# Modellierung und Optimierung mit OPL

## 5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

Andreas Popp

# Inhalt








5.1 Weiche Nebenbedingungen
5.2 Maximierung vs. Minimierung
5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität
5.4 Multikriterielle Optimierung
5.5 Bottleneck-Zielfunktionen
Maximin- und Minimax-Probleme
Explizite Modellierung von Maxima und Minima

# 5.1 Weiche Nebenbedingungen

# Beispiel: Produktionsproblem

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_i \qquad && \forall r \in R \quad (\mathrm{I}) \\
& x_i \geq 0 && \forall i \in I
\end{aligned}$$

Nebenbedingung (I) ist eine „harte“ Nebenbedingung, sie muss exakt eingehalten werden.

# Weiche Ungleichungsbedingung

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i & & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \le c_r + o_r & \forall r \in R & \qquad \text{(I)} \\
& x_i,\ o_r \ge 0 & \forall i \in I, r \in R &
\end{aligned}
$$

Problem: keine Optimallösung, da Lösungsraum in Optimierungsrichtung unbeschränkt

# Weiche Ungleichungsbedingung mit Strafkosten und Beschränkung

$$
\begin{array}{llll}
\max & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i - \sum_{r \in R} \boxed{k_r} \cdot o_r & & \\
s.t. & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_r + o_r & \forall r \in R & \text{(I)} \\
& o_r \leq \boxed{m_r} & \forall r \in R & \text{(II)} \\
& x_i, o_r \geq 0 & \forall i \in I, r \in R &
\end{array}
$$

# Beispiel: Produktionsproblem mit Vollauslastung

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i = c_i && \forall r \in R \quad (\mathrm{I}) \\
& x_i \geq 0 && \forall i \in I
\end{aligned}$$

Nebenbedingung (I) ist eine „harte“ Nebenbedingung, sie muss exakt eingehalten werden.

# Weiche Gleichhungsbedingung

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i\in I} p_i \cdot x_i - \sum_{r\in R} \boxed{k_r} \cdot \boxed{|o_r|} & & \\
s.t. \quad & \sum_{i\in I} v_{ri} \cdot x_i = c_i + \boxed{o_r} & \forall r \in R & \qquad \text{(I)} \\
& x_i \geq 0, \boxed{o_r} \lesseqgtr 0 & \forall i \in I, r \in R &
\end{aligned}
$$

Problem: Absolutbetrag ist keine lineare Funktion.

# Weiche Gleichhungsbedingung

Lösung: Substituiere $o_r = o_r^+ - o_r^-$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i - \sum_{r \in R} k_r \cdot \boxed{o_r^+ + o_r^-} & & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i = c_i + \boxed{o_r^+ - o_r^-} & \forall r \in R & \qquad \text{(I)} \\
& x_i, \boxed{o_r^+}, \boxed{o_r^-} \geq 0 & \forall i \in I, r \in R &
\end{aligned}
$$

## Vorsicht bei Auflösung von Absolutbeträgen

Die Zerlegung einer Variable in zwei Summanden ist nicht eindeutig. Es muss sichergestellt sein, dass ein Summand null ist.

# 5.2 Maximierung vs. Minimierung

# Maximierung vs. Minimierung

Minimierung und Maximierung sind identische Vorgänge.
Es gilt:

$$\max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X} -f(x)$$

Es ändert sich lediglich das Vorzeichen des Optimalwerts.

# 5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

# Beispiel: Lewbrandt GmbH

Gesamtkapazität: 120 h

| **Auftrag** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| Deckungsbeitrag | 150 k€ | 100 k€ | 150 k€ | 50 k€ | 70 k€ |
| Umsatz | 340 k€ | 190 k€ | 220 k€ | 85 k€ | 215 k€ |
| Abwasser | 6,2 t | 3,5 t | 5,8 t | 2,4 t | 4,8 t |
| Kapazitätsverbrauch | 65 h | 35 h | 65 h | 15 h | 25 h |

Welche Aufträge sollen gefertigt werden?
$\rightarrow$ Rucksackproblem

## Problem

Es gibt drei Zielfunktionen, damit gibt es keine eindeutige Optimallösung.

# Pareto-Optimalität

## Definition: Pareto-Optimalität

Eine Lösung heißt paretooptimal, wenn es keine andere Lösung gibt, die in einer Zielgröße besser ist und in den anderen mindestens gleich gut.

