Homomorfismos

Andoni Latorre Galarraga

Definición:
Sean $(G_1,\cdot)$ y $(G_2,*)$ grupos. Decimos que $f\ :\ G_1 \longrightarrow G_2$ es un homomorfismo de de grupos, si verifica

$$f(x\cdot y)=f(x)*f(y)\quad \forall x,y\in G_1$$

Ejemplo:
Homomorfismo trivial $f(x)=e_2\quad \forall x\in G_1$.
Definición:
Un homomorfismo inyectivo se llama monomorfismo.
Un homomorfismo suprayectivo se llama epimorfismo.
Un homomorfismo biyectivo se llama isomorfismo.
Si existe un isomorfismo entre G_1 y G_2 decimos que son isomorfos y escribimos $G_1\simeq G_2$.
Proposición:
Ser isomorfo es relación de equivalencia.
Dem:
Propiedad reflexiva: $\begin{array}{rccc} 1_G: & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g \end{array}$ es isomorfismo.

Propiedad simétrica: Si existe φ isomorfismo $\begin{array}{rccc} \varphi: & G_1 & \longrightarrow & G_2 \\ & g & \longmapsto & \varphi(g) \end{array}$ Por ser biyectiva existe $\tilde{\varphi}$ bien definida $\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}: & G_2 & \longrightarrow & G_1 \\ & \varphi(g) & \longmapsto & g \end{array}$ Veamos que $\tilde{\varphi}$ es isomorfismo.

$$\tilde{\varphi}(\underbrace{x}_{=\varphi(g)}*\underbrace{y}_{=\varphi(h)})=\tilde{\varphi}(\varphi(g)*\varphi(h))=\tilde{\varphi}(\varphi(g\cdot h))=g\cdot h=\tilde{\varphi}(\varphi(g))\cdot\tilde{\varphi}(\varphi(h))=\tilde{\varphi}(x)\cdot\tilde{\varphi}(y)$$

Propiedad transitiva: Sabemos que la composición de funciones biyectivas es biyectiva. Veamos que la composición de homomorfismos es homomorfismo. Sean $(G_1,\overset{1}{*})$, $(G_2,\overset{2}{*})$ y $(G_3,\overset{3}{*})$ grupos. Si f y g son homomorfismos, entonces $g\circ f$ es homomorfismo.

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \xrightarrow{g} & G_2 & \xrightarrow{f} & G_3 \\ g_1 & \longmapsto & g_2 & \longmapsto & g_3 \end{array}$$

$$f(g(x\overset{1}{*}y))=f(g(x)\overset{2}{*}g(y))=f(g(x))\overset{3}{*}f(g(y))$$

Definición:
Si $(G_1,\cdot)=(G_2,*)=G$ se llama endomorfismo, y si es biyectivo automorfismo.
Elemplo:
Automorfismo identidad $1_G(x)=x\quad \forall x\in G$.
Proposición:
Si $f\ :\ G_1\longrightarrow G_2$ es un homomorfismo de de grupos, entonces se verifican

i) $f(e_1)=e_2$
ii) $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$
iii) Si $o(a)=n<\infty$, entonces $f(a)^n=e_2$
iv Si $H_1\leq G_1$, entonces $f(H_1)\leq G_2$
v) Si $H_2\leq G_2$, entonces $f^1(H_2)\leq G_1$

Dem:
i) $f(e_1)=f(e_1\cdot e_1)=f(e_1)*f(e_1)$, entonces $f(e_1)=f(e_1)*f(e_1)\Leftrightarrow f(e_1)^{-1}*f(e_1)=f(e_1)^{-1}*f(e_1)*f(e_1)\Leftrightarrow e_2=e_2*f(e_1)=f(e_1)$.
ii) Veamos que $f(a)*f(a^-1)=e_2=f(a^{-1})*f(a)$.Aplicando *i)* $f(a)*f(a^{-1})=f(a\cdot a^{-1})=f(e_1)=e_2=f(e_1)=f(a^{-1}\cdot a)=f(a^{-1})*f(a)$.
iii) $f(a^n)=f(a)*\overset{n}{\cdots}*f(a)=f(a)^n$,entonces $e_2=f(e_1)=f(a^{o(a)})=f(a)^{o(a)}$
iv)

$$e_2\in f(H_1)\qquad f(\underbrace{e_1}_{\in H_1})=e_2$$

$$f(y)\in f(H_1)\Rightarrow f(y)^{-1}\in f(H_1)\qquad f(y)^{-1}=f(\underbrace{y^{-1}}_{\in H_1})\in f(H_1)$$

v)

$$e_1 \in f^{-1}(H_2) \qquad f^{-1}(\underbrace{e_2}_{\in H_2}) \ni e_1$$
$$y \in f^{-1}(H_2) \Rightarrow y^{-1} \in f^{-1}(H_1) \qquad f(y) \in H_2 \Rightarrow f(y)^{-1} \in H_2 \Rightarrow f(y^{-1}) \in H_2 \Rightarrow y^{-1} \in f^{-1}(H_2)$$

