

Modellierung und Optimierung mit OPL

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

Andreas Popp



Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Beispiel: Produktionsproblem

5 Probleme mit
mehreren
Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_i \quad \forall r \in R \quad (\text{I}) \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Nebenbedingung (I) ist eine „harte“ Nebenbedingung, sie muss exakt eingehalten werden.

5.1 Weiche
Nebenbedingungen

5.2 Maximierung
vs. Minimierung

5.3 Mehrere
Zielfunktionen und
Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle
Optimierung

5.5 Bottleneck-
Zielfunktionen

Maximin- und
Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von
Maxima und Minima

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_r + o_r \quad \forall r \in R \\ & x_i, o_r \geq 0 \quad \forall i \in I, r \in R \end{aligned} \quad (I)$$

Problem: keine Optimallösung, da Lösungsraum in Optimierungsrichtung unbeschränkt

5.1 Weiche Nebenbedingungen

Maximin- und
Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Beispiel: Produktionsproblem mit Vollauslastung

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i = c_i \quad \forall r \in R \quad (\textcolor{red}{I}) \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in I\end{array}$$

Nebenbedingung (I) ist eine „harte“ Nebenbedingung, sie muss exakt eingehalten werden.

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Weiche Gleichungsbedingung

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

Lösung: Substituiere $o_r = o_r^+ - o_r^-$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i - \sum_{r \in R} k_r \cdot o_r^+ + o_r^- \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i = c_i + o_r^+ - o_r^- \quad \forall r \in R \\ & x_i, o_r^+, o_r^- \geq 0 \quad \forall i \in I, r \in R \end{aligned} \quad (\text{I})$$

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Maximax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Vorsicht bei Auflösung von Absolutbeträgen

Die Zerlegung einer Variable in zwei Summanden ist nicht eindeutig. Es muss sichergestellt sein, dass ein Summand null ist.

Beispiel: Lewbrandt GmbH

Gesamtkapazität: 120 h

Auftrag	1	2	3	4	5
Deckungsbeitrag	150 k€	100 k€	150 k€	50 k€	70 k€
Umsatz	340 k€	190 k€	220 k€	85 k€	215 k€
Abwasser	6,2 t	3,5 t	5,8 t	2,4 t	4,8 t
Kapazitätsverbrauch	65 h	35 h	65 h	15 h	25 h

Welche Aufträge sollen gefertigt werden?

→ Rucksackproblem

Problem

Es gibt drei Zielfunktionen, damit gibt es keine eindeutige Optimallösung.

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Definition: Pareto-Optimalität

Eine Lösung heißt paretooptimal, wenn es keine andere Lösung gibt, die in einer Zielgröße besser ist und in den anderen mindestens gleich gut.

Ausgewählte Lösungen des Beispiels „Lewbrandt GmbH“

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Gewinn	Umsatz	Abwasser	p.-o.
0	1	0	1	0	150	275	5,9	ja
0	1	0	1	1	220	490	10,7	nein
1	1	0	0	0	250	530	9,7	ja
1	1	0	1	0	300	615	12,1	ja

5.1 Weiche
Nebenbedingungen

5.2 Maximierung
vs. Minimierung

5.3 Mehrere
Zielfunktionen und
Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle
Optimierung

5.5 Bottleneck-
Zielfunktionen

Maximin- und
Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von
Maxima und Minima

Zielfunktionen aus Beispiel „Lewbrandt GmbH“:

- Gewinn:

$$\max f_G(\bar{\mathbf{x}}) = 150 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 + 150 \cdot x_3 + 50 \cdot x_4 + 70 \cdot x_5$$

- ▶ Umsatz:

$$\max f_U(\bar{\mathbf{x}}) = 340 \cdot x_1 + 190 \cdot x_2 + 220 \cdot x_3 + 85 \cdot x_4 + 215 \cdot x_5$$

- ▶ Abwasser:

$$\max f_A(\bar{x}) = -6,2 \cdot x_1 - 3,5 \cdot x_2 - 5,8 \cdot x_3 - 2,4 \cdot x_4 - 4,8 \cdot x_5$$

5.4 Multikriterielle Optimierung

Hauptziel & Anspruchsniveaus

Wähle **ein** Hauptziel. Definiere für die restlichen Ziele Anspruchsniveaus, die durch Nebenbedingungen sichergestellt werden.

