Problemas curvas

Andoni Latorre Galarraga

Problema 1:
i) Para una recta que pasa por $P = (p_1, p_2)$ y tiene dirección $\vec{v} = (v_1, v_2)$. La parametrización es
`https://www.geogebra.org/calculator/ura8hpkn`

$$\alpha(t) = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2)$$

ii) Para una circunferencia de centro (c_1, c_2) y de radio r. La parametrización es
`https://www.geogebra.org/calculator/qzqgdytc`

$$\alpha(t) = (c_1 + r\cos(t), c_2 + r\sin(t))$$

iii) Para un elipse de centro (c_1, c_2) semiejes a y b e inclinación k.La parametrización es
`https://www.geogebra.org/calculator/u9mgmabb`

$$\alpha(t) = (a\cos(t)\cos(k) - b\sin(t)\sin(k) + c_1, a\cos(t)\sin(k) + b\sin(t)\cos(k) + c_2)$$

Problema 2:
Como $h \in \mathcal{C}^\infty(-1, 1)$ veamos si $h'(t) \neq 0$ para $t \in (_1, 1)$.

$$h'(t) = sec^2(\pi t/2)\frac{\pi}{2}$$

$\sec(t)$ nunca es igual a 0. Por otra parte $h'(t) > 0$ para $t \in (-1)$ por lo que es biyectiva y es un posible cambio de parámetro.

Problema 3: Tenemos que $g \in \mathcal{C}^\infty(0, \infty)$. Veamos que ocurre en con $g'(t)$

$$g'(t) = \frac{2t(t^2 + 1) - 2t^3}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2t}{(t^2 + 1)^2}$$

Observamos que $g'(t) = \Leftrightarrow t = 0$ y $g'(t) > 0$ para $t \in (0, \infty)$ por lo que es biyectiva y es un posible cambio de parámetro.

Problema 4:
De nuevo, $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y

$$h'(t) = 15t^4 + 30t^2 + 15$$

$$t^2 = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 15 \cdot 15}}{30} = -1$$

Por lo que $h'(t)$ no tiene raíces en $\mathbb{R}$. Además $h'(t) > 0$ parra $t \in \mathbb{R}$ por lo que es biyectiva y es un posible cambio de parámetro.

Problema 5:
Sabiendo que la derivada del coseno hiperbólico es el seno hiperbólico y viceversa. Por la definición de longitud:

$$L_{[0,\pi]}(\alpha) = \int_o^\pi \sqrt{6^2 sinh^2(2t) + 6^2 cosh(2t) + 6^2} dt = 6\int_o^\pi \underbrace{\sqrt{sinh(2t) + cosh^2(2t) + 1}}_{\sqrt{cosh(4t)+1} = \sqrt{2cosh^2(2t)}} dt = 3\sqrt{2}\int_0^\pi 2cosh(2t)dt$$

$$= 3\sqrt{2}[sinh(2\pi) - sinh(0)] = 6\sqrt{2}[sinh(2\pi) - 0] = 3\sqrt{2}sinh(\pi) \approx 1136$$

Problema 6:
Parametrizamos con longitud de arco.

$$h(s) = \int_o^s \sqrt{e^{2t}\operatorname{sen}^2(t) + e^{2t}\cos^2(t) + e^{2t}}dt = \int_0^s e^t\sqrt{\operatorname{sen}^2(t) + cos^2(t) + 1}dt = \sqrt{2}\int_0^s e^t dt$$

$$\sqrt{2}(e^s - 1)$$

Veamos que es una parametrización unitaria.

$$\alpha(h(s)) = (e^{\sqrt{2}(e^s-1)}cos(\sqrt{2}(e^s-1)), e^{\sqrt{2}(e^s-1)}sen(\sqrt{2}(e^s-1)), e^{\sqrt{2}(e^s-1)})$$

Problema 7: