

Cálculo de la aceleración de la gravedad mediante un péndulo físico

Andoni Latorre Galarraga
alatorre73@alumno.uned.es

Resumen

Se estudia la relación entre el periodo de oscilación de un péndulo físico y la distancia entre el eje de rotación y el centro de masas de dicho péndulo. A partir de los datos experimentales se calcula el valor de la aceleración de la gravedad g . El experimento se desarrolla siguiendo el proceso explicado en [2].

Fundamento Teórico

Si se tiene un cuerpo rígido, de masa M , suspendido en un eje de giro O a una distancia b del centro de masas del objeto, C . Cuando el objeto está desplazado de su posición de equilibrio por un ángulo θ . La aceleración tangencial del centro de masas se puede expresar de dos formas distintas, al igualar estas se tiene.

$$-Mgb \operatorname{sen}(\theta) = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje O .

Cuando se tienen valores pequeños de θ , menores a 20° , se puede aproximar $\theta \sim \operatorname{sen}(\theta)$.

$$-Mgb\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Que tiene por solución $\operatorname{sen}\left(\theta\sqrt{\frac{Mgb}{I}} + \phi\right) + C$.

Que corresponde a un movimiento armónico simple de periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgb}}$$

Si se llama I_0 al momento de inercia respecto al eje paralelo a O que pasa por C , por el teorema

de Huygens-Steiner, se tiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + Mb^2}{Mgb}}$$

I_0 está relacionado con el radio de giro, k , mediante la relación $k = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$. Por lo tanto,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Mk^2 + Mb^2}{Mgb}} = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + b^2}{gb}}$$

Utilizaremos esta última expresión para el periodo de oscilación, en nuestro cálculo de g . Linearizamos la expresión de la siguiente manera:

$$bT^2 = 4\pi^2 \frac{k^2}{g} + 4\pi^2 \frac{b^2}{g}$$

Obtenemos una relación lineal entre bT^2 y b^2 (resaltados en azul). Estimaremos la pendiente y la ordenada en el origen de dicha relación para obtener el valor de g .

Dispositivo Experimental

En nuestro experimento hemos utilizado una varilla metálica como péndulo. La varilla tiene unas marcas cada centímetro. Al dadas estas marcas, supondremos que no hay error en

b. Estas marcas son tales que se puede situar un pequeño trozo de metal mediante un tornillo de presión para sujetar la varilla y que esta tenga como eje de rotación la marca en la que se sitúa el metal triangular. Ademas, la varilla central indica el centro de masas. De esta manera, contando ranuras desde el centro de la varilla podemos conocer el valor de b. En la Fig. 1 se puede ver el dispositivo experimental ya montado.

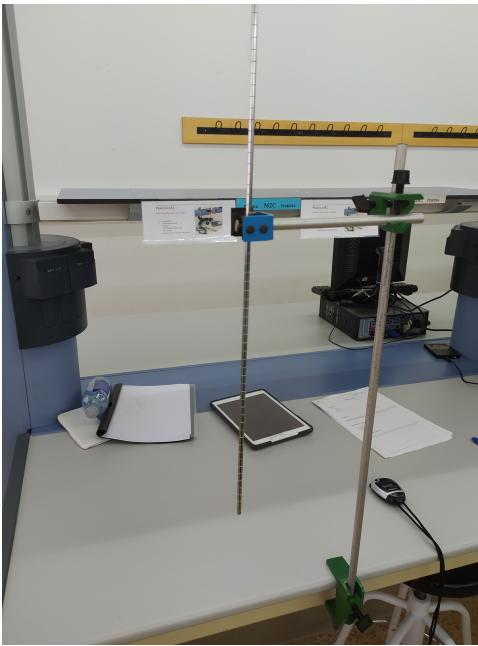


Figura 1: Dispositivo experimental montado.

Procedimiento y Resultados

Hemos tomado mediciones para $b \in \{8\text{cm}, 9\text{cm}, \dots, 30\text{cm}, 31\text{cm}\}$. Para cada valor de b hemos tomado 5 tiempos independientes, cada uno de estos correspondiente a 10 oscilaciones (excepto para $23\text{cm} \leq b \leq 26\text{cm}$ que hemos tomado 20). Siempre hemos tenido cuidado de que la varilla no oscile con ángulos superiores a 20° como se indica en [2]. En la Tabla 1 se muestran los datos obtenidos.

Tabla 1:

$b(\text{m})$	$T_1(\text{s})$	$T_2(\text{s})$	$T_3(\text{s})$	$T_4(\text{s})$	$T_5(\text{s})$
0,08	15,07	15,13	15,19	15,13	15,00
0,09	14,31	13,28	14,31	14,28	14,38
0,10	13,91	13,91	13,97	13,82	13,78
0,11	13,53	13,44	13,25	13,37	13,78
0,12	13,25	13,37	13,40	13,16	13,19
0,13	13,06	12,97	13,03	13,12	12,97
0,14	12,84	12,81	12,88	12,84	12,72
0,15	12,56	12,50	12,72	12,69	12,78
0,16	12,53	12,63	12,59	12,50	12,47
0,17	12,44	12,41	12,53	12,44	12,50
0,18	12,44	12,43	12,50	12,54	12,47
0,19	12,34	12,47	12,31	12,35	12,28
0,20	12,37	12,50	12,37	12,47	12,43
0,21	12,16	12,40	12,56	12,60	12,19
0,22	12,46	12,53	12,62	12,53	12,37
0,23	12,59	12,50	12,41	12,62	12,56
0,24	12,56	12,62	12,57	12,59	12,59
0,25	25,03	25,22	25,31	25,18	25,35
0,26	25,34	25,37	25,41	25,44	25,25
0,27	25,50	25,47	25,59	25,57	25,60
0,28	25,78	24,38	25,78	25,72	25,59
0,29	12,97	12,94	13,03	13,00	13,00
0,30	13,00	13,06	12,91	13,03	13,07
0,31	12,94	13,12	13,19	13,13	13,16
0,32	13,29	13,22	13,35	13,09	13,19
0,33	13,50	13,54	13,21	13,41	13,22

Tomaremos como valor esperado del tiempo, T^* , la media aritmética de los 5 tiempos (divididos entre 10 o 20 según corresponda). Para estimar el error absoluto, ϵ_{T^*} , el error estándar de la media como se indica en [1] p. 48.

$$T^* = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \frac{T_i}{10} \quad \epsilon_{T^*} = \sqrt{\frac{1}{5^2} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{T_i}{10} - T^* \right)^2}$$

Los redondeos se han realizado como se indica en [1] p. 22. Primero se redondea ϵ a una cifra significativa (dos si la primera es 1). Después, se redondea T^* de manera que la última cifra significativa sea del mismo orden decimal que ϵ . Ahora, podemos calcular $T^{*2}b$ y su error correspondiente con la ecuación 3.6 de [1]. Estos se redondean como antes. El error de $T^{*2}b$ viene

dado por:

$$\epsilon_{T^*2b} = \sqrt{\left| \frac{dT^{*2}b}{dT^*} \right|^2 \epsilon_{T^*}^2} = 2bT^* \epsilon_{T^*}$$

En la Tabla 2 se muestran los valores de T^* y $T^{*2}b$ junto con sus errores.

Tabla 2:

$b(m)$	$T^*(s)$	$\epsilon_{T^*}(s)$	$T^{*2}b(s^2m)$	$\epsilon_{T^*2b}(s^2m)$
0,08	1,510	0,003	0,1824	0,0007
0,09	1,411	0,019	0,179	0,005
0,10	1,388	0,003	0,1927	0,0008
0,11	1,347	0,008	0,200	0,002
0,12	1,327	0,004	0,2113	0,0013
0,13	1,303	0,003	0,2207	0,0010
0,14	1,282	0,002	0,2301	0,0007
0,15	1,265	0,005	0,2400	0,0019
0,16	1,254	0,003	0,2516	0,0012
0,17	1,246	0,002	0,2639	0,0008
0,18	1,2476	0,0018	0,2802	0,0008
0,19	1,235	0,003	0,2898	0,0014
0,20	1,243	0,002	0,3090	0,0010
0,21	1,238	0,008	0,322	0,004
0,22	1,250	0,004	0,344	0,002
0,23	1,254	0,003	0,3617	0,0017
0,24	1,2586	0,0009	0,3802	0,0005
0,25	1,261	0,003	0,3975	0,0019
0,26	1,2681	0,0015	0,4181	0,0010
0,27	1,2773	0,0012	0,4405	0,0008
0,28	1,273	0,012	0,454	0,009
0,29	1,2988	0,0014	0,4892	0,0011
0,30	1,301	0,003	0,508	0,002
0,31	1,311	0,004	0,533	0,003
0,32	1,323	0,004	0,560	0,003
0,33	1,338	0,006	0,591	0,005

Finalmente, se hace el cálculo de la regresión lineal y sus errores con las ecuaciones de [1] p. 79-80. En la Fig. 2 se pueden ver los valores de $T^{*2}b$ con sus barras de error frente a los valores de b^2 .

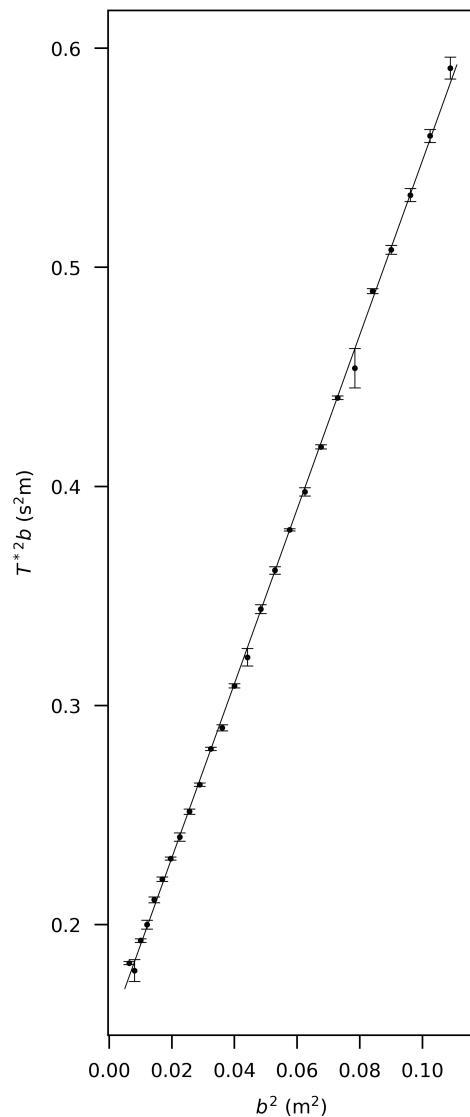


Figura 2: $T^{*2}b$ frente a b^2 junto con la recta de regresión $y = mx + n$.

Se tiene que

$$m = 4 \frac{\pi^2}{g} = (3,98 \pm 0,02) \text{ s}^2 \text{m}^{-1}$$

$$n = 4\pi^2 \frac{k^2}{g} = (0,1508 \pm 0,0012) \text{ s}^2 \text{m}$$

Utilizando la ecuación 3.6 de [1] podemos calcular los errores de g y k .

$$\epsilon_g = \sqrt{\left| \frac{dg}{dm} \right|^2 \epsilon_m^2} = \sqrt{\left| \frac{d\frac{4\pi^2}{m}}{dm} \right|^2 \epsilon_m^2} = \frac{4\pi^2}{m^2} \epsilon_m$$

$$\epsilon_k = \sqrt{\left| \frac{\partial k}{\partial g} \right|^2 \epsilon_g^2 + \left| \frac{\partial k}{\partial n} \right|^2 \epsilon_n^2}$$

$$\epsilon_k = \sqrt{\left| \frac{\partial \frac{\sqrt{ng}}{2\pi}}{\partial g} \right|^2 \epsilon_g^2 + \left| \frac{\partial \frac{\sqrt{ng}}{2\pi}}{\partial n} \right|^2 \epsilon_n^2}$$

$$\epsilon_k = \sqrt{\left| \frac{n}{4\pi\sqrt{ng}} \right|^2 \epsilon_g^2 + \left| \frac{g}{4\pi\sqrt{ng}} \right|^2 \epsilon_n^2}$$

$$\epsilon_k = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n}{g} \epsilon_g^2 + \frac{g}{n} \epsilon_n^2}$$

Obtenemos

$$g = (9,92 \pm 0,05) \text{ ms}^{-2}$$

$$k = (0,195 \pm 0,004) \text{ m}$$

Conclusiones

El valor de la gravedad local se puede consultar en [3] sabiendo que la latitud del laboratorio es de unos $43,3305^\circ$. El valor obtenido en [3] es de $9,8047 \text{ ms}^2$. El valor obtenido experimentalmente, $(9,92 \pm 0,05) \text{ ms}^{-2}$, está cerca del valor de [3] pero no se encuentra dentro del error. Lo más seguro es que esto sea consecuencia de errores sistemáticos, por ejemplo, que se le aplique una pequeña fuerza a la varilla al soltarla. No obstante, el error relativo en el valor de g es del 0,5% y el resultado se acerca al valor real. Considero que el resultado es bastante bueno.

Respecto al valor de k , en [2] se dan 3 métodos para su cálculo. El primero consiste en observar que el periodo T toma su valor mínimo cuando $b = k$.

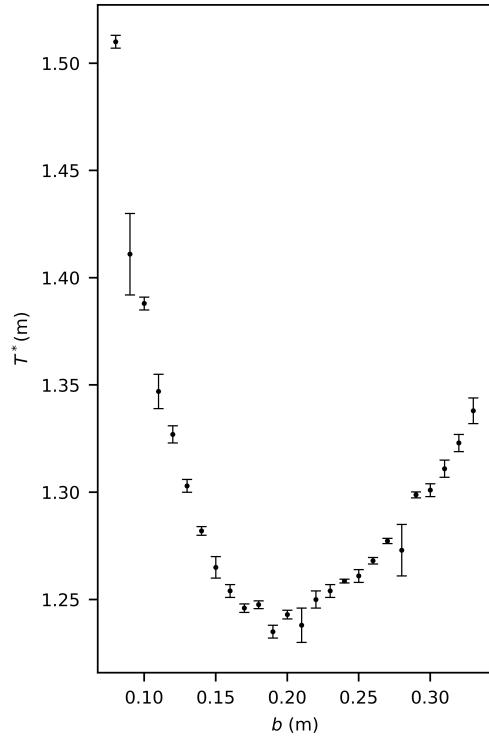


Figura 3: T^* frente a b . Se observa un mínimo alrededor de 0,19 m.

Calculemos el valor mínimo de T . Derivando T respecto a b se tiene,

$$\frac{dT}{db} = \frac{d \left(2\pi \sqrt{\frac{k^2+b^2}{gb}} \right)}{db} = \pi \frac{b^2 - k^2}{gb^2} \sqrt{\frac{gb}{k^2+b^2}}$$

Observamos que la derivada toma el valor 0 cuando $k = b$. En la Fig. 3 se muestran los valores de T^* con sus errores, los cuales se pueden consultar en la Tabla 2, frente a los valores de b . El mínimo parece estar alrededor de 0,19 m. El segundo método consiste en un cálculo teórico del radio de giro. Sabiendo que el momento de inercia de una varilla de longitud L y masa M es $I = \frac{1}{12}ML^2$.

$$Mk^2 = \frac{1}{12}ML^2 \Rightarrow k = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

Sabiendo que nuestra varilla mide $(66 \pm 0,1)$ cm y utilizando la ecuación 3.6 de [1].

$$\epsilon_k = \sqrt{\left| \frac{dk}{dL} \right|^2 \epsilon_L^2} = \frac{1}{\sqrt{12}} \epsilon_L$$

$$k = (0,1905 \pm 0,0003) \text{m}$$

El tercer método consiste el tomar el valor obtenido experimentalmente, $k = (0,195 \pm 0,004)$ m. De nuevo, muy cerca del valor teórico y del observado en la Fig. 3. El valor de k obtenido experimentalmente es bastante bueno y tiene un error relativo del 2 %. En mi opinión el mejor

valor de k es el obtenido teóricamente, tiene un error relativo del 0,16 % y está menos expuesto a errores sistemáticos.

Referencias

- [1] Manual de la asignatura. Versión 3.7
- [2] https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/1_practica_pendulo_fisico/prak1.html 14/5/2022
- [3] <https://www.sensorsone.com/local-gravity-calculator/> 14/5/2022

Cálculo de la constante elástica de un muelle

Andoni Latorre Galarraga
alatorre73@alumno.uned.es

Resumen

Se estudia la relación entre una masa y el periodo de oscilación de esta al ser suspendida de un muelle. A partir de los datos experimentales se calcula el valor de la constante elástica del muelle. El experimento se desarrolla siguiendo el proceso explicado en [2].

Fundamento Teórico

La ley de Hooke predice que si se aplica una fuerza F a un muelle la elongación x es proporcional a dicha fuerza.

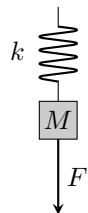
$$F = -kx$$

Donde la constante de proporcionalidad k es la constante elástica del muelle. Si se suspende una masa M del muelle, aplicando la segunda ley de Newton, se tiene

$$Ma = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{M}x$$

De la solución de la ecuación diferencial, $C_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{M}}t) + C_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{M}}t)$, se deduce el periodo de oscilación, T .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$



Para considerar la masa del muelle, m , como toda la masa del muelle no está tan desplazada, se le suma a la masa una cantidad αm con

$$\alpha < 1.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + \alpha m}{k}}$$

Tomado cuadrados obtenemos una relación lineal entre T^2 y M (resaltados en azul).

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K} M + \frac{4\pi^2\alpha m}{K}$$

Estudiaremos la pendiente para obtener el valor de k .

Dispositivo experimental

El dispositivo experimental consiste en un muelle del cual se ha suspendido un soporte en el cual se pueden colocar distintas masas. En la Fig. 1 se puede observar el dispositivo experimental.



Figura 1: Dispositivo experimental.

Al lado de muelle y el soporte se encuentra una escala con precisión de 1mm con un plástico (ver Fig. 2) para asistir en la medición.



Figura 2: Plástico unido a la escala vertical para asistir con las mediciones.

Procedimiento y Resultados

Para una primera estimación del valor del valor de k utilizaremos la relación lineal entre la fuerza y la elongación.

$$F = Mg = -kx$$

Para el valor de g tomaremos será de $-9,847 \text{ ms}^{-2}$, obtenido de [3] sabiendo que la latitud del laboratorio es de unos $43,3305^\circ$. Para obtener el error de F , utilizamos propagación cuadrática.

$$\epsilon_F = \sqrt{\left| \frac{dF}{dM} \right|^2 \epsilon_M^2} = g\epsilon_M$$

Los datos experimentales son los siguientes:

Tabla 1:

$x(\text{m})$	$\epsilon_x(\text{m})$	$M(\text{kg})$	$\epsilon_M(\text{Kg})$	$F(\text{N})$	$\epsilon_F(\text{N})$
0,007	0,001	0,01	0,002	-0,10	0,02
0,013	0,001	0,02	0,002	-0,20	0,02
0,019	0,001	0,03	0,002	-0,30	0,02
0,026	0,001	0,04	0,002	-0,39	0,02
0,031	0,001	0,05	0,002	-0,49	0,02
0,037	0,001	0,06	0,002	-0,59	0,02
0,044	0,001	0,07	0,002	-0,69	0,02
0,050	0,001	0,08	0,002	-0,79	0,02
0,056	0,001	0,09	0,002	-0,89	0,02
0,064	0,001	0,10	0,002	-0,98	0,02
0,071	0,001	0,11	0,002	-1,08	0,02
0,077	0,001	0,12	0,002	-1,18	0,02
0,083	0,001	0,13	0,002	-1,28	0,02
0,090	0,001	0,14	0,002	-1,38	0,02

$x(\text{m})$	$\epsilon_x(\text{m})$	$M(\text{kg})$	$\epsilon_M(\text{Kg})$	$F(\text{N})$	$\epsilon_F(\text{N})$
0,093	0,001	0,15	0,002	-1,48	0,02
0,099	0,001	0,16	0,002	-1,58	0,02
0,106	0,001	0,17	0,002	-1,67	0,02
0,111	0,001	0,18	0,002	-1,77	0,02
0,118	0,001	0,19	0,002	-1,87	0,02

En la Fig. 3 se muestra la fuerza, F , frente a la elongación, x junto con la recta de regresión.

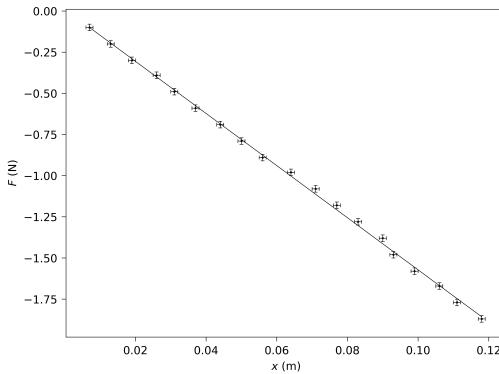


Figura 3: F frente a x junto con la recta de regresión.

