# Entrega 1

Andoni Latorre Galarraga

## Conceptos

### Espacio topológico

Un espacio topológico es un par ordenado $(X, \tau_X)$ donde $X$ es un conjunto y $\tau_X$ es una topología sobre $X$.

### $T_2$ (de Hausdorff)

Un espacio topológico $(X, \tau_X)$ se dice $T_2$ si

$$\forall a, b \in X \text{ con } a \neq b,\ \exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_X \ : \ a \in \mathcal{U}, b \in \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$$

, es decir, todo par de puntos distintos se puede separar por abiertos disjuntos.

### Compacto

Un espacio topológico $(X, \tau_X)$ se dice compacto si

$$\forall \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_X \ : \ \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i = X \quad , \exists J \subseteq I \ : \ |J| \leq \infty, \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j = X$$

, es decir, todo recubrimiento por abiertos de $X$ tiene un subrecubrimiento finito.

### Aplicación continua

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si

$$\forall \mathcal{U} \in \tau_Y, f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$$

, es decir, la antiimagen de cualquier abierto es un abierto.

### Aplicación topologicamente cerrada

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es cerrada si

$$\forall \mathcal{U} \in \tau_x, \quad f(\mathcal{U}^c)^c \in \tau_Y$$

, es decir, la imagen de todo cerrado es un cerrado.

### Homeomorfismo

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es un homeomorfismo si es continua, biyectiva y su inversa es continua.

### Homeomorfo

Los espacios topológicos $(X, \tau_x)$ y $(Y, \tau_Y)$ se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$.

### Identificación

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una identificación si es sobreyectiva y $\mathcal{U} \in \tau_Y \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$.

# Entrega 2

Andoni Latorre Galarraga

Proposición:
Sean $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos elevaciones de una aplicación continua $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$, donde $X$ es un espacio topológico conexo, entonces $\exists k \in \mathbb{Z} \ : \ \tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_1 = 2k\pi$.

*Dem:*
Por ser $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$ elevaciones de $\Phi$, tenmos que $\tilde{\Phi} = exp \circ \tilde{\Phi}_1 = exp \circ \Phi_2$. Por la periodicidad de $exp$, tenemos que $\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2 = 2\pi k(x)$ donde $k : X \to \mathbb{Z}$. Como $X$ es conexo, $(\frac{\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2}{2\pi})(X) = k(X)$ es conexo ya que $\frac{\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2}{2\pi} = k$ es continua. Pero los conexos en $\mathbb{Z}$ son los puntos por lo tanto, $k$ es contante.

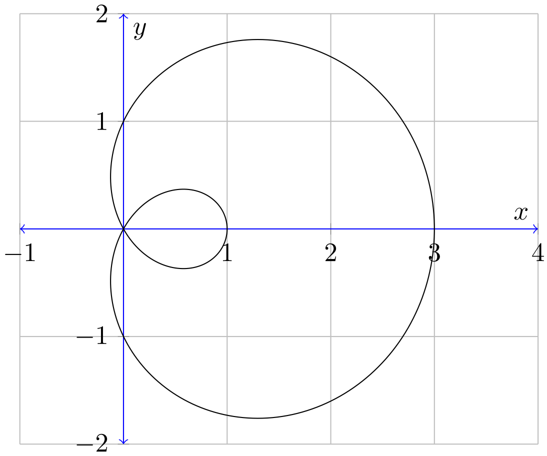
# Entrega 3

Andoni Latorre Galarraga

Problema:

Sea $\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (2\cos t - 1)(\cos t, \operatorname{sen} t)$.

*i)* Representar $\alpha([0, 2\pi])$.




*ii)* ¿Es $\alpha$ simple?

No es simple por no ser inyectiva. $\alpha(\frac{\pi}{3}) = \alpha(\frac{5\pi}{3}) = (0, 0)$.

*iii)* ¿Es $\alpha$ convexa?

No es convexa, evidentemente la recta tangente en $\alpha(0)$ que es $x = 1$ corta la curva en otros dos puntos. Además veremos que solo tiene 2 vértices, por el teorema de los 4 vértices no puede ser convexa.

*iv)* Calcular los vértices de $\alpha$.

