Cálculo de probabilidades
1. Probabilidad

Segundo Cuatrimestre - Grupo 16

Ana M. Valle - ZTF-FCT - UPV/EHU - 2020-21

Fenómenos o experimentos aleatorios.
Sucesos: Sucesos particulares, operaciones con sucesos y relaciones
Espacio de probabilidad.
Reglas básicas del cálculo de probabilidades.
Ejemplos de espacios de probabilidad.
Probabilidad condicionada.
Sucesos independientes.

Ana M. Valle - ZTF-FCT - UPV/EHU - 2020-21 Cálculo de probabilidades 1. Probabilidad

Fenómenos o experimentos aleatorios.
Sucesos: Sucesos particulares, operaciones con sucesos y relaciones
Espacio de probabilidad.
Reglas básicas del cálculo de probabilidades.
Ejemplos de espacios de probabilidad.
Probabilidad condicionada.
Sucesos independientes.

1. ¿Qué resultado se obtiene al lanzar una moneda al aire?
2. ¿Qué resultado obtendremos al lanzar dos dados al aire?
3. ¿Cuánto tiempo durará una bombilla que acabamos de poner?
4. Supongamos que elegimos al azar un número natural y nos preguntamos: ¿qué número habrá elegido la persona que está a mi derecha?

Ana M. Valle - ZTF-FCT - UPV/EHU - 2020-21 Cálculo de probabilidades 1. Probabilidad

Fenómenos o experimentos aleatorios.
Sucesos: Sucesos particulares, operaciones con sucesos y relaciones
Espacio de probabilidad.
Reglas básicas del cálculo de probabilidades.
Ejemplos de espacios de probabilidad.
Probabilidad condicionada.
Sucesos independientes.

Todos estos fenómenos o experimentos que tienen la siguientes características:

1. Se conoce el conjunto formado por todos los diferentes resultados que se pueden obtener al realizar una prueba del experimento o una observación del fenómeno.
   Dicho conjunto se denomina **espacio muestral** asociado al fenómeno o experimento aleatorio y se denota mediante la letra Ω.
   Cada elemento del espacio muestral se denomina **punto muestral** y se denota mediante la letra ω.
2. En cada prueba del experimento u observación del fenómeno a priori no se conoce el resultado que se va a obtener.

se denominan fenómenos o experimentos **aleatorios**.
Fenómenos o experimentos **deterministas**.

Ana M. Valle - ZTF-FCT - UPV/EHU - 2020-21 Cálculo de probabilidades 1. Probabilidad

¿Qué se entiende por suceso?

Un suceso es un acontecimiento cuya ocurrencia podemos observar si ha sucedido o no tras la realización de una prueba de un experimento aleatorio o una observación de un fenómeno aleatorio.

Ejemplo

ξ: "Lanzamos un dado dos veces al aire"
$\Omega =$
" En el primer lanzamiento hemos obtenido un 2"
$A =$ "En el primer lanzamiento hemos obtenido un 2"
$B =$ "La suma de los resultados obtenidos es par"

1. Un suceso es un subconjunto del espacio muestral
2. Los sucesos se representan con letras mayúsculas: A, B, ...
3. Un suceso, A, se dice que ha ocurrido si como resultado de una prueba de un experimento aleatorio o de una observación de un fenómeno aleatorio hemos obtenido un punto muestral, ω que está en A.

Representación gráfica de los sucesos: Diagramas de Venn

Sucesos particulares

1. $\Omega \subset \Omega \Rightarrow \Omega$ se denomina **suceso seguro**.
2. $\emptyset \subset \Omega \Rightarrow \emptyset$ se denomina **suceso imposible**.

Operaciones entre sucesos

1. **Complementario de** A que se denota mediante A^c o $\bar{A}$.
A^c como subconjunto de Ω está formado por los puntos muestrales que no están en A. Es decir,

$$A^c := \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

Por tanto, A^c ocurre si ocurre no ocurre A.

2. **Unión de** A **y** B que se denota mediante $A \cup B$:
$A \cup B$ como subconjunto de Ω está formado por los puntos muestrales que están en A o están en B. Es decir,

$$A \cup B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ o } \omega \in B\}$$

Por tanto, $A \cup B$ ocurre si ocurre A o si ocurre B.

