Modellierung und Optimierung mit OPL

3 Techniken der binären Modellierung

Andreas Popp

Inhalt

A. Popp

3.1 Abbildung logischer Ausdrücke

3.2 Entscheidungs-abhängige Nebenbedingungen

Die Big-M-Methode

OPL: Modellieren von Zeitperioden

Disjunktive Nebenbedingungen

3.3 OPL: Kompakte Schreibweise

3.4 Stückweise definierte Funktionen

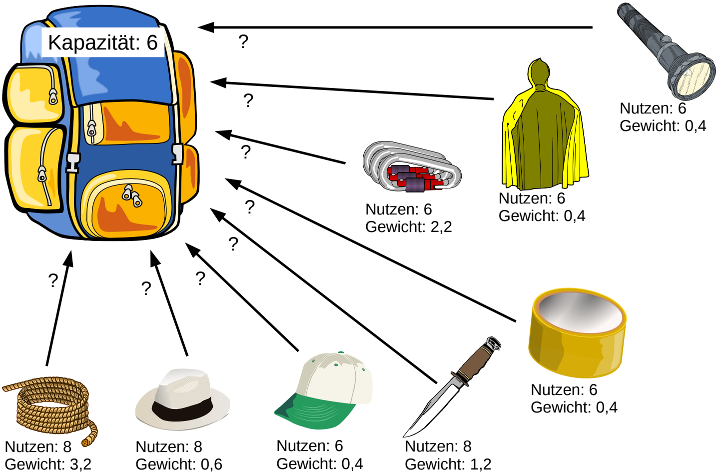
Treppenfunktionen

Stückweise lineare Funktionen

OPL: Der piecewise-Befehl

3.1 Abbildung logischer Ausdrücke

Beispiel: Adventure Inc.



Modell: Rucksackproblem

Indexmengen:

I Menge der Gegenstände

Parameter:

w_i Gewicht von Gegenstand $i \in I$

u_i Nutzen von Gegenstand $i \in I$

c Kapazität des Rucksacks

Entscheidungsvariablen:

x_i Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird

Modellbeschreibung:

$$\max \sum_{i \in I} u_i \cdot x_i$$

$$s.t. \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c \qquad \text{(I)}$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I$$

Logische Verknüpfungen

- $\neg$ Die logische **Negation**
- $\wedge$ Das logische **Und**
- $\vee$ Das logische **Oder**
- $\veebar$ Das logische **exklusive Oder**(„Entweder-Oder“)
- $\Rightarrow$ Die logische **Implikation**
- $\Leftrightarrow$ Die logische **Äquivalenz**

Wahrheitstafel in numerischer Beschreibung

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1

Logische Verknüpfungen in binären Optimierungsmodellen

Beispiel: Seien x_1 und x_2 binäre Entscheidungsvariablen eines Rucksackproblems, die angeben, ob die Gegenstände I_1 und I_2 eingepackt werden.

$\neg I_1$: Man möchte wissen ob I_1 nicht eingepackt ist.

- $1 - x_1$

$I_1 \wedge I_2$: Sowohl Gegenstand 1 als auch Gegenstand 2 müssen eingepackt werden.

- $x_1 + x_2 = 2$

$I_1 \vee I_2$: Mindestens einer der Gegenstände muss eingepackt werden.

- $x_1 + x_2 \geq 1$

$\neg(I_1 \wedge I_2)$: Höchstens einer der Gegenstände darf eingepackt werden.

- $x_1 + x_2 \leq 1$

Logische Verknüpfungen in binären Optimierungsmodellen

Beispiel: Seien x_1 und x_2 binäre Entscheidungsvariablen eines Rucksackproblems, die angeben, ob die Gegenstände I_1 und I_2 eingepackt werden.

$\neg(I_1 \vee I_2)$: Keiner der Gegenstände darf eingepackt werden.

- $x_1 + x_2 = 0$

$I_1 \veebar I_2$: Genau einer der Gegenstände muss eingepackt werden.

- $x_1 + x_2 = 1$

$I_1 \Rightarrow I_2$: Wenn I_1 eingepackt ist, muss auch I_2 eingepackt werden.

