Entrega 1

Andoni Latorre Galarraga

Conceptos

Topología

Una topología $\tau_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ sobre un conjunto X es un subconjunto del conjunto potencia de X que cumple las siguentes propiedades,

$$\begin{array}{ll} i) & \{\emptyset, X\} \subseteq \tau_X \\ ii) & \forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_X, \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau_x \\ iii) & \forall \sigma \subseteq \tau_x, \quad \bigcup_{\mathcal{U} \in \sigma} \mathcal{U} \in \tau_X \end{array}$$

Espacio topológico

Un espacio topológico es un par ordenado (X, τ_X) donde X es un conjunto y τ_X es una topología sobre X.

T_2 (de Hausdorff)

Un espacio topológico (X, τ_X) se dice T_2 si

$$\forall a, b \in X \text{ con } a \neq b,\ \exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_X \ : \ a \in \mathcal{U}, b \in \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$$

, es decir, todo par de puntos distintos se puede separar por abiertos disjuntos.

Compacto

Un espacio topológico (X, τ_X) se dice compacto si

$$\forall \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_X \ : \ \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = X \quad , \exists J \subseteq I \ : \ |J| \leq \infty, \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j = X$$

, es decir, todo recubrimiento por abiertos de X tiene un subrecubrimiento finito.

Aplicación continua

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si

$$\forall \mathcal{U} \in \tau_Y, f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$$

, es decir, la antiimagen de cualquier abierto es un abierto.

Aplicación topologicamente cerrada

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es cerrada si

$$\forall \mathcal{U} \in \tau_x, \quad f(\mathcal{U}^c)^c \in \tau_Y$$

, es decir, la imagen de todo cerrado es un cerrado.

Homeomorfismo

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es un homeomorfismo si es continua, biyectiva y su inversa es continua.

Homeomorfo

Los espacios topológicos (X, τ_x) y (Y, τ_Y) se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$.

Identificación

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una identificación si es sobreyectiva y $\mathcal{U} \in \tau_Y \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$.

Cociente

Dada una aplicacón sobreyectiva $f : (X, \tau_X) \longleftarrow Y$ se define la topología cociente sobre Y como:

$$\tau_Y = \{\mathcal{V} \subseteq Y \ : \ f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_X\}$$