ensemble infini de points  $\Delta \mathcal{V}(t) = \{\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\} = \{\vec{r}_{j,i}(t)\}$  représente la position de tous les points du solide par rapport à la position de  $i$ .



# Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

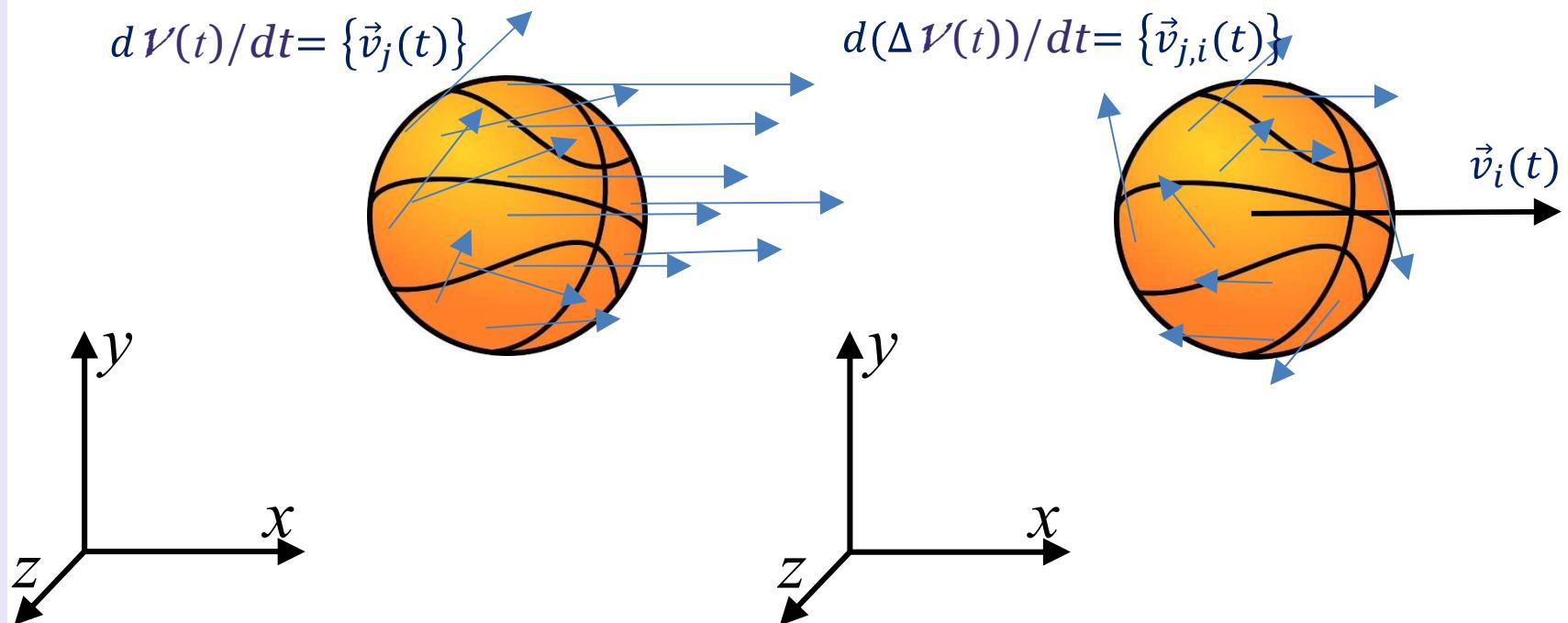
Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

On caractérise  $d \mathcal{V}(t)/dt$  de la façon suivante.

- On détermine la vitesse  $\vec{v}_i(t)$  d'un point  $i$  du solide
- L'ensemble  $d\Delta \mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_j(t) - \vec{v}_i(t)\} = \{\vec{v}_{j,i}(t)\}$  représente la vitesse relative de tous les points du solide par rapport à  $i$ .



# Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

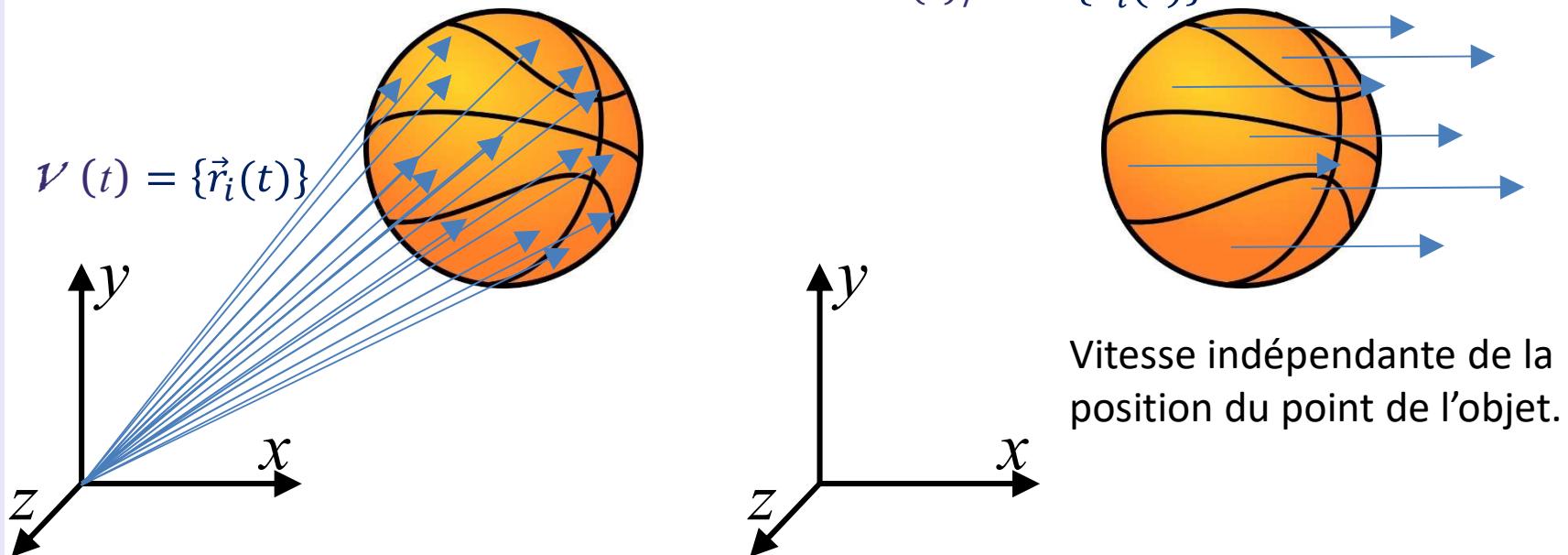
Équations de la dynamique

Centre de masse  
Moment d'inertie  
Conclusions

Quelques observations:

Si un objet se déplace à une vitesse  $\vec{v}(t)$  **sans mouvement de rotation** alors:

$$\mathcal{V}(t) \text{ varie dans le temps} \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_i(t)\} \neq 0$$



# Objets ponctuels et étendus

Quelques observations:

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

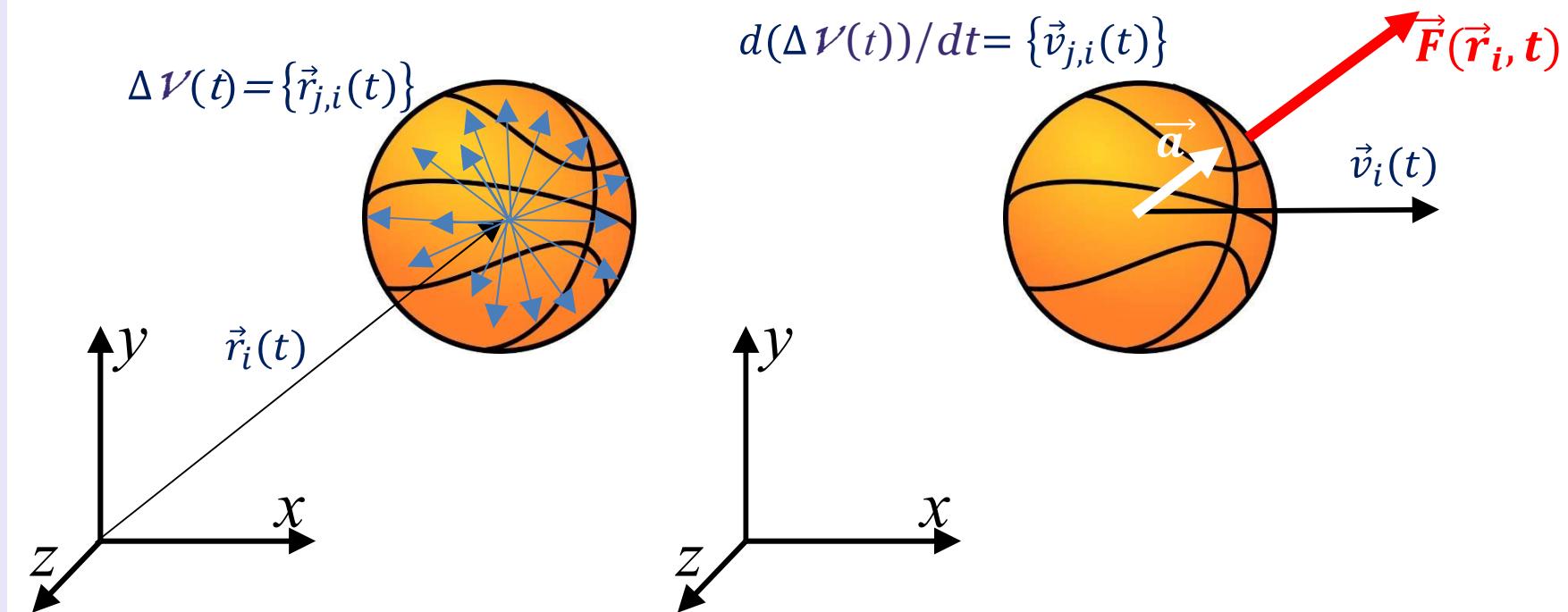
Centre de masse  
Moment d'inertie

Conclusions

Si un objet se déplace à une vitesse  $\vec{v}(t)$  **sans mouvement de rotation** alors:

$\mathcal{V}(t)$  varie dans le temps  $\Rightarrow d\mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_i(t)\} \neq 0$

Par contre:  $\Delta\mathcal{V}(t)$  reste constant  $\Rightarrow d(\Delta\mathcal{V}(t))/dt = \{\vec{v}_{j,i}(t)\} = 0$



# Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Donc, si le solide ne subit pas de rotation on peut simplifier notre description en utilisant :

$\Delta \mathcal{V}(t) = \{\vec{r}_{j,i}(t)\} = \{\vec{r}_{j,i}(t_0)\} = \Delta \mathcal{V}(t_0)$  la position relative de tous les points du solide est indépendante du temps (temps initial  $t_0$ ).

$d\Delta \mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_{j,i}(t)\} = 0$  la vitesse relative entre les points du solide est nulle.

Alors la position  $\vec{r}_s(t)$  et la vitesse  $\vec{v}_s(t)$  d'un point arbitraire du solide ainsi que  $\Delta \mathcal{V}(t_0)$  sont suffisantes pour suivre complètement le solide dans l'espace et le temps.

# Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse  
Moment d'inertie  
Conclusions

La question qui se pose alors est :

Quel point de l'objet est-il préférable de suivre ?

Réponse: Le centre de masse  $\vec{r}_c(t)$  (en général)

# Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

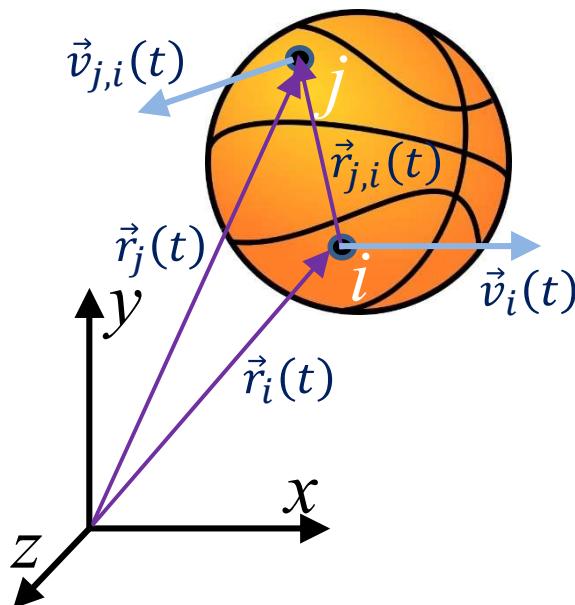
Centre de masse

Moment d'inertie

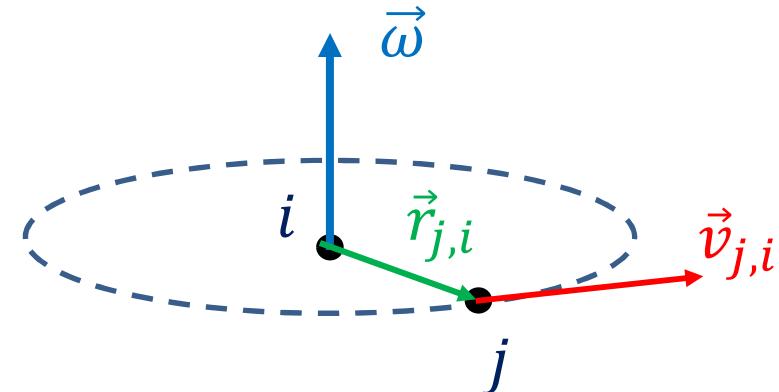
Conclusions

Pour un **objet en rotation** (vitesse angulaire  $\vec{\omega}(t)$  en rad/s) autour du point  $i$  qui se déplace à une vitesse (linéaire)  $\vec{v}_i(t)$ .