De la pendiente de la recta de regresión deducimos que

$$-k = (-15,83 \pm 0,13) \text{ kg s}^{-2}$$

$$\Rightarrow k = (15,83 \pm 0,13) \text{ kg s}^{-2}$$

Por otra parte también estimaremos el valor de k a traves de la relación lineal.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K} M + \frac{4\pi^2 \alpha m}{K}$$

Se han tomado 4 tiempos para 10 oscilaciones con 12 masas diferentes. Los datos experimentales son:

Tabla 2:

$m(\text{kg})$	$T_1(\text{s})$	$T_2(\text{s})$	$T_3(\text{s})$	$T_4(\text{s})$
0,03	3,69	3,69	3,90	3,59
0,04	3,94	3,90	3,91	3,93
0,05	4,28	4,25	4,33	4,25
0,06	4,47	4,41	4,50	4,56
0,07	4,75	4,81	4,65	4,88
0,08	4,94	4,97	4,88	4,94

$m(\text{kg})$	$T_1(\text{s})$	$T_2(\text{s})$	$T_3(\text{s})$	$T_4(\text{s})$
0,09	5,22	5,25	5,25	5,00
0,10	5,50	5,59	5,68	5,50
0,12	5,88	5,91	5,93	5,81
0,15	6,50	6,65	6,59	6,50
0,17	6,97	6,94	6,94	6,97
0,20	7,32	7,38	7,44	7,44

Tabla 3:

$M(\text{kg})$	$T(\text{s})$	$\epsilon_T(\text{s})$	$T^2(\text{s}^2)$	$\epsilon_{T^2}(\text{s}^2)$
0,03	0,372	0,008	0,138	0,006
0,04	0,3920	0,0010	0,1537	0,0008
0,05	0,428	0,002	0,183	0,0017
0,06	0,448	0,004	0,201	0,003
0,07	0,477	0,006	0,228	0,005
0,08	0,493	0,002	0,243	0,002
0,09	0,517	0,006	0,267	0,006
0,10	0,557	0,004	0,31	0,005
0,12	0,588	0,003	0,346	0,004
0,15	0,656	0,004	0,43	0,005
0,17	0,6955	0,0007	0,4837	0,001
0,20	0,740	0,003	0,547	0,004

Primero calcularemos la media de los 4 tiempos:

$$\bar{T} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 T_i$$

Y para su error calcularemos la dispersión de los 4 tiempos como se indica en la ecuación (2.5) de [1].

$$D = \frac{\max_i T_i - \min_i T_i}{2}$$

Y luego el error de acuerdo con la fórmula (2.8) de [1].

$$\epsilon_{\bar{T}} = \frac{D}{\sqrt{4}}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{\bar{T}} = \frac{\max_i T_i - \min_i T_i}{4}$$

Ahora como $\bar{T} = 10T$ Podemos calcular T y su error.

$$T = \frac{\bar{T}}{10}$$

$$\epsilon_T = \sqrt{\left| \frac{dT}{d\bar{T}} \right|^2 \epsilon_{\bar{T}}^2} = \frac{\epsilon_{\bar{T}}}{10}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^4 T_i \quad \epsilon_T = \frac{\max_i T_i - \min_i T_i}{40}$$

De nuevo, aplicando la propagación cuadrática de errores para T^2 ,

$$\epsilon_{T^2} = 2T \epsilon_T$$

En la Fig. 4 se pude ver T^2 frente a M junto con la recta de regresión.

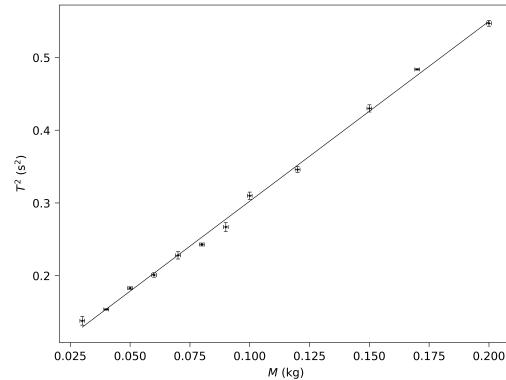


Figura 4: T^2 frente a M junto con la recta de regresión $y = ax + b$.

$$a = (2,47 \pm 0,04) \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1}$$

$$b = (0,055 \pm 0,004) \text{ s}^2$$

Sabiendo la pendiente de la recta calculamos la constante elástica y su error.

$$k = \frac{4\pi^2}{a}$$

$$\epsilon_k = \sqrt{\left| \frac{dk}{da} \right|^2 \epsilon_a^2} = \frac{4\pi^2}{a^2} \epsilon_a$$

$$k = (16,0 \pm 0,3) \text{ kg s}^{-2}$$

A partir de la ordenada en el origen, se puede calcular αm y su error.

$$\begin{aligned} b &= \frac{4\pi^2}{K} \alpha m = a \alpha m \\ \Rightarrow \alpha m &= \frac{b}{a} \\ \epsilon_{\alpha m} &= \sqrt{\left| \frac{\partial \alpha m}{\partial a} \right|^2 \epsilon_a^2 + \left| \frac{\partial \alpha m}{\partial b} \right|^2 \epsilon_b^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-b}{a^2} \right)^2 \epsilon_a^2 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \epsilon_b^2} = \frac{1}{a} \sqrt{b^2 \epsilon_b^2 + \epsilon_a^2} \\ \alpha m &= (0,022 \pm 0,016) \text{ kg} \\ \alpha m &= (22 \pm 16) \text{ g} \end{aligned}$$

Este resultado es muy impreciso, ya que tiene un error relativo de más del 70 %. A partir de consideraciones energéticas, como se indica en [2] se puede calcular el valor de α , que debe de ser $\frac{1}{3}$. Sabiendo esto podemos calcular m y su error.

$$\begin{aligned} m &= 3\alpha m \quad \epsilon_m = 3\epsilon_{\alpha m} \\ m &= (70 \pm 50) \text{ g} \end{aligned}$$

Conclusiones

El primer valor de k , $(15,83 \pm 0,13) \text{ kg s}^{-2}$ tiene un error relativo de menos del 1 % y el segundo valor $(16,0 \pm 0,3) \text{ kg s}^{-2}$ tiene un error menor al 2 %. Ambos valores son muy precisos y coinciden, ya que existen valores dentro de ambas barras de error. Podemos unificar estos valores utilizando las ecuaciones de [1] p. 51-52., tomamos una media ponderada donde los

pesos están relacionados con los errores de las medidas, dando más peso a las más precisas.

$$\begin{aligned} k &= \frac{\frac{1}{0,13^2} 15,83 + \frac{1}{0,3^2} 16,0}{\frac{1}{0,13^2} + \frac{1}{0,3^2}} \\ \epsilon_k &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{0,13^2} + \frac{1}{0,3^2}}} \\ k &= (15,86 \pm 0,12) \text{ kg s}^{-2} \end{aligned}$$

El valor de m es muy impreciso, tiene un error de más del 70 %, además al pesar el muelle directamente se tiene una masa de $(22,9 \pm 0,1)$ g. Este valor está dentro de la barra de error de la masa obtenida (70 ± 50) g, pero está en un extremo del intervalo. El valor de α también puede diferir significativamente del teórico ya que el muelle presentaba grandes deformaciones, aún así, el valor de αm ya tenía un error relativo inaceptable (72 %). El único valor experimental que se puede considerar es el de k , tiene un error relativo pequeño y se han conseguido dos valores compatibles por métodos diferentes. El valor unificado $k = (15,86 \pm 0,12) \text{ kg s}^{-2}$ es la mejor predicción experimental del valor real de la constante elástica, tiene un error del 0,76 %.

Referencias

- [1] Manual de la asignatura. Versión 3.7
- [2] https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/2_practica_ley_hooke/prak2.html 14/6/2022
- [3] <https://www.sensorsone.com/local-gravity-calculator/> 14/6/2022

Cálculo de la constante de recuperación de un muelle

Andoni Latorre Galarraga
alatorre73@alumno.uned.es

Resumen

Se calculan experimentalmente las constantes elásticas de varias configuraciones de muelles y luego se comparan con las constantes esperadas a partir de las constantes individuales de los muelles, que también se miden experimentalmente. Finalmente, se calcula la aceleración de la gravedad utilizando un plano inclinado. El experimento se desarrolla de acuerdo con los procesos descritos en [2].

Fundamento Teórico

Ley de Hooke

La ley de Hooke predice que si se aplica una fuerza F a un muelle la elongación x es proporcional a dicha fuerza.

$$F = -kx$$

Donde la constante de proporcionalidad k es la constante elástica del muelle. Si se suspende una masa M del muelle, aplicando la segunda ley de Newton, se tiene

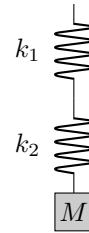
$$Ma = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{M}x$$

De la solución de la ecuación diferencial, $C_1 \sin(\sqrt{\frac{k}{M}}t) + C_2 \cos(\sqrt{\frac{k}{M}}t)$, se deduce el periodo de oscilación, T .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

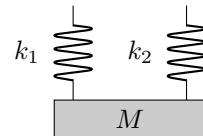
Si la masa se ve afectada por dos muelles, estos dos muelles se comportaran como un único muelle con constante elástica k_e , el valor de esta constante dependerá de como se coloquen los muelles.

En serie



$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

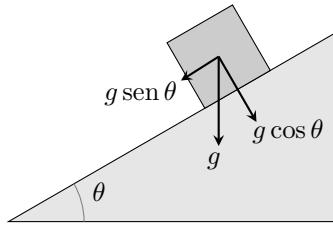
En paralelo



$$k_e = k_1 + k_2$$

Plano inclinado

Si se coloca un objeto sobre un plano inclinado, la componente de la aceleración de la gravedad, g , que hace que se deslice hacia abajo es $g \sin \theta$ donde θ es el ángulo del plano inclinado.



Suponemos que el objeto comienza en reposo, la velocidad en un instante t será

$$v = \int_0^t g \sin \theta dt = t g \sin \theta$$

Y la distancia recorrida,

$$x = \int_0^t t g \sin \theta dt = \frac{t^2}{2} g \sin \theta$$

De donde se tiene:

$$g \sin \theta = \frac{2x}{t^2}$$

Tenemos una relación lineal entre $\sin \theta$ y $\frac{2x}{t^2}$ donde la pendiente es g .

Dispositivo Experimental

El dispositivo experimental consiste en un carril de inclinación variable y un coche que encaja en unas guías en el carril. El carril y el coche tienen lugares donde se pueden unir muelles.

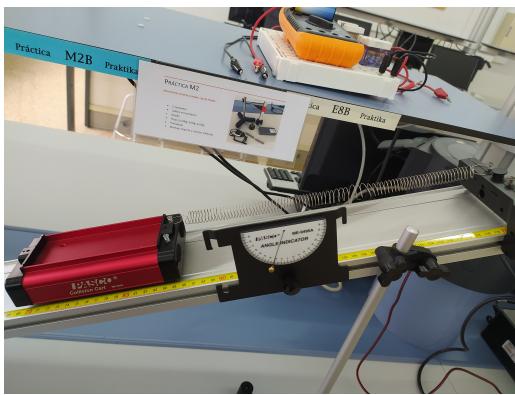


Figura 1: Coche con un muelle.

