



POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

PHS 4700
Physique pour les applications multimédia

Chapitre 5 — Collisions

Djamel Seddaoui

Département de Génie Physique

Table des matières

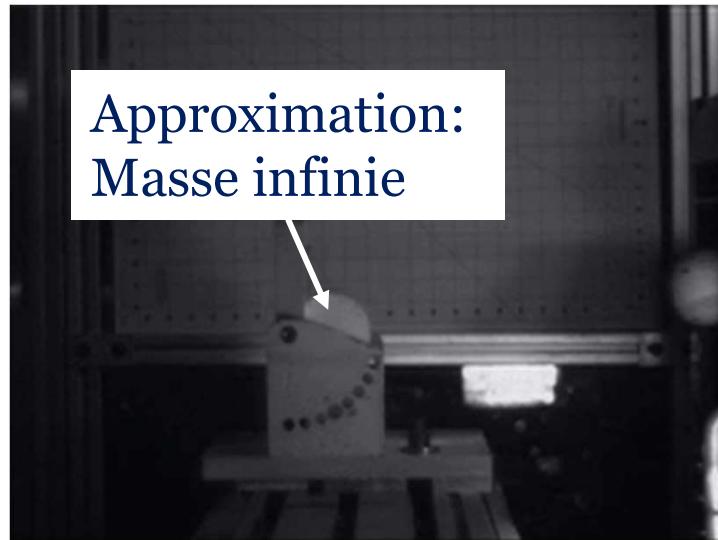
Dynamique des collisions
Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Collision sphères et solides réguliers
Conclusions

[Dynamique des collisions](#)
[Méthode des forces](#)
[Méthode des conditions initiales](#)
[Détection des collisions](#)
[Collision sphères et solides réguliers](#)
[Conclusions](#)

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Collision sphères et solides réguliers
Conclusions



Approximation:
Masse infinie



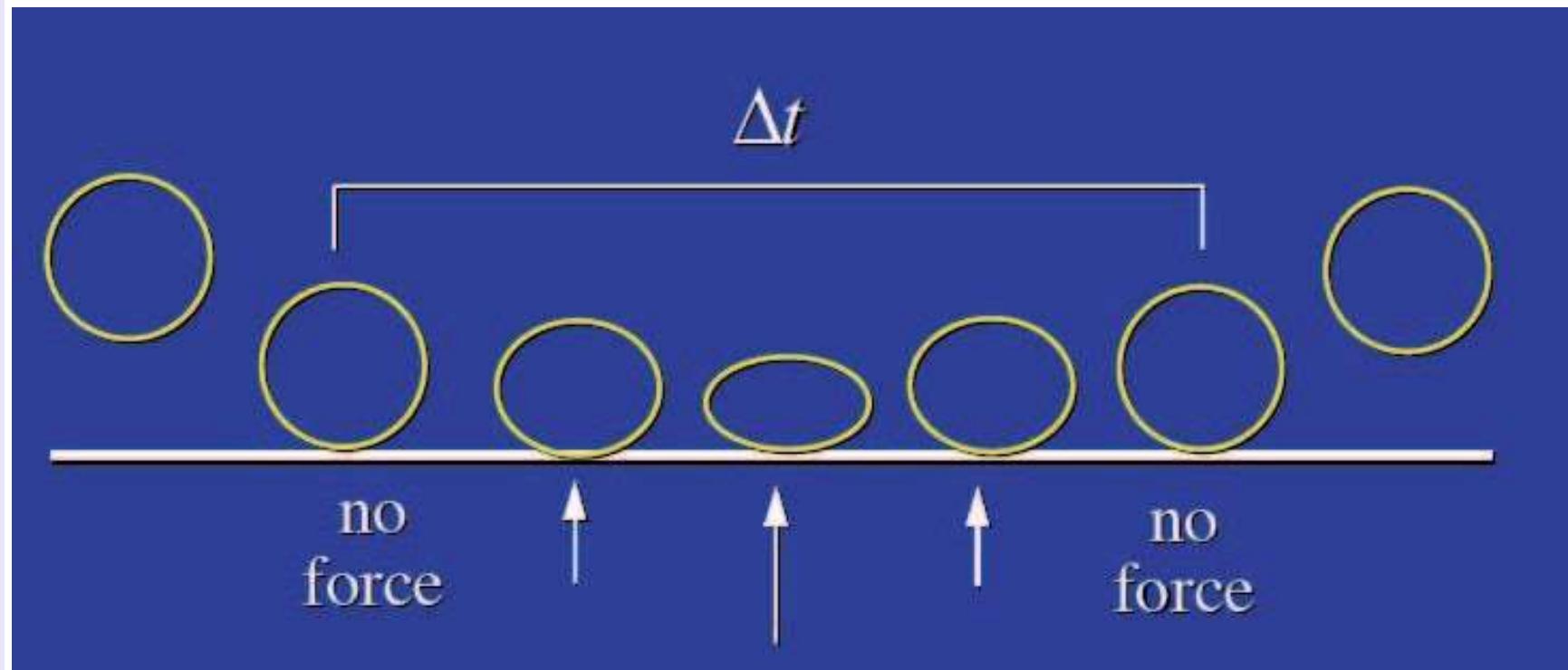
Collision d'un objet avec un autre objet fixe

Collision d'un objet avec un autre objet mobile

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Collision sphères et solides réguliers
Conclusions

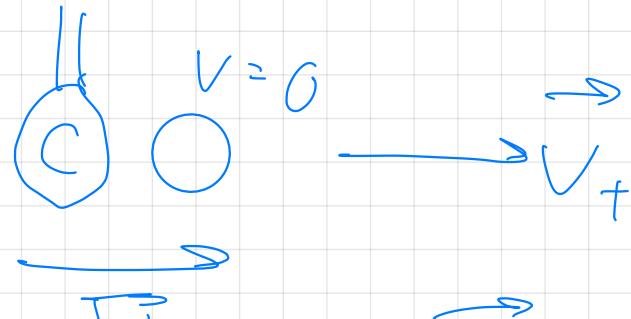


Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales
Détection des collisions
Collision sphères et solides réguliers
Conclusions



https://thumbs.gfycat.com/CoolCheerfulBlackrhino-size_restricted.gif



$$\vec{V} \rightarrow \vec{V}_b(t_+) = -\vec{V}_{w_c}(t_i)$$

$$\vec{V}_b(t_+) - \vec{V} = -(\vec{V}_b(t_{i_j}) - \vec{V})$$

$$\vec{V}_b(t_f) = 2\vec{V}$$

Dynamique des collisions

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

L'étude des collisions consiste à déterminer les forces impliquées et résoudre les équations du mouvement pour obtenir la trajectoire des solides durant la collision.

Ceci implique :

- de tenir compte du déplacement linéaire et de rotation des solides ;
- de considérer le mouvement couplé des solides puisque chaque solide peut influencer le comportement de tous les autres.

Dynamique des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

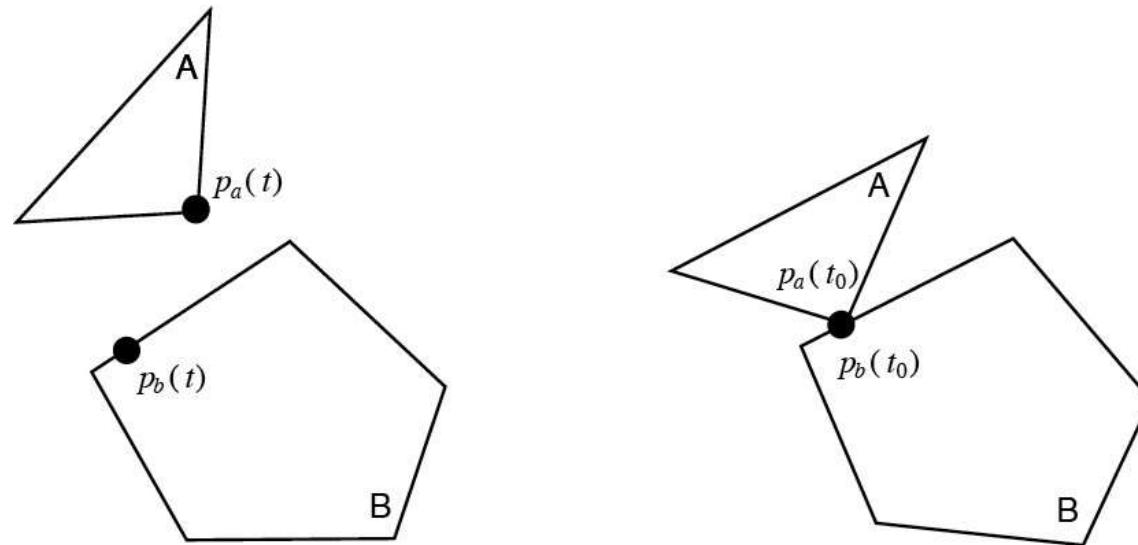
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Deux solides de formes arbitraires en mouvement qui entrent en collision.



Dynamique des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et](#)

[solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Dans ce cours, nous aborderons deux méthodes de traitement des collisions:

- **La méthode des forces:** analyse dynamique des forces de répulsion entre les objets impliqués dans la collision
- **La méthode des conditions initiales:** qui s'intéresse à l'avant et l'après de la collision et non à la collision elle-même.

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

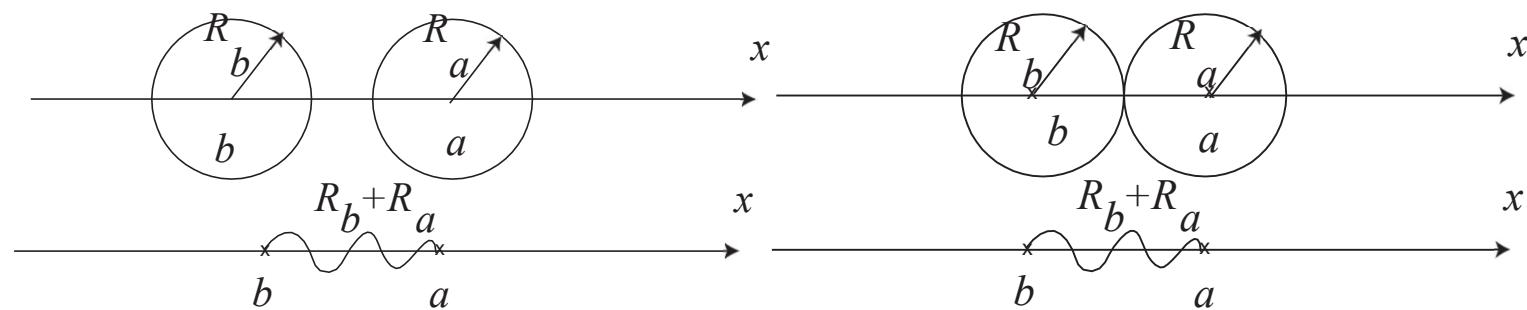
[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Deux boules rigides a et b de rayon R_a et R_b qui se déplacent dans l'espace sans tourner sur elles-mêmes entrent en collision face à face au temps $t = t_i$.

Position des boules avant la collision (gauche) et au temps $t = t_i$ lorsque débute la collision (droite).



La méthode des forces consiste à schématiser la collision par une compression d'un ressort de longueur naturelle $L_{r,0} = R_a + R_b$

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des](#)

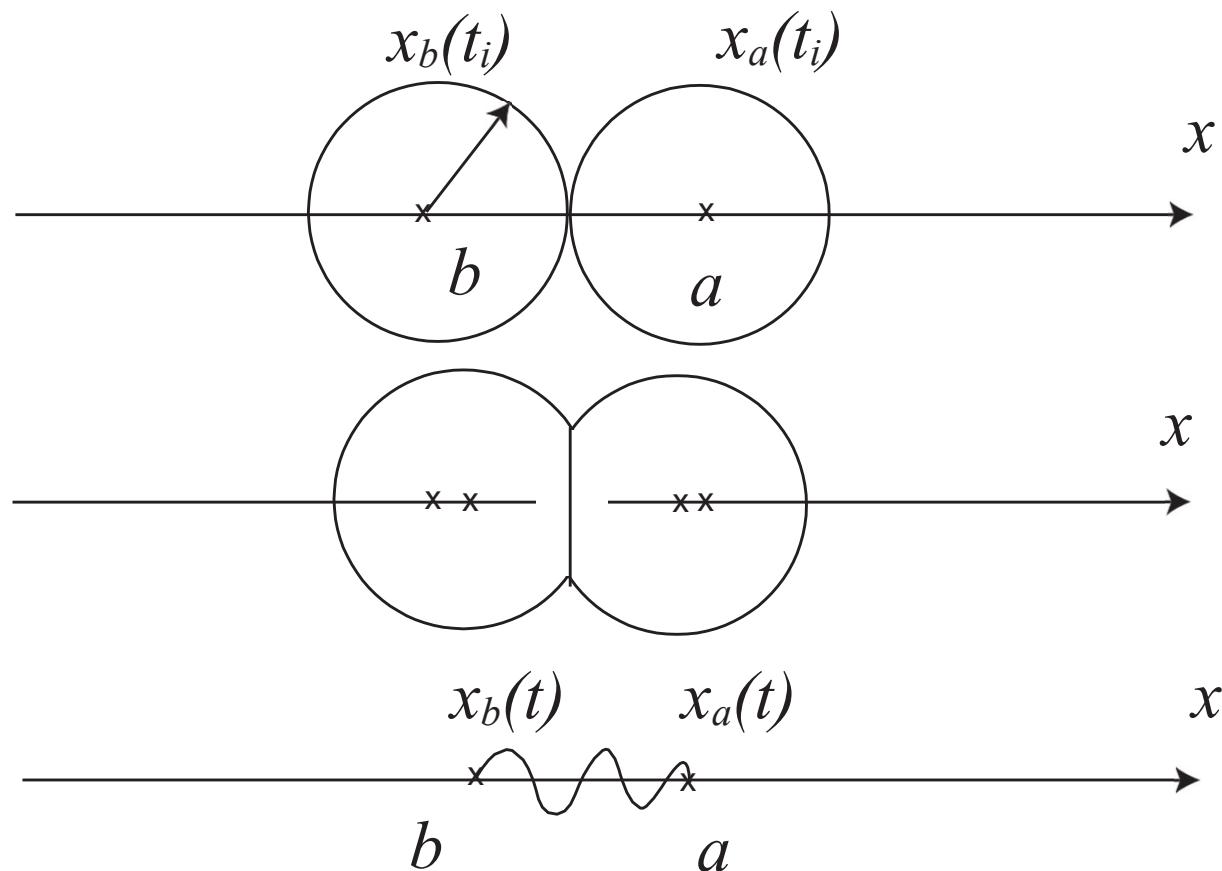
[collisions](#)

[Collision sphères et](#)

[solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Position des boules au temps $t > t_i$ durant la collision. Ici, le ressort est comprimé.



Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Cas où le déplacement suit l'axe des x ($x_a(t)$, $x_b(t)$, $v_{x,a}$ et $v_{x,b}$).

On aura

$$L_r(t_i) = R_a + R_b = |x_a(t_i) - x_b(t_i)|$$

La longueur du ressort durant la collision (au temps $t \in [t_i, t_f]$) sera alors

$$L_r(t) = |x_a(t) - x_b(t)| < R_a + R_b$$

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[**Méthode des forces**](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

- Lors de la collision, les deux boules se déforment.
- Si la collision est élastique, les deux boules se repoussent et reprennent leur forme originale.
- Si la collision est inélastique, la déformation des boules peut être permanente ou une partie de l'énergie de la collision est transmise aux molécules des boules qui s'échauffent.

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Cette interaction est simulée par une combinaison de:

1. Ressort de constante de rappel k_r

$$F_a(t) = -F_b(t) = -k_r (L_r(t) - L_r(t_i)) \frac{x_a(t) - x_b(t)}{|x_a(t) - x_b(t)|}$$

2. Amortisseurs de constante d'amortissement k_a

$$F_a(t) = -F_b(t) = -k_a (v_{x,a}(t) - v_{x,b}(t))$$

Dans le cas d'une collision élastique $k_a = 0$. Pour une collision inélastique $k_a > 0$.

Les forces qui s'exerce sur le solide a sont égales et opposées à celles qui s'exercent sur le solide b . Ces forces agiront tant que $L_r(t) < L_r(t_i)$.

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[**Méthode des forces**](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Lorsque la distance entre les centres de masse des deux boules revient à $R_a + R_b$, le ressort est à sa position d'équilibre: la force qu'il exerce est nulle. Ceci corresponds au temps $t = t_f$ défini par

$$L_r(t_f) = L_r(t_i)$$

À partir de ce moment, on supposera que les solides ne sont plus en contact et donc que les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre deviennent nulles.

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Ici, on a supposé k_r et k_a sont identiques pour les deux boules.

- Si les deux boules ont des compositions différentes les constantes de rappel et d'amortissement sont généralement différentes ($k_{r,a} \neq k_{r,b}$) et on utilise une constante de rappel équivalente $k_{r,eq}$ donnée par

$$\frac{1}{k_{r,eq}} = \frac{1}{k_{r,a}} + \frac{1}{k_{r,b}}$$

On peut procéder de la même façon pour la constante d'amortissement.

$$\frac{1}{k_{a,eq}} = \frac{1}{k_{a,a}} + \frac{1}{k_{a,b}}$$

Méthode des forces

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Les équations de la dynamique à résoudre pour $t_i < t < t_f$ deviennent alors

$$dv_{x,b}(t)/dt = -\frac{1}{m_b} \left(k_r(|x_a(t) - x_b(t)| - L_r(t_i)) \frac{x_b(t) - x_a(t)}{|x_b(t) - x_a(t)|} + k_a(v_{x,b}(t) - v_{x,a}(t)) - \text{autres forces} \right)$$

$$dx_b(t)/dt = v_{x,b}(t)$$

$$dv_{x,a}(t)/dt = -\frac{1}{m_a} \left(k_r(|x_a(t) - x_b(t)| - L_r(t_i)) \frac{x_a(t) - x_b(t)}{|x_a(t) - x_b(t)|} + k_a(v_{x,a}(t) - v_{x,b}(t)) - \text{autres forces} \right)$$

$$dx_a(t)/dt = v_{x,a}(t)$$

Des conditions initiales (vitesse et position de chaque boule à $t = t_i$) sont requises.

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

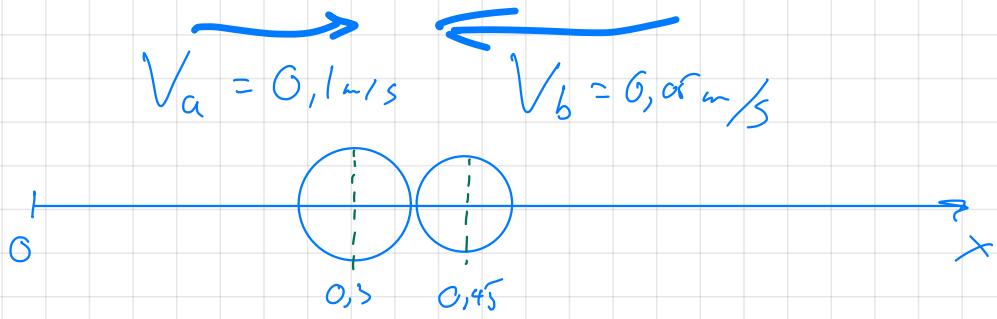
[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Exemple

Étude de la collision entre une boule a de masse $m_a = 0.8 \text{ kg}$, de rayon $R_a = 0.1 \text{ m}$ et de vitesse $v_{x,a} = 0.1 \text{ m/s}$ qui entre en collision avec la boule b de masse $m_b = 0.1 \text{ kg}$, de rayon $R_b = 0.05 \text{ m}$ et de vitesse $v_{x,b} = -0.05 \text{ m/s}$. Lorsque la collision débute, le centre de masse de la boule a est au point $x_a(0) = 0.3 \text{ m}$ et celui de b au point $x_b(0) = 0.45 \text{ m}$.

Déterminer les vitesses et positions des boules à la fin de la collision en utilisant la méthode des forces en supposant que la constante de rappel équivalente $k_{r,\text{eq}} = 100$ et que la constante d'amortissement est $k_{a,\text{eq}} = 0.65$.



$$r_a = 0, 1$$

$$R_b = 0, 0.5$$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} V_c \\ x_a \\ V_b \\ x_b \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,3 \\ -0,05 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} a_a \\ q_1 \\ a_b \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[**Méthode des forces**](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Exemple

```
function res=gCollisionBoules(q0,t0)
global kreq kaeq ma mb Ra Rb ;
Lab=abs(q0(2)-q0(4));
vavg=(q0(1)+q0(3))/2;
Frab=-kreq*(Lab-(Ra+Rb))*(q0(2)-q0(4))/Lab;
Faab=-kaeq*(q0(1)-q0(3));
res=[(Frab+Faab)/ma q0(1) -(Frab+Faab)/mb q0(3)];
```

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et](#)

[solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Exemple

```
contact=1;
ii=1;
while contact == 1
    qsolN=SEDRK4t0(qsol,t0,Deltat,'gCollisionBoules');
    t0=t0+Deltat;
    Lab=abs(qsolN(2)-qsolN(4));
    if Lab > Ra+Rb
        contact=0;
    end;
    ii=ii+1;
    if ii > 10000
        warning('Erreur ou Deltat trop petit'); break;
    end;
    qsol=qsolN;
end;
```

Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

Méthode des forces

[Méthode des conditions initiales](#)

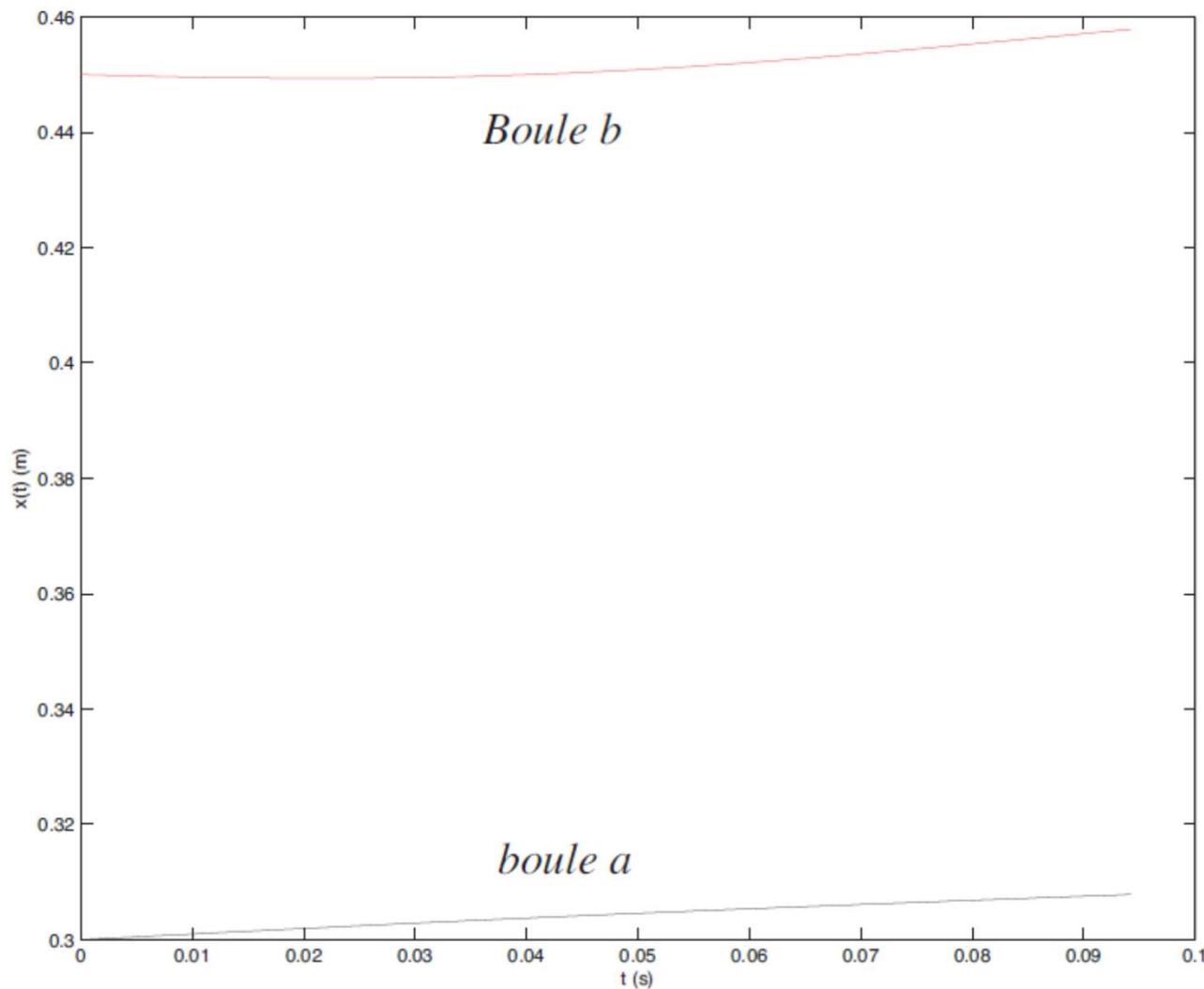
[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Exemple

Position des boules durant la collision.