Definición:
Dado un homorfismo f de $(G_1, \cdot)$ en $(G_2, *)$. Llamamos núcleo de f a $Ker(f) = \{g \in G_1 \mid f(g) = e_2\}$.
Propocición:
Dado un homorfismo f de $(G_1, \cdot)$ en $(G_2, *)$. $Ker(f) \trianglelefteq G_1$
Dem:
Primero veamos que es subgrupo. $e_1 \in Ker(f)$ ya que $f(e_1) = e_2$. Si $x \in Ker(f)$, entonces $x^{-1} \in Ker(f)$ ya que $e_2 = f(e_1) = f(x^{-1}x) = f(x^{-1}) * f(x) = f(x^{-1}) * e_2 = f(x^{-1})$. Ahora veamos que es subgrupo normal probando que $x \in Ker(f) \Rightarrow y^{-1}xy \in Ker(f)$. Observamos que $f(y^{-1}xy) = f(y^{-1}) * f(x) * f(y) = f(y)^{-1} * e - 2 * f(y) = e_2$.
Proposición:
Dado un homorfismo f de $(G_1, \cdot)$ en $(G_2, *)$. f es inyectivo sii $Ker(f) = \{e_1\}$.
Dem:
Si f es inyectiva $f(a) = e_2 = f(e_1)$, entonces $a = e_1$. Si $f(a) = f(b)$, entonces $e_2 = f(a) * f(b)^{-1} = f(a) * f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) \in Ker(f) = \{e_1\}$, ahora $ab^{-1} = e_1$ y $a = b$
Primer teorema de isomorfía de grupos:
Dado un homorfismo f de $G_1, \cdot)$ en $(G_2, *)$. $G_1/Ker(f) \simeq f(G_1)$.
Dem:
Consideramos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & G_1/Ker(f) & \longrightarrow & f(G_1) \\ & aKer(f) & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

Veamos que es isomorfismo.Primero que es suprayectiva pues todo elemento de $f(G_1)$ es de la forma $f(x)$ con $x \in G_1$. Veamos que es inyectiva, si $aKer(f) \in Ker(\bar{f})$ entonces $f(a) = e_2$ por lo que $a \in Ker(f)$ y $aKer(f) = Ker(f)$. Veamos que es homomorfismo $\bar{f}(aKer(f) \cdot bKer(f)) = \bar{f}((ab)Ker(f)) = f(ab) = f(a) * f(b) = \bar{f}(aKer(f)) * \bar{f}(bKer(f))$.
Definición:
Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Definimos el epimorfismo canónico

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G & \longrightarrow & G/N \\ & g & \longmapsto & gN \end{array}$$

Es epimorfismo ya que todo elemento de G/N es de la forma xN y por lo tanto es imagen de x. Por otra parte, $\pi(xy) = (xy)N = (xN)(yN) = \pi(x)\pi(y)$.
Proposición: Si $f : G \longrightarrow H$ es homomorfismo, entonces $Ker(f) \trianglelefteq G$ y $\begin{array}{rccc} \pi: & G & \longrightarrow & g/Ker(f) \\ & a & \longmapsto & aKer(f) \end{array}$ es un epimorfismo con $Ker(\pi) = Ker(f)$.
Dem:
$Ker(f) \trianglelefteq G$ ya está probado, y $x \in Ker(\pi)$ entonces $xKer(f) = Ker(f)$ y $x \in Ker(f)$. Ahora, si $x \in Ker(f)$, entonces $\pi(x) = xKer(f) = Ker(f)$ y $x \in Ker(\pi)$.
Definición:
Dado un homorfismo f de $G_1, \cdot)$ en $(G_2, *)$.Se tiene la descomposición canonica del homomorfismo

$$f = \underbrace{\iota}_{\text{monomorfismo inclusión}} \circ \underbrace{\bar{f}}_{\text{isomorfismo}} \circ \underbrace{\pi}_{\text{epimorfismo canónico}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{7}{c}{\xrightarrow{\hspace{8cm} f \hspace{8cm}}} \\ G_1 & \xrightarrow{\pi} & G_1/Ker(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & f(G_1) & \xrightarrow{\iota} & G_2 \\ a & \longmapsto & aKer(f) & \longmapsto & f(a) & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