Hauptziel & Anspruchsniveaus im Beispiel „Lewbrandt GmbH“

Sei das Hauptziel die Abwasseremission. Dabei sollen mindestens 225 k€ Gewinn und 480 k€ Umsatz gemacht werden:

$$\begin{aligned} \max \quad & f_A(\bar{\mathbf{x}}) \\ \text{s.t.} \quad & f_A(\bar{\mathbf{x}}) \geq 225 \\ & f_U(\bar{\mathbf{x}}) \geq 480 \end{aligned}$$

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (Hauptziel)

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

Indexmengen:

I Menge der Gegenstände

O Menge der Ziele

Parameter:

w_i Gewicht von Gegenstand $i \in I$

u_{oi} Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$

c Kapazität des Rucksacks

h Hauptziel $h \in O$

a_o Anspruchsniveau des Ziels $o \in O \setminus \{h\}$

Entscheidungsvariablen:

x_i Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird

Modellbeschreibung:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} u_{hi} \cdot x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c & \text{(I)} \\ & \sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i \geq a_o \quad \forall o \in O \setminus \{h\} & \text{(II)} \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (GP1)

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

Indexmengen:

I Menge der Gegenstände

O Menge der Ziele

Parameter:

w_i Gewicht von Gegenstand $i \in I$

u_{oi} Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$

c Kapazität des Rucksacks

a_o Anspruchsniveau des Ziels $o \in O$

Entscheidungsvariablen:

x_i Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird

z_o Abweichung vom Zielwert des Ziels $o \in O$

Modellbeschreibung:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{o \in O} |z_o| \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c \end{aligned} \tag{I}$$

$$\sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i = a_o + z_o \quad \forall o \in O \tag{II}$$

$$x_i \in \{0,1\}, z_o \leq 0 \quad \forall i \in I, o \in O$$

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (GP2)

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

Indexmengen:

I Menge der Gegenstände

O Menge der Ziele

Parameter:

w_i Gewicht von Gegenstand $i \in I$

u_{oi} Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$

c Kapazität des Rucksacks

a_o Zielwert des Ziels $o \in O$

b_o Abweichungskosten für Ziel $o \in O$

Entscheidungsvariablen:

x_i Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird

z_o Abweichung vom Zielwert des Ziels $o \in O$

Modellbeschreibung:

$$\min \sum_{o \in O} b_o \cdot z_o$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c \quad (\text{I})$$

$$\sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i \geq a_o - z_o \quad \forall o \in O \quad (\text{II})$$

$$x_i \in \{0,1\}, z_o \geq 0 \quad \forall i \in I, o \in O$$

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Algorithmus: Preemptive Goal Programming

1. Setze $i = 1$
2. Löse das Problem mit der Zielfunktion f_i des Ziels i .
Man erhält die Optimallösung \mathbf{x}^* und den Optimalwert f_i^* .
3. Falls $i = n$: \mathbf{x}^* ist die lexikographische Optimallösung.
Ende.
4. Füge dem Modell die folgende Nebenbedingung hinzu:
$$f_i(\mathbf{x}) = f_i^*$$
5. Setze $i = i + 1$ und gehe zu Schritt 2.

5.1 Weiche
Nebenbedingungen

5.2 Maximierung
vs. Minimierung

5.3 Mehrere
Zielfunktionen und
Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle
Optimierung

5.5 Bottleneck-
Zielfunktionen

Maximin- und
Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von
Maxima und Minima

Beispiel: Arabasta County

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Stadt	Konzerthalle	Erlebnisbad	Museum
Alubarna	1,45 M\$	1,25 M\$	1,10 M\$
Nanohana	1,00 M\$	0,95 M\$	0,90 M\$
Erumalu	0,32 M\$	0,28 M\$	0,24 M\$

Jede Einrichtung kann nur einmal gebaut werden. Welche Einrichtung soll in welcher Stadt gebaut werden?

