Modellierung und Optimierung mit OPL

6 Einfache techniken der stochastischen Optimierung

Andreas Popp

Inhalt

6.1 Szenarienmethode

Beispiel: Relieve Äthiopien

Langfristige Lagerhauskapazität: 8

Lagerhausbedarf:

Ressource	Szenario I (30%)	Szenario II (30%)	Szenario III (25%)	Szenario IV (15%)
Nahrung	4	2	3	4
Trinkwasser	3	5	3	5
Medikamente	3	3	1	4

Kurzfristige Lagerhauskosten

- 3500$ für ein Nahrungsmittel-Lagerhaus
- 1600$ für ein Trinkwasser-Lagerhaus
- 5200$ für ein Lagerhaus für Medikamente

Zweistufige stochastische Optimierung

Szenarienmethode

- Spezialfall der zweistufigen stochastischen Optimierung
- Zufallsereignis = Eintritt eines von endlich vielen Szenarien
- stochastische Zielfunktion wird meist durch deren Erwartungswert ersetzt

A. Popp

Äquivalentes deterministisches Modell bei der Szenarienmethode

- Indexmenge I der Szenarien
- Parameter p_I: Eintrittswahrscheinlichkeit von Szenario $i \in I$
- Szenariounbhängige Parameter und Here-and-Now-Entscheidungsvariablen haben keinen Szenarioindex
- Szenarioabhängige Paramter und Wait-and-See-Entscheidungsvariablen haben einen Szenarioindex
- Erwartungswert der Zielfunktion ist bei endlichen Szenarien eine Konvexkombination und damit linear

Modell: Stochastische Ressourcenplanung

Indexmengen:

I	Menge der Szenarien
R	Menge der Ressourcen

Parameter:

p_i	Eintrittswahrscheinlichkeit von Szenario $i \in I$
c_r	Kosten für kurzfristige Zusatzkapaztität von Ressource $r \in R$
d_{ri}	Bedarf an Ressource $r \in R$ in Szenario $i \in I$
k	Zu verteilende Kapazität für langfristige geplante Ressourcen

Entscheidungsvariablen:

x_r	Langfristig eingeplante Kapazität für Ressource $r \in R$
y_{ri}	Kurzfristige angeschaffte Zusatzkapaztität für Ressource $r \in R$ in Szenario $i \in I$

Modellbeschreibung:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot \left(\sum_{r \in R} c_r \cdot y_{ri} \right) & & \\
s.t. \quad & \sum_{r \in R} x_r \leq k & & \text{(I)} \\
& x_r + y_{ri} \geq d_{ri} & \forall r \in R, i \in I \quad & \text{(II)} \\
& x_r, y_{ri} \in \mathbb{Z}^+ & \forall r \in R, i \in I &
\end{aligned}
$$

6.2 Wahrscheinlichkeitsbeschränkte Optimierung

Beispiel: Lewig Pattming

Verkaufspreise und Kapazität

	I_1	I_2	I_3	Kapazität
R_1	3,2	2,4	2,6	600
R_2	6,5	8,3	7,8	800
VP	1,4	1,6	1,5	

Nachfrageschätzer

$$\left.\begin{array}{l} D_{I_1} \sim N(25,10) \\ D_{I_2} \sim N(10,5) \\ D_{I_3} \sim N(18,7) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Wahrscheinlichkeit einer} \\ \text{Lieferunfähigkeit soll} < 5\% \text{ sein}\end{array}$$

Modell: Stochastisches Produktionsproblem (Variante 1)

Indexmengen:

I	Menge der Produkte
R	Menge der Ressourcen

Parameter:

v_i	Verkaufspreis von Produkt $i \in I$
c_r	Kapazität von Ressource $r \in R$
a_{ri}	Kapazitätsbedarf von Produkt $i \in I$ an Ressource $r \in R$
D_i	Nachfrage nach Produkt $i \in I$ (Zufallsvariable)
α	α-Servicegrad

Entscheidungsvariablen:

x_i	Produktionsmenge von Produkt $i \in I$

Modellbeschreibung:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} v_i \cdot x_i \\
s.t. \quad & \sum_{r \in R} a_{ri} x_i \leq c_r && \forall r \in R \qquad \text{(I)} \\
& P\left(D_i \leq x_i\right) \geq \alpha && \forall i \in I \qquad \text{(II)} \\
& x_i \geq 0 && \forall i \in I
\end{aligned}
$$

Äquivalentes deterministisches Modell bei wahrscheinlichkeitsbeschränkter Optimierung

Am Beispiel des stochastischen Produktionsproblems:

- $P(D_i \leq x_i) = F_{D_i}(x_i)$ *(Verteilungsfunktion)*
- $P\left(D_i \leq x_i\right) \geq \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \geq F_{D_i}^{-1}(\alpha)$ *(Konstante)*

Vorberechnete Konstanten des Beispiels

i	l_1	l_2	l_3
$F_{D_i}^{-1}(0{,}95)$	41,4	18,2	29,5

Modell: Stochastisches Produktionsproblem (Variante 2)

Indexmengen:

I	Menge der Produkte
R	Menge der Ressourcen

Parameter:

v_i	Verkaufspreise von Produkte $i \in I$
c_r	Kapazität von Ressource $r \in R$
a_{ri}	Kapazitätsbedarf von Produkt $i \in I$ an Ressource $r \in R$
$F_{D_i}^{-1}(\alpha)$	α-Quantil der Nachfrage nach Produkt $i \in I$

Entscheidungsvariablen:

x_i	Produktionsmenge von Produkt $i \in I$

Modellbeschreibung:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} v_i \cdot x_i \\
s.t. \quad & \sum_{r \in R} a_{ri} x_i \leq c_r && \forall r \in R \quad \text{(I)} \\
& x_i \geq F_{D_i}^{-1}(\alpha) && \forall i \in I \quad \text{(II)} \\
& x_i \geq 0 && \forall i \in I
\end{aligned}
$$