# INF8111 - Rappel sur les matrices

#### Quentin Fournier

#### 7 octobre 2021

Pour une liste exhaustive des notations, définitions, propriétés et opérations matricielles, voir l'excellent  $The\ Matrix\ Cookbook^{\,1}.$ 

#### **Notations**

— Scalaire : x = 3

— Vecteur : 
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Matrice : 
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

### **Définitions**

— Tranposée :  $\mathbf{X}_{i,j}^{\top} = \mathbf{X}_{j,i}$ 

— Inverse (si définie) :  $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I}$ 

— Matrice orthogonale :  $\mathbf{X}^{\top} = \mathbf{X}^{-1}$ 

## Propriétés

 $-- (\mathbf{X}\mathbf{Y})^\top = \mathbf{Y}^\top \mathbf{X}^\top$ 

 $-- (XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$ 

### Dérivées <sup>2</sup>

 $- \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A} x = \mathbf{A}^{\top}$ 

 $- \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{\top} \boldsymbol{x} = 2 \boldsymbol{x}^{\top}$ 

1. https://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/matrixcookbook.pdf

2. Traduit de l'annexe A du livre Data Mining, Fourth Edition : Practical Machine Learning Tools and Techniques

$$\begin{aligned} & - & \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{a}^{\top} \mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{x}^{\top} \mathbf{a} = \mathbf{x} \\ & - & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}^{\top} \mathbf{x} \\ & - & \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \mathbf{y}^{\top} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \mathbf{x}^{\top} \\ & - & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a} - \mathbf{x})^{\top} (\mathbf{a} - \mathbf{x}) = 2(\mathbf{a} - \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Soit C une matrice symétrique (telle que la matrice de covariance) :

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^{\top} \mathbf{C}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 2\mathbf{C}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ & - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^{\top} \mathbf{C}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = -2\mathbf{C}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ & - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{w})^{\top} \mathbf{C}(\boldsymbol{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{w}) = -2\mathbf{A}^{\top} \mathbf{C}(\boldsymbol{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

# Décomposition QR

Soit X une matrice. La décomposition QR de X est une décomposition de la forme X = QR, où Q est une matrice orthogonale et R est une matrice triangulaire supérieure.