Maximin-Probleme

5 Probleme mit
mehreren
Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

Mehrere gleich skalierte Einzel-Zielfunktionen f_1, \dots, f_N . Die Haupt-Zielfunktion lautet:

$$\max \min_{n \in \{1, \dots, N\}} f_n(\bar{\mathbf{x}})$$

5.1 Weiche
Nebenbedingungen

5.2 Maximierung
vs. Minimierung

5.3 Mehrere
Zielfunktionen und
Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle
Optimierung

5.5 Bottleneck-
Zielfunktionen

Maximin- und
Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von
Maxima und Minima

Linearisierung von Maximin-Problemen

Sei $z_{\min} \leq 0$ eine Hilfsvariable.

$$\begin{aligned} \max \quad & z_{\min} \\ \text{s.t.} \quad & f_n(\bar{\mathbf{x}}) \geq z_{\min} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \end{aligned}$$

Minimax-Probleme

5 Probleme mit
mehreren
Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

Mehrere gleich skalierte Einzel-Zielfunktionen f_1, \dots, f_N . Die Haupt-Zielfunktion lautet:

$$\min \max_{n \in \{1, \dots, N\}} f_n(\bar{\mathbf{x}})$$

5.1 Weiche
Nebenbedingungen

5.2 Maximierung
vs. Minimierung

5.3 Mehrere
Zielfunktionen und
Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle
Optimierung

5.5 Bottleneck-
Zielfunktionen

Maximin- und
Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von
Maxima und Minima

Linearisierung von Maximin-Problemen

Sei $z_{\max} \leq 0$ eine Hilfsvariable.

$$\begin{array}{ll} \min & z_{\max} \\ \text{s.t.} & f_n(\bar{\mathbf{x}}) \leq z_{\max} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \end{array}$$

Modell: Maximin-Zuordnungsproblem (Variante 1)

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

Indexmengen:

R Menge der Ressourcen

T Menge der Aufgaben

Parameter:

p_{tr} Profit bei Erfüllung von Aufgabe t durch Ressource r

Entscheidungsvariablen:

x_{tr} Binärvariable, die angibt ob Aufgabe t durch Ressource r erfüllt wird

p_{\min} Hilfsvariable für minimalen Profit

Modellbeschreibung:

max p_{\min}

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r \in R} x_{tr} = 1 \quad \forall t \in T \quad (\text{I})$$

$$\sum_{t \in T} x_{tr} \leq 1 \quad \forall r \in R \quad (\text{II})$$

$$p_{\min} \leq \sum_{r \in R} x_{tr} \cdot p_{tr} \quad \forall t \in T \quad (\text{III})$$

$$x_{rt} \in \{0, 1\}, p_{\min} \geq 0 \quad \forall r \in R, t \in T$$

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Explizite Modellierung von Maxima

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) \leq z_{\max} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$z_{\max} - f_n(\bar{\mathbf{x}}) \leq M \cdot (1 - y_n) \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$\sum_{n=1}^N y_n = 1$$

Explizite Modellierung von Minima

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) \geq z_{\min} \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) - z_{\min} \leq M \cdot (1 - y_n) \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$\sum_{n=1}^N y_n = 1$$

Modell: Maximin-Zuordnungsproblem (Variante 2)

Indexmengen:

R Menge der Ressourcen

T Menge der Aufgaben

Parameter:

p_{tr} Profit bei Erfüllung von Aufgabe t durch Ressource r

M Eine ausreichend große Zahl

Entscheidungsvariablen:

x_{tr} Binärvariable, Aufgabe t wird durch Ressource r erfüllt

p_{\min} Hilfsvariable für minimalen Profit

y_t Binäre Auswahlvariable für Minimum

Modellbeschreibung:

$$\begin{array}{ll} \max & p_{\min} \\ \text{s.t.} & \sum_{r \in R} x_{tr} = 1 \quad \forall t \in T \quad \text{(I)} \end{array}$$

$$\sum_{t \in T} x_{tr} \leq 1 \quad \forall r \in R \quad \text{(II)}$$

$$p_{\min} \leq \sum_{r \in R} x_{tr} \cdot p_{tr} \quad \forall t \in T \quad \text{(III)}$$

$$\sum_{r \in R} (x_{tr} \cdot p_{tr}) - p_{\min} \leq M \cdot (1 - y_t) \quad \forall t \in T \quad \text{(IV)}$$

$$\sum_{t \in T} y_t = 1 \quad \text{(V)}$$

$$x_{rt} \in \{0, 1\}, p_{\min} \leq 0 \quad \forall r \in R, t \in T$$

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

CC-BY-SA
A. Popp

5.1 Weiche Nebenbedingungen

5.2 Maximierung vs. Minimierung

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

5.4 Multikriterielle Optimierung

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Maximin- und Minimax-Probleme

Explizite Modellierung von Maxima und Minima