Seminario álgebra

Andoni Latorre Galarraga

2.
c) Primero buscamos una base de W:

$$x^1 + x^2 = x^1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 0$$

$$x^3 + x^4 = x^3 - x^4 \Rightarrow x^4 = 0$$

$$x^1 - x^2 = x^3 + x^4 \Rightarrow x^1 = x^3$$

$$\Rightarrow W =< (1,0,1,0) >$$

Es facil ver que $\{\overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,1,0,0)}, \overline{(0,0,0,1)}\}$ es base del espacio cociente:

$$(1,0,0,0) - (0,1,0,0) = (1,-1,0,0) \notin W$$

$$(1,0,0,0) - (0,0,0,1) = (1,0,0,-1) \notin W$$

$$(0,1,0,0) - (0,0,0,1) = (0,1,0,-1) \notin W$$

Por lo tanto, por ser $\mathbb{R}^4/W$ de dimensión 3, $\mathbb{R}^4/W =< \overline{(1,0,0,0)}, \overline{(0,1,0,0)}, \overline{(0,0,0,1)} >$.

d) W es, evidentemente, de dimensión 3. Por lo tanto, $\mathbb{R}^4/W$ es de dimensión 1 y se tiene que: $\mathbb{R}^4/W =< \overline{(1,0,0,0)} >$.

6.
b) Restando las ecuaciones se tiene:

$$z + 2t = 0 \Leftrightarrow z = -2t$$

Por otra parte,

$$y - 2t + t = 0 \Leftrightarrow y = t$$

Por lo tanto $W =< (1,0,0,0), (0,1,-2,1) >$, ahora sabemos que $\mathbb{R}^4/W$ de dimensión 2. Es fácil ver que $\mathbb{R}^4/W =< \overline{(0,1,0,0)}, \overline{(0,0,1,0)} >$. $[(1,0,1,0)] = \overline{(1,0,0,0)} + \overline{(0,0,1,0)} = \overline{0} + \overline{(0,0,1,0)} = \overline{(0,0,1,0)}$ Por lo tanto las coordenadas son $(0,1)$

$$(0,1,0,0) - (0,1,0,0) = (0,1,-1,0) \notin W \Leftrightarrow 1 - 2 + 0 \neq 0$$

Por lo tanto $B_{\mathbb{R}^4/W} = \{\overline{(0,1,0,0)}, \overline{(0,0,1,0)}\}$.

c) $W =< (1,1,1,1), (0,1,0,1), (1,-1,1,-1) >=< (1,1,1,1), (0,1,0,1) >$ ya que, $(1,-1,1,-1)=(1,1,1,1)-2(0,1,0,1)$ y también es fácil ver que los vectores $(1,1,1,1)$ y $(0,1,0,1)$ son linealmente independientes. Por lo tanto $\mathbb{R}^4/W$ es de dimensión 2.

$$(1,0,0,0)-(0,1,0,0)=(1,-1,0,0)\notin W$$

Por lo tanto $B_{\mathbb{R}^4/W}=\{\overline{(1,0,0,0)},\overline{(0,1,0,0)}\}$. Como $(1,0,1,0)=(1,1,1,1)-(0,1,0,1)\in W\Rightarrow[(1,0,1,0)]=\bar{0}$

d) Es evidente que W es de dimensión 2. Observamos que:

$$(0,0,1,0)-(0,0,0,1)=(0,0,1,-1)\notin W$$

Por lo tanto $B_{\mathbb{R}^4/W}=\{\overline{(0,0,1,0)},\overline{(0,0,0,1)}\}$. $[(1,0,1,0)]=\overline{(1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+\frac{1}{2}\overline{(0,0,1,0)}-\frac{1}{2}\overline{(0,0,0,1)}=\bar{0}+\frac{1}{2}\overline{(0,0,1,0)}-\frac{1}{2}\overline{(0,0,0,1)}$ Por lo tanto, las coordenadas son $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

10.
ii) Supongamos que $(x_1,y_1,z_1,t_1)-(x_2,y_2,z_2,t_2)\in W$ escribimos la resta en función de la base, $x_1-x_2=\lambda, y_1-y_2=\lambda+\mu, z_1-z_2=\lambda+\mu, t_1-t_2=\mu$:

$$\phi(v_1)-\phi(v_2)=(x_1+t_1,3x_1-y_1,3x_1-z_1,x_1-2t_1)-(x_2+t_2,3x_2-y_2,3x_2-z_2,x_2-2t_2)$$

$$=(x_1-x_2+t_1-t_2,3x_1-3x_2-y_1+y_2,3x_1-3x_2-z_1+z_2,x_1-x_2-2t_1+2t_2)$$
$$=(\lambda+\mu,3\lambda-\lambda-\mu,3\lambda-\lambda-\mu,\lambda-2\mu)=\lambda(1,2,2,1)+\mu(1,-1,-1,-2)$$
$$=\lambda((1,1,1,0)+(0,1,1,1))+\mu(1,1,1,0)-2(0,1,1,1))\in W$$

Por lo tanto ϕ está bien definida.

11.
a) Para probar que induce endomorfismo basta con probar que W es invariante:

$$f(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)=(2\lambda,2\lambda,2\lambda,2\lambda)=2(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)\in W$$

Tomamos $B_V=\{(1,1,1,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$