El carril también tiene una escala incorporada, con precisión de 1 mm.

Procedimiento y Resultados

Primero se ha pesado el coche en dos balanzas, las masas obtenidas son $(496,2 \pm 0,1)$ g y $(496,4 \pm 0,1)$ g. Como la dispersión y la precisión del aparato son iguales tomaremos 0,1 g como el error y la media como valor esperado de la masa del coche, m_c .

$$m_c = (496,3 \pm 0,1) \text{ g} = (0,4963 \pm 0,001) \text{ kg}$$

Para dos muelles distintos hemos tomado 5 tiempos distintos correspondientes a 5 oscilaciones cada uno.

Tabla 1:

	T_1 (s)	T_2 (s)	T_3 (s)	T_4 (s)	T_5 (s)
Muelle 1	5,35	5,25	5,19	5,43	5,28
Muelle 1	5,22	5,31	5,19	5,06	5,22

Para el error de cada uno de los tiempos se ha utilizado la dispersión quedando el error de la media, tal como se explica en [4] p. 45-48.

$$\bar{T} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_i \quad D = \frac{\max_i T_i - \min_i T_i}{2}$$

$$\epsilon_{\bar{T}} = \frac{D}{\sqrt{5}}$$

Ahora como, $\bar{T} = 5T$ propagando los errores,

$$T = \frac{1}{5} \bar{T} \quad \epsilon_T = \frac{1}{5} \epsilon_{\bar{T}}$$

$$T = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^5 T_i \quad \epsilon_T = \frac{\max_i T_i - \min_i T_i}{10\sqrt{5}}$$

Tabla 2:

	T (s)	ϵ_T (s)
Muelle 1	1,06	0,008
Muelle 2	1,04	0,008

Sabiendo la relación entre el periodo y la constante de elasticidad, podemos despejar k y calcular su error.

$$k = \frac{4\pi^2 M}{T^2}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_k &= \sqrt{\left|\frac{\partial k}{\partial M}\right|^2 \epsilon_M^2 + \left|\frac{\partial k}{\partial T}\right|^2 \epsilon_T^2} \\ &= \sqrt{\left|\frac{4\pi^2}{T^2}\right|^2 \epsilon_M^2 + \left|-2\frac{4\pi^2 M}{T^3}\right|^2 \epsilon_T^2} \\ &= \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{\epsilon_M^2 + \frac{4M^2}{T^2} \epsilon_T^2}\end{aligned}$$

Tabla 3:

	$T(s)$	$\epsilon_T(s)$	$k(\text{ kg s}^{-2})$	$\epsilon_k(\text{ kg s}^{-2})$
muelle 1	1,06	0,008	17,4	0,3
muelle 2	1,04	0,008	18,1	0,3

Repetimos este proceso para los muelles en serie (en ambos ordenes) y en paralelo. Los tiempos son los siguientes:

Tabla 4:

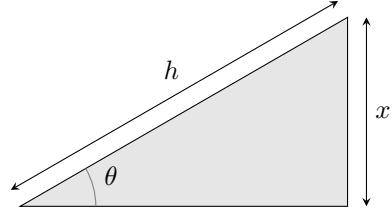
	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_4(s)$	$T_5(s)$
Serie 1-2	7,78	7,71	7,91	7,97	7,75
Serie 2-1	7,69	7,72	7,88	7,56	7,59
Paralelo	3,78	3,81	3,78	3,75	3,81

Las constantes de elasticidad obtenidas son:

Tabla 5:

	$T(s)$	$\epsilon_T(s)$	$k(\text{ kg s}^{-2})$	$\epsilon_k(\text{ kg s}^{-2})$
muelle 1	1,06	0,008	17,4	0,3
muelle 2	1,04	0,008	18,1	0,3
Serie 1-2	1,565	0,008	8,00	0,08
Serie 2-1	1,538	0,010	8,28	0,11
Paralelo	0,7572	0,0019	34,17	0,18

Para la segunda parte del experimento, hemos colocado el carril a distintos ángulos y hemos medido el tiempo de caída. La distancia recorrida por el coche es siempre la misma, $h = (1,100 \pm 0,001)$ m.



Para calcular $\sin \theta$ mediremos la altura del extremo del carril, x . Luego dividiremos entre h , la hipotenusa del triángulo. También podemos calcular el error correspondiente.

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{x}{h} \\ \epsilon_{\sin \theta} &= \sqrt{\left|\frac{\partial \sin \theta}{\partial h}\right|^2 \epsilon_h^2 + \left|\frac{\partial \sin \theta}{\partial x}\right|^2 \epsilon_x^2} \\ &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{4x^2}{h^2} \epsilon_h^2 + \epsilon_x^2}\end{aligned}$$

ϵ_x y ϵ_h son ambos 0,001 m.

$$\epsilon_{\sin \theta} = \frac{0,001}{h} \sqrt{\frac{4x^2}{h^2} + 1}$$

El experimento se ha realizado poniendo una carga en el coche y sin carga. Los datos son los siguientes:

Tabla 6: Sin carga

$x(m)$	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_4(s)$
0,10	1,47	1,62	1,71	1,59
0,09	1,59	1,69	1,75	1,72
0,08	1,75	1,75	1,78	1,81
0,07	1,88	1,91	1,81	1,90
0,06	2,10	2,13	2,07	2,12
0,05	2,34	2,28	2,18	2,28
0,04	2,53	2,59	2,60	2,57

Tabla 7: Con carga

$x(m)$	$T_1(s)$	$T_2(s)$	$T_3(s)$	$T_4(s)$
0,10	1,47	1,41	1,50	1,56
0,09	1,64	1,75	1,75	1,69
0,08	1,82	1,75	1,78	1,82
0,07	2,00	1,96	2,00	2,03
0,06	2,16	2,07	2,09	2,09
0,05	2,34	2,34	2,21	2,28
0,04	2,59	2,63	2,69	2,53

Calculamos el tiempo medio y su error con las ecuaciones de [\[1\]](#) p. 45-48.

$$T = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 T_i \quad \epsilon_T = \frac{\max_i T_i - \min_i T_i}{2\sqrt{4}}$$

Tabla 8: Sin carga

$x(m)$	$T(s)$	$\epsilon_T(s)$
0,10	1,60	0,06
0,09	1,69	0,04
0,08	1,773	0,015
0,07	1,88	0,02
0,06	2,105	0,015
0,05	2,27	0,04
0,04	2,573	0,018

Tabla 9: Con carga

$x(m)$	$T(s)$	$\epsilon_T(s)$
0,10	1,48	0,04
0,09	1,71	0,03
0,08	1,793	0,018
0,07	1,998	0,017
0,06	2,10	0,02
0,05	2,29	0,03
0,04	2,61	0,04

Hemos calculado $\sin \theta$ y su error con las ecuaciones,

$$\sin \theta = \frac{x}{h} \quad \epsilon_{\sin \theta} = \frac{0,001}{h} \sqrt{\frac{4x^2}{h^2} + 1}$$

Tambien hemos calculado $\frac{2h}{T^2}$ y su error

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left| \frac{\partial \frac{2h}{T^2}}{\partial h} \right|^2 \epsilon_h^2 + \left| \frac{\partial \frac{2h}{T^2}}{\partial T} \right|^2 \epsilon_T^2} \\ &= \frac{2}{T^2} \sqrt{\epsilon_h^2 + \frac{4h^2}{T^2} \epsilon_T^2} \end{aligned}$$

Tabla 10: Sin carga

$\sin \theta$	$\epsilon_{\sin \theta}$	$\frac{2h}{T^2} (\text{ms}^{-2})$	$\epsilon_{\frac{2h}{T^2}} (\text{ms}^{-2})$
0,0909	0,0009	0,86	0,06
0,0818	0,0009	0,77	0,04
0,0727	0,0009	0,70	0,012
0,0636	0,0009	0,622	0,013
0,0545	0,0009	0,496	0,007
0,0455	0,0009	0,427	0,015
0,0364	0,0009	0,332	0,005

Tabla 11: Con carga

$\sin \theta$	$\epsilon_{\sin \theta}$	$\frac{2h}{T^2} (\text{ms}^{-2})$	$\epsilon_{\frac{2h}{T^2}} (\text{ms}^{-2})$
0,0909	0,0009	1,00	0,05
0,0818	0,0009	0,75	0,03
0,0727	0,0009	0,684	0,014
0,0636	0,0009	0,551	0,009
0,0545	0,0009	0,499	0,010
0,0455	0,0009	0,420	0,011
0,0364	0,0009	0,323	0,010

En las siguientes figuras (2 y 3) se puede ver $\frac{2h}{T^2}$ frente $\sin \theta$ con las rectas de regresión cuya pendiente sera nuestra estimación de g .

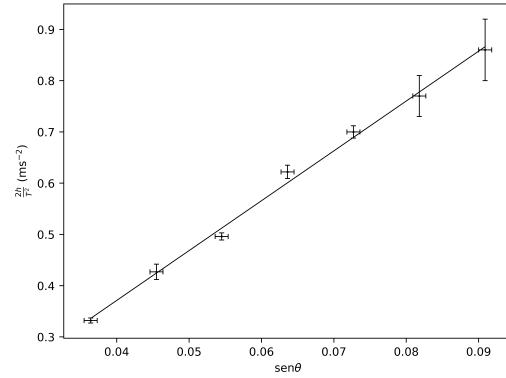


Figura 2: Sin carga. $g = (9,7 \pm 0,3) \text{ms}^{-2}$

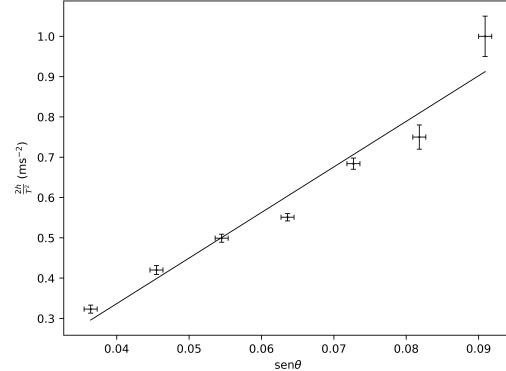


Figura 3: Con carga. $g = (11,3 \pm 1,2) \text{ms}^{-2}$

Conclusiones

Constantes elásticas

Los valores de las constantes de elasticidad, recogidos en la Tabla 5, parecen coincidir con las combinaciones del fundamento teórico en una primera observación. Si analicemos detalladamente cada caso.

En serie

Calculamos el error con propagación cuadrática.

$$k_e = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$
$$\epsilon_{k_e} = \sqrt{\left| \frac{\partial k}{\partial k_1} \right|^2 \epsilon_{k_1}^2 + \left| \frac{\partial k}{\partial k_2} \right|^2 \epsilon_{k_2}^2}$$
$$\frac{\partial k}{\partial k_1} = \frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}} \frac{1}{k_1^2}$$
$$\frac{\partial k}{\partial k_2} = \frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}} \frac{1}{k_2^2}$$
$$\epsilon_{k_e} = \frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_{k_1}^2}{k_1^4} + \frac{\epsilon_{k_2}^2}{k_2^4}}$$
$$k_e = (8,87 \pm 0,02) \text{ kg s}^{-2}$$

En paralelo

$$k_e = k_1 + k_2$$
$$\epsilon_{k_e} = \sqrt{\left| \frac{\partial k}{\partial k_1} \right|^2 \epsilon_{k_1}^2 + \left| \frac{\partial k}{\partial k_2} \right|^2 \epsilon_{k_2}^2}$$
$$= \sqrt{\epsilon_{k_1}^2 + \epsilon_{k_2}^2}$$

El resultado es:

$$k_e = (35,5 \pm 0,4) \text{ kg s}^{-2}$$

Los valores obtenidos a partir de las constantes individuales se corresponden con los medidas directamente. Aunque no sean estrictamente compatibles, son suficientemente cercanos como para confirmar las predicciones teóricas.

Plano inclinado

El valor de la gravedad local se puede consultar en [3] sabiendo que la latitud del laboratorio es de unos 43,3305°. El valor obtenido en [3] es de 9,8047 ms⁻². De los dos valores el único que es compatible con el valor real de *g* es el obtenido sin carga. El valor de *g* obtenido con carga es incompatible con el valor real y tiene un error relativo superior al 10 % que lo hace poco fiable. Lo más seguro es que que está desviación provenga de lo poco consistente que era el montaje al poner la carga. Al golpear el final del carril, el montaje entero se desplazaba. Pese a haber observado esto durante el experimento e intentar minimizarlo los errores sistemáticos procedentes de las sucesivas variaciones del montaje han introducido un gran error en las medida y han desplazado el valor esperado. Sin embargo, el valor obtenido sin carga es compatible con el valor de [3] y presenta un error del 3 %, un resultado bastante bueno.

Referencias

- [1] Manual de la asignatura. Versión 3.7
- [2] https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/3_practica_plano_inclinado/prak3.html 15/6/2022
- [3] <https://www.sensorsone.com/local-gravity-calculator/> 15/6/2022

Calculo de la resistencia interna de una fuente

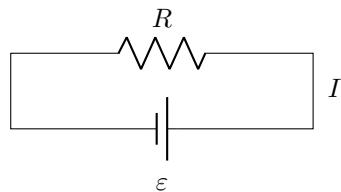
Andoni Latorre Galarraga
alatorre73@alumno.uned.es

Resumen

Se comparan miden diferentes resistencias individualmente y luego se comparan las combinaciones de estas con las predicciones teóricas. Tambien se calcula la resistencia interna de varias fuentes. El experimento se desrroya de acuerdo con el proceso descrito en [2].

Fundamento Teórico

Ley de Ohm

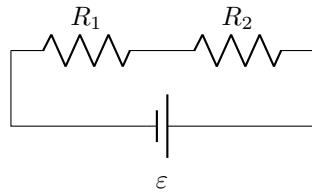


La ley de Ohm dice que la diferencia de potencial entre ambos bornes de un conductor, ε , es igual al producto de la resistencia de dicho conductor, R , y la intensidad de la corriente, I .

$$\varepsilon = IR$$

Combinaciones de resistencias

En serie

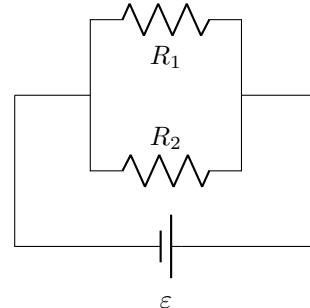


Si se tienen dos resistencias conectadas en serie, el conjunto de estas se comporta como una

única resistencia, R . Esta resistencia es la suma de las anteriores.

$$R = R_1 + R_2$$

En paralelo



Si se tienen dos resistencias conectadas en paralelo, el conjunto de estas se comporta como una única resistencia, R . Esta resistencia es el inverso de la suma de los inversos las anteriores resistencias.

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Dispositivo Experimental, Procedimiento y Resultados

Primero se han medido individualmente 4 resistencias utilizando un multímetro. Dos

de las resistencias estaban etiquetadas como $220K\Omega$ y ambas se han medido como $(220 \pm 1)K\Omega$. Las otras dos resistencias estaban etiquetadas como $47K\Omega$ y ambas se han medido en $(46 \pm 1)K\Omega$. Luego se han comparado los valores teóricos con los experimentales de diversas configuraciones de resistencias. Los errores para los valores teóricos son los siguientes:

$$R = R_1 + R_2 \quad \epsilon_R = \sqrt{\epsilon_{R_1}^2 + \epsilon_{R_2}^2}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \epsilon_R = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \sqrt{\frac{\epsilon_{R_1}^2}{R_1^4} + \frac{\epsilon_{R_2}^2}{R_2^4}}$$

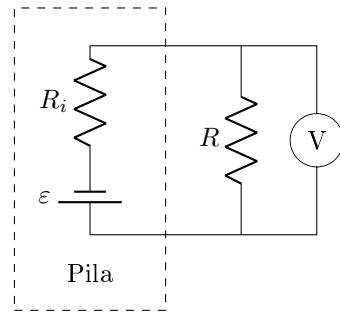
En la Tabla 1 se pueden ver las diferentes combinaciones de resistencias, sus valores experimentales R_e y los teóricos, R_t , obtenidos con las ecuaciones anteriores.

Tabla 1:

Resistencias	$R_e(K\Omega)$	$R_t(K\Omega)$
$(46 \pm 1)K\Omega \parallel (46 \pm 1)K\Omega$	93 ± 1	$92,0 \pm 1,4$
$(220 \pm 1)K\Omega \parallel (220 \pm 1)K\Omega$	439 ± 1	$440,0 \pm 1,4$
$(220 \pm 1)K\Omega \parallel (46 \pm 1)K\Omega$	267 ± 1	$266,0 \pm 1,4$
$\boxed{(46 \pm 1)K\Omega \parallel (46 \pm 1)K\Omega}$	23 ± 1	$23,00 \pm 0,03$
$\boxed{(220 \pm 1)K\Omega \parallel (220 \pm 1)K\Omega}$	110 ± 1	$110,000 \pm 0,006$

Resistencias	$R_e(K\Omega)$	$R_t(K\Omega)$
$\boxed{(220 \pm 1)K\Omega \parallel (46 \pm 1)K\Omega}$	38 ± 1	$38,05 \pm 0,04$

Una vez conocidas las resistencias de las distintas combinaciones hemos realizado el siguiente montaje.



El objetivo es medir la resistencia interna de la pila, R_i , a la cual no podemos acceder directamente. Aplicando la leyes de Kirchhoff y Ohm conseguimos una relación lineal entre V y $\frac{V}{R}$.

$$\varepsilon = V_{R_i} + V = IR_i + V = \frac{V}{R}R_i + V$$

$$V = -R_i \frac{V}{R} + \varepsilon$$

Calculamos el error de $\frac{V}{R}$.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\frac{V}{R}} &= \sqrt{\left| \frac{\partial \frac{V}{R}}{\partial V} \right|^2 \epsilon_V^2 + \left| \frac{\partial \frac{V}{R}}{\partial R} \right|^2 \epsilon_R^2} \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{\epsilon_V^2 + \frac{V^2}{R^2} \epsilon_R^2} \end{aligned}$$

$\epsilon_V = 0,01V$ y $\epsilon_R = 1K\Omega$. Recogemos los resultados en la siguiente tabla:

Tabla 2:

$\frac{V}{R}$ (V/KΩ)	$\epsilon_{\frac{V}{R}}$ (V/KΩ)	V(V)
0,183	0,004	8,40
0,0937	0,0010	8,71
0,331	0,014	7,61
0,04041	0,00019	8,89
0,03326	0,00013	8,88
0,214	0,006	8,14
0,02052	0,00005	9,01
0,0801	0,0007	8,81

En la siguiente figura se puede ver V frente a $\frac{V}{R}$ junto con la recta de regresión.

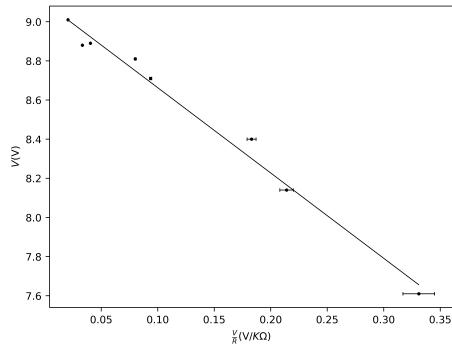


Figura 1: V frente a $\frac{V}{R}$ con la recta de regresión.

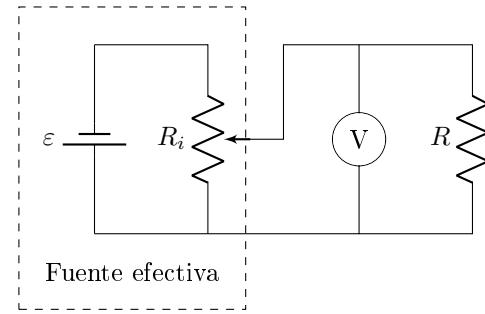
A partir de la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión obtenemos los siguientes resultados:

$$R_i = (4,4 \pm 0,2)K\Omega$$

$$\varepsilon = (9,10 \pm 0,03)V$$

Conectando directamente el voltímetro a los bornes de la pila se tiene un voltaje de $(9,09 \pm 0,01)V$.

Finalmente, hemos montado un circuito con un potenciómetro como se muestra a continuación.



El potenciómetro tenía varias posiciones, hemos seleccionado las posiciones 0, 5 y 10. En cada una de estas posiciones hemos tomado el voltaje para 3 resistencias de la Tabla 1. Los datos son los siguientes.

Tablas 3, 4 y 5:
Posición 0:

$R(K\Omega)$	$V(V)$
23 ± 1	$6,33 \pm 0,01$
46 ± 1	$7,32 \pm 0,01$
220 ± 1	$8,58 \pm 0,01$

Posición 5:

$R(K\Omega)$	$V(V)$
23 ± 1	$0,35 \pm 0,01$
46 ± 1	$0,65 \pm 0,01$
220 ± 1	$2,34 \pm 0,01$

Posición 10:

$R(K\Omega)$	$V(V)$
23 ± 1	$0,17 \pm 0,01$
46 ± 1	$0,33 \pm 0,01$
220 ± 1	$1,23 \pm 0,01$

El proceso a seguir para determinar ε y R_i , es el mismo que con la pila. Los resultados se resumen en las siguientes figuras, donde se ha representado V frente a $\frac{V}{R}$ y se ha calculado la recta de regresión.