Calculamos la curvatura y su derivada. Tenemos que

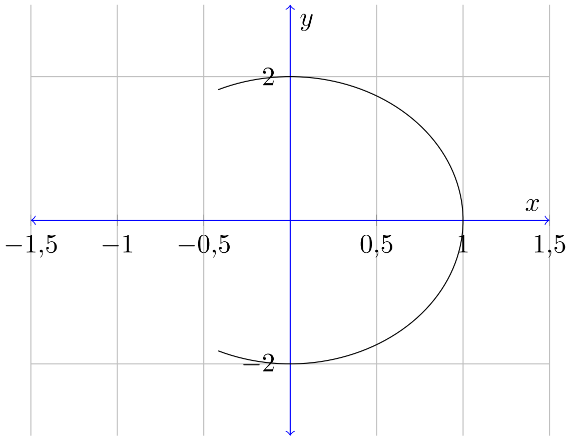
$$k_2'(t) = \frac{12 \operatorname{sen} t(\cos t - 2)}{(5 - 4\cos t)^{5/2}}$$

Tenemos ceros, y por lo tanto vértices, en $0, \pi$ y $2\pi$, es decir, en $(3, 0)$ y $(1, 0)$.

# Entrega 4

Andoni Latorre Galarraga

Problema:
Calcular un entorno tubular de la elipse $\alpha(t) = (\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$ en $[-2, 2]$.




Calculamos el vector normal a la curva en $\alpha(t)$.

$$\alpha'(t) = (-\,\text{sen}\, t, 2\cos t)$$

Y la recta normal a la curva en $\alpha(t)$.

$$\alpha(t) + \lambda \mathcal{J}\alpha'(t) = ((1 + 2\lambda)\cos t, (2 + \lambda)\,\text{sen}\, t)$$

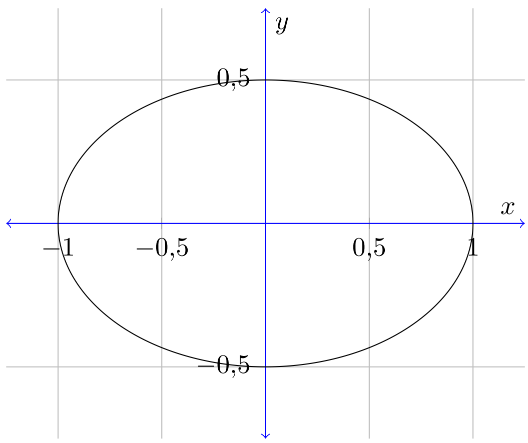
Intrescamos la recta con el eje $Y$.

$$(1 + 2\lambda)\cos t = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{2}$$

Tenemos que el punto de intersección es $(0, \frac{3}{2}\,\text{sen}\, t)$. Como $\frac{3}{2}\,\text{sen}\, t$ es creciente en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y decreciente en $[-2, 2] \setminus [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\varepsilon < \text{ínf} \left\| \alpha(t) - (0, \frac{3}{2}\,\text{sen}\, t) \right\| = \text{ínf} \sqrt{\cos^2 t + \frac{1}{4}\,\text{sen}^2\, t}$$

Que es la distancia al origen de un punto en la elipse $(\cos t, \frac{1}{2}\,\text{sen}\, t)$

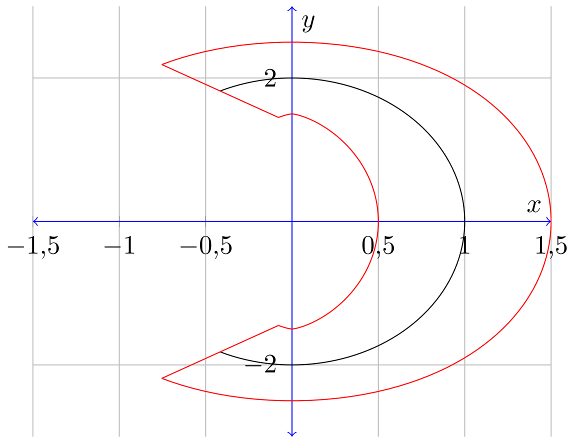



Por lo tanto, $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Ahora, para encontrar la frontera del entorno tublar

$$\lambda = \pm\frac{a}{2\,\|\alpha'(t)\|} = \pm\frac{1}{2\sqrt{\text{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}}$$

Y tenemos los extremos del entorno tubular

$$((1 + \tfrac{1}{\sqrt{\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t}})\cos t, (2 + \tfrac{1}{2\sqrt{\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t}})\,\text{sen}\, t)$$
$$((1 - \tfrac{1}{\sqrt{\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t}})\cos t, (2 - \tfrac{1}{2\sqrt{\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t}})\,\text{sen}\, t)$$




Dibujado sin distorsión: