Entrega 1

Andoni Latorre Galarraga

Conceptos

Topología

Una topología $\tau_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ sobre un conjunto X es un subconjunto del conjunto potencia de X que cumple las siguentes propiedades,

$$\begin{array}{ll} i) & \{\emptyset, X\} \subseteq \tau_X \\ ii) & \forall \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_X, \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau_x \\ iii) & \forall \sigma \subseteq \tau_x, \quad \bigcup_{\mathcal{U}\in\sigma} \mathcal{U} \in \tau_X \end{array}$$

Espacio topológico

Un espacio topológico es un par ordenado (X, τ_X) donde X es un conjunto y τ_X es una topología sobre X.

T_2 (de Hausdorff)

Un espacio topológico (X, τ_X) se dice T_2 si

$$\forall a, b \in X \text{ con } a \neq b,\ \exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_X \ :\ a \in \mathcal{U}, b \in \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$$

, es decir, todo par de puntos distintos se puede separar por abiertos disjuntos.

Compacto

Un espacio topológico (X, τ_X) se dice compacto si

$$\forall \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_X \ :\ \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i = X \quad , \exists J \subseteq I \ :\ |J| \leq \infty, \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j = X$$

, es decir, todo recubrimiento por abiertos de X tiene un subrecubrimiento finito.

Aplicación continua

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si

$$\forall \mathcal{U} \in \tau_Y, f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$$

, es decir, la antiimagen de cualquier abierto es un abierto.

Aplicación topologicamente cerrada

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es cerrada si

$$\forall \mathcal{U} \in \tau_x, \quad f(\mathcal{U}^c)^c \in \tau_Y$$

, es decir, la imagen de todo cerrado es un cerrado.

Homeomorfismo

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es un homeomorfismo si es continua, biyectiva y su inversa es continua.

Homeomorfo

Los espacios topológicos (X, τ_x) y (Y, τ_Y) se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$.

Identificación

Se dice que la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una identificación si es sobreyectiva y $\mathcal{U} \in \tau_Y \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) \in \tau_X$.

Cociente

Dada una aplicacón sobreyectiva $f : (X, \tau_X) \longleftarrow Y$ se define la topología cociente sobre Y como:

$$\tau_Y = \{\mathcal{V} \subseteq Y \ :\ f^{-1}(\mathcal{V}) \in \tau_X\}$$

Entrega 2

Andoni Latorre Galarraga

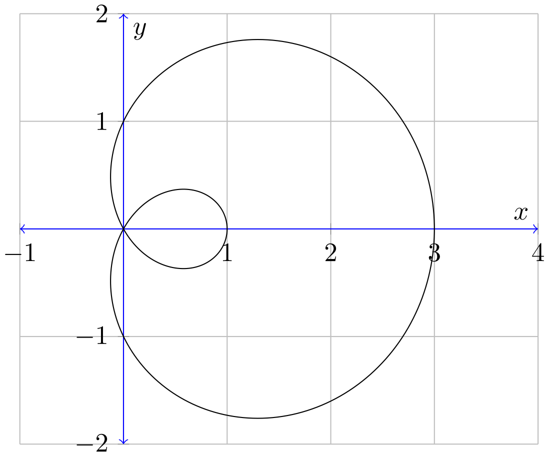
Proposición:
Sean $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos elevaciones de una aplicación continua $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$, donde X es un espacio topológico conexo, entonces $\exists k \in \mathbb{Z} \ : \ \tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_1 = 2k\pi$.

Dem:
Por ser $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$ elevaciones de Φ, tenemos que $\Phi = exp \circ \tilde{\Phi}_1 = exp \circ \tilde{\Phi}_2$. Por la periodicidad de exp, tenemos que $\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2 = 2\pi k(x)$ donde $k : X \to \mathbb{Z}$. Como X es conexo, $(\frac{\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2}{2\pi})(X) = k(X)$ es conexo ya que $\frac{\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2}{2\pi}(x) = k(x)$ es continua. Pero los únicos conexos en $\mathbb{Z}$ son los puntos por lo tanto, k es contante.

Entrega 3

Andoni Latorre Galarraga

Problema:
Sea $\alpha : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (2\cos t - 1)(\cos t, \operatorname{sen} t)$.
i) Representar $\alpha([0,2\pi])$.



ii) ¿Es α simple?
No es simple por no ser inyectiva. $\alpha(\frac{\pi}{3}) = \alpha(\frac{5\pi}{3}) = (0,0)$.
iii) ¿Es α convexa?
No es convexa, evidentemente la recta tangente en $\alpha(0)$ que es $x=1$ corta la curva en otros dos puntos. Además veremos que solo tiene 2 vértices, por el teorema de los 4 vértices no puede ser convexa.
iv) Calcular los vértices de α.
Calculamos la curvatura y su derivada.

$$\alpha(t) = ((2\cos t - 1)\cos t, (2\cos t - 1)\operatorname{sen} t)$$

$$\alpha'(t) = (-2\operatorname{sen} t\cos t - (2\cos t - 1)\operatorname{sen} t, -2\operatorname{sen} t\operatorname{sen} t + (2\cos t - 1)\cos t) =$$
$$= (\operatorname{sen} t - 4\cos t\operatorname{sen} t, 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t)$$

$$\alpha''(t) = (\cos t - 4(-\operatorname{sen} t\operatorname{sen} t + \cos t\cos t), 2(-2\cos t\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} t\cos t) + \operatorname{sen} t) =$$
$$= (\cos t + 4(\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t), \operatorname{sen} t(1 - 8\cos t))$$

$$k_2(t) = \frac{\alpha''(t)\cdot\mathcal{J}\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} =$$

$$= \frac{(\cos t + 4(\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t), \operatorname{sen} t(1-8\cos t))\cdot\mathcal{J}(\operatorname{sen} t - 4\cos t\operatorname{sen} t, 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t)}{\|(\operatorname{sen} t - 4\cos t\operatorname{sen} t, 2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t)\|^3} =$$

$$= \frac{-(\cos t + 4(\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t))(2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t) + (\operatorname{sen} t - 8\operatorname{sen} t\cos t)(\operatorname{sen} t - 4\cos t\operatorname{sen} t)}{\left(\sqrt{(\operatorname{sen} t - 4\cos t\operatorname{sen} t)^2 + (2(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) - \cos t)^2}\right)^3} =$$

