Curvas y superfícies

Andoni Latorre Galarraga

1. Curvas

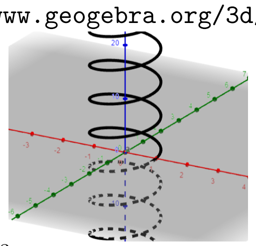
1.1. Curvas parametrizadas regulares

Definición:
Una *curva parametrizada* (diferenciable) es una aplicación difrenciable C^∞, $\alpha : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (donde a y b pueden ser $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente). Decimos que $\alpha(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ es C^∞ si x_i es C^∞ $\forall i$.

Definición:
Al vector $\alpha'(t) = (x_1'(t), \cdots, x_n'(t))$ se le llama *vector tangente (o velocidad)* de α en $t \in (a,b)$.

Ejemplo1:

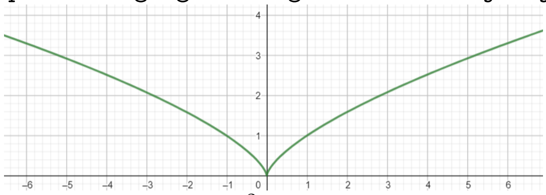
https://www.geogebra.org/3d/gyeab6be



$$\begin{array}{rccl} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (\cos(t), \sin(t), t) \end{array} \qquad \alpha'(t) = (\sin(t), \cos(t), 1$$

Ejemplo 2:

https://www.geogebra.org/calculator/vjehmjyh

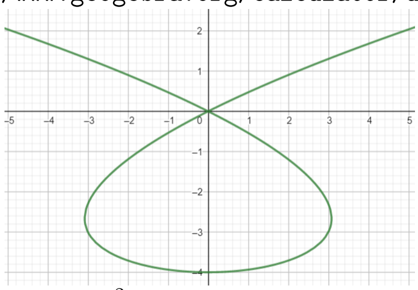


$$\begin{array}{rccl} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t^3, t^2) \end{array} \qquad \alpha'(t) = (3t^2, 2t$$

Punto singular en $t = 0$ ya que $\alpha'(0) = (0,0)$

Ejemplo 3:

https://www.geogebra.org/calculator/une2dbyd

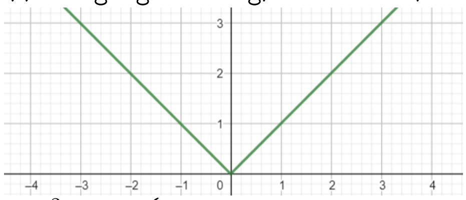


$$\begin{array}{rccl} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t^3 - 4t, t^2 - 4) \end{array} \qquad \alpha'(t) = 3t^2 - 4, 3t$$

Como $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0,0)$ no es inyectiva, pero $\alpha'(2) = (8,4) \neq \alpha'(-2) = (8,-4)$

Ejemplo 4:

https://www.geogebra.org/calculator/hc2fvbne

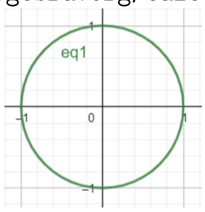


$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t,|t|) \end{array} \qquad \begin{cases} \alpha(t)=(t,t) & \alpha'(t)=(1,1) \quad t>0 \\ \alpha(t)=(t,-t) & \alpha'(t)=(1,-1) \quad t<0 \end{cases}$$

No es de clase $\mathcal{C}^\infty$

Ejemplo 5:

https://www.geogebra.org/calculator/tbb8nj9u



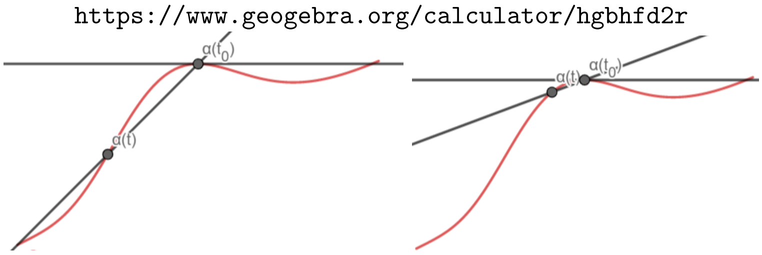
$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(t),\sin(t)) \end{array} \qquad \alpha'(t)=(-\sin(t),\cos(t))$$

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos(2t),\sin(2t)) \end{array} \qquad \beta'(t)=2(-\sin(t),\cos(t))$$

Definición:
Sea $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada $\in \mathcal{C}^\infty$(se asume) para cada $t \in (a,b)$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$, existe una recta bien definida, que pasa por t y tiene dirección $\alpha'(t)$, se llama *recta tangente* a α en t (respectivamente $\alpha(t)$).