3. **Intersección de** A **y** B que se denota mediante $A \cap B$:
$A \cap B$ como subconjunto de Ω está formado por los puntos muestrales que están en A y están en B. Es decir,

$$A \cap B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \in B\}$$

Por tanto, $A \cap B$ ocurre si ocurre A y si ocurre B.

4. **Diferencia de** A **y** B que se denota mediante $A - B$:
   $A - B$ como subconjunto de Ω está formado por los puntos muestrales que están en A y no están en B. Es decir,
   $$A - B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \notin B\}$$
   Por tanto, $A - B$ ocurre si ocurre A y no ocurre B. Es decir,
   $$A - B = A \cap B^c.$$
5. **Diferencia simétrica entre** A **y** B que se denota mediante $A \Delta B$:
   $A \Delta B$ como subconjunto de Ω está formado por los puntos muestrales que están en A y no están en B o están en B y no están en A. Es decir,
   $$A \Delta B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ y } \omega \notin B\} \cup \{\omega \in \Omega : \omega \in B \text{ y } \omega \notin A\}$$
   $$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Algunas propiedades

Conmutativa:
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
Asociativa:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
Distributiva:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
Leyes de De Morgan (Madurai, 1806-Londres, 1871):
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Operaciones en familias numerables de sucesos sucesos

Dada una sucesión de sucesos $\{A_i : i \in \{1, 2, \ldots\}\}$:

1. **La unión de todos ellos** se denota como: $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$
   $$\cup_{i=1}^{\infty} A_i := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ , para algún } i \in \{1, 2, \ldots\}\}$$
   Por tanto $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ocurre cuando ocurre A_i para algún $i \geq 1$.
2. **La intersección de todos ellos** se denota como: $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$
   $$\cap_{i=1}^{\infty} A_i := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots\}\}$$
   Por tanto $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ ocurre cuando ocurre A_i para todo $i \geq 1$.

Ejemplo:
Lanzamientos sucesivos de una moneda al aire.
Obtener cara en algún lanzamiento par.
Obtener cara en todos los lanzamientos pares.

Relaciones entre sucesos

1. Dados A y B dos sucesos (A, $B \subset \Omega$) si: $\forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$, diremos que A **implica** B y lo denotaremos $A \subset B$.
2. Dados A y B dos sucesos (A, $B \subset \Omega$) si $A \cap B = \emptyset$, diremos que A y B **son incompatibles o mutuamente excluyentes.**

Notación: $A + B$ o $A \dot{\cup} B$ representa la unión de dos sucesos incompatibles.

Definición: Sea Ω un conjunto y $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de Ω, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces se dice que $\mathcal{F}$ es una **tribu o σ-álgebra** si satisface las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ es cerrada para complementación. Es decir:
$$\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}.$$
3. $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones numerables. Es decir:
$$\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Ejemplo:

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ es una tribu.
2. $\{\emptyset, \Omega\}$ es una tribu.

Definición: Al par $(\Omega, \mathcal{F})$ donde Ω es un conjunto y $\mathcal{F}$ es una tribu sobre Ω se le denomina espacio medible.

Tribus: Propiedades

Proposición:
Sea Ω un conjunto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una tribu. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ es cerrada para intersecciones numerables. $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ es cerrada para uniones finitas. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
4. $\mathcal{F}$ es cerrada para intersecciones finitas. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
5. $\mathcal{F}$ es cerrada para diferencias. $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A - B$ y $A \Delta B \in \mathcal{F}$.

Tribu generada por una familia de subconjuntos

Definición:
Sea Ω un conjunto y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Entonces la tribu generada por $\mathcal{C}$ es la mínima tribu que contiene a $\mathcal{C}$ y se denota como $\sigma(\mathcal{C})$.

Teorema:
Sea Ω un conjunto. Entonces para cualquier familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω existe la tribu generada por $\mathcal{C}$.

Caso particular imporante de tribu generada

Definición:
Sea el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ (la recta real con la topología usual). Entonces la tribu generada por todos los abiertos, $\sigma(\tau_u)$ se denomina **tribu boreliana** y a sus elementos se les denomina **borelianos**.

Notación: $\sigma(\tau_u) = \beta$

Proposición: Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son borelianos.