Abreviamos $s = \operatorname{sen} t$ y $c = \cos t$

$$= \frac{-(c + 4(s^2 - c^2))(2(c^2 - s^2) - c) + (s - 8sc)(s - 4cs)}{(\sqrt{(s-4cs)^2 + (2(c^2 - s^2) - c)^2})^3} =$$

Sustituimos $s^2 = 1 - c^2$

$$= \frac{-(c + 4(1 - c^2 - c^2))(2(c^2 - (1 - c^2)) - c) + (s - 8sc)(s - 4cs)}{(\sqrt{(s-4cs)^2 + (2(c^2 - (1-c^2)) - c)^2})^3} =$$

$$= \frac{-(c + 4(1 - c^2 - c^2))(2(c^2 - 1 + c^2) - c) + (s - 8sc)(s - 4cs)}{(\sqrt{(s-4cs)^2 + (2(c^2 - 1 + c^2) - c)^2})^3} =$$

$$= \frac{-(c+4(1-2c^2))(2(2c^2-1)-c)+(s-8sc)(s-4cs)}{(\sqrt{(s-4cs)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{-(c+4-8c^2)(4c^2-2-c)+(s-8sc)(s-4cs)}{(\sqrt{(s-4cs)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{-(c+4-8c^2)(4c^2-2-c)+s^2(1-8c)(1-4c)}{(\sqrt{(s-4cs)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{-(c+4-8c^2)(4c^2-2-c)+(1-c^2)(1-8c)(1-4c)}{(\sqrt{(s-4cs)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{-(c+4-8c^2)(4c^2-2-c)-32c^4+12c^3+31c^2-12c+1}{(\sqrt{(s-4cs)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{-(-32c^4+12c^3+31c^2-6c-8)+-32c^4+12c^3+31c^2-12c+1}{(\sqrt{(s-4cs)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{9-6c}{(\sqrt{(s-4cs)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{9-6c}{(\sqrt{s^2(1-4c)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{9-6c}{(\sqrt{(1-c^2)(1-4c)^2+(2(2c^2-1)-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{9-6c}{(\sqrt{(1-c^2)(1-8c+16c^2)+(4c^2-2-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{9-6c}{(\sqrt{-16c^4+8c^3+15c^2-8c+1+(4c^2-2-c)^2})^3} =$$

$$= \frac{9-6c}{(\sqrt{-16c^4+8c^3+15c^2-8c+1+16c^4-8c^3-15c^2+4c+4})^3} =$$

$$= \frac{9-6c}{(\sqrt{5-4c})^3} =$$

$$= \frac{9-6\cos t}{(5-4\cos t)^{3/2}}$$

Derivamos

$$k_2'(t) = -\frac{(9-6\cos t)((5-4\cos t)^{3/2})'-(9-6\cos t)'((5-4\cos t)^{3/2})}{(5-4\cos t)^3}$$

$$= -\frac{(9-6\cos t)\frac{3}{2}(5-4\cos t)^{1/2}(4\operatorname{sen} t)-6\operatorname{sen} t(5-4\cos t)^{3/2}}{(5-4\cos t)^3} =$$

$$= -\frac{(5-4\cos t)^{1/2}((9-6\cos t)\frac{3}{2}(4\operatorname{sen} t)-6\operatorname{sen} t(5-4\cos t))}{(5-4\cos t)^3} =$$

$$= -\frac{(9-6\cos t)(6\operatorname{sen} t)-6\operatorname{sen} t(5-4\cos t)}{(5-4\cos t)^{5/2}} =$$

$$= -\frac{6\operatorname{sen} t(9-6\cos t-5+4\cos t)}{(5-4\cos t)^{5/2}} =$$

$$= -\frac{6\operatorname{sen} t(4-2\cos t)}{(5-4\cos t)^{5/2}} =$$

$$= \frac{12\operatorname{sen} t(\cos t-2)}{(5-4\cos t)^{5/2}}$$

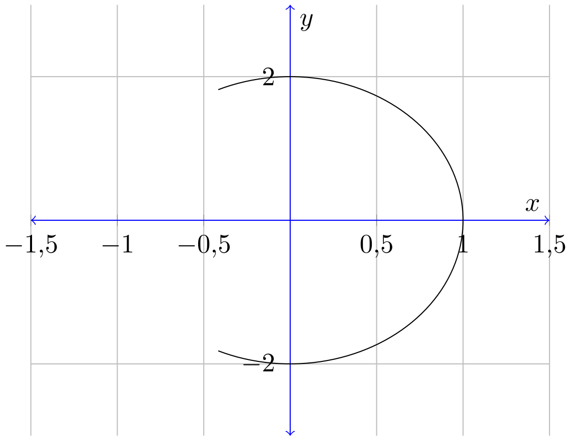
Tenemos ceros, y por lo tanto vértices, en $0, \pi$ y 2π, es decir, en $(3, 0)$ y $(1, 0)$.

Entrega 4

Andoni Latorre Galarraga

Problema:

Calcular un entorno tubular de la elipse $\alpha(t) = (\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$ en $[-2, 2]$.



