Método Doolittle

Andoni Latorre Galarraga

Si tenemos la factorización LU,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Para obtener la primera fila de A multiplicamos la primera fila de L y la i-ésima columna de U, se tiene

$$a_{1i} = u_{1i}$$

Para obtener la segunda fila de A multiplicamos la segunda fila de L y la i-ésima columna de U, se tiene

$$a_{2i} = l_{21}u_{1i} + u_{2i} \quad u_{21} = a_{21} - l_{21}u_{i1}$$

En el caso $i = 1$, se tiene $a_{21} = l_{21}u_{11}$ y se obtiene $l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$.

$$\vdots$$

Para obtener la j-ésima fila de A multiplicamos la j-ésima fila de L y la i-ésima columna de U, se tiene

$j > i$:

$$a_{ji} = l_{j1}u_{1i} + l_{j2}u_{2i} + \cdots + l_{ji}u_{ii} \quad l_{ji} = \frac{a_{ji} - l_{j1}u_{1i} - l_{j2}u_{2i} - \cdots - l_{j,i-1}u_{i-1,i}}{u_{ii}}$$

$j \leq i$:

$$a_{ji} = l_{j1}u_{1i} + l_{j2}u_{2i} + \cdots + l_{j,j-1}u_{j-1,i} + u_{ji} \quad u_{ji} = a_{ji} - l_{j1}u_{1i} - l_{j2}u_{2i} - \cdots - l_{j,j-1}u_{j-1,i}$$

$$\vdots$$

Para obtener la última fila de A multiplicamos la última fila de L y la i-ésima columna de U, se tiene

$i \neq n$:

$$a_{ni} = l_{n1}u_{1i} + l_{n2}u_{2i} + \cdots + l_{ni}u_{ii} \quad l_{ni} = \frac{a_{ni} - l_{n1}u_{1i} - l_{n2}u_{2i} - \cdots - l_{n,i-1}u_{i-1,i}}{u_{ii}}$$

$i = n$:

$$a_{nn} = l_{n1}u_{1n} + l_{n2}u_{2n} + \cdots + l_{n,n-1}u_{n-1,i} + u_{nn} \quad u_{nn} = a_{nn} - l_{n1}u_{1n} - l_{n2}u_{2n} - \cdots - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$$

Para calcular el coste, vemos que primero se va desde $j = 1$ hasta $j = n$, se tiene $\sum_{j=1}^{n}$. Luego se va desde $i = 1$ hasta $i = j - 1$ y desde $i = j$ hasta $i = n$ por separado, se tiene, $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} + \sum_{i=j}^{n}\right)$. Se hacen $i - 1$ sumas y multiplicaciones dentro del for(L) y luego se hace una resta y una división, se tiene $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(im + is) + \sum_{i=j}^{n}\right)$. En el otro for($U$), se hacen $j - 1$ sumas y multiplicaciones y luego una resta, se tiene $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}(im + is) + \sum_{i=j}^{n}((j-1)m + js)\right)$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left((m+s)\sum_{i=1}^{j-1} i + (m+s)\sum_{i=j}^{n} j - \sum_{i=j}^{n} m\right) = \sum_{j=1}^{n}\left((m+s)\sum_{i=1}^{n} i - m(n-j+1)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left((m+s)\frac{n(n+1)}{2} - m(n-j+1) \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(m \left(\frac{n(n+1)}{2} + n - j + 1 \right) + s\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= m \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n - j + 1 \right) + s \sum_{j=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = m \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n^2+3n+2}{2} - j \right) + s\frac{n^3+n^2}{2}$$

$$= m \left(\frac{n^3+3n^2+2n}{2} - \sum_{j=1}^{n} j \right) + s\frac{n^3+n^2}{2} = m \left(\frac{n^3+3n^2+2n}{2} - \frac{n^2+n}{2} \right) + s\frac{n^3+n^2}{2}$$

$$= m\frac{n^3+2n^2+n}{2} + s\frac{n^3+n^2}{2}$$

El algoritmo hace $\frac{n^3+2n^2+n}{2}$ multiplicaciones y $\frac{n^3+n^2}{2}$ sumas. En total $\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$ operaciones.