Teorema: Sea $N \trianglelefteq G$. Entonces todo subgrupo de G/N es de la forma H/N con $N \subseteq H \leq G$.
Dem:

Suponganmos que $K \leq G/N$, Sea $H = \{x \in G \mid xN \in K\}$. Veamos que H es subgrupo. Tenemos que $e \in H$ ya que $e_1N = N$ que es el elemento neutro en G/N y por lo tanto esta en K. Veamos que si $y \in H$, entonces $y^{-1} \in H$. Tenemos que $yN \in K$ entonces por ser N subgrupo normal $K \ni (yN)^{-1} = N^{-1}y^{-1} = Ny^{-1} = y^{-1}N$ por lo que $y^{-1} \in H$. Para ver que $N \subseteq H$, si $n \in N$, entonces $nN = N \in K$ por ser el elemento neutro y $n \in H$.
Teorema: Sea $N \trianglelefteq G$. Entonces si $N \leq H \leq G$ entonces $H/N \leq G/N$.
Dem:
Veamos que es subgrupo. Si $x, y \in H$, $xN, yN \in H/N$ entonces $xy \in H$ y $(xy)N \in H/N$. Si $e \in H$, entonces $eN = N$. Si $x \in H$, $xN \in H/N$, entonces $x^{-1} \in H$ y $x^{-1}N \in H/N$, $(xN)(x^{-1}N) = (Nx)(x^{-1}) = N$.
Segundo teorema de isomorfía de grupos:
Sea G un grupo, $N \trianglelefteq G$ y $H \leq G$, entonces

$$\begin{array}{ll} \textit{i)} & N \trianglelefteq NH \\ \textit{ii)} & N \cap H \trianglelefteq H \\ \textit{iii)} & NH/N \simeq H/(N \cap H) \end{array}$$

Dem:
i) Veamos que $(nh)^{-1}N(nh) = N$. $(nh)^{-1}N(nh) = h^{-1}n^{-1}Nnh = h^{-1}Nh = N$.
ii) Veamos que si $h \in H$, entonces $h^{-1}(N \cap H)h = N \cap H$. $(h^{-1}Nh) \cap (h^{-1}Hh) = N \cap H$.
iii) La aplicación $\begin{array}{rccc} \bar{f}: & NH/N & \longrightarrow & H/(N \cap H) \\ & hnN & \longmapsto & h(N \cap H) \end{array}$ es un isomorfismo de grupos. Está bien definida ya que si $hN = h'N$ entonces $h^{-1}h' \in N, H$ y $h(N \cap H) = h'(N \cap H)$. Es homomorfismo ya que $f((hN)(h'N)) = f((hh')N) = (hh')(N \cap H) = h(N \cap H)h'(N \cap H)) = f(hN)f(h'N)$. Es inyectiva ya que si $x \in Ker(f)$, entonces $x \in (N \cap H)$ y $xN = N$, es decir, $Ker(f) = \{N\}$. Es suprayectiva ya que dado un $h \in H$ existe hN tal que $f(hN) = h(N \cap H)$.
Tercer teorema de isomorfia de grupos:
Sea G un grupo y $N \subseteq M$ dos subgrupos normales de G. Entonces se verifican

$$\begin{array}{ll} \textit{i)} & M/N \trianglelefteq G/N \\ \textit{ii)} & (G/N)/(M/N) \simeq G/M \end{array}$$

Dem:
Sabemos que M/N es subgrupo.

$$(gN)^{-1}(mN)(gN) = (g^{-1}mg)N = mN$$

Consideramos la aplicación $\begin{array}{rccc} f: & G/N & \longrightarrow & G/M \\ & xN & \longmapsto & xM \end{array}$, esta bien definida ya que si $xN = yN$, entonces $x^{-1}y \in N \subseteq M$ y $xM = yM$. Es homomorfismo ya que $f((xN)(yN) = f((xy)N) = (xy)M = f(xN)f(yN)$. Es suprayectiva ya que para todo $xM \in G/M$ existe $xN \in G/N$ tal que $f(xN) = xM$. Calculamos $ker(f)$, si $N = f(xM) = xN$ se tiene que $x \in N$ por lo que

$$Ker(f) = \{xM \mid x \in N\} = M/N$$

Por el primer teorema de isomorfía, aplicado a f,

$$(G/N)/Ker(f) = (G/N)/(M/N) \simeq f(G/N) = G/M$$

$$(G/N)/(M/N) \simeq G/M$$