1. **Un abierto de $\mathbb{R}$.** En particular (a, b), $(-\infty, a)$ y (a, ∞) son borelianos.
2. **Un cerrado de $\mathbb{R}$.** En particular: $\{a\}$, $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ son borelianos.
3. **Un subconjunto finito o infinito numerable.** En particualar $\mathbb{Q}$ es un boreliano.
4. Los intervalos $(a, b]$ y $[a, b)$ son borelianos.

Definición:
Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Entonces una probabilidad, P, sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función:

$$\begin{array}{lccc} P: & \mathcal{F} & \to & [0,1] \\ & A & \to & P(A) \end{array}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Aditividad numerable.
$\forall\, A_1,\, A_2,\, \ldots \in \mathcal{F} : A_i \cap A_j = \emptyset,\, \forall\, i,\, j \in \{1,\, 2, \ldots\},\, i \neq j :$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definición: Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que P es una probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. P es finitamente aditiva.
Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ son incompatibles dos a dos, entonces

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Por tanto, para cada suceso $A \in \mathcal{F}$,

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. Si $A,\, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$, entonces
$P(B - A) = P(B) - P(A)$.
Por tanto, $P(A) \leq P(B)$. Es decir, P es una función monótona.

4. Sean A y $B \in \mathcal{F}$. Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si $A_1,\, A_2,\, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$,
$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.

5. Sean A y $B \in \mathcal{F}$. Entonces: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
Es decir, P es una función finitamente subaditiva.
Si $A_1,\, A_2,\, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

6. Continuidad hacia arriba de una probabilidad.
Dados $A_1,\, A_2,\, \ldots \in \mathcal{F}$, tales que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

7. Continuidad hacia abajo de una probabilidad.
Dados $A_1,\, A_2,\, \ldots \in \mathcal{F}$, tales que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

8. Subaditividad numerable. Desigualdad de Boole.
Dados $A_1,\, A_2,\, \ldots \in \mathcal{F}$,
$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Espacio de probabilidad clásico o de Laplace.

Se considera un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que:

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n\}$.
2. $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$.

Entonces:

1. $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$.
2. $\forall A \subset \Omega$: $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Es decir, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es tal que:

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n\}$.
2. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
3.
$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \end{array}$$

Fenómenos o experimentos aleatorios.
Sucesos: Sucesos particulares, operaciones con sucesos y relaciones
Espacio de probabilidad.
Reglas básicas del cálculo de probabilidades.
Ejemplos de espacios de probabilidad.
Probabilidad condicionada.
Sucesos independientes.

Espacio de probabilidad geométrico.

Se considera un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que:

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para algún $n \in \{1, 2, 3\}$.
2. $\mathcal{F} = \{A \in \beta^n : A \subset \Omega\}$.
3. Si $n = 1$,
$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{F} & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & P(A) = \frac{\text{Longitud }(A)}{\text{Longitud }(\Omega)} \end{array}$$
Si $n = 2$,
$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{F} & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & P(A) = \frac{\text{Área }(A)}{\text{Área}(\Omega)} \end{array}$$
Si $n = 3$,
$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{F} & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & P(A) = \frac{\text{Volumen }(A)}{\text{Volumen }(\Omega)} \end{array}$$

Ana M. Valle - ZTF-FCT - UPV/EHU - 2020-21 Cálculo de probabilidades 1. Probabilidad

Fenómenos o experimentos aleatorios.
Sucesos: Sucesos particulares, operaciones con sucesos y relaciones
Espacio de probabilidad.
Reglas básicas del cálculo de probabilidades.
Ejemplos de espacios de probabilidad.
Probabilidad condicionada.
Sucesos independientes.

Espacio de probabilidad discreto.

Se considera un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que:

1. Ω es un conjunto finito o infinito numerable.
2. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
3.
$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & P(A) = \displaystyle\sum_{\omega_i \in \Omega \cap A} p_i \end{array}$$

siendo $\{p_i = P(\{\omega_i\}) : \omega_i \in \Omega\}$. Por tanto:

1. $p_i \in [0, 1]$.
2. $\displaystyle\sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = 1$.

Ana M. Valle - ZTF-FCT - UPV/EHU - 2020-21 Cálculo de probabilidades 1. Probabilidad