PHS4700 Physique pour les applications multimédia

Exemple d'examen final

Instructions :

- Toute la documentation papier est permise.
- Les calculatrices non programmables sont permises.
- Durée de l'examen : 2.5 heures
- Rendre le questionnaire (6 pages) avec les cahiers de réponses.

Information additionnelle

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2.

Pour l'équation différentielles vectorielle suivante :

$$\frac{d\vec{f}(t)}{dt} = \vec{g}(\vec{f}(t), t)$$

La solution au temps $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, si l'on connait la solution $\vec{f}(t_{i-1})$ au temps t_{i-1}, est donnée par

$$\vec{f}(t_i) = \vec{f}(t_{i-1}) + \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$$

où

$$\vec{k}_1 = \Delta t \vec{g}(\vec{f}(t_{i-1}), t_{i-1})$$
$$\vec{k}_2 = \Delta t \vec{g}(\vec{f}(t_{i-1}) + \vec{k}_1, t_{i-1} + \Delta t)$$

Question 1. Connaissances générales (15 points)

(a) (**5 points**) Déterminer la direction de la force de Magnus pour une sphère ayant une vitesse angulaire $\vec{\omega} = (0, 1, 0)$ rad/s et une vitesse linéaire $\vec{v} = (1, 1, 1)$ m/s.

Solution

La force sera dirigée dans la direction $x = -z$ *(direction* $(1, 0, -1)/\sqrt{2}$*).*

(b) (**5 points**) Une balle de golf de rayon $r_b = 2.2$ cm qui se déplace sur le gazon avec une vitesse (centre de masse) $\vec{v}_b = (25, 0, 0)$ cm/s et une vitesse de rotation $\vec{\omega} = (0, 10, 0)$ rad/s roule-t-elle ou glisse-t-elle?

Solution

La balle glisse.

(c) (**5 points**) Une auto-patrouille vous poursuit sur une autoroute à une vitesse de 150 km/h alors que vous vous déplacez à 120 km/h. Quelle sera la fréquence sonore que vous percevrez si la sirène de l'auto-patrouille émet un bref signal sonore à 500 Hz? Vous pouvez supposer que la température de l'air ambiant est de 0 C.

Solution

La fréquence que vous percevrez est de 514 Hz.

Question 2. Moment de force et vitesse angulaire en apesanteur (20 points)

Un cube de masse $M_s = 1$ kg et de côté $a = 0.2$ m flotte dans l'espace, son centre de masse étant localisé au point $\vec{r}_c = (2, 3, 1)$ m. On applique une force externe $\vec{F}_e = (0, 0, -10)$ N sur le coin du cube localisé à $\vec{r}_e = (2.1, 2.9, 0.9)$. Vous supposerez que les axes du cube sont alignés avec les axes x, y, et z. La seule force dont il faut tenir compte est la force externe.

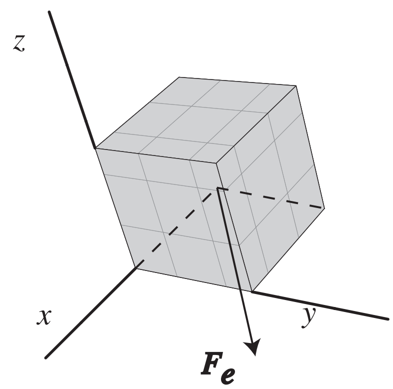

Figure 1: Cube qui flotte dans l'espace et sur lequel une force externe est appliquée.

(a) (**7 points**) Calculer le moment de force et l'accélération angulaire autour du centre de masse du cube qui résultent de la force externe.

Solution

Le moment de force est

$$\vec{\tau}(1, 1, 0) \textit{ N m}$$

L'accélération angulaire est

$$\vec{\alpha} = (150, 150, 0) \textit{ rads/s}^2$$

(b) (**6 points**) Déterminer la matrice correspondant à une rotation du cube d'un angle $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x.

Solution

La matrice de rotation est

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(c) (**7 points**) Déterminer le moment de force et l'accélération angulaire dans le système local du cube après que celui-ci ait effectué une rotation de $\theta = -\pi/4$ autour de l'axe des x (les faces du cube après rotation sont perpendiculaires aux axes x, y' et z' du système local du cube). Vous supposerez que la force externe est toujours appliquée au même coin du cube.

Solution

Le moment de force dans le système du cube est

$$\vec{\tau}' = (\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \text{ } N\,m$$

L'accélération angulaire dans le système du cube est

$$\vec{\alpha}' = 75\sqrt{2}\,(2, 1, 1)$$

Question 3. Résolution numérique des équations du mouvement (20 points).

