Modellierung und Optimierung mit OPL

5 Probleme mit mehreren Zielfunktionen

Andreas Popp

Inhalt

5.1 Weiche Nebenbedingungen

Beispiel: Produktionsproblem

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i & & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_i & \forall r \in R \quad & (\mathrm{I}) \\
& x_i \geq 0 & \forall i \in I &
\end{aligned}
$$

Nebenbedingung (I) ist eine „harte“ Nebenbedingung, sie muss exakt eingehalten werden.

Weiche Ungleichungsbedingung

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i & & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_r + \boxed{o_r} & \forall r \in R & \qquad \text{(I)} \\
& x_i, \boxed{o_r} \geq 0 & \forall i \in I, r \in R &
\end{aligned}
$$

Problem: keine Optimallösung, da Lösungsraum in Optimierungsrichtung unbeschränkt

Weiche Ungleichungsbedingung mit Strafkosten und Beschränkung

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i - \sum_{r \in R} \boxed{k_r} \cdot o_r & \\
s.t. & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i \leq c_r + o_r & \forall r \in R \qquad \text{(I)} \\
 & o_r \leq \boxed{m_r} & \forall r \in R \qquad \text{(II)} \\
 & x_i, o_r \geq 0 & \forall i \in I, r \in R
\end{array}
$$

Beispiel: Produktionsproblem mit Vollauslastung

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i & & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i = c_i & \forall r \in R \quad & (\mathrm{I}) \\
& x_i \geq 0 & \forall i \in I &
\end{aligned}
$$

Nebenbedingung (I) ist eine „harte" Nebenbedingung, sie muss exakt eingehalten werden.

Weiche Gleichungsbedingung

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i - \sum_{r \in R} k_r \cdot |o_r| & & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i = c_i + o_r & \forall r \in R & \qquad \text{(I)} \\
& x_i \geq 0,\ o_r \lesseqgtr 0 & \forall i \in I, r \in R &
\end{aligned}
$$

Problem: Absolutbetrag ist keine lineare Funktion.

Weiche Gleichungsbedingung

Lösung: Substituiere $o_r = o_r^+ - o_r^-$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i \in I} p_i \cdot x_i - \sum_{r \in R} k_r \cdot (o_r^+ + o_r^-) & & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} v_{ri} \cdot x_i = c_i + o_r^+ - o_r^- & \forall r \in R & \qquad \text{(I)} \\
& x_i, o_r^+, o_r^- \geq 0 & \forall i \in I, r \in R &
\end{aligned}
$$

Vorsicht bei Auflösung von Absolutbeträgen

Die Zerlegung einer Variable in zwei Summanden ist nicht eindeutig. Es muss sichergestellt sein, dass ein Summand null ist.

5.2 Maximierung vs. Minimierung

Maximierung vs. Minimierung

Minimierung und Maximierung sind identische Vorgänge. Es gilt:

$$\max_{x \in X} f(x) = -\min_{x \in X} -f(x)$$

Es ändert sich lediglich das Vorzeichen des Optimalwerts.

5.3 Mehrere Zielfunktionen und Pareto-Optimalität

Beispiel: Lewbrandt GmbH

Gesamtkapazität: 120 h

Auftrag	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Deckungsbeitrag	150 k€	100 k€	150 k€	50 k€	70 k€
Umsatz	340 k€	190 k€	220 k€	85 k€	215 k€
Abwasser	6,2 t	3,5 t	5,8 t	2,4 t	4,8 t
Kapazitätsverbrauch	65 h	35 h	65 h	15 h	25 h

Welche Aufträge sollen gefertigt werden?
$\rightarrow$ Rucksackproblem

Problem

Es gibt drei Zielfunktionen, damit gibt es keine eindeutige Optimallösung.

Pareto-Optimalität

Definition: Pareto-Optimalität

Eine Lösung heißt pareto-optimal, wenn es keine andere Lösung gibt, die in einer Zielgröße besser ist und in den anderen mindestens gleich gut.

