Skriptum zu LGI1 & MAG1
Studienjahr 2016/2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Mathematik dient vielen Bereichen der Naturwissenschaften und Technik als Hilfswissenschaft, mit der die dort auftretenden Probleme in einem strukturierten Formalismus gelöst werden können. Durch diese informelle Beschreibung der Rolle der Mathematik als Hilfwissenschaft werden bereits zwei grundlegende Anforderungen spezifiziert:

- Die Mathematik muss eine präzise Sprache zur Verfügung stellen, mit der konkrete Probleme formal beschrieben werden können.
- Die Mathematik muss einen Kalkül zur Verfügung stellen, mit der aus formalen Problemspezifikationen Lösungen dieser Probleme berechnet werden können. Der Kalkül muss mächtig genug sein, um damit die Richtigkeit der Problemlösungen beweisen zu können.

Wir betrachten ein Beispiel, das die Notwendigkeit dieser Forderungen an einer konkreten Aufgabenstellung erläutert.

Beispiel 1.1 Ein Grundproblem der Bioinformatik ist es, Ähnlichkeiten zweier Nukleotidsequenzen zu bestimmen. Die Motivation dieser Aufgabenstellung ist die Annahme, dass ähnliche Genomsequenzen ähnliche biologische Funktionen haben dürften. Somit kann durch Ähnlichkeitsvergleiche einer noch nicht ausgewerteten Sequenz mit einer Datenbank, in der die Funktion bekannter Sequenzen gespeichert ist, auf die Funktion der unbekannten Sequenz geschlossen werden.

Die Rolle der Mathematik im Lösungsprozess ist, wie schon oben angedeutet, eine zweifache: Sie muss einerseits eine präzise Sprache zur abstrakten Beschreibung von Nukleotidsequenzen bereitstellen, andererseits eine in der gleichen Sprache gehaltene Problembeschreibung ermöglichen, aus der dann mit formalen Mitteln eine Lösung des Problems ermittelt werden kann. Wir werden in diesem ersten Beispiel noch nicht auf die Problemlösung eingehen, sondern nur die Abbildung einer molekularbiologischen Aufgabenstellung in die Sprache der Mathematik zeigen.

Im konkreten Beispiel ist die Übertragung der Objekte der realen Welt in die Sprache der Mathematik (die *Modellbildung*) nicht schwierig: Ein Teil einer DNA-Doppelhelix kann durch die Sequenz der Nukleotide beschrieben werden, die einen Strang der Doppelhelix ausmachen (da dadurch der andere Strang eindeutig gegeben ist). Da es im Genom nur vier verschiedene Nukleotide gibt (*Adenin*, *Guanin*,

Cytosin und *Thymin*), können diese durch ihre Anfangsbuchstaben repräsentiert werden. Eine Genomsequenz ist somit beispielsweise durch die Zeichenkette `ACGCTT` darstellbar.

In dieser Schreibweise lautet die Aufgabenstellung des Sequenzvergleichs nun, zwei Zeichenketten miteinander zu vergleichen. Intuitiv scheint klar, dass obige Zeichenkette `ACGCTT` ähnlicher zur `ACACTT` als zu `ACGCCA` ist. Wenn man sie zum Vergleich übereinanderschreibt, erhält man

$$\begin{array}{cccccc} \texttt{A} & \texttt{C} & \texttt{G} & \texttt{C} & \texttt{T} & \texttt{T} \\ \texttt{A} & \texttt{C} & \texttt{A} & \texttt{C} & \texttt{T} & \texttt{T} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cccccc} \texttt{A} & \texttt{C} & \texttt{G} & \texttt{C} & \texttt{T} & \texttt{T} \\ \texttt{A} & \texttt{C} & \texttt{G} & \texttt{C} & \texttt{C} & \texttt{A} \end{array}.$$

Die linken beiden Ketten unterscheiden sich in einem, die rechten beiden in zwei Nukleotiden. Bei einem beliebigen Sequenzvergleich, bei dem Sequenzen unterschiedlicher Länge verglichen werden, ist aber noch überhaupt nicht klar, an welchem Punkt man den Vergleich der beiden Ketten beginnt, wie also die Ketten möglicherweise gegeneinander verschoben werden müssen. Weiters ist es in der Praxis auch notwendig, Einfügungen bzw. Löschungen von Symbolen in den Sequenzen zu berücksichtigen.

Wir benötigen somit, um das Problem strukturiert betrachten und den Formalismus der Mathematik zur Problemlösung nutzen zu können, eine mathematische Definition der verwendeten Begriffe: Was ist eine Sequenz? Wie vergleicht man zwei Sequenzen? Wann ist eine Übereinstimmung besser als eine andere? Man beachte, dass man durch diese Überlegungen erst das Problem exakt (in der Sprache der Mathematik) spezifizieren kann, dadurch aber einer Lösungsidee möglicherweise noch keinen Schritt näher gekommen ist. Durch die Übertragung in eine formalere Repräsentation ist man aber gezwungen, sich genauer mit den Details der Problems zu beschäftigen; daraus kann man bereits erste Ideen zur Lösungsfindung erhalten. □

Das Entwickeln einer geeigneten Lösungsidee ist meist ein iterativer Vorgang, der nur bedingt Expertenwissen im konkreten Anwendungsbereich benötigt. Eine gelungene Abstraktion des konkreten Problems in eine mathematische Darstellung zeichnet sich nämlich dadurch aus, dass sämtliche problemrelevanten Größen und Zusammenhänge durch mathematische Objekte repräsentiert werden, die nicht relevanten aber weggelassen werden. Bei der Erarbeitung einer Lösungsidee ist es aber natürlich hilfreich, sich einzelne Ansätze anhand der konkreten Problemstellung veranschaulichen zu können. Die Lösungsidee muss dann in einem geeigneten Rechenkalkül, über den wir noch nicht gesprochen haben, implementiert werden; dadurch erhält man eine Lösung im Modell. Im letzten Schritt wird diese abstrakte Lösung wieder in die Domäne der ursprünglichen Aufgabenstellung zurücktransferiert.

Das formale Niederschreiben des Zusammenhangs zwischen den Ein- und Ausgabegrößen einer Problemstellung wird in den technischen Wissenschaften als *Problemspezifikation* bezeichnet.

Beispiel 1.2 Wir betrachten als ersten Blick auf Problemspezifikationen das zu Beispiel 1.1 verwandte Beispiel, eine kurze Sequenz von Nukleotiden “möglichst gut” in einer viel längeren Sequenz zu finden. Die kurze Sequenz sei dazu `ACGCTT`; diese passt ab Position 2 besser auf die angegebene längere Sequenz als ab Position 10:

		A	C	G	C	T	T			A	C	G	C	T	T		
	C	A	C	A	C	T	A	C	G	A	A	C	A	T	T	A	G ...
Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

GEGEBEN: x, y
wobei x und y Nukleotid-Sequenzen sind, und die Länge von y viel größer als Länge von x ist.
GESUCHT: i
sodass i die Position in y ist, für die der Abstand zwischen x und der Teilsequenz der Länge l ab Position i in y möglichst klein ist, wobei l die Länge der Sequenz x ist.

Die meisten der hier verwendeten Begriffe müssen erst näher definiert werden, um eine exakte (und möglicherweise sogar maschinell überprüfbare) Problemspezifikation zu erhalten. Man kann aber bereits in dieser ersten Iteration erkennen, dass der sehr schwammige Begriff *möglichst gut* aus der informellen Beschreibung dem etwas präziseren Begriff *Abstand möglichst klein* gewichen ist.

Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung wird die Fähigkeit, Problemspezifikationen zu erstellen und zu lesen, als besonders wichtig erachtet. Beispiele, die Problemspezifikationen behandeln, sind deswegen (wie hier) mit einem speziellen Symbol[1] gekennzeichnet. □

Beispiel 1.3 Eine Lehrveranstaltung zu den formalen Grundlagen der Informatik muss sich zwangsläufig auch mit dem korrekten Argumentieren in der Mathematik beschäftigen. Was damit gemeint ist, sei anhand eines kurzen Beispiels – noch ohne formalen Kalkül – erläutert.

Wir legen fest, dass der Abstand zweier gleichlanger Sequenzen die Anzahl der Positionen ist, an denen die Symbole in diesen Positionen in beiden Sequenzen unterschiedlich sind. Damit ist der Abstand der beiden Sequenzen `ACGCTT` und `ACACTT` aus Beispiel 1.1 genau 1.

Der Begriff *Abstand* ist in technischen Wissenschaften ein exakt festgelegtes Konzept, das bestimmten Erwartungen genügen muss. Wir wollen im Folgenden argumentieren, dass unser Sequenz-Abstandsmaß zwei dieser Bedingungen erfüllt.

Bedingung 1 ist, dass ein Abstandsmaß symmetrisch ist, dass also der Abstand zwischen Sequenz 1 und Sequenz 2 der gleiche ist wie zwischen Sequenz 2 und Sequenz 1. Da wir nur die Anzahl der Positionen mit unterschiedlichen Symbolen messen, und es dabei keine Rolle spielt, welche Sequenz zuerst betrachtet wird, ist diese Bedingung erfüllt.

Bedingung 2 ist, dass ein Abstandsmaß nichtnegativ (also immer größer oder gleich null) ist, und nur dann genau null, wenn die beiden Sequenzen identisch sind. Auch das ist für unser Abstandsmaß erfüllt: Nur wenn die beiden Sequenzen identisch sind, ist der Abstand null; sonst wird für jeden Unterschied in Symbolen der Abstand um 1 erhöht. Damit kann unser Abstandsmaß nie negativ werden.

Argumente dieser Art – allerdings auf einer viel formaleren Ebene – erlauben es der Mathematik nicht nur, formale Problemlösungen zu berechnen, sondern auch zu begründen, dass die Lösungen korrekt sind. Wir wollen in dieser Lehrveranstaltung

[1] Freepik Icon von www.flaticon.com unter der Creative Commons 3.0 Lizenz.

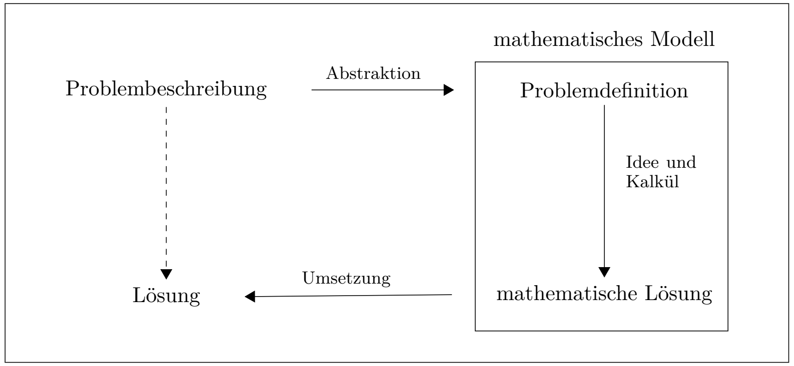


Abbildung 1.1: Problemlösung unter Verwendung eines mathematischen Modells[3].

an manchen Stellen spezielle Aufmerksamkeit auf diese Rolle der Mathematik lenken, und uns mit den Methoden des formal korrekten Argumentierens beschäftigen. Beispiele mit diesem Fokus sind (wie auch hier) speziell markiert[2]. □

Wie wir im letzten Beispiel gesehen haben, erfordert die Lösung eines konkreten Problems mit mathematischen Methoden einen Modellbildungsschritt. Dabei werden alle für die Aufgabenstellung irrelevanten Details weggelassen (etwa chemische Vorgänge innerhalb der Nukleotide), um sich auf die für das Problem wichtigen Informationen konzentrieren zu können. Im Modell, das in unserem Fall in der Sprache der Mathematik formuliert ist, wird dann eine Lösung berechnet, die abschließend aus dem Modell auf die konkrete Ausgangssituation zurücktransferiert wird. Diese Schritte sind in Abbildung 1.1 zusammengefasst.

Vorkenntnisse Im Laufe dieser Vorlesung werden wir uns mit der Sprache und den grundlegenden Konstrukten der Mathematik beschäftigen, um eine Basis für Problemabstraktion und Lösungsschritte im Modell zu schaffen. Dabei werden, bis auf die im Folgenden angeführten Ausnahmen, keinerlei spezielle Mathematik-Kenntnisse vorausgesetzt. Diese Ausnahmen sind:

- Kenntnis der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, reellen Zahlen $\mathbb{R}$, und der darauf definierten Grundrechenarten;
- Kenntnis der *kleiner-als* Beziehung zwischen Zahlen dieser Bereiche;
- Fertigkeit in der Manipulation von Termen, also das Rechnen mit und Umformen von Ausdrücken wie Brüche oder Potenzen.

Der Grund für die ersten beiden Punkte ist, dass eine saubere Einführung dieser Begriffe zwar möglich und spannend, unter den gegebenen Zeitbeschränkungen aber

[2] Freepik Icon von www.flaticon.com unter der Creative Commons 3.0 Lizenz.
[3] Inspiriert von B. Buchberger und F. Lichtenberger. *Mathematik für Informatiker I: Die Methode der Mathematik*, Springer Verlag, 1980.

nicht sinnvoll ist. Der dritte Punkt soll betonen, dass “Rechnen” nicht *Kenntnis* von Rechenregeln bedeutet, sondern die *Fähigkeit*, diese auch richtig anzuwenden.

Notation In diesem Skriptum bezeichne $\mathbb{N}_0$ die natürlichen Zahlen und 0 ($\mathbb{N}$ selbst beginnt somit mit 1), und $\mathbb{N}_{\leq n}$ die natürlichen Zahlen kleiner gleich n. Weiters werden Gleitkommazahlen als persönliche Präferenz in der anglo-amerikanischen Schreibweise mit einem Punkt als Dezimalzeichen geschrieben: $\pi \approx 3.14159$, und nicht $\pi \approx 3{,}141592$.

Kontrollfragen und Übungsaufgaben Jeder Abschnitt endet mit einer Reihe von Fragen, die zur Selbstreflektion des Materials anregen sollen, sowie einer Reihe von Übungsaufgaben. Diese Aufgaben sind teils Varianten von Beispielen aus diesem Abschnitt, und teils Aufgaben, die das Material erweitern. Letztere Aufgaben erfordern möglicherweise eigenständige tiefere Überlegungen, bis sich die Sonne hinter den Wolken zeigt. Sie sind daher mit dem Symbol markiert.

Fragen zur Selbstkontrolle

1.0 (S.1) In diesem Kapitel wird mehrmals der Begriff *Kalkül* verwendet. Was kann man sich darunter vorstellen?

1.0 (S.2) Welche mathematischen Kalküle haben Sie (z.B. im Laufe Ihrer Schulausbildung) schon kennengelernt?

1.0 (S.3) Welche Wissenschaften beschäftigen sich mit dem Abstraktions- bzw. Modellbildungsschritt in Abbildung 1.1, welche mit dem Umsetzungsschritt?

1.0 (S.4) Soweit Sie aus Beispiel 1.2 erkennen können, was scheint die allgemeine Struktur einer Problemspezifikation zu sein?

1.0 (S.5) Formal richtiges Argumentieren, wie in Beispiel 1.3 angedeutet, ist ein wichtiger Bestandteil mathematischen Arbeitens (und wird dort meist *Beweis* genannt). Was stellen Sie sich unter einem mathematischen Beweis vor?

Übungsaufgaben

1.0 (Ü.1) Bestimmen Sie den Abstand folgender beider Sequenzen, wobei der Begriff *Abstand* wie in Beispiel 1.3 definiert ist:

(a) `GCACTA` und `ACGCTA` **(b)** `AAGGCAA` und `AGGGAAC`

1.0 (Ü.2) In Beispiel 1.2 wird eine kürzere Sequenz mit Teilen einer längeren Sequenz verglichen. Für die konkreten Sequenzen in diesem Beispiel (eine mit Länge 6, die andere mit Länge 17): Wieviele Sequenzvergleiche der kürzeren mit Teilen der längeren sind maximal möglich?

1.0 (Ü.3) Verallgemeinern Sie Ihre Antwort aus Übungsbeispiel 1.0 (Ü.2) für zwei Sequenzen der Längen m und n, mit $m < n$.

1.0 (Ü.4) Spezifizieren Sie das Problem, eine Sequenz mit gerader Länge in die Hälfte zu schneiden: Sie erhalten somit zwei Teilsequenzen gleicher Länge, die aneinandergefügt wieder die ursprüngliche Sequenz ergeben.