$\Delta \mathcal{V}(t)$  garde la même forme mais subi une rotation.



Dans le référentiel de  $i$



$$\vec{v}_{j,i}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)$$

# Objets ponctuels et étendus

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour un **objet en rotation** (vitesse angulaire  $\vec{\omega}(t)$  en rad/s) autour du point  $i$  qui se déplace à une vitesse (linéaire)  $\vec{v}_i(t)$ .

$\Delta \mathcal{V}(t)$  garde la même forme mais subi une rotation.

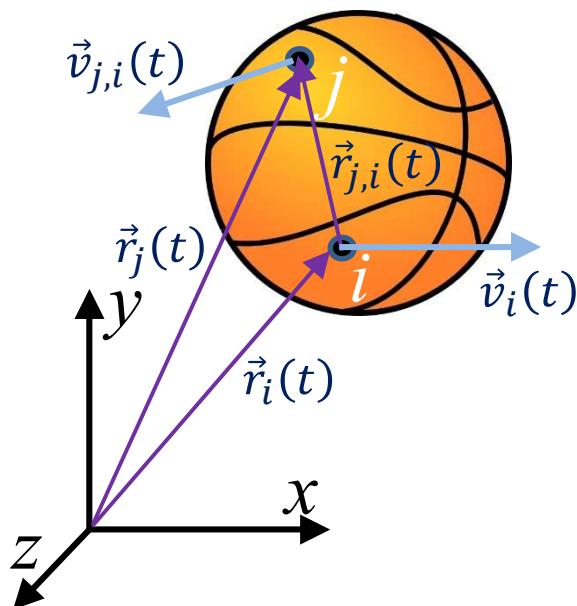
$$\vec{v}_{j,i}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)$$

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{j,i}(t)$$

$$\vec{v}_j(t) = \vec{v}_i(t) + \vec{v}_{j,i}(t)$$

$$\vec{v}_j(t) = \vec{v}_i(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)$$

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \mathbf{R}(t, t_0) \vec{r}_{j,i}(t_0)$$



# Objets ponctuels et étendus

## Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour un solide en rotation:

- La position de tous les points du système est dépendante du temps et reliée à sa position initiale  $\vec{r}_{j,i}(t_0)$  par une matrice de rotation  $\mathbf{R}(t, t_0) = \mathbf{R}(t)$  unique :

$$\Delta \mathcal{V}(t) = \{\vec{r}_{j,i}(t)\} = \{\mathbf{R}(t, t_0) \ \vec{r}_{j,i}(t_0)\} = \{\mathbf{R}(t) \ \vec{r}_{j,i}(t_0)\}$$

- La vitesse relative de tous les points

$$d\Delta \mathcal{V}(t)/dt = \{\vec{v}_{j,i}(t)\} = \{\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t)\} = \{\vec{\omega}(t) \times \mathbf{R}(t) \ \vec{r}_{j,i}(t_0)\}$$

Avec  $\vec{\omega}(t)$  la vitesse angulaire du solide dans le système immobile (global ou du laboratoire).

# Objets ponctuels et étendus

## Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Ainsi, la position et la vitesse de tout point du solide en rotation et en translation seront données par:

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \mathbf{R}(t) \vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\vec{v}_j(t) = \vec{v}_i(t) + \vec{\omega}(t) \times (\mathbf{R}(t) \vec{r}_{j,i}(t_0))$$

Pour déterminer la trajectoire du solide dans l'espace, nous n'aurons qu'à résoudre les équations de la dynamique pour  $\vec{r}_i(t)$ ,  $\vec{v}_i(t)$ ,  $\vec{\omega}(t)$  et  $\mathbf{R}(t)$ .

# Objets ponctuels et étendus

## Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

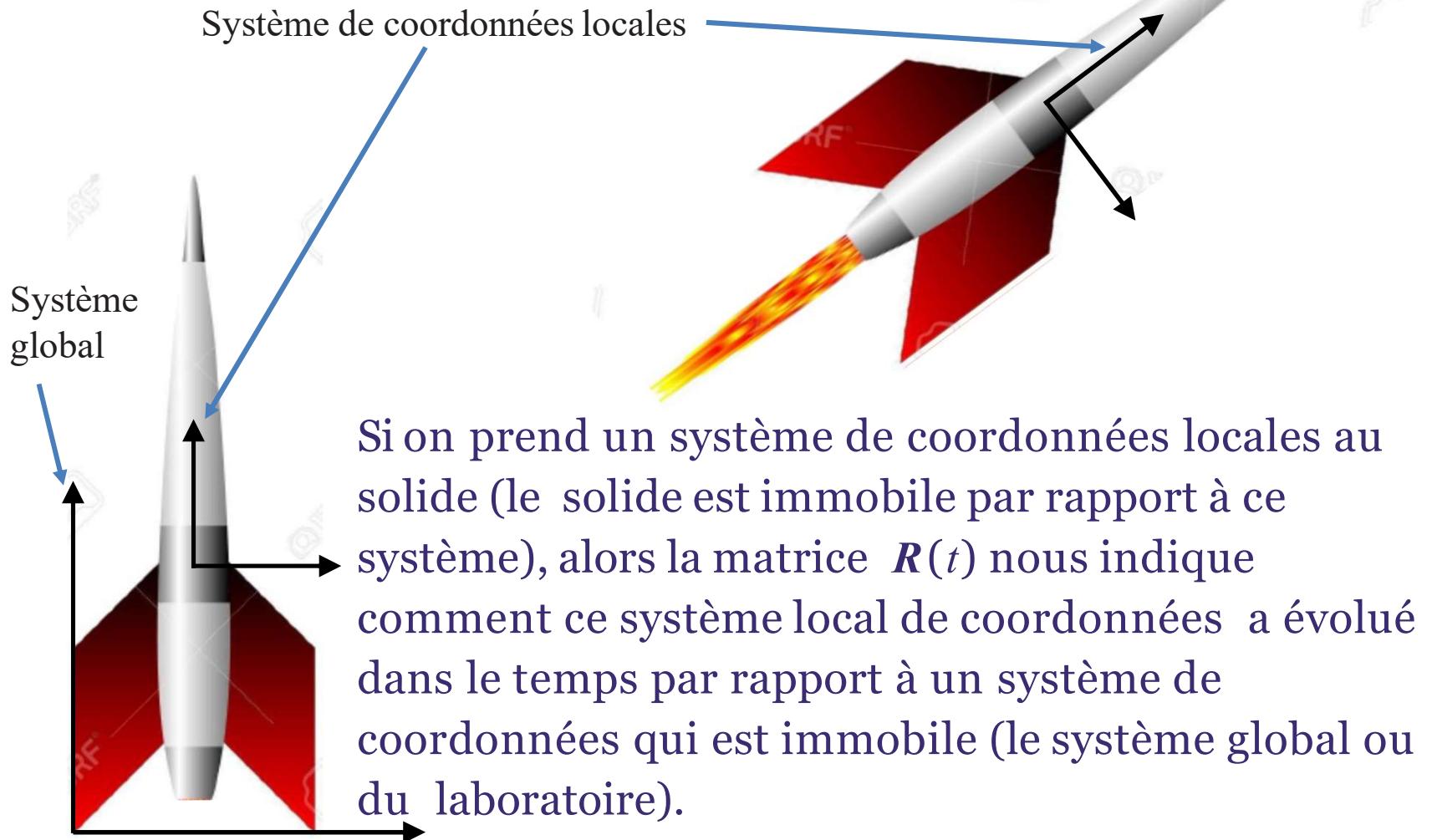
Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Système de coordonnées local et du laboratoire



# Matrices de rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Matrices de rotation

Une matrice de rotation  $R^{2 \leftarrow 1}$  sert à transformer un vecteur  $\vec{V}^1$  décrit dans le système 1 en un vecteur  $\vec{V}^2$  dans le système 2 ayant subi une rotation par rapport à 1.

$$\vec{V}^2 = R^{2 \leftarrow 1} \vec{V}^1$$

Pour une matrice  $M$ , la transformation est un peu plus compliquée. On doit utiliser

$$M^2 = R^{2 \leftarrow 1} M^1 (R^{2 \leftarrow 1})^{-1}$$

où  $(R^{2 \leftarrow 1})^{-1} = R^{1 \leftarrow 2}$  est la matrice inverse de  $R^{2 \leftarrow 1}$

# Matrices de rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Si on suppose que les axes du système 2 correspondent à des rotations successives de  $\theta_x$  par rapport à l'axe des  $x$ ,  $\theta_y$  par rapport à l'axe des  $y$  et  $\theta_z$  par rapport à l'axe des  $z$  du système 1, la matrice de rotation aura la forme

$$\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1} = \mathbf{R}_z(\theta_z) \mathbf{R}_y(\theta_y) \mathbf{R}_x(\theta_x)$$

où

$$\mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices de rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et

rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Sachant que

$$\vec{V}^2 = \mathbf{R}^{2 \leftarrow 1} \vec{V}^1$$
$$\vec{V}^1 = \mathbf{R}^{1 \leftarrow 2} \vec{V}^2 = (\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^{-1} \vec{V}^2$$

alors la matrice de rotation inverse sera donnée par

$$(\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^{-1} = \mathbf{R}_x(-\theta_x) \mathbf{R}_y(-\theta_y) \mathbf{R}_z(-\theta_z) = (\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^T$$

avec  $(\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1})^T$  la transposée de  $\mathbf{R}^{2 \leftarrow 1}$ .

# Matrices de rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

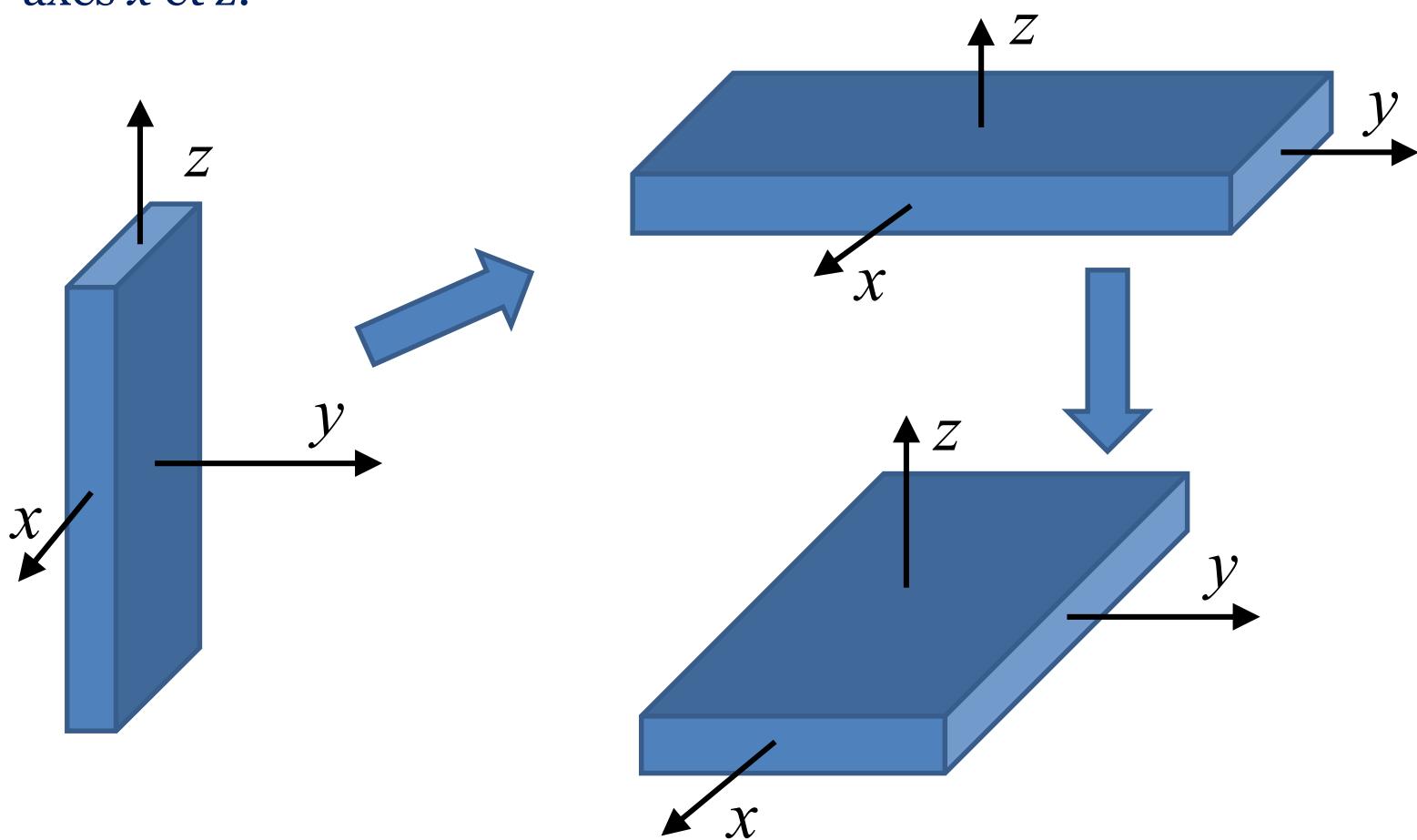
Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Exemple 1:

Solide subissant deux rotations successives de  $\pi/2$  autour des axes  $x$  et  $z$ .



