

# Cálculo de la aceleración de la gravedad mediante un péndulo físico

Andoni Latorre Galarraaga  
alatorre73@alumno.uned.es

## Resumen

Se estudia la relación entre el periodo de oscilación de un péndulo físico y la distancia entre el eje de rotación y el centro de masas de dicho péndulo. A partir de los datos experimentales se calcula el valor de la aceleración de la gravedad  $g$ . El experimento se desarrolla siguiendo el proceso explicado en [2].

## Fundamento Teórico

Si se tiene un cuerpo rígido, de masa  $M$ , suspendido en un eje de giro  $O$  a una distancia  $b$  del centro de masas del objeto,  $C$ . Cuando el objeto está desplazado de su posición de equilibrio por un ángulo  $\theta$ . La aceleración tangencial del centro de masas se puede expresar de dos formas distintas, al igualar estas se tiene.

$$-Mgb \sin(\theta) = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Donde  $I$  es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje  $O$ .

Cuando se tienen valores pequeños de  $\theta$ , menores a  $20^\circ$ , se puede aproximar  $\theta \sim \sin(\theta)$ .

$$-Mgb\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Que tiene por solución  $\sin\left(\theta\sqrt{\frac{Mgb}{I}} + \phi\right) + C$ .

Que corresponde a un movimiento armónico simple de periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgb}}$$

Si se llama  $I_0$  al momento de inercia respecto al eje paralelo a  $O$  que pasa por  $C$ , por el teorema

de Huygens-Steiner, se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + Mb^2}{Mgb}}$$

$I_0$  está relacionado con el radio de giro,  $k$ , mediante la relación  $k = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$ . Por lo tanto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Mk^2 + Mb^2}{Mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + b^2}{gb}}$$

Utilizaremos esta última expresión para el periodo de oscilación, en nuestro cálculo de  $g$ . Linealizamos la expresión de la siguiente manera:

$$bT^2 = 4\pi^2 \frac{k^2}{g} + 4\pi^2 \frac{b^2}{g}$$

Obtenemos una relación lineal entre  $bT^2$  y  $b^2$  (resaltados en azul). Estimaremos la pendiente y la ordenada en el origen de dicha relación para obtener el valor de  $g$ .

## Dispositivo Experimental

En nuestro experimento hemos utilizado una varilla metálica como péndulo. La varilla tiene unas marcas cada centímetro. Al dadas estas marcas, supondremos que no hay error en

$b$ . Estas marcas son tales que se puede situar un pequeño trozo de metal mediante un tornillo de presión para sujetar la varilla y que esta tenga como eje de rotación la marca en la que se sitúa el metal triangular. Además, la varilla central indica el centro de masas. De esta manera, contando ranuras desde el centro de la varilla podemos conocer el valor de  $b$ . En la Fig. 1 se puede ver el dispositivo experimental ya montado.

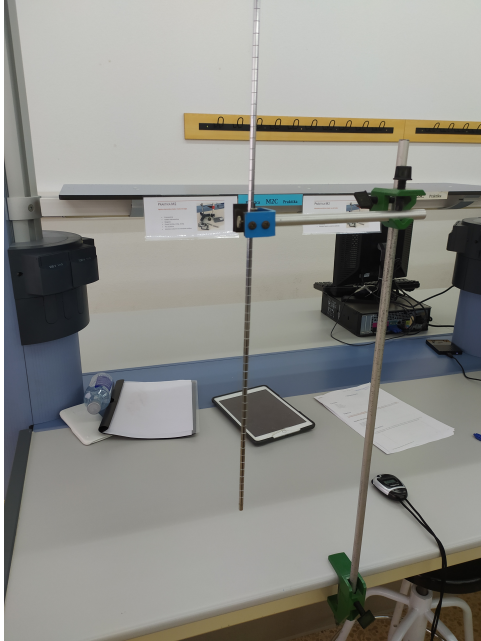


Figura 1: Dispositivo experimental montado.

## Procedimiento y Resultados

Hemos tomado mediciones para  $b \in \{8\text{cm}, 9\text{cm}, \dots, 30\text{cm}, 31\text{cm}\}$ . Para cada valor de  $b$  hemos tomado 5 tiempos independientes, cada uno de estos correspondiente a 10 oscilaciones (excepto para  $23\text{cm} \leq b \leq 26\text{cm}$  que hemos tomado 20). Siempre hemos tenido cuidado de que la varilla no oscile con ángulos superiores a  $20^\circ$  como se indica en [2]. En la Tabla 1 se muestran los datos obtenidos.