Proposición:
Sea $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, para cada $t_0 \in (a,b)$ la tecta tangente en t_0 es el límite de las rectas secantes que pasan por $\alpha(t)$ y $\alpha(t_0)$ cuando $t \to t_0$

https://www.geogebra.org/calculator/hgbhfd2r



Dem:
$\alpha'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}$.

Definición:
Sea $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. α se dice *regular* si $\alpha'(t) \neq 0 \, \forall t \in (a,b)$.

Definición:
Sean $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\beta : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ curvas parametrizadas. β es una *reparamertrización* de α si existe $h : (c,d) \longrightarrow (a,b) \in \mathcal{C}^\infty$ tal que $h'(s) \neq 0 \, \forall s \in (c,d)$ y $\beta = \alpha \circ h$.

Nota:
El vector tangente no es geometrico en el sentido de que cambia con la reparametrización.

Lema:
Sea β reparametrización de α, entonces $\beta'(u) = h'(u)\alpha'(h(u))\ \forall u \in (c,d)$.
Dem:
Regla de la cadena.

Proposición:
En los puntos regulares de la curva la recta tangente es geométrica (no cambia con la reparametrización).
Dem:
Vemos que el vector tangente de β es proporcional al de α en cada punto (posiblemente con diferente proporcionalidad en cada punto) por el lema anterior.

Definición:
Se dice que un objeto es *geométrico* si es invariante respecto a reparametrizaciones o movimientos euclideos (translaciones y rotaciones).
Definición:
Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada. Definimos *longitud* de α en el intervalo $[a,b]$ como

$$L_{[a,b]}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Proposición:
La longitud es invariante respecto a movimientos euclídeos.
Dem: Sea β una parametrización de α, entonces se verifica que $L(\beta) = L(\alpha)$.

$$L(\beta) = \int_c^d |h's| \cdot \|\alpha'(h(s))\|\, ds$$

Si h es creciente, $h'(s) > 0\ \forall s \in (c,d)$

$$L(\beta) = \int_c^d h's \cdot \|\alpha'(h(s))\|\, ds$$

Tenemos que $h(a) = c$ y $h(b) = d$.

$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = L(\alpha)$$

Si h es decreciente, $h'(s) < 0\ \forall s \in (c,d)$

$$L(\beta) = \int_c^d -h's \cdot \|\alpha'(h(s))\|\, ds$$

Tenemos que $h(b) = c$ y $h(a) = d$.

$$= -\int_b^a \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = L(\alpha)$$

Se tiene que la longitud es un objeto geometrico respecto a reparametrizaciones.
Sea A una matriz ortogonal y $b \in \mathbb{R}^n$ veamos que $L(\alpha) = L(A\alpha + b)$. Si $\beta(t) = A\alpha(t) + b$, entonces $\beta'(t) = A\alpha'(t)$, por ser A ortogonal.

$$\|A\alpha'(t))\| = \|\alpha'(t)\| \quad \Rightarrow \quad L(\alpha) = L(\beta)$$

Proposición:
$\|\alpha(a)-\alpha(b)\| \leq L_{[a,b]}(\alpha)$.
Dem:
Por la desigualdad de Schwarz.

$$\left\| \int_a^b \alpha'(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$$

$$\left\| \int_a^b \alpha'(t)dt \right\| \leq L_{[a,b]}$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\|\alpha(b)-\alpha(a)\| \leq L_{[a,b]}$$

Además $\|\alpha(b)-\alpha(a)\| = |-1| \cdot \|\alpha(a)-\alpha(b)\| = \|\alpha(a)-\alpha(b)\|$.

Definición:
Dada una curva parametrizada regular $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ para $c \in (a,b)$ se define la *longitud de arco* (empezando en c) como la función

$$s_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| \, du \quad \forall t \in (a,b)$$

Nota:
$s_\alpha(t) = L_{[c,t]}(\alpha)$.