1.0 (Ü.5) Versuchen Sie zu argumentieren, warum das in Beispiel 1.3 angegebene Distanzmaß zwischen zwei gleichlangen Sequenzen von Symbolen die sogenannte *Dreiecksungleichung* erfüllt: Diese besagt, dass der Abstand zweier Sequenzen S_1 und S_3 nie mehr ist als der Abstand von S_1 zu einer Sequenz S_2, plus der Abstand von S_2 zu S_3.

Kapitel 2

Logik als Sprache der Mathematik

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Sprache der Mathematik beschäftigen. Dies wird uns erlauben, normalsprachliche Ausdrücke in präzise mathematische Aussagen umzuwandeln, und aus diesen Aussagen Schlüsse zu ziehen. Dazu werden wir sowohl die Struktur (*Syntax*) und die Bedeutung (*Semantik*) von Aussagen betrachten.

2.1 Aussagenlogik

In diesem Abschnitt behandeln wir Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind. Wir werden sehen, dass sich solche Aussagen auf unterster Ebene in nicht mehr zerteilbare (*atomare*) Aussagen zerlegen lassen. Beispiele atomarer Aussagen sind etwa

> “Eine Vorlesungseinheit ist 45 Minuten lang.” (wahr)
> “Hagenberg ist die Hauptstadt von Oberösterreich.” (falsch)

Zusammengesetzte Aussagen bestehen aus atomaren Aussagen, die auf verschiedene Weise miteinander verbunden sein können. Beispiele zusammengesetzter Aussagen sind

> “Wenn es regnet, ist die Straße nass.”
> “Klaus studiert Software Engineering, aber nicht Mobile Computing.”

Der Wahrheitsgehalt zusammengesetzter Aussagen beruht auf dem Wahrheitswert der atomaren Aussagen, aus denen sie bestehen. Wir werden im Folgenden genau beschreiben, wie atomare Aussagen zu zusammengesetzten Aussagen kombiniert werden können, und wie man den Wahrheitsgehalt zusammengesetzter Aussagen bestimmen kann.

Man beachte, dass nicht alle Sätze des normalen Sprachgebrauchs Aussagen sind. So sind etwa Fragen wie

> “Wozu ist das alles gut?”
> “Wer entdeckte die Doppelhelixstrukur der DNA?”

oder Befehle wie

"Mach endlich Schluss!"
"Wiederholen Sie dieses Kapitel bis zur nächsten Vorlesung."

keine Aussagen, da ihnen kein Wahrheitswert zugewiesen werden kann.

Zur Darstellung von Aussagen in einer (für die Mathematik notwendigen) präzisen Struktur repräsentieren wir atomare Aussagen durch Großbuchstaben und Kombinationsmöglichkeiten von Aussagen durch spezielle Symbole. Im Folgenden spezifizieren wir exakt die *Syntax* von Aussagen; damit ist festgelegt, welche mathematischen Zeichenketten Aussagen beschreiben und welche nicht. Die *Semantik*, also die Bedeutung dieser Zeichenketten (entweder wahr oder falsch) wird in einem späteren Schritt definiert.

Definition 2.1 (Aussagen)
Als (wohlgeformte) *Aussagen* bezeichnet man genau jene Zeichenketten, die sich mit den folgenden Regeln bilden lassen:

(1) Die Zeichen A, B, C, $\ldots$ sind Aussagen (genauer: *atomare Aussagen*).

(2) Wenn x und y Aussagen sind, dann sind auch folgende Zeichenketten Aussagen (genauer: *zusammengesetzte Aussagen*):

$(\neg x)$
$(x \wedge y)$
$(x \vee y)$
$(x \Rightarrow y)$

Die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$ (genannt *Negation*, *Konjunktion*, *Disjunktion* bzw. *Implikation*), die aus Aussagen zusammengesetzte Aussagen machen, nennt man *Junktoren*.

Beispiel 2.1 Seien A, B und C atomare Aussagen. Dann sind auch folgende Zeichenketten Aussagen:

$$((A \wedge A) \Rightarrow (\neg B))$$
$$((B \vee (\neg C)) \wedge (A \wedge B))$$
$$((\neg(A \wedge B)) \Rightarrow (\neg(A \vee B))).$$

Da laut Definition 2.1 nur diejenigen Zeichenketten, die aus den Bildungsregeln zusammengesetzt werden können (und keine anderen!) Aussagen sind, sind folgende Zeichenketten *keine* Aussagen:

$$((\neg A) \wedge B \wedge C$$
$$((A \wedge \vee B))$$
$$\wedge B \vee C.$$

□

Die Struktur von Definition 2.1 nennt man *rekursiv*, da durch Anwendung der Bildungsregeln eine hierarchische Struktur der Zeichenketten erzeugt wird. Man kann

bei Aussagen diese hierarchische Struktur herauslesen, indem man systematisch entweder die Junktoren auf jeweils oberster Ebene identifiziert (und dann von außen nach innen arbeitet), oder von innen nach außen immer größere Aussagen zusammenfasst.

Beispiel 2.2 Die Aussage $(((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow B)$ hat folgende hierarchische Struktur:

$$\underbrace{((\underbrace{\underbrace{(A \wedge B)}_{\text{Konjunktion}} \wedge C)}_{\text{Konjunktion}} \Rightarrow B).}_{\text{Implikation}}$$

Diese Aussage ist also auf oberster Ebene eine Implikation. Ein Beispiel einer Konjunktion ist

$$\underbrace{((\underbrace{\underbrace{(\neg A)}_{\text{Negation}} \vee B)}_{\text{Disjunktion}} \wedge C).}_{\text{Konjunktion}}$$

□

Um nachzuweisen, dass bestimmte Zeichenketten *keine* wohlgeformten Aussagen sind genügt es nicht, keine hierarchische Zerlegung finden zu können: Man müsste vielmehr nachweisen, dass *alle* versuchten Zerlegungen keine wohlgeformten Aussagen ergeben.

Es ist meist einfacher zu argumentieren, dass es keine Zerlegung geben kann. Dazu beweist man, dass wohlgeformte Aussagen bestimmte Eigenschaften haben müssen. Wenn eine zu untersuchende Zeichenkette eine dieser Eigenschaften nicht erfüllt, so kann sie auch keine Aussage sein. Solche Eigenschaften von Aussagen sind etwa:

- Es gibt ebensoviele öffnende wie schließende Klammern,
- links und rechts von jedem der Junktoren $\wedge$ und $\vee$ steht eine Aussage,
- eine Aussage endet nie mit einem Junktor.

Man kann beweisen, dass diese Punkte für alle Aussagen gelten. Wir begnügen uns hier damit, auf ihre Plausibilität hinzuweisen, die aus der rekursiven Definition 2.1 herauszulesen ist. Formal korrekter können diese Argumente mit den Methoden gemacht werden, die wir in Abschnitt 3.6 kennenlernen werden.

Mit den oben angeführten Eigenschaften wohlgeformter Aussagen können wir argumentieren, warum die Zeichenketten aus Beispiel 2.1 keine Aussagen sind.

Beispiel 2.3 (Fortsetzung von Beispiel 2.1) Die Zeichenkette

$$((\neg A) \wedge B \wedge C$$

ist keine Aussage, da sie zwei öffnende, aber nur eine schließende Klammer enthält. Ebenso ist

$$((A \wedge \vee B))$$

keine Aussage, da $\vee B$ (rechts von $A\wedge$) und auch $A\wedge$ (links von $\vee B$) keine Aussagen sind. Mit einem ähnlichen Argument ist auch

$$\wedge B \vee C$$

keine Aussage. □

Die letzten Beispiele haben schon die Grundstruktur mathematischen Schlussfolgerns gezeigt: Um nachzuweisen, dass eine Bedingung erfüllt ist, verwendet man die Definition dieser Bedingung. Da wir Bedingungen als Aussagen formulieren, müssen wir einen Kalkül entwickeln, mit dem man für Aussagen nachrechnen kann, ob sie wahr sind oder nicht. Dazu definieren wir den Begriff des Wahrheitswerts.

Definition 2.2 (Wahrheitswert)
Die beiden einzigen *Wahrheitswerte* sind *wahr* und *falsch*, die als `w` und `f` abgekürzt werden.

Im Gegensatz zur Syntax, mit der die korrekte Form von Aussagen als Zeichenketten beschrieben wird, legt die Semantik die Bedeutung von Aussagen fest. Eine atomare Aussage muss entweder wahr oder falsch sein (aber nicht beides); die Semantik von zusammengesetzten Aussagen lässt sich aus der Semantik der Teilaussagen zusammensetzen. Dieser Vorgang ist analog zum Vereinfachen in der Arithmetik; auch dort ergibt sich die Semantik (die Bedeutung) etwa der Zeichenkette "$(3+7)\cdot(4+2)$" aus der Semantik der Zeichenketten "$(3+7)$" und "$(4+2)$", sowie der Semantik des Symbols $\cdot$. Und auch der Teilausdruck "$(3+7)$" muss noch weiter zerlegt werden, bevor sich seine Semantik aus der der Symbole 3, 7 und $+$ ergibt.

In der Arithmetik kann (bis auf wenige Ausnahmen – dazu kommen wir später noch) die Semantik von Ausdrücken nur bestimmt werden, wenn die Semantik der Teilausdrücke bekannt ist, aus denen sie sich zusammensetzt. So kann etwa die Semantik von $x+3$ nicht bestimmt werden, da die Semantik von x nicht bekannt ist. Wenn wir allerdings wissen, dass x nur die drei Werte 1, 2 oder 3 annehmen kann, so lässt sich die Semantik von $x+3$ durch folgende Tabelle wiedergeben:

x	$x+3$
1	4
2	5
3	6

Wir übernehmen diese Idee, um die Semantik von zusammengesetzten Aussagen festzulegen. Dies funktioniert, da ja jede atomare Aussage nur die beiden Wahrheitswerte `w` oder `f` haben kann. Es genügt dann, die Semantik der Junktoren für alle möglichen Wahrheitsbelegungen der Teilausdrücke in einer Tabelle aufzulisten, um die Semantik von zusammengesetzten Aussagen zu erhalten. Eine solche Tabelle von Wahrheitswerten nennt man (wenig überraschend) *Wahrheitstabelle*. Der leichteren Lesbarkeit willen verzichten wir im Folgenden auf die Klammernsetzung um Aussagen, die nur einen Junktor enthalten.

Definition 2.3 (Semantik der Negation)
Die Semantik von $\neg x$ ist für die beiden möglichen Wahrheitswerte von x gegeben durch die Tabelle

x	$\neg x$
`f`	`w`
`w`	`f`

Durch diese Definition wird die Bedeutung der Negation $\neg x$ von x als Verneinung (Gegenteil) von A festgelegt. Die Negation ist der einzige *einstellige* Junktor, da die zusammengesetzte Aussage $\neg x$ nur aus einer Aussage x besteht. Die anderen Junktoren aus Definition 2.1 sind alle *zweistellig*, da sie aus jeweils zwei Aussagen zusammengesetzt sind. Wir geben die Semantik dieser Junktoren in den nächsten Definitionen an. Da es für zwei Aussagen vier verschiedene Möglichkeiten der Zuweisung von Wahrheitswerten gibt, enthalten die Wahrheitstabellen in diesen Definitionen alle vier Zeilen.

Definition 2.4 (Semantik der Konjunktion)
Für zwei Aussagen x und y ist die Semantik der Konjunktion $x\wedge y$ durch folgende Tabelle gegeben:

x	y	$x \wedge y$
`f`	`f`	`f`
`f`	`w`	`f`
`w`	`f`	`f`
`w`	`w`	`w`

Die Konjunktion $x\wedge y$ zweier Aussagen x und y ist somit nur dann wahr, wenn beide Aussagen x und y wahr sind. Der Wahrheitswert der Aussage $x \wedge y$ drückt also die Bedeutung des sprachlichen *und* aus.

Definition 2.5 (Semantik der Disjunktion)
Für zwei Aussagen x und y ist die Semantik der Disjunktion $x\vee y$ durch folgende Tabelle gegeben:

x	y	$x \vee y$
`f`	`f`	`f`
`f`	`w`	`w`
`w`	`f`	`w`
`w`	`w`	`w`

Die Disjunktion $x \vee y$ zweier Aussagen x und y ist also wahr, sobald mindestens eine der beiden Aussagen x und y wahr ist. Der Wahrheitswert von $x \vee y$ ist somit das *oder* der beiden Aussagen x und y, aber nicht im ausschließenden Sinn: $x \vee y$ ist auch dann wahr, wenn sowohl x als auch y wahr sind. Das sprachliche *oder*, das im normalen Sprachgebrauch eher in ausschließendem Sinn verwendet wird, wird in der Logik als *exklusives oder* bezeichnet (siehe Übungsaufgabe 2.1 (Ü.7)); dessen Semantik unterscheidet sich damit auch von der des hier definierten *oder*-Symbols.

Definition 2.6 (Semantik der Implikation)
Für zwei Aussagen x und y ist die Semantik der Implikation $x \Rightarrow y$ durch folgende Tabelle gegeben:

x	y	$x \Rightarrow y$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Die Aussage x wird die *Prämisse*, die Aussage y die *Konklusion* der Implikation genannt.

Die Definition der Implikation $x \Rightarrow y$ soll die Bedeutung von "aus x folgt y" widerspiegeln: Wenn x wahr ist, dann ist der Wahrheitswert von $x \Rightarrow y$ von y abhängig: $x \Rightarrow y$ ist für wahre x und y wahr, und für wahres x, aber falsches y falsch. Dies deckt sich mit unserer Erwartung an den Wahrheitswert eines Satzes wie "wenn es regnet, dann ist die Straße nass". Schwieriger wird es, wenn x falsch ist, da sich die Bedeutung der Implikation dann nicht mehr so leicht durch umgangssprachliche Argumentieren erklären lässt: Wenn es nicht regnet und die Straße nass ist (oder nicht), was ist dann die Bedeutung (wahr oder falsch?) von "wenn es regnet, dann ist die Straße nass"? Wie wir aus Definition 2.6 sehen, legen wir in diesem Fall fest, dass die Implikation wahr ist. Zusammenfassend ergibt sich somit, dass die Implikation $x \Rightarrow y$ immer wahr ist, wenn x falsch ist, und sonst gleich dem Wahrheitswert von y ist.

Über Wahrheitstabellen können wir den Wahrheitswert beliebig großer Aussagen bestimmen, da zusammengesetzte Aussagen aus Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen oder Implikationen bestehen, und wir die Bedeutung dieser Junktoren soeben definiert haben. Wir betrachten dafür einige Beispiele.

Beispiel 2.4 Die Bedeutung der Aussage $((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge (\neg B)))$ ist durch untenstehende Wahrheitstabelle gegeben. Dabei sind zur leichteren Verständlichkeit die Bedeutungen der Teilaussagen ebenfalls aufgelistet.

A	B	$(A \vee B)$	$(A \wedge (\neg B))$	$((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge (\neg B)))$
f	f	f	f	w
f	w	w	f	f
w	f	w	w	w
w	w	w	f	f

Wie wir durch den Vergleich der Spalten 2 und 5 dieser Tabelle leicht sehen können, ist der Wahrheitswert von $((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge (\neg B)))$ gleich dem Wahrheitswert von $(\neg B)$.

Der Wahrheitswert von $(((A \vee B) \wedge C) \wedge (\neg A))$ ist gegeben durch die Tabelle

A	B	C	(A∨B)	((A∨B) ∧C)	$(((A \vee B) \wedge C) \wedge (\neg A))$
f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	f
w	w	f	w	f	f
w	w	w	w	w	f

Der Wahrheitswert von $((\neg(A \wedge B)) \vee A)$ ist gegeben durch

A	B	$(\neg(A \wedge B))$	$((\neg(A \wedge B)) \vee A)$
f	f	w	w
f	w	w	w
w	f	w	w
w	w	f	w

Aussagen dieser Art, die für jede Belegung der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten immer wahr sind, nennt man *Tautologien*. Im Gegensatz dazu nennt man eine Aussage, die für alle Wahrheitswertbelegungen falsch ist, einen *Widerspruch*.□

Definition 2.7 (Gleichwertigkeit von Aussagen)
Zwei Aussagen x und y heißen genau dann *gleichwertig*, wenn ihre Wahrheitswerte für alle Wahrheitswertbelegungen der atomaren Aussagen in x und y gleich sind. In diesem Fall schreiben wir $x \equiv y$ und sagen auch, dass x und y *äquivalent* sind.