Tabla 1:

$b(\text{m})$	$T_1(\text{s})$	$T_2(\text{s})$	$T_3(\text{s})$	$T_4(\text{s})$	$T_5(\text{s})$
0,08	15,07	15,13	15,19	15,13	15,00
0,09	14,31	13,28	14,31	14,28	14,38
0,10	13,91	13,91	13,97	13,82	13,78
0,11	13,53	13,44	13,25	13,37	13,78
0,12	13,25	13,37	13,40	13,16	13,19
0,13	13,06	12,97	13,03	13,12	12,97
0,14	12,84	12,81	12,88	12,84	12,72
0,15	12,56	12,50	12,72	12,69	12,78
0,16	12,53	12,63	12,59	12,50	12,47
0,17	12,44	12,41	12,53	12,44	12,50
0,18	12,44	12,43	12,50	12,54	12,47
0,19	12,34	12,47	12,31	12,35	12,28
0,20	12,37	12,50	12,37	12,47	12,43
0,21	12,16	12,40	12,56	12,60	12,19
0,22	12,46	12,53	12,62	12,53	12,37
0,23	12,59	12,50	12,41	12,62	12,56
0,24	12,56	12,62	12,57	12,59	12,59
0,25	25,03	25,22	25,31	25,18	25,35
0,26	25,34	25,37	25,41	25,44	25,25
0,27	25,50	25,47	25,59	25,57	25,60
0,28	25,78	24,38	25,78	25,72	25,59
0,29	12,97	12,94	13,03	13,00	13,00
0,30	13,00	13,06	12,91	13,03	13,07
0,31	12,94	13,12	13,19	13,13	13,16
0,32	13,29	13,22	13,35	13,09	13,19
0,33	13,50	13,54	13,21	13,41	13,22

Tomaremos como valor esperado del tiempo,  $T^*$ , la media aritmética de los 5 tiempos (divididos entre 10 o 20 según corresponda). Para estimar el error absoluto,  $\epsilon_{T^*}$ , el error estándar de la media como se indica en [1] p. 48.

$$T^* = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \frac{T_i}{10} \quad \epsilon_{T^*} = \sqrt{\frac{1}{5^2} \sum_{i=1}^5 \left( \frac{T_i}{10} - T^* \right)^2}$$

Los redondeos se han realizado como se indica en [1] p. 22. Primero se redondea  $\epsilon$  a una cifra significativa (dos si la primera es 1). Después, se redondea  $T^*$  de manera que la última cifra significativa se del mismo orden decimal que  $\epsilon$ . Ahora, podemos calcular  $T^{*2}b$  y su error correspondiente con la ecuación 3.6 de [1]. Estos se redondean como antes. El error de  $T^{*2}b$  viene

dado por:

$$\epsilon_{T^{*2}b} = \sqrt{\left|\frac{dT^{*2}b}{dT^*}\right|^2} \epsilon_{T^*}^2 = 2bT^* \epsilon_{T^*}$$

En la Tabla 2 se muestran los valores de  $T^*$  y  $T^{*2}b$  junto con sus errores.

Tabla 2:

$b(\text{m})$	$T^*(\text{s})$	$\epsilon_{T^*}(\text{s})$	$T^{*2}b(\text{s}^2\text{m})$	$\epsilon_{T^{*2}b}(\text{s}^2\text{m})$
0,08	1,510	0,003	0,1824	0,0007
0,09	1,411	0,019	0,179	0,005
0,10	1,388	0,003	0,1927	0,0008
0,11	1,347	0,008	0,200	0,002
0,12	1,327	0,004	0,2113	0,0013
0,13	1,303	0,003	0,2207	0,0010
0,14	1,282	0,002	0,2301	0,0007
0,15	1,265	0,005	0,2400	0,0019
0,16	1,254	0,003	0,2516	0,0012
0,17	1,246	0,002	0,2639	0,0008
0,18	1,2476	0,0018	0,2802	0,0008
0,19	1,235	0,003	0,2898	0,0014
0,20	1,243	0,002	0,3090	0,0010
0,21	1,238	0,008	0,322	0,004
0,22	1,250	0,004	0,344	0,002
0,23	1,254	0,003	0,3617	0,0017
0,24	1,2586	0,0009	0,3802	0,0005
0,25	1,261	0,003	0,3975	0,0019
0,26	1,2681	0,0015	0,4181	0,0010
0,27	1,2773	0,0012	0,4405	0,0008
0,28	1,273	0,012	0,454	0,009
0,29	1,2988	0,0014	0,4892	0,0011
0,30	1,301	0,003	0,508	0,002
0,31	1,311	0,004	0,533	0,003
0,32	1,323	0,004	0,560	0,003
0,33	1,338	0,006	0,591	0,005

