.

GRADO EN MATEMÁTICAS - 2^0 Curso

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

RELACIONES DE PROBLEMAS

Curso Académico: 2020/21

Ana M. Valle

Departamento de Matemáticas

Zientzia eta Teknologia Fakultatea - Facultad de Ciencia y Tecnología

Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

Tema 1. Probabilidad. Problemas

1. Sean A, B y C tres sucesos arbitrarios. Utilizando estos sucesos obtenga expresiones que representen los siguientes sucesos:

    a) Solamente ocurre A.

    b) Ocurren tanto A como B pero no C.

    c) Ocurren los tres sucesos.

    d) Ocurre por lo menos un suceso.

    e) Ocurren por lo menos dos sucesos.

    f) Ocurre un suceso y sólo uno.

    g) Ocurren solamente dos sucesos.

    h) No ocurre ningún suceso.

    i) No ocurren más de dos sucesos.

    Si P(A)=0.2, P(B)=0.4, P(C)=0.3, P(A∩B)=0.1 y (A∪B)∩ C=∅, entonces calcule la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

    ($A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$. $A\cap B\cap\bar{C}$. $A\cap B\cap C$. $A\cup B\cup C$. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$. $(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$. $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap\bar{B}\cap C)$. $(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$. $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

    0.1, 0.1, 0, 0.8, 0.1, 0.7, 0.1, 0.2, 1.)

2. En un estudio sobre el efecto que produce el dióxido de azufre en los árboles situados a lo largo de las autopistas principales de un país, se han identificado dos sucesos: L: "el árbol tiene las hojas dañadas" y T: "el árbol ha crecido poco". Dibuje un diagrama de Venn para representar:

    a) El conjunto de árboles que no han crecido poco.

    b) El conjunto de árboles que han crecido poco y que no tienen las hojas dañadas.

    c) El conjunto de árboles que no presenta ninguna de estas características.

    d) El conjunto de árboles que han crecido poco o que tienen las hojas dañadas.

3. Sea B ⊂ Ω. Entonces muestre que $\mathcal{F} := \{A \subset \Omega : A \subset B \text{ o } \bar{A} \subset B\}$ es una tribu sobre Ω.

4. Sea Ω un conjunto

    y $\mathcal{F} := \{A \subset \Omega : A \text{ es contable o } \bar{A} \text{ es contable}\}$. Entonces muestre que $\mathcal{F}$ es una tribu sobre Ω.

5. Bajo las condiciones del problema anterior, suponga que Ω es un conjunto infinito no numerable y defina una función P sobre $\mathcal{F}$ como P(A)=0 ó 1 según A sea un conjunto contable o de complementario contable. Entonces muestre que P es una probabilidad sobre $\mathcal{F}$.

6. Sea $\mathcal{F}$ una tribu sobre Ω y P y Q dos probabilidades sobre $\mathcal{F}$. Muestre que si a y b son números reales no negativos tales que a+b=1, entonces aP+bQ es una también una probabilidad sobre $\mathcal{F}$.

7. Sean A y B dos sucesos tales que P(A)=0.4, P(B)=0.3 y P(A∩B)=0.1. Entonces calcule las probabilidades de los siguientes sucesos: $\bar{A}\cap B$, $A\triangle B$ y $(A\cup B)^c$.

    (0.2, 0.5, 0.4)

8. Sea (Ω,$\mathcal{F}$,P) un espacio de probabilidad y A, B, C, ... elementos de $\mathcal{F}$. Muestre si las siguientes afirmaciones son ciertas o no. En caso de que no sean ciertas proponga un contraejemplo:

a) $P(A \cap B) \geq P(A) - P(\bar{B})$.

b) $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \geq P(A_1) - \sum_{i=2}^{n} P(\bar{A}_i)$.

c) Si $\bar{B} \cap \bar{C} \subset \bar{A}$, entonces $P(A) \leq P(B) + P(C)$.