Wie wir in Beispiel 2.4 gesehen haben, gilt etwa

$$((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge (\neg B))) \equiv (\neg B).$$

Man beachte, dass die Zeichenkette "$x \equiv y$" *keine* Aussage ist, da sie nicht Definition 2.1 genügt. $x \equiv y$ ist vielmehr eine *Meta-Aussage*, die etwas über die beiden Aussagen x und y aussagt.

Das nächste Beispiel zeigt, dass bei zusammengesetzten Konjunktionen und Disjunktionen zur leichteren Lesbarkeit die Klammern weggelassen werden können, ohne die Semantik der Aussagen zu verändern.

Beispiel 2.5 Für Aussagen x, y und z gilt

$$((x \vee y) \vee z) \equiv (x \vee (y \vee z)).$$

Wir rechnen dies über die Wahrheitstabellen der beiden Aussagen nach:

x	y	z	$(x \vee y)$	$((x \vee y) \vee z)$	$(y \vee z)$	$(x \vee (y \vee z))$
f	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	w	f	w
w	f	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w
w	w	w	w	w	w	w

Wir können somit zwischen reinen Disjunktionen die Klammern beliebig setzen; dies gilt auch für längere zusammengesetzte Disjunktionen. Da die Klammernsetzung keine Rolle spielt, können wir *alle* Klammern weglassen, und schreiben abkürzend $x \vee y \vee z$ für $((x \vee y) \vee z)$.

Mit einer ähnlichen Herleitung kann man nachrechnen, dass auch bei zusammengesetzten Aussagen, die nur aus Konjunktionen bestehen, die Klammernsetzung keine Rolle spielt. Wir kürzen auch hier $((x \wedge y) \wedge z)$ als $x \wedge y \wedge z$ ab.

Man beachte, dass die nachgerechnete Gleichwertigkeit in diesem Beispiel für beliebige Aussagen x, y und z gilt; diese Aussagen können also ohne Einschränkungen atomar oder zusammengesetzt sein. □

Das letzte Beispiel zeigt auf, wie man Behauptungen in der Mathematik überprüfen (beweisen) kann: Mit einer Behauptung ist immer eine Definition verbunden, wann diese Behauptung wahr ist. Im einfachsten Fall lässt sich dann direkt überprüfen, ob diese Definition erfüllt ist. Bei schwierigeren Fällen ergeben sich durch die Definition weitere Behauptungen, die dann durch weitere Definitionen auf schon bekannte Situationen zurückgeführt werden können. Bekannte Situationen können entweder schon zuvor bewiesene Behauptungen sein, oder aber Behauptungen, deren Gültigkeit nicht angezweifelt wird. Solche fundamentalen Behauptungen werden *Axiome* genannt; Behauptungen, deren Richtigkeit begründet werden muss, werden *Sätze* (oder, wenn besonders wichtig, auch *Theoreme*) genannt.

Beispiel 2.5 behandelte die Gleichwertigkeit $\equiv$ von zwei Aussagen. Mit Definition 2.7 sind zwei Aussagen gleichwertig, wenn sie für alle Wahrheitswerte ihrer atomaren Aussagen gleich sind – in anderen Worten, wenn ihre Spalten in einer Wahrheitstabelle identisch sind. Da dies der Fall ist, wurde somit die Gleichwertigkeit der Aussagen $((x \vee y) \vee z)$ und $(x \vee (y \vee z))$ bewiesen. Wir werden im Laufe dieser Lehrveranstaltung noch weitere Möglichkeiten kennenlernen, mathematische Behauptungen formal korrekt zu begründen.

Im Folgenden werden wir alle Klammern weglassen, die zur eindeutigen Lesbarkeit von Aussagen nicht notwendig sind. Wir werden die äußersten Klammern um Aussagen weglassen und festlegen, dass sich die ungeklammerte Negation immer auf die nächste atomare Aussage bezieht. Somit ist die Zeichenkette $x \wedge \neg y$ eine Kurzform für $(x \wedge (\neg y))$.

Die in Beispiel 2.5 nachgerechnete Eigenschaft, Klammern zwischen Disjunktionen beliebig setzen zu können, nennt man *Assoziativität*. Auch die Konjunktion ist assoziativ, da man auch hier die Klammernsetzung vertauschen kann. Eine weitere wichtige Eigenschaft von Disjunktionen und Konjunktionen ist die *Kommutativität*:

Die Reihenfolge der Operanden kann vertauscht werden, denn es gelten

$$x \vee y \equiv y \vee x \qquad \text{und} \qquad x \wedge y \equiv y \wedge x.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass die Implikation weder assoziativ noch kommutativ ist.

Beispiel 2.6 Es gilt

$$((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \not\equiv (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)).$$

Das Symbol $\not\equiv$ ist die Verneinung von $\equiv$ und sagt somit aus, dass zwei Aussagen *nicht* gleichwertig sind. Die äußersten Klammern auf beiden Seiten von $\not\equiv$ sind nicht nötig, werden aber wegen der leichteren Lesbarkeit hier trotzdem geschrieben.

Wir überprüfen auch diese Aussage mit Wahrheitstabellen:

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$	$(y \Rightarrow z)$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$
f	f	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f
w	w	w	w	w	w	w

Da die Spalten 5 und 7 dieser Tabelle nicht identisch sind, sind die beiden Aussagen $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$ und $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$ nicht gleichwertig. □

Wie wir gesehen haben, lassen sich mit Hilfe von Wahrheitstabellen Äquivalenzen von Aussagen nachweisen. Man kann dann wiederum die Äquivalenzen ausnutzen, um zusammengesetzte Aussagen zu vereinfachen, ohne Wahrheitstabellen konstruieren zu müssen. In Satz 2.2 weiter unten werden die am häufigsten verwendeten Äquivalenzen zusammengefasst. In dieser Liste von Äquivalenzen scheint die Implikation als Junktor nicht auf. Dies ist dadurch begründet, dass sich die Implikation durch Negation und Disjunktion ausdrücken lässt.

Satz 2.1 Seien x und y zwei Aussagen. Dann gilt

$$x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y \qquad \text{und} \qquad x \Rightarrow y \equiv \neg y \Rightarrow \neg x.$$

Die Implikation kann somit als Kurzform einer speziellen Disjunktion gesehen werden. Wie wir in den nächsten Rechenregeln sehen werden, können auch Disjunktionen durch Konjunktionen und Negationen ausgedrückt werden (und umgekehrt). Man benötigt somit nur Disjunktion und Negation (oder Konjunktion und Negation), um alle Aussagen formulieren zu können.

Satz 2.2 Seien x, y und z Aussagen. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll}
\neg(\neg x) \equiv x & & \text{(Involution)} \\
x \wedge y \equiv y \wedge x & x \vee y \equiv y \vee x & \text{(Kommutativität)} \\
x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z & x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z & \text{(Assoziativität)} \\
x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z) & x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z) & \text{(Distributivität)} \\
x \vee (x \wedge y) \equiv x & x \wedge (x \vee y) \equiv x & \text{(Absorption)} \\
x \wedge x \equiv x & x \vee x \equiv x & \text{(Idempotenz)} \\
x \wedge \mathtt{w} \equiv x & x \vee \mathtt{f} \equiv x & \text{(Neutralität)} \\
x \wedge \neg x \equiv \mathtt{f} & x \vee \neg x \equiv \mathtt{w} & \text{(Komplementarität)} \\
x \wedge \mathtt{f} \equiv \mathtt{f} & x \vee \mathtt{w} \equiv \mathtt{w} & \text{(Invarianz)} \\
\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y & \neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y & \text{(DeMorgan Regeln)}
\end{array}$$

Wir illustrieren die Verwendung dieser Regeln anhand eines Beispiels.

Beispiel 2.7 Wir können durch Umformungen unter Verwendung der Rechenregeln aus Satz 2.1 und Satz 2.2 nachrechnen, dass gilt:

$$(A \vee B) \Rightarrow A \equiv B \Rightarrow A.$$

Wir formen die linke Seite dieser Äquivalenz wie unten angegeben um und erhalten dann die rechte Seite. Wir geben in Klammern an, welche der Rechenregeln bei der Umformung angewendet worden ist.

$$\begin{array}{rcl}
(A \vee B) \Rightarrow A & \stackrel{\text{(Satz 2.1)}}{\equiv} & \neg(A \vee B) \vee A \\
& \stackrel{\text{(DeMorgan)}}{\equiv} & (\neg A \wedge \neg B) \vee A \\
& \stackrel{\text{(Kommutativität)}}{\equiv} & A \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
& \stackrel{\text{(Distributivität)}}{\equiv} & (A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \\
& \stackrel{\text{(Komplementarität)}}{\equiv} & \mathtt{w} \wedge (A \vee \neg B) \\
& \stackrel{\text{(Neutralität)}}{\equiv} & A \vee \neg B \\
& \stackrel{\text{(Kommutativität)}}{\equiv} & \neg B \vee A \\
& \stackrel{\text{(Satz 2.1)}}{\equiv} & B \Rightarrow A
\end{array}$$

□

Im letzten Beispiel haben wir eine Aussage unter Verwendung von Umformungsregeln vereinfacht. Wann aber genau ist eine Aussage “einfacher” als eine andere? Wir nehmen diese Fragestellung zum Anlass, um ein erstes Beispiel einer Problemspezifikation zu behandeln. Dabei wird festgelegt, in welchem Zusammenhang zu bestimmende Größen mit Eingabegrößen stehen.

Beispiel 2.8 Ausgehend von einer Aussage x möchte man eine “möglichst einfache” Aussage y erhalten, die gleichwertig zu x ist. Eine erste Version einer Problemspezifikation drückt genau dies aus:

GEGEBEN: x
  wobei x eine Aussage ist
GESUCHT: y
  sodass y eine einfachere Aussage als x ist, und $x \equiv y$ ist.

Soweit illustriert dieses Beispiel nur die formalen Vorgaben an eine Problemspezifikation; inhaltlich ist man noch keinen Schritt weiter (was ist eine “einfachere Aussage”?). Wenn man allerdings festlegt, dass eine Aussage genau dann einfacher als eine andere ist, wenn sie kürzer ist, dann ergibt sich daraus ein Kriterium, das überprüft werden kann. Wir nehmen dazu an, dass Länge(x) die Länge einer Aussage x angibt, also die Anzahl der Symbole in x. Daraus ergibt sich folgende überarbeitete Version der obigen Spezifikation.

GEGEBEN: x
  wobei x eine Aussage ist
GESUCHT: y
  sodass y eine Aussage ist, Länge(y) $\leq$ Länge(x) ist, und $x \equiv y$ ist.

Diese Spezifikation legt aber nur fest, dass y kürzer als x ist, aber noch nicht, dass y am kürzesten ist. Das kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

GEGEBEN: x
  wobei x eine Aussage ist
GESUCHT: y
  sodass y eine Aussage ist, Länge(y) $\leq$ Länge(x) ist, $x \equiv y$ ist, und es keine Aussage z ungleich y gibt mit $z \equiv x$ und Länge(z) $<$ Länge(y).

□

Wir werden uns im Laufe dieser Vorlesung noch genauer mit Problemspezifikationen beschäftigen. Dies ist allerdings erst dann sinnvoll, wenn wir die Werkzeuge kennengelernt haben, um solche Sätze wie “es gibt keine Aussage” zu formalisieren.

Wir haben in diesem Abschnitt Teile des formalen Unterbaus kennengelernt, mit der man logische Zusammenhänge zwischen Aussagen ausdrücken kann. Damit haben wir die Möglichkeit, den in Kapitel 1 angesprochenen Modellbildungsschritt vorzunehmen. Da wir das Modell aber meist nur bilden, um damit eine Problemlösung zu vereinfachen, kann die Modellbildung als erster Schritt im Lösungsprozess gesehen werden.

Für den zweiten Schritt, die Problemlösung im Modell, benötigen wir einen Kalkül, um die Wahrheit von Aussagen zu bestimmen. Mit Wahrheitstabellen und Rechenregeln stehen uns dafür zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Andererseits ist es oft von Vorteil, aus einer gegebenen Menge von wahren Aussagen weitere wahre Aussagen erzeugen zu können – meist sind wir an Aussagen, die in unserem Modell nicht gelten, sowieso nicht interessiert. Faktenwissen über einen Bereich kann meist in Form von Konjunktionen und Implikationen formuliert werden (“was alles gilt und was daraus folgt”). Die Implikationen können verwendet werden, um weitere wahre Aussagen zu erzeugen. Die dabei verwendete Schlussregel wird *modus ponens* genannt.

Satz 2.3 (Modus ponens) Seien x und $x \Rightarrow y$ zwei wahre Aussagen. Dann ist auch y eine wahre Aussage.

Von der Richtigkeit dieser Schlussregel kann man sich durch die Wahrheitstabelle in Definition 2.6 überzeugen: In allen Zeile der Wahrheitstabelle, in denen sowohl x als auch $x \Rightarrow y$ wahr sind – das ist nur die letzte Zeile – ist auch y wahr.

Wir betrachten zwei Beispiele, wie man mittels modus ponens schlussfolgern kann.

Beispiel 2.9 Die Implikation “Wenn es regnet, ist die Straße nass” sei wahr. Wenn wir nun hören, dass es regnet (die Prämisse der Implikation also wahr ist) können wir daraus schließen, dass die Straße nass ist. □

Beispiel 2.10 Gegeben sei die wahre Aussage

$$A \wedge B \wedge \neg C \wedge (A \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow E).$$

Aus Definition 2.4 wissen wir, dass dann A, B und $\neg C$ sowie die Implikationen $A \Rightarrow D$ und $D \Rightarrow E$ auch wahre Aussagen sind (eine Konjunktion von Aussagen ist genau dann wahr, wenn alle Aussagen wahr sind). Mit modus ponens folgt zuerst, dass D wahr ist, und mit nochmaliger Anwendung auch, dass E wahr ist. □

Wir werden diese Art der Schlussfolgerung im weiteren Verlauf der Vorlesung noch öfter benötigen.

Fragen zur Selbstkontrolle

2.1 (S.1) Was sind *Aussagen* im Sinn der Aussagenlogik? Was ist der Unterschied zwischen atomaren und zusammengesetzten Aussagen?

2.1 (S.2) Geben Sie drei Zeichenketten an, die wohlgeformte Aussagen bilden, sowie drei Zeichenketten mit den selben Symbolen, die keine wohlgeformten Aussagen sind.

2.1 (S.3) Was ist der Unterschied zwischen *Syntax* und *Semantik*?

2.1 (S.4) Wie können Sie überprüfen, ob eine Zeichenkette eine wohlgeformte Aussage ist?

2.1 (S.5) Wie können Sie die Semantik einer zusammengesetzten Aussage bestimmen?

2.1 (S.6) Beschreiben Sie den Unterschied zwischen der Semantik der Disjunktion und des normalen (meist verwendeten) Gebrauchs des Bindeworts *oder* in der deutschen Sprache.

2.1 (S.7) In Satz 2.2 sind eine Reihe von Rechenregeln für das Umformen von zusammengesetzten Aussagen angegeben. Wie können Sie nachweisen, dass diese Umformungen richtig sind? Was heißt in diesem Kontext überhaupt “richtige Umformung”?

2.1 (S.8) Warum verwenden wir das Symbol $\equiv$ und nicht einfach $=$ um auszudrücken, dass zwei Aussagen gleichwertig sind?

2.1 (S.9) Ist die Aussage “Wenn das Mittagessen schmeckt, dann ist Peter gut gelaunt” gleichwertig mit der Aussage “Wenn Peter gut gelaunt ist, dann hat das Mittagessen geschmeckt”?

2.1 (S.10) Ist die Aussage “Wenn das Backup funktioniert, dann gehen keine Daten verloren” gleichwertig mit der Aussage “Wenn Daten verloren gehen, dann hat das Backup nicht funktioniert”?

Übungsaufgaben

2.1 (Ü.1) Analysieren Sie die Struktur folgender zusammengesetzter Aussagen (wie in Beispiel 2.2 gezeigt, aber schon mit den auf S. 14 erwähnten Konventionen zur leichteren Lesbarkeit):

(a) $\neg(A \wedge (B \Rightarrow A))$ **(b)** $A \vee (\neg B \vee C)$ **(c)** $(A \vee D) \wedge \neg(\neg B \vee C)$

2.1 (Ü.2) Karl behauptet: “Ich bin nicht hungrig und durstig”. Wie würden Sie dies als zusammengesetzte Aussage schreiben, wenn A “Karl ist hungrig” und B “Karl ist durstig” bedeutet? Kann Ihre zusammengesetzte Aussage wahr sein, wenn Karl hungrig ist?