Méthode des forces

[Dynamique des collisions](#)

Méthode des forces

[Méthode des conditions initiales](#)

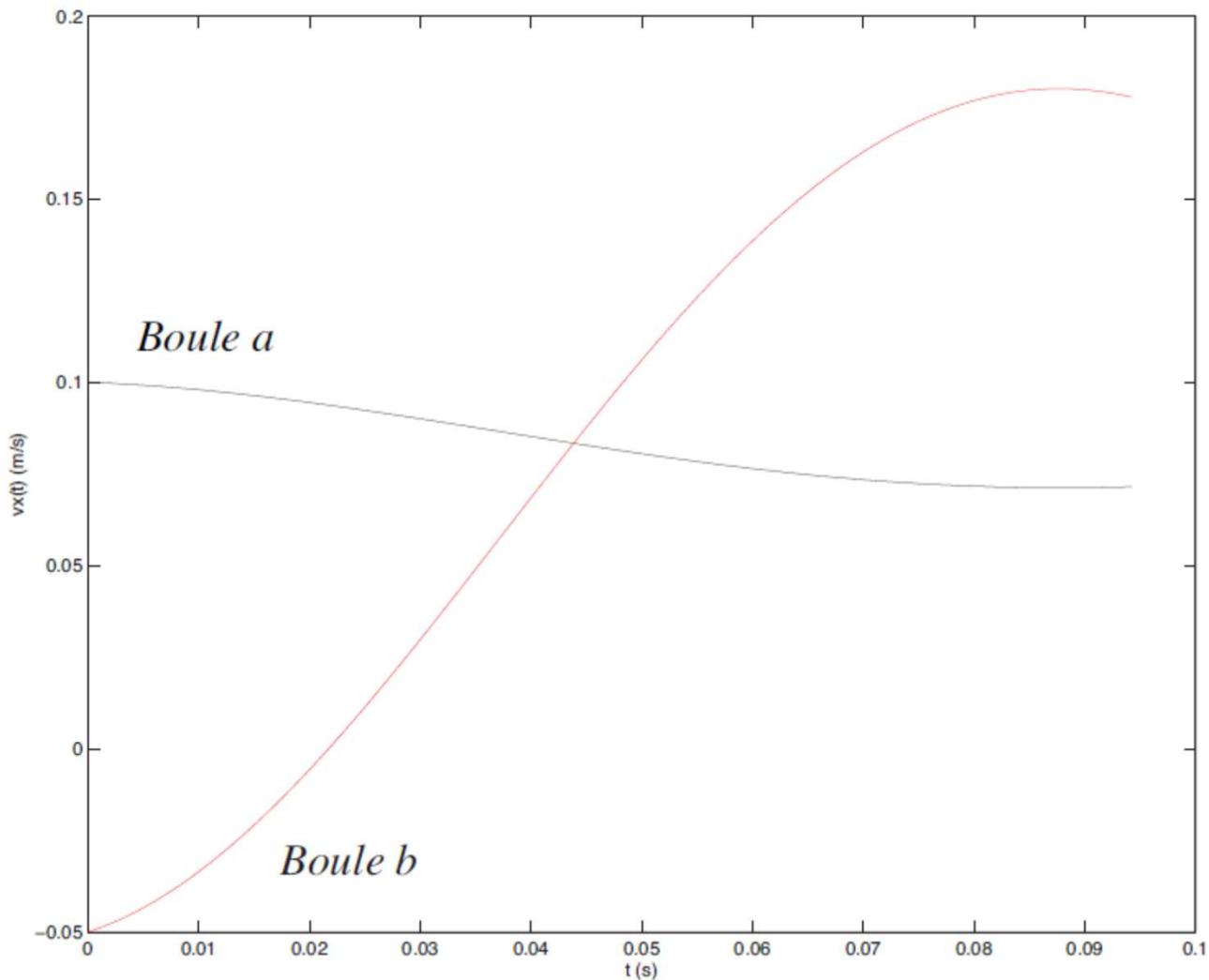
[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Exemple

Vitesse des boules durant la collision.



Dynamique des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[**Méthode des forces**](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Avantages de la méthode des forces :

- simule le comportement de la collision de façon plus physique ;
- permet de décrire les déformations des solides ;

Inconvénients :

- il est difficile de définir les forces et le temps d'interaction et de prendre en compte les mouvements de rotation des solides ;
- il faut résoudre des équations couplées pour les solides.

Méthode des conditions initiales

Deuxième méthode

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

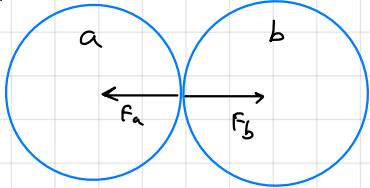
La méthode des conditions initiales peut être dérivée des équations de la cinématique

$$\frac{d\vec{p}_{a/b}(t)}{dt} = \frac{d(m_{a/b}\vec{v}_{a/b}(t))}{dt} = \vec{F}_{a/b}(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_{a/b}(t)}{dt} &= \frac{d(\mathbf{I}_{a/b}\vec{\omega}_{a/b}(t))}{dt} = \vec{\tau}_{a/b}(t) \\ &= \vec{r}_{a/b,p}(t) \times \vec{F}_{a/b}(t) \end{aligned}$$

où :

- $\vec{p}_{a/b}(t)$: quantité de mouvement des objets a et b ;
- $\vec{L}_{a/b}(t)$: moment cinétique des objets autour de leur centre de masse respectif ;
- $\vec{r}_{a/b,p}$: la position du point où la force $\vec{F}_{a/b}$ est appliquée.

$$\vec{F}_a = \frac{d\vec{P}_a}{dt} \quad \xrightarrow{\hspace{10em}} \quad \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_a dt = \int d\vec{P}_a = \vec{P}_a(t_f) - \vec{P}_a(t_i)$$


$\int_{t_i}^{t_f} \vec{J} dt$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{p/a} \times \vec{F}_a = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} (I \vec{\omega})$$

$$\vec{F}_b = -\vec{F}_a$$

$$\vec{J} = m \vec{v}_a(t_f) - m \vec{v}_a(t_i)$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{r}_{p/a} \times \vec{F}_a dt = I \int_{\omega_i}^{\omega_f} d\vec{\omega} = I [\vec{\omega}(t_f) - \vec{\omega}(t_i)]$$

$$\vec{r}_{p/a} \times \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_a dt$$

\vec{J}

$$\vec{\omega}(t_f) - \vec{\omega}(t_i) = I \vec{r}_{p/a} \times \vec{J}$$

Méthode des conditions initiales

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

La première équation sera intégrée pour obtenir

$$\vec{p}_{a/b}(t_f) - \vec{p}_{a/b}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{a/b}(t) dt = \vec{J}_{a/b}$$

avec le vecteur impulsion défini par

$$\vec{J}_{a/b} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{a/b}(t) dt$$

Pour le mouvement de rotation, on utilisera

$$\begin{aligned} \vec{L}(t_f) - \vec{L}(t_i) &= \int_{t_i}^{t_f} (\vec{r}_{a/b,p} \times \vec{F}_{a/b}(t)) dt \\ &= \vec{r}_{a/b,p} \times \vec{J}_{a/b} \end{aligned}$$

en supposant que $\vec{r}_{a/b,p}$ ne change pas durant la collision.

Méthode des conditions initiales

Si on connaît:

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Les vitesses linéaires et angulaires des deux solides avant la collision



L'impulsion et le moment cinétique transférés entre les deux solides

Alors on peut déterminer:

Les vitesses linéaires et angulaires des deux solides après la collision

Méthode des conditions initiales

Cependant:

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

- même si on connaît la vitesse finale des solides, on ne connaît par leurs positions pendant l'intervalle de temps $t_i < t < t_f$;
- la force et son temps d'action sont en général inconnus.

La méthode des conditions initiales propose une solution simple à ces deux problèmes.

Méthode des conditions initiales

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Position des solides après la collision

- Si les solides sont très rigides, la collision est de courte durée.
=> pas de déplacement durant la collision
- Si le temps d'interaction entre les solides est long et mesurable,
=> on supposera que les deux corps se déplacent en tandem durant la collision à une vitesse linéaire \vec{v}_s et angulaire $\vec{\omega}_s$

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m_a + m_b} (\vec{p}_a(t_i) + \vec{p}_b(t_i))$$

$$\vec{\omega}_s = (I_a + I_b)^{-1} (\vec{L}_a(t_i) + \vec{L}_b(t_i))$$

Méthode des conditions initiales

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

La position du centre de masse et angulaire de chaque solide après la collision sera alors donnée par

$$\vec{r}_a(t_f) = \vec{r}_a(t_i) + \vec{v}_s(t_f - t_i)$$

$$\vec{r}_b(t_f) = \vec{r}_b(t_i) + \vec{v}_s(t_f - t_i)$$

$$\vec{\Omega}_a(t_f) = \vec{\Omega}_a(t_i) + \vec{\omega}_s(t_f - t_i)$$

$$\vec{\Omega}_b(t_f) = \vec{\Omega}_b(t_i) + \vec{\omega}_s(t_f - t_i)$$

Méthode des conditions initiales

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

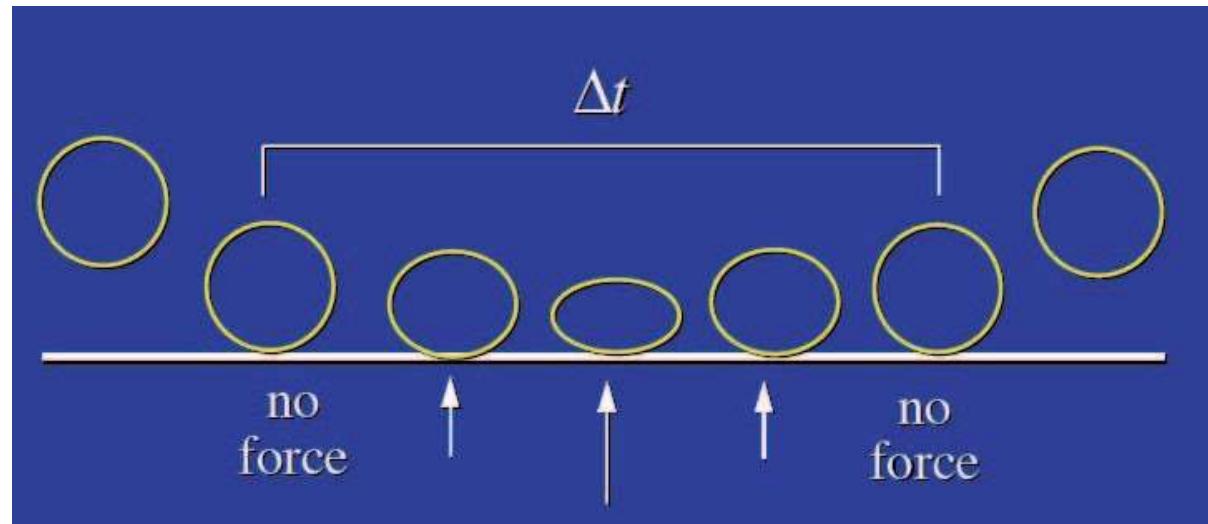
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Lorsque l'un des solides ne peut bouger (un mur), on supposera que \vec{v}_s correspond à la vitesse du solide dans une direction parallèle à la surface avant la collision.