Ausgewählte Lösungen des Beispiels „Lewbrandt GmbH“

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Gewinn	Umsatz	Abwasser	p.-o.
0	1	0	1	0	150	275	5,9	ja
0	1	0	1	1	220	490	10,7	nein
1	1	0	0	0	250	530	9,7	ja
1	1	0	1	0	300	615	12,1	ja

5.4 Multikriterielle Optimierung

Beispiel-Zielfunktionen

Zielfunktionen aus Beispiel „Lewbrandt Gmbh“:

- Gewinn:
  $\max f_G(\bar{\mathbf{x}}) = 150 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 + 150 \cdot x_3 + 50 \cdot x_4 + 70 \cdot x_5$
- Umsatz:
  $\max f_U(\bar{\mathbf{x}}) = 340 \cdot x_1 + 190 \cdot x_2 + 220 \cdot x_3 + 85 \cdot x_4 + 215 \cdot x_5$
- Abwasser:
  $\max f_A(\bar{\mathbf{x}}) = -6{,}2 \cdot x_1 - 3{,}5 \cdot x_2 - 5{,}8 \cdot x_3 - 2{,}4 \cdot x_4 - 4{,}8 \cdot x_5$

Zielgewichtung

Erstelle eine gemeinsame Zielfunktion, indem die Ziele mit Gewichtungsfaktoren versehen und addiert werden.

Zielgewichtung im Beispiel „Lewbrandt GmbH“

Gewichtungsfaktoren: $a_g = 5$, $a_U = 1$, $a_A = 50$
neue Zielfunktion:

$$\begin{aligned} \max f(\overline{\mathbf{x}}) &= a_g \cdot f_G(\overline{\mathbf{x}}) + a_U \cdot f_U(\overline{\mathbf{x}}) + a_A \cdot f_A(\overline{\mathbf{x}}) \\ &= 5 \cdot f_G(\overline{\mathbf{x}}) + 1 \cdot f_U(\overline{\mathbf{x}}) + 50 \cdot f_A(\overline{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (Zielgewichtung)

Indexmengen:

I Menge der Gegenstände
O Menge der Ziele

Parameter:

w_i Gewicht von Gegenstand $i \in I$
u_{oi} Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$
c Kapazität des Rucksacks
a_o Gewicht des Ziels $o \in O$

Entscheidungsvariablen:

x_i Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird

Modellbeschreibung:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{o \in O} a_o \sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i & \\ s.t. \quad & \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c & \text{(I)} \\ & x_i \in \{0{,}1\} & \forall i \in I \end{aligned}$$

Hauptziel & Anspruchsniveaus

Wähle ein Hauptziel. Definiere für die restlichen Ziele Anspruchsniveaus, die durch Nebenbedingungen sichergestellt werden.

Hauptziel & Anspruchsniveaus im Beispiel „Lewbrandt GmbH“

Sei das Hauptziel die Abwasseremission. Dabei sollen mindestens 225 k€ Gewinn und 480 k€ Umsatz gemacht werden:

$$\begin{aligned} \max \quad & f_A(\bar{\mathbf{x}}) \\ s.t. \quad & f_A(\bar{\mathbf{x}}) \geq 225 \\ & f_U(\bar{\mathbf{x}}) \geq 480 \end{aligned}$$

Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (Hauptziel)

Indexmengen:

I	Menge der Gegenstände
O	Menge der Ziele

Parameter:

w_i	Gewicht von Gegenstand $i \in I$
u_{oi}	Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$
c	Kapazität des Rucksacks
h	Hauptziel $h \in O$
a_o	Anspruchsniveau des Ziels $o \in O \backslash \{h\}$

Entscheidungsvariablen:

x_i	Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird

Modellbeschreibung:

$$
\begin{array}{llll}
\max & \sum\limits_{i \in I} u_{hi} \cdot x_i & & \\
s.t. & \sum\limits_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c & & \text{(I)} \\
 & \sum\limits_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i \geq a_o & \forall o \in O \backslash \{h\} & \text{(II)} \\
 & x_i \in \{0,1\} & \forall i \in I &
\end{array}
$$

Goal Programming (klassisch)

Wähle Zielwerte für alle Zielfunktionen und bestrafe Abweichungen von den Zielwerten.