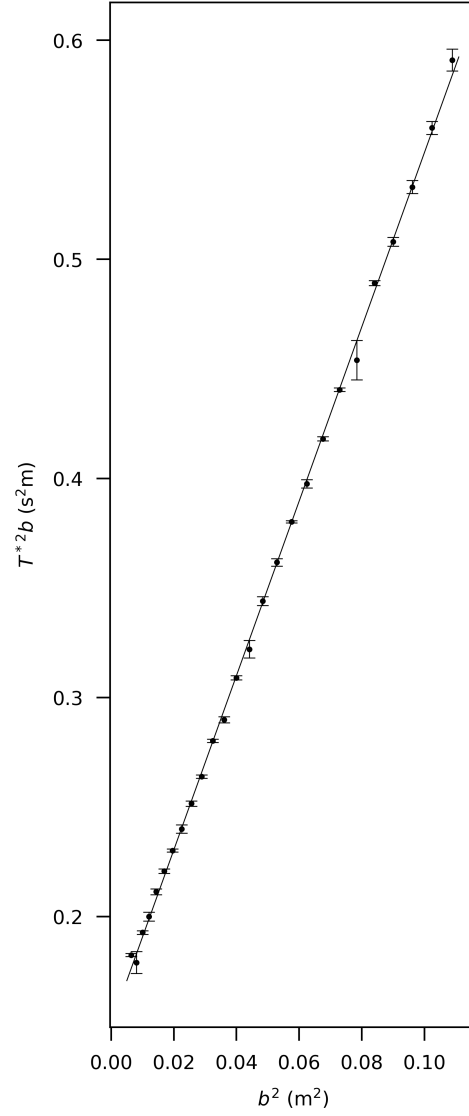


Figura 2:  $T^{*2}b$  frente a  $b^2$  junto con la recta de regresión  $y = mx + n$ .

Se tiene que

$$m = 4 \frac{\pi^2}{g} = (3,98 \pm 0,02) \text{ s}^2\text{m}^{-1}$$

$$n = 4\pi^2 \frac{k^2}{g} = (0,1508 \pm 0,0012) \text{ s}^2\text{m}$$

Finalmente, se hace el cálculo de la regresión lineal y sus errores con las ecuaciones de [1] p. 79-80. En la Fig. 2 se pueden ver los valores de  $T^{*2}b$  con sus barras de error frente a los valores de  $b^2$ .

Utilizando la ecuación 3.6 de [1] podemos calcular los errores de  $g$  y  $k$ .

$$\epsilon_g = \sqrt{\left|\frac{dg}{dm}\right|^2} \epsilon_m = \sqrt{\left|\frac{d\frac{4\pi^2}{m}}{dm}\right|^2} \epsilon_m = \frac{4\pi^2}{m^2} \epsilon_m$$

$$\epsilon_k = \sqrt{\left|\frac{\partial k}{\partial g}\right|^2 \epsilon_g^2 + \left|\frac{\partial k}{\partial n}\right|^2 \epsilon_n^2}$$

$$\epsilon_k = \sqrt{\left|\frac{\partial \frac{\sqrt{ng}}{2\pi}}{\partial g}\right|^2 \epsilon_g^2 + \left|\frac{\partial \frac{\sqrt{ng}}{2\pi}}{\partial n}\right|^2 \epsilon_n^2}$$

$$\epsilon_k = \sqrt{\left|\frac{n}{4\pi\sqrt{ng}}\right|^2 \epsilon_g^2 + \left|\frac{g}{4\pi\sqrt{ng}}\right|^2 \epsilon_n^2}$$

$$\epsilon_k = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n}{g} \epsilon_g^2 + \frac{g}{n} \epsilon_n^2}$$