Méthode des conditions initiales

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

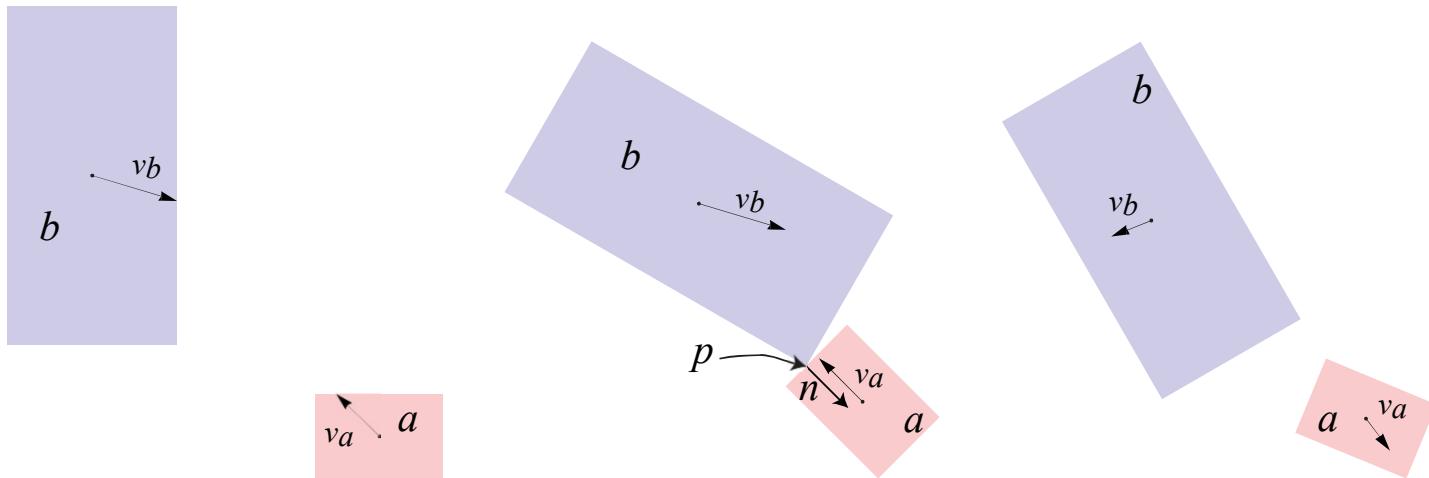
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Collision entre deux solides a et b au point p .



Méthode des conditions initiales

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Les vitesses relatives du point p appartenant aux deux objets avant et après la collision sont (vitesse linéaire totale du point p)

$$\vec{v}_{a-b}(t_i) = \vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i)$$

$$\vec{v}_{a-b}(t_f) = \vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f)$$

avec

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + \vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + \vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t)$$

Pour le cas où les mouvements de rotation sont négligés, on utilisera

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t)$$

Méthode des conditions initiales

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Collision:

frottement rotation

frottement rotation

frottement rotation

frottement rotation

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Vitesse des solides après la collision:

La vitesse relative des solides après la collision est donnée par une relation empirique (**loi des collisions sans frottement**):

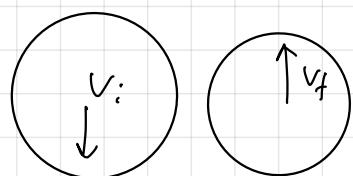
$$v_r^+ = -\epsilon v_r^-$$

où $0 \leq \epsilon \leq 1$ est le coefficient de restitution qui est mesuré expérimentalement et dépend de la composition des solides.

1. $\epsilon = 1$ implique une collision élastique (sans perte d'énergie cinétique) ;
2. $\epsilon = 0$ implique que les deux solides demeurent collés après la collision (perte maximale d'énergie cinétique).

$$v_f = -v_i$$

$$\mathcal{E} = 1$$



$$\vec{V}_{a/b}(t_f) = \mathcal{E} \vec{V}_{a/b}(t_i)$$

$$\vec{V}_r^+ = -\mathcal{E} \vec{V}_r^-$$

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

On peut alors évaluer les composantes de ces vitesses qui sont normales à la surface de contact du solide a avant (v_r^-) et après (v_r^+) la collision (ici la normale est dirigée vers l'intérieur du solide a)

$$v_r^- = \hat{n} \cdot \vec{v}_{a-b}(t_i) = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i))$$

$$v_r^+ = \hat{n} \cdot \vec{v}_{a-b}(t_f) = \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f))$$

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Méthode des conditions initiales

~~frottement rotation~~

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

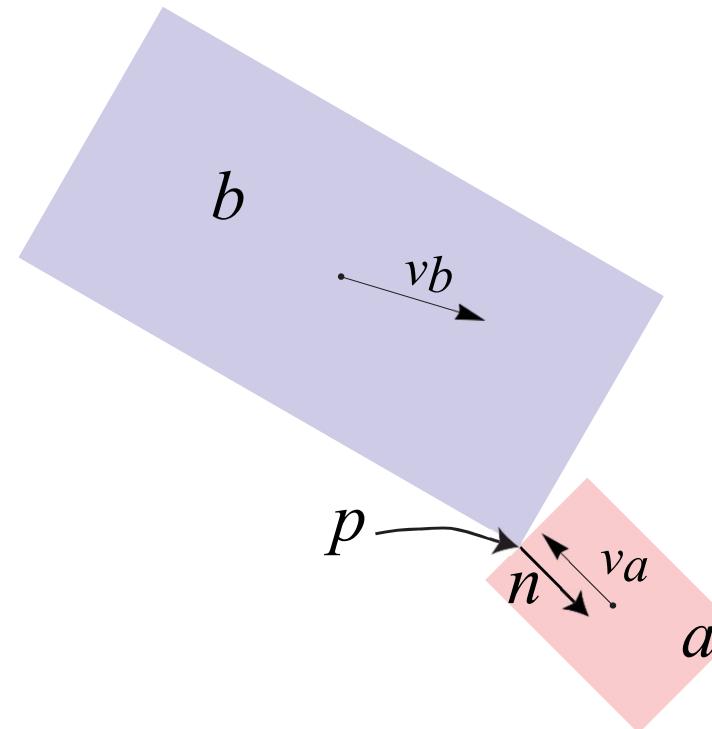
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Retournons donc à la définition du vecteur impulsion. La force que le solide b exercera sur le solide a devra nécessairement être dans la direction \hat{n} qui est la normale entrante à la surface de a au point de contact p .



Méthode des conditions initiales

frottement rotation

On aura donc

$$\frac{\vec{J}}{m_a} = \frac{\hat{n} j}{m_a} = \vec{v}_a(t_f) - \vec{v}_a(t_i)$$

Comme la force qui agit sur la boule b est identique à celle qui agit sur la boule a , mais dans une direction opposée, on aura aussi

$$-\frac{\vec{J}}{m_b} = -\frac{\hat{n} j}{m_b} = \vec{v}_b(t_f) - \vec{v}_b(t_i)$$

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

L'impulsion n'affecte donc que la composante de la vitesse dans la direction de la normale

$$\frac{j}{m_a} = \hat{n} \cdot (\vec{v}_a(t_f) - \vec{v}_a(t_i))$$
$$-\frac{j}{m_b} = \hat{n} \cdot (\vec{v}_b(t_f) - \vec{v}_b(t_i))$$

En combinant ces deux équations, on obtient

$$j \left(\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \right) = v_r^+ - v_r^-$$

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Comme

$$v_r^+ = -\epsilon v_r^-$$

alors

$$j = -\frac{(1 + \epsilon) v_r^-}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}}$$

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

On a alors toute l'information nécessaire pour déterminer les vitesses finales de chaque solide

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n} j}{m_a}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\hat{n} j}{m_b}$$

Notez que le terme de signe positif correspond au solide vers l'intérieur duquel la normale est dirigée.

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Dynamique des collisions

Méthode des forces

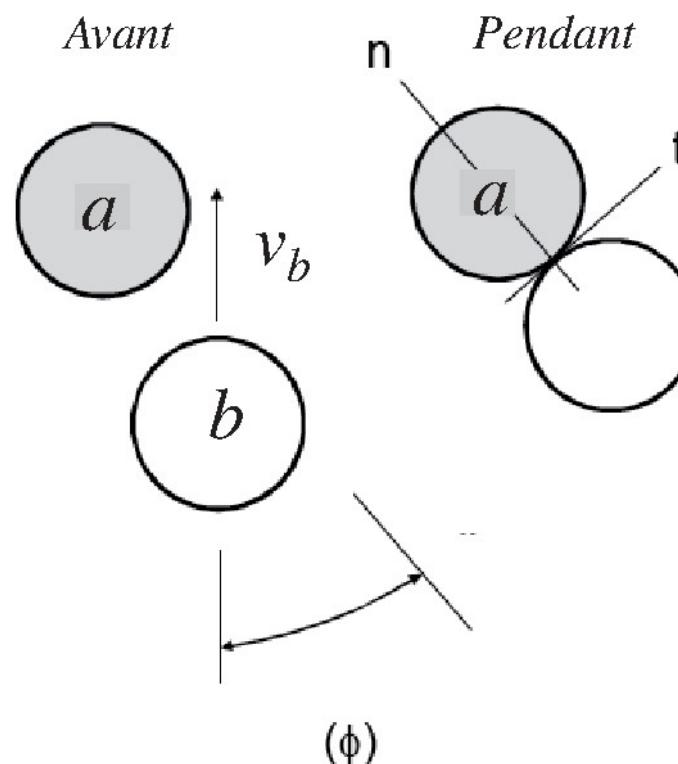
Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Pour les collisions entre boules de masses identiques, les mêmes relations peuvent être utilisées.



Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Ainsi

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n} j}{m}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\hat{n} j}{m}$$

avec la normale vers l'intérieur de la boule a et

$$j = -\frac{(1 + \epsilon)}{2} m v_r^-$$

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Si la boule b est au repos, le tout se simplifie à la forme

$$j = -\frac{(1 + \epsilon)}{2} m (\hat{n} \cdot \vec{v}_a(t_i))$$

et

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n} j}{m}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = -\frac{\hat{n} j}{m}$$

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Pour une collision entre un solide (b) de masse $m = m_b$ et un mur on utilisera

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\hat{n}_a j}{m_b}$$
$$j = (1 + \epsilon) m_b (\hat{n}_a \cdot \vec{v}_b(t_i))$$

la normale étant dirigée vers l'intérieur du mur.

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement ~~rotation~~

Frottement

Si les coefficients de frottement entre les deux solides au point de contact sont μ_s (statique) et μ_c (cinétique), le problème devient plus compliqué, car il faut aussi prendre en compte la composante de l'impulsion dans une direction \hat{t} tangentielle à la surface et dans le plan formé par $\vec{v}_r^- = \vec{v}_a(t_i) - \vec{v}_b(t_i)$ et \hat{n} .

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}_r^- \times \hat{n}}{|\vec{v}_r^- \times \hat{n}|}$$

$$\hat{t} = \hat{n} \times \hat{u}$$

Notez que si \vec{v}_r^- et \hat{n} sont parallèles, le terme de frottement sera absent (\hat{u} et \hat{t} sont nuls).