d) $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 2P(A \cup B) - P(A) - P(B)$.

e) $P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$.

f) $P(A \cap B \cap C) \leq \min(P(A), P(B), P(C))$.

g) $P(A \cup B \cup C) \geq \max(P(A), P(B), P(C))$.

h) Desigualdad de Bonferroni:
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

(V,V,V,V,F,V,V,V)

9. Un jugador italiano expresó su sorpresa a Galileo al observar que al jugar con tres dados, la suma 10 aparece con más frecuencia que la suma 9. Según el jugador, los casos favorables al 9 serían: 126-135-144-225-234-333 y los favorables al 10 serían: 136-145-226-235-244-334. Pero Galileo observó que estos resultados no pueden considerarse igualmente probables. Explique por qué y calcule la probabilidad de obtener un nueve al lanzar tres dados al aire y la probabilidad de obtener un diez al lanzar tres dados al aire.

   (P("obtener un 9")=0.116, P("obtener un 10")=0.125)

10. Encuentre la probabilidad de que en un grupo de cuatro personas:

    a) Al menos dos de ellas cumplan los años el mismo día.

    b) Al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo mes.

    (0.0164, 0.4271)

11. Se colocan al azar n bolas distinguibles en n celdas numeradas. Calcule la probabilidad de que exactamente una celda quede vacía.

    $\left(\frac{(n-1)(n-1)!}{2n^{n-2}}\right)$

12. Disponemos de tres urnas U_1, U_2 y U_3. Cada una de ellas contiene n bolas numeradas de 1 a n. Extraemos una bola de cada urna. Halle la probabilidad de que $x_1 + x_2 = x_3$, donde x_i denota el número de la bola extraída de la i-ésima urna para $i = 1, 2, 3$.

    $\left(\frac{n-1}{2n^2}\right)$

13. Elegimos al azar dos puntos en el intervalo (0,2). Calcule la probabilidad de que el producto de ambos sea menor que 3.

    (0.9658)

14. En el intervalo unidad, elegimos al azar y de manera independiente dos números. Obtenga la probabilidad de que su suma sea menor que 1 y su producto menor que 3/16.

    (0.456)

15. Supongamos que dos personas han quedado en encontrarse entre las 5 y las 6 de la tarde en un local concreto y se ponen de acuerdo en que ninguna esperará a la otra más de 10 minutos. Si llegan de manera independiente en tiempos aleatorios entre las 5 y las 6 de la tarde, ¿cuál es la probabilidad de que se vean?

    (0.3056)

16. Se eligen al azar dos números b y c entre 0 y 1. Calcule la probabilidad de que la ecuación $x^2 + 2bx + c = 0$ tenga raíces reales.

    (1/3)

17. Un doctor tiene los siguientes datos con respecto al efecto de un nuevo tratamiento:

	C		$\overline{C}$	
	B	$\bar{B}$	B	$\bar{B}$
A	1000	50	95	5000
$\bar{A}$	9000	950	5	5000

    donde los sucesos A, B y C denotan los habitantes curados, los habitantes tratados y los habitantes residentes en la ciudad, respectivamente. Se elige un habitante al azar.

    Calcule: P(A|B), P(A| B̄), P(A|B∩C), P(A| B̄∩C), P(A| B̄ ∩ C̄).

(0.1084, 0.459, 0.1, 0.05, 0.5)

18. Un test detecta la presencia de un cierto tipo T de bacterias en el agua con probabilidad 0.9 en caso de haberlas. Si no las hay, detecta la ausencia con probabilidad 0.8. Sabiendo que la probabilidad de que una muestra de agua contenga realmente bacterias de tipo T es 0.2. Calcule la probabilidad de que:

    a) La muestra contenga realmente bacterias de tipo T cuando el test ha dado positivo.
    b) La muestra contenga realmente bacterias de tipo T cuando el test ha dado negativo.
    c) La muestra contenga bacterias de tipo T y además el test de positivo.