# Matrices de rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

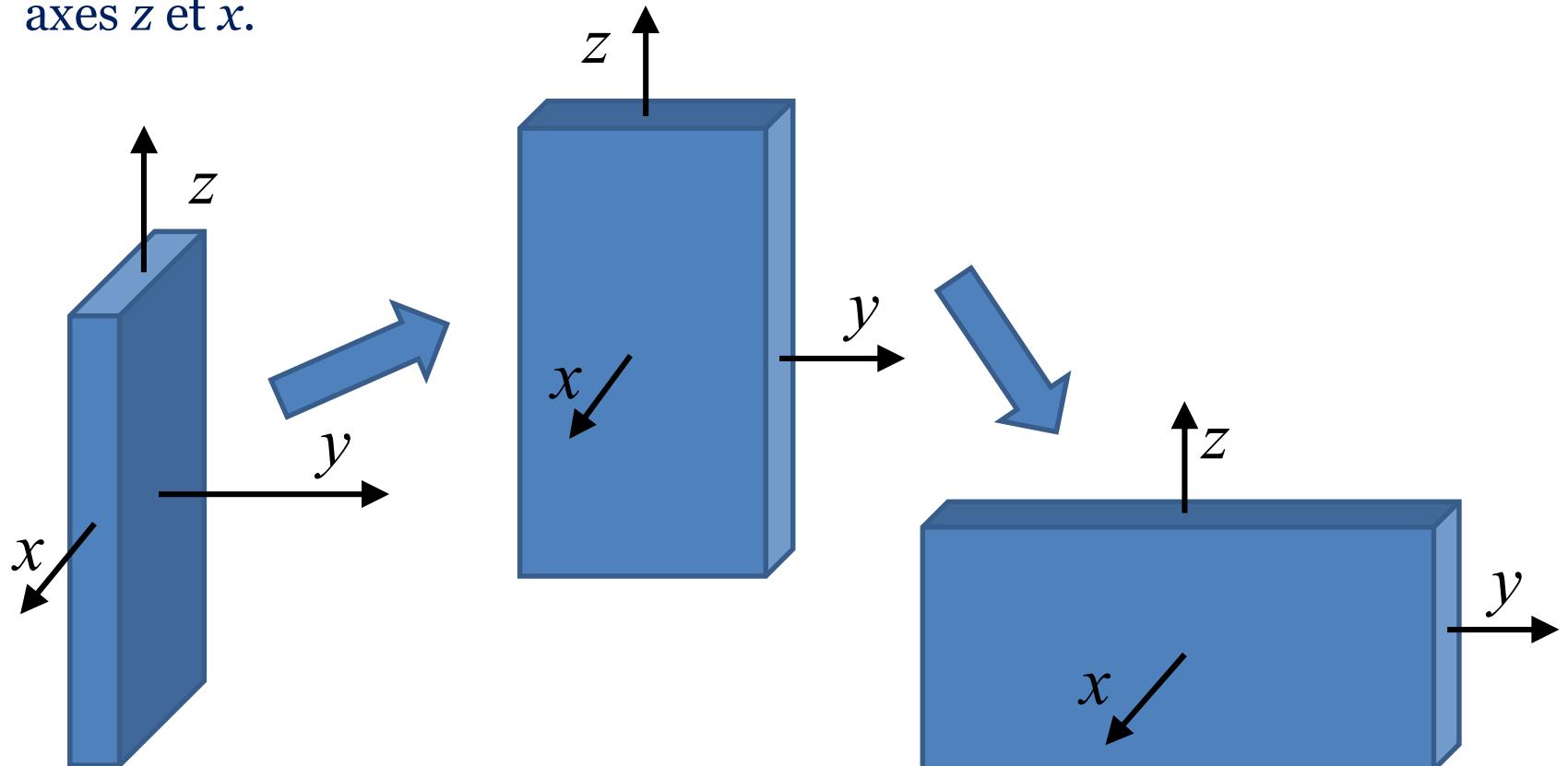
Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Exemple 2:

Solide subissant deux rotations successives de  $\pi/2$  autour des axes  $z$  et  $x$ .



# Matrices de rotation

Objets ponctuels et  
étendus

Matrices de rotation

Quaternions et  
rotation

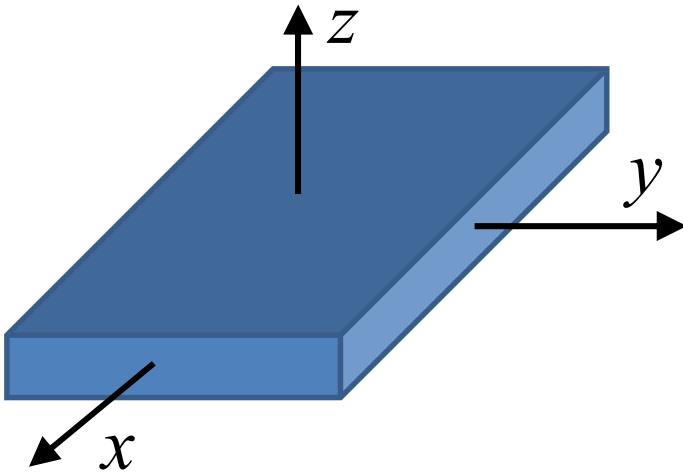
Équations de la  
dynamique

Centre de masse

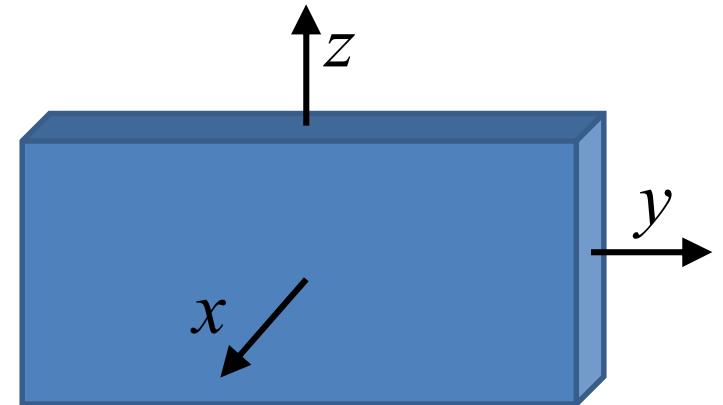
Moment d'inertie

Conclusions

Rotation  $x$  puis  $z$ .



Rotation  $z$  puis  $x$ .



# Matrices de rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

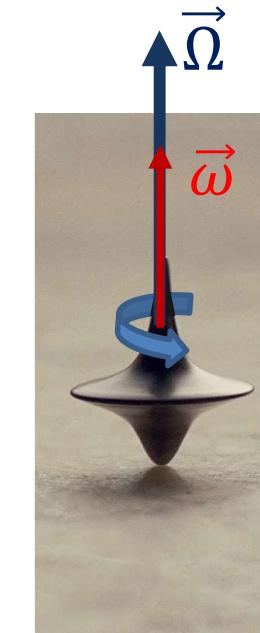
Cas général d'une rotation autour d'un axe  $\hat{u}$  :

Définissons  $\theta\hat{u} = \Delta\vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}(t) - \vec{\Omega}(t_0)$

tel que  $\theta$  est l'angle de rotation du système au temps  $t$  autour de l'axe  $\hat{u}$ . Pour  $\hat{u}$  un vecteur unitaire, on aura

$$\theta = |\Delta\vec{\Omega}(t)|$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$



# Matrices de rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

La matrice  $R(t)$  s'écrit

$$R(t) = \begin{pmatrix} u_x^2 + (u_y^2 + u_z^2) \cos \theta & u_x u_y (1 - \cos \theta) - u_z \sin \theta & u_x u_z (1 - \cos \theta) + u_y \sin \theta \\ u_x u_y (1 - \cos \theta) + u_z \sin \theta & u_y^2 + (u_z^2 + u_x^2) \cos \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) - u_x \sin \theta \\ u_x u_z (1 - \cos \theta) - u_y \sin \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) + u_x \sin \theta & u_z^2 + (u_x^2 + u_y^2) \cos \theta \end{pmatrix}$$

Cette matrice nous indique effectivement comment transformer un vecteur défini dans le système de coordonnées locales, associé au solide et qui a évolué dans le temps ( $\vec{\Omega}(t)$ ), pour le ramener dans un système de coordonnées qui est immobile (le système du laboratoire  $\vec{\Omega}(t_0)$ ).

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

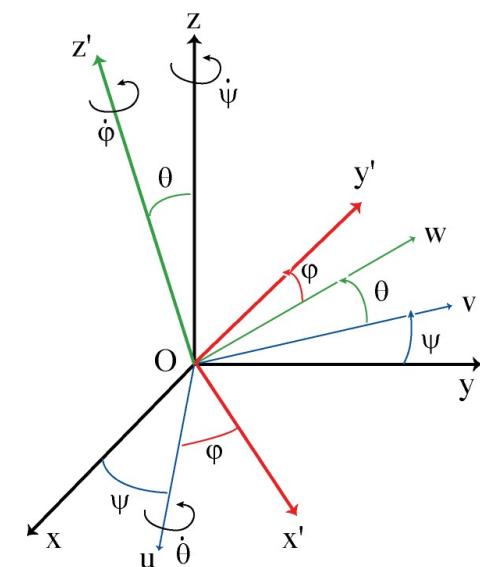
Moment d'inertie

Conclusions

# Matrices de rotation

Matrice de rotation et angles de Euler.

1.  $\Psi$  autour de  $z$  et  $(x, y, z) \rightarrow (u, v, z)$
2.  $\Theta$  autour de  $u$  et  $(u, v, z) \rightarrow (u, w, z')$
3.  $\varphi$  autour de  $z'$  et  $(u, w, z') \rightarrow (x', y', z')$



$$R^{2 \leftarrow 1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi \\ \sin \theta & \cos \theta & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

# Matrices de rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Évaluation directe de la matrice de rotation.

Dans le système 1 (initial) les axes du cube sont données par

$$\vec{e}_x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le système 2 (après rotation) ces mêmes axes correspondent à

$$\vec{e}_x^2 = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{xy} \\ e_{xz} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y^2 = \begin{pmatrix} e_{yx} \\ e_{yy} \\ e_{yz} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z^2 = \begin{pmatrix} e_{zx} \\ e_{zy} \\ e_{zz} \end{pmatrix}.$$

La matrice de rotation  $R^{1 \leftarrow 2}$  correspond donc à

$$R^{1 \leftarrow 2} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} = (\vec{e}_x^2 \quad \vec{e}_y^2 \quad \vec{e}_z^2)$$

# Quaternions et rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse  
Moment d'inertie

Conclusions

Les quaternions sont des entités mathématiques qui, bien qu'ayant été développées il y a près de 100 ans par William Hamilton lors de ses travaux sur les nombres complexes, ont été peu utilisées avant l'avènement des méthodes de simulation par ordinateur.