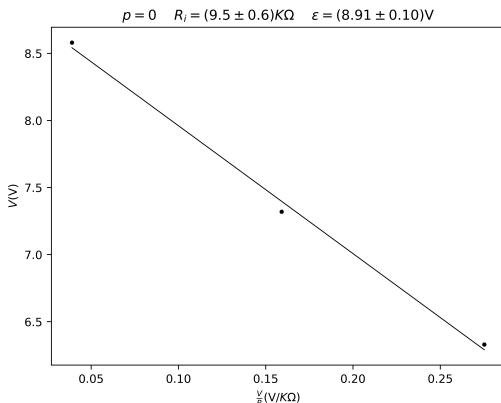


Figura 2: Posición 0 del potenciómetro.

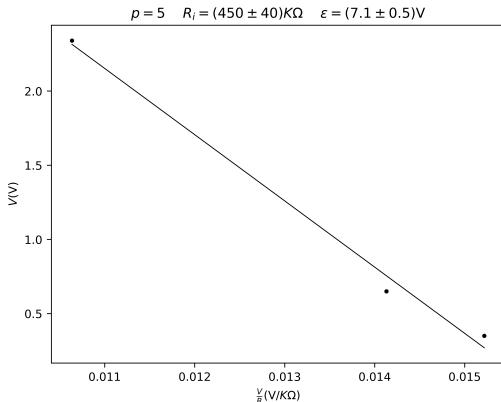


Figura 3: Posición 5 del potenciómetro.

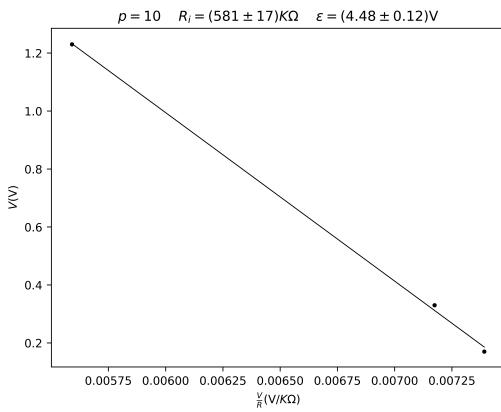


Figura 4: Posición 10 del potenciómetro.

También se ha medido directamente el voltaje del potenciómetro conectando el voltímetro directamente a los bornes.

Tabla 6:

p	$V(V)$
0	$9,01 \pm 0,01$
5	$6,85 \pm 0,01$
10	$4,36 \pm 0,01$

Conclusiones

Las diferentes combinaciones de resistencias recogidas en la Tabla 1 claramente coinciden con las predicciones teóricas, siendo siempre compatibles el valor teórico con el experimental. El valor de ε obtenido para la pila, $(9,10 \pm 0,03)V$, es compatible con el obtenido por medición directa, $(9,09 \pm 0,01)V$ y muy cercano a los 9V indicados en la pila. Respecto al potenciómetro, se ve que la resistencia interna aumenta con la posición del potenciómetro como era de esperar. Por último, los valores de ε obtenidos para cada una de las posiciones del potenciómetro parecen estar cerca de los obtenidos por medición directa, recogidos en la tabla 6.

Referencias

[1] Manual de la asignatura. Versión 3.7

[2] https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/4_practica_corriente_continua_1/prak4.html

Diferentes métodos de medida de resistencias y curva característica de una bombilla

Andoni Latorre Galarraga

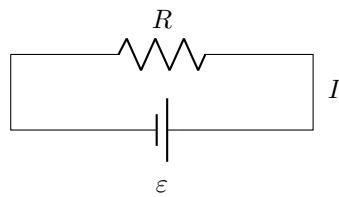
alatorre73@alumno.uned.es

Resumen

Se exploran diferentes maneras de medir resistencia de manera indirecta: montaje corto y montaje largo. También se obtiene la curva característica de una bombilla. El experimento se ha realizado siguiendo las indicaciones de [2].

Fundamento Teórico

Ley de Ohm



La ley de Ohm dice que la diferencia de potencial entre ambos bornes de un conductor, ε , es igual al producto de la resistencia de dicho conductor, R , y la intensidad de la corriente, I .

$$\varepsilon = IR$$

Amperímetros y Voltímetros

Amperímetros

Los amperímetros se conectan en serie con la corriente que se quiere medir. Los amperímetros suelen tener una resistencia interna del orden de 1Ω y normalmente no afectan al circuito ya que la corriente pasa por ellos sin problema. Sin embargo cuando se está utilizando un circuito con resistencias del orden de la resistencia interna del amperímetro, es decir, resistencias muy grandes, este puede influir significativamente en las mediciones. Ya que la corriente pasará por el amperímetro.

del amperímetro, es decir, resistencias muy pequeñas, este puede influir significativamente en las mediciones. Ya que la corriente no pasará por el amperímetro.

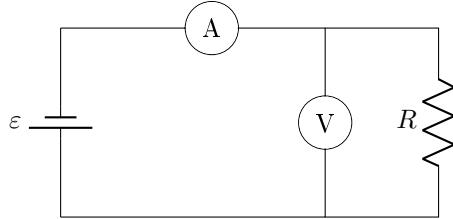
Voltímetros

Los voltímetros se conectan en paralelo a la corriente que se quiere medir. Los voltímetros suelen tener una resistencia interna del orden de $1M\Omega$ y normalmente no afectan al circuito ya que la corriente no pasa por ellos. Sin embargo cuando se está utilizando un circuito con resistencias del orden de la resistencia interna del voltímetro, es decir, resistencias muy grandes, este puede influir significativamente en las mediciones. Ya que la corriente pasará por el voltímetro.

Medida indirecta de una resistencia

Una resistencia se puede medir indirectamente, midiendo el voltaje y la intensidad para luego usar la ley de Ohm. Esto se puede hacer de dos maneras: Ambos montajes tienen sus fallos cuando no se consideran las resistencias internas.

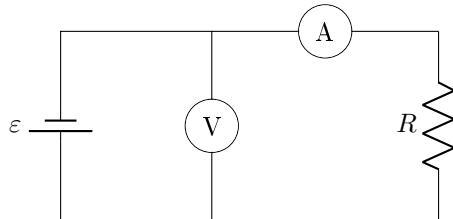
Montaje corto



Montaje corto

En el montaje corto, el amperímetro no mide la intensidad que pasa por la resistencia. Por las leyes de Kirchhoff, mide la intensidad que pasa por la resistencia más la que pasa por el voltímetro. En principio esto no debe afectar mucho a la medición, por la gran resistencia interna del voltímetro. Sin embargo está claro que a medida que la resistencia R se acerca al orden de la resistencia interna del voltímetro se va a producir un error sistemático significativo. El montaje corto será más preciso para valores pequeños de R .

Montaje largo



Montaje largo

En el montaje largo, el voltímetro no mide la diferencia de potencial entre ambos bornes de la resistencia. Mide la diferencia de potencial a ambos lados del conjunto amperímetro + resistencia. Al estar conectadas en serie las resistencias se tiene $R_{total} = R_i + R$ y $V = I(R_i + R)$. Como la resistencia interna del amperímetro, R_i es muy pequeña, el efecto que tiene en la medición del voltímetro es insignificativo. Sin embargo, para valores suficientemente pequeños de R , el efecto de la resistencia interna va a ser

significativo y va a causar un error sistemático. El montaje largo será más preciso para valores grandes de R .

Dispositivo Experimental, Procedimiento y Resultados

Se han medido indirectamente resistencias etiquetadas con 50Ω , $1K\Omega$, $1M\Omega$ utilizando ambos montajes, luego se ha calculado la resistencia con la ley de Ohm.

Tabla 1: Montaje corto

	$V(V)$	$I(A)$	$R(\Omega)$
50Ω	4,77	0,0960	49,69
$1K\Omega$	2,08	0,0028	742,85
$1M\Omega$	2,09	0,0	

Tabla 2: Montaje largo

	$V(V)$	$I(A)$	$R(\Omega)$
50Ω	4,97	0,0962	48,85
$1K\Omega$	3,45	0,0048	718,75
$1M\Omega$	0,0	0,0	

En segundo lugar, hemos conectado dos resistencias de 47Ω en serie y hemos medido la diferencia de potencial entre los bornes de la primera resistencia, V_1 ; entre los de la segunda, V_2 y de todo el conjunto V_3 .

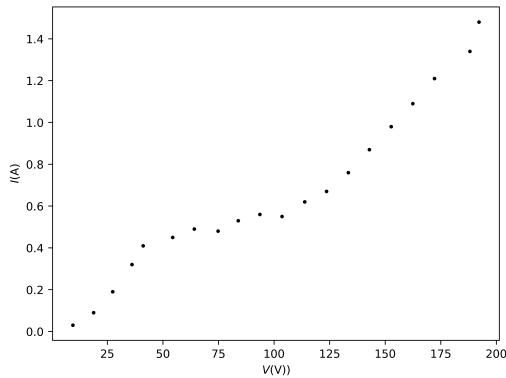
$$V_1 = 4,99V \quad V_2 = 4,97V \quad V_3 = 9,91V$$

Finalmente hemos tomado una bombilla y hemos medido directamente su resistencia, $2,630\Omega$. Luego hemos medido indirectamente la resistencia. Los datos son los siguientes.

Tabla 3:

$V(mV)$	$I(mA)$	$V/I(\Omega)$
9,5	0,03	316,67
18,8	0,09	208,89
27,4	0,19	144,21
36,1	0,32	112,81
41,1	0,41	100,24
54,4	0,45	120,89
64,1	0,49	130,82
74,8	0,48	155,83
83,9	0,53	158,3
93,6	0,56	167,14
103,6	0,55	188,36
113,8	0,62	183,55
123,6	0,67	184,48
133,4	0,76	175,53
142,9	0,87	1313,68
152,7	0,98	155,82
162,4	1,09	148,99
172,2	1,21	142,31
188,1	1,34	140,37
192,2	1,48	129,86

Mostramos en la siguiente figura la curva característica de la bombilla.



Conclusiones

En las tablas 1 y 2 observamos que el montaje corto es más preciso para valores pequeños, como se ha predicho el el fundamento teórico. La comparación de los métodos para grandes resistencias no ha sido posible ya que en el montaje largo entre el voltímetro y resistencia bloqueaban toda la corriente.

En el circuito de las dos resistencias de 47Ω se observa $V_1 + V_2 \approx V_3$ como era de esperar.

