Ejemplo 2.7

Andoni Latorre Galarraga

1. Método de interpolación

Construimos un polinomio de interpolación $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ que verifique las condiciones $p(-1) = f(-1), p(0) = f(0), p(1) = f(1), p''(-1) = f''(-1), p''(0) = f''(0), p''(1) = f''(1)$. Planteamos el siguiente sistema lineal para calcular los coeficientes a_i:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -20 & 12 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ f''(-1) \\ f''(0) \\ f''(1) \end{pmatrix}$$

Tras resolver el sistema, se tiene la fórmula de cuadratura

$$\mathcal{I}_5 = \int_{-1}^{1} p(x)dx = \sum_{k=0}^{5} \frac{a_k}{k+1}(1^{k+1} - (-1)^{k+1}) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4$$

2. Método directo

Plantemos el sistema,

$$\begin{array}{r|l} f(1) & \alpha_1 \\ f(0) & \alpha_0 \\ f(-1) & \alpha_{-1} \\ f''(1) & \beta_1 \\ f''(0) & \beta_0 \\ f''(-1) & \beta_{-1} \end{array} \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_0 + \alpha_{-1} = 2 \\ \alpha_1 - \alpha_{-1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_{-1} + 2\beta_1 + 2\beta_0 + 2\beta_{-1} = \frac{2}{3} \\ \alpha_1 - \alpha_{-1} + 6\beta_1 - 6\beta_{-1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_{-1} + 12\beta_1 + 12\beta_{-1} = \frac{2}{5} \\ \alpha_1 - \alpha_{-1} + 20\beta_1 - 20\beta_{-1} = 0 \end{cases}$$

Como este sistema no tiene solución única, podemos añadir una condición extra

$$\begin{array}{r|l} f(1) & \alpha_1 \\ f(0) & \alpha_0 \\ f(-1) & \alpha_{-1} \\ f''(1) & \beta_1 \\ f''(0) & \beta_0 \\ f''(-1) & \beta_{-1} \end{array} \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_0 + \alpha_{-1} = 2 \\ \alpha_1 - \alpha_{-1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_{-1} + 2\beta_1 + 2\beta_0 + 2\beta_{-1} = \frac{2}{3} \\ \alpha_1 - \alpha_{-1} + 6\beta_1 - 6\beta_{-1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_{-1} + 12\beta_1 + 12\beta_{-1} = \frac{2}{5} \\ \alpha_1 - \alpha_{-1} + 20\beta_1 - 20\beta_{-1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_{-1} + 30\beta_1 + 30\beta_{-1} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

El nuevo sistema tiene solución única

```
a = [1  1  1  0  0  0;
     1  0  -1  0  0  0;
     1  0  1  2  2  2;
     1  0  -1  6  0  -6;
     1  0  1  12  0  12;
     1  0  -1  20  0  -20;
     1  0  1  30  0  30]
b = [2;  0;  2/3;  0;  2/5;  0;  2/7]
a\b
```

```
ans =

0.2381
1.5238
0.2381
-0.0032
0.1016
-0.0032
```

Tenemos la fórmula de cuadratura

$$\mathcal{I}_6 = 0{,}2381f(1) + 1{,}5238f(0) + 0{,}2381f(-1) - 0{,}0032f''(1) + 0{,}1016f''(0) - 0{,}0032f''(-1)$$