Une fusée de vitesse initiale $v_z(0) = 0$ m/s lancée de la surface de la Terre ($z(0) = 0$ m) subit une force gravitationnelle $F_g(z,t)$ ayant la forme

$$F_g(z,t) = -9.8\frac{m(t)}{(1 + 1.5 \times 10^{-7} z(t))^2}$$

où z est la position de la fusée par rapport au sol et $m(t)$ la masse de la fusée en fonction du temps donnée par la relation

$$m(t) = m_0 - kt$$

car la fusée de masse initiale $m_0 = 1250$ kg éjecte des gaz de combustion à un rythme de $k = 50$ kg/s. La force $F_e(t)$ que ces gaz exercent sur la fusée est donnée par

$$F_e(t) = ku$$

car ils sont éjectés avec une vitesse relative constante $u = 600$ m/s.

(a) (**8 points**) Quelles sont les équations du mouvement (en 1D) qui doivent être résolues afin de déterminer la vitesse $v_z(t)$ et la position $z(t)$ de la fusée en tout temps?

Solution

Les équations du mouvement sont données par

$$\frac{dv_z(t)}{dt} = a_z(z(t), t)$$
$$\frac{dz(t)}{dt} = v_z(t)$$

avec

$$a_z(z(t), t) = \frac{1}{m(t)}\left(F_g(z(t), t) + F_e(t)\right) = \frac{30000}{1250 - 50t} - 9.8\frac{1}{(1 + 1.5 \times 10^{-7} z(t))^2}$$

(b) (**12 points**) En utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (voir page couverture) avec un pas de temps $\Delta t = 1.0$ s, déterminer la vitesse et la position de la fusée à $t = 1.0$ s.

Solution

Ici, nous supposerons que $\vec{f}(t) = (v_z(t), z(t))$ *et* $\vec{g} = (a_z(z(t), t), v_z(t))$. *Pour obtenir la solution à* $t = 1$ *seconde il faut donc calculer*

$$\vec{k}_1 = \left(\frac{30000}{1250} - 9.8, 0\right) = (14.2, 0)$$
$$\vec{k}_2 = \left(\frac{3000}{1250 - 50} - 9.8, 14.2\right) = (15.2, 14.2)$$

Les solutions à $t = 1$ *s est donc*

$$v_z(1) = 14.7 \text{ m/s}$$
$$z(1) = 7.1 \text{ m}$$

Question 4. Tir d'une boîte de conserve en chute libre avec une balle (25 points).

Le but du jeu est de frapper une boîte de conserve cylindrique avec une balle de façon à la faire dévier. La balle à un rayon $R_{\text{balle}} = 5$ cm et une masse $m_{\text{balle}} = 150$ g. La boîte de conserve pleine, de hauteur $h_{\text{boîte}} = 12$ cm, de rayon $R_{\text{boîte}} = 3$ cm et de masse $m_{\text{boîte}} = 450$ g, est alignée avec l'axe de z.

(a) (**15 points**) En supposant qu'au temps t, le centre de masse de la balle est localisé à $\vec{r}_{\text{balle}}(t)$ et que celui de la boîte de conserve est à $\vec{r}_{\text{boîte}}(t)$, décrire l'algorithme requis pour déterminer s'il y a un contact entre la balle et la boîte.

Solution

Trois types de collision possibles:

- *Collision avec le dessous ou le dessus de la boîte.*
- *Collision avec le côté de la boîte.*
- *Collision avec un coin (dessous ou dessus) de la boîte.*

Nous déplacerons aussi le système de façon à ce qu'il soit centré à $\vec{r}_{\textit{boîte}}(t)$. Dans ce nouveau système

$$\vec{r}_{t,\textit{boîte}}(t) = (0,0,0)^T$$
$$\vec{r}_{t,\textit{balle}}(t) = \vec{r}_{\textit{balle}}(t) - \vec{r}_{\textit{boîte}}(t)$$

L'algorithme de détection est alors le suivant.

i. *Collision avec le fond ou le dessus de la boîte.*
Le centre de masse de la balle dans le plan $x - y$ doit alors être tel qu'il se retrouve dans la projection du cylindre dans ce même plan. Donc

$$(x_{t,\textit{balle}})^2 + (y_{t,\textit{balle}})^2 < (R_{\textit{boîte}})^2$$

et la collision avec la face du haut correspond à

$$z_{t,\textit{balle}} - h_{\textit{boîte}}/2 \leq R_{balle}$$

Le point de contact se situe à

$$\vec{r}_{\textit{contact}} = (x_{t,\textit{balle}}, y_{t,\textit{balle}}, h_{\textit{boîte}}/2)^T$$

