Tarea Modelización

Andoni Latorre Galarraga

1. Supongamos que tenemos identificado un producto por doce dígitos y queremos añadir a su derecha un dígito de control. Procederemos como sigue.

> *a)* Por un lado, las cifras que ocupan un lugar impar, empezando a contar por la izquierda, se multiplican por tres y se retiene la última cifra. Hecho esto, se suman los números obtenidos.
>
> *b)* Por otro, las cifras que ocupa un lugar par, empezando a contar por la izquierda, se multiplican por siete y se retiene la última cifra. Hecho esto, se suman los números obtenidos.
>
> *c)* Se suma el resultado del apartado *a)* y el del apartado *b)*. El dígito de control es la última cifra de este número.

Demostrar que este algoritmo detecta cualquier error de un único dígito.

¿Este algoritmo detecta el intercambio de dos cifras consecutivas?

En qué casos sí y en cuáles no.

Sea $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}$ el identificador del producto. Primero tomamos las cifras de posición impar $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}$. Las multiplicamos por 3: $3a_1, 3a_3, 3a_5, 3a_7, 3a_9, 3a_{11}$ y retenemos la última cifra $\text{mód}(3a_1, 10), \text{mód}(3a_3, 10), \text{mód}(3a_5, 10), \text{mód}(3a_7, 10), \text{mód}(3a_9, 10), \text{mód}(3a_{11}, 10)$. Finálmente sumamos.

$$a = \text{mód}(3a_1, 10) + \text{mód}(3a_3, 10) + \text{mód}(3a_5, 10) + \text{mód}(3a_7, 10) + \text{mód}(3a_9, 10) + \text{mód}(3a_{11}, 10)$$

Procedemos con las cifras pares.

$$b = \text{mód}(7a_2, 10) + \text{mód}(7a_4, 10) + \text{mód}(7a_6, 10) + \text{mód}(7a_8, 10) + \text{mód}(7a_{10}, 10) + \text{mód}(7a_{12}, 10)$$

Sumamos a y b y nos quedamos con la última cifra para obtener el dígito de control c.

$$c = \text{mód}(a + b, 10) =$$

$$= \text{mód}(\sum_{i=1}^{6} \text{mód}(3a_{2i-1}, 10) + \sum_{i=1}^{6} \text{mód}(7a_{2i}, 10), 10) =$$

$$= \text{mód}(\sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + \sum_{i=1}^{6} 7a_{2i}, 10) = \text{mód}(\sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10)$$

Supongamos ahora que se produce un error en el dígito a_k de tal manera que en vez de a_k tenemos $b_k \neq a_k$.

Caso 1: k es par. Supongamos que el dígito de control no ha cambiado

$$\text{mód}(\sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10) = \text{mód}(7b_k - 7a_k + \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i} \equiv_{10} 7b_k - 7a_k + \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}$$

$$\Rightarrow 0 \equiv_{10} 7b_k - 7a_k \rightarrow 7b_k \equiv_{10} 7a_k \Rightarrow 3 \cdot 7b_k \equiv_{10} 3 \cdot 7a_k \Rightarrow 21b_k \equiv_{10} 21a_k \Rightarrow 1b_k \equiv_{10} 1a_k$$

Pero $b_k \neq a_k$ y $0 \leq b_k, a_k \leq 9$, lo cual es contradictorio con $b_k \equiv_{10} a_k$.

Caso 2: k es impar. Supongamos que el dígito de control no ha cambiado

$$\text{mód}(\sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10) = \text{mód}(3b_k - 3a_k + \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i} \equiv_{10} 3b_k - 3a_k + \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}$$

$$\Rightarrow 0 \equiv_{10} 3b_k - 3a_k \to 3b_k \equiv_{10} 3a_k \Rightarrow 7 \cdot 3b_k \equiv_{10} 7 \cdot 3a_k \Rightarrow 21b_k \equiv_{10} 21a_k \Rightarrow 1b_k \equiv_{10} 1a_k$$

Pero $b_k \neq a_k$ y $0 \leq b_k, a_k \leq 9$, lo cual es contradictorio con $b_k \equiv_{10} a_k$.

Veamos que ocurre si intercambiamos dos cifras consecutivas a_{2k} y a_{2k-1} con $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Veamos que tiene que ocurrir para que se mantenga c.

$$\text{mód}(\sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10) = \text{mód}(3a_{2k} + 7a_{2k-1} - 7a_{2k} - 3a_{2k-1} + \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10)$$

$$\Leftrightarrow 0 \equiv_{10} 3a_{2k} + 7a_{2k-1} - 7a_{2k} - 3a_{2k-1} \Leftrightarrow 7a_{2k} - 3a_{2k} \equiv_{10} 7a_{2k-1} - 3a_{2k-1} \Leftrightarrow 4a_{2k} \equiv_{10} 4a_{2k-1}$$

En este punto podemos concluir que en ocasiones no va a detectar el cambio de cifras consecutivas ya que 4 y 10 no son coprimos. Estudiemos la función $\text{mód}(4x, 10)$ para saber en que casos detecta y en cuales no.

x	$\text{mód}(4x, 10)$
0	0
1	4
2	8
3	2
4	6
5	0
6	4
7	8
8	2
9	6

No detecta el intercambio de dos dígitos consecutivos cuando estos distan en 5 es decir:

cambiar 0 y 5,
cambiar 1 y 6,
cambiar 2 y 7,
cambiar 3 y 8,
cambiar 4 y 9.