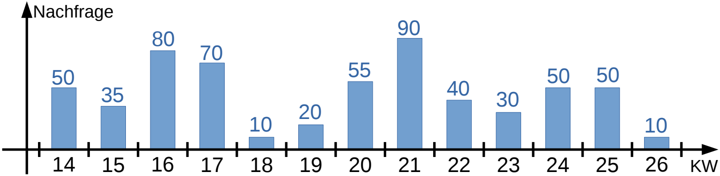
- $x_1 \leq x_2$

$I_1 \Leftrightarrow I_2$: Die Entscheidung für beide Gegenstände ist identisch.

- $x_1 = x_2$

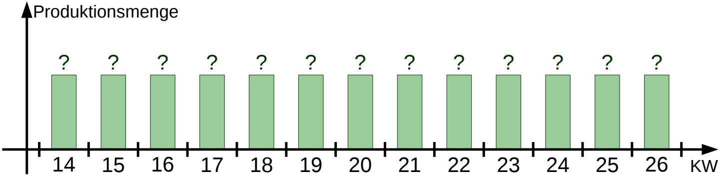
3.2 Entscheidungsabhängige Nebenbedingungen

Beispiel: Lewig Wakuxi



Rüstkosten pro Periode: 25.000€

Lagerkosten von einer Periode auf die nächste pro Einheit: 100€



Modell: Wagner-Whitin-Problem

Indexmengen:

T Menge der Planungsperioden $\{t_{min}, \ldots, t_{max}\}$

Parameter:

d_t Nachfrage in Periode $t \in T$

s_t Rüstkostensatz in Periode $t \in T$

h_t Lagerkostensatz in Periode $t \in T$

$i_{t_{min}-1}$ Anfangsbestand

M Eine große Zahl

Entscheidungsvariablen:

x_t Produktionsmenge in Periode $t \in T$

i_t Bestand am Ende von Periode $t \in T$

y_t Produktionsentscheidung in Periode $t \in T$

Modellbeschreibung:

$$\min \sum_{t \in T} s_t \cdot y_t + h_t \cdot i_t$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & i_t = i_{t-1} + x_t - d_t && \forall t \in T && \text{(I)} \\ & x_t \leq M \cdot y_t && \forall t \in T && \text{(II)} \\ & x_t, i_t \geq 0; \; y_t \in \{0,1\} && \forall t \in T && \end{aligned}$$

Die Big-M-Methode

Sei $\bar{\mathbf{x}}$ der Vektor der Entscheidungsvariablen und f eine lineare Funktion. Die Nebenbedingung

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq b \qquad \text{bzw.} \qquad f(\bar{\mathbf{x}}) \geq b$$

soll nur gelten, wenn eine Entscheidung repräsentiert durch die Binärvariable y nicht getroffen wurde.

Entscheidungsabhängige Nebenbedingungen

Sei M eine ausreichend große Zahl.

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq b \quad \rightarrow \quad f(\bar{\mathbf{x}}) \leq b + M \cdot y$$
$$f(\bar{\mathbf{x}}) \geq b \quad \rightarrow \quad f(\bar{\mathbf{x}}) \geq b - M \cdot y$$

Problem bei der Implementierung von Zeitperioden

Nebenbedingung aus Beispiel „Lewig Wakuxi“

$$i_t = i_{t-1} + x_t - d_t \qquad \forall t \in T \qquad \text{(I)}$$

Implementierungsversuch 1

```
{string} T = {"KW14", "KW15", "KW16", "KW17"};
dvar float+ i[T];
  forall(t in T) i[t] == i[t-1] + x[t] - d[t];
```

❌ Operator für string - int nicht verfügbar.

Problem bei der Implementierung von Zeitperioden

Nebenbedingung aus Beispiel „Lewig Wakuxi“

$$i_t = i_{t-1} + x_t - d_t \qquad \forall t \in T \qquad \text{(I)}$$

Implementierungsversuch 2

```
{int} T = {14, 15, 16, 17};
dvar float+ i[T];
  forall(t in T) i[t] == i[t-1] + x[t] - d[t];
```

Der Index für den Array "i" liegt außerhalb des gültigen Bereichs: 13.