El valor de la resistencia obtenido con el multímetro difiere bastante de los de la Tabla 3, lo más seguro es que 1 multímetro utilice un voltaje muy bajo. Respecto a la curva característica de la bombilla, parece que la resistencia no es constante y depende del voltaje, esto se debe a que a medida que sube el voltaje el filamento de la bombilla se calienta y emite luz, es decir quita más energía a la corriente y por lo tanto genera más resistencia

Referencias

[1] Manual de la asignatura. Versión 3.7

[2] https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/5_practica_corriente_continua_2/prak5.html 17/0672022

Descarga de un condensador

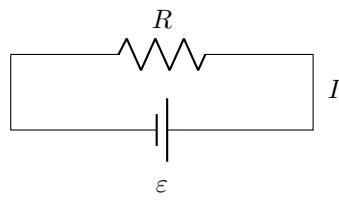
Andoni Latorre Galarraga
alatorre73@alumno.uned.es

Resumen

Se calcula el tiempo de media descarga de un condensador. También se calcula la constante RC de dos circuitos monitorizando el voltaje y el tiempo a medida que se descarga un condensador. El experimento se ha realizado siguiendo el proceso detallado en [2].

Fundamento Teórico

Ley de Ohm



La ley de Ohm dice que la diferencia de potencial entre ambos bornes de un conductor, ε , es igual al producto de la resistencia de dicho conductor, R , y la intensidad de la corriente, I .

$$\varepsilon = IR$$

Descarga de un condensador

Para cargar un condensador es suficiente conectarlo a una fuente de alimentación. Una vez cargado, si se conecta a una resistencia, R , el condensador comienza a descargarse. El proceso de descarga se debe al paso de corriente entre las placas del condensador. En un instante de tiempo dt la cantidad de carga que pasa de una placa a otra es Idt donde I es la intensidad de la corriente. Este valor tiene que ser, por la conservación de carga, igual al cambio de carga,

$$Q,$$

$$Idt = -dQ \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -I$$

Por otra parte, sabemos que la carga del condensador satisface la ecuación,

$$Q = CV = CRI$$

Combinando las dos ecuaciones deducidas,

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$Q = Q_0 e^{\frac{-t}{RC}}$$

Dividiendo entre C ,

$$V = V_0 e^{\frac{-t}{RC}}$$

Podemos calcular el tiempo que tarda el condensador en llegar a la mitad de voltaje.

$$\frac{V_0}{2} = V_0 e^{\frac{-t}{RC}} \Rightarrow t = RC \ln 2$$

De la ecuación de la evolución del voltaje con el tiempo, tomando logaritmos,

$$\ln V = \frac{-1}{RC} t + \ln V_0$$

obtenemos una relación lineal entre $\ln V$ y t (resaltados en azul).

Dispositivo Experimental, Procedimiento y Resultados

Montamos un circuito como se indica en el siguiente esquema.

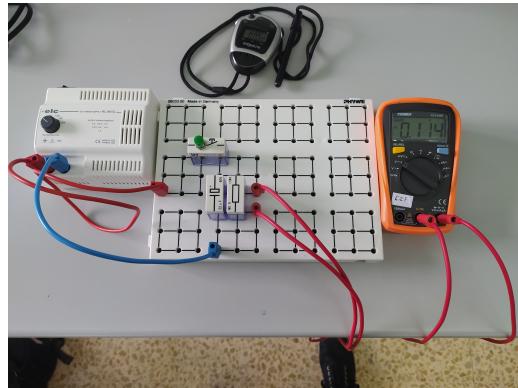
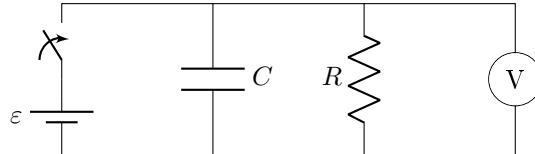


Figura 1: Circuito montado.

Hemos medido la resistencia que tenía un valor nominal de $1M\Omega$ con el multímetro, hemos obtenido $(0,997 \pm 0,001)M\Omega$. También hemos tomado 4 valores de el tiempo de media descarga.

Tabla 1:

$t_{1/2}(\text{s})$
14,28
14,29
14,44
14,15

Para el error tomamos la dispersión y dividimo entre $\sqrt{4}$ como se indica en [1] p. 48-51.

$$t_{1/2} = (14,29 \pm 0,07)\text{s}$$

Que nos da un valor de la constante RC del circuito.

$$RC = (20,6 \pm 0,1)\text{s}$$

Tambien hemos tomado el tiempo y el voltaje multiples veces a medida que se descarga el condensador. Los resultados obtenidos son:

Tabla 2:

$t(\text{s})$	$V(\text{V})$
2,00	7,98
3,82	7,22
5,81	6,39
6,06	6,27
8,16	5,53
10,06	5,02
12,12	4,46
14,29	4,02
15,28	3,70
17,01	3,23
18,72	3,05
20,09	2,88
22,09	2,61
24,19	2,26
26,37	2,03

Tomamos el logaritmo del voltaje y calculamos su error.

$$\epsilon_{\ln V} = \frac{\epsilon_V}{V} = \frac{0,001}{V}$$

Tabla 3:

$t(\text{s})$	$\ln V(\ln V)$	$\epsilon_{\ln V}(\ln V)$
2,00	2,07694	0,00013
3,82	1,97685	0,00014
5,81	1,85473	0,00016
6,06	1,83578	0,00016
8,16	1,71019	0,00018
10,06	1,6134	0,0002
12,12	1,4951	0,0002
14,29	1,3913	0,0002
15,28	1,3083	0,0003
17,01	1,1725	0,0003
18,72	1,1151	0,0003
20,09	1,0578	0,0003
22,09	0,9594	0,0004
24,19	0,8154	0,0004
26,37	0,7080	0,0005

En la siguiente figura se representa $\ln V$ frente a t , los errores no se representan por ser muy

pequeños en relación con los valores de las medidas.

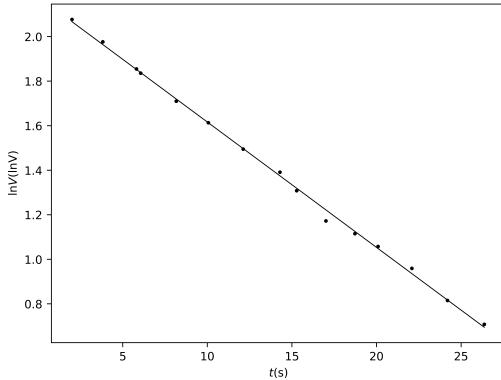


Figura 2: $\ln V$ frente a t junto con la recta de regresión $y = ax + b$.

$$a = (-0,0563 \pm 0,0006)s^{-1}$$

$$b = (2,180 \pm 0,010)\ln(V)$$

Ahora calculamos RC , V_0 y sus errores.

$$RC = \frac{-1}{a} \quad \epsilon_{RC} = \frac{\epsilon_a}{a^2}$$

$$V_0 = e^b \quad \epsilon_{V_0} = e^b \epsilon_b$$

Finalmente obtenemos los resultados:

$$RC = (17,76 \pm 0,19)s$$

$$V_0 = (8,85 \pm 0,09)V$$

Ahora repetiremos el proceso sin resistencia.

Tabla 4:

$t(s)$	$V(V)$	$\ln V(\ln V)$	$\epsilon_{\ln V}(\ln V)$
2,80	8,90	2,18605	0,00011
59,88	6,65	1,89462	0,00015
8,48	8,60	2,15176	0,00012
56,62	6,71	1,90360	0,00015
11,05	8,47	2,13653	0,00012
32,64	7,54	2,02022	0,00013
49,24	6,95	1,93874	0,00014
6,33	8,62	2,15409	0,00012
15,31	8,24	2,10900	0,00012
21,27	8,04	2,08443	0,00012
39,52	7,30	1,98787	0,00014
24,84	7,88	2,06433	0,00013
37,87	7,39	2,00013	0,00014
27,33	7,80	2,05412	0,00013
45,21	7,13	1,96431	0,00014
17,27	8,19	2,10291	0,00012
30,43	7,65	2,03471	0,00013
55,08	6,74	1,90806	0,00015
35,12	7,49	2,01357	0,00013
41,86	7,26	1,98238	0,00014

Representamos $\ln V$ frente a t :

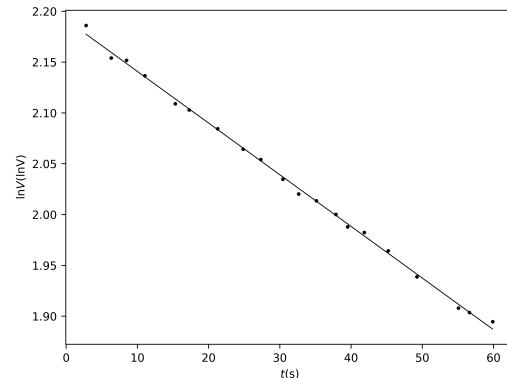


Figura 3: $\ln V$ frente a t junto con la recta de regresión.

También conseguimos los valores de RC y V_0 .

$$RC = (196,9 \pm 1,9)s$$

$$V_0 = (8,950 \pm 0,016)V$$

Conclusiones

Teniendo en cuenta el valor nominal del condensador, $22\mu\text{F}$, podemos calcular la constante $RC = 21,714$ s. Este valor está cerca del que hemos calculado pero difiere significativamente. Los valores de V_0 obtenidos se parecen entre sí aunque la barras de error no tienen puntos en común.

Referencias

[1] Manual de la asignatura. Versión 3.7

[2] https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/6_practica_descarga_condensador/prak6.html

Ondas estacionarias en una cuerda con extremos fijos

Andoni Latorre Galarraga
alatorre73@alumno.uned.es

Resumen

Fundamento Teórico

Si $E(x, t)$ nos da la posición vertical de una cuerda en el punto x en el instante t y esta cuerda está sometida a una fuerza tangencial T , entonces se satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

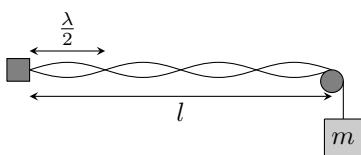
donde μ es la densidad lineal de la cuerda. Si la cuerda tiene longitud l y se fijan los extremos, es decir, $E(0, t) = E(l, t) = 0$ Entonces las soluciones a la ecuación diferencial son:

$$E(x, t) = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right) \cos(2\pi f_n t)$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad f_n = \frac{n}{2l} v \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Dispositivo Experimental

Un extremo de la cuerda se fija a un vibrador mecánico. El otro extremo, se pasa por una polea y se le cuelga una masa, m . A continuación, se muestra un esquema para $n = 4$.



También se utiliza una luz estroboscópica para poder ver la cuerda al sincronizarse la frecuencia de la luz con la de la cuerda.



Figura 1: Dispositivo experimental.

Procedimiento y Resultados

Cuerda rígida

Primero hemos fijado $l = (1,05 \pm 0,01)\text{m}$. También hemos medido la cuerda completa 1,5m y la hemos pesado 2,0g. Obteniendo una densidad de $1,33 \times 10^{-3}\text{Kg/m}$. Para el valor de g tomaremos serán de $9,847\text{ms}^{-2}$, obtenido de [3] sabiendo que la latitud del laboratorio es de unos $43,3305^\circ$. Hemos obtenido los valores de $\lambda/2$ y f para 5 valores de m .