Teorema:
Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un curva parametrizada regular, entonces existe una repametrización β con velocidad unitaria, es decir, $\|\beta'(s)\| = 1 \, \forall s$.
Dem:
Por el teorema fundamental del cálculo,

$$s_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| \, du \quad \forall t \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt}(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

Como $\frac{ds}{dt} \neq 0$ por el teorema de la función inversa existe $t(s) \, : s(t) \to t$ y

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t)}$$

Sea $\beta(s) = \alpha(t(s))$, se tiene

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) \quad \|\beta'(s)\| = \|\alpha'(t(s))\| \frac{1}{s'(t(s))} = \|\alpha'(t(s))\| \frac{1}{\|\alpha'(t(s))\|} = 1$$

Ejemplo:
$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donde $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$.

$$\alpha'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b) \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2(t) + a`2\cos^2(t) + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$$

Por lo que α es regular.

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| \, du = \sqrt{a^2+b^2}t$$

Se tiene que $\bar{\alpha}(t) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

1.2. Teoría local de curvas planas

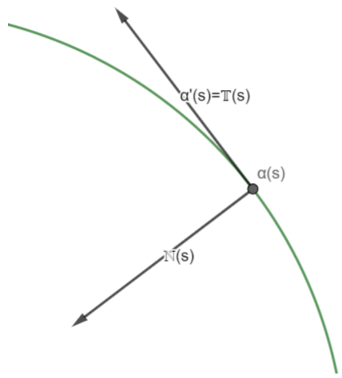
Nota:
$\mathcal{J}(x, y) = (-y, x)$.

Definición:
Sea $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada regular que está parametrizada por longitud de arco. El *diedro de Frenet* es una base ortonormal positivamente orientada $(\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s)$ tal que

$$\mathbb{T}(s) = \alpha'(s)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}(s)\mathbb{N}(s) = 0 \\ \|\mathbb{N}(s)\| \\ \det(\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s)) > 0 \end{array} \right. \qquad \mathbb{N}(s) = \mathcal{J}(\mathbb{T}(s))$$

https://www.geogebra.org/calculator/syjbfepp



Veamos que ocurre si intentamos escribir $\mathbb{T}'(s)$ y $\mathbb{N}'(s)$ en la base $\mathbb{T}(s), \mathbb{N}(s)$. Observamos que

$$\|\mathbb{T}(s)\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{T}(s)\mathbb{T}(s) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbb{T}'(s)\mathbb{T}(s) = 0}_{\text{componente de } \mathbb{T}'(s) \text{ en } \mathbb{T}(s)}$$

$$\|\mathbb{N}(s)\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{N}(s)\mathbb{N}(s) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbb{N}'(s)\mathbb{N}(s) = 0}_{\text{componente de } \mathbb{N}'(s) \text{ en } \mathbb{N}(s)}$$

Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}'(s) = 0 \cdot \mathbb{T} + b(s) \cdot \mathbb{N} \\ \mathbb{N}'(s) = c(s) \cdot \mathbb{T} + 0 \cdot \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Por otra parte,

$$\mathbb{T}(s) \cdot \mathbb{N}(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{T}'(s) \cdot \mathbb{N}(s) + \mathbb{N}'(s) \cdot \mathbb{T}(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{T}'(s) \cdot \mathbb{N}(s) = -\mathbb{T}(s) \cdot \mathbb{N}'(s)$$

Entonces tiene sentido definir

$$c(s) = -k_2(s) = -b(s)$$

Llamamos *curvatura con signo* a $k_2(s)$. También tenemos las *fórmulas de Frenet*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{T}'(s) = k_2(s) \cdot \mathbb{N}(s) \\ \mathbb{N}'(s) = -k_2(s) \cdot \mathbb{T}(s) \end{array} \right.$$

Además,

$$\mathbb{T}(s) = \alpha'(s), \mathbb{N}(s) = \mathcal{J}\alpha'(s)$$

$$\mathbb{T}'(s) = \alpha''(s) = k_2(s)\mathcal{J}\alpha'(s)$$

$$\alpha''(s)\mathcal{J}\alpha'(s) = k_2(s)\mathcal{J}\alpha'(s)\mathcal{J}\alpha'(s) = k_2(s)$$

$$k_2(s) = \alpha''(s)\mathcal{J}\alpha'(s)$$

Nota:
$|k_2(s)| = \|\alpha'(s)\|$ y $\alpha''(s)$ apunta en la dirección en la que se curva la curva. Cuando la curtvatura es positiva se curva con $\mathbb{N}(s)$ y cuando la curvatura es negativa se curva contra $\mathbb{N}(s)$.

Ejemplo 1:
Ejemplo 2:

Definición:
Sea $\alpha : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada (no necesariamente parametrizada por longitud de arco). Si $s(t)$ es la longitud de arco de α