Problem bei der Implementierung von Zeitperioden

Nebenbedingung aus Beispiel „Lewig Wakuxi“

$$i_t = i_{t-1} + x_t - d_t \qquad \forall t \in T \qquad \text{(I)}$$

Implementierungsversuch 3

```
{int} T = {14, 15, 16, 17};
{int} T0 = {13, 14, 15, 16, 17};
dvar float+ i[T0];
  forall(t in T) i[t] == i[t-1] + x[t] - d[t];
```

Problem bei der Implementierung von Zeitperioden

Nebenbedingung aus Beispiel „Lewig Wakuxi“

$$i_t = i_{t-1} + x_t - d_t \qquad \forall t \in T \qquad \text{(I)}$$

Implementierungsversuch 4

```
int Tmin = 14;
int Tmax = 17;
range T = Tmin..Tmax;
dvar float+ i[Tmin-1..Tmax];
  forall(t in T) i[t] == i[t-1] + x[t] - d[t];
```

Disjunktive Nebenbedingungen I

Ein Modell habe die beiden folgenden Nebenbedingungen:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq b$$
$$g(\bar{\mathbf{x}}) \leq d$$

Es reicht eine der beiden Bedingungen zu erfüllen.

Disjunktive Nebenbedingungen

Sei M eine ausreichend große Zahl und y eine binäre Hilfsvariable.

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq b + M \cdot y$$
$$g(\bar{\mathbf{x}}) \leq d + M \cdot (1 - y)$$

$\geq$-Nebenbedingungen analog

Disjunktive Nebenbedingungen II

Ein Modell habe die folgende Nebenbedingungen:

$$g(\bar{\mathbf{x}}) \leq d$$

Diese muss nur erfüllt werden, wenn gilt:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) > b$$

Disjunktive Nebenbedingungen

Sei M eine ausreichend große Zahl und y eine binäre Hilfsvariable.

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \leq b + M \cdot y$$
$$g(\bar{\mathbf{x}}) \leq d + M \cdot (1 - y)$$

$\geq$-Nebenbedingungen analog

3.3 OPL: Kompakte Schreibweise

Entscheidungsausdrücke

Zielfunktion des Wagner-Whitin-Problems:

```
// Zielfunktion
minimize sum(t in T)(s[t]*y[t] + h[t]* i[t]);
```

Zerlegen in Entscheidungsausdrücke:

```
// Entscheidungsausdrücke
dexpr float setupCost = sum(t in T)(s[t]*y[t]);
dexpr float inventoryCost = sum(t in T)(h[t]*i[t]);

// Zielfunktion
minimize setupCost + inventoryCost;
```

Arrays von Entscheidungsausdrücken

Zielfunktion des Wagner-Whitin-Problems:

```
// Zielfunktion
minimize sum(t in T)(s[t]*y[t] + h[t]* i[t]);
```

Zerlegen in Entscheidungsausdrücke:

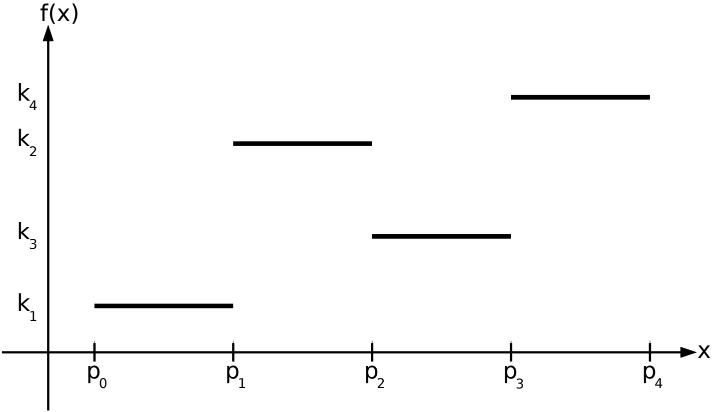
```
//Entscheidungsausdrücke
dexpr float periodCost[t in T]
 = s[t]*y[t] + h[t]*i[t];

 // Zielfunktion
minimize sum (t in T)(periodCost[t]);
```

