Aproksimacija $\frac{\pi}{2}$-MST

Seminarski rad u okviru kursa
Geometrijski algoritmi
Matematički fakultet

Anđela Damnjanović
mi19059@alas.matf.bg.ac.rs

13.11.2023.

Sažetak

U poslednjih petnaestak godina ideja pravljenja bežičnih mreža sa usmerenim antenama je veoma zaživela. Kao uzrok može se navesti želja za smanjenjem međusobnog ometanja signala i domet slanja signala, što zatim rezultuje povećanim protokom saobraćaja i većom bezbednošću mreže. Upravo zato je veoma bitno osmisliti efikasan algoritam koji za dati skup tačaka (koje predstavljaju antene) i ugao (koji predstavlja ugao gledanja antene) pronaći povezanu komunikacionu mrežu. Upravo nam ovde α-MST može pomoći. No, za neke vrednost α ovo je NP-težak problem (npr. za $\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Podsetimo, razapinjuće stablo je povezan graf bez ciklusa koji sadrži sve čvorove početnog grafa. Analogno, α razapinjuće stablo (α-ST) je povezan graf bez ciklusa koji sadrži sve čvorove grafa i za koji važi da je ugao između svake dve incidentne grane svakog čvora manji ili jednak α. Slično, α-minimalno razapinjuće stablo (α-MST) je α-ST sa najmanjom dužinom grana.

Jedan blizak problem našem problemu je nalaženje razapićujih stabala sa ograničenim stepenom čvorova, pa je k-stepeno razapinjuće stablo ono kome je stepen svakog čvora maksimalno k. Može se lako dokazati da je ovo potproblem problema α-ST, za $\alpha = 2\pi(1-\frac{1}{k})$.

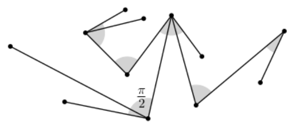
Drugi povezan problem je problem nalaženja α-razapinjućeg stabla sa uskim grlom. Ono što izdvaja ovo stablo je činjenica da je ono takvo da je dužina njegove najduže grane minimalna. Ovim problemom dosta su se bavili Ašner, Dobrev i Karajanis, a ima najrazličitije primene, na primer za konstrukciju mreža i Hamiltonovih puteva sa restrikcijama po pitanju uglova.

Sadržaj

1 Uvod

Kao što se može videti iz sažetka, α-MST stabla (pa tako i $\frac{\pi}{2}$-MST kao podvrsta) imaju bitnu primenu u svakodnevnom životu. Do skoro, najbolji aproksimativni algoritam za nalaženje $\frac{\pi}{2}$-MST, konstruisan od strane Kaca[1] i Ašnera[2], nalazio je povezanu mrežu u linearnom vremenu u odnosu na veličinu minimalnog razapinjućeg stabla skupa tačaka, sa faktorom 16[3]. Međutim, 2022. godine tim naučnika sastavljen od Ahmada Biniaza[4], Majida Dalirija[5] i Amira Hoseina Miradpora[6] pronašao je efikasniji algoritam, koji je uspeo da faktor 16 svede na faktor 10. Prvi put je objavljen u okviru *39th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2022)*.

Primer jednog $\frac{\pi}{2}$-razapinjućeg stabla dat je na slici 1.



Slika 1: Primer $\frac{\pi}{2}$-razapinjućeg stabla

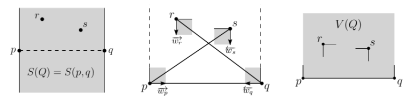
2 Osnovni pojmovi

Sada kada smo se podsetili pojma minimalnog razapinjućeg stabla i uveli pojam α-minimalnog razapinjućeg stabla, možemo se posvetiti uvođenju bitnih pojmova.

Neka je w_p ugao sa temenom u tački p. Neka je zatim w_q ugao sa temenom u tački q. Ako q leži unutar w_p onda kažemo da *p vidi q*. Dalje, kažemo da su *p i q međusobno vidljive* akko p vidi q i ako q vidi p. Neka je P skup tačaka u ravni takav da se u svakoj tački nalazi teme nekog ugla. *Indukovani graf međusobne vidljivosti od P*, u oznaci *G(P)* je geometrijski graf u ravni čiji su čvorovi tačke iz skupa P, a grane postoje između tačaka p i q akko su p i q međusobno vidljive. Raspored temena uglova u tačkama skupa nazivamo *orijentacija*, a sumu dužina grana grafa G označavamo sa *w(G)* [1, 2].

Zatim, za svake dve tačke p i q definišemo *ploču S(p,q)* kao region koji ograničavaju prave koje prolaze kroz p i q i normalne su na pq. *Četvorka* se odnosi na četiri tačke u ravni. Ona je *dopustiva* ako postoje dve tačke p i q takve da su ostale tačke unutar *S(p,q)* i sa iste strane pq. Takve tačke p i q nazivamo *dopustivi par (p,q)*. Za četvorku Q sa dopustivim parom *(p,q)* definišemo *dopustivu ploču S(Q)* koja je ista kao i *S(p,q)* i *dopustivi region* koji vide i p i q. Primeri dopustive četvorke, ploče i vidljivog regiona mogu se naći na slici 2 [1].

[1]Metju Kac, profesor na izraelskom Univerzitetu u Negevu
[2]Rom Ašner, profesor na izraelskom Univerzitetu u Negevu
[3]Potrebno je linearno vreme za nalaženje povezanog grafa nakon pronalaženja MST-a
[4]Iranski matematičar, profesor na Karlton Univerzitetu
[5]Iranski matematičar i profesor na Univerzitetu u Teheranu
[6]Iranski matematičar, profesor na Univerzitetu u Teheranu



Slika 2: Primer dopustive četvorke, ploče i vidljivog regiona

3 Bitne teoreme

U ovoj sekciji biće navedene važne teoreme za razumevanje izloženog algoritma.

Lema 1. *Svaki skup od pet tačaka P sadrži dopustivu četvorku Q takvu da sve tačke leže u $S(Q)$.*

Dokaz. Neka su p i q tačke takve da se nalaze na maksimalnoj udaljenosti jedna od druge. Od preostale 3 tačke, bar 2 moraju biti sa iste strane pq, te one, zajedno sa p i q čine dopustivu četvorku, a kako je rastojanje izmedju p i q maksimalno, onda sve tačke sigurno leže u $S(Q)$.

Teorema 1. *Za svaku dopustivu četvorku Q moguće je u svaku njenu tačku staviti teme ugla $\frac{\pi}{2}$ tako da je cela ravan pokrivena i indukovani graf međusobne vidljivosti je povezan.*

Dokaz. Neka je Q={p, q, r, s} dopustiva četvorka. Preobeležavanjem, rotacijom i refleksijom tačaka želimo da postignemo rezultat takav da: su *(p,q)* dopustivi par, pq je horizontalna, p je levo od q, r *i* s leže iznad pq i r je levo od s. Zatim postavimo temena uglova u tačke kao na slici 2. Očigledno je da je cela ravan pokrivena. Štaviše, važi i $p \leftrightarrow q$, $p \leftrightarrow s$ i $q \leftrightarrow r$, pa je i indukovani graf međusobne vidljivosti povezan.

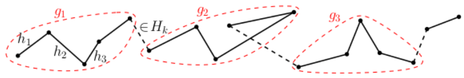
Teorema 2. *Neka su Q_1 i Q_2 dopustive četvorke i neka su temena uglova postavljena u njihove tačke kao u Teoremi 1. Tada je bar jedna od sledećih stavki tačna: ili je graf međusobne vidljivosti $Q_1 \cup Q_2$ je povezan ili u bilo koju tačku p iz $S(Q_1) \cup S(Q_2)$ može se staviti teme ugla tako da je tačka p međusobno vidljiva sa jednom tačkom iz Q_1 i sa jednom tačkom iz Q_2, tj. graf $Q_1 \cup Q_2 \cup p$ je povezan.*

Skica dokaza. Dokaz je jednostavnosti radi podeljen na manje delove i zasniva se na međusobnom položaju dopustivih četvorki. Neka su $Q_1 =$ {a, b, c, d} i $Q_2 =$ {a', b', c', d'}. Obeležimo tačke ove četvorke tako da odgovaraju obeležavanju iz Teoreme 1. Razmatraju se sledeća 4 slučaja — *a'b'* seče *ab*, produžetak od *a'b'* seče produžetak od *ab*, produžetak od *a'b'* seče *ab* ili su *a'b'* i *ab* su paralelne. Ostali slučajevi su simetrični i rade se analogno.

