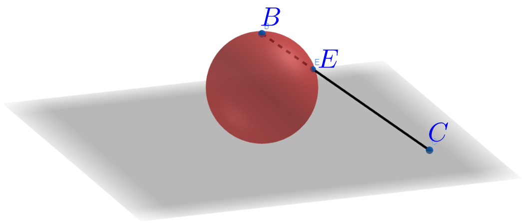
Tareas propuestas en clase

Andoni Latorre Galarraga

Tarea 1

• Calcular la proyección estereografica de la esfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ sobre el plano XY.

Consideramos el polo norte de la esfera $B = (0,0,2)$ y el punto en la esfera $E = (x,y,z)$



Consideramos la recta que pasa por B y E.

$$r : B + \lambda(E - B) = (\lambda x, \lambda y, 2 - \lambda(z-2))$$

Al interscar r con el plano XY para obtener el punto C.

$$0 = 2 - \lambda(z-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{z-2}$$

$$\Rightarrow \quad C = (\frac{2x}{z-2}, \frac{2y}{z-2}, 0)$$

Ahora tenemos la aplicación $\mathbb{X}^{-1}$ dada por

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{X}^{-1} : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,x) & \longmapsto & (u,v) = (\frac{2x}{z-2}, \frac{2y}{z-2}) \end{array}$$

Calculamos $\mathbb{X}$.

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

$$(\frac{u}{2}(z-2))^2 + (\frac{v}{2}(z-2))^2 + z^2 - 2z + 1 = 1$$

$$\frac{u^2+v^2}{4}(z^2 - 4z + 4) + z^2 - 2z = 0$$

$$\frac{u^2+v^2+4}{4}z^2 - (u^2+v^2+2)z + u^2 + v^2 = 0$$

Resolviendo la caudrática en z.

$$z = 2\frac{(u^2+v^2+2) \pm 2}{u^2+v^2+4}$$

Con el $+$ tenemos $z = 2$ pero como el polo norte B no es parte de la proyección tomamos la otra solución.

$$z = 2\frac{(u^2+v^2+2) - 2}{u^2+v^2+4} = \frac{2u^2+2v^2}{u^2+v^2+4}$$

$$x = \frac{u}{2}(z-2))^2 = \frac{u}{2}(\frac{2u^2+2v^2}{u^2+v^2+4} - 2)) = \frac{-4u}{u^2+v^2+4}$$

$$y = \frac{v}{2}(z-2))^2 = \frac{v}{2}(\frac{2u^2+2v^2}{u^2+v^2+4} - 2)) = \frac{-4v}{u^2+v^2+4}$$

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{X} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S \\ & (u,v) & \longmapsto & (\frac{-4u}{u^2+v^2+4}, \frac{-4v}{u^2+v^2+4}, \frac{2u^2+2v^2}{u^2+v^2+4}) \end{array}$$

Tarea 2

• Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular C^∞ y $\mathbb{X}(u,v) = \alpha(u) + v\mathbb{N}(u)$ una carta paramétrica. También se supone $\|\frac{d\alpha}{du}\| = 1$. Calcular las formas fundamentales.

Calculamos $\mathbb{X}_u$ y $\mathbb{X}_v$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{X}_u & = & \mathbb{T} + v(-\kappa\mathbb{T} + \tau\mathbb{B}) \\ & = & (1 - v\kappa)\mathbb{T} + v\tau\mathbb{B} \\ \mathbb{X}_v & = & \mathbb{N} \end{array}$$

Sean el punto $p = \mathbb{X}(u_0, v_0)$ y la base de T_p (el espacio tangente a la superficie en p) $\beta = \{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u\}$ tenemos

$$(I_p)_\beta = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle & \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle \\ \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_u \rangle & \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle = \langle (1-v\kappa)\mathbb{T} + v\tau\mathbb{B}, (1-v\kappa)\mathbb{T} + v\tau\mathbb{B} \rangle =$$

$$= (1 - v\kappa)^2 + (v\tau)^2 = 1 - 2v\kappa + (v^2 + \tau^2)\kappa^2$$

$$\langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_u \rangle = \langle (1-v\kappa)\mathbb{T} + v\tau\mathbb{B}, \mathbb{N} \rangle = 0$$

$$\langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle = \langle \mathbb{N}, \mathbb{N} \rangle = 1$$

$$(I_p)_\beta = \begin{pmatrix} 1 + 2v\kappa + (v^2+\tau^2)\kappa^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que la primera forma fundamental es

$$\begin{array}{rccl} I_p : & T_p \times T_p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} (I_p)_\beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde las coordenadas de los vectores de T_p estan dadas en la base β.