Dynamique des collisions

Méthode des forces
Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement ~~rotation~~

L'impulsion dans la direction \hat{t} est alors donnée par le frottement

$$j_t = -\mu \hat{t} j$$

avec j la composante normale de l'impulsion donnée par

$$j = -\frac{(1 + \epsilon) v_r^-}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}}$$

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement ~~rotation~~

En procédant de la même façon qu'avant on obtient alors

$$j_t = \begin{cases} \frac{\mu_c(1+\epsilon)v_r^-}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}} & \text{si } \mu_s(1 + \epsilon)|v_r^-| < |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| \\ -\frac{|\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-|}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}} & \text{sinon} \end{cases}$$

La force de frottement ne peut inverser la direction de propagation tangentielle des objets et la vitesse relative dans le plan est nulle. Le premier terme correspond au frottement cinétique et le second au frottement statique (vitesse relative entre les deux objets dans la direction \hat{t} est nulle après la collision).

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement ~~rotation~~

On obtient alors

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\hat{n} j + \hat{t} j_t}{m_a}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\hat{n} j + \hat{t} j_t}{m_b}$$

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Effets angulaires

Ici, en plus d'utiliser l'effet de la force (représentée par l'impulsion) sur la vitesse de translation du centre de masse, il faut aussi considérer l'effet du moment de force (moment d'impulsion) résultant sur le mouvement de rotation du solide.

$$\vec{\omega}_a(t_f) = \vec{\omega}_a(t_i) + j \mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \hat{n})$$

$$\vec{\omega}_b(t_f) = \vec{\omega}_b(t_i) - j \mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \hat{n})$$

Ici on travaille toujours dans le système de coordonnées globales du système en supposant que $\vec{J} = j \hat{n}$ et que $dI_{a/b}/dt = 0$. Si $dI_{a/b}/dt \neq 0$, le problème ne peut être résolu en utilisant cette technique, et il faut utiliser la méthode des forces.

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

~~frottement rotation~~

On aura donc (vitesse linéaire totale incluant la vitesse du point due à son mouvement de rotation)

$$\vec{v}_{a,p}(t_f) = \vec{v}_{a,p}(t_i) + j \left(\frac{\hat{n}}{m_a} + (\mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \hat{n})) \times \vec{r}_{a,p} \right)$$

$$\vec{v}_{b,p}(t_f) = \vec{v}_{b,p}(t_i) - j \left(\frac{\hat{n}}{m_b} + (\mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \hat{n})) \times \vec{r}_{b,p} \right)$$

car

$$\vec{v}_{a,p}(t) = \vec{v}_a(t) + (\vec{\omega}_a(t) \times \vec{r}_{a,p}(t))$$

$$\vec{v}_{b,p}(t) = \vec{v}_b(t) + (\vec{\omega}_b(t) \times \vec{r}_{b,p}(t))$$

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

En utilisant

$$v_r^+ = -\epsilon v_r^-$$

avec maintenant la vitesse totale du point où la collision prend place

$$\begin{aligned} v_r^- &= \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i)) \\ v_r^+ &= \hat{n} \cdot (\vec{v}_{a,p}(t_f) - \vec{v}_{b,p}(t_f)) \end{aligned}$$

les vitesses relatives totales entre les solides au point où la collision prend place ($\vec{r}_a(t) + \vec{r}_{a,p}(t) = \vec{r}_b(t) + \vec{r}_{b,p}(t)$).

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

On peut résoudre pour j et obtenir

$$j = -\alpha(1 + \epsilon) v_-^r$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_a + G_b}$$

avec

$$G_a = \hat{n} \cdot [(\mathbf{I}_a^{-1}(\vec{r}_{a,p} \times \hat{n})) \times \vec{r}_{a,p}]$$

$$G_b = \hat{n} \cdot [(\mathbf{I}_b^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \hat{n})) \times \vec{r}_{b,p}]$$

où la matrice de moment d'inertie est prise par rapport au centre de masse de chaque objet dans un système d'axes commun.

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

S'il y a du frottement, on généralise ces équations de la même façon que pour le cas sans rotation.

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{J}}{m_a}$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\vec{J}}{m_b}$$

et les vitesses angulaires finales seront

$$\vec{\omega}_a(t_f) = \vec{\omega}_a(t_i) + \mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \vec{J})$$

$$\vec{\omega}_b(t_f) = \vec{\omega}_b(t_i) - \mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \vec{J})$$

Méthode des conditions initiales

frottement rotation

Dynamique des collisions

Méthode des forces

Méthode des conditions initiales

Détection des collisions

Collision sphères et solides réguliers

Conclusions

Ici

$$\vec{J} = \hat{n} j + \hat{t} j_t$$

avec

$$j_t = \begin{cases} \alpha_t \mu_c (1 + \epsilon) v_r^- & \text{si } \mu_s (1 + \epsilon) |v_r^-| < |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| \\ -\alpha_t |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_{a,t} + G_{b,t}}$$

$$G_{a,t} = \hat{t} \cdot [(\mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \hat{t})) \times \vec{r}_{a,p}]$$

$$G_{b,t} = \hat{t} \cdot [(\mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \hat{t})) \times \vec{r}_{b,p}]$$

Dynamique des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et](#)

[solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Avantages de la méthode des conditions initiales :

- simple et permet le découplage des équations de la dynamique associées à chaque solide ;
- les mouvements de rotation des solides assez facile à prendre en compte ;
- est souvent aussi précise que la méthode des forces.

Inconvénients :

- peut demander l'introduction de délais (où rien ne se passe) ;
- moins satisfaisante du point de vue physique.

Dynamique des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

- Cette méthode s'applique difficilement lorsque la durée de l'interaction est trop longue.
- Elle suppose aussi que les déformations que subissent les solides sont négligeables et n'ont pas d'impact sur le reste de la simulation.

Dynamique des collisions

Méthode des conditions initiales

$$\vec{v}_a(t_f) = \vec{v}_a(t_i) + \frac{\vec{J}}{m_a}$$

$$\vec{\omega}_a(t_f) = \vec{\omega}_a(t_i) + \mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \vec{J})$$

$$\vec{v}_b(t_f) = \vec{v}_b(t_i) - \frac{\vec{J}}{m_b}$$

$$\vec{\omega}_b(t_f) = \vec{\omega}_b(t_i) - \mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \vec{J})$$

$$\vec{J} = \hat{n} j + \hat{t} j_t$$

$$\vec{v}_r^- = \vec{v}_{a,p}(t_i) - \vec{v}_{b,p}(t_i)$$

$$v_r^- = \hat{n} \cdot \vec{v}_r^-$$

Avec frottement

Sans frottement

$$j = -\alpha(1+\epsilon) v_r^-$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_a + G_b}$$

$$G_a = \hat{n} \cdot [(\mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \hat{n})) \times \vec{r}_{a,p}]$$

$$G_b = \hat{n} \cdot [(\mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \hat{n})) \times \vec{r}_{b,p}]$$

$$j_t = \begin{cases} \alpha_t \mu_c (1 + \epsilon) v_r^- & \text{si } \mu_s (1 + \epsilon) |v_r^-| < |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| \\ -\alpha_t |\hat{t} \cdot \vec{v}_r^-| & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\alpha_t = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + G_{a,t} + G_{b,t}}$$

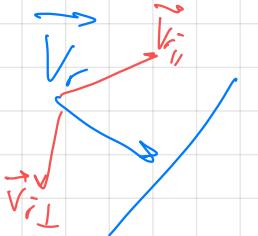
$$G_{a,t} = \hat{t} \cdot [(\mathbf{I}_a^{-1} (\vec{r}_{a,p} \times \hat{t})) \times \vec{r}_{a,p}]$$

$$G_{b,t} = \hat{t} \cdot [(\mathbf{I}_b^{-1} (\vec{r}_{b,p} \times \hat{t})) \times \vec{r}_{b,p}]$$

$$\hat{t} = \frac{\hat{n} \times [\vec{V}_r \times \hat{n}]}{|\hat{n} \times (\vec{V}_r \times \hat{n})|}$$

$$\vec{r} = \vec{v}_i - \vec{V}_{r_2}$$

$$\vec{r} = \vec{v}_i - (\vec{V}_r - \hat{n}) \hat{n}$$



Méthode des conditions initiales

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Exemple

Comparaison de la méthode des forces et de la méthode des conditions initiales pour une boule a de masse $m_a = 0.8 \text{ kg}$, de rayon $R_a = 0.1 \text{ m}$ et de vitesse $v_{x,a} = 0.1 \text{ m/s}$. Elle entre en collision avec la boule b de masse $m_b = 0.1 \text{ kg}$, de rayon $R_b = 0.05 \text{ m}$ et de vitesse $v_{x,b} = -0.05 \text{ m/s}$. Lorsque la collision débute le centre de masse de la boule a est au point $x_a(0) = 0.3 \text{ m}$ et celui de b au point $x_b(0) = 0.45 \text{ m}$.

On a vu comment déterminer les vitesses et positions des boules à la fin de la collision en utilisant la méthode des forces. Ici, les vitesses des boules à la fin de la collision seront calculées en utilisant la méthode des conditions initiales en supposant que le coefficient de restitution est $\varepsilon = 0.7$.

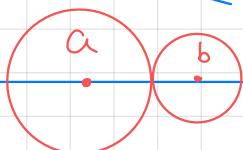
Methode des conditions initiales

$$R_a = 6,1$$

$$R_b = 0,05$$

$$\overrightarrow{V}_a = 0,1 \text{ m/s}$$

$$\overrightarrow{V}_b = -0,05 \text{ m/s}$$



$$m_a = 0,8 \text{ kg}$$

$$m_b = 0,1 \text{ kg}$$

$$\varepsilon = 0,7$$

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_r = \vec{V}_a - \vec{V}_b = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,05 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_r = \hat{n} \cdot \vec{V}_r = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -0,15$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b}} = \frac{1}{\frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,1}}$$

$$j = -\alpha (1 + \varepsilon) V_r = -0,0227 \text{ N.S}$$

$$\vec{V}_1(t_3) = \vec{V}_2(t_i) - \frac{\vec{j}}{m_2} = \begin{pmatrix} -0,05 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{0,1} \begin{pmatrix} -0,0227 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_b(t_i) = \begin{pmatrix} 0,17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

Méthode des conditions initiales

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

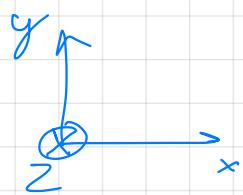
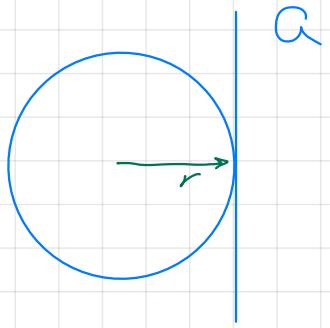
[Conclusions](#)

Exemple

Une boule pleine de masse $m=0.5$ kg et de rayon $r=0.1$ m entre en collision avec un mur. Lors de la collision, la position du centre de masse de la boule est $\vec{r}_c = (1.4, 0.0, 1.0)$ m. La surface du mur est située à $x_0=1.5$ m et parallèle au plan $y - z$. À l'instant où débute la collision, la boule possède une vitesse linéaire

$\vec{v}_c = (2.0, 0.0, -1.5)$ m/s et une vitesse de rotation $\vec{\omega}_c = (0.0, 0.0, 20.0)$ rad/s.

Déterminer les vitesses linéaire et angulaire de la boule tout juste après la collision sachant que le coefficient de restitution est $\varepsilon = 0.8$ et les coefficients de frottement statique et cinétique sont $\mu_s = 0.6$ et $\mu_c = 0.5$.