Neka su *l* i *l'* prave kroz *ab* i *a'b'* respektivno. Ideja je da se na osnovu ugla pod kojim se seku prave *l* i *l'*, kao i na osnovu vidljivih regiona svaki slučaj podeli na još manje delove. U svakom od tih manjih delova potrebno je dalje dokazati da postoje međusobno vidljive tačke koje se nalaze u suprotnim dopustivim četvorkama. Nakon što je to dokazano, garantovana je povezanost tih dopustivih četvorki, što se uopštava posle na ceo graf [1].

4 Ideja algoritma

Za početak, potrebno je pronaći MST skupa P. Zatim, iz dobijenog stabla naći Hamiltonov put H težine najviše $2 * w(MST)$[1]. Nakon toga, particionisati H na $\frac{n}{k}$ particija, gde je k konstanta (pretpostavimo da je n deljivo sa k). U svakoj particiji nalazi se k uzastopnih čvorova. Takođe, particionisati i skup grana tako da je svaka *i-ta* grana raspoređena u particiju H_i. Neka je H_k particija sa najvećom težinom grana. Tada važi: $w(H_k) \geq \frac{w(H)}{5}$ *i* $w(H \setminus H_k) \leq \frac{4w(H)}{5}$.



Slika 3: Podela čvorova Hamiltonovog puta u grupe

Ukoliko iz H uklonimo sve grane iz H_k, dobijamo niz podputeva od kojih se svaki (osim eventualno prvog i poslednjeg) sastoji od 5 čvorova. Svaki ovaj skup zovemo *grupom*. Primer grupe može se videti na slici 3.

Sada iz svake grupe uzmemo dopustivu četvorku članova Q_i kao u Lemi 1. Preostali čvor iz grupe proglasimo za *pomoćni čvor*, u oznaci b_i. Na osnovu Leme 1 znamo da on pripada $S(Q_i)$.

Zatim je potrebno orijentisati svaku particiju čvorova tako da:

1. su čvorovi svake grupe povezani i
2. postoji veza između susednih grupa.

Ovo je moguće na osnovu Teoreme 2 [7]. Pod ovakvim uslovima, *indukovani graf međusobne vidljivosti od P* je povezan.

Kada dobijemo povezan graf međusobne vidljivosti, potrebno je da nađemo proizvoljno razapinjuće stablo T_i za svaku grupu Q_i. Susedna razapinjuća stabla povežemo direktnom granom (ako takva postoji) ili preko pomoćnog čvora. Ostalo je još samo odabrati *k*. Autori ovog rada su se odlučili da to bude 5. Najteži deo ovog algoritma jeste očuvanje svojstva navedenog pod tačkom 2.

Analiza aproksimativnog faktora. Da bismo ograničili težinu stabla T koristimo cenu grana u Hamiltonovom putu *H*. Svaka grana iz skupa H_k posećena je jednom i to prilikom spajanja susednih stabala. Sve ostale ivice, posećene su najviše 6 puta i to: 3 puta za tri grane komponente T_i, 2 puta za spajanje komponente sa njoj prethodnom i sledećom i jednom za spajanje rezervnog čvora. Stoga, ukupna težina stabla je:
$w(T) \leq w(H_k) + 6w(H \setminus H_k) = = w(H) + 5w(H \setminus H_k) \leq w(H) + 5 * \frac{4w(H)}{5} = = 5w(H) \leq 10w(MST)$.

Literatura

[1] Ahmad Biniaz, Majid Daliri, and Amir Hossein Moradpour. A 10-approximation of the $\frac{\pi}{2}$-mst. *Jurnal of Computational geometry*, 14:157–173, 2023.

[2] Paz Carmi, Matthew Katz, Zvi Lotker, and Adi Rosen. Connectivity guarantees for wireless networks with directional antennas. *Computational geometry*, 44:477–485, 2011.

[7] Orijentišemo sve dopustive četvorke Q_i kao u Teoremi 1, što nam osigurava da je graf $G(Q_i)$ povezan. Neka su Q_i i Q_{i+1} dve uzastopne dopustive četvorke. Tada je, na osnovu Teoreme 2, ispunjen jedan od 2 uslova: ili je povezan graf $G(Q_i \cup Q_{i+1})$, tj. između ove dve četvorke postoji grana ili postoji tačka p koja se može usmeriti tako da bude povezan graf $G(Q_i \cup Q_{i+1} \cup p)$.

Na kraju, ostaje nespojen samo pomoćni čvor grupe b_m. Njega spajamo sa onim čvorom iz Q_m koji ga vidi