# Quaternions et rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Un quaternion est en réalité un vecteur, en quatre dimensions, ici noté  $\vec{q}$  et défini comme suit

$$\vec{q} = (q_0, q_x, q_y, q_z)^T$$

Les composantes  $q_x, q_y$  et  $q_z$  du quaternion correspondent aux directions  $x, y$  et  $z$  d'un vecteur en 3D.

La composante  $q_0$  correspond à une direction  $w$  perpendiculaire aux trois autres.

Ainsi, un vecteur  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$  en trois dimensions pourra être transformé en quaternion  $\vec{v}$  en utilisant la relation suivante

$$\vec{v} = (0, v_x, v_y, v_z)^T = (0, \vec{v}^T)^T$$

# Quaternions et rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Opérations sur les quaternions.

### Somme

$$\begin{aligned}\vec{\vec{q}}^1 + \vec{\vec{q}}^2 &= (q_0^1 + q_0^2, q_x^1 + q_x^2, q_y^1 + q_y^2, q_z^1 + q_z^2)^T \\ &= (q_0^1 + q_0^2, (\vec{q}^1 + \vec{q}^2)^T)^T\end{aligned}$$

### Soustraction

$$\begin{aligned}\vec{\vec{q}}^1 - \vec{\vec{q}}^2 &= (q_0^1 - q_0^2, q_x^1 - q_x^2, q_y^1 - q_y^2, q_z^1 - q_z^2)^T \\ &= (q_0^1 - q_0^2, (\vec{q}^1 - \vec{q}^2)^T)^T\end{aligned}$$

# Quaternions et rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse  
Moment d'inertie

Conclusions

## Produit (de Hamilton)

$$\vec{q}^1 \vec{q}^2 = (q_0^1 q_0^2 - q_x^1 q_x^2 - q_y^1 q_y^2 - q_z^1 q_z^2,$$

$$q_0^1 q_x^2 + q_x^1 q_0^2 + q_y^1 q_z^2 - q_z^1 q_y^2,$$

$$q_0^1 q_y^2 + q_y^1 q_0^2 + q_z^1 q_x^2 - q_x^1 q_z^2,$$

$$q_0^1 q_z^2 + q_z^1 q_0^2 + q_x^1 q_y^2 - q_y^1 q_x^2)^T$$

$$= (q_0^1 q_0^2 - \vec{q}^1 \cdot \vec{q}^2, q_0^1 (\vec{q}^2)^T + q_0^2 (\vec{q}^1)^T + (\vec{q}^1 \times \vec{q}^2)^T )^T$$

# Quaternions et rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

La multiplication n'est pas commutative en général

$$\vec{q}^1 \vec{q}^2 \neq \vec{q}^2 \vec{q}^1$$

La commutativité implique

$$\vec{q}^1 \times \vec{q}^2 = \vec{q}^2 \times \vec{q}^1 = \vec{0}$$

et donc que  $\vec{q}^1$  et  $\vec{q}^2$  soient colinéaires (parallèles).

# Quaternions et rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse  
Moment d'inertie

Conclusions

## Conjugaison

$$\begin{aligned} (\vec{\vec{q}})^* &= (q_0, -q_x, -q_y, -q_z)^T \\ &= (q_0, -\vec{q}^T)^T \end{aligned}$$

## Norme

$$\|\vec{\vec{q}}\| = \sqrt{(q_0)^2 + \vec{q} \cdot \vec{q}} = \sqrt{(q_0)^2 + \|\vec{q}\|^2}$$

## Inverse

$$(\vec{\vec{q}})^{-1} = \frac{(\vec{\vec{q}})^*}{\|\vec{q}\|^2}$$

# Quaternions et rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation

Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour les problèmes où on doit tenir compte des rotations de solides d'un angle  $\theta$  par rapport à un axe arbitraire représenté par le vecteur unitaire  $\hat{u}$ , ce qui nous intéressera particulièrement c'est le quaternion unitaire  $\vec{r}$  défini comme suit

$$\vec{r} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \hat{u}^T)^T$$

dont la norme est

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{\cos^2(\theta/2) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \|\hat{u}\|^2} = 1$$

# Quaternions et rotation

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

On peut utiliser ce quaternion pour tourner un vecteur arbitraire  $\vec{v}$  dans l'espace en utilisant la relation

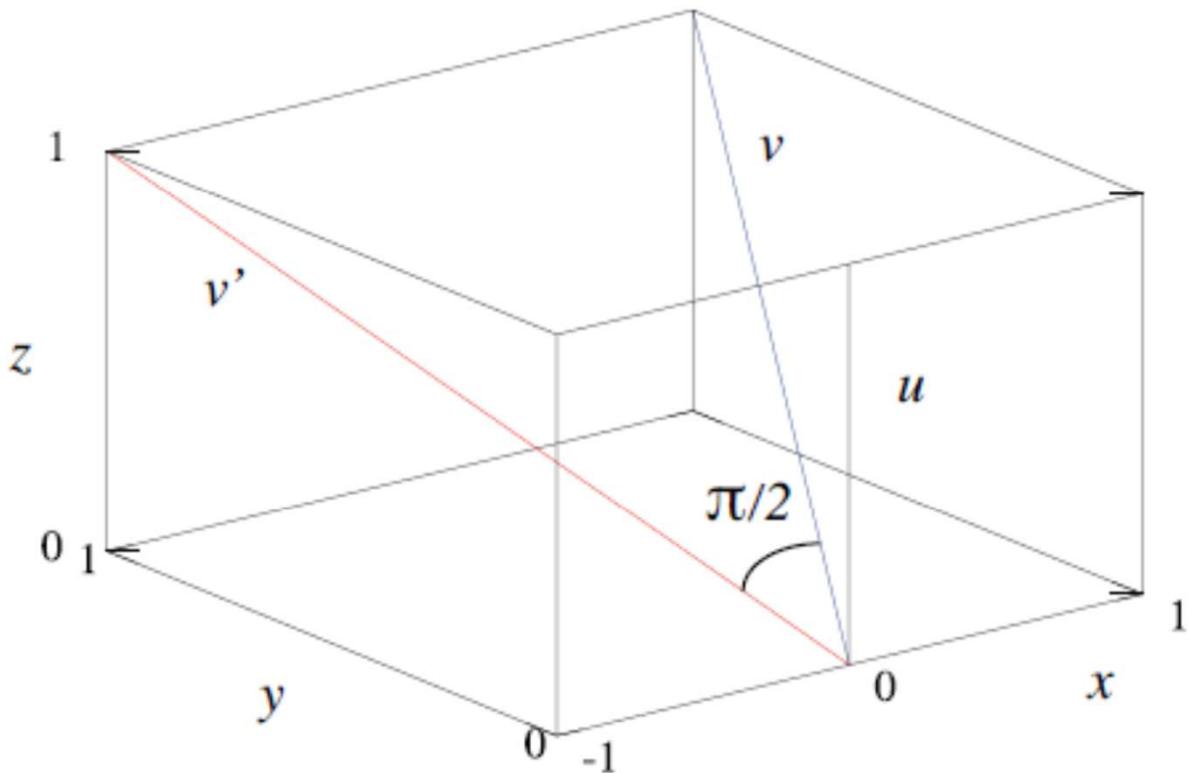
$$\vec{v}' = (0, (\vec{v}')^T)^T = \vec{r} (0, (\vec{v})^T)^T \quad \vec{r}^* = \vec{r} \vec{v} \vec{r}^*$$

Avec

$$\vec{r}^* = (\cos(\theta/2), -\sin(\theta/2) \hat{u}^T)^T$$

## Exemples

Rotation du vecteur  $\vec{v} = (1, 1, 1)^T$  de  $\pi/2$  autour de l'axe  $\vec{u} = (0, 0, 1)^T$ .



## Exemples

Rotation de  $\pi/4$  autour de l'axe  $\vec{u} = (0, 1, 1)^T / \sqrt{2}$ .

- Pour le quaternion, c'est toujours aussi simple

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2) \vec{u}^T)^T \\ &= ((\cos(\pi/8), 0, \sin(\pi/8)/\sqrt{2}, \sin(\pi/8)/\sqrt{2})^T\end{aligned}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} u_x^2 + (u_y^2 + u_z^2) \cos \theta & u_x u_y (1 - \cos \theta) - u_z \sin \theta & u_x u_z (1 - \cos \theta) + u_y \sin \theta \\ u_x u_y (1 - \cos \theta) + u_z \sin \theta & u_y^2 + (u_z^2 + u_x^2) \cos \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) - u_x \sin \theta \\ u_x u_z (1 - \cos \theta) - u_y \sin \theta & u_y u_z (1 - \cos \theta) + u_x \sin \theta & u_z^2 + (u_x^2 + u_y^2) \cos \theta \end{pmatrix}$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Mouvement de translation et lois de Newton.

1. Si aucune force n'est appliquée sur un corps de masse  $m$ , celui-ci restera au repos ou continuera à se déplacer en ligne droite à une vitesse constante.
2. L'accélération d'un corps est proportionnelle à la force agissant sur le corps et dans la direction de cette force.
3. À toute force agissant sur un corps (action) correspond une force égale et opposée qui s'oppose à la première force (réaction).

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Le mouvement de translation d'un point du corps est caractérisé par:

1. la position  $\vec{r}(t)$  à tout instant

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

2. la vitesse  $\vec{v}(t)$  à tout instant

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left( \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)^T$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

L'accélération  $\vec{a}(t)$  à tout instant n'est pas propre au corps, mais résulte de la force totale externe  $\vec{F}(t)$  appliquée sur le solide

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))^T = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))^T = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour un corps **solide sans rotation**, les lois de Newton s'appliquent à tous les points  $\vec{r}_i$  du solide

$$\vec{v}_i(t) = \vec{v}(t)$$

$$\vec{a}_i(t) = \vec{a}(t)$$

qui ont tous les mêmes vitesses et accélérations.

La position relative  $\vec{r}_{j,i}(t)$  d'un point  $j$  du solide par rapport à un autre point  $\vec{r}_i(t)$  étant fixe, la trajectoire de tous les points peut être calculée en utilisant

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{r}_{j,i}(t_0)$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

La première loi (principe de l'inertie) et la seconde loi de Newton se résument à

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

si aucune force n'est appliquée sur l'objet, alors

$$m \vec{a}(t) = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(m\vec{v}(t))}{dt} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = 0$$

et la vitesse (ou la quantité de mouvement  $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$ ) demeure constante.

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Forme générale de la 2<sup>e</sup> loi de Newton:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

Avec  $\vec{p} = m\vec{v}$

Si la masse est constante :

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\vec{a}$$

Si la masse varie dans le temps:  $m(t)$

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{d(m(t)\vec{v}(t))}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt} \vec{v}(t)$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

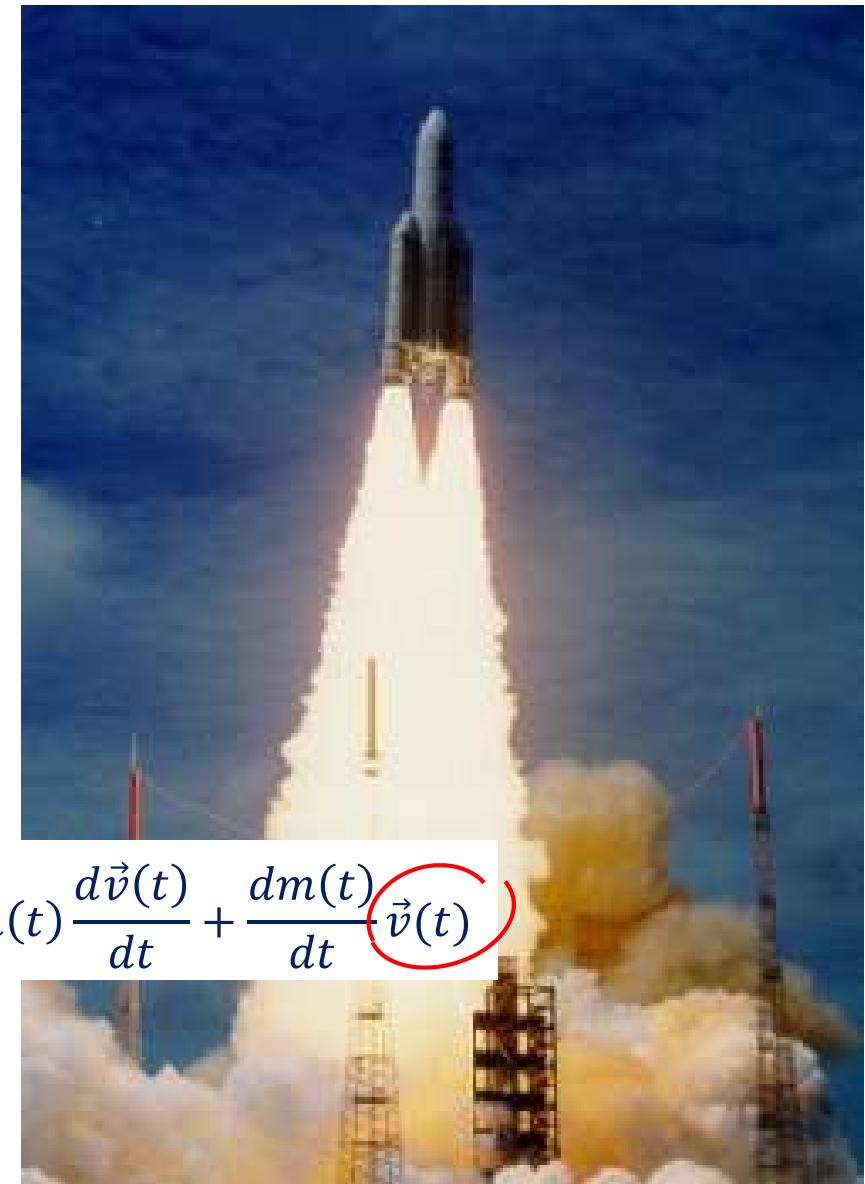
Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions



$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \frac{d(m(t)\vec{v}(t))}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t)$$



# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Forme générale de la 2<sup>e</sup> loi de Newton:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \quad \longrightarrow \quad \vec{F}(t)dt = d\vec{p}(t)$$

Entre les instants  $t$  et  $t+dt$ :

Système: fusée de masse  $m$  + gaz de masse  $dm$  (éjecté pendant un intervalle de temps  $dt$ )

système	Fusé de masse $m(t)$	Gaz éjecté de masse $dm$
Vitesse à l'instant $t$	$\vec{v}$	$\vec{v}$
Vitesse à l'instant $t+dt$	$\vec{v} + d\vec{v}$	$\vec{v}_{gaz}$

$$\vec{F}(t)dt = m(t)d\vec{v} + dm (\vec{v}_{gaz} - \vec{v})$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

$$\vec{F}(t) = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{dm(t)}{dt} \vec{u}(t)$$

avec  $\vec{u}(t) = \vec{v}_{gaz} - \vec{v}$

$$m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(t) - \left| \frac{dm(t)}{dt} \right| \vec{u}(t)$$

 Force de propulsion

$$\vec{F}(t)dt = m(t)d\vec{v} + dm (\vec{v}_{gaz} - \vec{v})$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Autres concepts de dynamique utiles.

- L'énergie transférée à un corps par une force  $\vec{F}_a$  appliquée sur une distance  $L$  suivant le parcours  $d\vec{l}$  est donnée par

$$E = \int_0^L \vec{F}_a \cdot d\vec{l}$$

- La variation  $\Delta\vec{p}$  de quantité de mouvement d'un corps subissant une force  $\vec{F}(t)$  pendant une période de temps  $\Delta t$  (impulsion  $\vec{J}$ ):

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}(t) dt = \int_0^{\Delta t} (F_x(t), F_y(t), F_z(t))^T dt$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Mouvement de rotation.

Les lois de Newton sont insuffisantes pour décrire la dynamique des solides en rotation autour d'un point et il faut introduire des lois supplémentaires qui peuvent être vues comme une généralisation des lois de Newton.

Lois reliées au mouvement de rotation.

1. Si aucun moment de force n'est appliqué sur un corps, le corps conservera son mouvement de rotation autour d'un point.
2. L'accélération angulaire (autour d'un axe) d'un corps dépend du moment de force (par rapport à cet axe) agissant sur le corps.

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

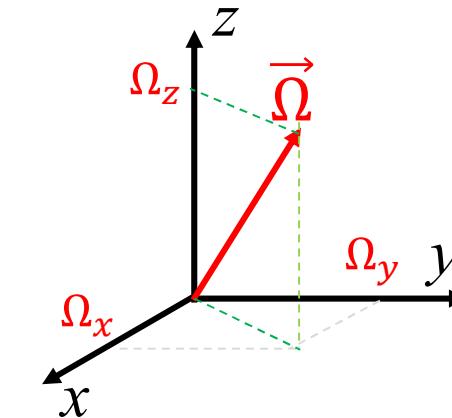
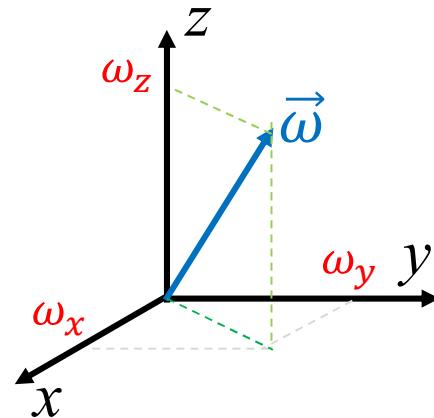
Moment d'inertie

Conclusions

Mouvement de rotation est caractérisé par:

- Vecteur position angulaire (rapporté à la position angulaire initiale):

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} \Omega_x(t) \\ \Omega_y(t) \\ \Omega_z(t) \end{pmatrix} = |\vec{\Omega}(t)| \hat{u}(t)$$



# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Mouvement de rotation est caractérisé par:

□ Vecteur position angulaire :

$$\Delta \vec{\Omega}(t) = \vec{\Omega}(t) - \vec{\Omega}(t_0) = \begin{pmatrix} \Delta\Omega_x(t) \\ \Delta\Omega_y(t) \\ \Delta\Omega_z(t) \end{pmatrix} = |\Delta \vec{\Omega}(t)| \hat{u}(t)$$

□ Vecteur vitesse angulaire :

$$\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} = \frac{d\Delta \vec{\Omega}(t)}{dt}$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Finalement, on peut aussi définir l'accélération angulaire  $\vec{\alpha}(t)$  rad/s<sup>2</sup>)

$$\vec{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_x(t) \\ \alpha_y(t) \\ \alpha_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d^2\Delta\vec{\Omega}(t)}{dt^2}$$

qui dépend du moment de force (par rapport à cet axe) agissant sur le corps.



$\Delta\vec{\Omega}(t)$ ,  $\vec{\omega}(t)$  et  $\vec{\alpha}(t)$  sont les mêmes pour tous les points du solide.

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Si un solide subi une rotation, la position (à l'instant  $t$ ) d'un point  $j$  par rapport à un point de référence  $i$  est:

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \mathbf{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

Et sa position angulaire est donnée par :

$$\vec{\Omega}_j(t) = \vec{\Omega}_j(t_0) + \Delta\vec{\Omega}(t) = \mathbf{R}(t)\vec{\Omega}_j(t_0)$$

Donc, ce qui nous intéresse principalement c'est la matrice  $\mathbf{R}(t)$ , pas  $\Delta\vec{\Omega}(t)$ . Il serait donc intéressant de remplacer l'équation différentielle pour la vitesse angulaire en fonction de la dérivée de la position angulaire par une équation différentielle pour la matrice de rotation.

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

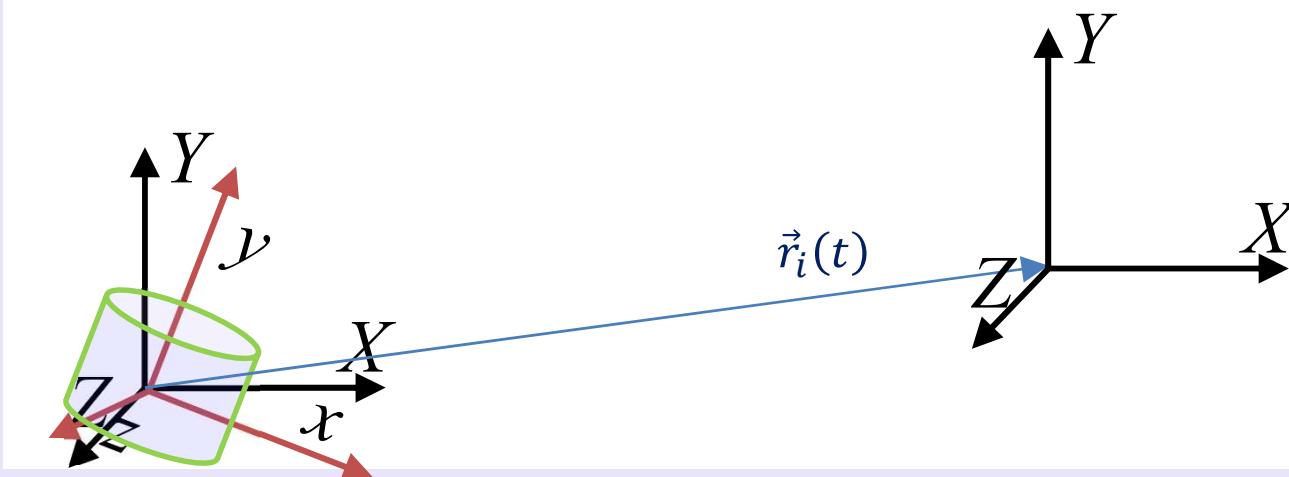
Moment d'inertie

Conclusions

Si un solide subi une rotation, la position (à l'instant  $t$ ) d'un point  $j$  par rapport à un point de référence  $i$  est:

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \mathbf{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_i(t) + \mathbf{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$



# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Si un solide subi une rotation, la position (à l'instant  $t$ ) d'un point  $j$  par rapport à un point de référence  $i$  est:

$$\vec{r}_{j,i}(t) = \mathbf{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\vec{v}_{j,i}(t) = \frac{d\vec{r}_{j,i}(t)}{dt} = \frac{d(\mathbf{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0))}{dt} = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = ?$$

$$\vec{v}_{j,i}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{j,i}(t) = \vec{\omega} \times \mathbf{R}(t)\vec{r}_{j,i}(t_0)$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \vec{A} = \vec{\omega} \times (\mathbf{R}(t)\vec{A}) \quad \vec{A} \text{ vecteur quelconque}$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Je remplace le vecteur  $\vec{\omega}$  par une matrice  $\tilde{\omega}$  qui produit le même effet sur le vecteur  $\vec{A}$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \vec{A} = \tilde{\omega}(t) (\mathbf{R}(t) \vec{A}) = (\tilde{\omega}(t) \mathbf{R}(t)) \vec{A}$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t) \mathbf{R}(t)}$$

(Algèbre de Lie)

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \vec{A} = \tilde{\omega} \times (\mathbf{R}(t) \vec{A}) \quad \vec{A} \text{ vecteur quelconque}$$



# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{R}(t)$$

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Si on décide d'utiliser les quaternions au lieu des matrices de rotation, on pourra remplacer

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t) \mathbf{R}(t)$$

par

$$\frac{d\vec{\mathbf{R}}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{R}}(t) \vec{\omega}(t)$$

avec  $\vec{\omega}(t) = (0, \vec{\omega}(t))^T$  et  $\vec{\mathbf{R}}(t)$  le quaternion de rotation associé à la matrice de rotation  $\mathbf{R}(t)$ .

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

L'équation équivalente à la seconde loi de Newton pour les mouvements de rotation est

$$\vec{\tau}_{j,i}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}$$

où  $\vec{\tau}_{j,i}$  est le moment de force (torque en anglais) autour du point de rotation  $i$  résultant d'une force appliquée au point  $\vec{r}_j(t)$

$$\vec{\tau}_{j,i}(t) = (\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)) \times \vec{F}(t)$$

et  $\vec{L}(t)$  est le moment cinétique (angular momentum en anglais) qui est donné par

$$\vec{L}(t) = \mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t)$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

- $I$  est le moment d'inertie du solide (équivalent de la masse pour le mouvement de translation) pour une rotation autour du point  $\vec{r}_i$ .
- Le moment cinétique  $\vec{L}_{j,i}(t)$  d'un point de masse  $m_j$  par rapport à un point de référence  $\vec{r}_i$  est donné par

$$\vec{L}_{j,i}(t) = m_j \vec{r}_{j,i}(t) \times \vec{v}_{j,i}(t)$$

où  $\vec{r}_{ji}$  et  $\vec{v}_{ji}$  sont la position et la vitesse de la masse par rapport au point de référence.  $\vec{v}_{j,i}(t)$  est une vitesse de rotation pure, alors:

$$\vec{L}_{j,i}(t) = m_j \vec{r}_{j,i}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{j,i}(t))$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour un solide représenté par une distribution de masse autour du point  $\vec{r}_i$ , le moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}_i = \int_V \vec{r}_{m,i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{m,i}) dm = \int_V \rho(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}_i) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)) d^3 r$$

Les composantes de  $\vec{L}_i$  seront

$$L_{i,x} = I_{i,xx} \omega_x + I_{i,xy} \omega_y + I_{i,xz} \omega_z$$

$$L_{i,y} = I_{i,yx} \omega_x + I_{i,yy} \omega_y + I_{i,yz} \omega_z$$

$$L_{i,z} = I_{i,zx} \omega_x + I_{i,zy} \omega_y + I_{i,zz} \omega_z$$

Ceci permet de définir les composantes de  $\vec{I}_i$  via la relation

$$\vec{L}_i = \vec{I}_i \vec{\omega}$$

# Équations de la dynamique

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

$\mathbf{I}$ , le moment d'inertie par rapport au point  $\vec{r}_i = 0$  est défini comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \int_V \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(\vec{r}) d^3 r \end{aligned}$$

# Équations de la dynamique

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d(\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \mathbf{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$$

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

On peut aussi écrire l'équation du mouvement pour la rotation en fonction de l'accélération angulaire  $\vec{\alpha}$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d(\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \mathbf{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$$

Contrairement aux équations de Newton où on peut utiliser  $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$  lorsque la masse est constante, ici le problème est beaucoup plus compliqué:

- Même si la masse est constante, une rotation de l'objet modifiera en général les composantes individuelles de  $\mathbf{I}(t)$ . C'est donc un effet dont il faut tenir compte dans les équations du mouvement.
- Ainsi, seulement une partie du moment de force servira en général à donner une accélération angulaire à l'objet.