2.1 (Ü.3) Bestimmen Sie die Semantik folgender Aussagen, indem Sie ihre Wahrheitstabellen aufstellen:

(a) $A \wedge (B \Rightarrow A)$ **(b)** $A \vee \neg(A \wedge B)$ **(c)** $B \Rightarrow (A \wedge \neg B)$

2.1 (Ü.4) Rechnen Sie nach, dass folgende Aussagen gleichwertig sind, indem Sie ihre Wertetabellen aufstellen: $(\neg(x \wedge (\neg y))) \vee (y \wedge (x \vee z))$ und $\neg x \vee y$.

2.1 (Ü.5) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, wieviele Zeilen ihre Wertetabelle haben würde:

(a) $(\neg A \vee C)$
(b) $(A \vee D) \wedge (B \vee \neg C)$
(c) Eine Aussage mit n unterschiedlichen atomaren Aussagen.

2.1 (Ü.6) Vereinfachen Sie folgende Aussagen so weit wie möglich, indem Sie die in diesem Abschnitt präsentierten Rechengesetze für Aussagen verwenden:

(a) $\big((x \vee \neg y) \wedge (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)\big) \vee y$
(b) $\neg(x \vee y) \wedge \big(y \vee (\neg x \wedge \neg y)\big)$
(c) $\big(y \vee (\neg x \wedge \neg y)\big) \wedge \neg(x \vee y)$
(d) $\neg(x \vee y) \vee \big((x \wedge y) \vee x\big)$
(e) $\big((\neg x \wedge y) \vee x\big) \wedge \big((x \wedge y) \vee x\big)$

2.1 (Ü.7) Wir definieren die beiden neuen Junktoren *exklusives Oder* (mit dem Symbol $\otimes$) und *Äquivalenz* (mit dem Symbol $\Leftrightarrow$) durch die folgenden Wertetabellen:

x	y	$x \otimes y$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

x	y	$x \Leftrightarrow y$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Verifizieren Sie durch Vergleich der Wertetabellen, dass sich diese Junktoren durch die bereits bekannten Junktoren wie folgt darstellen lassen:

(a) $(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) \equiv x \otimes y$ **(b)** $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \equiv x \Leftrightarrow y$

2.1 (Ü.8) Man kann in Übungsaufgabe 2.1 (Ü.7) erkennen, dass der exklusive Oder-Junktor $\otimes$ das Gegenteil vom Äquivalenz-Junktor $\Leftrightarrow$ ist. Rechnen Sie nach, dass $\neg(x \otimes y) \equiv x \Leftrightarrow y$ gilt, indem Sie die Resultate von Übungsaufgabe 2.1 (Ü.7) verwenden.

2.1 (Ü.9) Geben Sie ein Beispiel eines sprachlichen Arguments an, das modus ponens verwendet.

2.1 (Ü.10) Eine *dreiwertige Logik* besitzt drei mögliche Wahrheitswerte. In einer solchen dreiwertigen Logik sei der dritte Wahrheitswert (neben `w` und `f`) “unbekannt” `u`. Die Interpretation von `u` sei so, dass dieser Wert `w` oder `f` sein kann, man aber nicht weiß, welcher.

Aus dieser Interpretation heraus ergeben sich folgende Wahrheitstabellen für die

Junktoren ¬, ∧ und ∨:

x	$(\neg x)$
w	f
u	u
f	w

x	y	$(x \wedge y)$	$(x \vee y)$
f	f	f	f
f	u	f	u
f	w	f	w
u	f	f	u
u	u	u	u
u	w	u	w
w	f	f	w
w	u	u	w
w	w	w	w

Es ist etwa ($\mathtt{f} \wedge \mathtt{u}$) gleich f, da sowohl ($\mathtt{f} \wedge \mathtt{f}$) und ($\mathtt{f} \wedge \mathtt{w}$) zu f evaluieren. Andererseits ist ($\mathtt{u} \wedge \mathtt{w}$) gleich u, da ($\mathtt{w} \wedge \mathtt{w}$) gleich w, aber ($\mathtt{f} \wedge \mathtt{w}$) gleich f ist.

Konstruieren Sie mit dieser Interpretation von u die Wertetabelle für $(x \Rightarrow y)$. In der "normalen" Aussagenlogik ist $(x \Rightarrow y)$ gleichwertig mit $(\neg x \vee y)$; gilt dies auch in der hier definierten dreiwertigen Logik?

2.1 (Ü.11) Versuchen Sie einen ternären Junktor 'IF □ THEN □ ELSE □' – also einen Junktor mit drei(!) Argumenten, hier durch □ ausgedrückt – aus den bisherigen Junktoren zusammenzubauen. Dieser soll so funktionieren: Falls sein erstes Argument wahr ist, ist der Wert der Junktoraussage gleich dem des zweiten Arguments, sonst gleich dem des dritten Arguments.

Falls also in der Aussage IF c THEN x ELSE y die Variable c wahr ist, hat die ganze Aussage den gleichen Wahrheitswert wie x. Falls c falsch ist, hat die gesamte Aussage den gleichen Wert wie y. So gelten etwa IF w THEN f ELSE w ≡ f und IF f THEN f ELSE w ≡ w.

Definieren Sie diesen Junktor, indem Sie seine Wertetabelle aufstellen.

2.1 (Ü.12) Übungsaufgabe 2.1 (Ü.11) zeigt ein Beispiel eines dreistelligen Junktors. Wieviele solche dreistelligen Junktoren kann man konstruieren, also durch eine Spalte einer Wahrheitstabelle eindeutig definieren?

Verallgemeinern Sie dieses Argument: Wieviele n-stellige Junktoren gibt es, definiert wiederum als eine eindeutige Spalte in einer Wahrheitstabelle?

2.1 (Ü.13) Wir betrachten folgenden Junktor, der außerhalb dieses Beispiels keine spezielle Relevanz, und daher auch kein etabliertes Symbol hat (wir verwenden ⊛):

x	y	$x \circledast y$
f	f	f
f	w	w
w	f	f
w	w	f

Überzeugen Sie sich (über eine Wertetabelle) davon, dass $x \circledast y \equiv \neg x \wedge y$ gilt. Die Aussage $x \circledast y$ ist somit genau in der Zeile wahr, in der $x \equiv \mathtt{f}$ und $y \equiv \mathtt{w}$ gilt.

Ebenso gilt laut Übungsaufgabe 2.1 (Ü.7) die Gleichwertigkeit $(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \equiv x \otimes y$. Auch hier zeigt die Wahrheitstabelle, dass $x \otimes y$ in genau den beiden Zeilen wahr ist, in denen entweder $x \equiv \mathtt{w}$ und $y \equiv \mathtt{f}$ gelten (also $x \wedge \neg y \equiv \mathtt{w}$ ist), oder $x \equiv \mathtt{f}$ und $y \equiv \mathtt{w}$ gelten (und somit $\neg x \wedge y \equiv \mathtt{w}$ ist). Die Disjunktion der beiden Aussagen $(x \wedge \neg y)$ und $(\neg x \wedge y)$ liefert somit genau jene Wahrheitswerte, die auch $x \otimes y$ liefert. Sie können erkennen, dass man sowohl $x \circledast y$ als auch $x \otimes y$ durch zusammengesetzte Aussagen ausdrücken kann, die nur die Junktoren ¬, ∧ und ∨ beinhalten.

Versuchen Sie zu erkennen, wie sich die (hier nur exemplarisch gezeigte) Vorgehensweise so verallgemeinern lässt, dass man damit beliebige Aussagen durch Kombinationen der Junktoren ¬, ∧ und ∨ ausdrücken kann. Wenden Sie diese Methode dann auf die Aussagen f_1 und f_2 an, die durch ihre Wertetabellen wie folgt gegeben sind:

(a)

x	y	$f_1(x,y)$
f	f	f
f	w	w
w	f	f
w	w	f

(b)

x	y	z	$f_2(x,y,z)$
f	f	f	f
f	f	w	w
f	w	f	f
f	w	w	w
w	f	f	f
w	f	w	f
w	w	f	w
w	w	w	f

2.1 (Ü.14) [Fortsetzung von Übungsaufgabe 2.1 (Ü.13)] Formulieren Sie eine allgemeine Vorschrift, wie man zu einer beliebigen Aussage (gegeben als Spalte einer Wahrheitstabelle) eine gleichwertige zusammengesetzte Aussage finden kann, die nur Negation, Konjunktion bzw. Disjunktion verwenden.

2.1 (Ü.15) Zwei weitere binäre Junktoren sind die negierte Konjunktion *NAND* (mit dem Symbol $\barwedge$) sowie die negierte Disjunktion *NOR* (mit dem Symbol $\triangledown$). Die Wertetabellen dieser Junktoren sind wie folgt:

x	y	$x \barwedge y$
f	f	w
f	w	w
w	f	w
w	w	f

x	y	$x \triangledown y$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	f

Es ist etwas überraschend, dass man die drei Junktoren Negation, Konjunktion, sowie Disjunktion jeweils nur durch NAND bzw. NOR auszudrücken kann. Es gibt also zusammengesetzte Aussagen, die nur den NAND- (bzw. nur den NOR-) Junktor enthalten, und die gleichwertig mit Negation, Konjunktion sowie Disjunktion sind. Stellen Sie (am einfachsten durch Probieren) fest, welche zusammengesetzten Aussagen Sie dafür benötigen.

2.1 (Ü.16) Argumentieren Sie unter Verwendung der Übungsaufgaben 2.1 (Ü.14) und 2.1 (Ü.15): Jede beliebige Aussage lässt sich als eine gleichwertige zusammengesetzte Aussage schreiben, deren einzige Junktoren entweder NAND oder NOR sind.

2.2 Bausteine der Prädikatenlogik

Der im letzten Abschnitt besprochene Logikkalkül erlaubt es uns, mittels Aussagen Objekte und deren Zusammenhänge zu beschreiben. Die Ausdruckskraft dieses Kalküls ist jedoch sehr eingeschränkt, da eine Aussage sich immer auf *bestimmte fixe* Objekte bezieht, der Wahrheitswert einer Aussage somit konstant wahr oder falsch ist. In vielen Bereichen benötigt man hingegen Aussagen, die in Abhängigkeit der Objekte, die sie beschreiben, wahr oder falsch sind: Aussagen wie

"x teilt 28."
"y ist der Sohn von Franz."

sind in Abhängigkeit des Werts der Variablen x bzw. y entweder wahr oder falsch. Die erste Aussage ist somit für die ganzen Zahlen 1, 2, 4, 7, 14 und 28 wahr; zur Überprüfung der Wahrheit der zweiten Aussage benötigen wir mehr Informationen über die Objekte, auf die sich die Aussage bezieht.

Im Folgenden werden wir sehen, wie wir mit Hilfe der *Prädikatenlogik* allgemeinere Zusammenhänge als mit der Aussagenlogik beschreiben können. Dazu benötigen wir einige Grundbegriffe, um mit diesem Logikkalkül formal korrekt operieren zu können.

Wir nehmen zuerst an, ein *Universum* von Objekten gegeben zu haben (dieses wird auch *Domäne* genannt). Einzelne Objekte (etwa Franz oder π) dieses Universums haben spezielle Bezeichner (*Objektkonstante* genannt). Wenn man Aussagen über beliebige Objekte machen möchte, so verwendet man dazu *Variablen*; diese Aussagen werden dann je nach *Variablenbelegung* wahr oder falsch.

In diesem Abschnitt verwenden wir die beiden Begriffe *Funktion* und *Prädikat*, auf die wir später noch viel genauer eingehen werden (Abschnitte 3.4 und 3.5). An dieser Stelle reicht allerdings die folgende informelle Beschreibung.

In einem Universum können Objekte in eindeutigem Zusammenhang mit anderen Objekten stehen. Beispiele dafür sind etwa die Zahl 2, die bezüglich des Zusammenhangs *Nachfolgezahl* eindeutig mit der Zahl 3 zusammenhängt, oder Klaudia, die bezüglich des Zusammenhangs *Tochter sein* eindeutig mit ihrer Mutter Maria zusammenhängt. Diese eindeutigen Zusammenhänge nennen wir *Funktionen*; dieses wichtige Konzept werden wir in vielen Teilen des Skriptums benötigen.

Ebenso können Objekte in Kombination eindeutig mit einem anderen Objekt zusammenhängen; so stehen etwa die Zahlen 2 und 3 (gemeinsam) eindeutig im *Addieren*-Zusammenhang mit 5, und im *Multiplizieren*-Zusammenhang mit 6. Die Namen von Funktionen werden als *Funktionskonstante* bezeichnet. In den obigen Beispielen sind dies $+1$ (für Nachfolgezahl), *TochterVon*, $+$ und $\cdot$.

Ebenso gibt es *Prädikate*, die Eigenschaften von Objekten, oder den Zusammenhang zwischen Objekten ausdrücken. Für ein gegebenes Prädikat kann man entscheiden, ob bestimmte Objekte diese Eigenschaft haben, oder in dieser Beziehung zueinander stehen. Prädikate sind somit wahr oder falsch, und damit genau die Eigenschaften von und Zusammenhänge zwischen Objekten, die in Abschnitt 2.1 als atomare Aussagen bezeichnet wurden.

Beispiele von Prädikaten sind etwa, ob eine Zahl eine Primzahl ist, ob zwei Zahlen in der *kleiner-gleich* Beziehung stehen, oder ob zwei Menschen Brüder sind. Analog zu Funktionen werden die Namen von Prädikaten als *Prädikatenkonstante* bezeichnet. Mögliche sprechende Namen bzw. Symbole der Prädikate in obigen Beispielen sind *istPrim*, $\leq$ und *istBruderVon*.

Man beachte folgenden wichtigen Unterschied zwischen Funktionen und Prädikaten: Bei Funktionen muss der Zusammenhang zwischen den Objekten eindeutig sein ("jede Zahl hat genau einen Nachfolger", "jedes Kind hat genau eine Mutter"), bei Prädikaten ist dies nicht der Fall: es gelten sowohl $2 \leq 3$ als auch $2 \leq 4$, es gibt also keine eindeutige Zahl, die mit 2 in der *kleiner-gleich* Beziehung steht. Ebenso kann Klaus sowohl der Bruder von Karl als auch von Georg sein; er steht also zu keinem der beiden in einer eindeutigen *istBruderVon*-Beziehung.

Weiters ist in der Prädikatenlogik zu beachten, dass man nur Variablen zulässt, die mit Objekten belegt werden können. Prinzipiell könnten auch Funktions- und Prädikatenvariable zugelassen werden; dies würde zwar die Ausdruckskraft steigern, den logischen Kalkül aber abschwächen. Wir werden uns somit auf die *Prädikatenlogik erster Ordnung* beschränken, deren Grundgerüst wir soeben informell beschrieben haben.

Wir werden in Kapitel 3 sehen, wie sich mathematische Objekte (Zahlen, Funktionen, ...) präzise definieren lassen. In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass diese Objekte schon gegeben sind, und wollen nun Aussagen über diese Objekte formulieren können. Als erstes behandeln wir Möglichkeiten, Objekte selbst zu beschreiben. Bis zur genaueren Behandlung in Kapitel 3 werden wir im Folgenden den Begriff *Menge* umgangssprachlich als Kollektion von Objekten verwenden.

Definition 2.8 (Terme)
Gegeben sei eine Menge von Variablen, eine Menge von Objektkonstanten, und eine Menge von Funktionskonstanten. Als *Terme* bezeichnet man genau jene Zeichenketten, die sich mit den folgenden Regeln bilden lassen.

(1) Jede Variable ist ein Term.

(2) Jede Objektkonstante ist ein Term.

(3) Wenn f ein Funktionskonstante ist und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist auch $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein Term.

Wir behandeln einfache Beispiele.

Beispiel 2.11 Seien x und y Variablen, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die Menge der Objektkonstanten, und $+$, $-$ und $\cdot$ Funktionskonstanten. Dann sind folgende Zeichenketten Terme, die ganze Zahlen beschreiben:

$$+(9, y)$$
$$-(+(2, -3), +(2, x))$$
$$\cdot(\cdot(3, 2), 8)) \qquad \square$$

Die Zusammenhänge zwischen Objekten lassen sich durch atomare Aussagen beschreiben. Diese sind wie folgt definiert.

