# INF8111 - Rappel sur la relaxation Lagrangienne

Quentin Fournier

7 octobre 2019

Notez que ce rappel est une introduction incomplète à la relaxation Lagrangienne. Pour plus de détails et de formalisme, voir `https://www.stat.cmu.edu/~ryantibs/convexopt-F15/scribes/11-dual-gen-scribed.pdf`.

Soit un problème d'optimisation appelé *primal* (P) :

$$\min_x f(x) \qquad \text{tel que } g(x) = 0,\ h(x) \leq 0 \tag{1}$$

Avec $g : x \to \mathbb{R}^p$ et $h : x \to \mathbb{R}^q$, soient $p$ contraintes d'égalités et $q$ contraintes d'inégalités à relaxer.

Le *Lagrangien* du problème primal (P) est la fonction $L_P$ :

$$\begin{aligned} L_P(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g(x)_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h(x)_j && \text{tel que } \mu_j \geq 0,\ \forall j && (2) \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x) && \text{tel que } \ \mu \geq 0 && (3) \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}^p$ et $\mu \in \mathbb{R}^q$ sont les vecteurs des multiplicateurs Lagrangien.

La *fonction duale* $L_D$ associée au problème (P) :

$$\begin{aligned} L_D(\lambda, \mu) &= \inf_x L_P(x, \lambda, \mu) && \text{tel que } \mu \geq 0 && (4) \\ &\leq f(x) && \forall x \text{ tel que } g(x) = 0,\ h(x) \leq 0 && (5) \end{aligned}$$

$L_D$ est une borne inférieure de $f(x)$. La meilleure borne est donnée par le théorème de dualité faible :

maximum du minimum

max

$$\sup_{\lambda, \mu} L_D(\lambda, \mu) = \sup_{\lambda, \mu} \inf_x L_P(x, \lambda, \mu) \qquad \text{tel que } \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0 \tag{6}$$

Si la fonction à minimiser $f(x)$ est convexe, et les contraintes $g(x)$ et $h(x)$ sont affines, alors le théorème de dualité forte (selon les conditions de Slater[1]) implique l'égalité :

$$\sup_{\lambda, \mu} L_D(\lambda, \mu) = \min_x f(x) \qquad \text{tel que } g(x) = 0,\ h(x) \leq 0 \tag{7}$$

1. Pour plus de détail, voir : `https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee227a/fa10/login/l_dual_strong.html`