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d(\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \mathbf{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$$

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Comment évaluer  $\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$ ?

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d(\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \mathbf{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$$

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{I}(t_0)(\mathbf{R}(t))^{-1} = \mathbf{R}(t)\mathbf{I}(t_0)(\mathbf{R}(t))^T$$

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}\mathbf{I}(t_0)(\mathbf{R}(t))^T + \mathbf{R}(t)\mathbf{I}(t_0)\frac{d(\mathbf{R}(t))^T}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t) \mathbf{R}(t) \quad \text{et} \quad (\tilde{\omega}(t))^T = -\tilde{\omega}(t)$$

$$\frac{d(\mathbf{R}(t))^T}{dt} = -(R(t))^T \tilde{\omega}(t)$$

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d(\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t))}{dt} = \mathbf{I}(t)\vec{\alpha}(t) + \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t)$$

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

On obtient alors

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t) - \mathbf{I}(t)\tilde{\omega}(t)$$

Finalement

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t) = \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t) - \mathbf{I}(t)\tilde{\omega}(t)\vec{\omega}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t) = \tilde{\omega}(t)\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt}\vec{\omega}(t) = \tilde{\omega}(t)\vec{L}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t) = -\vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t)$$

L'équation différentielle à résoudre étant

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\mathbf{I}(t))^{-1}(\vec{\tau}(t) + \vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t))$$

# Équations de la dynamique

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\mathbf{I}(t))^{-1}(\vec{\tau}(t) + \vec{L}(t) \times \vec{\omega}(t))$$

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Notez que **si le moment d'inertie est proportionnel à la matrice identité ( $\mathbf{I}(t) = h(t)\mathbf{1}$ )**

Le moment cinétique  $\vec{L}(t)$  est parallèle à  $\vec{\omega}(t)$

L'équation différentielle à résoudre devient

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = (\mathbf{I})^{-1}(t)\vec{\tau}(t) = \frac{1}{h(t)}\vec{\tau}(t)$$

qui ressemble à l'équation de Newton.

De la même façon, si  $\vec{\omega}(t) = 0$  :

$$\vec{\alpha}(t) = (\mathbf{I})^{-1}(t)\vec{\tau}(t)$$

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Définition du centre de masse.

- Le centre de masse d'un objet est le point de l'objet sur lequel aucune force ne produit de mouvement de rotation de l'objet sur lui même.

## Pour un objet ponctuel.

- Le centre de masse  $\vec{r}_c$  correspond à sa position  $\vec{r}$

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour les objets de dimensions finies, définir la position du centre de masse est plus complexe.

- Il faut choisir la position où aucun mouvement de rotation n'est induit, quelle que soit la force appliquée.
- Si on suppose que l'objet est constitué de particules de masse  $dm$  distribuées dans un volume  $\mathcal{V}$ , le centre de masse correspond à

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_m \vec{r} dm$$

$$dm = \rho(\vec{r}) d^3 r$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3 r$$

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour un objet non uniforme que l'on peut sous-diviser en  $n = 1, N$  sous-éléments  $V_n$  de masse volumique  $\rho_n(\vec{r})$  on pourra écrire

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \vec{r} \rho_n(\vec{r}) d^3 r$$

$$m = \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \rho_n(\vec{r}) d^3 r$$

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Sachant que

$$m_n = \int_{V_n} \rho_n(\vec{r}) d^3 r$$
$$\vec{r}_{n,c} = \frac{1}{m_n} \int_{V_n} \vec{r} \rho_n(\vec{r}) d^3 r$$

On aura alors

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_{c,n}$$

Ici, on somme la contribution du centre de masse de chaque solide pondérée par sa masse.

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Volumes et centre de masse pour solide de géométrie arbitraire.

- Il existe plusieurs techniques et algorithmes pour évaluer le volume et le centre de masse de solides pour les applications multimédias.
- Une des méthodes les plus populaires consiste à décomposer premièrement le solide en polyèdres triangulaires, à déterminer le volume de chaque polyèdre et à sommer le tout.
- Cette méthode est aussi efficace si l'on désire évaluer le centre de masse de l'objet.

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Le principe général est le suivant.

- 1) Premièrement, on divise le solide à évaluer en un ensemble de sous régions pleines.
- 2) Les frontières de ces sous-régions, qui peuvent être droites ou curvilignes, sont ensuite simulées en utilisant une série de triangles droits.
- 3) Après avoir identifié la position en 3-D de chacun des sommets de ces triangles, on procède à l'identification des surfaces externes en associant à chaque triangle un ensemble de trois sommets.
- 4) L'ordre des sommets est alors important, car il faut décrire le volume à l'intérieur du solide.

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

On procède de la manière suivante.

- 1) On choisit premièrement pour chaque triangle  $i$  un sommet de départ arbitraire (le vecteur  $\vec{a}_i$ ).
- 2) On ordonne ensuite les deux autres sommets ( $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$ ) de façon à ce qu'ils soient classés dans un ordre antihoraire lorsque la surface est vue de l'extérieur du solide.

$$V = \sum_{i=1}^{N_S} dV_i \quad \text{avec} \quad dV_i = \frac{\vec{a}_i \cdot (\vec{b}_i \times \vec{c}_i)}{6}$$

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

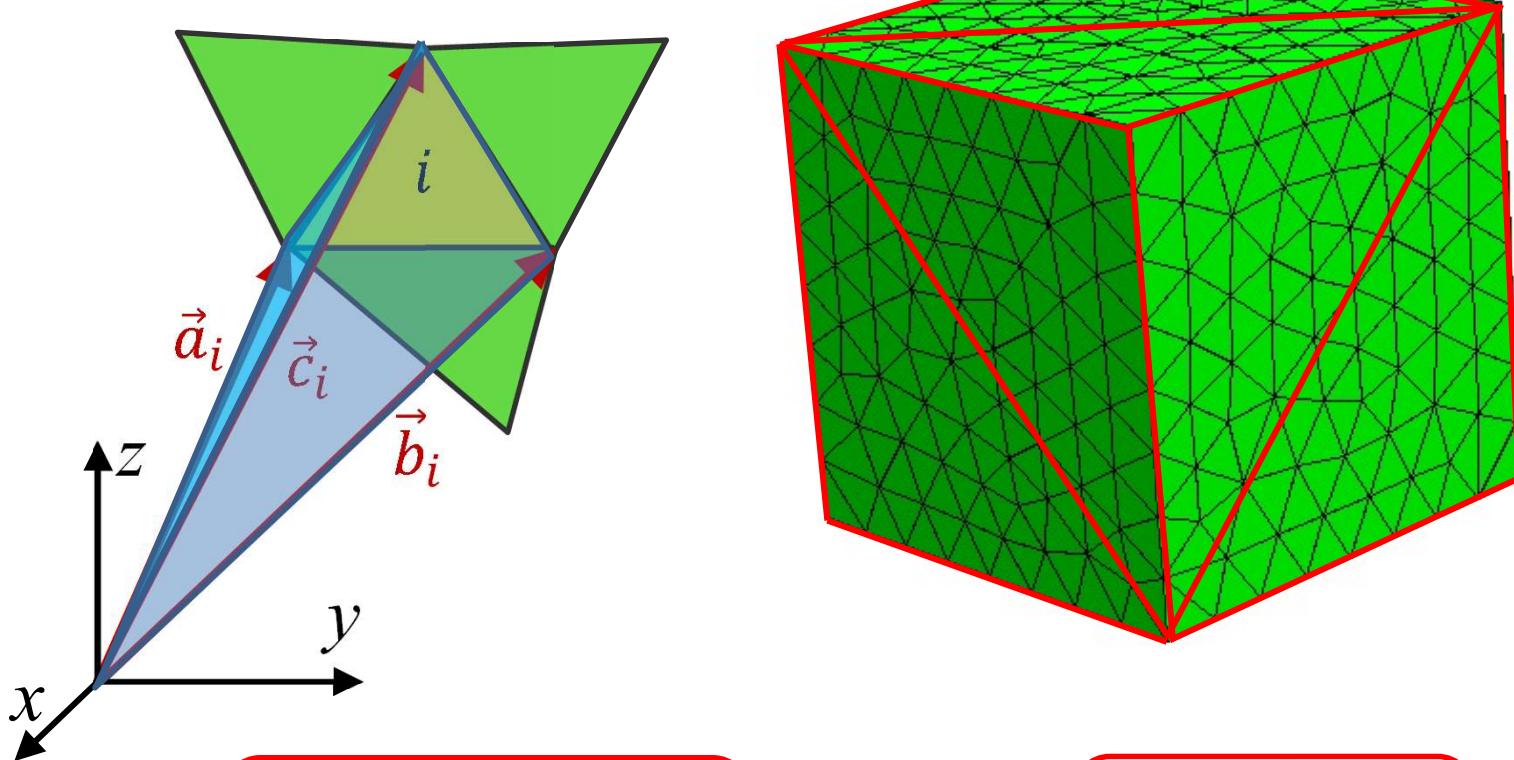
Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions



$$dV_i = \frac{\vec{a}_i \cdot (\vec{b}_i \times \vec{c}_i)}{6}$$

$$V = \sum_{i=1}^{N_S} dV_i$$

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

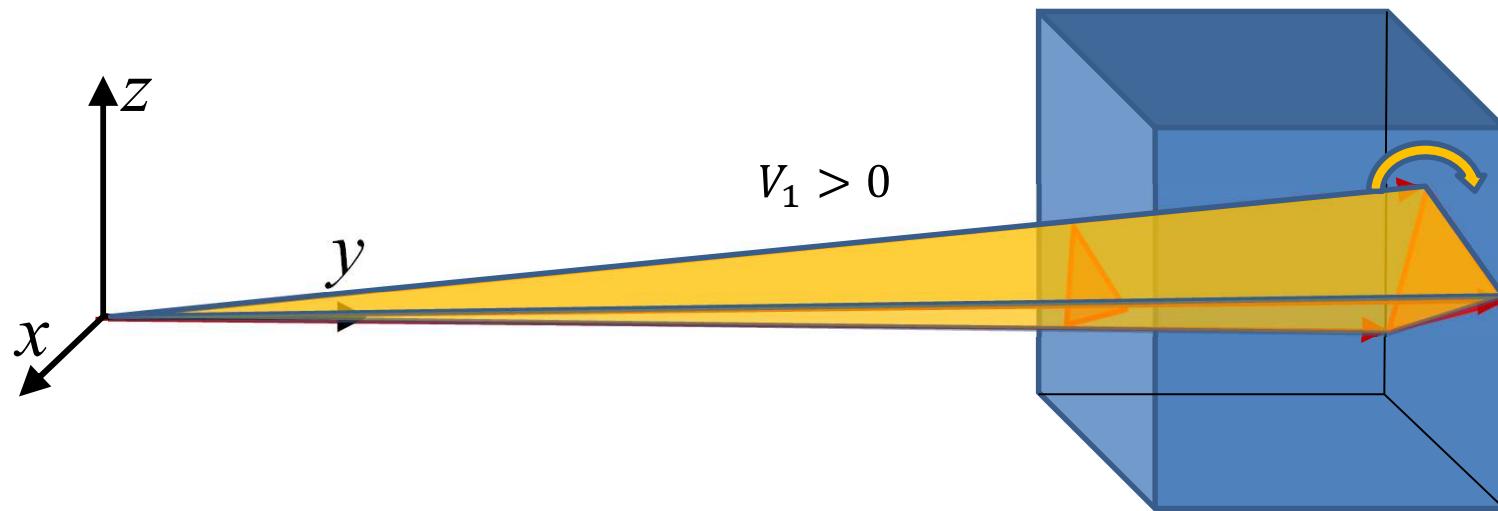
Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions



# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

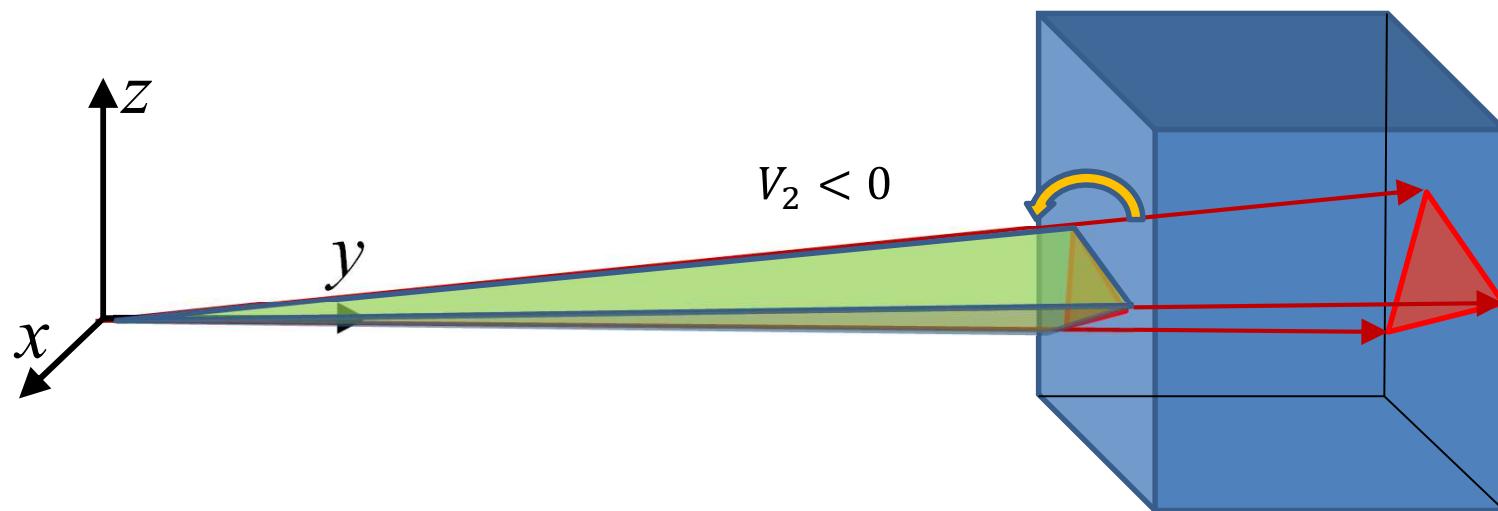
Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions



# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

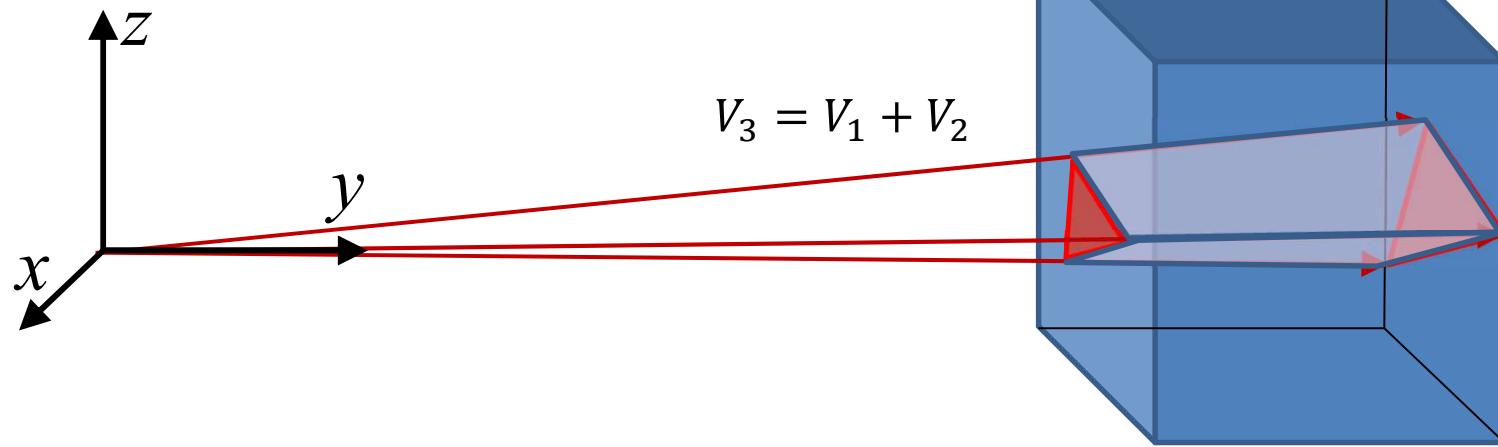
Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions



## Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

On peut aussi utiliser cette information afin de déterminer le centre de masse de l'objet en supposant qu'il a une masse volumique uniforme

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_s} \vec{d}_i dV_i$$
$$\vec{d}_i = \frac{\vec{a}_i + \vec{b}_i + \vec{c}_i}{4}$$

$\vec{d}_i$  correspondant au centre de masse d'un polyèdre dont le quatrième sommet se situe à l'origine.

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Cet algorithme fonctionne seulement si l'objet satisfait la relation d'Euler suivante

$$\text{nombre de sommets} + \text{nombre de faces} - \text{nombre d'arêtes} = 2$$

# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

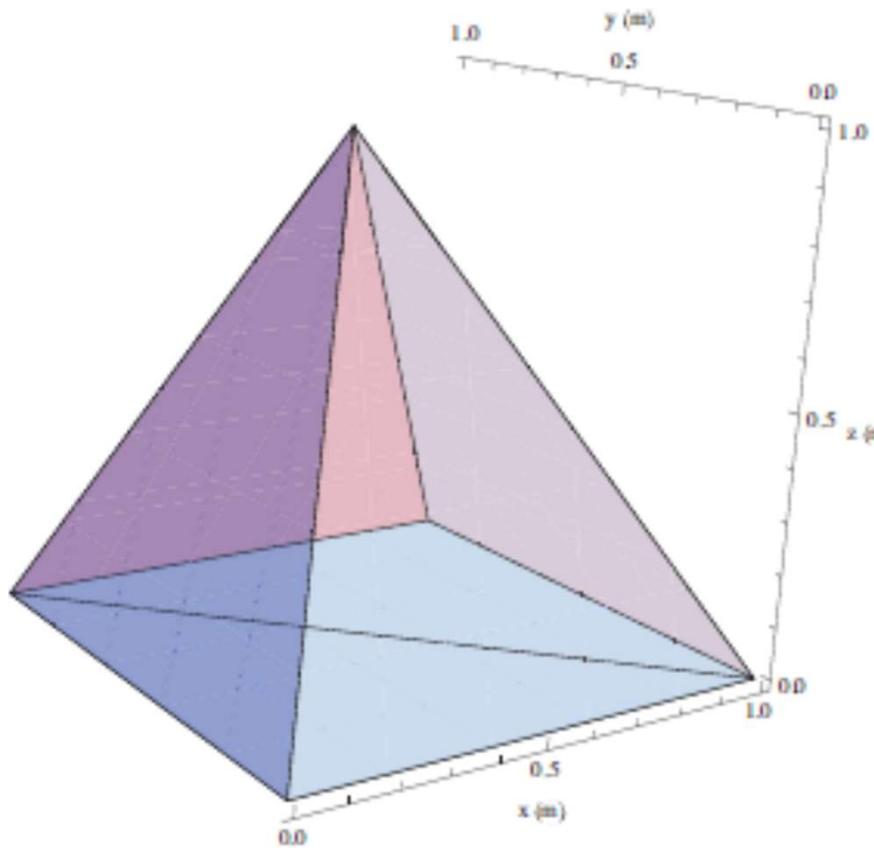
Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Exemple:

Volume et centre de masse d'une pyramide déformée



Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

**Centre de masse**

Moment d'inertie

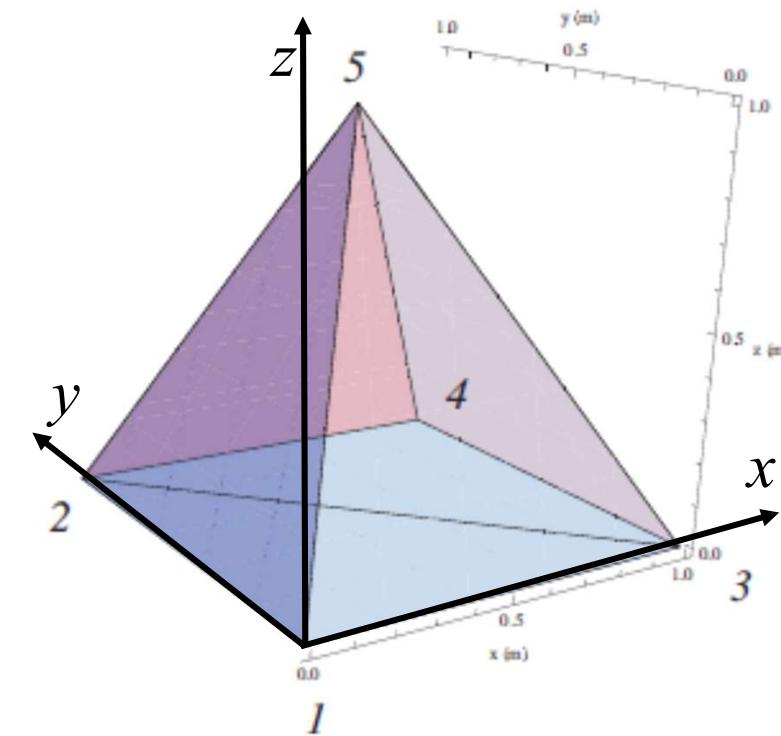
Conclusions

# Centre de masse

## Exemple:

### Volume et centre de masse d'une pyramide déformée

Sommet	$x$ (m)	$y$ (m)	$z$ (m)
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0
3	1.0	0.0	0.0
4	1.0	1.0	0.0
5	0.2	0.2	1.0



# Centre de masse

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

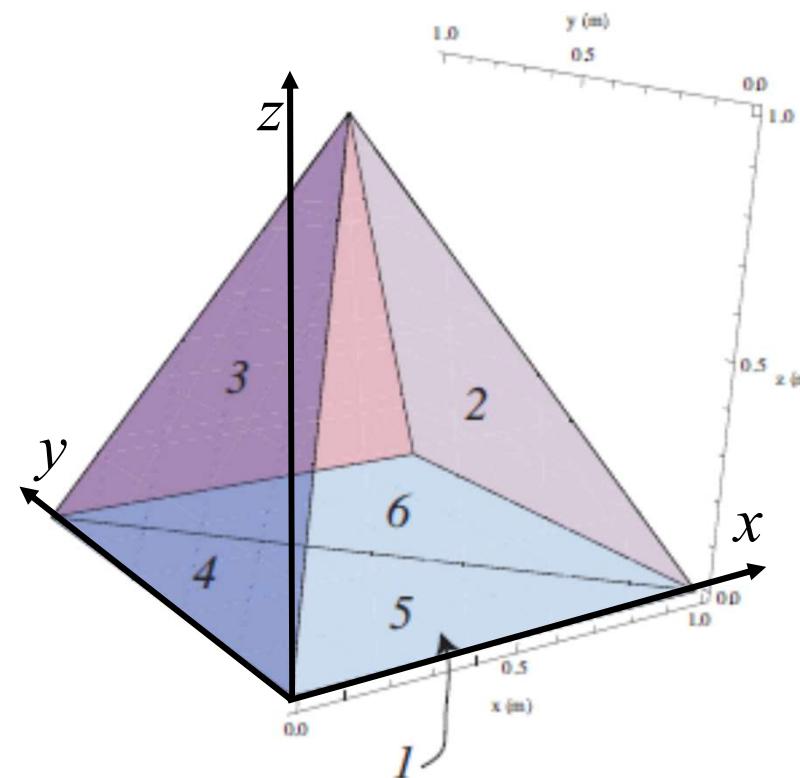
Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Exemple:

Volume et centre de masse d'une pyramide déformée



# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

**Moment d'inertie**

Conclusions

Pour les solides, le moment d'inertie est utilisé dans les équations du mouvement pour la rotation.