Definition 2.9 (Atomare Aussagen)
Gegeben sei eine Menge von Prädikatenkonstanten. Als *atomare Aussagen* bezeichnet man Zeichenketten, die von der Form

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

sind, wobei P eine Prädikatenkonstante ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind. Eine atomare Aussage ist entweder wahr oder falsch; wenn zumindest einer der Terme $t_1, \ldots, t_n$ Variablen enthält, hängt der Wahrheitswert der atomaren Aussage von der Variablenbelegung ab.

Es folgen wiederum einige einfache Beispiele.

Beispiel 2.12 Seien die Terme wie in Beispiel 2.11. Die Menge der Prädikatenkonstanten enthalte die Prädikate $|$ (*teilt ohne Rest*, kurz *teilt*) und $<$ (*kleiner als*). Dann sind die folgenden Zeichenketten atomare Aussagen, deren Wahrheitswert in Klammern angegeben ist:

$$\begin{aligned} <(33, 5) &\qquad \text{(falsch)} \\ |(3, \cdot(3, 1729)) &\qquad \text{(wahr)} \\ <(3, +(x, \cdot(2, x))) &\qquad \text{(hängt vom Wert von } x \text{ ab).} \end{aligned} \qquad \square$$

Bei Funktionen und Prädikaten gibt man der Anzahl der Terme, auf die sie angewandt werden, einen Namen.

> **Definition 2.10 (Stelligkeit)**
> Die Anzahl der Terme, auf die eine Funktions- oder Prädikatenkonstante angewandt werden kann, wird *Stelligkeit* dieser Funktions- oder Prädikatenkonstante genannt.

Beispiel 2.13 Die Funktionskonstanten $+, -, \cdot, /$ sind zweistellig; es gibt noch eine weitere einstellige Funktionskonstante $-$. Eigentlich sind die beiden $-$ zwei unterschiedliche Funktionen, zu deren Bezeichnung aber die gleiche Konstante verwendet wird. Weitere einstellige Funktionskonstanten sind $\sqrt{\ }$ und ^{2}.

Beispiele von unterschiedlich stelligen Prädikatenkonstanten sind etwa

istGrün(Klee)	(einstellig)
$<(3,5)$	(zweistellig)
istGGT(3,9,15)	(dreistellig).

$\square$

Die Terme und atomaren Aussagen in Beispiel 2.11 und Beispiel 2.12 unterscheiden sich von der “normalen” mathematischen Schreibweise, da laut Definition von Termen und Aussagen das Funktions- bzw. Prädikatensymbol an erster Stelle zu stehen hat. Diese Schreibweise wird *Präfix-Notation* genannt; lesbarer ist meist die gewohnte *Infix-Notation*, die wir im Folgenden bevorzugt verwenden werden.

Wie schon in Abschnitt 2.1 können atomare Aussagen mittels Junktoren zu Aussagen verbunden werden; diese werden auch *Formeln* genannt. Im folgenden Beispiel untersuchen wir die Bestandteile einer größeren Formel; dieser Vorgang wird *Syntaxanalyse* genannt.

Beispiel 2.14 Seien f und h zweistellige, sowie g eine dreistellige Funktionskonstante; P eine dreistellige, und R eine zweistellige Prädikatenkonstante, sowie x eine Variable. Weiters verwenden wir bereits bekannte Funktions- und Prädikatenkonstante wie $+$ und $<$. Gegeben sei die Formel

$$(P(f(x,12), g(1,2,3), 3+4) \wedge (x<3)) \Rightarrow R(h(x), f(3,1)).$$

Wir bezeichnen mit PK eine Prädikatenkonstante, mit FK eine Funktionskonstante, mit OK eine Objektkonstante, und mit V eine Variable. Bei Funktions- und Prädikatenkonstanten geben wir noch eine Stelligkeit an. Dann können wir alle Komponenten obiger Formel identifizieren:

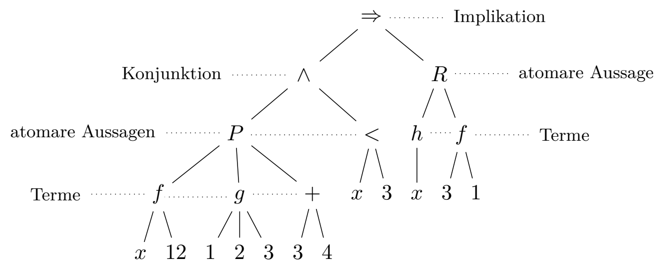
$$(\overset{\text{PK3}}{P}(\overset{\text{FK2}}{f}(\overset{\text{V}}{x},\overset{\text{OK}}{12}),\ \overset{\text{FK3}}{g}(\overset{\text{OK}}{1},\overset{\text{OK}}{2},\overset{\text{OK}}{3}),\ \overset{\text{OK}}{3}\overset{\text{FK2}}{+}\overset{\text{OK}}{4}) \wedge (\overset{\text{V}}{x}\overset{\text{PK2}}{<}\overset{\text{OK}}{3}))$$

$$\Rightarrow \overset{\text{PK2}}{R}(\overset{\text{FK1}}{h}(\overset{\text{V}}{x}),\ \overset{\text{FK2}}{f}(\overset{\text{OK}}{3},\overset{\text{OK}}{1})).$$

Die *Struktur* dieser Formel ist analog zur Struktur von zusammengesetzten Aussagen in Abschnitt 2.1 zu bestimmen. Wir wechseln hier allerdings zu der in der

Informatik üblichen Darstellung durch einen *Syntaxbaum*, bei der die Wurzel jedes (Teil)Baums vom syntaktisch obersten (äußersten) Symbol gebildet wird. Die Stelligkeit von Junktoren sowie Funktions- und Prädikatenkonstanten gibt dabei vor, wieviele Teilbäume unter diesem Symbol hängen. Die Teilbäume geben die Aussagen bzw. Terme an, auf die diese Junktoren, Funktions- und Prädikatenkonstanten angewandt werden.

Wir erhalten für die Formel oben folgenden Syntaxbaum, der inkrementell von unten nach oben aufgebaut wird. Die einzelnen Symbole werden hier mit der Art des Teilbaums geschriftet, dessen Wurzel sie darstellen.



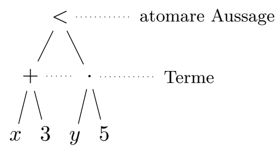
Man beachte, dass der Wahrheitswert dieser Aussage von der Wertebelegung der Variablen x abhängt. $\square$

Obwohl die im letzten Beispiel gezeigte Infix-Notation leichter zu lesen ist als die Präfix-Notation, benötigt sie oft Klammern, um die eindeutige Lesbarkeit zu garantieren. Um dennoch mit möglichst wenigen Klammern auszukommen vereinbaren wir folgende Konvention: Eine Zeichenkette ist genau dann syntaktisch richtig, wenn sie als richtig interpretiert werden kann. Das folgende Beispiel illustriert diese Konvention.

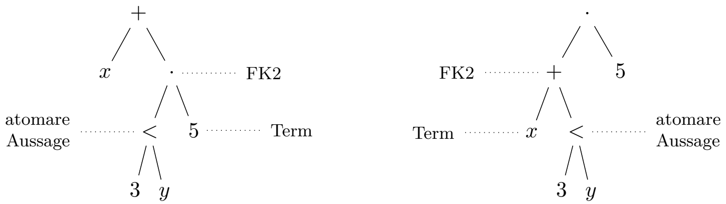
Beispiel 2.15 Wir betrachten die Zeichenkette

$$x + 3 < y \cdot 5$$

als syntaktisch korrekt, da es eine Klammerung gibt – nämlich $(x+3) < (y \cdot 5)$ – die eine korrekte Analyse erlaubt. Am Syntaxbaum ist leicht erkennbar, dass (wie in Definition 2.9 gefordert) die Argumente der Prädikatenkonstanten $<$ Terme sind:



Durch bewusst falsche Klammerung könnte man diese Zeichenkette auch als syntaktisch falsch interpretieren: So sind sowohl $x + ((3 < y) \cdot 5)$ als auch $(x + (3 < y)) \cdot 5$ falsch, da in beiden Fällen eine Funktionskonstante auf einen Term und eine Aussage angewandt wird:



Wir wollen diese falschen Interpretationen vermeiden und legen fest, dass Aussagen bzw. Terme syntaktisch korrekt sind, solange es eine mögliche korrekte Lesart gibt.□

Alle Variablen, die in einer Aussage vorkommen, werden als *frei* bezeichnet. Die Aussage $x \mid 42$ ist eine Aussage über die freie Variable x; für bestimmte Belegungen von x ist diese Aussage wahr, für andere falsch. Ebenso ist der Wahrheitswert der Aussage $x + 3 < y \cdot 5$ aus Beispiel 2.15 unbekannt, da x und y freie Variable sind. Für bestimmte Werte von x und y ist diese Aussage wahr, für andere falsch.

Man nennt auch alle in einem Term vorkommenden Variablen frei; auch bei Termen hängt der Wert von der Belegung der freien Variable ab: der Wert von $x+3$ kann erst bestimmt werden, wenn die Variablenbelegung von x bekannt ist.

Wenn man syntaktisch darauf hinweisen möchte, dass x in einer Aussage bzw. in einem Term frei vorkommt, schreibt man $A_{[x]}$ bzw. $t_{[x]}$. Das Konzept von freien Variablen benötigen wir in Kürze, wenn durch *Quantoren* Variablen gebunden werden, und dadurch nicht mehr frei sind.

In vielen Fällen möchte man ausdrücken, dass eine Aussage *für alle möglichen Variablenbelegungen* wahr ist. So gilt etwa die Aussage $x > 0$ für alle natürlichen Zahlen. Man möchte diesen Sachverhalt auch in der Sprache der Prädikatenlogik ausdrücken können.

Ebenso möchte man oft ausdrücken, dass eine Aussage *für zumindest eine Variablenbelegung* gilt; dies ist etwa bei $x \mid 12$ der Fall. Diese Anforderungen werden in der Prädikatenlogik durch *All-* bzw. *Existenzquantoren* erfüllt.

Definition 2.11 (Allaussagen, Existenzaussagen)
Sei A ein Aussage. Dann nennt man die Zeichenkette

$$(\forall x\ A)$$

eine *Allaussage*, und die Zeichenkette

$$(\exists\, x\ A)$$

eine *Existenzaussage*. Die Symbole $\forall$ (*für alle*) und $\exists$ (*es existiert ein*) werden als *Allquantor* bzw. *Existenzquantor* bezeichnet. Die Variable x wird in A durch die Quantoren *gebunden*, und ist dann nicht mehr frei.

Man beachte, dass in obiger Definition sinnvollerweise die Variable x in der Aussage A frei vorkommt. Wir wollen aber an dieser Stelle formal nicht ausschließen, dass etwa $\forall x\ 3 < 4$ eine Allaussage ist.

Obige Definition bestimmt nur die Syntax von All- und Existenzaussage; ihre Semantik ist wiederum ein Wahrheitswert (`w` oder `f`). Wir legen Folgendes fest.

Definition 2.12 (Semantik von All- und Existenzaussagen)
Sei A eine Aussage, in der höchstens die Variable x frei vorkommt. Dann ist die Allaussage

$$(\forall x\ A)$$

genau dann wahr, wenn die Aussage A für alle möglichen Belegungen der Variablen x wahr ist. Die Existenzaussage

$$(\exists\, x\ A)$$

ist genau dann wahr, wenn es zumindest eine Belegung der Variablen x gibt, die die Aussage A wahr macht.

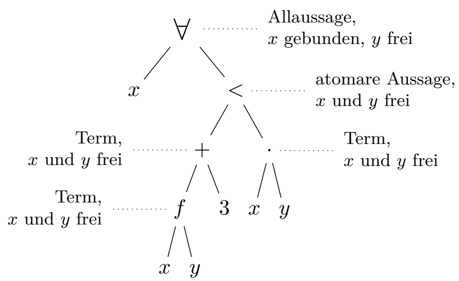
Wir werden die Klammern um die Quantoraussagen weglassen, wenn klar ist, auf welche Aussage sich der Quantor bezieht – ohne Klammern ist dies die gesamte restliche Aussage. Die Aussage A, in der ein Quantor eine Variable bindet, wird als *Wirkungsbereich* des Quantors bezeichnet.

Man beachte, dass der Name einer gebundenen Variable am Wahrheitswert einer Quantoraussage nichts ändert: So ist die Aussage $\forall x\ x > 0$ genau dann wahr, wenn auch die Aussage $\forall y\ y > 0$ wahr ist. Wenn in einer Quantoraussage noch freie Variablen vorkommen, dann ist auch bei diesen Aussagen der Wahrheitswert von der Variablenbelegung der freien Variablen abhängig.

Beispiel 2.16 Wir erweitern die Syntaxanalyse, die etwa in Beispiel 2.14 gezeigt wurde, um in Quantoraussagen freie von gebundenen Variablen zu unterscheiden. Für die Formel

$$\forall x\ f(x, y) + 3 < x \cdot y$$

erhalten wir folgenden Syntaxbaum. Man beachte, dass die Variable x erst ganz oben durch den Quantor gebunden wird, in den Termen und Aussagen darunter aber noch frei ist. Daher eignet sich eine rein flache Analyse der Komponenten einer Formel (wie in Beispiel 2.14) nicht mehr, um alle Aspekte der Rollen von Symbolen in Formeln zu identifizieren.



□

Fragen zur Selbstkontrolle

2.2 (S.1) Was ist der Unterschied zwischen einer Funktion und einem Prädikat?

2.2 (S.2) Wir betrachten das Universum der natürlichen Zahlen. Geben Sie je drei Funktionen, Prädikate, sowie Objekte dieses Universums an.

2.2 (S.3) Die Definitionen von Termen (Definition 2.8 und Aussagen (Definition 2.9) sind nicht symmetrisch in dem Sinn, dass Terme aus Termen aufgebaut sind, Aussagen aber nicht aus Aussagen (sondern aus Termen). Warum, glauben Sie, ist das so?

2.2 (S.4) Warum benötigt man in der Prädiktenlogik noch Junktoren? Kann man die nicht durch geeignete Prädikatenkonstante ausdrücken?

2.2 (S.5) Wann sind Variablen in einer Formel frei, wann gebunden?

2.2 (S.6) Wieso ist, syntaktisch gesehen, ein Quantor etwas anderes als eine Funktionskonstante, eine Prädikatenkonstante, oder ein Junktor?

2.2 (S.7) Welche Rolle spielt der mathematische Begriff des *Universums* in der Prädikatenlogik?

Übungsaufgaben

2.2 (Ü.1) Seien f und g zweistellige Funktionskonstante; P eine einstellige, Q eine zweistellige, und R eine dreistellige Prädikatenkonstante; sowie x und y Variable. Weiters seien die Symbole $+$, $\cdot$, $<$ sowie die Objektkonstanten aus $\mathbb{N}$ schon bekannt.

Stellen Sie anhand einer Syntaxanalyse fest, ob es sich bei den folgenden Zeichenketten um Terme, Aussagen, oder keines von beiden handelt (da syntaktisch falsch). Beachten Sie, dass eine Zeichenkette syntaktisch richtig ist, wenn man sie als richtig interpretieren kann – siehe dazu Beispiel 2.16:

(a) $3 \cdot (4+x) < x+y$ **(b)** $Q(3, P(2))$ **(c)** $g(y, 5+3) < x+3$
(d) $P(x) + Q(2, y)$ **(e)** $R(2, 3+x, 5 \cdot y)$

2.2 (Ü.2) Wie Übungaufgabe 2.2 (Ü.1), für folgende Zeichenketten:

(a) $P(y) < 3+x$ **(b)** $f(x,3) + g(f(x,2), 4)$ **(c)** $f(3 < 4, y) \cdot x$
(d) $Q(f(x,3), g(y)+2)$ **(e)** $f(x \cdot y, 2 \cdot y) < Q(2, y)$

2.2 (Ü.3) Stellen Sie folgende syntaktisch korrekte Zeichenketten als Syntaxbaum dar. Für Quantoraussagen geben Sie weiters an, in welchen Teilen des Syntaxbaums Variable frei bzw. gebunden sind. Die Funktions- und Prädikatenkonstanten seien dazu wie in Übungsaufgabe 2.2 (Ü.1):

(a) $Q(x, 3+y) \wedge 3 < x$ **(b)** $f(x+2, 3 \cdot y) + (3 \cdot g(x, 2+y))$
(c) $P(x \cdot 3) \Rightarrow \big(\forall x\, Q(x,3) \wedge P(y)\big)$ **(d)** $\exists y\; f(x,3) + y < g(3,y) \cdot 27$

2.3 Modellieren und Argumentieren in der Prädikatenlogik

Mit den Sprachelementen der Prädikatenlogik ist es nun möglich, in sprachlich präziser Art Aussagen über Objekte (und deren Zusammenhänge) in einem Universum zu machen. Erst durch diese sprachliche Präzesion ist es möglich, den Kalkül der Mathematik zur Modellierung und auch zum Schlussfolgern zu verwenden.

