Segundo Seminario de Álgebra II

Andoni Latorre Galarraga

1.
a) Escribimos la matriz correspondiente al endomorfismo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio carateristico:

$$c_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-5 & -2 & 3 \\ -4 & x-5 & 4 \\ -6 & -4 & x+4 \end{vmatrix} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Se tiene que los valores propios son $1, 2, 3$. Calculamos los subespacios asociados:
Cuando $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 4y - 4z = 0 \\ 6x + 4y - 5z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \\ 6x + 4y - 6z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Cuando $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \\ 6x + 4y - 7z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Como la multiplicidad algebraica del cada valor propio vcomo raiz del polinomio caracteristico coincide con la dimensión del subespacio propio asociado a dicho valor propio en todos los casos, se tiene que el endomorfismo es diagonalizable. Se tiene:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Escribimos la matriz correspondiente al endomorfismo:

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio caraterístico:

$$c_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-8 & -15 & 36 \\ -8 & x-21 & 46 \\ -5 & -12 & x+27 \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 - 3x - 6 = (x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

El único valor propio en $\mathbb{Q}$ es 2. Calculamos el subespacio asociads:

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15y - 36z = 0 \\ 8x + 19y - 46z = 0 \\ 5x + 12y - 29z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{Q}$$

Al no tener todos sus valores propios en $\mathbb{Q}$ no es diagonalizable.

c) Escribimos la matriz correspondiente al endomorfismo:

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio caraterístico:

$$c_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-8 & -15 & 36 \\ -8 & x-21 & 46 \\ -5 & -12 & x+27 \end{vmatrix} = x^3 - 2x^2 - 3x - 6 = (x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

Los valores propios son: $2, \pm\sqrt{3}$. Calculamos los subespacios asociados:
Cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x+15y-36z=0 \\ 8x+19y-46z=0 \\ 5x+12y-29z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{R}$$

cuando $\lambda = \sqrt{3}$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-\sqrt{3}+8)x+15y-36z=0 \\ 8x+(-\sqrt{3}+21)y-46z=0 \\ 5x+12y-(-\sqrt{3}-27)z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sqrt{3}+3)\mu \\ \frac{-\sqrt{3}+3}{3}\mu \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{R}$$

cuando $\lambda = -\sqrt{3}$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{3}+8)x+15y-36z=0 \\ 8x+(\sqrt{3}+21)y-46z=0 \\ 5x+12y-(\sqrt{3}-27)z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\sqrt{3}+3)\mu \\ \frac{\sqrt{3}+3}{3}\mu \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Como la multiplicidad algebraica del cada valor propio vcomo raiz del polinomio caracteristico coincide con la dimensión del subespacio propio asociado a dicho valor propio en todos los casos, se tiene que el endomorfismo es diagonalizable. Se tiene:

$$P^{-1}AP =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{2\sqrt{3}-3}{2} & \frac{-5\sqrt{3}+7}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{2} & \frac{-2\sqrt{3}-3}{2} & \frac{5\sqrt{3}+7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}+3 & -\sqrt{3}+3 \\ 2 & \frac{-\sqrt{3}+3}{3} & \frac{\sqrt{3}+3}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

d) Escribimos la matriz correspondiente al endomorfismo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio caraterístico:

$$c_A(x) = |xI-A| = \begin{vmatrix} x-4 & -7 & -5 \\ 4 & x-5 & 0 \\ -5 & -9 & x+4 \end{vmatrix} = x^3-5x^2+17x-13 = (x-1)(x-2+3i)(x+2-3i)$$

el único valor propio en $\mathbb{Q}$ es: 1. Calculamos el subespacio asociado:
Cuando $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x + 7y - 5z = 0 \\ -4x + 4y = 0 \\ x + 9y - 5z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{Q}$$

Al no estar todos los valores propios en el cuerpo, no es diagonaizable.

e) Escribimos la matriz correspondiente al endomorfismo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio caraterístico:

$$c_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-4 & -7 & -5 \\ 4 & x-5 & 0 \\ -5 & -9 & x+4 \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = (x-1)(x-2+3i)(x+2-3i)$$