- Le moment d'inertie par rapport au centre de masse représente la distribution de masse du corps autour d'un axe de rotation passant par ce centre de masse  $\vec{r}_c$ .
- En géométrie cartésienne, on peut définir le moment d'inertie  $I_c$  comme étant un tenseur représentant l'inertie de l'objet par rapport à une rotation autour des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

$$I_c = \begin{pmatrix} I_{c,xx} & I_{c,xy} & I_{c,xz} \\ I_{c,yx} & I_{c,yy} & I_{c,yz} \\ I_{c,zx} & I_{c,zy} & I_{c,zz} \end{pmatrix} = \int_V \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(\vec{r}) d^3 r$$

en supposant le centre de masse localisé à l'origine.

# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

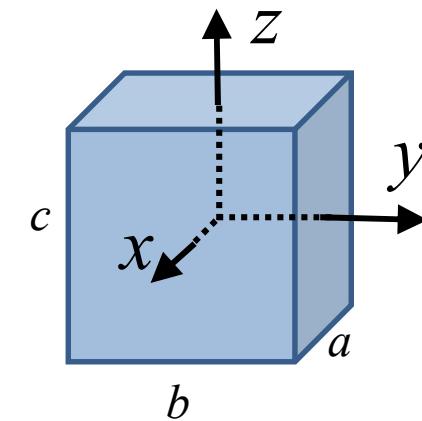
## Moments d'inertie de quelques géométries simples:

Parallélépipède dont les axes sont parallèles aux axes  $x$  (longueur  $a$ ),  $y$  (largeur  $b$ ) et  $z$  (hauteur  $c$ ) par rapport à son centre de masse

$$I_{c,xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_{c,y\,y} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$I_{c,z\,z} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$



Les termes non diagonaux sont nuls.

# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

## Moments d'inertie de quelques géométries simples:

### Sphères de rayon $r$ par rapport à son centre de masse

#### Pleine

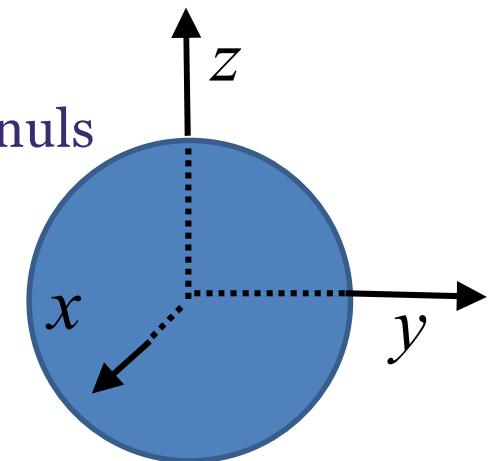
$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = I_{c,zz} = \frac{2m}{5}r^2$$

Les termes hors de la diagonale sont nuls

#### Creux

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = I_{c,zz} = \frac{2m}{3}r^2$$

Les termes hors de la diagonale sont nuls.



# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

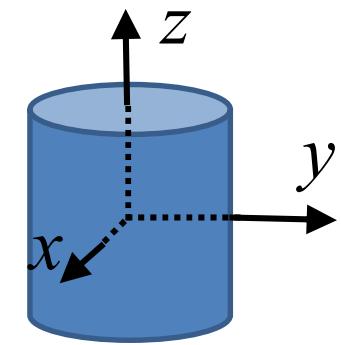
## Moments d'inertie de quelques géométries simples:

**Cylindre** de rayon  $r$  et de longueur  $l$  aligné avec l'axe des  $z$  par rapport à son centre de masse

□ Plein

$$I_{c,zz} = \frac{m}{2} r^2$$

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m}{4} r^2 + \frac{m}{12} l^2$$



Les termes hors de la diagonale sont nuls.

□ Creux

$$I_{c,zz} = m r^2$$

$$I_{c,xx} = I_{c,yy} = \frac{m}{2} r^2 + \frac{m}{12} l^2$$

Les termes hors de la diagonale sont nuls.

# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Translation des axes (moment d'inertie par rapport à un point arbitraire).

On supposera que le moment d'inertie par rapport au centre de masse est donné par  $\mathbf{I}_c$ .

Le moment d'inertie par rapport au point  $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$  devient

$$\mathbf{I}_d = \mathbf{I}_c + m \begin{pmatrix} d_{c,y}^2 + d_{c,z}^2 & -d_{c,x}d_{c,y} & -d_{c,x}d_{c,z} \\ -d_{c,y}d_{c,x} & d_{c,x}^2 + d_{c,z}^2 & -d_{c,y}d_{c,z} \\ -d_{c,z}d_{c,x} & -d_{c,z}d_{c,y} & d_{c,x}^2 + d_{c,y}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_c + m\mathbf{T}(\vec{d}_c)$$

$$\text{avec } \vec{d}_c = (d_{c,x}, d_{c,y}, d_{c,z}) = \vec{d} - \vec{r}_c$$

On voit immédiatement que même si la matrice  $\mathbf{I}_c$  est diagonale, la matrice  $\mathbf{I}_d$  ne l'est pas nécessairement. Cependant, elle demeure symétrique, car  $\mathbf{T}(\vec{d}_c)$  est symétrique.

# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Rotations des axes (moments d'inertie par rapport à des directions arbitraires).

- Les moments d'inertie des parallélépipèdes et des cylindres sont donnés par rapport à un système d'axes qui leur est propre (en général les axes de référence de l'objet).
- Si le système d'axes de l'observateur (système 2) correspond à une rotation  $R^{2 \leftarrow 1}$  par rapport au système de référence du solide (système 1), il faut aussi transformer les moments d'inertie de façon à refléter cette rotation (comme on l'a déjà vu)

$$I^2 = R^{2 \leftarrow 1} I^1 (R^{2 \leftarrow 1})^T$$

# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Les relations de transformation décrites ci-dessus sont utiles lorsqu'il est temps de reconstruire le moment d'inertie associé à un solide composé de différentes pièces, car il permet de ramener tous les solides dans un système d'axes parallèles, le moment d'inertie étant calculé par rapport au centre de masse commun (et de calculer correctement le moment d'inertie global du solide).

# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour calculer correctement le moment d'inertie du solide composé autour de son centre de masse, il faut donc procéder comme suit :

1. déterminer la masse totale du solide composé ;
2. déterminer la position du centre de masse du solide composé ;
3. déterminer le moment d'inertie  $I_{i,c}$  de chacun des éléments  $i$  du solide composé par rapport au centre de masse et aux axes locaux de cet élément ;

# Moment d'inertie

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

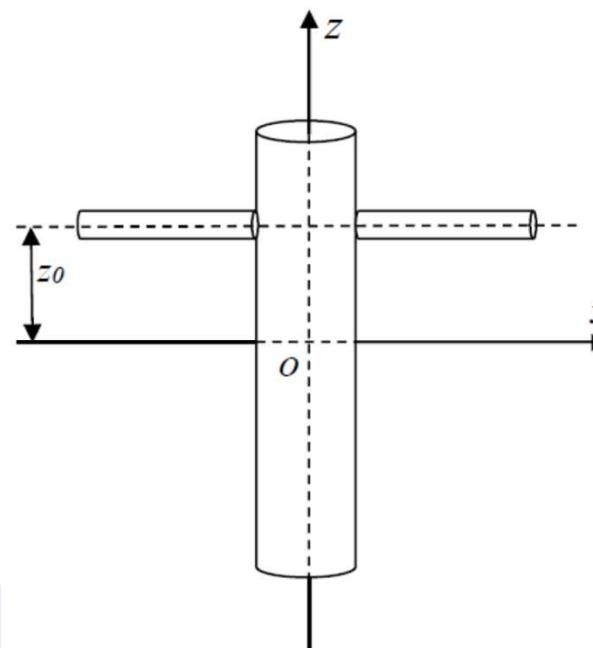
4. si requis, tourner le moment d'inertie ( $I_{i,c}^R$ ) de façon à ce que les axes locaux de chaque élément du solide soient parallèles aux axes du système du laboratoire ;
5. procéder à une translation du moment d'inertie ( $I_{i,c}^{RT}$ ) dans les axes du laboratoire du point  $\vec{r}_{i,c}$  vers  $\vec{r}_c$  ;
6. sommer les moments d'inertie, après rotation et translation, de chacune des parties du solide

$$\mathbf{I}_c = \sum_i \mathbf{I}_{i,c}^{RT},$$

# Moment d'inertie: Exemple

## Question 1. Patineuse artistique (20 points)

Une patineuse artistique fait des pirouettes sur la glace en tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega} = (0, 0, 5)$  rad/s. Lorsque la patineuse écarte les bras, son corps peut être assimilé à un assemblage de trois cylindres pleins comme illustré sur la figure ci-dessous: un cylindre principal vertical  $C_p$  représentant à la fois les jambes, le torse et la tête et deux autres petits cylindres horizontaux  $C_g$  et  $C_d$  représentant les bras gauche et droit. Le cylindre principal à une masse  $M = 50$  kg, une hauteur  $H = 1.8$  m et un rayon  $R = 0.2$  m. Les deux cylindres représentant les bras sont identiques et chacun d'eux a une masse  $m = 5$  kg, une longueur  $h = 0.6$  m et un rayon  $r = 0.06$  m. On choisit le centre de masse du cylindre principal comme origine des axes et le plan contenant les centres de masse des trois cylindres comme plan  $xz$ . La position verticale des deux bras est  $z_0 = 0.6$  m.



# Moment d'inertie

## Question 1. Patineuse artistique (20 points)

Une patineuse artistique fait des pirouettes sur la glace en tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega} = (0, 0, 5)$  rad/s. Lorsque la patineuse écarte les bras, son corps peut être assimilé à un assemblage de trois cylindres pleins comme illustré sur la figure ci-dessous: un cylindre principal vertical  $C_p$  représentant à la fois les jambes, le torse et la tête et deux autres petits cylindres horizontaux  $C_g$  et  $C_d$  représentant les bras gauche et droit. Le cylindre principal à une masse  $M = 50$  kg, une hauteur  $H = 1.8$  m et un rayon  $R = 0.2$  m. Les deux cylindres représentant les bras sont identiques et chacun d'eux a une masse  $m = 5$  kg, une longueur  $h = 0.6$  m et un rayon  $r = 0.06$  m. On choisit le centre de masse du cylindre principal comme origine des axes et le plan contenant les centres de masse des trois cylindres comme plan  $xz$ . La position verticale des deux bras est  $z_0 = 0.6$  m.

- (a) **(3 points)** Déterminer la position  $\vec{r}_c$  du centre de masse de la patineuse (système formé par les 3 cylindres).
- (b) **(10 points)** Déterminer le moment d'inertie de la patineuse par rapport à son centre de masse.
- (c) **(2 points)** Déterminer le moment cinétique  $\vec{L}$  de la patineuse.
- (d) **(5 points)** À un instant  $t_0$ , la patineuse décide de toucher la glace avec la pointe d'un de ses patins afin d'arrêter de tourner sur elle-même. Ceci produit un moment de force constant  $\vec{\tau} = (0, 0, -0.75)$  Nm qui ralentit son mouvement de rotation jusqu'à l'arrêt complet à l'instant  $t_1$ . Quel est le temps nécessaire  $\Delta t = t_1 - t_0$  à la patineuse pour s'arrêter de tourner.

# Conclusions

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Pour étudier la trajectoire d'un solide, il faut connaître :  
les équations du mouvement pour le centre de masse

$$d\vec{v}_c(t)/dt = \vec{a}_c(t) = \vec{F}(t)/m$$

$$d\vec{r}_c(t)/dt = \vec{v}_t(t)$$

les équations du mouvement de rotation du solide

$$d\vec{\omega}(t)/dt = (\mathbf{I}(t))^{-1} [\vec{\tau}(t) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\mathbf{I}(t)\vec{\omega}(t)]$$

$$d\mathbf{R}(t)/dt = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\mathbf{R}(t)$$

avec  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)$  la matrice correspondant au produit vectoriel de  $\vec{\omega}(t)$  avec un vecteur arbitraire.

# Conclusions

Objets ponctuels et étendus

Matrices de rotation  
Quaternions et rotation

Équations de la dynamique

Centre de masse

Moment d'inertie

Conclusions

Dans le prochain chapitre, nous verrons:

1. comment résoudre les équations de la cinématique des particules ;
2. comment résoudre les équations de la cinématique des solides ;
3. des méthodes robustes pour résoudre numériquement des équations différentielles ordinaires ;
4. les problèmes associés aux solutions numériques de problèmes de cinématique lorsque des collisions se produisent.