$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_{b,p} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{W_b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad m_b = 0,5 \text{ kg}, \quad R = 0,1 \text{ m}$$

$$\varepsilon = 0,8, \mu_c = 0,5, \mu_s = 0,6$$

$$\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_{a,p}} - \overrightarrow{V_{b,p}}, \quad \overrightarrow{V_{a,p}} = 0, \quad \overrightarrow{V_{b,p}} = \overrightarrow{V_b} + \overrightarrow{\omega_b} \times \vec{r}_o = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{t} = \frac{\hat{n} \times (\vec{V}_r - \vec{v}_n)}{|\hat{t}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+1,5^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V_r} = \overrightarrow{V_r} - \hat{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\overline{I} = \frac{1}{5} m R^2 = 0,002 \text{ kgm}^2$$

$$G_b = 0, G_A = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\hat{f} = \frac{\hat{n} \times (\vec{v}_r - \vec{x} \hat{n})}{|\hat{f}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+15^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{m_b} + \frac{1}{\lambda}} = m_b = 0,5$$

$$j = -\lambda (1 + \epsilon) v_r = 1,8 \text{ Ns}$$

$$\hat{f} \cdot \vec{v}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix} = 2,5$$

$$\mu_c \cdot (1+6) / 10^-1 = 2,16$$

2,16 < 2,5 \Rightarrow

$$\alpha_+ = \frac{1}{\frac{1}{m_0} + G_{b,+}}$$

$$G_{b,+} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{1}{0,002} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\alpha_+ = \frac{1}{\frac{1}{0,5} + 5}$$

$$\alpha_+ = \frac{1}{7}$$

$$j_+ = \frac{1}{7} \times 0,5 \times (1+0,7)(-2) = -0,257,$$

$$\overline{j} = j_n + j_+ = 1,8n - 0,257 \quad \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,257 \\ -0,154 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_2(t_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1,5 \end{pmatrix} - \frac{1}{0,5} \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2057 \\ -0,1543 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_6(t_2) = \begin{pmatrix} -1,6 \\ -0,4114 \\ -1,1914 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_b(t_1) = \vec{\omega}_e(t_1) - I_3^{-1}(\vec{r}_{b,p} \times \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{\omega}_b(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{0,002} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0,2057 \\ -0,1543 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7,715 \\ 9,715 \end{pmatrix}}$$

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

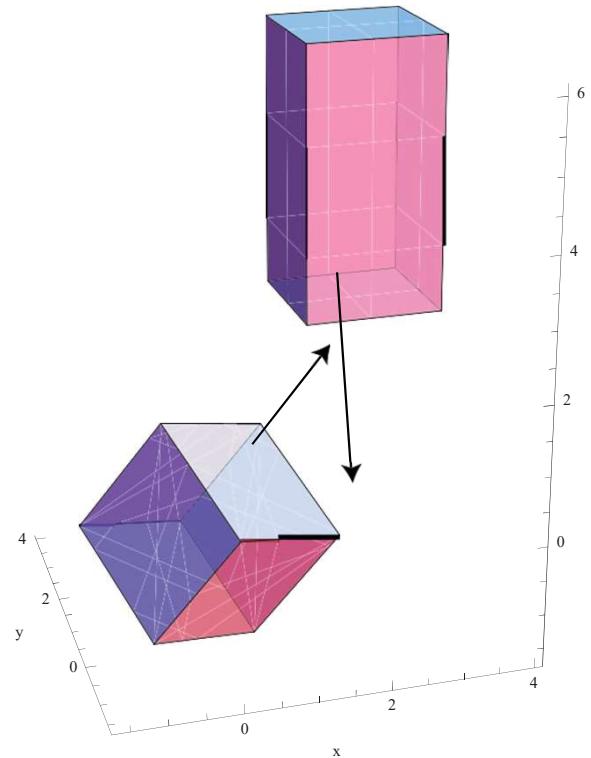
[Méthode des forces](#)
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Maintenant que nous savons comment traiter les collisions entre les solides, tout ce qu'il nous reste à faire c'est de détecter quand et où ces collisions prendront place.



Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

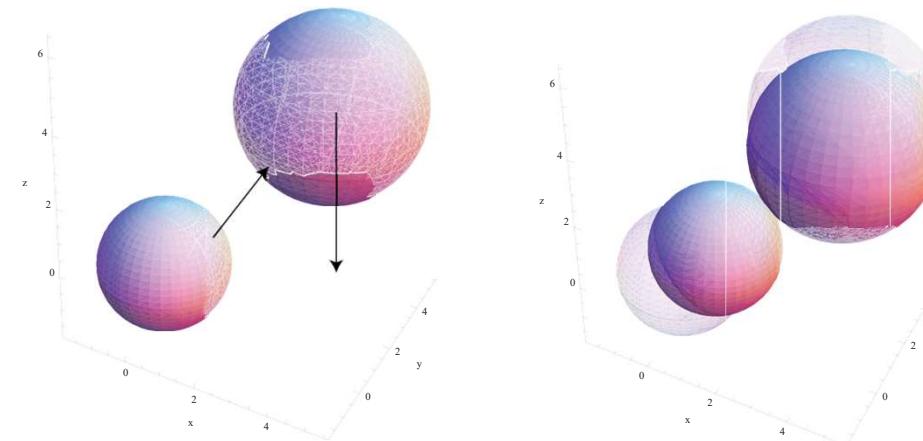
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Cas de deux sphères:



Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

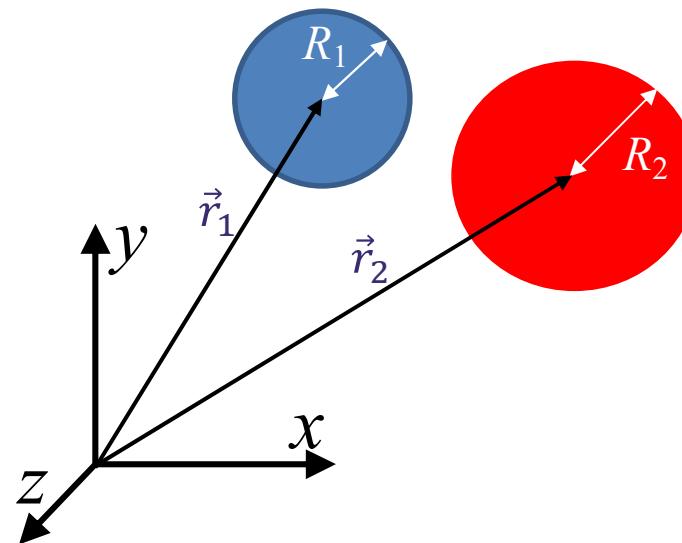
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Cas de collision entre deux sphères :



Il y a collision si (méthode des conditions initiales) :

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = R_1 + R_2$$

Il y a collision si (méthode des forces) :

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq R_1 + R_2$$

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

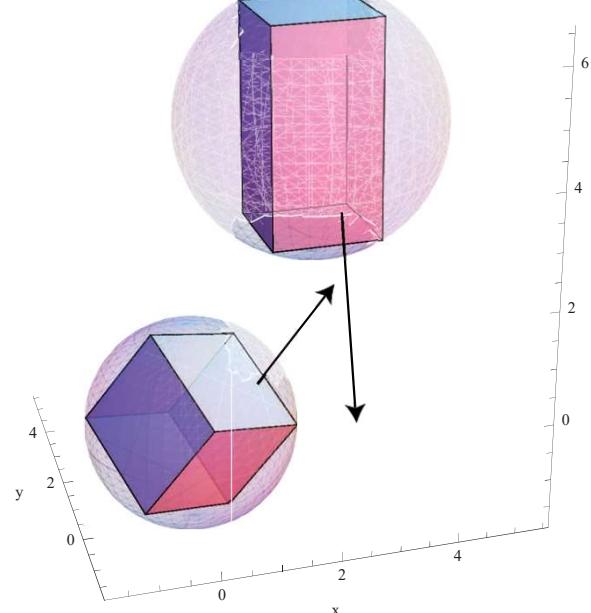
[Méthode des forces](#)
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

On peut utiliser le même type de procédure pour déterminer si deux solides de forme arbitraire ne sont pas en contact de façon certaine.



Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

- On est assuré que les deux solides ne sont pas en contact si

$$|\vec{r}_{c,1} - \vec{r}_{c,2}| > R_{min,1} + R_{min,2}$$

- On ne peut rien assurer si ce n'est pas le cas.

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

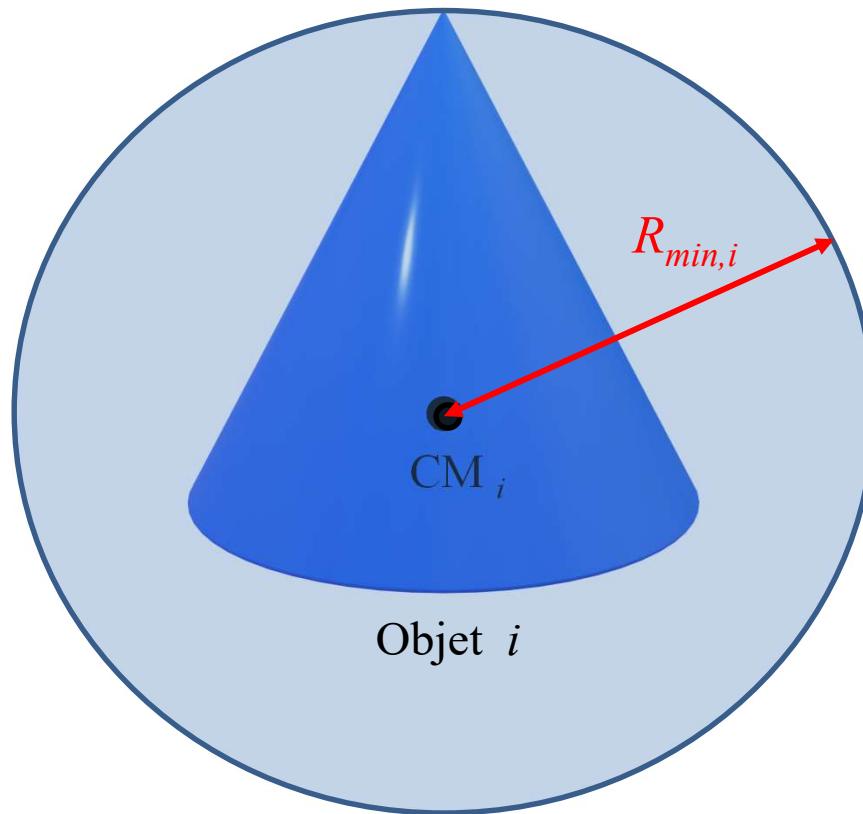
[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[**Détection des collisions**](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)



Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Pour ce faire, nous définirons la sphère de rayon minimal $R_{\min,i}$ centrée sur le centre de masse du solide qui l'englobe complètement.