Wir beginnen mit einem Beispiel, das eine erste Form des Schlussfolgerns im Prädikatenkalkül illustriert.

Abbildung 2.1: Statt alle Variablenbelegungen aus einem Universum $\mathcal{U}$ durchzuprobieren (graue Striche), beweist man eine Allaussage für einen beliebig aber fixen Wert x^*, der als Vertreter für alle möglichen Werte im Universum steht.

Beispiel 2.17 Für dieses Beispiel betrachten wir als Universum die ganzen Zahlen. Die Aussage

$$\forall x \,\exists y \;\; x < y$$

("für jede Zahl gibt es eine, die größer ist") ist dann wahr: Für jede Belegung der Variablen x können wir eine Belegung von y finden, die größer als die von x ist.

Wir nehmen dieses erste kurze Beispiel zum Anlass, um die obige sprachliche Begründung zu präzisieren. Wie beweist man nun formal eine Aussage der Form $\forall x \,\exists y \;\; x < y$? Eine Syntaxanalyse (die wir hier nicht ausführen) zeigt, dass diese Aussage eine Allaussage ist. Mit Definition 2.12 ist eine Allaussage genau dann wahr, wenn die Aussage im Wirkungsbereich für alle möglichen Variablenbelegungen der gebundenen Variablen wahr ist.

Wir müssen somit nachweisen, dass die quantisierte Aussage $\exists y \;\; x < y$ für alle Wertebelegungen von x wahr ist. Dieser Nachweis scheint auf den ersten Blick unmöglich zu sein: Im Universum der natürlichen Zahlen sind unendlich viele mögliche Wertebelegungen, und man kann nicht alle durchprobieren. Man behilft sich mit folgender Überlegung: Statt *alle möglichen* Variablenbelegungen zu überprüfen, nimmt man nur *eine einzige* Variablenbelegung – diese allerdings bleibt unspezifiziert. Damit könnte diese einzige (noch offene) Belegung potentiell für *jede* der Belegungen stehen. Wenn man diese Aussage nun für diese eine unspezifizierte Belegung bewiesen hat, so ist sie damit für alle möglichen Belegungen bewiesen – genau wie von der Semantik des Allquantors gefordert.

Dieses Argument ist graphisch in Abbildung 2.1 illustriert. Sprachlich drückt man die Vorgehensweise durch die Formulierung "sei x^* beliebig aber fix" aus. Dies bedeutet: Der Wert x^* für x ist beliebig, darf aber auch nicht mehr geändert werden (wenn sich etwa herausstellt, dass die Aussage für manche Werte doch nicht stimmt).

Somit bleibt zu beweisen, dass die Aussage $\exists y \;\; x^* < y$ wahr ist. Dies ist eine Existenzaussage; Existenzaussagen sind meist am schwierigsten zu beweisen, da laut Definition 2.12 eine Existenzaussage genau dann wahr ist, wenn es zumindest eine Wertebelegung der gebundenen Variablen gibt, die die Aussage im Wirkungsbereich wahr macht. Man muss also in unserem Beispiel eine Wertebelegung der Variablen y finden, die die Aussage $x^* < y$ wahr macht. An dieser Stelle ist hervorzuheben, dass

x^* bereits fixiert ist, und wir *für diesen fixierten Wert* eine Belegung von y finden müssen, die $x^* < y$ wahr macht. Eine mögliche Belegung ist $y \leftarrow x^* + 1$.

Rein formal ist noch zu überprüfen, ob diese Wertebelegung die Aussage wahr macht, ob also $x^* < x^*+1$ gilt (wir haben natürlich die Belegung so konstruiert, dass die Aussage gilt). Wir nehmen an, dass die Gültigkeit dieser Aussage zu unserem mathematischen Grundwissen gehört. Damit ist auch $\exists y \;\, x^* < y$, und in weiterer Folge auch die ursprünglich gegebene Allaussage $\forall x \exists y \;\, x < y$ bewiesen. □

Beispiel 2.18 Die Aussage

$$\exists x \forall y \;\; x \mid y$$

("es gibt eine Zahl, die alle Zahlen teilt") ist im Universum der natürlichen Zahlen wahr. Da diese Aussage eine Existenzaussage ist, müssen wir zur Begründung eine Belegung von x finden, mit der dann $\forall y \;\, x \mid y$ wahr ist.

Wir probieren die Belegung $x \leftarrow 1$ und müssen noch überprüfen, ob $\forall y \;\; 1 \mid y$ gilt. Zur Überprüfung dieser Allaussage sei y^* beliebig aber fix; es bleibt $1 \mid y^*$ zu beweisen. Wir nehmen auch hier an, dass die Gültigkeit dieser Aussage zu unserem Grundwissen gehört, und haben somit auch die ursprüngliche Aussage $\exists x \forall y \;\, x \mid y$ bewiesen. Wir werden erst später (in Beispiel 2.23) sehen, wie eine Aussage wie $1 \mid y^*$ unter Verwendung der Definition des *teilt*-Prädikats noch weiter umgeformt (vereinfacht) werden kann.

Falsch ist hingegen die Aussage

$$\exists x \forall y \;\; y < x.$$

("es existiert eine Zahl, die größer als alle Zahlen ist"). Noch haben wir allerdings nicht die Möglichkeiten nachzurechnen, dass diese Aussage falsch ist; die dazu nötige Methode des *Widerspruchsbeweises* wird erstmals in Beispiel 2.25 präsentiert.

Ebenso falsch ist

$$\forall x \exists y \;\; y < x$$

("für jede Zahl gibt es eine, die kleiner ist"). Falls diese Allaussage wahr wäre, müsste sie für alle Variablenbelegungen von x wahr sein. Speziell mit der Belegung $x \leftarrow 1$ bleibt die Aussage $\exists y \;\;\, y < 1$. Im Universum der natürlichen Zahlen ist diese Existenzaussage falsch, da es keine kleinere Zahl als 1 gibt; somit ist auch die Allaussage $\forall x \exists y \;\, y < x$ falsch. □

Für mathematisch interessante Aussagen benötigt man fast immer eine spezielle zweistellige Prädikatenkonstante, die *Gleichheit*. Dieses Prädikat ist in allen Domänen gegeben. Da weder die Existenz noch die folgenden Eigenschaften der Gleichheit aus anderen Fakten geschlossen werden können, werden sie als Axiome festgelegt.

Axiom 2.1 (Gleichheit)
Seien x, y und z Variable, f eine beliebige Funktionskonstante, und P eine beliebige Prädikatenkonstante. In jedem Universum ist die Prädikatenkonstante $=$ (*Gleichheit*) definiert, für die gilt:

$$x = x \qquad \text{(Reflexivität)}$$

$$x = y \Rightarrow y = x \qquad \text{(Symmetrie)}$$
$$x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \qquad \text{(Transitivität)}$$
$$x = y \Rightarrow f(\ldots, x, \ldots) = f(\ldots, y, \ldots)$$
$$x = y \Rightarrow P(\ldots, x, \ldots) = P(\ldots, y, \ldots)$$

Wir werden für $\neg(x = y)$ abkürzend $x \neq y$ schreiben. Die Verwendung des Gleichheitszeichens als Prädikatenkonstante erklärt auch, warum wir für die Schreibweise der Variablenbelegung in der bisherigen Beispielen den Pfeil $\leftarrow$ gewählt haben.

Mit Hilfe der Gleichheit können wir auch interessantere Aussagen formulieren. Diese Aussagen sind wiederum entweder wahr oder falsch; was von beiden zutrifft, weiß man bei manchen allerdings bis heute nicht.

Beispiel 2.19 Die Aussage

$$\forall n \; n \geq 3 \Rightarrow \neg(\exists x \exists y \exists z \; x \neq 0 \;\wedge\; y \neq 0 \;\wedge\; z \neq 0 \;\wedge\; x^n + y^n = z^n)$$

(der *Satz von Fermat*, über Jahrhunderte das bekannteste ungelöste Problem der Mathematik) wurde erst 1995 von Andrew Wiles für die Domäne der ganzen Zahlen als wahr bewiesen.

Der Wahrheitswert der folgenden Aussage (die *Goldbachsche Vermutung*) ist noch immer offen; es wird vermutet, dass sie wahr ist:

$$\forall x \; (\text{gerade}(x) \;\wedge\; x > 2) \Rightarrow \exists y \exists z \; \text{prim}(y) \;\wedge\; \text{prim}(z) \;\wedge\; x = y + z$$

("jede gerade Zahl größer 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben"). Hier nehmen wir an, dass die beiden einstelligen Prädikatenkonstanten *gerade* und *prim* bereits gegeben sind. Wir werden später sehen, wie man solche Prädikate aus einfacheren Prädikaten aufbauen kann. □

Wir sind mit den Überlegungen zur Formalisierung mathematischer Konzepte nun soweit, dass wir uns einer der wichtigsten Anwendungen einer exakten mathematischen Sprache zuwenden können: den Problemspezifikationen. Diese werden meist in einer starren formalen Struktur angegeben; dabei werden Eingabe- und Ausgabegrößen, sowie ihr Zusammenhang spezifiziert. Wir illustrieren diese formalen Vorgaben an Problemspezifikationen anhand eines einfachen Beispiels.

Beispiel 2.20 Jede Zahl hat mehrere Teiler; bei Primzahlen sind dies nur 1 und die Zahl selbst. Für gegebene zwei natürliche Zahlen soll die größte Zahl bestimmt werden, die die beiden teilt – diese Zahl ist der *größte gemeinsame Teiler* ggT.

GEGEBEN: a, b
  wobei wobei $a, b \in \mathbb{N}$
GESUCHT: g
  sodass $g \in \mathbb{N} \;\wedge\; g \mid a \;\wedge\; g \mid b \;\wedge\; \forall c \; (c \in \mathbb{N} \;\wedge\; c \mid a \;\wedge\; c \mid b) \Rightarrow c \leq g$

□

Die "GEGEBEN:... wobei ..." und "GESUCHT:... sodass..." Teile des obigen Beispiels sind in allen Problemspezifikationen gleich; allerdings kann die "Typisierung" der Variablen bereits in den GEGEBEN:/GESUCHT:-Zeilen erfolgen. Eine Problemspezifikation gibt somit an, in welchem Zusammenhang gegebene und gesuchte Größen stehen müssen, um die Lösung eines Problems darzustellen.

Zwei wichtige Punkte müssen zu Problemspezifikationen hervorgehoben werden:

- Der Zusammenhang zwischen gegebenen und gesuchten Größen in der "sodass"-Zeile *muss keinen Algorithmus angeben, wie sich die Ausgabe aus der Eingabe berechnen lässt.* Es reicht, wenn mit dem Zusammenhang überprüft werden kann, ob eine Lösung vorliegt.

- Außerhalb der Problemspezifikation muss festgelegt werden, welche Funktionen und Prädikate in der Problemspezifikationen erlaubt sind.

Wenn wir das obige Beispiel 2.20 nochmals unter Beachtung dieser beiden Punkte betrachten, dann fällt Folgendes auf: In der "sodass"-Zeile ist tatsächlich nur der Zusammenhang zwischen a, b und g angegeben, und kein Algorithmus, um von a und b auf g zu kommen (obwohl das nicht prinzipiell verboten wäre). Weiters fehlt die Einschränkung der erlaubten Funktionen und Prädikate, sodass von allen bisher bekannten ausgegangen werden kann.

Warum die Angabe von erlaubten Funktionen und Prädikaten wichtig ist zeigt sich daran, dass man sonst für jede beliebige Problemspezifikation in der "sodass"-Zeile einfach das Prädikat *istLösungVon(a,b,c,...)* angeben könnte. Die "echte" Lösung wäre dann in der (nicht angegebenen) Definition von *istLösungVon* versteckt. In Beispiel 2.20 wäre das eine "sodass"-Zeile, die nur aus istggTVon(g,a,b) besteht. Wir werden im Folgenden, soweit nicht anders angegeben, alle bisher zur Verfügung stehenden Funktionen und Prädikate als erlaubt annehmen.

Nach dieser kurzen Einführung in Problemspezifikationen wenden wir uns nun dem Formalisieren umgangssprachlicher Konzepte zu. Diese Übertragung von Zusammenhängen realer Objekte in den Kalkül der Prädikatenlogik erfordert einige Übung; speziell am Beginn ist auf einige Details besonders zu achten.

Beispiel 2.21 Der Satz "die Katze ist grau" ist über eine einstellige Prädikatenkonstante istGrau als

$$\text{istGrau}(\text{Katze})$$

zu repräsentieren, wobei Katze eine Objektkonstante ist. Falsch ist es, dies als "Katze = grau" zu schreiben, da dies aussagt, dass das Objekt Katze gleich dem Objekt grau ist.

Der Satz "alle Tiroler sind lustig" ist als Allaussage

$$\forall x\ \text{istTiroler}(x) \Rightarrow \text{istLustig}(x)$$

zu schreiben. Da durch den Allquantor die gebundene Variable x mit allen Objekten belegt werden kann, die Aussage aber nur für Tiroler gelten soll, muss die Aussage die Form einer Implikation haben. Ein möglicher Fehler wäre, den Satz als ($\forall x$ istTiroler(x) $\wedge$ istLustig(x)) zu schreiben. Diese Aussage gibt aber an, dass alle Objekte des Universums Tiroler und lustig sind.

Bei Existenzaussagen ist die Übersetzung meist leichter. Ohne große Schwierigkeiten schreibt man den Satz "es gibt eine grüne Maus" als

$$\exists x\ \text{istMaus}(x) \wedge \text{istGrün}(x). \qquad \Box$$

Die im obigen Beispiel gezeigte genauere Spezifikation von Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors ist so weitläufig, dass sich dafür eine eigene Schreibweise eingebürgert hat.

Definition 2.13 (Abkürzende Quantorenschreibweisen)
Sei A eine Aussage und $P_{[x]}$ eine Aussage mit freier Variable x. Die Aussage

$$\underset{P_{[x]}}{\forall} A$$

ist Kurzschreibweise für $\forall x\ P_{[x]} \Rightarrow A$. Ebenso ist

$$\underset{P_{[x]}}{\exists} A$$

eine Abkürzung für $\exists x\ P_{[x]} \wedge A$.

In dieser Definition betonen wir, dass die Aussage $P_{[x]}$ eine freie Variable x enthalten muss (und nur diese!), da wir ja über eine Variable quantifizieren müssen. Im Gegensatz dazu muss die Aussage A die Variable x nicht frei enthalten; sie wird es aber meist tun.

Beispiel 2.22 Wir wählen als Domäne die natürlichen Zahlen. Dann schreiben wir

$$\underset{i \leq 9}{\forall} 2^i < 1000$$

für die Aussage $\forall i\ (i \leq 9) \Rightarrow (2^i < 1000)$. Ebenso ist die Aussage

$$\underset{x<4}{\exists} x \,|\, 8$$

eine Kurzschreibweise für die Aussage $\exists x\ x < 4 \wedge x \,|\, 8$. $\Box$

Zur weiteren Abkürzung der Schreibweise vereinbaren wir außerdem, dass aufeinanderfolgende Quantoren zusammengezogen werden können. So steht

$$\begin{array}{lcll} \forall x,y,z\ A & \text{für} & \forall x \forall y \forall z\ A & \text{und} \\ \exists x,y,z\ A & \text{für} & \exists x \exists y \exists z\ A. & \end{array}$$

Über die Negation besteht ein enger Zusammenhang zwischen All- und Existenzquantor; dieser Zusammenhang ist analog zur DeMorgan Regel aus Satz 2.2, durch die eine verneinte Konjunktion in eine Disjunktion umgewandelt werden kann (und umgekehrt).