## Ausgewählte Lösungen des Beispiels „Lewbrandt GmbH“

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Gewinn | Umsatz | Abwasser | p.-o. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 150 | 275 | 5,9 | ja |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 220 | 490 | 10,7 | nein |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 250 | 530 | 9,7 | ja |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 300 | 615 | 12,1 | ja |

# 5.4 Multikriterielle Optimierung

# Beispiel-Zielfunktionen

Zielfunktionen aus Beispiel „Lewbrandt Gmbh“:

- Gewinn:
  $\max f_G(\bar{\mathbf{x}}) = 150 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 + 150 \cdot x_3 + 50 \cdot x_4 + 70 \cdot x_5$
- Umsatz:
  $\max f_U(\bar{\mathbf{x}}) = 340 \cdot x_1 + 190 \cdot x_2 + 220 \cdot x_3 + 85 \cdot x_4 + 215 \cdot x_5$
- Abwasser:
  $\max f_A(\bar{\mathbf{x}}) = -6{,}2 \cdot x_1 - 3{,}5 \cdot x_2 - 5{,}8 \cdot x_3 - 2{,}4 \cdot x_4 - 4{,}8 \cdot x_5$

# Zielgewichtung

Erstelle eine gemeinsame Zielfunktion, indem die Ziele mit Gewichtungsfaktoren versehen und addiert werden.

## Zielgewichtung im Beispiel „Lewbrandt GmbH“

Gewichtungsfaktoren: $a_g = 5$, $a_U = 1$, $a_A = 50$

neue Zielfunktion:

$$\begin{aligned} \max f(\bar{\mathbf{x}}) &= a_g \cdot f_G(\bar{\mathbf{x}}) + a_U \cdot f_U(\bar{\mathbf{x}}) + a_A \cdot f_A(\bar{\mathbf{x}}) \\ &= 5 \cdot f_G(\bar{\mathbf{x}}) + 1 \cdot f_U(\bar{\mathbf{x}}) + 50 \cdot f_A(\bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

# Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (Zielgewichtung)

**Indexmengen**:

| | |
|---|---|
| $I$ | Menge der Gegenstände |
| $O$ | Menge der Ziele |

**Parameter**:

| | |
|---|---|
| $w_i$ | Gewicht von Gegenstand $i \in I$ |
| $u_{oi}$ | Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$ |
| $c$ | Kapazität des Rucksacks |
| $a_o$ | Gewicht des Ziels $o \in O$ |

**Entscheidungsvariablen**:

| | |
|---|---|
| $x_i$ | Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird |

**Modellbeschreibung**:

$$\max \quad \sum_{o \in O} a_o \sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i$$

$$s.t. \quad \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c \qquad \text{(I)}$$

$$x_i \in \{0{,}1\} \qquad \forall i \in I$$

# Hauptziel & Anspruchsniveaus

Wähle ein Hauptziel. Definiere für die restlichen Ziele Anspruchsniveaus, die durch Nebenbedingungen sichergestellt werden.

## Hauptziel & Anspruchsniveaus im Beispiel „Lewbrandt GmbH"

Sei das Hauptziel die Abwasseremission. Dabei sollen mindestens 225 k€ Gewinn und 480 k€ Umsatz gemacht werden:

$$\begin{aligned} \max \quad & f_A(\overline{\mathbf{x}}) \\ s.t. \quad & f_A(\overline{\mathbf{x}}) \geq 225 \\ & f_U(\overline{\mathbf{x}}) \geq 480 \end{aligned}$$

# Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (Hauptziel)

**Indexmengen**:

| | |
|---|---|
| $I$ | Menge der Gegenstände |
| $O$ | Menge der Ziele |

**Parameter**:

| | |
|---|---|
| $w_i$ | Gewicht von Gegenstand $i \in I$ |
| $u_{oi}$ | Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$ |
| $c$ | Kapazität des Rucksacks |
| $h$ | Hauptziel $h \in O$ |
| $a_o$ | Anspruchsniveau des Ziels $o \in O \backslash \{h\}$ |

**Entscheidungsvariablen**:

| | |
|---|---|
| $x_i$ | Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird |

**Modellbeschreibung**:

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum\limits_{i \in I} u_{hi} \cdot x_i & \\
s.t. & \sum\limits_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c & \text{(I)} \\
& \sum\limits_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i \geq a_o \qquad \forall o \in O \backslash \{h\} & \text{(II)} \\
& x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I &
\end{array}
$$

# Goal Programming (klassisch)

Wähle Zielwerte für alle Zielfunktionen und bestrafe Abweichungen von den Zielwerten.