Calculamos el vector normal a la curva en $\alpha(t)$.

$$\alpha'(t) = (-\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)$$

Y la recta normal a la curva en $\alpha(t)$.

$$\alpha(t) + \lambda \mathcal{J}\alpha'(t) = ((1+2\lambda)\cos t, (2+\lambda)\,\mathrm{sen}\, t)$$

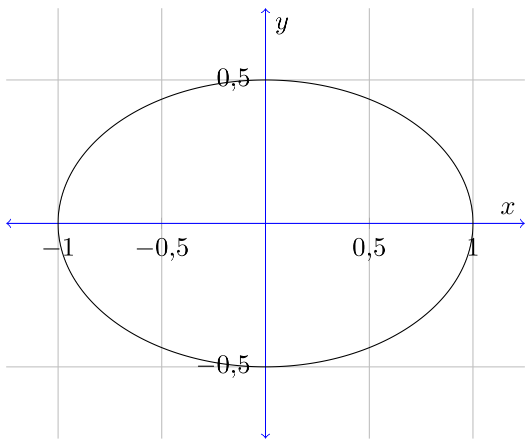
Intrescamos la recta con el eje Y.

$$(1+2\lambda)\cos t = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{2}$$

Tenemos que el punto de intersección es $(0, \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\, t)$. Como $\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\, t$ es creciente en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y decreciente en $[-2, 2] \setminus [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\varepsilon < \mathrm{ínf} \left\| \alpha(t) - (0, \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\, t) \right\| = \mathrm{ínf} \sqrt{\cos^2 t + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^2\, t}$$

Que es la distancia al origen de un punto en la elipse $(\cos t, \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, t)$

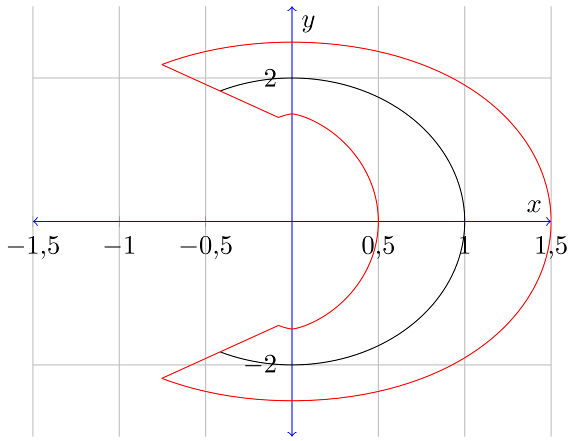


Por lo tanto, $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Ahora, para encontrar la frontera del entorno tublar

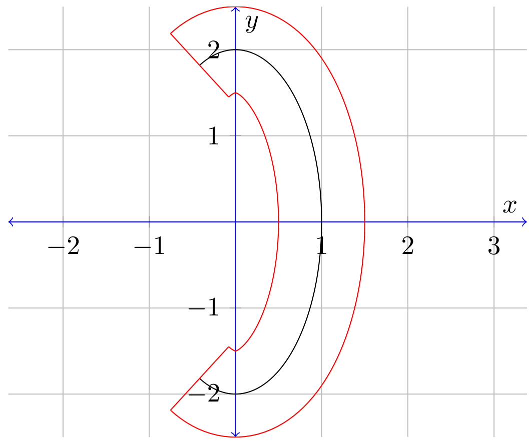
$$\lambda = \pm\frac{1}{2\left\|\alpha'(t)\right\|} = \pm\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}}$$

Y tenemos los extremos del entorno tubular

$$((1 + \tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}})\cos t, (2 + \tfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}})\,\mathrm{sen}\, t)$$
$$((1 - \tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}})\cos t, (2 - \tfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t}})\,\mathrm{sen}\, t)$$



Dibujado sin distorsión:



Entrega 5

Andoni Latorre Galarraga

Problema:

Probar que, si $\mathbb{X} : \mathcal{U} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{X}(\mathcal{U}) \subset S$, tal que $F = 0$, entonces

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right]$$

Solución:

Por definición de los símbolos de Christoffel

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{uu} = \Gamma^1_{11}\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{11}\mathbb{X}_v + eN \\ \mathbb{X}_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{12}\mathbb{X}_v + fN \\ \mathbb{X}_{vv} = \Gamma^1_{22}\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{22}\mathbb{X}_v + gN \end{cases}$$

Como $F = 0$, $\mathbb{X}_u\mathbb{X}_v = 0$. Despejamos los 6 símbolos de Christoffel.

$$\mathbb{X}_u\mathbb{X}_{uu} = \Gamma^1_{11}\mathbb{X}_u\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{11}\mathbb{X}_u\mathbb{X}_v + e\mathbb{X}_uN$$
$$\mathbb{X}_u\mathbb{X}_{uu} = \Gamma^1_{11}E$$

$$\mathbb{X}_u\mathbb{X}_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbb{X}_u\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{12}\mathbb{X}_u\mathbb{X}_v + f\mathbb{X}_uN$$
$$\mathbb{X}_u\mathbb{X}_{uv} = \Gamma^1_{12}E$$

$$\mathbb{X}_u\mathbb{X}_{vv} = \Gamma^1_{22}\mathbb{X}_u\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{22}\mathbb{X}_u\mathbb{X}_v + g\mathbb{X}_uN$$
$$\mathbb{X}_u\mathbb{X}_{vv} = \Gamma^1_{22}E$$

$$\mathbb{X}_v\mathbb{X}_{uu} = \Gamma^1_{11}\mathbb{X}_v\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{11}\mathbb{X}_v\mathbb{X}_v + e\mathbb{X}_uN$$
$$\mathbb{X}_v\mathbb{X}_{uu} = \Gamma^2_{11}G$$

$$\mathbb{X}_v\mathbb{X}_{uv} = \Gamma^1_{12}\mathbb{X}_v\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{12}\mathbb{X}_v\mathbb{X}_v + f\mathbb{X}_vN$$
$$\mathbb{X}_v\mathbb{X}_{uv} = \Gamma^2_{12}G$$

$$\mathbb{X}_v\mathbb{X}_{vv} = \Gamma^1_{22}\mathbb{X}_v\mathbb{X}_u + \Gamma^2_{22}\mathbb{X}_v\mathbb{X}_v + g\mathbb{X}_vN$$
$$\mathbb{X}_v\mathbb{X}_{vv} = \Gamma^2_{22}G$$