Satz 2.4 (DeMorgan) Sei A eine Aussage. Dann gelten

$$\neg\forall x\ A \equiv \exists\, x\ \neg A \qquad \text{und} \qquad \neg\exists\, x\ A \equiv \forall x\ \neg A.$$

Von der Richtigkeit dieser Äquivalenzen kann man sich mit folgendem Argument überzeugen: $\neg\forall x\ A$ ist genau dann wahr, wenn nicht für alle Variablenbelegungen von x die Aussage A wahr wird, wenn es also zumindest eine Variablenbelegung gibt, für die A falsch wird. Wenn A aber falsch ist, dann ist $\neg A$ wahr, und somit auch $\exists\, x\ \neg A$. Das Argument für die zweite Äquivalenz ist ähnlich.

Ebenso kann man nachrechnen, dass obiger Satz auch gilt, wenn man die abkürzende Schreibweise für erweiterte All- und Existenzaussagen verwendet. Dies ist nicht ganz intuitiv, da die Abkürzung im einen Fall eine Implikation, und im anderen ein Konjunktion bedeutet. Nichtsdestotrotz gilt

$$\neg \underset{P_{[x]}}{\forall} A \equiv \underset{P_{[x]}}{\exists} \neg A \qquad \text{und} \qquad \neg \underset{P_{[x]}}{\exists} A \equiv \underset{P_{[x]}}{\forall} \neg A.$$

Nach dieser Einführung in die Grundlagen der Prädikatenlogik können wir uns diesen Kalkül zu Nutze machen, um komplexe Zusammenhänge durch einfachere zu beschreiben. Der erste Schritt zur Vereinfachung liegt darin, durch die Definition von neuen Konzepten (hier Prädikaten) vereinfachende, kürzere Schreibweisen zu finden.

Definition 2.14 (Prädikatendefinition)
Eine Definition eines Prädikats führt eine neue Prädikatenkonstante ein. Der Wahrheitswert der atomaren Aussage, die durch diese Prädikatenkonstante gegeben ist, wird dabei durch eine andere (meist größere) Aussage bestimmt. Syntaktisch schreiben wir die Definition einer n-wertigen Prädikatenkonstanten P als

$$P(x_1, \ldots, x_n) :\Leftrightarrow A_{[x_1,\ldots,x_n]},$$

wobei $A_{[x_1,\ldots,x_n]}$ eine Aussage mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist.

Da wir dieses Werkzeug vorher noch nicht zur Verfügung hatten, haben wir alle Prädikate als gegeben angenommen. Jetzt können wir Eigenschaften wir *gerade* oder *prim* explizit definieren.

Beispiel 2.23 Gerade Zahlen (und nur gerade Zahlen) erfüllen die Eigenschaft, Vielfache von 2 zu sein. Somit können wir definieren:

$$\text{gerade}(x) :\Leftrightarrow \underset{y\in\mathbb{Z}}{\exists}\ x = 2y.$$

Ebenso können wir Primzahlen über ihre Eigenschaften definieren, nur durch 1 und sich selbst teilbar zu sein. Dazu benötigen wir noch den Begriff der Teilbarkeit, den wir auch als zweistelliges Prädikat (hier in Infix-Notation) definieren können:

$$x \,|\, y :\Leftrightarrow \underset{z\in\mathbb{Z}}{\exists}\ y = z \cdot x.$$

Damit ist das einstellige Prädikat *prim* gegeben durch:

$$\text{prim}(x) :\Leftrightarrow x \neq 1 \wedge \neg\Big(\exists\, y\ y \neq 1 \wedge y \neq x \wedge y \,|\, x\Big). \qquad \square$$

Auch wenn hier nicht mit vielen Beispielen untermauert, ist die Definition von Prädikaten (und auch Funktionen, weiter unten) eine der fundamental wichtigsten Möglichkeiten, Komplexität durch Kapselung zu reduzieren. Dies erlaubt es, aus einfachen Bausteinen immer abstraktere Konzepte zusammenzustellen, ohne sich dabei in Details zu verlieren. Im Bereich der Informatik kann Software Engineering als diejenige Disziplin betrachtet werden, die sich ingenieursmäßig mit diesem Thema beschäftigt.

Wir werden im Laufe der Vorlesung noch oft sehen, wie man über Definitionen entscheiden kann, ob Aussagen wahr sind. Wir betrachten dazu nochmals die Definitionen aus Beispiel 2.23.

Beispiel 2.24 Wenn wir überprüfen wollen, ob die Zahl 8 gerade ist oder nicht, so müssen wir dafür die Definition des Prädikats *gerade* verwenden. Damit gilt

$$\text{gerade}(8) \Leftrightarrow \underset{y\in\mathbb{Z}}{\exists}\ 8 = 2y.$$

Da die Variablenbelegung $y = 4$ die Gleichung $8 = 2y$ erfüllt, ist 8 eine gerade Zahl. Ebenso gilt $4 \,|\, 12$, da Einsetzen in die Definition des *teilt*-Prädikats

$$4 \,|\, 12 \Leftrightarrow \underset{z\in\mathbb{Z}}{\exists}\ 12 = z \cdot 4$$

liefert. Da $z = 3$ diese Gleichung erfüllt, gilt $4 \,|\, 12$. $\square$

Meist ist es ungleich schwieriger nachzuprüfen, dass eine Aussage *nicht* gilt, dass etwa gerade(5) oder $5 \,|\, 12$ falsch sind. In solchen Fällen ist eine spezielle Art mathematischer Argumentation oft hilfreich: der Widerspruchsbeweis. Wir illustrieren diese Konzept anhand eines Beispiels.

Beispiel 2.25 Wie es scheint, nimmt die Liste der Primzahlen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$$

kein Ende. Für jede Primzahl gibt es eine noch größere, oder anders ausgedrückt: Es gibt keine größte Primzahl; als Aussage der Prädikatenlogik:

$$\neg\Big(\underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\ \text{prim}(p) \wedge \underset{q\in\mathbb{N}}{\forall}\ \text{prim}(q) \Rightarrow q \leq p\Big)\,. \qquad (\star)$$

Wie aber will man nachweisen, dass etwas *nicht* existiert? Wenn das Universum möglicher Wertebelegungen unendlich ist (wie hier mit den natürlichen Zahlen), kann man nicht für jede mögliche Wertebelegung überprüfen, ob sie die zu untersuchende Aussage erfüllt oder nicht.

Abhilfe verschafft folgende Idee: Man nimmt das Gegenteil dessen an, das man nachweisen möchte, und überprüft dann, ob dies zu einem Widerspruch führt. Wenn ja, dann ist damit die ursprüngliche Aussage nachgewiesen.

Ein Blick auf die Wertetabelle der Implikation in Definition 2.6 zeigt, dass diese Schlussfolgerung korrekt ist. Nehmen wir dazu an, dass A die Aussage ist, deren

Richtigkeit wir nachweisen wollen. Wenn aus $\neg A$ ein Widerspruch folgt (also etwas, das immer falsch ist), so ist die Implikation $\neg A \Rightarrow \texttt{f}$ wahr. Diese Implikation kann aber nur dann wahr sein, wenn ihre Prämisse $\neg A$ falsch ist. Daher muss A wahr sein.

Wir wenden die Idee des Widerspruchsbeweises an, um Aussage $(\star)$ zu beweisen. Dazu nehmen wir ihr Gegenteil an, also

$$\underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \operatorname{prim}(p) \wedge \underset{q\in\mathbb{N}}{\forall} \operatorname{prim}(q) \Rightarrow q \leq p\,.$$

Sei p^* dieses p aus $\underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} \operatorname{prim}(p)$, dessen Existenz wir annehmen. Da p^* die größte Primzahl ist, gibt es nur endlich viele Primzahlen, die kleiner als p^* sind. Nennen wir diese Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Wir definieren dann

$$P := p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1\,.$$

Wir betrachten nun den Rest von P bei Division durch p_1, p_2, $\ldots$, p_n. In jedem dieser Fälle bleibt Rest 1; es gibt somit keine Zahl außer 1 und P, die P ohne Rest teilt (wenn es eine nicht-Primzahl n gäbe, für die das zutrifft, dann würde P ja auch von denjenigen Primzahlen ohne Rest geteilt werden, die Faktoren von n sind). P ist somit eine Primzahl, die größer ist als jede einzelne der p_1, p_2, $\ldots$, p_n. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass p_1, p_2, $\ldots$, p_n bereits *alle* Primzahlen wären.

Unsere Annahme war somit falsch, und ihr Gegenteil (dass es nämlich *keine* größte Primzahl gibt) dadurch bewiesen. $\square$

Beispiel 2.26 Neben dem Widerspruchsbeweis über die Unendlichkeit der Primzahlen ist der Beweis über die Irrationalität von $\sqrt{2}$ der zweite bekannte Widerspruchsbeweis. Damit kann nachgewiesen werden, dass sich $\sqrt{2}$ nicht als Bruch schreiben lässt.

Wir werden dazu folgende Hilfsüberlegungen über gerade und ungerade Zahlen verwenden: Wie schon aus der Definition des Prädikats *gerade* wissen, lässt sich jede gerade Zahl g in der Form $g = 2k$ schreiben. Ungerade Zahlen u lassen sich als $u = 2k+1$ schreiben. Für das Quadrat $g^2 = 4k^2$ einer geraden Zahl gilt somit, dass dieses auch gerade ist; ähnlich ist das Quadrat $u^2 = 4k^2 + 4k + 1$ einer ungeraden Zahl u auch wieder ungerade. Damit können wir auch aus der Tatsache, dass eine Quadratzahl x^2 gerade ist schlussfolgern, dass dann auch x gerade sein muss.

Um nachzuweisen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, nehmen wir das Gegenteil an, und generieren daraus einen Widerspruch. Sei also $\sqrt{2}$ rational; damit gibt es zwei natürliche Zahlen p und q mit

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}\,.$$

Weiters können wir annehmen, dass p und q die kleinsten solchen Zahlen sind, dass sie also nicht mehr weiter gekürzt werden können. Wir formen um:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{p}{q} && \Leftrightarrow\\
2 &= \frac{p^2}{q^2} && \Leftrightarrow\\
2q^2 &= p^2 \quad \text{(somit ist } p^2 \text{ gerade, und damit auch } p = 2k\text{)} && \Leftrightarrow\\
2q^2 &= 4k^2 && \Leftrightarrow\\
q^2 &= 2k^2 \quad \text{(somit ist } q^2 \text{ gerade, und damit auch } q\text{)}\,.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir die Umformungen beenden, da der Widerspruch bereits gefunden wurde: Laut den Umformungen sind sowohl p als auch q gerade; dies steht aber im Widerspruch zu unserer Annahme, dass p und q bereits gekürzt sind.

Also ist unsere Annahme falsch, dass es bereits gekürzte Zahlen p und q mit $\sqrt{2} = p/q$ gibt. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist somit irrational. $\square$

Beispiel 2.27 Zu beweisen sei die Aussage, dass es unendlich oft vorkommt, dass $p+2$ *keine* Primzahl ist, wenn p eine Primzahl ist (was man allerdings nicht weiß ist, ob es auch unendlich oft vorkommt, dass $p+2$ *schon* eine Primzahl ist).

Beispiele sind etwa 7 und 9, 13 und 15, 19 und 21, oder 23 und 25. Man beachte, dass all diese Zahlen ungerade sind. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir nun an, dass das *nicht* so ist, dass diese Liste also irgendwann endet. Nehmen wir an, dass p^* die erste Primzahl nach dem Ende diese Liste ist. Damit ist p^*+2 sicher prim (sonst hätte die Liste ja noch nicht aufgehört). Und damit ist auch $(p^*+2)+2$ wiederum prim. Das wiederum bedeutet, dass ab p^* *jede* weitere ungerade Zahl eine Primzahl ist.

Wir berechnen nun das Produkt $P := p^* \cdot (p^*+2)$. Die Zahl P ist als Produkt zweier ungerader Zahlen wiederum ungerade, und natürlich gilt auch $P > p^*$. Damit ist sie hinter dem Ende der Liste, und damit auch eine Primzahl. Das ist im Widerspruch zur Tatsache, dass P laut Konstruktion die beiden Faktoren p^* und p^*+2 hat. Somit gilt das Gegenteil unserer Annahme: es gibt also unendlich viele Primzahlen, bei der die nächste ungerade Zahl *keine* Primzahl ist. $\square$

Analog zur Definition 2.14 von Prädikatenkonstanten benötigen wir auch eine Möglichkeit, neue Funktionskonstante zu definieren. Dafür gibt es mehrere Varianten; die einfachste davon ist die explizite Definition. Wir legen diese Definition allgemeiner für Terme (und damit auch speziell für Funktionskonstante) aus.

Definition 2.15 (Explizite Termdefinition)
Die *explizite Definition* eines Terms führt eine neue Funktions- bzw. Objektkonstante bzw. Variablenbelegung ein. Syntaktisch schreiben wir die Definition einer Objektkonstanten oder Variablen x als

$$x := t,$$

wobei t ein Term ist. Für eine n-stellige Funktionskonstante f schreiben wir

$$f(x_1, \ldots, x_n) := t_{[x_1,\ldots,x_n]},$$

wobei $t_{[x_1,\ldots,x_n]}$ ein Term mit Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist.

Man beachte, dass wir weiter unten (über Quantoren) noch andere Möglichkeiten kennenlernen werden, Terme zu definieren – dann aber eben nicht mehr explizit.

Ohne relevante Objekte, auf denen man Funktionen definieren könnte, sind interessante Beispiele von expliziten Termdefinitionen an dieser Stelle schwierig. Wir greifen daher auf Beispiele aus der Schulmathematik zurück.

Beispiel 2.28 Eine Konstante, die π auf die ersten sechs Hinterkommastellen genau approximiert, ist

$$\text{pi-approx} := 355/113 \approx 3.141592920\,.$$

Mit Kenntnis von Sinus- und Kosinusfunktionen kann die Tangens-Funktion definiert werden als

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,.$$

Formal nicht korrekt (wegen der Punkte auf der rechten Seite) ist diese Definition der *Potenzturm-Funktion* in Infix-Notation:

$$a \upuparrows n := \underbrace{a^{(a^{(\cdot^{\cdot^{\cdot^{a))}}}}}}_{n}\,.$$

Wir werden später sehen, wie wir Funktionen wie diese formal korrekt definieren können. Wie unschwer zu erraten, wächst die Potenzturm-Funktion sehr schnell: So ist $2 \upuparrows 3 = 2^{(2^2)} = 16$, $2 \upuparrows 4 = 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{16} = 65536$, und $2 \upuparrows 5 = 2^{(2^{16})} \approx 2{\cdot}10^{19728}$.□

Als abschließenden Teil dieser Einführung in die Prädikatenlogik wenden wir uns nun detaillierter dem Sprachelement *Quantor* zu. Wir haben in diesem Kapitel bisher Allquantor und Existenzquantor kennengelernt und werden nun sehen, dass diese beiden Symbole Vertreter einer größeren Klasse von Quantoren sind.

Definition 2.16 (Quantor)
Ein *Quantor* ist ein Sprachkonstrukt, das syntaktisch sowohl eine Variable als auch einen Term oder einer Aussage benötigt. Der Quantor bindet diese Variable; je nach Semantik des Quantors ist der Quantorausdruck ein Term oder eine Aussage.

Man kann erkennen, dass All- und Existenzquantor aus Definition 2.11 diese Bedingungen erfüllen. In beiden Fällen werden Variable gebunden, und aus Aussagen All- bzw. Existenzaussagen gebildet.

Ein einfaches Beispiel eines Quantors, der aus einer Variable und einem Term einen Term liefert, ist der *Summenquantor* $\sum$. Meist ist beim Summenquantor nur die abkürzende Quantorenschreibweise aus Definition 2.13 sinnvoll, da die gebundene Variable einen Wertebereich benötigt. Die Semantik eines Summen-quantisierten Terms ist die Summe alle Terme, die sich durch alle gültigen Variablenbelegungen der gebundenen Variablen ergeben. So gelten etwa für das Universum der natürlichen Zahlen:

$$\sum_{i\le 10} i = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55 \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{2\le k\le 6\,\wedge\\ \mathrm{prim}(k)}} 2^k = 2^2 + 2^3 + 2^5 = 44\,.$$

Die Aussage, die die Werte der gebundenen Variablen einschränkt, wird (wenn sinnvoll und möglich) oftmals auf den Bereich unter- und oberhalb des Summenzeichens aufgeteilt, wie in folgenden Beispielen zu sehen ist:

$$\sum_{m=2}^{20} m^2 = 2^2 + \cdots + 20^2 = 2869 \quad \text{und} \quad \sum_{n=3}^{7} n^2 + 1 = (3^2+1) + \cdots + (7^2+1) = 140\,.$$

Analog zum Summenquantor lässt sich der *Produktquantor* $\prod$ definieren. Bei diesem werden die Terme nach erfolgter Variablenbelegung multipliziert statt addiert. Zwei Beispiele seiner Anwendung sind wie folgt:

$$\prod_{\substack{2\le k\le 8\,\wedge\\ \mathrm{prim(k)}}} k = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210 \quad \text{und} \quad \prod_{j=2}^{5} 2^j = 2^2 \cdot \;\cdots\; \cdot 2^5 = 16384\,.$$

Wir vereinbaren Folgendes für Summen und Produkte, für die es keine Variablenbelegungen gibt, die die einschränkende Aussage wahr macht (hier ist t ein beliebiger Term):

$$\sum_{\mathbf{f}} t := 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{\mathbf{f}} t := 1\,.$$

Neben Summen- und Produktquantor werden öfters noch *Minimum-* bzw. *Maximumquantor* benötigt. Im Gegensatz zu Summen- und Produktquantoren können Minimum- und Maximumquantor sich sowohl auf Terme als auch auf Aussagen beziehen, wodurch sich allerdings auch ihre Semantik ändert.