Goal Programming im Beispiel „Lewbrandt GmbH“

Zielwerte: $a_G = 220$, $a_U = 480$, $a_A = -11$

$$
\begin{array}{ll}
\min & |z_G| + |z_U| + |z_A| \\
s.t. & f_G(\bar{\mathbf{x}}) = 220 + z_G \\
 & f_U(\bar{\mathbf{x}}) = 480 + z_U \\
 & f_A(\bar{\mathbf{x}}) = -11 + z_A
\end{array}
$$

Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (GP1)

Indexmengen:

I	Menge der Gegenstände
O	Menge der Ziele

Parameter:

w_i	Gewicht von Gegenstand $i \in I$
u_{oi}	Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$
c	Kapazität des Rucksacks
a_o	Anspruchsniveau des Ziels $o \in O$

Entscheidungsvariablen:

x_i	Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird
z_o	Abweichung vom Zielwert des Ziels $o \in O$

Modellbeschreibung:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{o \in O} |z_o| & & \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c & & \text{(I)} \\
& \sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i = a_o + z_o & \forall o \in O \qquad & \text{(II)} \\
& x_i \in \{0,1\}, z_o \lesseqgtr 0 & \forall i \in I, o \in O &
\end{aligned}$$

Goal Programming (erweiterte Variante)

Bestrafe nur ungewollte Abweichungen und verwende Gewichtungsfaktoren für Abweichungen.

Goal Programming im Beispiel „Lewbrandt GmbH“

$$
\begin{array}{ll}
\min & w_G \cdot z_G + w_U \cdot z_U + w_A \cdot z_A \\
s.t. & f_G(\bar{\mathbf{x}}) \geq 220 - z_G \\
 & f_U(\bar{\mathbf{x}}) \geq 480 - z_U \\
 & f_A(\bar{\mathbf{x}}) \geq -11 - z_A
\end{array}
$$

Modell: Multikriterielles Rucksackproblem (GP2)

Indexmengen:

I	Menge der Gegenstände
O	Menge der Ziele

Parameter:

w_i	Gewicht von Gegenstand $i \in I$
u_{oi}	Nutzen von Gegenstand $i \in I$ bzgl. Ziel $o \in O$
c	Kapazität des Rucksacks
a_o	Zielwert des Ziels $o \in O$
b_o	Abweichungskosten für Ziel $o \in O$

Entscheidungsvariablen:

x_i	Binäre Entscheidungsvariable; zeigt an ob Gegenstand $i \in I$ eingepackt wird
z_o	Abweichung vom Zielwert des Ziels $o \in O$

Modellbeschreibung:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{o \in O} b_o \cdot z_o && \\
s.t. \quad & \sum_{i \in I} w_i \cdot x_i \leq c && && \text{(I)} \\
& \sum_{i \in I} u_{oi} \cdot x_i \geq a_o - z_o && \forall o \in O && \text{(II)} \\
& x_i \in \{0{,}1\}, z_o \geq 0 && \forall i \in I, o \in O &&
\end{aligned}$$

Lexikographische Ordnung der Ziele

Mithilfe eindeutiger Zielhierarchien ist es möglich die Lösungen lexikographisch zu ordnen.

Ausgewählte lexikograpisch geordnete Lösungen des Beispiels „Lewbrandt GmbH“

Die Zielhierarchie sei: Gewinn > Umsatz > Abwasser

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Gewinn	Umsatz	Abwasser
1	1	0	1	0	300	615	12,1
0	1	1	1	0	300	495	11,7
1	0	0	1	1	270	640	13,4
1	1	0	0	0	250	530	9,7
0	1	1	0	0	250	410	9,3

Preemptive Goal Programming

Algorithmus: Preemptive Goal Programming

1. Setze $i = 1$
2. Löse das Problem mit der Zielfunktion f_i des Ziels i. Man erhält die Optimallösung $\mathbf{x}^*$ und den Optimalwert f_i^*.
3. Falls $i = n$: $\mathbf{x}^*$ ist die lexikographische Optimallösung. Ende.
4. Füge dem Modell die folgende Nebenbedingung hinzu:
$$f_i(\mathbf{x}) = f_i^*$$
5. Setze $i = i + 1$ und gehe zu Schritt 2.

5.5 Bottleneck-Zielfunktionen

Beispiel: Arabasta County

Stadt	Konzerthalle	Erlebnisbad	Museum
Alubarna	1,45 M$	1,25 M$	1,10 M$
Nanohana	1,00 M$	0,95 M$	0,90 M$
Erumalu	0,32 M$	0,28 M$	0,24 M$

Jede Einrichtung kann nur einmal gebaut werden. Welche Einrichtung soll in welcher Stadt gebaut werden?