- Si le solide i possède n coins (polyèdre)
- Et $\vec{d}_{i,j}$ les positions des $j = 1, n$ coins du solide i par rapport au CM du solide i .
- Alors :

$$R_{\min,i} = \max_{j=1,n} \left(\left| \vec{d}_{i,j} \right| \right)$$

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

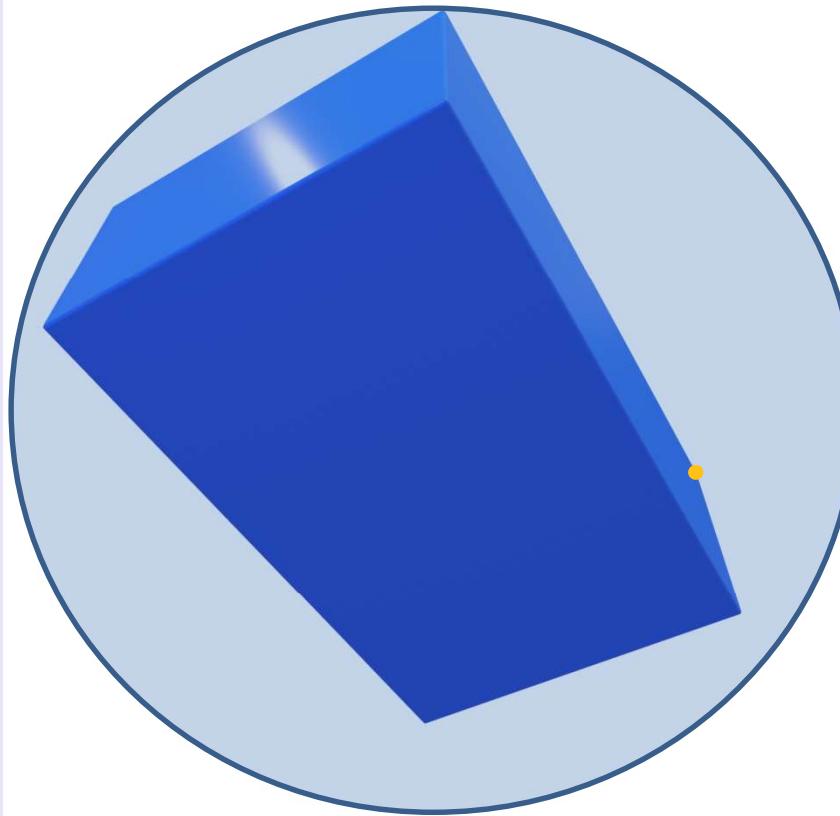
[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

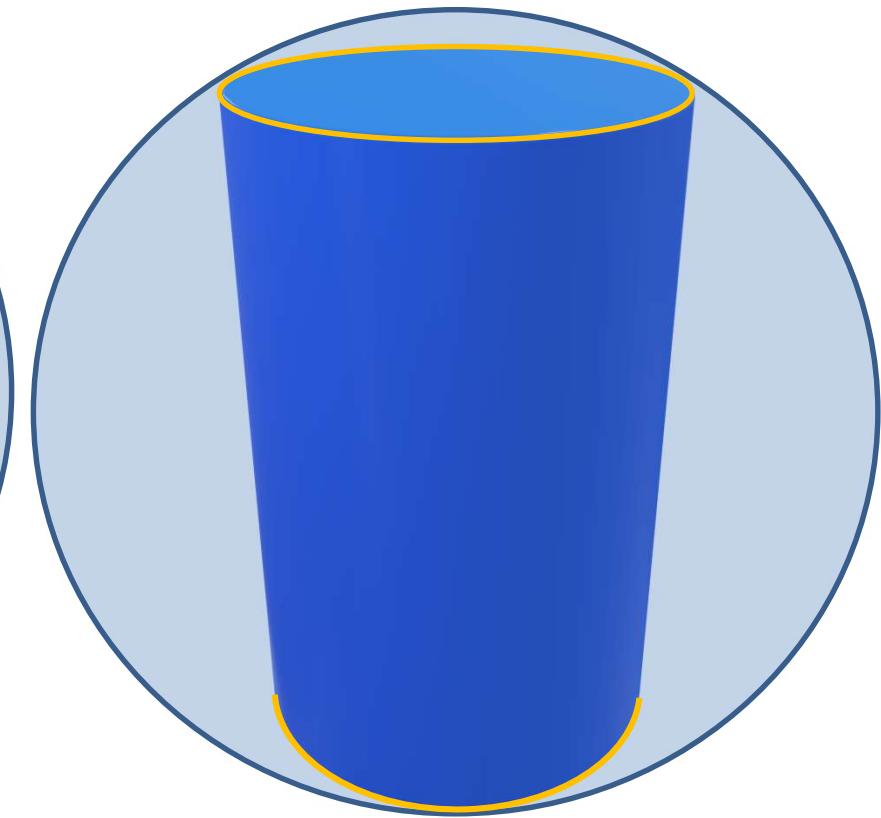
[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)



Parallélépipède de dimensions: a.b.c

$$R_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Cylindre de hauteur H et rayon R

$$R_{min} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}$$

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

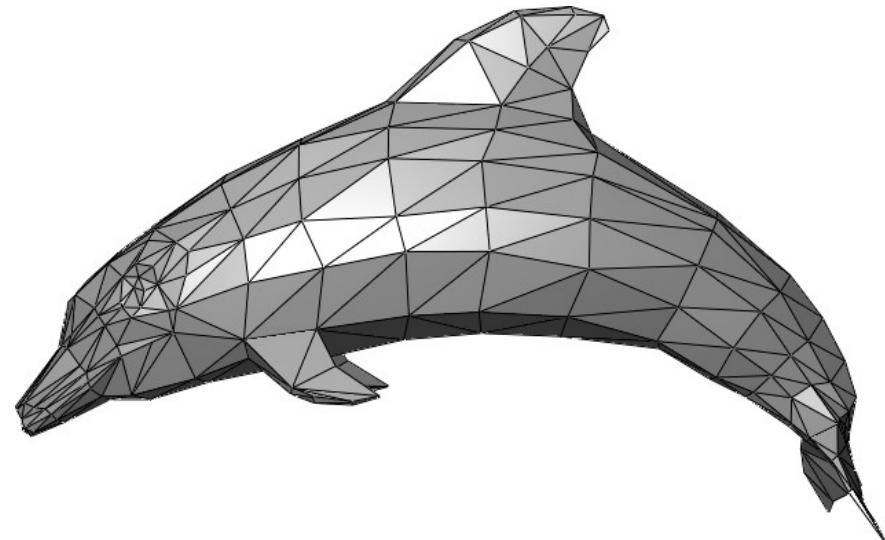
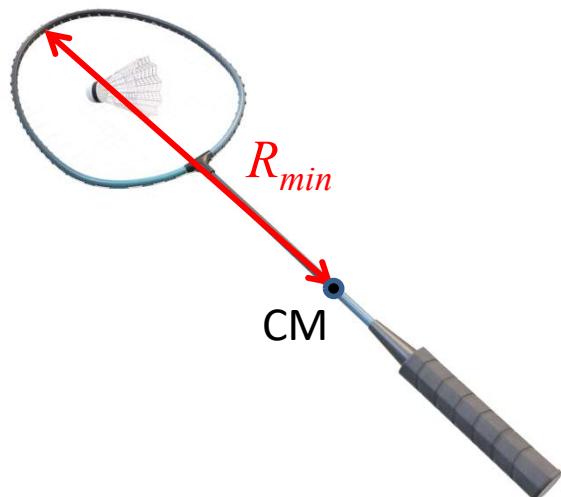
[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)



Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

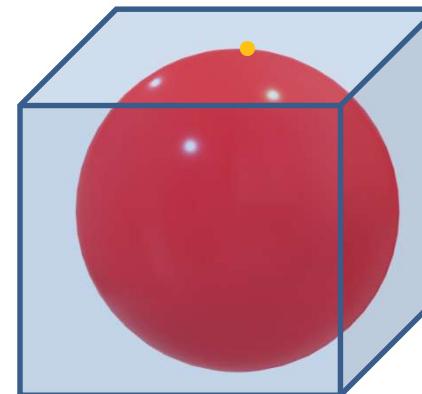
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

On peut aussi utiliser le même type de procédure pour déterminer si deux solides de forme arbitraire sont en contact de façon certaine. Pour ce faire, nous définirons la sphère de rayon maximal $R_{\max,i}$ centrée sur le centre de masse du solide qui est englobée complètement par le solide.



La sphère doit toucher au moins un point de la surface du solide

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

- On est assuré que les deux solides sont en contact si

$$|\vec{r}_{c,1} - \vec{r}_{c,2}| \leq R_{max,1} + R_{max,2}$$

- On ne peut rien assurer si ce n'est pas le cas.

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Le rayon $R_{\max,i}$ de la sphère englobée par le solide peut être déterminé de la façon suivante:

- Numéroter toutes les faces planes $j=1,n$ du solide i
(si la surface est courbe, on peut la discréteriser en triangles)
- Pour chaque face j , définir trois vecteurs position $\vec{d}_{i,j,1}$, $\vec{d}_{i,j,2}$ et $\vec{d}_{i,j,3}$ de trois sommets par rapport au centre de masse du solide i .
- Le rayon $R_{\max,i}$ est alors donné par:

$$R_{\max,i} = \min_{j=1,n} \left(\left| \vec{d}_{i,j,1} \cdot \hat{n}_i \right| \right)$$

Avec \hat{n}_i le vecteur unitaire normal à la face i .

$$\hat{n}_i = \frac{(\vec{d}_{i,j,1} - \vec{d}_{i,j,2}) \times (\vec{d}_{i,j,1} - \vec{d}_{i,j,3})}{|(\vec{d}_{i,j,1} - \vec{d}_{i,j,2}) \times (\vec{d}_{i,j,1} - \vec{d}_{i,j,3})|}$$

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Les avantages de cette méthode sont :

- on peut déterminer avant le début de la simulation les valeurs de $R_{\max,i}$ et $R_{\min,i}$ associées à chaque solide (les solides sont indéformables) ;
- comme on suit la trajectoire du centre de masse, la position des centres de masse est connue en tout temps ;
- une soustraction vectorielle et une norme sont suffisantes pour déterminer avec certitude si les deux solides ont des chances d'être en contact ;
- ceci fonctionne même si les solides sont en rotation.

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

L'inconvénient majeur :

- on ne peut être assuré qu'il y a contact entre les solides si

$$R_{max,1} + R_{max,2} < |\vec{r}_{c,1} - \vec{r}_{c,2}| \leq R_{min,1} + R_{min,2}$$

- Dans ce cas, il faut alors passer à une méthode plus précise comme la méthode des plans de division (separating planes).

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

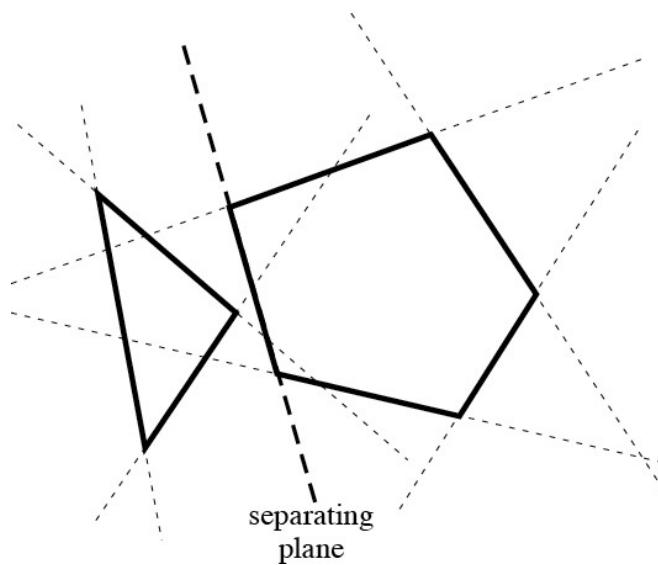
[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Méthode des plans de division

- Le principe ici consiste à déterminer si un plan de division existe entre les deux solides convexes.



Notez que cette méthode ne fonctionne pas pour des solides concaves.

