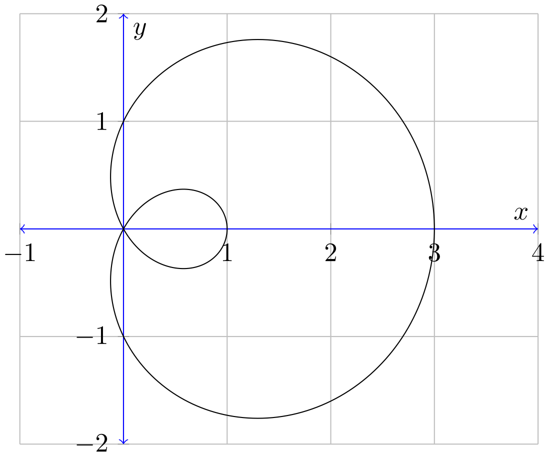
Entrega 3

Andoni Latorre Galarraga

Problema:

Sea $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (2\cos t - 1)(\cos t, \operatorname{sen} t)$.

i) Representar $\alpha([0, 2\pi])$.



ii) ¿Es α simple?

No es simple por no ser inyectiva. $\alpha(\frac{\pi}{3}) = \alpha(\frac{5\pi}{3}) = (0, 0)$.

iii) ¿Es α convexa?

No es convexa, evidentemente la recta tangente en $\alpha(0)$ que es $x = 1$ corta la curva en otros dos puntos. Además veremos que solo tiene 2 vértices, por el teorema de los 4 vértices no puede ser convexa.

iv) Calcular los vértices de α.

Calculamos la curvatura y su derivada.

$$\alpha(t) = ((2\cos t - 1)\cos t, (2\cos t - 1)\operatorname{sen} t)$$

$$\alpha'(t) = (-2\operatorname{sen} t \cos t - (2\cos t - 1)\operatorname{sen} t, -2\operatorname{sen} t \operatorname{sen} t + (2\cos t - 1)\cos t) =$$

$$= (\operatorname{sen} t - 4\cos t \operatorname{sen} t, 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t)$$

$$\alpha''(t) = (\cos t - 4(-\operatorname{sen} t \operatorname{sen} t + \cos t \cos t), 2(-2\cos t \operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} t \cos t) + \operatorname{sen} t) =$$

$$= (\cos t + 4(\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t), \operatorname{sen} t(1 - 8\cos t))$$

$$k_2(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot \mathcal{J}\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} =$$

$$= \frac{(\cos t + 4(\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t), \operatorname{sen} t(1 - 8\cos t)) \cdot \mathcal{J}(\operatorname{sen} t - 4\cos t \operatorname{sen} t, 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t)}{\|(\operatorname{sen} t - 4\cos t \operatorname{sen} t, 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t)\|^3} =$$

$$= \frac{(\cos t + 4(\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t))(2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t) + (\operatorname{sen} t - 8\operatorname{sen} t \cos t)(\operatorname{sen} t - 4\cos t \operatorname{sen} t)}{\left(\sqrt{(\operatorname{sen} t - 4\cos t \operatorname{sen} t)^2 + (2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t)^2}\right)^3} =$$

$$= \frac{9 - 6\cos t}{(5 - 4\cos t)^{3/2}}$$

Tenemos que

$$k_2'(t) = \frac{12\operatorname{sen} t(\cos t - 2)}{(5 - 4\cos t)^{5/2}}$$

Tenemos ceros, y por lo tanto vértices, en $0, \pi$ y 2π, es decir, en $(3, 0)$ y $(1, 0)$.