Los valores propios son: $1, 2-3i, -2+3i$. Calculamos los subespacios asociados:
Cuando $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x + 7y - 5z = 0 \\ -4x + 4y = 0 \\ x + 9y - 5z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} \\ \frac{\mu}{2} \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{Q}$$

Cuando $\lambda = 2 - 3i$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (2+3i)x + 7y - 5z = 0 \\ -4x + (3+3i)y = 0 \\ x + 9y - (6+3i)z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{12}{17} + \frac{3}{17}i)\mu \\ (\frac{10}{17} - \frac{6}{17}i)\mu \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{Q}$$

Cuando $\lambda = 2 - 3i$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (2-3i)x+7y-5z=0 \\ -4x+(3-3i)y=0 \\ x+9y-(6-3i)z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{12}{17}-\frac{3}{17}i)\mu \\ (\frac{10}{17}+\frac{6}{17}i)\mu \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{Q}$$

Como la multiplicidad algebraica del cada valor propio vcomo raiz del polinomio caracteristico coincide con la dimensión del subespacio propio asociado a dicho valor propio en todos los casos, se tiene que el endomorfismo es diagonalizable. Se tiene:

$$P^{-1}AP =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ \frac{4-i}{2} & \frac{6+7i}{6} & \frac{-9-2i}{6} \\ \frac{4+i}{2} & \frac{6-7i}{6} & \frac{-9+2i}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{12\mu}{17}+\frac{(3\mu)i}{17} & \frac{12\mu}{17}-\frac{(3\mu)i}{17} \\ \frac{1}{2} & \frac{10\mu}{17}-\frac{(6\mu)i}{17} & \frac{10\mu}{17}+\frac{(6\mu)i}{17} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-3i & 0 \\ 0 & 0 & 2+3i \end{pmatrix}$$

f) Escribimos la matriz correspondiente al endomorfismo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio caraterístico:

$$c_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-4 & -2 & 5 \\ -6 & x-4 & 9 \\ -5 & -3 & x+7 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

Losvalores propios son: $1, 0$. Calculamos los subespacios asociados:
Cuando $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4x+2y-5z=0 \\ 6x+4y-9z=0 \\ 5x+3y-7z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} \\ \frac{3\mu}{2} \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{Q}$$

Cuando $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x+2y-5z=0 \\ 6x+3y-9z=0 \\ 5x+3y-8z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} \forall \mu \in \mathbb{Q}$$

La multiplicidad algebráica de 0 no coincide con la dimensión del subespacio asociado. Por lo tanto, no es diagonalizable.

2.
Dado que A es inversible, se tiene que $|A| \neq 0$. Ahora, sabemos que el término independiente del polinomio caraterístico es $(-1)^n|A|$. Por lo tanto:

$$c_A(0) = (-1)^n|A| \neq 0$$

Por lo que 0 no es valor propio al no ser raiz del polinomio característico.
Sabemos que $\exists v$ tal que:

$$Av = \lambda v \Rightarrow v = A^{-1}\lambda v \Rightarrow \lambda^{-1}v = A^{-1}v$$

Por lo que λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.

3. Por inducción:

$$\exists v : f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda\lambda v = \lambda^2 v \quad (1)$$

$$f^3(v) = f^2(f(v)) = f^2(\lambda v) = \underbrace{\lambda f^2(v) = \lambda\lambda^2 v}_{(1)} = \lambda^3 v \quad (2)$$

$$f^4(v) = f^3(f(v)) = f^3(\lambda v) = \underbrace{\lambda f^3(v) = \lambda\lambda^3 v}_{(2)} = \lambda^4 v \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$f^{n+1}(v) = f^n(f(v)) = f^n(\lambda v) = \underbrace{\lambda f^n(v) = \lambda\lambda^n v}_{(n-1)} = \lambda^{n+1} v \quad (n)$$

$$\vdots$$