$$I_p((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2(1 + 2v\kappa + (v^2+\tau^2)\kappa^2) + y_1y_2$$

Para calcular la segunda forma fundamental comenzamos con el cálculo de la aplicación de Gauss(1777-1855).

$$\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v = \begin{vmatrix} \mathbb{T} & \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ 1 - v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -v\tau\mathbb{T} + (1 - v\kappa)\mathbb{B}$$

$$N_p = \frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|} = \frac{-v\tau\mathbb{T} + (1-v\kappa)\mathbb{B}}{\sqrt{(\tau^2+\kappa^2)v^2 - 2v\kappa + 1}}$$

Calculamos las segundas desivadas de la carta $\mathbb{X}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{X}_{uu} & = & -v\kappa'\mathbb{T} + (1 - v\kappa)\kappa\mathbb{N} \\ & + & v(\tau'\mathbb{B} + \tau(-\tau\mathbb{B})) \\ & = & -v\kappa'\mathbb{T} + (\kappa - v\kappa^2)\mathbb{N} + (v\tau' - \tau^2)\mathbb{B} \\ \mathbb{X}_{uv} & = & -\kappa\mathbb{T} + \tau\mathbb{B} \\ \mathbb{X}_{vu} & = & -\kappa\mathbb{N} + \tau\mathbb{B} \\ \mathbb{X}_{vv} & = & 0 \end{array}$$

Ahora podemos calcular la segunda forma fundamental.

$$\langle \mathbb{X}_{uu}, N\rangle =$$

$$= \frac{\left\|-v\kappa'\mathbb{T} + (\kappa - v\kappa^2)\mathbb{N} + (v\tau' - \tau^2)\mathbb{B}\right\|^2}{\sqrt{(\tau^2+\kappa^2)v^2 - 2v\kappa + 1}} =$$

$$= \frac{v^2\kappa'^2 + \kappa^2 + -2v\kappa^3 + v^2\kappa^4 + v^2\tau'^2 - 2v\tau^2\tau' + \tau^4}{\sqrt{(\tau^2+\kappa^2)v^2 - 2v\kappa + 1}} =$$

$$= \frac{(\kappa'^2 + \kappa^4 + \tau'^2)v^2 - 2(\kappa^3 + \tau^2\tau')v + \kappa^2 + \tau^4}{\sqrt{(\tau^2+\kappa^2)v^2 - 2v\kappa + 1}}$$

$$\langle \mathbb{X}_{uv}, N\rangle = \langle \mathbb{X}_{vu}, N\rangle =$$

$$= \frac{(-\kappa\mathbb{T} + \tau\mathbb{B})(-v\tau\mathbb{T} + (1+v\kappa)\mathbb{B})}{\sqrt{(\tau^2+\kappa^2)v^2 - 2v\kappa + 1}} =$$

$$= \frac{\tau + \kappa\tau v}{\sqrt{(\tau^2+\kappa^2)v^2 - 2v\kappa + 1}}$$

$$\langle \mathbb{X}_{vv}, N\rangle = 0$$

$$(II_p)_\beta = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_{uu}, N\rangle & \langle \mathbb{X}_{uv}, N\rangle \\ \langle \mathbb{X}_{vu}, N\rangle & \langle \mathbb{X}_{vv}, N\rangle \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\begin{pmatrix} (\kappa'^2 + \kappa^4 + \tau'^2)v^2 - 2(\kappa^3 + \tau^2\tau')v + \kappa^2 + \tau^4 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(\tau^2+\kappa^2)v^2 - 2v\kappa + 1}}$$

Tenemos que la segunda forma fundamental es

$$II_p((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} (II_p)_\beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Tarea 3

• Calcular la distancia entre el punto $(0,0,2)$ y $\mathbb{S}^2$.