Der Minimumquantor, angewandt auf einen Term, liefert den kleinsten Wert, den dieser Term annehmen kann. Angewandt auf eine Aussage liefert er die kleinste Variablenbelegung, die diese Aussage wahr macht. In beiden Fällen wird meist eine Aussage den möglichen Wertebereich der gebundenen Variablen einschränken. Analoges gilt für den Maximumquantor.

Beispiel 2.29 Wir betrachten einige Beispiele, bei denen die Variablen aus $\mathbb{N}$ sind.

$$\min_{2\le k\le 10} 2^k - k^2 = -1, \qquad \max_{3\le n\le 6} n^2 = 36\,.$$

Man beachte, dass beide Ausdrücke synaktisch nicht eindeutig sind, da Minimum- und Maximumquantoren sich sowohl auf Terme als auch auf Aussagen beziehen können. Mit der Klammerung

$$\left(\min_{2\le k\le 10} 2^k - k^2\right) = -1$$

wird explizit ausgedrückt, dass -1 der kleinste Wert ist, den der Term $2^k - k^2$ im Bereich 2 bis 10 annehmen kann – der Minimum-Quantor bezieht sich also auf einen Term. Mit der Klammerung

$$\min_{2\le k\le 10} \left(2^k - k^2 = -1\right)$$

bezieht sich der Minimum-Quantor auf die Aussage $2^k - k^2 = -1$. Der Wert dieses Quantor-Ausdrucks ist 3, da $k = 3$ im Bereich 2 bis 10 der kleinste Wert ist, der die Aussage $2^k - k^2 = -1$ wahr macht.

Für den Maximum-Quantor gilt Ähnliches: Der Ausdruck $\max_t 2 - t$ ist 1, und $\max_k \mathrm{prim}(k) \wedge \mathrm{gerade}(k)$ ist 2. □

Fragen zur Selbstkontrolle

2.3 (S.1) Erklären Sie, warum bei einer Quantoraussage mit mehreren Quantoren deren Reihenfolge wichtig ist. Warum bedeutet $\forall x\ \exists y$ etwas anderes als $\exists y\ \forall x$?

2.3 (S.2) Beim Beweis einer Allaussage $\forall x\ A$ setzt man x^* "beliebig aber fix". Warum ist es wichtig, dass x^* beliebig ist? Warum, dass x^* fix ist?

2.3 (S.3) Der Beweis einer Existenzaussage kann nicht durch ein "sei x^* beliebig aber fix" vereinfacht werden. Ist der Beweis einer Existenzaussage deswegen generell leichter oder schwieriger als der Beweis einer Allaussage?

2.3 (S.4) Was versteht man unter einer *Problemspezifikation*? Aus welchen Teilen ist eine Problemspezifikation aufgebaut?

2.3 (S.5) Warum sind Problemspezifikationen gerade im Software Engineering so wichtig?

2.3 (S.6) In der Prädikatendefinition 2.14 müssen auf der rechten Seite des :⇔-Symbols genau jene Variablen frei vorkommen, die auf der linken Seite Argumente der Prädikatenkonstante sind. Warum ist das so?

2.3 (S.7) Warum wird beim Übersetzen einer Aussage der Form "Alle ... sind ... " eine Implikation (und nicht etwa eine Konjunktion) verwendet?

2.3 (S.8) In Definition 2.13 wird verlangt, dass bei der abkürzenden Quantorenschreibweise $\underset{P[x]}{\forall} A$ die Variable x in P frei vorkommen *muss* (und nicht nur *kann*, wie in A). Warum ist das so?

2.3 (S.9) Was ist die allgemeine Struktur eines Widerspruchsbeweises? Glauben Sie, dass Widerspruchsbeweise tendentiell einfacher oder schwieriger sind als Beweise von Allaussagen?

2.3 (S.10) Wir nehmen an, dass Klaus in der Aufgabenstellung in Beispiel 2.26 ($\sqrt{2}$ kann nicht als Bruch geschrieben werden) folgendermaßen argumentiert: "Weil das Quadrat $g^2 = 4k$ einer geraden Zahl $g = 2k^2$ wiederum gerade ist, folgt aus $2q^2 = p^2$, dass p gerade ist". Das ist falsch (wenn auch auf subtile Weise). Warum?

2.3 (S.11) Die "leeren" Summen- bzw. Produktquantoren sind folgendermaßen definiert:

$$\sum_{\mathbf{f}} t := 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{\mathbf{f}} t := 1\,.$$

Warum glauben Sie, dass diese genau so definiert sind (und nicht etwa beide Null sind)?

Übungsaufgaben

2.3 (Ü.1) Drücken Sie die folgenden Quantoraussagen über dem Universum der ganzen Zahlen sprachlich aus und argumentieren Sie, welche von ihnen wahr sind.

(a) $\exists x\ \exists y\ \ x+y=0$ **(b)** $\forall x\ \exists y\ \ x+y=0$ **(c)** $\exists x\ \forall y\ \ x+y=0$
(d) $\forall x\ \forall y\ \ x+y=0$

2.3 (Ü.2) Wie Übungsaufgabe 2.3 (Ü.1), für das *teilt*-Prädikat $\mid$:

(a) $\exists x\ \forall y\ \ x \mid y$ **(b)** $\forall x\ \exists y\ \ x \mid y$ **(c)** $\exists x\ \forall y\ \ y \mid x$
(d) $\forall x\ \exists y\ \ y \mid x$

2.3 (Ü.3) Drücken Sie die folgenden deutschen Sätze in Prädikatenlogik aus. Sie können dazu alle benötigten Funktions- und Prädikatenkonstanten (wie etwa VaterVon(x, y) und istBruder(x)) als gegeben voraussetzen. Das Universum seien (sehr schwammig ausgedrückt) "alle Dinge". Das hat keine konkreten Auswirkungen, außer dass Sie in den Aufgaben Prädikate wie *istKatze* oder *istMensch* benötigen.

(a) "Es gibt zwei Katzen, die Geschwister sind."
(b) "Jede Studentin der Informatik interessiert sich für Mathematik."

(c) "Jeder Mensch hat einen Vater."

2.3 (Ü.4) Wie Übungsaufgabe 2.3 (Ü.3), für die Sätze

(a) "Jeder Mensch hat genau eine Mutter."
(b) "Es gibt mindestens zwei Menschen, die Biologie studieren, und die an Mathematik interessiert sind."
(c) "Es gibt keine größte natürliche Zahl."
(d) "Klaus geht nur ins Kino, wenn ihm der Film gefällt."

Hinweis: Ein Objekt ist am größten, wenn es keine größeren Objekte gibt.

2.3 (Ü.5) Verneinen Sie folgende Existenzaussagen, und formulieren Sie sie als Allaussagen (sprachlich, nicht in Prädikatenlogik):

(a) "Es gibt grüne Sonnenaufgänge."
(b) "Es gibt kratzfestes Glas."
(c) "Es gibt keine nassen Flüssigkeiten."

2.3 (Ü.6) Wie Übungsaufgabe 2.3 (Ü.5), aber für das Negieren von Allaussagen, und Formulieren als Existenzaussagen:

(a) "Alle Tiroler sind lustig."
(b) "Alle Schwäne sind weiß."
(c) "Alle Vorlesungen sind nicht langweilig."

2.3 (Ü.7) Finden Sie den bzw. die Fehler in folgender Formalisierung des deutschen Satzes "es gibt eine graue Katze":

(a) Katze $=$ grau
(b) $\exists x$ istKatze$(x) =$ grau
(c) $\exists x$ istKatze$(x) =$ istGrau(x)
(d) $\exists x$ istKatze(istGrau(x))
(e) $\exists x$ istKatze$(x =$ grau$)$
(f) $\exists x$ istKatze$(x) \Rightarrow$ istGrau(x)

2.3 (Ü.8) Finden Sie den bzw. die Fehler in folgender Formalisierung des deutschen Satzes "Es gibt zwei Primzahlen, deren Differenz 2 ist":

(a) $\exists x\ \exists y\ \operatorname{prim}(x) - \operatorname{prim}(y) = 2$ **(b)** $\exists x\ \exists y\ \operatorname{prim}(x - y = 2)$
(c) $\exists x\ \exists y\ \operatorname{prim}(x - y) = 2$ **(d)** $\exists x\ \exists y\ \operatorname{prim}(x) \wedge \operatorname{prim}(y) \wedge x - y = 2$

2.3 (Ü.9) Wir definieren in Anlehnung an die Goldbachsche Vermutung das Prädikat *goldbach* als

$$\operatorname{goldbach}(x) :\Leftrightarrow \operatorname{gerade}(x) \wedge \exists y \exists z\ \operatorname{prim}(y) \wedge \operatorname{prim}(z) \wedge x = y + z\,.$$

Rechnen Sie nach, dass goldbach(8), goldbach(22), sowie goldbach(42) gelten.

2.3 (Ü.10) Wir definieren eine *Mersenne-Primzahl* als

$$\text{mersenne-prim}(x) :\Leftrightarrow \operatorname{prim}(x) \wedge \exists p\ \operatorname{prim}(p) \wedge x = 2^p - 1\,.$$

Rechnen Sie nach, dass sowohl 7, 31, als auch 127 Mersenne-Primzahlen sind.

2.3 (Ü.11) Definieren Sie formal die einstelligen Prädikatenkonstanten über dem Universum der natürlichen Zahlen, die wie folgt gegeben sind:

(a) Die Aussage istQuadratZahl(x) ist genau dann wahr, wenn x das Quadrat einer Zahl ist. Somit sind 1, 4, 9, 16 und 25 die ersten fünf Quadratzahlen.
(b) Die Aussage $P(x)$ ist genau dann wahr, wenn x die Summe der Quadrate zweier unterschiedlicher Primzahlen ist.
(c) Die Aussage perfekt(n) ist genau dann wahr, wenn n die Summe seiner echten Teiler (also nicht n selbst) ist. Die ersten perfekten Zahlen sind $6 = 1 + 2 + 3$ und $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

2.3 (Ü.12) Definieren Sie formal die zweistelligen Prädikatenkonstanten über dem Universum der natürlichen Zahlen, die wie folgt gegeben sind:

(a) Die Aussage $P(x, y)$ ist genau dann wahr, wenn die Summe der Quadrate von x und y größer als 10 ist.

(b) Die Aussage $\mathrm{primZahlenPaar}(x, y)$ ist genau dann wahr, wenn x und y zwei Primzahlen sind, deren Differenz genau zwei ist.

2.3 (Ü.13) Spezifizieren Sie das Problem, aus einer zusammengesetzten natürlichen Zahl (also einer Zahl, die nicht prim ist) genau zwei Faktoren in ansteigender Reihenfolge zu bestimmen.

2.3 (Ü.14) Spezifizieren Sie das Problem, zu einer gegebenen Primzahl die nächstgrößere Primzahl zu bestimmen.

2.3 (Ü.15) Spezifizieren Sie das Problem, zu gegebener Schranke $S \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl $x \geq N$ zu bestimmen, die sich als Summe zweier unterschiedlicher Quadratzahlen schreiben lässt.

2.3 (Ü.16) Gegeben seien die drei Prädikatenkonstanten $\mathrm{istElternTeilVon}(x, y)$, $\mathrm{istMännlich}(x)$, und $\mathrm{istWeiblich}(x)$. Definieren Sie damit die folgenden zweistelligen Prädikatenkonstanten:

(a) $\mathrm{istVaterVon}(x, y)$ **(b)** $\mathrm{istTochterVon}(x, y)$ **(c)** $\mathrm{istBruderVon}(x, y)$
(d) $\mathrm{istGroßVaterVon}(x, y)$ **(e)** $\mathrm{istTanteVon}(x, y)$

2.3 (Ü.17) Schreiben Sie die Definition des Prädikats *prim*, also

$$\mathrm{prim}(x) :\Leftrightarrow x \neq 1 \wedge \neg\Big(\exists\, y\; y \neq 1 \wedge y \neq x \wedge y \,|\, x\Big)$$

um, indem Sie die Negation in den Existenzquantor hineinziehen.

2.3 (Ü.18) Schreiben Sie folgende Quantoraussagen, die in der abkürzenden Quantorenschreibweise gegeben sind, in der ursprünglichen (langen) Form, also mit Implikationen und Konjunktionen.

(a) $\underset{1\leq x<40}{\forall} \mathrm{prim}(x^2 + x + 41)$ **(b)** $\underset{m\in\mathbb{N}}{\forall}\,\underset{k\in\mathbb{N}}{\exists}\; m = 2k \vee m = 2k + 1$
(c) $\underset{p\geq 2}{\forall} \quad \underset{n\geq 2}{\exists} \quad \mathrm{prim}(p) \wedge p \leq n$

2.3 (Ü.19) Negieren Sie die Ergebnisse der Übungsaufgaben 2.3 (Ü.18), und ziehen Sie dabei die Negation so weit wie möglich nach innen (also über alle Quantoren hinweg).

Hinweis: Sie können eine Negation auch in eine Implikation hineinziehen, wenn Sie die Implikation zuerst als eine Disjunktion schreiben.

2.3 (Ü.20) Rechnen Sie nach, dass Satz 2.4 auch für die abkürzende Quantorenschreibweise aus Definition 2.13 gilt, dass also folgende Aussagen gleichwertig sind:

(a) $\neg \underset{P[x]}{\forall} A \equiv \underset{P[x]}{\exists} \neg A$ **(b)** $\neg \underset{P[x]}{\exists} A \equiv \underset{P[x]}{\forall} \neg A$

Hinweis: Diese Aufgabenstellung ist eine Verallgemeinerung von Übungsaufgabe 2.3 (Ü.19).

2.3 (Ü.21) Schreiben Sie die Aussage, in in Beispiel 2.27 zu beweisen ist, in der Sprache der Prädikatenlogik an.

2.3 (Ü.22) Beweisen Sie die Aussage “Es gibt keine größte natürliche Zahl”, also

$$\neg\exists\, n\; \forall m\; n \geq m$$

mit einem Widerspruchsbeweis über dem Universum der natürlichen Zahlen. Sie können dabei die Tatsache verwenden, dass für jede natürliche Zahl k auch $k+1$ eine natürliche Zahl ist.

2.3 (Ü.23) Wie Übungsaufgabe 2.3 (Ü.22), für die Aussage “Es gibt keine Zahl, die Vielfaches aller Zahlen ist”, also die Aussage

$$\neg\exists\, n\; \forall m\; m \,|\, n\,.$$

2.3 (Ü.24) Berechnen Sie den Wert folgender Summen bzw. Produkte:

(a) $\displaystyle\sum_{i=3}^{5} \frac{2^i}{i(i+2)}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} \prod_{j=2}^{k} k \cdot j$ **(c)** $\displaystyle\prod_{1\leq j<4} \sum_{j<k\leq j+2} k + j$

2.3 (Ü.25) Werten Sie folgende Maximum-Ausdrücke über dem Universum der ganzen Zahlen aus:

(a) $\max\limits_{3\leq k\leq 10} 4k - 20$ **(b)** $\max\limits_{3\leq k\leq 10} \big(4k - 20 \leq 0\big)$

2.3 (Ü.26) Wie Übungsbeispiel 2.3 (Ü.25), für folgende Minimum-Ausdrücke:

(a) $\min\limits_{2\leq k\leq 7} (k-5)^2$ **(b)** $\min\limits_{2\leq k\leq 7} \big((k-5)^2 \leq 4\big)$