## Goal Programming im Beispiel „Lewbrandt GmbH“

Zielwerte: $a_G = 220$, $a_U = 480$, $a_A = -11$

$$\begin{array}{rl} \max & |z_G| + |z_U| + |z_A| \\ s.t. & f_G(\bar{\mathbf{x}}) = 220 + z_G \\ & f_U(\bar{\mathbf{x}}) = 480 + z_U \\ & f_A(\bar{\mathbf{x}}) = -11 + z_A \end{array}$$

# Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (GP1)

**Indexmengen**:

| | |
|---|---|
| $I$ | Menge der Gegenstände |
| $O$ | Menge der Ziele |

**Parameter**:

| | |
|---|---|
| $w_i$ | Gewicht von Gegenstand $i \in I$ |
| $u_{oi}$ | Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$ |
| $c$ | Kapazität des Rucksacks |
| $a_o$ | Anspruchsniveau des Ziels $o \in O$ |

**Entscheidungsvariablen**:

| | |
|---|---|
| $x_i$ | Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird |
| $z_o$ | Abweichung vom Zielwert des Ziels $o \in O$ |

**Modellbeschreibung**:

$$\min \sum_{o \in O} |z_o|$$

$$s.t. \quad \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c \qquad \text{(I)}$$

$$\sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i = a_o + z_o \qquad \forall o \in O \qquad \text{(II)}$$

$$x_i \in \{0,1\}, z_o \lesseqgtr 0 \qquad \forall i \in I, o \in O$$

# Goal Programming (erweiterte Variante)

Bestrafe nur ungewollte Abweichungen und verwende Gewichtungsfaktoren für Abweichungen.

## Goal Programming im Beispiel „Lewbrandt GmbH“

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w_G \cdot z_G + w_U \cdot z_U + w_A \cdot z_A \\
s.t. \quad & f_G(\bar{\mathbf{x}}) \geq 220 - z_G \\
& f_U(\bar{\mathbf{x}}) \geq 480 - z_U \\
& f_A(\bar{\mathbf{x}}) \geq -11 - z_A
\end{aligned}
$$

# Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (GP2)

**Indexmengen**:

| | |
|---|---|
| $I$ | Menge der Gegenstände |
| $O$ | Menge der Ziele |

**Parameter**:

| | |
|---|---|
| $w_i$ | Gewicht von Gegenstand $i \in I$ |
| $u_{oi}$ | Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$ |
| $c$ | Kapazität des Rucksacks |
| $a_o$ | Zielwert des Ziels $o \in O$ |
| $b_o$ | Abweichungskosten für Ziel $o \in O$ |

**Entscheidungsvariablen**:

| | |
|---|---|
| $x_i$ | Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird |
| $z_o$ | Abweichung vom Zielwert des Ziels $o \in O$ |

**Modellbeschreibung**:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{o \in O} b_o \cdot z_o & & \\ s.t. \quad & \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c & & \text{(I)} \\ & \sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i \geq a_o - z_o & \forall o \in O \quad & \text{(II)} \\ & x_i \in \{0,1\}, z_o \geq 0 & \forall i \in I, o \in O & \end{aligned}$$

# Lexikographische Ordnung der Ziele

Mithilfe eindeutiger Zielhierarchien ist es möglich die Lösungen lexikographisch zu ordnen.

## Ausgewählte lexikograpisch geordnete Lösungen des Beispiels „Lewbrandt GmbH“

Die Zielhierarchie sei: Gewinn $>$ Umsatz $>$ Abwasser

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Gewinn | Umsatz | Abwasser |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 300 | 615 | 12,1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 300 | 495 | 11,7 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 270 | 640 | 13,4 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 250 | 530 | 9,7 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 250 | 410 | 9,3 |

# Preemptive Goal Programming







**Algorithmus:** Preemptive Goal Programming

1. Setze $i = 1$
2. Löse das Problem mit der Zielfunktion $f_i$ des Ziels $i$. Man erhält die Optimallösung $\mathbf{x}^*$ und den Optimalwert $f_i^*$.
3. Falls $i = n$: $\mathbf{x}^*$ ist die lexikographische Optimallösung. Ende.
4. Füge dem Modell die folgende Nebenbedingung hinzu:
$$f_i(\mathbf{x}) = f_i^*$$
5. Setze $i = i + 1$ und gehe zu Schritt 2.

# 5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

# Beispiel: Arabasta County

| Stadt | Konzerthalle | Erlebnisbad | Museum |
|---|---|---|---|
| Alubarna | 1,45 M$ | 1,25 M$ | 1,10 M$ |
| Nanohana | 1,00 M$ | 0,95 M$ | 0,90 M$ |
| Erumalu | 0,32 M$ | 0,28 M$ | 0,24 M$ |

Jede Einrichtung kann nur einmal gebaut werden. Welche Einrichtung soll in welcher Stadt gebaut werden?