3.4 Stückweise definierte Funktionen

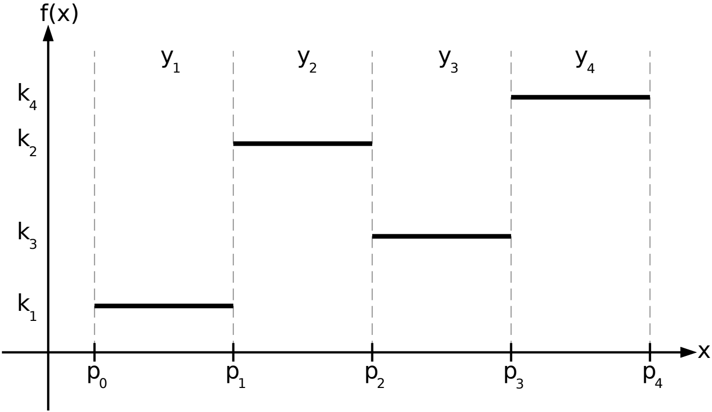
Treppenfunktionen

Sei x eine kontinuierliche Entscheidungsvariable:



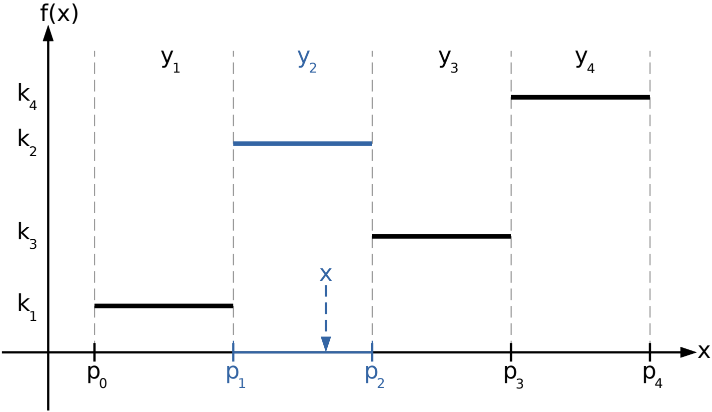
Treppenfunktionen

Sei x eine kontinuierliche Entscheidungsvariable:



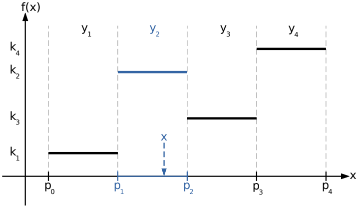
Treppenfunktionen

Sei x eine kontinuierliche Entscheidungsvariable:



- z.B.: $x = \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{2}{3} \cdot p_2$