Veamos que $\mathbb{S}^2$ es una 2-variedad de clase C^1 para aplicar el teorema de los multiplicadores de Lagrange (1736-1813). Tenemos que $\forall x \in \mathbb{S}^2$ existe un abierto en $\mathbb{R}^3$, en este caso $\mathbb{R}^3$ es el abierto y una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que
i) $rg(DF(x)) = 1 = 3 - 2$
ii) $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ F(x) = 0\}$
Es suficiente con tomar $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. ya que la condición ii) es evidente y $DF = (2x, 2y, 2z)$ solo es igual a 0 en el origen que no pertenece a $\mathbb{S}^2$. Si $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z-2)^2$ y $f_{|\mathbb{S}^2}$ tiene un extremo relativo en x_0 entonces, x_0 es un punto estacionario de $g = f + \lambda F$.

$$g = x^2+y^2+(z-2)^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$Dg(x,y,x) = (2x(1+\lambda), 2y(1+\lambda), z(1+2\lambda) - 2)$$

$$\begin{cases} 0 = 2x(1+\lambda) \\ 0 = 2y(1+\lambda) \\ 0 = z(1+2\lambda) - 2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

Cuando $x = y = 0$ tenemos que $z = \pm 1$. Cuando $x \neq 0$ 0 $y \neq 0$ es necesario que $\lambda = -1$ y se tiene que

$$0 = z(1-2) - 2 \quad \Rightarrow \quad z = -2$$

pero no hay ningun punto en en $\mathbb{S}^2$ con $z = -2$. Veamos cuanto vale f en $(0,0,\pm 1)$.

$$f(0,0,1) = 1$$

$$f(0,0,-1) = 9$$

Tenemos que $(0,0,1)$ es el punto de $\mathbb{S}^2$ más cercano a $(0,0,2)$ y por lo tanto $d(\mathbb{S}^2, (0,0,2)) = 1$.

Tarea 4

• Dada una curva reglar $\alpha : (f(t), g(t))$, probar que la superficie de revolución dada por la carta $\mathcal{S} : \mathbb{X}(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\operatorname{sen}(v), g(u))$ es orientable si $\mathcal{S} \cap \langle(0,0,1)\rangle = \emptyset$. Ver bajo que condiciones es orientable cuando $\mathcal{S} \cap \langle(0,0,1)\rangle \neq \emptyset$.

Calculamos el campo normal unitario a la Superficie.

$$\mathbb{X}_u = (f'(u)\cos(v), f'(u)\operatorname{sen}(v), g'(u))$$

$$\mathbb{X}_v = (-f(u)\operatorname{sen}(v), f(u)\cos(v), 0)$$

$$\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f'(u)\cos(v) & f'(u)\operatorname{sen}(v) & g'(u) \\ -f(u)\operatorname{sen}(v) & f(u)\cos(v) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= i\begin{vmatrix} f'(u)\operatorname{sen}(v) & g'(u) \\ f(u)\cos(v) & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} f'(u)\cos(v) & g'(u) \\ -f(u)\operatorname{sen}(v) & 0 \end{vmatrix}$$

$$+k\begin{vmatrix} f'(u)\cos(v) & f'(u)\operatorname{sen}(v) \\ -f(u)\operatorname{sen}(v) & f(u)\cos(v) \end{vmatrix} =$$

$$= ig'(u)f(u)\cos(v) + jg'(u)f(u)\operatorname{sen}(v) + k(f'(u)f(u)) =$$

$$= (g'(u)f(u)\cos(v), g'(u)f(u)\operatorname{sen}(v), (f'(u)f(u)))$$

$$\frac{\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v}{\|\mathbb{X}_u \times \mathbb{X}_v\|} =$$

$$= \frac{(g'(u)f(u)\cos(v), g'(u)f(u)\operatorname{sen}(v), (f'(u)f(u)))}{f(u)\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}$$

Como la curva es regular $f'(u)$ y $g'(u)$ nunca se anulan a la vez y al no haber intersección con $\langle(0,0,1)\rangle$, tampoco se anula $f(u)$. Por lo tanto el campo normal unitario es continuo y la superficie es orientable.
En el caso en que $\mathcal{S} \cap \langle(0,0,1) \neq \emptyset$, si $f(u_0) = 0$ es necesario que

$$\lim_{u \to u_0} \frac{(g'(u)\cos(v), g'(u)\operatorname{sen}(v), f'(u))}{\sqrt{f'(u)^2 + g'(u)^2}}$$

no dependa de v, es decir $g'(u_0) \to 0$. Se tiene que si $\mathcal{S} \cap \langle(0,0,1) \neq \emptyset$ y $\lim_{u \to u_0} g'(u) = 0$, entonces la superficie de revolución es orientable.