    (0.5294, 0.0303, 0.18)

19. Una determinada institución está protegida mediante un sistema de alarma. La probabilidad de que se produzca peligro es de 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es de 0.95. La probabilidad de que funcione la alarma sin haber peligro es de 0.03.

    Halle:

    a) La probabilidad de que habiendo funcionado la alarma, no haya peligro.
    b) La probabilidad de que haya peligro y la alarma no funcione.
    c) La probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma, haya peligro.
    d) La probabilidad de que haya peligro o la alarma funcione.

    (0.2213, 0.005, 0.0057, 0.127)

20. Se elige al azar un número natural, mediante un sistema que hace que la probabilidad de elegir el número n sea $(\frac{1}{2})^n$ para n=1, 2, ... Si el número elegido es n, se lanza una moneda cuya probabilidad de obtener cara es e^{-n}. Halle la probabilidad de obtener cara como resultado final de este proceso.

    $((2e - 1)^{-1})$

21. Se tienen n urnas, cada una de las cuales contiene b bolas blancas y r rojas. Se extrae una bola de la primera urna y se introduce en la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda urna y se introduce en la tercera y así sucesivamente. Finalmente se extrae una bola de la última urna. Calcule la probabilidad de que sea blanca.

    $(b/(b + r))$

22. Para averiguar si un individuo padece o no una cierta enfermedad se realiza un test médico. Suponga que en una determinada población hay un 20 % de personas enfermas, de una enfermedad determinada. Cuando se realiza el test con una persona enferma el test da positivo en el 90 % de los casos y cuando se realiza el test con una persona sana el test da positivo en el 5 % de las veces. Se ha elegido una persona al azar, se le ha realizado el test y ha dado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esté enferma?

    (0.8182)

23. Tenemos 100 urnas. Cada urna tiene una de las siguientes composiciones:

    Composición 1: ocho bolas blancas y dos negras.

    Composición 2: cuatro blancas y seis negras.

    Composición 3: una blanca y nueve negras.

    Se elige una urna al azar y de ella se extrae una bola. Si sabemos que 16/39 es la probabilidad de que, habiendo extraído una bola blanca, dicha bola se ha extraído de una urna que tiene el primer tipo de composición y que 30/61 es la probabilidad de que, habiendo extraído una bola negra dicha bola proceda de una urna que tiene el segundo tipo de composición, calcule el número de urnas de cada tipo.

    (Composición 1: 20 urnas. Composición 2: 50 urnas. Composición 3: 30 urnas.)

24. En una fabricación en serie de piezas, por ejemplo tornillos, la probabilidad de que al extraer una al azar sea defectuosa es 0,1. Se extraen n piezas al azar con reemplazamiento.

    a) Se denota como $H(n)$ la probabilidad de que en la muestra de n piezas haya alguna defectuosa. Determinar la expresión de $H(n)$. Obtener $H(7)$, $H(10)$, $H(25)$, $H(29)$.

    b) ¿Cuántas piezas hay que extraer para que $H(n)$ sea al menos 0,99?

    ($H(n) = 1 - (0{,}9)^n$. $H(7) = 0{,}5217$, $H(10) = 0{,}6513$, $H(25) = 0{,}9282$, $H(29) = 0{,}9529$. $n \geq 43{,}7087$)

25. Pruebe o proporcione un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

    a) Si E y F son sucesos independientes, E y G son sucesos independientes y $F \cap G = \emptyset$, entonces E y $F \cup G$ son sucesos independientes.

    b) Si E y F son sucesos independientes, E y G son sucesos independientes, entonces E y $F \cup G$ son sucesos independientes.

    c) Si E y F son sucesos independientes, F y G son sucesos independientes y E y $F \cap G$ son sucesos independientes, entonces G y $E \cap F$ son sucesos independientes.

    (V,F,V)