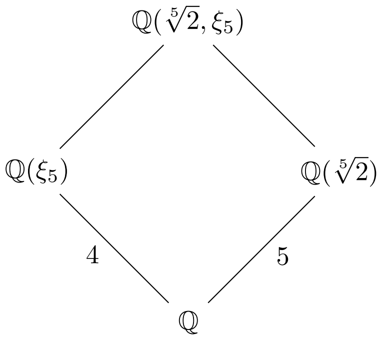
Seminario

Andoni Latorre Galarraga

31/03/2022

6. Las raices de x^5-2 son $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{2}\xi_5$, $\sqrt[5]{2}\xi_5^2$, $\sqrt[5]{2}\xi_5^3$, $\sqrt[5]{2}\xi_5^4$ donde ξ_5 es raiz quinta primitiva de la unidad. Deducimos que $F = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \xi_5)$ Consideramos el siguiente equema:



El grado de $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \xi_5)$ sobre $\mathbb{Q}$ es 5 ya que x^5-2 es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ por Eisenstein con $p = 2$. Para $\mathbb{Q}(\xi_5)$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

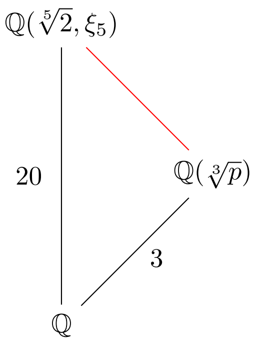
Para aplicar el criterio de la traslación $x = t+1$

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = (t+1)^4+(t+1)^3+(t+1)^2+(t+1)+1 =$$

$$= t^4 + 5t^3 + 10t^2 + 10t + 5$$

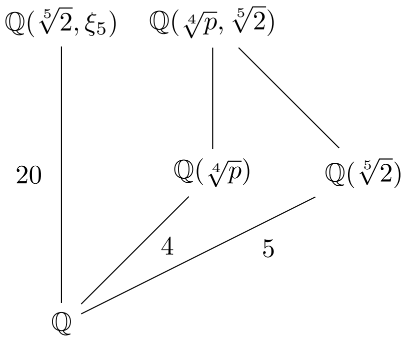
que es irreducible por Eisenstein con $p = 5$. Por ser $(4, 5) = 1$ tenemos que $|\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \xi_5) : \mathbb{Q}| = 4 \cdot 5 = 20$.

Veamos que $\sqrt[3]{p} \notin F$

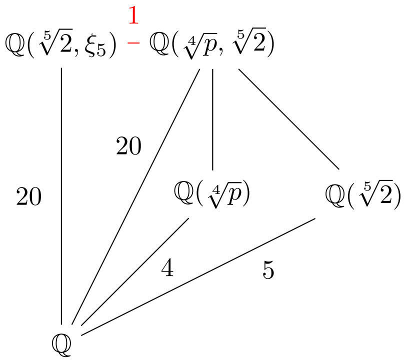


Sabemos que $x^3 - p$ es irreducible por Eisenstein con $p = p$ y $3 \nmid 20$ contradiciendo el teorema del grado.

Para $\sqrt[4]{p}$,

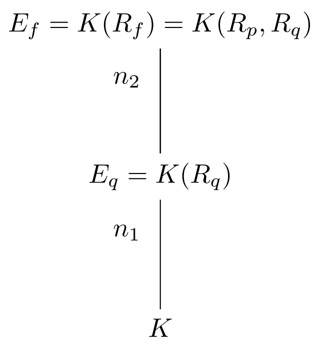


Por ser 4 y 5 coprimos.



Pero $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{p}, \sqrt[5]{2}) \subseteq \mathbb{R}$, lo cual es contradictorio.

7. Por inducción sobre $n = \delta(f)$. Cuando $n = 1$ tenemos que f es de la forma $ax+b$ con $a, b \in K$. La única raiz $-ba^{-1} \in K$ y por tanto $1 \mid 1! = 1$. Para el paso de inducción consideramos dos casos.
Caso 1: f es reducible. Sean $f = pq$, E_f, E_p, E_q los cuerpos de escisión de f, p, q repectivamente y R_f, R_p, R_q los conuntos de las raices de f, p, q respectivamente.



Ahora, el grado de E_f divide a

$$n_1!n_2! = n_1!(n-n_1)! \mid n!$$

Caso 2: f es irreducible. Tomamos $u \in R_f$, en $K(u)$ podemso escribir $f = (x-u)g$ con $g \in k(u)[x]$ entonces

$$|E_f : K| = |E_f : K(u)| \cdot |K(u) : K| = n|E_f : K(u)|$$

Como $|E_f : K(u)|$ divide a $(n-1)!$ se tiene que $|E_f : K| \mid n!$