Maximin-Probleme

Mehrere gleich skalierte Einzel-Zielfunktionen $f_1, \ldots, f_N$. Die Haupt-Zielfunktion lautet:

$$\max \min_{n \in \{1,\ldots,N\}} f_n(\bar{\mathbf{x}})$$

Linearisierung von Maximin-Problemen

Sei $z_{\min} \lesseqgtr 0$ eine Hilfsvariable.

$$\begin{array}{ll} \max & z_{\min} \\ s.t. & f_n(\bar{\mathbf{x}}) \geq z_{\min} \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\} \end{array}$$

Minimax-Probleme

Mehrere gleich skalierte Einzel-Zielfunktionen $f_1, \ldots, f_N$. Die Haupt-Zielfunktion lautet:

$$\min \max_{n \in \{1,\ldots,N\}} f_n(\overline{\mathbf{x}})$$

Linearisierung von Maximin-Problemen

Sei $z_{\max} \lesseqgtr 0$ eine Hilfsvariable.

$$\begin{aligned} \min \quad & z_{\max} \\ s.t. \quad & f_n(\overline{\mathbf{x}}) \leq z_{\max} \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\} \end{aligned}$$

Modell: Maximin-Zuordnungsproblem (Variante 1)

Indexmengen:

R	Menge der Ressourcen
T	Menge der Aufgaben

Parameter:

p_{tr}	Profit bei Erfüllung von Aufgabe $t \in T$ durch Ressource $r \in R$

Entscheidungsvariablen:

x_{tr}	Binärvariable, die angibt ob Aufgabe $t \in T$ durch Ressource $r \in R$ erfüllt wird
$p_{\min}$	Hilfsvariable für minimalen Profit

Modellbeschreibung:

$$\max \quad p_{\min}$$

$$\begin{aligned}
s.t. \quad & \sum_{r \in R} x_{tr} = 1 && \forall t \in T && \text{(I)} \\
& \sum_{t \in T} x_{tr} \leq 1 && \forall r \in R && \text{(II)} \\
& p_{\min} \leq \sum_{r \in R} x_{tr} \cdot p_{tr} && \forall t \in T && \text{(III)} \\
& x_{rt} \in \{0, 1\}, p_{\min} \lesseqgtr 0 && \forall r \in R, t \in T &&
\end{aligned}$$

Explizite Modellierung von Maxima und Minima

Explizite Modellierung von Maxima

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) \leq z_{\max} \qquad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$z_{\max} - f_n(\bar{\mathbf{x}}) \leq M \cdot (1 - y_n) \qquad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{N} y_n = 1$$

Explizite Modellierung von Minima

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) \geq z_{\min} \qquad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$f_n(\bar{\mathbf{x}}) - z_{\min} \leq M \cdot (1 - y_n) \qquad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{N} y_n = 1$$

Modell: Maximin-Zuordnungsproblem (Variante 2)

Indexmengen:

R	Menge der Ressourcen
T	Menge der Aufgaben

Parameter:

p_{tr}	Profit bei Erfüllung von Aufgabe $t \in T$ durch Ressource $r \in R$
M	Eine ausreichend große Zahl

Entscheidungsvariablen:

x_{tr}	Binärvariable, die angibt ob Aufgabe $t \in T$ durch Ressource $r \in R$ erfüllt wird
$p_{\min}$	Hilfsvariable für minimalen Profit
y_t	Binäre Auswahlvariable für Minimum

Modellbeschreibung:

$$
\begin{array}{lllr}
\max & p_{\min} & & \\
s.t. & \sum_{r \in R} x_{tr} = 1 & \forall t \in T & \text{(I)} \\
 & \sum_{t \in T} x_{tr} \leq 1 & \forall r \in R & \text{(II)} \\
 & p_{\min} \leq \sum_{r \in R} x_{tr} \cdot p_{tr} & \forall t \in T & \text{(III)} \\
 & \sum_{r \in R} (x_{tr} \cdot p_{tr}) - p_{\min} \leq M \cdot (1 - y_t) & \forall t \in T & \text{(IV)} \\
 & \sum_{t \in T} y_t = 1 & & \text{(V)} \\
 & x_{rt} \in \{0,1\}, p_{\min} \leqslant 0 & \forall r \in R, t \in T &
\end{array}
$$