Entscheidungsvariablen als Konvexkombination der Stützstellen

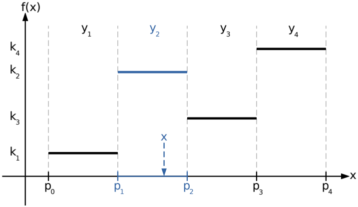


$$x = \sum_{n=0}^{N} z_n \cdot p_n$$

$$\sum_{n=0}^{N} z_n = 1$$

$$0 \leq z_n \leq 1 \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

Auswahl des korrekten Intervalls



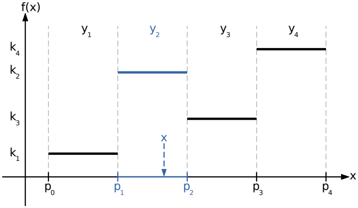
$$\sum_{n=1}^{N} y_n = 1$$

$$z_0 \leq y_1$$

$$z_n \leq y_n + y_{n+1} \quad \forall n \in \{1, \ldots, N-1\}$$

$$z_N \leq y_N$$

Vollständige Modellierung



$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} y_n \cdot k_n$$

$$x = \sum_{n=0}^{N} z_n \cdot p_n$$

$$\sum_{n=0}^{N} z_n = 1$$

$$0 \leq z_n \leq 1 \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\}$$

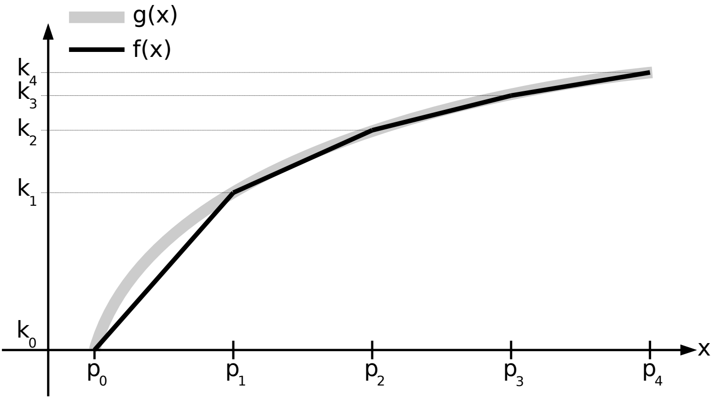
$$\sum_{n=1}^{N} y_n = 1$$

$$z_0 \leq y_1$$

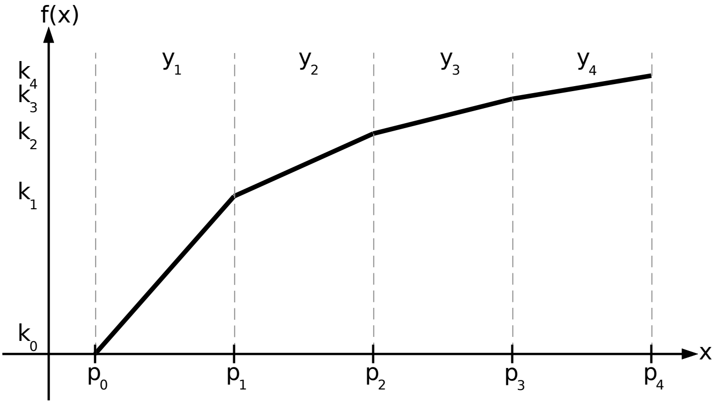
$$z_n \leq y_n + y_{n+1} \quad \forall n \in \{1, \ldots, N-1\}$$

$$z_N \leq y_N$$

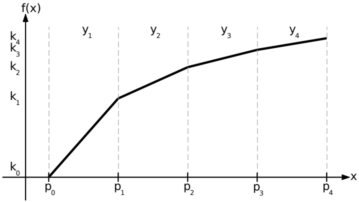
Stückweise lineare Funktionen



Stückweise lineare Funktionen



Funktionswerte als Konvexkombination



$$x = \sum_{n=0}^{N} z_n \cdot p_n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} z_n \cdot f(p_n)$$

$$\sum_{n=0}^{N} z_n = 1$$

$$0 \leq z_n \leq 1 \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\}$$

Vollständige Modellierung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} z_n \cdot k_n$$

$$x = \sum_{n=0}^{N} z_n \cdot p_n$$

$$\sum_{n=0}^{N} z_n = 1$$

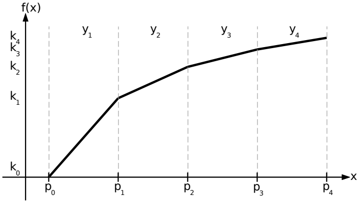
$$0 \leq z_n \leq 1 \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$\sum_{n=1}^{N} y_n = 1$$