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Direction du plan et normale \hat{n} au plan :

- chacune des surfaces k de nos solides peut être définie par trois points $\vec{q}_{k,1}$, $\vec{q}_{k,2}$ et $\vec{q}_{k,3}$ qui correspondent à trois coins du solide ;
- on classe ces trois points dans le sens antihoraire lorsqu'on regarde la surface de l'extérieur du solide ;
- on détermine ensuite deux vecteurs qui donnent la direction générale de la surface k dans l'espace

$$\vec{p}_{k,1} = \vec{q}_{k,1} - \vec{q}_{k,2}$$

$$\vec{p}_{k,2} = \vec{q}_{k,1} - \vec{q}_{k,3}$$

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

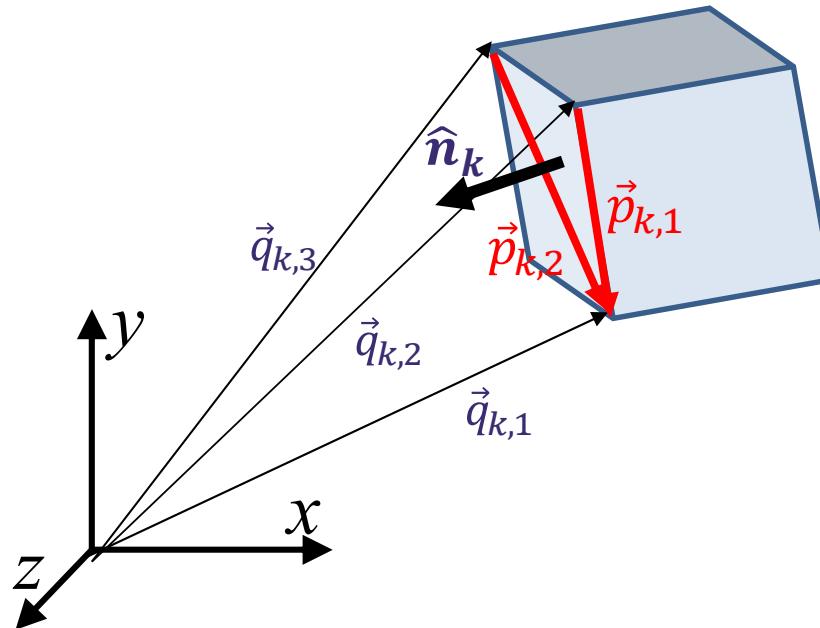
[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

La normale \hat{n}_k unitaire sortante pour le plan k est alors donnée par

$$\hat{n}_k = \frac{\vec{p}_{k,1} \times \vec{p}_{k,2}}{|\vec{p}_{k,1} \times \vec{p}_{k,2}|}$$



Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

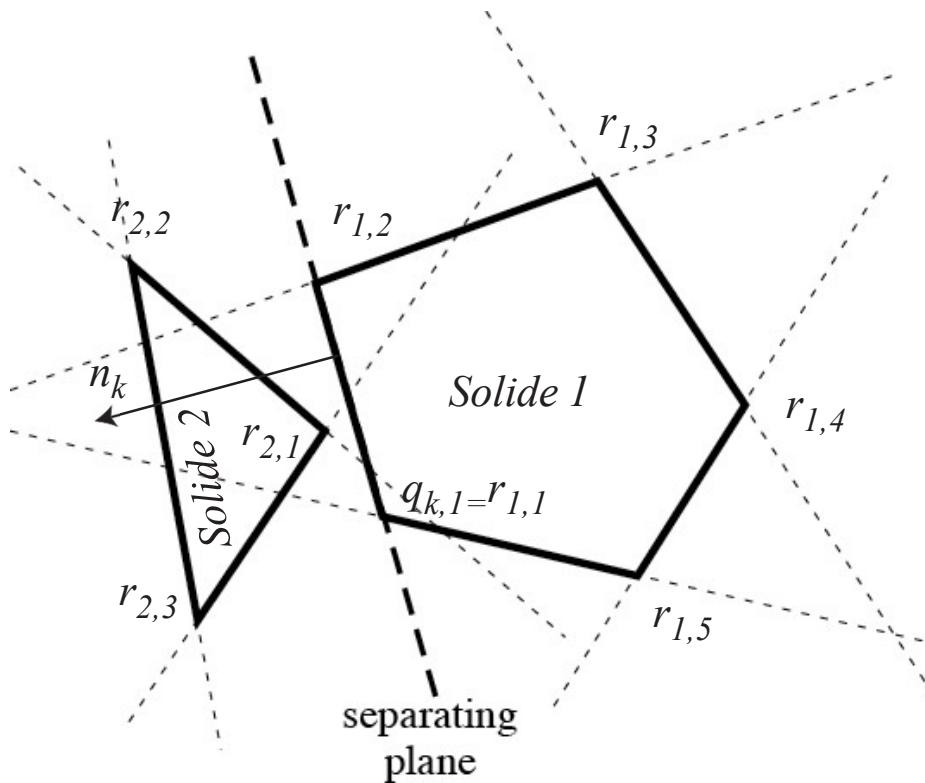
[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

La prochaine étape consiste à déterminer si les coins des solides sont au-dessus ou en dessous de la face.



Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

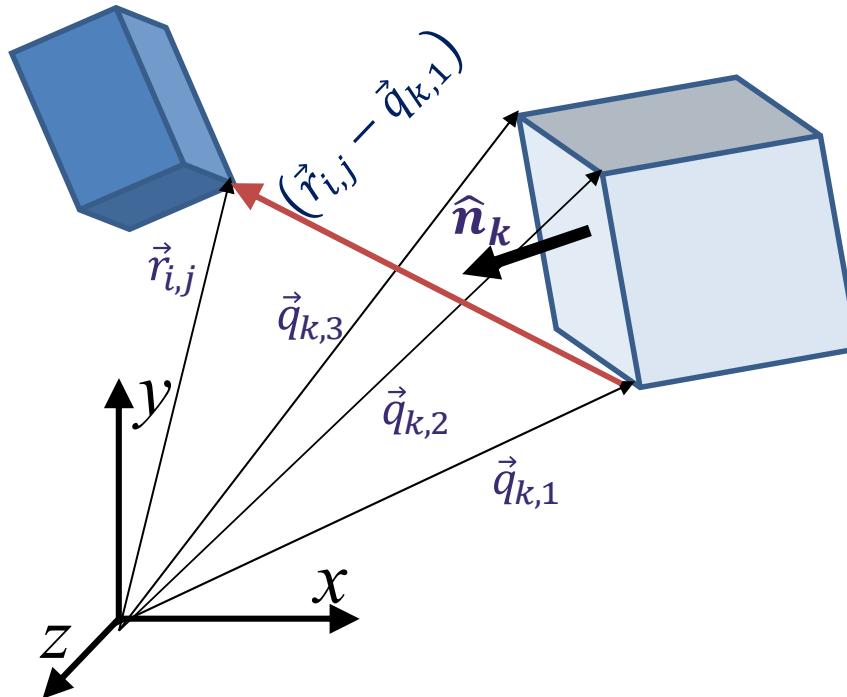
[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

La distance entre le plan qui contient le point $\vec{p}_{k,1}$ et un coin $\vec{r}_{i,j}$ (le coin d'un des deux solides) est donnée par

$$d_{i,j,k} = \hat{n}_k \cdot (\vec{r}_{i,j} - \vec{q}_{k,1})$$



Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

- Si $d_{i,j,k} < 0$ le point est en dessous du plan.
- Si $d_{i,j,k} > 0$ le point est au-dessus du plan.
- Si $d_{i,j,k} = 0$ le point est au sur le plan.

Comme de raison, la distance $d_{i,j,k} \leq 0$ pour tous les coins du solide auquel la surface k appartient (solide convexe). Il est donc nécessaire d'évaluer $d_{i,j,k}$ seulement pour les coins associés au second volume.

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Un plan de division existe si

$$d_{i,j,k} > 0$$

pour tous les coins du second solide.

- Si on est capable de trouver un plan de division, les deux solides ne sont pas en contact et ne s'interpénètrent pas.
- Sinon, il y a eu collision entre les deux solides.

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

On détermine alors le point qui a pénétré ou touché une surface de la façon suivante.

- Pour chacun des points \vec{r}_{ij} d'un solide donné on évalue $d_{i,j,k}$ pour chacune des surfaces associées au second solide.
- Le point \vec{r}_{ij} est à l'intérieur du second volume si $d_{i,j,k} \leq 0$ pour toutes les surfaces.
- Si le point est à l'intérieur du volume on peut reculer la simulation jusqu'au moment où $d_{i,j,k} = 0$ pour une valeur de k donnée, les autres distances étant toutes supérieures à 0. On a alors trouvé le point d'intersection requis.

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

On peut utiliser la même technique en 2-D.

- Dans ce cas, on supposera que tous les solides ont une extension infinie dans la direction z .
- Les trois points requis pour définir un plan en 3-D étant

$$\begin{aligned}\vec{q}_{k,1} &= (x_{k,1}, y_{k,1}, 0) \\ \vec{q}_{k,2} &= (x_{k,2}, y_{k,2}, 0) \\ \vec{q}_{k,3} &= \vec{q}_{k,1} + (0, 0, z) = (x_{k,1}, y_{k,1}, z)\end{aligned}$$

on aurait aussi pu utiliser

$$\vec{q}_{k,3} = \vec{q}_{k,2} + (0, 0, z) = (x_{k,2}, y_{k,2}, z)$$

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

- On choisira $z = 1$ ou $z = -1$ de façon à assurer que les trois points décrivent un parcours antihoraire pour un observateur à l'extérieur du solide.
- La normale en 2-D devient alors

$$\hat{n}_k = z \frac{(p_{k,1,y} \hat{i} - p_{k,1,x} \hat{j})}{|\vec{p}_{k,1}|}$$

- Le reste des calculs se poursuit en utilisant exclusivement des vecteurs en 2-D.

Détection des collisions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Commentaires finaux :

- cette procédure ne fonctionne que pour des solides convexes ;
- Les faces courbes des solides peuvent être discrétisées en polyèdres triangulaires et procéder tel que décrit plus haut ;
- si on ne considère que des points localisés aux coins des solides, cette technique détectera les intersections entre un coin du solide et une surface, mais ne fonctionnera pas si ce sont les arêtes des solides qui se touchent (ou les surfaces) ;
- il faut alors considérer d'autres points du solide (affiner la discrétisation) ou utiliser une technique différente.

Collision sphères et solides réguliers

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Pour les collisions entre des sphères et des solides réguliers on peut utiliser une analyse directe. Nous illustrons ici ce principe en considérant deux cas : collisions avec des parallélépipèdes et des cylindres.

La première étape consiste à identifier tous les types de collision possibles. Pour des parallélépipèdes (arête a , b et c), les collisions possibles sont avec

1. une des 6 faces du parallélépipède;
2. une des 12 arêtes du parallélépipède;
3. un des 8 coins du parallélépipède.

Pour les cylindres (hauteur L et rayon R), ce sera

1. une des 3 faces du cylindre (disques du haut et bas et surface cylindrique) ;
2. une des 2 arêtes du cylindre (cercles du haut et du bas).

Collision sphères et solides réguliers

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

La seconde étape consiste à ramener les parallélépipèdes et les cylindres (ou autres solides réguliers) dans des systèmes de référence où les calculs seront facilités.

- Pour les parallélépipèdes, ce système correspondra à la situation où les arêtes du parallélépipède seront parallèles aux axes du système où nous effectuerons nos calculs avec le centre de masse à l'origine.
- On tournera le cylindre de façon à ce que son axe principal soit dans la direction z et on le déplacera ensuite pour que son centre de masse soit à l'origine.

Collision sphères et solides réguliers

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Les collisions pour un parallélépipède avec une sphère de rayon r seront détectées de la façon qui suit.

1. Surfaces :

La sphère touchera ou pénètrera une face du parallélépipède si une droite partant de son centre, dans la direction \hat{u} normale à la surface, croise la surface plane à une distance $d \leq r$ (intersection d'une droite et d'un plan).

2. Arêtes :

Une des lignes de direction x , y ou z et de longueur finie ($-a/2 < x < a/2$, $-b/2 < y < b/2$ et $-c/2 < z < c/2$) qui correspond à une arête croise la sphère (intersection d'une droite et d'une sphère).

3. Coins :

Un des coins se retrouve à l'intérieur de la sphère (intersection d'un point et d'une sphère).

Collision sphères et solides réguliers

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des](#)

[conditions initiales](#)

[Détection des](#)

[collisions](#)

[Collision sphères et](#)

[solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Pour le cylindre la procédure est la suivante.

1. Surface du haut et du bas :

La sphère touche la surface du haut ou du bas (direction z) si une droite partant de son centre dans la direction z croise la surface à une distance $d \leq r$ (intersection d'une droite et d'un plan).

2. Surface cylindrique :

Pour une sphère centrée à (x', y', z') après rotation et translation du cylindre, le cercle de rayon r localisé à la hauteur z' croise la surface cylindrique.

3. Arêtes localisées à la position $h = \pm L/2$:

Un cercle de rayon $r' = \sqrt{r^2 - (z' - h)^2}$ croise le cercle de rayon R correspondant à l'arête cylindrique.

Conclusions

[Dynamique des collisions](#)

[Méthode des forces](#)

[Méthode des conditions initiales](#)

[Détection des collisions](#)

[Collision sphères et solides réguliers](#)

[Conclusions](#)

Prochain chapitre l'optique.