Ahora observamos que

$$(\mathbb{X}_u\mathbb{X}_u)_u = \mathbb{X}_u\mathbb{X}_{uu} + \mathbb{X}_{uu}\mathbb{X}_u = 2\mathbb{X}_{uu}\mathbb{X}_u$$
$$E_u = 2\mathbb{X}_{uu}\mathbb{X}_u$$

$$(\mathbb{X}_u\mathbb{X}_u)_v = \mathbb{X}_u\mathbb{X}_{uv} + \mathbb{X}_{uv}\mathbb{X}_u = 2\mathbb{X}_{uv}\mathbb{X}_u$$
$$E_v = 2\mathbb{X}_{uv}\mathbb{X}_u$$

$$(\mathbb{X}_v\mathbb{X}_v)_u = \mathbb{X}_v\mathbb{X}_{vu} + \mathbb{X}_{vu}\mathbb{X}_v = 2\mathbb{X}_{vu}\mathbb{X}_v$$
$$G_u = 2\mathbb{X}_{vu}\mathbb{X}_v$$

$$(\mathbb{X}_v\mathbb{X}_v)_v = \mathbb{X}_v\mathbb{X}_{vv} + \mathbb{X}_{vv}\mathbb{X}_v = 2\mathbb{X}_{vv}\mathbb{X}_v$$
$$G_v = 2\mathbb{X}_{vv}\mathbb{X}_v$$

De donde obtenemos las siguientes expresiones para los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^1_{11} = \frac{E_u}{2E}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}$$
$$\Gamma_{22}^1 = \frac{-G_u}{2E}$$
$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-E_v}{2G}$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}$$
$$\Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}$$

Sustituimos en la ecuación de la curvatura en términos de los símbolos de Christoffel.

$$K = -\frac{1}{E}\left(\left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \left(\Gamma_{12}^2\right)^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{E}\left(\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u - \left(\frac{-E_v}{2G}\right)_v + \frac{E_v}{2E}\frac{-E_v}{2G} - \frac{E_u}{2E}\frac{G_u}{2G} + \left(\frac{G_u}{2G}\right)^2 - \frac{-E_v}{2G}\frac{G_v}{2G}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2E}\left(\left(\frac{G_u}{G}\right)_u + \left(\frac{E_v}{G}\right)_v - \frac{E_v^2}{2EG} - \frac{E_uG_u}{2EG} + \frac{G_u^2}{2G^2} + \frac{E_vG_v}{2G^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2E}\left(\frac{G_{uu}G - G_uG_u}{G^2} + \frac{E_{vv}G - E_vG_v}{G^2} - \frac{E_v^2}{2EG} - \frac{E_uG_u}{2EG} + \frac{G_u^2}{2G^2} + \frac{E_vG_v}{2G^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2EG}\left(G_{uu} - \frac{G_u^2}{G} + E_{vv} - \frac{E_vG_v}{G} - \frac{E_v^2}{2E} - \frac{E_uG_u}{2E} + \frac{G_u^2}{2G} + \frac{E_vG_v}{2G}\right)$$

$$= -\frac{1}{2EG}\left(G_{uu} + E_{vv} - \frac{E_v^2}{2E} - \frac{E_uG_u}{2E} - \frac{G_u^2}{2G} - \frac{E_vG_v}{2G}\right)$$

$$= -\frac{1}{2EG}\left(G_{uu} + E_{vv} - E_v\frac{E_vG}{2EG} - G_u\frac{E_uG}{2EG} - G_u\frac{EG_u}{2EG} - E_v\frac{EG_v}{2EG}\right)$$

$$= -\frac{1}{2EG}\left(E_{vv} - E_v\frac{E_vG + EG_v}{2EG} + G_{uu} - G_u\frac{E_uG + EG_u}{2EG}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{E_{vv} - E_v\frac{E_vG+EG_v}{2EG}}{EG} + \frac{G_{uu} - G_u\frac{E_uG+EG_u}{2EG}}{EG}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{E_{vv}\sqrt{EG} - E_v\frac{E_vG+EG_v}{2\sqrt{EG}}}{EG} + \frac{G_{uu}\sqrt{EG} - G_u\frac{E_uG+EG_u}{2\sqrt{EG}}}{EG}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

