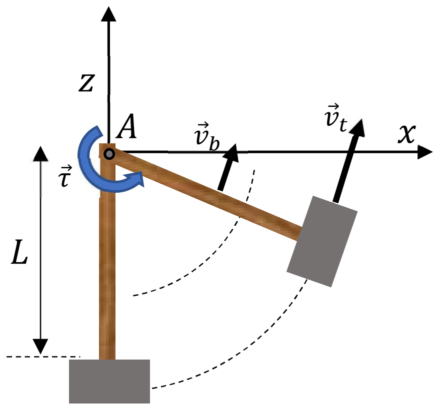
Le marteau

On lance un marteau à l'aide d'un dispositif qui exerce un moment de force $\vec{\tau} = -20\,\hat{y}$ (N × m) sur l'extrémité A de son bras (manche). Le marteau est initialement suspendu verticalement par son extrémité A. On déclenche alors le moment de force qui le pivote autour du point A. Après une durée $\Delta t = 150$ ms , il est complètement relâché.

Le marteau est composé d'une tête en métal de forme parallélépipède (plein) de masse $m_t = 1.1$ kg et de dimensions 4x4x8 cm^3 et d'un bras cylindrique en bois de masse $m_b = 0.150$ kg de longueur $L = 30$ cm et de diamètre négligeable.

a) Déterminer la distance d_{CM} entre le centre de masse du marteau et son extrémité A ainsi que le moment d'inertie du marteau par rapport à l'axe y.
b) Quelle est le vecteur vitesse angulaire du marteau à l'instant où celui-ci est lâché. Négligez la force du poids pendant l'application du moment de force.
c) Quelles est le vecteur vitesse du centre de masse du marteau à l'instant où celui-ci est lâché?



Solution :

a) *Déterminer la distance d_{CM} entre le centre de masse du marteau et son extrémité A ainsi que le moment d'inertie du marteau par rapport à l'axe y.*

Le centre de masse se situe sur l'axe du marteau. Sa distance par rapport au point A est :

$$d_{cm} = \frac{m_t d_t + m_b d_b}{m_t + m_b} = 0.3\, m$$

où d_t et d_b sont les distances séparant le point A des centres de masse de la tête et du bras.

$$d_{cm} = \frac{1.1 \times (0.3 + 0.02) + 0.15 \times 0.15}{1.1 + 0.15} = 0.3\, m$$

Le moment d'inertie autour de l'axe *y* est donné par :

$$I = \frac{m_t}{12}(L_t^2 + l_t^2) + m_t d_t^2 + \frac{m_b}{12}(L^2) + m_b \frac{L^2}{4}$$

où L_t et l_t sont la longueur et la largeur de la tête. $I = 0.14 \text{ kg} \times \text{m}^2$.

b) *Quelle est la vitesse angulaire du marteau à l'instant où celui-ci est lâché. Négligez la force du poids pendant l'application du moment de force.*

L'accélération angulaire est :

$$\vec{\alpha} = I^{-1}\left((\vec{\tau}) - \frac{dI}{dt}\vec{\omega}\right)$$

Comme $\vec{\omega}$ reste dans la direction y alors $\frac{dI}{dt} = 0$

D'où

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\tau}}{I} = -\frac{20}{0.14}\hat{y}$$

$$\vec{\omega}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \vec{\alpha}\, dt = \vec{\alpha}\, \Delta t = -21.43\hat{y} \text{ rad/s}$$

c) *Quelles est le vecteur vitesse du centre de masse du marteau à l'instant où celui-ci est lâché?*

La position angulaire $\Delta\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\alpha}(\Delta t)^2 = 1.607 \text{ rad}$

$\Delta\vec{\Omega}$ est l'angle entre les vitesse de chaque point du marteau et l'axe *x*. la vitesse du centre de masse du marteau est :

$$\vec{v}_{CM} = |\omega| d_{CM}(\cos(\Delta\Omega)\hat{x} + \sin(\Delta\Omega)\hat{z})$$

$$\vec{v}_{CM} = (-0.2327\hat{x} + 6.425\hat{z}) \text{ m/s}$$