Entrega 8

Andoni Latorre Galarraga

Definiciones

Campo vectorial sobre una curva

Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva sobre una superficie $\mathcal{S}$, un campo vectorial sobre α es una aplicación $w : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Este campo se dice diferenciable si w es diferenciable y se dice tangente si satisface $w(t) \in T_{\alpha(t)}(\mathcal{S})$ para todo $t \in I$.

Derivada covariante de un campo sobre un curva

Si $w : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable sobre $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, con $\mathcal{S}$ superficie regular. Entonces, la derivada covariante de w es la componente tangencial de w'. Se escribe $\frac{Dw}{dt}$. Ademas, si N es un campo normal unitario de $\mathcal{S}$, la componente normal de w' es $w' \cdot N(\alpha)$ y se tiene que

$$\frac{Dw}{dt}(t) = w'(t) - \langle w', N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

Valor algebraico de la derivada covariante

Si $w : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable, tangente y unitario a lo largo de una curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ sobre una superficie orientada $\mathcal{S}$. Observamos que $\frac{Dw}{dt} \cdot N(\alpha(t)) = 0$ y $w(t) \cdot w'(t) = 0$, por ser la derivada covariante parte de $T_{\alpha(t)}(\mathcal{S})$ y por ser w unitario. Deducimos

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \lambda(t)(N(\alpha(t)) \wedge w(t))$$

Llamamos valor algebraico de la derivada covariante a $\lambda(t)$ y escribimos $\lambda(t) = \left[\frac{Dw}{dt}(t)\right]$.

Curvatura geodésica

Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco sobre una superficie regular orientada $\mathcal{S}$. Llamamos curvatura geodésica de α a $\left[\frac{D\alpha'}{dt}\right]$. Escribimos

$$\left[\frac{D\alpha'}{dt}(t)\right] = k_g(t)$$

Geodésica

Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva regular sobre una superficie regular orientada $\mathcal{S}$. Se dice que α es geodésica si

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = 0 \quad \forall t$$

Es decir α' es paralelo a lo largo de α.

Proposición:

Las geodésicas están parametrizadas por parámetro proporcional a la longitud de arco. Es decir, Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una geodésica. Entonces, $\|\alpha'\|$ es constante.

Dem:

Si no es constante $\|\alpha'(t)\|^2 = 2n(t)$. Derivando, $\alpha'\alpha'' = n'(t)$. Entonces, para algún t_0 se tiene $\alpha'\alpha'' \neq 0$. Como α' está en el espacio tangente, ahora es imposible que α'' tenga derivada covariante nula ya que tiene componente tangencial. Esto contradice que α sea geodésica y queda probada la proposición.

Proposición:

Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una isometría y α es geodésica en $\mathcal{S}$. Entonces, $f(\alpha)$ es geodésica sobre $f(\mathcal{S})$.

Dem:

Si $\alpha = \mathbb{X}(u,v)$ entonces $f(\alpha) = (f \circ \mathbb{X})(u,v)$ y se tiene

$$f(\alpha)' = (f \circ \mathbb{X})_u u' + (f \circ \mathbb{X})_v v'$$

$$f(\alpha)'' = (f \circ \mathbb{X})_{uu}(u')^2 + (f \circ \mathbb{X})_{uv}u'v' + (f \circ \mathbb{X})_u u'' + (f \circ \mathbb{X})_{vu}u'v' + (f \circ \mathbb{X})_{vv}(v')^2 + (f \circ \mathbb{X})_v v''$$

Por definición de los símbolos de Christoffel,

$$\begin{array}{rlcrl} f(\alpha)'' & = (f \circ \mathbb{X})_{uu}(u')^2 & & \frac{Df(\alpha)'}{dt} & = (\Gamma_{11}^1 (f \circ \mathbb{X})_u + \Gamma_{11}^2 (f \circ \mathbb{X})_v)(u')^2 \\ & +(f \circ \mathbb{X})_{uv}u'v' & & & +(\Gamma_{12}^1 (f \circ \mathbb{X})_u + \Gamma_{12}^2 (f \circ \mathbb{X})_v)u'v' \\ & +(f \circ \mathbb{X})_u u'' & \Rightarrow & & +(f \circ \mathbb{X})_u u'' \\ & +(f \circ \mathbb{X})_{vu}u'v' & & & +(\Gamma_{12}^1 (f \circ \mathbb{X})_u + \Gamma_{12}^2 (f \circ \mathbb{X})_v)u'v' \\ & +(f \circ \mathbb{X})_{vv}(v')^2 & & & +(\Gamma_{22}^1 (f \circ \mathbb{X})_u + \Gamma_{22}^2 (f \circ \mathbb{X})_v)(v')^2 \\ & +(f \circ \mathbb{X})_v v'' & & & +(f \circ \mathbb{X})_v v'' = \end{array}$$

$$\frac{Df(\alpha)'}{dt} = (f \circ \mathbb{X})_u \left(\Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + u'' + \Gamma_{22}^1 (v')^2\right) + (f \circ \mathbb{X})_v \left(\Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 + v''\right)$$

Como u y v satisfacen las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, la derivada covariante es nula y $f(\alpha)$ es geodésica.

Proposición:

Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva regular parametrizada por longitud de arco sobre una superficie regular orientada $\mathcal{S}$ Entonces, $k(s)^2 = k_n(s)^2 + k_g(s)^2$.

Dem:

Por definición de curvatura normal, $k_n = k(\mathbb{N} \cdot N)$ donde N es el vector normal a la superficie y $\mathbb{N}$ es el vector normal a la curva. Por ser α parametrizada por longitud de arco, $k\mathbb{N} = \alpha''$. Se tiene que $k_n = \alpha'' \cdot N$. Ahora, como α' es unitario $\frac{D\alpha'}{dt} = k_g(N \wedge \alpha')$.

$$\alpha'' = (\alpha'' \cdot N)N + k_g(N \wedge \alpha')$$

$$k\mathbb{N} = k_n N + k_g(N \wedge \alpha')$$

Tomado $\| \cdot \|^2$ a ambos lados se tiene $k^2 = k_n^2 + k_g^2$.