Entrega 6

Andoni Latorre Galarraga

Problema:
Probar que el elipsoide es un ovaloide.
Solución:
El elipsoide, $\mathcal{E}$, es compacto y conexo por ser homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (ax,by,cz) \\ & \mathbb{S}^2 & \longmapsto & \mathcal{E} \end{array}$$

f es continua por ser lineal. Calculemos la curvatura de Gauss. Tomamos la siguiente parametrización,

$$\mathbb{X}(u,v) = (a\operatorname{sen} v\cos u, b\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, c\cos v) \quad v\in(0,\pi) \quad u\in(0,2\pi)$$

$$\begin{array}{rr} \mathbb{X}_u = (-a\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, b\operatorname{sen} v\cos u, 0) & \mathbb{X}_v = (a\cos v\cos u, b\cos v\operatorname{sen} u, -c\operatorname{sen} v) \\ \mathbb{X}_{uu} = (-a\operatorname{sen} v\cos u, -b\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, 0) & \mathbb{X}_{vu} = (-a\cos v\operatorname{sen} u, b\cos v\cos u, 0) \\ \mathbb{X}_{uv} = (-a\cos v\operatorname{sen} u, b\cos v\cos u, 0) & \mathbb{X}_{vv} = (-a\operatorname{sen} v\cos u, -b\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, -c\cos v) \end{array}$$

$$E = \mathbb{X}_u\mathbb{X}_u = a^2\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen}^2 u + b^2\operatorname{sen}^2 v\cos^2 u = \operatorname{sen}^2 v(a^2\operatorname{sen}^2 u + b^2\cos^2 u) = \operatorname{sen}^2 v((a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u + b^2)$$

$$F = \mathbb{X}_u\mathbb{X}_v = -a^2\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u\cos v\cos u + b^2\operatorname{sen} v\cos u\cos v\operatorname{sen} u = (b^2-a^2)\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u\cos v\cos u$$

$$G = \mathbb{X}_v\mathbb{X}_v = a^2\cos^2 v\cos^2 u + b^2\cos^2 v\operatorname{sen}^2 u + c^2\operatorname{sen}^2 v = \cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u + b^2 - c^2) + c^2$$

$$\mathbb{X}_u\wedge\mathbb{X}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u & b\operatorname{sen} v\cos u & 0 \\ a\cos v\cos u & b\cos v\operatorname{sen} u & -c\operatorname{sen} v \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -bc\operatorname{sen}^2 v\cos u \\ -ac\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen} u \\ -ab\operatorname{sen} v\operatorname{sen}^2 u\cos v - ab\operatorname{sen} v\cos^2 u\cos v \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}_u\wedge\mathbb{X}_v = \begin{pmatrix} -bc\operatorname{sen}^2 v\cos u \\ -ac\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen} u \\ -ab\operatorname{sen} v\cos v \end{pmatrix} \qquad \|\mathbb{X}_u\wedge\mathbb{X}_v\| = \frac{1}{n} \geq 0$$

$$N = (-nbc\operatorname{sen}^2 v\cos u, -nac\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen} u, -nab\operatorname{sen} v\cos v)$$

$$e = N\mathbb{X}_{uu} = nabc\operatorname{sen}^3 v\cos^2 u + nabc\operatorname{sen}^3 v\operatorname{sen}^2 u = nabc\operatorname{sen}^3 v$$

$$f = N\mathbb{X}_{uv} = nabc\operatorname{sen}^2 v\cos u\cos v\operatorname{sen} u - nabc\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen} u\cos u\cos v = 0$$

$$g = N\mathbb{X}_{vv} = nabc\operatorname{sen}^3 v\cos^2 u + nabc\operatorname{sen}^3 v\operatorname{sen}^2 u + nabc\operatorname{sen} v\cos^2 v = nabc(\operatorname{sen}^3 v + \operatorname{sen} v\cos^2 v) = nabc\operatorname{sen} v$$

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{nabc\operatorname{sen}^3 v nabc\operatorname{sen} v}{EG-F^2} = \frac{(nabc)^2\operatorname{sen}^4 v}{EG-F^2}$$

Veamos que $EG-F^2$ es positivo.

$$EG = \left(\operatorname{sen}^2 v((a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u + b^2)\right)\left(\cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u + b^2 - c^2) + c^2\right) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 v\left(((a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u + b^2)(\cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u + b^2 - c^2) + c^2)\right) =$$

$= \operatorname{sen}^2 v($
$(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u + b^2 - c^2)+$
$(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u c^2+$
$b^2\cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u + b^2 - c^2)+$
$b^2c^2) =$

$= \operatorname{sen}^2 v($
$(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u + b^2 - c^2)+$
$c^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u+$
$(a^2-b^2)b^2\cos^2 v\cos^2 u + b^4\cos^2 v - b^2c^2\cos^2 v+$
$b^2c^2) =$

$= \operatorname{sen}^2 v($
$(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u + b^2 - c^2)+$
$c^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u+$
$(a^2-b^2)b^2\cos^2 v\cos^2 u + b^4\cos^2 v - b^2c^2\cos^2 v+$
$b^2c^2)$

$$F^2 = (b^2-a^2)^2\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v\cos^2 u$$

$$
\begin{aligned}
&EG-F^2 = \operatorname{sen}^2 v(\\
&+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u+b^2-c^2) \\
&+c^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u \\
&+(a^2-b^2)b^2\cos^2 v\cos^2 u+b^4\cos^2 v-b^2c^2\cos^2 v \\
&+b^2c^2 \\
&-(b^2-a^2)^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v\cos^2 u) =
\end{aligned}
$$

Es suficiente probar que $\frac{EG-F^2}{\operatorname{sen}^2 v}$ es positivo.

