Tercer Seminario de Álgebra II

Andoni Latorre Galarraga

5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:

$$|\lambda I_9 - A| = \lambda^9 - 9\lambda^8 + 36\lambda^7 - 84\lambda^6 + 126\lambda^5 - 126\lambda^4 + 84\lambda^3 - 36\lambda^2 + 9\lambda - 1 = (\lambda - 1)^9$$

Se tiene que 1 es la única raiz con multiplicidad de 9.
Calculamos el primer subespacios propios generalizado:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I_9 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - \frac{3x_9}{2} \\ x_2 \\ \frac{x_9}{2} - x_2 \\ x_4 \\ -x_9 \\ \frac{x_9}{2} \\ x_7 \\ \frac{-x_9}{2} \\ x_9 \end{pmatrix}$$

El subespacio es de de dimensión 4, y como la multiplicidad es 9 tenemos que calcular el segundo subespacio:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I_9 \right)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 - x_8 \\ x_4 \\ x_5 \\ -x_8 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

El subespacio es de de dimensión 7, y como la multiplicidad es 9 tenemos que calcular el tercer subespacio:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I_9 \right)^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos:

$$\begin{array}{l|ll} V_3(1) \text{ dimensión } 9 & v_1 & v_2 \\ V_2(1) \text{ dimensión } 7 & & \\ V_1(1) \text{ dimensión } 4 & & \end{array}$$

Donde donde $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}$ es base de $V_3(1)/V_2(1)$. Completamos la una base de $V_2(1)$ a una de $V_3(1)$ de manera que $v_1 \notin V_2(1)$ y $v_2 \notin V_2(1)+ < v_1 >$.

$$\beta_{V_2(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Podemos completar con:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\begin{array}{r|cc} V_3(1) \text{ dimensión } 9 & (0,0,0,0,0,1,0,1,0) & (0,1,1,0,0,0,0,0,0) \\ V_2(1) \text{ dimensión } 7 & (A-I_9)v_1 & (A-I_9)v_2 \\ V_1(1) \text{ dimensión } 4 & (A-I_9)((A-I_9)v_1) & (A-I_9)((A-I_9)v_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cc} V_3(1) \text{ dimensión } 9 & (0,0,0,0,0,1,0,1,0) & (0,1,1,0,0,0,0,0,0) \\ V_2(1) \text{ dimensión } 7 & (0,-1,1,4,2,0,2,0,0) & (5,-3,3,0,0,0,0,0,0) \\ V_1(1) \text{ dimensión } 4 & (-1,1,-1,2,0,0,0,0,0) & (2,-2,2,0,0,0,0,0,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccc} V_3(1) \text{ dimensión } 9 & (0,0,0,0,0,1,0,1,0) & (0,1,1,0,0,0,0,0,0) & \\ V_2(1) \text{ dimensión } 7 & (0,-1,1,4,2,0,2,0,0) & (5,-3,3,0,0,0,0,0,0) & (0,0,0,0,0,0,0,0,1) \\ V_1(1) \text{ dimensión } 4 & (-1,1,-1,2,0,0,0,0,0) & (2,-2,2,0,0,0,0,0,0) & (1,-1,1,1,0,0,1,0,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} V_3(1) \text{ dimensión } 9 & (0,0,0,0,0,1,0,1,0) & (0,1,1,0,0,0,0,0,0) & & \\ V_2(1) \text{ dimensión } 7 & (0,-1,1,4,2,0,2,0,0) & (5,-3,3,0,0,0,0,0,0) & (0,0,0,0,0,0,0,0,1) & \\ V_1(1) \text{ dimensión } 4 & (-1,1,-1,2,0,0,0,0,0) & (2,-2,2,0,0,0,0,0,0) & (1,-1,1,1,0,0,1,0,0) & (-1,0,\frac{1}{2},0,-1,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{2},1) \end{array}$$

Los bloques de Jordan deverían de tener tamaño $3,3,2,1$. Se tiene que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 & 7/8 & 0 & -7/8 & 0 \\ -3/4 & -5/8 & 5/8 & 1/4 & -3/8 & -23/16 & -3/4 & 23/16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{J}$$

Con los bloques de Jordan de tamaño $3,3,2,1$ que se esperaban.

8. a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

El determinante es diferente por lo que no son semejantes. Ya que, A y B semejantes $\Rightarrow$ det(A) = det(B).

b) Veamos que ambass matrices tienen la misma forma canónica de Jordan.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3(\lambda-2)$$

$$dim\left(ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + I_4\right)\right) = 1$$

$$dim\left(ker\left(\left(\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + I_4\right)^2\right)\right) = 2$$

$$dim\left(ker\left(\left(\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + I_4\right)^3\right)\right) = 3$$

$$dim\left(ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2I_4\right)\right) = 1$$

Por lo que la forma canónica de Jordan es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora la otra matriz,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & +1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3(\lambda-2)$$

$$dim\left(ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + I_4\right)\right) = 1$$

$$dim\left(ker\left(\left(\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + I_4\right)^2\right)\right) = 2$$

$$dim\left(ker\left(\left(\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + I_4\right)^3\right)\right) = 3$$

$$dim\left(ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2I_4\right)\right) = 1$$

Por lo que la forma canónica de Jordan es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Que son la misma y por lo tanto son semejantes.