# Maximin-Probleme

Mehrere gleich skalierte Einzel-Zielfunktionen $f_1, \ldots, f_N$. Die Haupt-Zielfunktion lautet:

$$\max \min_{n \in \{1,\ldots,N\}} f_n(\bar{\mathbf{x}})$$

## Linearisierung von Maximin-Problemen

Sei $z_{\min} \lesseqgtr 0$ eine Hilfsvariable.

$$\begin{array}{ll} \max & z_{\min} \\ s.t. & f_n(\bar{\mathbf{x}}) \geq z_{\min} \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\} \end{array}$$

# Minimax-Probleme

Mehrere gleich skalierte Einzel-Zielfunktionen $f_1, \ldots, f_N$. Die Haupt-Zielfunktion lautet:

$$\min \max_{n \in \{1,\ldots,N\}} f_n(\overline{\mathbf{x}})$$

## Linearisierung von Maximin-Problemen

Sei $z_{\max} \lesseqgtr 0$ eine Hilfsvariable.

$$\begin{array}{ll} \min & z_{\max} \\ s.t. & f_n(\overline{\mathbf{x}}) \leq z_{\max} \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\} \end{array}$$

# Modell: Maximin-Zuordnungsproblem (Variante 1)

**Indexmengen**:

| | |
|---|---|
| $R$ | Menge der Ressourcen |
| $T$ | Menge der Aufgaben |

**Parameter**:

| | |
|---|---|
| $p_{tr}$ | Profit bei Erfüllung von Aufgabe $t \in T$ durch Ressource $r \in R$ |

**Entscheidungsvariablen**:

| | |
|---|---|
| $x_{tr}$ | Binärvariable, die angibt ob Aufgabe $t \in T$ durch Ressource $r \in R$ erfüllt wird |
| $p_{\min}$ | Hilfsvariable für minimalen Profit |

**Modellbeschreibung**:

$$
\begin{array}{lllr}
\max & p_{\min} & & \\
s.t. & \sum_{r \in R} x_{tr} = 1 & \forall t \in T & \text{(I)} \\
& \sum_{t \in T} x_{tr} \leq 1 & \forall r \in R & \text{(II)} \\
& p_{\min} \leq \sum_{r \in R} x_{tr} \cdot p_{tr} & \forall t \in T & \text{(III)} \\
& x_{rt} \in \{0,1\}, p_{\min} \lesseqgtr 0 & \forall r \in R, t \in T &
\end{array}
$$

# Explizite Modellierung von Maxima und Minima

## Explizite Modellierung von Maxima

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) \leq z_{\max} \qquad \forall n \in \{1, \ldots, N\}$$

$$z_{\max} - f_n(\bar{\mathbf{x}}) \leq M \cdot (1 - y_n) \qquad \forall n \in \{1, \ldots, N\}$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{N} y_n = 1$$

## Explizite Modellierung von Minima

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) \geq z_{\min} \qquad \forall n \in \{1, \ldots, N\}$$

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) - z_{\min} \leq M \cdot (1 - y_n) \qquad \forall n \in \{1, \ldots, N\}$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{N} y_n = 1$$

# Modell: Maximin-Zuordnungsproblem (Variante 2)

**Indexmengen**:

| | |
|---|---|
| $R$ | Menge der Ressourcen |
| $T$ | Menge der Aufgaben |

**Parameter**:

| | |
|---|---|
| $p_{tr}$ | Profit bei Erfüllung von Aufgabe $t \in T$ durch Ressource $r \in R$ |
| $M$ | Eine ausreichend große Zahl |

**Entscheidungsvariablen**:

| | |
|---|---|
| $x_{tr}$ | Binärvariable, die angibt ob Aufgabe $t \in T$ durch Ressource $r \in R$ erfüllt wird |
| $p_{\min}$ | Hilfsvariable für minimalen Profit |
| $y_t$ | Binäre Auswahlvariable für Minimum |

**Modellbeschreibung**:

$$
\begin{array}{lllr}
\max & p_{\min} & & \\
s.t. & \sum_{r \in R} x_{tr} = 1 & \forall t \in T & \text{(I)} \\
& \sum_{t \in T} x_{tr} \leq 1 & \forall r \in R & \text{(II)} \\
& p_{\min} \leq \sum_{r \in R} x_{tr} \cdot p_{tr} & \forall t \in T & \text{(III)} \\
& \sum_{r \in R} (x_{tr} \cdot p_{tr}) - p_{\min} \leq M \cdot (1 - y_t) & \forall t \in T & \text{(IV)} \\
& \sum_{t \in T} y_t = 1 & & \text{(V)} \\
& x_{rt} \in \{0,1\}, p_{\min} \lesseqgtr 0 & \forall r \in R, t \in T &
\end{array}
$$