Tabla 1: Cuerda rígida.

$m(\text{kg})$	$T(\text{N})$	n	$v_{teo}(\text{m/s})$	$f_{teo}(\text{Hz})$	$\lambda_{teo}(\text{m})$	$f_{exp}(\text{Hz})$	$\lambda_{exp}(\text{m})$	$v_{exp}(\text{m/s})$	$v_{exp}^2(\text{m}^2/\text{s}^2)$
0,5143	5,06	1	61,71	29,38	2,1	31,0	2,08	65,1	4238,01
		2		58,77	1,05	59,0	1,05	61,95	3837,8
		3		88,15	0,7	90,5	0,7	63,35	4013,22
		4		117,54	0,525	113,0	0,53	59,33	3519,46
0,2623	2,58	1	44,07	20,98	2,1	19,2	2,1	40,32	1625,7
		2		41,97	1,05	39,6	1,07	41,58	1728,9
		3		62,95	0,7	65,3	0,714	45,71	2089,4
		4		83,94	0,525	73,8	0,54	38,74	1501,18
0,1256	1,24	2	30,49	29,04	1,05	29,3	1,08	30,77	946,49
		3		43,56	0,7	41,8	0,72	29,26	856,15
		4		58,08	0,525	56,6	0,55	29,72	882,98
		5		72,61	0,42	75,7	0,42	31,79	1010,86
0,1841	1,81	2	36,92	35,16	1,05	36,2	1,08	38,01	1444,76
		3		52,74	0,7	53,7	0,72	37,59	1413,01
		4		70,32	0,525	68,6	0,52	36,02	1297,08
		5		87,9	0,42	77,9	0,44	32,72	1070,47
0,0616	0,61	1	21,36	10,17	2,1	11,2	2,1	23,52	553,19
		2		20,34	1,05	21,7	1,04	22,79	519,16
		3		30,51	0,7	30,1	0,75	21,07	443,94
		4		40,68	0,525	37,2	0,548	19,53	381,42

Representando v^2 frente a T . Y calculando la recta de regresión $y = ax + b$. Se tiene que

$$\mu = \frac{1}{a} \quad \epsilon_\mu = \frac{\epsilon_a}{a^2}$$

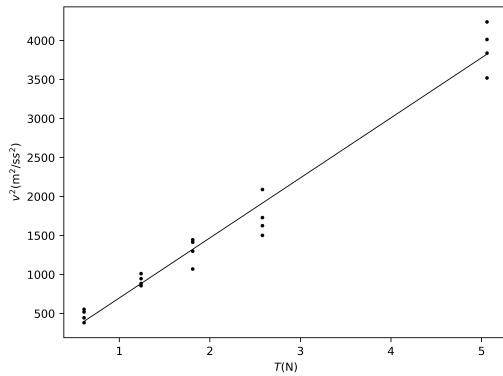


Figura 2: Cuerda rígida.

La densidad obtenida es:

$$\mu = (1,30 \pm 0,005) \times 10^{-3} \text{Kg/m}$$

Cuerda elástica

El procedimiento es análogo al de la cuerda rígida. La cuerda mide 1,2m y pesa 7.0g. Se tiene una densidad de $5,83 \times 10^{-3} \text{Kg/m}$.



Figura 3: Cuerda elástica con $n = 2$.

Tabla 2: Cuerda elástica.

$m(\text{kg})$	$T(\text{N})$	n	$v_{teo}(\text{m/s})$	$f_{teo}(\text{Hz})$	$\lambda_{teo}(\text{m})$	$f_{exp}(\text{Hz})$	$\lambda_{exp}(\text{m})$	$v_{exp}(\text{m/s})$	$v_{exp}^2(\text{m}^2/\text{s}^2)$
0,0616	0,61	2	10,2	9,71	1,05	15,3	1,08	16,07	258,08
		3		14,57	0,7	22,5	0,72	15,75	248,06
		4		19,43	0,525	32,0	0,534	16,8	282,24
		5		24,29	0,42	35,0	0,42	14,7	216,09
0,1615	1,59	1	16,52	7,86	2,1	9,1	2,1	19,11	365,19
		2		15,73	1,05	20,4	1,05	21,42	458,82
		3		23,59	0,7	28,9	0,73	20,23	409,25
		4		31,46	0,525	37,6	0,54	19,74	389,67
0,2629	2,59	2	21,07	20,07	1,05	20,4	1,04	21,42	458,82
		3		30,1	0,7	30,6	0,73	21,42	458,82
		4		40,14	0,525	40,8	0,54	21,42	458,82
		5		50,17	0,42	51,0	0,434	21,42	458,82
0,3136	3,09	1	23,01	10,96	2,1	11,6	2,1	24,36	593,41
		2		21,92	1,05	23,5	1,05	24,68	608,86
		3		32,88	0,7	34,0	0,73	23,8	566,44
		4		43,84	0,525	44,6	0,55	23,42	548,26
0,3622	3,57	1	24,73	11,78	2,1	13,8	2,1	28,98	839,84
		2		23,56	1,05	27,6	1,06	28,98	839,84
		3		35,33	0,7	41,5	0,71	29,05	843,9
		4		47,11	0,525	55,4	0,53	29,09	845,94

Representando v^2 frente a T . Y calculando la recta de regresión $y = ax + b$. Se tiene que

$$\mu = \frac{1}{a} \quad \epsilon_\mu = \frac{\epsilon_a}{a^2}$$

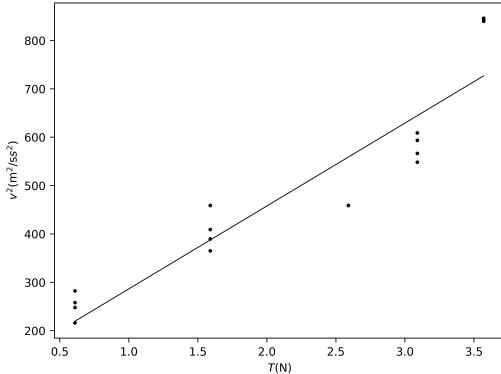


Figura 4: Cuerda elástica.

La densidad obtenida es:

$$\mu = (5,8 \pm 0,6) \times 10^{-3} \text{Kg/m}$$

Conclusiones

En las tablas 1 y 2 se observa que las predicciones teóricas se acercan mucho a las observaciones experimentales, confirmando las ecuaciones teóricas. Por otra parte, las mediciones indirectas de las densidades de las cuerdas son muy acertadas, tienen poco error y coinciden con las mediciones directas de las densidades.

Referencias

[1] Manual de la asignatura. Versión 3.7

[2] https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/7_practica_ondas_estacionarias/prak7.html 17/0/2022

[3] <https://www.sensorsone.com/local-gravity-calculator/> 15/6/2022

Cálculo del calor de vaporización del agua

Andoni Latorre Galarraga
alatorre73@alumno.uned.es

Resumen

Se calienta agua utilizando una corriente eléctrica de la cual se mide el voltaje y la intensidad. También se mide la cantidad de agua evaporada. A partir de los datos experimentales se calcula el calor de vaporización del agua. El experimento se realiza de acuerdo con el proceso descrito en [2].

Fundamento Teórico

Una corriente eléctrica de intensidad I que circula a través del agua mediante una diferencia de potencial V proporciona una potencia $W = IV$ al agua. En condiciones ideales, tras un tiempo τ ,

$$W\tau = Mq$$

Donde M son los gramos de agua vaporizados y q el calor de vaporización del agua. En la práctica, se tiene que

$$(W - P)\tau = (M + m)q$$

Donde P representa las pérdidas por unidad de tiempo y m el agua que no entra en el condensador. Esto se puede solucionar con el método de las diferencias, donde se mide con dos potencias diferentes y se tiene

$$(W_1 - W_2)\tau = (M_1 - M_2)q$$

Procedimiento y Resultados

Primero se ha pesado el vaso donde se va a recoger el agua, el resultado es de $(84,33 \pm 0,01)$ g. Durante un tiempo $\tau = 360,1 \pm 0,1$ s. Se mantiene una potencia constante y al final del tiempo se calcula la masa evaporada por

diferencia, utilizando la cantidad de agua condensada. La potencia se mide indirectamente a partir de la intensidad y el voltaje. Los datos obtenidos se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 1:

$I(A)$	$V(V)$	$M(g)$
1,6	143,3	111,31
1,45	133,0	106,15
1,28	125,4	100,78
1,21	117,6	97,89
1,12	109,4	94,85
1,0	98,8	90,97
0,95	94,8	89,59
1,66	163,4	120,59
1,73	173,9	123,34
1,63	167,6	119,26

Se calcula $W = IV$ y $\delta M = M - m$. Luego, se calcula la energía $E = Wm$.

$\Delta M(g)$	$W(W)$	$E(\text{cal})$
26,98	229,28	19335,18
21,82	192,85	16263,04
16,45	160,51	13535,98
13,56	142,30	11999,82
10,52	122,53	10332,79
6,64	98,80	8331,80
5,26	90,06	7594,76
36,26	271,24	22874,01
39,01	300,85	25370,43
34,93	273,19	23037,94

Representando ΔM frente a E junto con la recta de regresión $y = ax + b$, se tiene la siguiente figura:

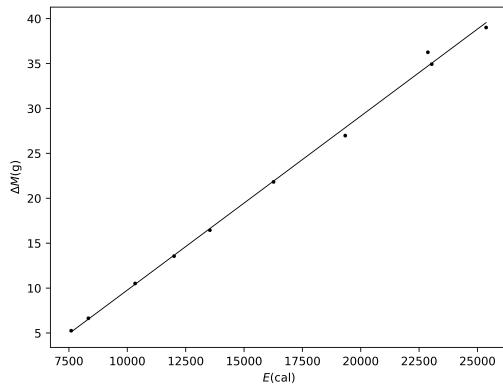


Figura 1: ΔM frente a E .

La pendiente de la recta es igual a $\frac{1}{q}$, de donde se deduce:

$$q = \frac{1}{a} \quad \epsilon_q = \frac{\epsilon_a}{a^2}$$

Como nuestro valor de a es $(0,00194 \pm 0,00003)\text{g/cal}$.

$$q = (516 \pm 9)\text{cal/g}$$

Conclusiones

El valor de q obtenido es muy cercano al valor real $\approx 530\text{cal/g}$. El valor obtenido experimentalmente tiene un error de menos del 2 %. En resumen, un resultado preciso aunque algo inexacto. Es un resultado aceptable que difiere con el valor real en menos del 3 %.

Referencias

[1] Manual de la asignatura. Versión 3.7

[2] https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/8_practica_vaporizacion_agua/prak8.html

17/6/2022