Obtenemos

$$g = (9,92 \pm 0,05) \text{ ms}^{-2}$$

$$k = (0,195 \pm 0,004) \text{ m}$$

## Conclusiones

El valor de la gravedad local se puede consultar en [3] sabiendo que la latitud del laboratorio es de unos  $43,3305^\circ$ . El valor obtenido en [3] es de  $9,8047 \text{ ms}^{-2}$ . El valor obtenido experimentalmente,  $(9,92 \pm 0,05) \text{ ms}^{-2}$ , está cerca del valor de [3] pero no se encuentra dentro del error. Lo más seguro es que esto sea consecuencia de errores sistemáticos, por ejemplo, que se le aplique una pequeña fuerza a la varilla al soltarla. No obstante, el error relativo en el valor de  $g$  es del 0,5% y el resultado se acerca al valor real. Considero que el resultado es bastante bueno.

Respecto al valor de  $k$ , en [2] se dan 3 métodos para su cálculo. El primero consiste en observar que el periodo  $T$  toma su valor mínimo cuando  $b = k$ .

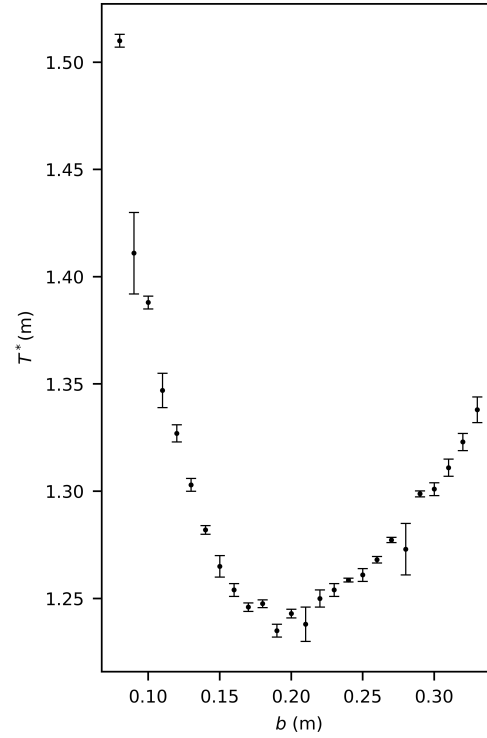


Figura 3:  $T^*$  frente a  $b$ . Se observa un mínimo alrededor de 0,19 m.

Calculemos el valor mínimo de  $T$ . Derivando  $T$  respecto a  $b$  se tiene,

$$\frac{dT}{db} = \frac{d\left(2\pi\sqrt{\frac{k^2+b^2}{gb}}\right)}{db} = \pi \frac{b^2 - k^2}{gb^2} \sqrt{\frac{gb}{k^2 + b^2}}$$

Observamos que la derivada toma el valor 0 cuando  $k = b$ . En la Fig. 3 se muestran los valores de  $T^*$  con sus errores, los cuales se pueden consultar en la Tabla 2, frente a los valores de  $b$ . El mínimo parece estar alrededor de 0,19 m. El segundo método consiste en un cálculo teórico del radio de giro. Sabiendo que el momento de inercia de una varilla de longitud  $L$  y masa  $M$  es  $I = \frac{1}{12}ML^2$ .

$$Mk^2 = \frac{1}{12}ML^2 \Rightarrow k = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

Sabiendo que nuestra varilla mide  $(66 \pm 0,1)$  cm y utilizando la ecuación 3.6 de [1].

$$\epsilon_k = \sqrt{\left|\frac{dk}{dL}\right|^2} \epsilon_L = \frac{1}{\sqrt{12}} \epsilon_L$$

$$k = (0,1905 \pm 0,0003)\text{m}$$

El tercer método consiste en tomar el valor obtenido experimentalmente,  $k = (0,195 \pm 0,004)$  m. De nuevo, muy cerca del valor teórico y del observado en la Fig. 3. El valor de  $k$  obtenido experimentalmente es bastante bueno y tiene un error relativo del 2%. En mi opinión el mejor

valor de  $k$  es el obtenido teóricamente, tiene un error relativo del 0,16 % y está menos expuesto a errores sistemáticos.

## Referencias

- [1] Manual de la asignatura. Versión 3.7
- [2] [https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/1\\_practica\\_pendolo\\_fisico/prak1.html](https://uned-labo.netlify.app/practicas/te/1_practica_pendolo_fisico/prak1.html) 14/5/2022
- [3] <https://www.sensorsone.com/local-gravity-calculator/> 14/5/2022