$$
\begin{aligned}
&(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v((a^2-b^2)\cos^2 u+b^2-c^2) \\
&+c^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u \\
&+(a^2-b^2)b^2\cos^2 v\cos^2 u+b^4\cos^2 v-b^2c^2\cos^2 v \\
&+b^2c^2 \\
&-(b^2-a^2)^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v\cos^2 u =
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&= (a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v(a^2-b^2)\cos^2 u \\
&+(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v(b^2-c^2) \\
&+c^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u \\
&+(a^2-b^2)b^2\cos^2 v\cos^2 u+b^4\cos^2 v-b^2c^2\cos^2 v \\
&+b^2c^2 \\
&-(b^2-a^2)^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v\cos^2 u =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^2-b^2)^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v\cos^2 u \\
&+(a^2-b^2)(b^2-c^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v \\
&+c^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u \\
&+(a^2-b^2)b^2\cos^2 v\cos^2 u \\
&+b^4\cos^2 v \\
&+b^2c^2 \\
&-(b^2-a^2)^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v\cos^2 u \\
&-b^2c^2\cos^2 v =
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&= (a^2-b^2)(b^2-c^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v \\
&+c^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2 u \\
&+(a^2-b^2)b^2\cos^2 v\cos^2 u \\
&+b^2c^2 \\
&+b^4\cos^2 v \\
&-b^2c^2\cos^2 v =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^2b^2-a^2c^2-b^4+b^2c^2)\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v \\
&+(a^2c^2-b^2c^2)\operatorname{sen}^2 u \\
&+(a^2b^2-b^4)\cos^2 v\cos^2 u \\
&+b^2c^2 \\
&+b^4\cos^2 v \\
&-b^2c^2\cos^2 v =
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&= a^2b^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v \\
&-a^2c^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v \\
&-b^4\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v \\
&+b^2c^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v \\
&+a^2c^2\operatorname{sen}^2 u \\
&-b^2c^2\operatorname{sen}^2 u \\
&+a^2b^2\cos^2 v\cos^2 u \\
&-b^4\cos^2 v\cos^2 u \\
&+b^2c^2 \\
&+b^4\cos^2 v \\
&-b^2c^2\cos^2 v =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2b^2(\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v+\cos^2 v\cos^2 u) \\
&+a^2c^2(\operatorname{sen}^2 u-\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v) \\
&+b^2c^2(1+\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v-\operatorname{sen}^2 u-\cos^2 v) \\
&+b^4(\cos^2 v-\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v-\cos^2 v\cos^2 u) =
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&= a^2b^2(\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v+\cos^2 v\cos^2 u) \\
&+a^2c^2\operatorname{sen}^2 u(1-\cos^2 v) \\
&+b^2c^2(1+\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v-\operatorname{sen}^2 u-(1-\operatorname{sen}^2 v)) \\
&+b^4\cos^2 v(1-\operatorname{sen}^2 u-\cos^2 u) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2b^2(\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v+\cos^2 v\cos^2 u) \\
&+a^2c^2\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v \\
&+b^2c^2(1+\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v-\operatorname{sen}^2 u-1+\operatorname{sen}^2 v) =
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&= a^2b^2(\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v+\cos^2 v\cos^2 u) \\
&+a^2c^2\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v \\
&+b^2c^2(\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v-\operatorname{sen}^2 u+\operatorname{sen}^2 v) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2b^2(\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v+\cos^2 v\cos^2 u) \\
&+a^2c^2\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v \\
&+b^2c^2(\operatorname{sen}^2 u(\cos^2 v-1)+\operatorname{sen}^2 v) =
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
&= a^2b^2(\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v+\cos^2 v\cos^2 u) \\
&+a^2c^2\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v \\
&+b^2c^2\operatorname{sen}^2 v(1-\operatorname{sen}^2 u) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2b^2(\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v+\cos^2 v\cos^2 u) \\
&+a^2c^2\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v \\
&+b^2c^2\operatorname{sen}^2 v\cos^2 u > 0
\end{aligned}
$$

Tenemos que $K > 0$. Los cálculos funcionan cuando $\operatorname{sen} v \neq 0$ que nunca ocurre con $v \in (0, \pi)$. El resto de cartas necesarias para cubrir $\mathcal{E}$ son similares a $\mathbb{X}$ y los cálculos son casi idénticos.

Entrega 7

Andoni Latorre Galarraga

Problema:
Ver si las curvas coordenadas son geodésicas para una superficie de revolución.
Solución:
Si la superficie viene parametrizada por $\mathbb{X}(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\operatorname{sen} v, g(u))$, las curvas coordenadas son

$$\alpha_u : \mathbb{X}(u_0,t)=(f(u_0)\cos t, f(u_0)\operatorname{sen} t, g(u_0))$$

$$\alpha_v : \mathbb{X}(t,v_0)=(f(t)\cos v_0, f(t)\operatorname{sen} v_0, g(t))$$

Para que las curvas sean geodésicas necesitamos que la componente tangencial de sus segundas derivadas sea nula.

$$\mathbb{X}_u=(f'(u)\cos v, f'(u)\operatorname{sen} v, g'(u))$$

$$\mathbb{X}_v=(-f(u)\operatorname{sen} v, f(u)\cos v, 0)$$

$$N=\mathbb{X}_u\wedge\mathbb{X}_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ f'(u)\cos v & f'(u)\operatorname{sen} v & g'(u) \\ -f(u)\operatorname{sen} v & f(u)\cos v & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=i\begin{vmatrix} f'(u)\operatorname{sen} v & g'(u) \\ f(u)\cos v & 0 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} f'(u)\cos v & g'(u) \\ -f(u)\operatorname{sen} v & 0 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} f'(u)\cos v & f'(u)\operatorname{sen} v \\ -f(u)\operatorname{sen} v & f(u)\cos v \end{vmatrix}=$$

$$=ig'(u)f(u)\cos v + jg'(u)f(u)\operatorname{sen} v + k(f'(u)f(u))=$$

$$=(g'(u)f(u)\cos v, g'(u)f(u)\operatorname{sen} v, f'(u)f(u))$$

Empecemos por α_u. Veamos si está parametrizada por longitud de arco:

$$\alpha_u{}'=(-f(u_0)\operatorname{sen} t, f(u_o)\cos t, 0)$$

$$\|\alpha_u'\|=|f(u_o)|$$

Tenemos que,

$$\beta_u'=\frac{\alpha_u{}'}{f(u_o)}$$

Donde β_u es α_u parametrizada por longitud de arco.