Pour la collision avec la surface du bas, on utilise la condition

$$z_{t,\textit{balle}} + h_{\textit{boîte}}/2 \geq -R_{\textit{balle}}$$

Le cas $>$ correspondant à une pénétration et le point de contact se situe à

$$\vec{r}_{\textit{contact}} = (x_{t,\textit{balle}}, y_{t,\textit{balle}}, -h_{\textit{boîte}}/2)^T$$

ii. *Collision avec le côté de la boîte.*

Le centre de masse de la balle dans la direction z est entre les surfaces du bas et du haut

$$-h_{\text{boîte}}/2 < z_{t,\text{balle}} < h_{\text{boîte}}/2$$

La condition de collision est

$$R_{xy} \leq R_{\text{boîte}} + R_{\text{balle}}$$

avec

$$R_{xy} = \sqrt{(x_{t,\text{balle}})^2 + (y_{t,\text{balle}})^2}$$

Le point de contact dans le plan $x - y$ se retrouve à une distance $R_{\text{boîte}}$ du centre de masse de la boîte dans la direction $(x_{t,\text{balle}}, y_{t,\text{balle}})^T$

$$(x_{\text{contact}}, y_{\text{contact}})^T = (x_{t,\text{balle}}, y_{t,\text{balle}})^T \frac{R_{\text{boîte}}}{R_{xy}}$$

et donc

$$\vec{r}_{\text{contact}} = (x_{\text{contact}}, y_{\text{contact}}, z_{t,\text{balle}})^T$$

iii. *Collision avec un coin de la boîte.*

Pour le coin du haut, le centre de masse de la balle doit satisfaire

$$0 \leq z_{t,\text{balle}} - h_{\text{boîte}}/2 \leq R_{balle}$$

et

$$R_{\text{boîte}} < R_{xy} \leq R_{\text{boîte}} + R_{\text{balle}}$$

Ceci correspondra donc à l'intersection de deux cercles dans le plan $x - y$ à la hauteur $z = h_{\text{boîte}}/2$ de rayons $R_{\text{boîte}}$ et R_{contact} donné par

$$R_{\text{contact}} = \sqrt{(R_{balle})^2 - (z_{t,\text{balle}} - h_{\text{boîte}}/2)^2}$$

la condition de collision étant

$$R_{xy} \leq R_{\text{boîte}} + R_{\text{contact}}$$

le cas $<$ correspondant encore à une pénétration.

Le point de contact dans le plan $x - y$ se retrouve à une distance $R_{\textit{boîte}}$ du centre de masse de la boîte dans la direction $(x_{t,\textit{balle}}, y_{t,\textit{balle}})^T$

$$(x_{\textit{contact}}, y_{\textit{contact}})^T = (x_{t,\textit{balle}}, y_{t,\textit{balle}})^T \frac{R_{\textit{boîte}}}{R_{xy}}$$

et donc

$$\vec{r}_{\textit{contact}} = (x_{\textit{contact}}, y_{\textit{contact}}, h_{\textit{boîte}}/2)^T$$

Pour le coin du bas, le centre de masse de la balle doit satisfaire

$$-R_{balle} \leq z_{t,\textit{balle}} + h_{\textit{boîte}}/2 < 0$$

et

$$R_{\textit{boîte}} < R_{xy} \leq R_{\textit{boîte}} + R_{\textit{balle}}$$

Ceci correspondra à l'intersection de deux cercles dans le plan $x - y$ à la hauteur $z = -h_{\textit{boîte}}/2$ de rayons respectifs $R_{\textit{boîte}}$ et $R_{\textit{contact}}$ donné par

$$R_{\textit{contact}} = \sqrt{(R_{balle})^2 - (z_{t,\textit{balle}} + h_{\textit{boîte}}/2)^2}$$

la condition de collision étant

$$R_{xy} \leq R_{\textit{boîte}} + R_{\textit{contact}}$$

le cas $<$ correspondant à une pénétration .
Le point de contact dans le plan $x - y$ se retrouve à une distance $R_{\textit{boîte}}$ du centre de masse de la boîte dans la direction $(x_{t,\textit{balle}}, y_{t,\textit{balle}})^T$

$$(x_{\textit{contact}}, y_{\textit{contact}})^T = (x_{t,\textit{balle}}, y_{t,\textit{balle}})^T \frac{R_{\textit{boîte}}}{R_{xy}}$$

et donc

$$\vec{r}_{\textit{contact}} = (x_{\textit{contact}}, y_{\textit{contact}}, -h_{\textit{boîte}}/2)^T$$

(b) (**10 points**) En utilisant cet algorithme, déterminer le point de contact entre la balle et la boîte si les positions des centres de masse de la balle et de la boîte de conserve sont respectivement $\vec{r}_{\text{balle}} = (-0.06, 0.0, 4)$ m et $\vec{r}_{\text{boîte}} = (0, 0, 3.90)$ m.

Solution

Contact avec le rebord supérieur de la boîte de conserve au point

$$\vec{r}_{\textit{int}} = (-0.03, 0, 3.96)$$