No es casualidad que sean aquellos que distan por 5.

$$4x \equiv_{10} 4x - 0 \equiv_{10} 4x - 20 \equiv_{10} 4(x-5)$$

Veamos ahora que ocurre si cambiamos c y a_{12}. Supongamos que no se detecta el cambio

$$\text{mód}(\sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10) = \text{mód}(7c - 7a_{12} + \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}, 10)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i} \equiv_{10} 7c - 7a_{12} + \sum_{i=1}^{6} 3a_{2i-1} + 7a_{2i}$$

$$\Leftrightarrow 0 \equiv_{10} 7c - 7a_{12} \Leftrightarrow 7a_{12} \equiv_{10} 7c \Leftrightarrow 3 \cdot 7a_{12} \equiv_{10} 3 \cdot 7c \Leftrightarrow a_{12} \equiv_{10} c \underset{\substack{\uparrow \\ a_{12}, c \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}}{\Leftrightarrow} a_{12} = c$$

Es decir, la única manera de de que no se detecte el intercambio es que $a_{12} = c$, que no es realmente un intercambio. El algoritmo detecta cabiar la última cifra del identificador del producto con el dígito de control.

Bonus: Estudiamos la "simetría" del dígito de control.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \tilde{c} & b_{12} & b_{11} & b_{10} & b_9 & b_8 & b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{array}$$

$$\tilde{c} \equiv_{10} \sum_{i=1}^{6} 3b_{2i-1} + 7b_{2i} \equiv_{10}$$

$$\equiv_{10} 3c + 7a_{12} + 3a_{11} + 7a_{10} + 3a_9 + 7a_8 + 3a_7 + 7a_6 + 3a_5 + 7a_4 + 3a_3 + 7a_2$$

$$\equiv_{10} 3c + 7a_{12} + 3a_{11} + 7a_{10} + 3a_9 + 7a_8 + 3a_7 + 7a_6 + 3a_5 + 7a_4 + 3a_3 + 7a_2 + 3a_1 - 3a_1 \equiv_{10}$$

$$\equiv_{10} 3c + c - 3a_1 \equiv_{10} 4c - 3a_1 \equiv_{10}$$

$$\tilde{c} \equiv_{10} 4c - 3a_1 \Rightarrow a_1 \equiv_{10} 4c - 3a_1 \Rightarrow 4a_1 \equiv_{10} 4c$$

Que no es necesariamente cierto 0000000000031 pero 1300000000004. Los casos en los que el código es simétrico son similares a los del intercambio de digitos consecutivos, por ejemplo: 7000000000032 y 2300000000007 ya que $7 - 2 = 5$.

```
>>> def f(s):
        ss = 0
        for i in range(0,6):
                ss += 7*int(s[2*i+1]) + 3*int(s[2*i])
            return int(ss) % 10

>>> f('000000000003')
1
>>> f('130000000000')
4
>>> f('700000000003')
2
>>> f('230000000000')
7
```

2. Se solicita a cuatro pintores, Ander, Beñat, Carlos y David, que presenten a concurso un cuadro y el mejor lo comprará el ayuntamiento. Se acuerda que sean ellos mismos quienes valoren las obras. Entre ellos acuerdan que cada uno se valore así mismo y a otros dos, pero que todos se den así mismo un punto. Una vez hechas las puntuaciones, la valoración final de cada obra es proporcional a la suma de las puntuaciones obtenidas, cada una de ellas ponderada por la valoración que tendrá quien la haya otorgado.

El resultado de las votaciones de cada uno a otros dos es el siguiente.

Ander da 4 puntos a Beñat y 6 a David.
Beñat da 6 puntos a Ander y 8 a Carlos.
Carlos da 7 puntos a Beñat y 7 a David.
David da 5 a Ander y 3 a Carlos.

¿Cuál es el resultado final?

NOTA. Llegar al resultado de dos formas. Presentar las cuentas a mano, no se valorará si solo presentan los resultados, tanto los finales como los intermedios, aunque sean correctos.

Sean a, b, c, d las puntuaciones de Ander, Beñat, Carlos y David respectivamente. Tenemos el siguente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a & = & k(1a & + & 6b & + & 0c & + & 5d) \\ b & = & k(4a & + & 1b & + & 7c & + & 0d) \\ c & = & k(0a & + & 8b & + & 1c & + & 3d) \\ d & = & k(6a & + & 0b & + & 7c & + & 1d) \end{array} \right. \Leftrightarrow 1/k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Es decir $1/k$ es un valor propio de la matriz cuadrada. Calculamos su polinomi característico

$$\begin{vmatrix} 1-x & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 1-x & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 1-x & 3 \\ 6 & 0 & 7 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 7 & 0 \\ 8 & 1-x & 3 \\ 0 & 7 & 1-x \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1-x & 3 \\ 6 & 7 & 1-x \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 1-x & 7 \\ 0 & 8 & 1-x \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\left((1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 7 & 1-x \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix}\right)$$

$$-6\left(4\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 7 & 1-x \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 1-x \end{vmatrix}\right)$$

$$-5\left(4\begin{vmatrix} 8 & 1-x \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1-x & 7 \\ 8 & 1-x \end{vmatrix}\right) =$$

$$= (1-x)\left((1-x)((1-x)^2-21) - 7(8(1-x))\right) - 6\left(4((1-x)^2-21) - 7(-18)\right) - 5\left(4(56) + 6((1-x)^2-56)\right)$$

Haciendo el cambio de variable $t = 1-x$

$$= t(t(t^2-21) - 7(8t)) - 6(4(t^2-21) - 7(-18)) - 5(4(56) + 6(t^2-56)) = t^4 - 131t^2 + 308$$

$$t^2 = \frac{131 \pm \sqrt{15929}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{131 \pm \sqrt{15929}}{2}}$$

Coomo

$$\sqrt{\frac{131 + \sqrt{15929}}{2}} = 11{,}34 \quad \sqrt{\frac{131 + \sqrt{15929}}{2}} = 1{,}54$$

Los valores propios positivos son

$$\sqrt{\frac{131 + \sqrt{15929}}{2}} = 12{,}34 = \frac{1}{k_1} \quad 1 + \sqrt{\frac{131 + \sqrt{15929}}{2}} = 2{,}54 = \frac{1}{k_2}$$

Con k_1:

$$\begin{cases} 12{,}34a = 1a + 6b + 0c + 5d \\ 12{,}34b = 4a + 1b + 7c + 0d \\ 12{,}34c = 0a + 8b + 1c + 3d \\ 12{,}34d = 6a + 0b + 7c + 1d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 11{,}34a + 6b + 0c + 5d \\ 0 = 4a + 11{,}34b + 7c + 0d \\ 0 = 0a + 8b + 11{,}34c + 3d \\ 0 = 6a + 0b + 7c + 11{,}34d \end{cases}$$

Si iteramos unas cuantas veces con el método de Jacobi

$$v^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0{,}881 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}881 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}881 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}881 \end{pmatrix} \left(- \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} v^{(k)} \right)$$

```
>>> import numpy as np
>>> D = np.array([[-0.881, 0, 0, 0], [0, -0.881, 0, 0], [0, 0, -0.881, 0]
>>> v = np.array([[1],[1],[1],[1]])
>>> R = np.array([[ 0 , 6 , 0 , 5], [ 4 , 0 , 7 , 0], [ 0 , 8 , 0 , 3], [
>>> for k in range(15):
        v = np.dot(D, np.dot(-1*R,v))
        print(v.T)


[[ 9.691  9.691  9.691 11.453]]
[[101.677091  93.915481  98.572447 110.991023]]
[[ 985.35268888  966.20634933  955.26558388 1145.36138368]]
[[10152.68365766  9363.50573139  9837.01248715 11099.69716919]]
[[ 98389.65732641  96442.91321787  95330.48801299 114331.94182267]]
[[1013429.44299852  934628.27199437  981908.97459686 1107990.8482035 ]]
[[ 9821144.7320987   9626758.00346566  9515679.87281821 11412420.68202906
[[1.01158756e+08 9.32929118e+07 9.80124183e+07 1.10597769e+08]]
[[9.80329504e+08 9.60926039e+08 9.49838345e+08 1.13916777e+09]]
[[1.00974891e+10 9.31233425e+09 9.78342713e+09 1.10396748e+10]]
[[9.78547665e+10 9.59179466e+10 9.48111924e+10 1.13709722e+11]]
[[1.00791359e+12 9.29540820e+11 9.76564483e+11 1.10196092e+12]]
[[9.76769062e+12 9.57436067e+12 9.46388641e+12 1.13503044e+13]]
[[1.00608161e+14 9.27851292e+13 9.74789486e+13 1.09995800e+14]]
[[9.74993693e+14 9.55695837e+14 9.44668491e+14 1.13296742e+15]]
```

Como el vector propio tiene el mismo signo en todas los componentes continuamos. El ganador es David ya que es el mayor el valor absoluto.

1. D
2. A
3. B
4. C