$$\beta_u'=(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$$

$$\beta_u''=(-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$$

Como $\beta_u'\beta_u''=0$, bastaría con ver que $\beta_u''\cdot(N\wedge\beta_u')=0$.

$$N\wedge\beta_u'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ g'(u_0)f(u_0)\cos t & g'(u_0)f(u_0)\operatorname{sen} t & f'(u_0)f(u_0) \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(f'(u_0)f(u_0)\cos t, -f'(u_0)f(u_0)\operatorname{sen} t, g'(u_0)f(u_0)\cos^2 t + g'(u_0)f(u_0)\operatorname{sen}^2 t)=$$

$$=(f'(u_0)f(u_0)\cos t, -f'(u_0)f(u_0)\operatorname{sen} t, g'(u_0)f(u_0))$$

$$\beta_u''\cdot(N\wedge\beta_u')=(-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)\cdot(f'(u_0)f(u_0)\cos t, -f'(u_0)f(u_0)\operatorname{sen} t, g'(u_0)f(u_0))=$$

$$=-f'(u_0)f(u_0)\cos^2 t + f'(u_0)f(u_0)\operatorname{sen}^2 t=(f'(u_0)f(u_0))(1-2\cos^2 t)$$

Si $f(u_0)=0$, $\|\alpha_u{}'\|=0$ y la curva no es regular. Cuando $f'(u_0)=0$, α_u es geodésica.
Veamos que ocurre con α_v.

$$\alpha_v{}'=(f'(t)\cos v_0, f'(t)\operatorname{sen} v_0, g'(t))$$

$$\|\alpha_v{}'\|=\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}$$

$$\beta_v'=\frac{\alpha_v{}'}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}}$$

$$\beta_v'' = (\cos v_0 h(t), \operatorname{sen} v_0 h(t), l(t))$$

Con

$$h(t) = \frac{f''(t)\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2} - f'(t)\frac{f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t)}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}}}{f'(t)^2+g'(t)^2}$$

$$l(t) = \frac{g''(t)\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2} - g'(t)\frac{f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t)}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}}}{f'(t)^2+g'(t)^2}$$

$$\beta_v'\beta_v'' = \frac{{\alpha_v}'}{\|{\alpha_v}'\|}\beta_v'' = \frac{1}{\|{\alpha_v}'\|}(f'(t)\cos v_0, f'(t)\operatorname{sen} v_0, g'(t)) \cdot (\cos v_0 h(t), \operatorname{sen} v_0 h(t), l(t))$$

$$= \frac{1}{\|{\alpha_v}'\|}(f'(t)h(t)\cos^2 v_0 + f'(t)h(t)\operatorname{sen}^2 v_0 + g'(t)l(t)) = \frac{1}{\|{\alpha_v}'\|}(f'(t)h(t) + g'(t)l(t))$$

Nos centramos en $f'(t)h(t) + g'(t)l(t)$.

$$f'(t)h(t) + g'(t)l(t) =$$

$$= \frac{f'(t)f''(t)\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2} - f'(t)^2\frac{f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t)}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}} + g'(t)g''(t)\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2} - g'(t)^2\frac{f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t)}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}}}{f'(t)^2+g'(t)^2} =$$

$$= \frac{(f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t))\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2} - (f'(t)^2+g'(t)^2)\frac{f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t)}{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}}}{f'(t)^2+g'(t)^2}$$

Entonces,

$$\beta_v'\beta_v'' = \frac{(f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t)) - (f'(t)^2+g'(t)^2)\frac{f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t)}{f'(t)^2+g'(t)^2}}{f'(t)^2+g'(t)^2} = 0$$

Veamos que ocurre con $\beta_v'' \cdot (N \wedge {\alpha_v}')$.

$$N \wedge {\alpha_v}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ g'(t)f(t)\cos v_0 & g'(t)f(t)\operatorname{sen} v_0 & f'(t)f(t) \\ f'(t)\cos v_0 & f'(t)\operatorname{sen} v_0 & g'(t) \end{vmatrix} =$$

$$= (g'(t)^2 f(t)\operatorname{sen} v_0 - f'(t)^2 f(t)\operatorname{sen} v_o, -g'(t)^2 f(t)\cos v_0 + f'(t)^2 f(t)\cos v_0, 0)$$

$$= (\operatorname{sen} v_0(g'(t)^2 f(t) - f'(t)^2 f(t)), -\cos v_0(g'(t)^2 f(t) - f'(t)^2 f(t)), 0)$$

$$= (g'(t)^2 f(t) - f'(t)^2 f(t))(\operatorname{sen} v_0, -\cos v_0, 0)$$

$$\frac{\beta_v'' \cdot (N \wedge {\alpha_v}')}{(g'(t)^2 f(t) - f'(t)^2 f(t))} = (\operatorname{sen} v_0, -\cos v_0, 0) \cdot (\cos v_0 h(t), \operatorname{sen} v_0 h(t), l(t)) = 0$$

Y se tiene que α_v es geodésica.

Entrega 8

Andoni Latorre Galarraga

Definiciones

Campo vectorial sobre una curva

Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva sobre una superficie $\mathcal{S}$, un campo vectorial sobre α es una aplicación $w : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Este campo se dice diferenciable si w es diferenciable y se dice tangente si satisface $w(t) \in T_{\alpha(t)}(\mathcal{S})$ para todo $t \in I$.

