Ejercicio 8

Andoni Latorre Galarraga

a)

Tenemos que $X^2+1-(Y^2+1)=X^2-Y^2 \in (X^2+1,Y^2+1)$. Pero $(X+Y)(X-Y)=X^2-Y^2$ y

$$\deg_X(X+Y)=\deg_X(X-Y)=\deg_Y(X+Y)=\deg_Y(X-Y)<\deg_X(X^2+1)=\deg_Y(Y^2+1)$$

$$\Rightarrow X+Y, X-Y \notin (X^2+1,Y^2+1)$$

b)

Veamos que $\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{(X^2+1,X^2Y)}$ es DI. Plantemos el homorfismo

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & \mathbb{R}[X,Y] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & X & \longmapsto & i \\ & Y & \longmapsto & 0 \\ & c\in\mathbb{R} & \mapsto & c \end{array}$$

Calculamos $\ker\varphi$. Sea $\varphi(f)=0$ si dividimos f entre Y tenmos que $f=gY+h$ con $\deg_Y(h)=0$ entonces $\varphi(f)=0\Rightarrow\varphi(h)=0$ pero $h\in\mathbb{R}[X]$ es tal que i es una raiz y por tanto $-i$ también. Es decir $h\in(X^2+1)$ ya que $(X+i)(X-i)=X^2+1$. Concluimos que $\ker\varphi=(X^2+1,Y)$. Ahora, veamos que $(X^2+1,Y)=(X^2+1,X^2Y)$. Sean $a,b\in\mathbb{R}[X,Y]$,

$$a(X^2+1)+bX^2Y=a(X^2+1)+b((X^2+1)Y-Y)=(a+bY)(X^2+1)-bY\in(X^2+1)-bY$$

$$a(X^2+1)+bY=a(X^2+1)+b((X^2+1)Y-X^2Y)=(a+bY)(X^2+1)-bX^2Y\in(X^2+1)-bY$$

Tenemos que $\frac{\mathbb{R}[X,Y]}{(X^2+1,X^2Y)}\simeq\varphi(\mathbb{R}[X,Y])\subseteq\mathbb{C}$ que concluye la prueba.