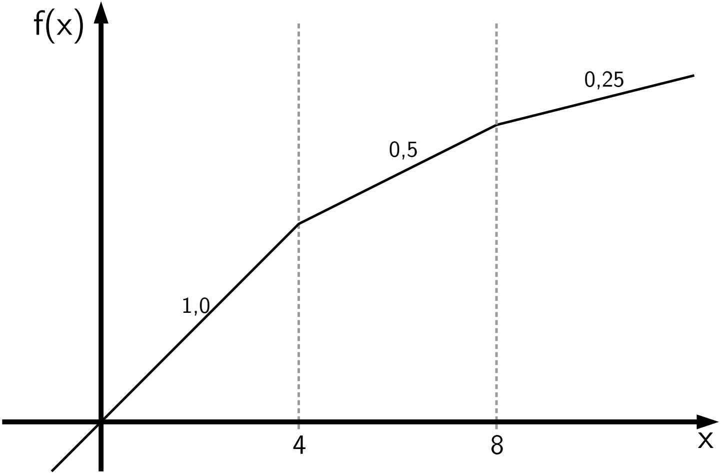
$$z_0 \leq y_1$$

$$z_n \leq y_n + y_{n+1} \quad \forall n \in \{1, \dots, N-1\}$$

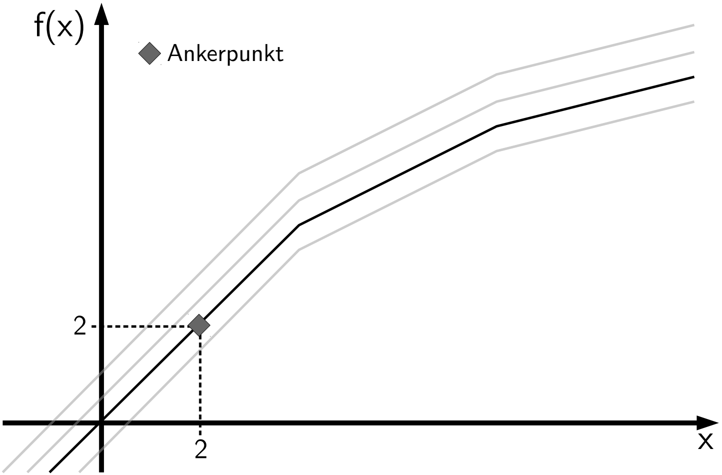
$$z_N \leq y_N$$



Stückweise lineare Funktionen nach Steigung



Verankerung von stückweise linearen Funktionen



Syntax des `piecewise`-Befehls

Array `p` der Stützstellen und Array `s` der Steigungen:

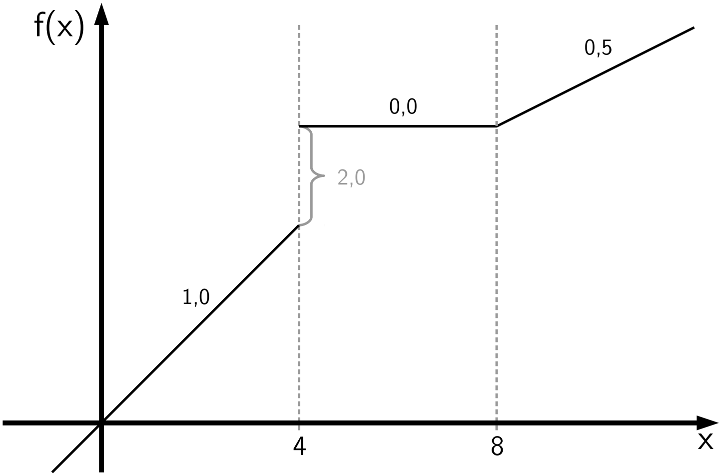
```
piecewise(i in 1..N){
  s[i] -> p[i];
  s[N+1]
} (Ankerpunkt) x;
```

Beispiel aus obiger Abbildung

```
int N = 2;
float p[1..N] = [4, 8];
float s[1..N+1] = [1.0, 0.5, 0.25];
dvar float+ x;

piecewise(i in 1..N){
  s[i] -> p[i];
  s[N+1]
} (2, 2) x;
```

Treppenfunktionen und allgemeine Unstetigkeiten



Treppenfunktionen und allgemeine Unstetigkeiten

Zweiter Steigungswert an einem Punkt im `piecewise`-Befehl wird zu Sprungwert.

Beispiel aus obiger Abbildung

```
int N = 3;
float p[1..N] = [4, 4, 8];
float s[1..N+1] = [1.0, 2.0, 0.0, 0.5];
dvar float+ x;

piecewise(i in 1..N){
  s[i] -> p[i];
  s[N+1]
} x;
```