Derivada covariante de un campo sobre un curva

Si $w : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable sobre $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, con $\mathcal{S}$ superficie regular. Entonces, la derivada covariante de w es la componente tangencial de w'. Se escribe $\frac{Dw}{dt}$. Ademas, si N es un campo normal unitario de $\mathcal{S}$, la componente normal de w' es $w' \cdot N(\alpha)$ y se tiene que

$$\frac{Dw}{dt}(t) = w'(t) - \langle w', N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t))$$

Valor algebraico de la derivada covariante

Si $w : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable, tangente y unitario a lo largo de una curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ sobre una superficie orientada $\mathcal{S}$. Observamos que $\frac{Dw}{dt} \cdot N(\alpha(t)) = 0$ y $w(t) \cdot w'(t) = 0$, por ser la derivada covariante parte de $T_{\alpha(t)}(\mathcal{S})$ y por ser w unitario. Deducimos

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \lambda(t)(N(\alpha(t)) \wedge w(t))$$

Llamamos valor algebraico de la derivada covariante a $\lambda(t)$ y escribimos $\lambda(t) = \left[\frac{Dw}{dt}(t)\right]$.

Curvatura geodésica

Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco sobre una superficie regular orientada $\mathcal{S}$. Llamamos curvatura geodésica de α a $\left[\frac{D\alpha'}{dt}\right]$. Escribimos

$$\left[\frac{D\alpha'}{dt}(t)\right] = k_g(t)$$

Geodésica

Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva regular sobre una superficie regular orientada $\mathcal{S}$. Se dice que α es geodésica si

$$\frac{D\alpha'}{dt}(t) = 0 \quad \forall t$$

Es decir α' es paralelo a lo largo de α.

Proposición:

Las geodésicas están parametrizadas por parámetro proporcional a la longitud de arco. Es decir, Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una geodésica. Entonces, $\|\alpha'\|$ es constante.

Dem:

Si no es constante $\|\alpha'(t)\|^2 = 2n(t)$. Derivando, $\alpha'\alpha'' = n'(t)$. Entonces, para algún t_0 se tiene $\alpha'\alpha'' \neq 0$. Como α' está en el espacio tangente, ahora es imposible que α'' tenga derivada covariante nula ya que tiene componente tangencial. Esto contradice que α sea geodésica y queda probada la proposición.

Proposición:

Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una isometría y α es geodésica en $\mathcal{S}$. Entonces, $f(\alpha)$ es geodésica sobre $f(\mathcal{S})$.

Dem:

Si $\alpha = \mathbb{X}(u,v)$ entonces $f(\alpha) = (f\circ\mathbb{X})(u,v)$ y se tiene

$$f(\alpha)' = (f\circ\mathbb{X})_u u' + (f\circ\mathbb{X})_v v'$$

$$f(\alpha)'' = (f\circ\mathbb{X})_{uu}(u')^2 + (f\circ\mathbb{X})_{uv}u'v' + (f\circ\mathbb{X})_u u'' + (f\circ\mathbb{X})_{vu}u'v' + (f\circ\mathbb{X})_{vv}(v')^2 + (f\circ\mathbb{X})_v v''$$

Por definición de los símbolos de Christoffel,

$$\begin{array}{llcll} f(\alpha)'' & = (f\circ\mathbb{X})_{uu}(u')^2 & & \frac{Df(\alpha)'}{dt} & = (\Gamma^1_{11}(f\circ\mathbb{X})_u + \Gamma^2_{11}(f\circ\mathbb{X})_v)(u')^2 \\ & +(f\circ\mathbb{X})_{uv}u'v' & & & +(\Gamma^1_{12}(f\circ\mathbb{X})_u + \Gamma^2_{12}(f\circ\mathbb{X})_v)u'v' \\ & +(f\circ\mathbb{X})_u u'' & \Rightarrow & & +(f\circ\mathbb{X})_u u'' \\ & +(f\circ\mathbb{X})_{vu}u'v' & & & +(\Gamma^1_{12}(f\circ\mathbb{X})_u + \Gamma^2_{12}(f\circ\mathbb{X})_v)u'v' \\ & +(f\circ\mathbb{X})_{vv}(v')^2 & & & +(\Gamma^1_{22}(f\circ\mathbb{X})_u + \Gamma^2_{22}(f\circ\mathbb{X})_v)(v')^2 \\ & +(f\circ\mathbb{X})_v v'' & & & +(f\circ\mathbb{X})_v v'' = \end{array}$$

$$\frac{Df(\alpha)'}{dt} = (f\circ\mathbb{X})_u\left(\Gamma^1_{11}(u')^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + u'' + \Gamma^1_{22}(v')^2\right) + (f\circ\mathbb{X})_v\left(\Gamma^2_{11}(u')^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}(v')^2 + v''\right)$$

Como u y v satisfacen las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, la derivada covariante es nula y $f(\alpha)$ es geodésica.

Proposición:

Si $\alpha : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva regular parametrizada por longitud de arco sobre una superficie regular orientada $\mathcal{S}$ Entonces, $k(s)^2 = k_n(s)^2 + k_g(s)^2$.

Dem:

Por definición de curvatura normal, $k_n = k(\mathbb{N}\cdot N)$ donde N es el vector normal a la superficie y $\mathbb{N}$ es el vector normal a la curva. Por ser α parametrizada por longitud de arco, $k\mathbb{N} = \alpha''$. Se tiene que $k_n = \alpha''\cdot N$. Ahora, como α' es unitario $\frac{D\alpha'}{dt} = k_g(N\wedge\alpha')$.

$$\alpha'' = (\alpha''\cdot N)N + k_g(N\wedge\alpha')$$

$$k\mathbb{N} = k_n N + k_g(N\wedge\alpha')$$

Tomado $\|\cdot\|^2$ a ambos lados se tiene $k^2 = k_n^2 + k_g^2$.