Seminario 3

Andoni Latorre Galarraga

a)

Veamos que ocurre en el caso $n = 1$. Si tenemos en cuenta Einsestein con $p = a_1$,

$$\mathrm{Irr}(\sqrt{a_1})\mathbb{Q}) = x^2 - a_1$$

Y tenemos que $|\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}) : \mathbb{Q}| = 2$. Para aplicar inducción, por el teorema del grado, tenemos que

$$|\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{n-1}})(\sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}| =$$

$$= |\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{n-1}}) : \mathbb{Q}| \cdot |\mathbb{Q}(\sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{n-1}})| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hipótesis de inducción}}}{=}$$

$$= 2^{n-1} \cdot |\mathbb{Q}(\sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{n-1}})|$$

Veamos ahora que $|\mathbb{Q}(\sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{n-1}})| = 2$. Por una parte es menor o igual que 2 ya que $\sqrt{a_n}$ es raiz de $x^2 - a_n$. Por otra parte, no es 1 ya que $\sqrt{a_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{n-1}})$. Cocluimos que

$$|\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_n}) : \mathbb{Q}| = 2^{n-1}2 = 2^n$$

b)

Veamos que ocurre con $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$.

$$|\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}) : \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}| =$$

$$= |\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}| \cdot |\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})| =$$

$$= 2^2 \cdot |\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})|$$

Como $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{6}$, deducimos $|\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})| = 1$

$$|\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}) : \mathbb{Q}| = 2^2 \cdot 1 = 2^2 \neq 2^3$$

c)

$$|\mathbb{Q}(p, \sqrt{p}) : \mathbb{Q}| = |\underbrace{\mathbb{Q}(p)}_{\substack{=\mathbb{Q} \\ \uparrow \\ p \in \mathbb{Q}}}(\sqrt{p}) : \mathbb{Q} = |\mathbb{Q}(\sqrt{p}) : \mathbb{Q}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a)}}}{=} 2 < \infty$$

d)

Como $E \subseteq F$ y $|F : \mathbb{Q}| = 2$,

$$|E : \mathbb{Q}| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |E : \mathbb{Q}| \in \{1, 2\} = \{2^0, 2^1\}$$