Seminario 1

Andoni Latorre Galarraga

1.

(b) Probaremos que A es subanillo de $\mathbb{R}$.

(b.i) Veamos que $(A,+)$ es subgrupo de $\mathbb{R},+$.
(b.i.i) $0 \in A$.

$$0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 = 0 + 0\sqrt{2} \in A$$

(b.i.ii) $x, y \in A \Rightarrow x - y \in A$.

Sean $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $y = a_2 + b_2\sqrt{2}$.

$$x - y = a_1 + b_1\sqrt{2} - a_2 - b_2\sqrt{2}$$

$$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} \in A$$

$$\because a_1 - a_2, b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$$

(b.ii) $x, y \in A \Rightarrow xy \in A$.
Sean $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $y = a_2 + b_2\sqrt{2}$.

$$xy = (a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2})$$

$$= a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_2b_1 + a_1b_2)\sqrt{2} \in A$$

$$\because a_1a_2 + 2b_1b_2, a_2b_1 + a_1b_2 \in \mathbb{Z}$$

(b.iii) $1 \in A$

$$1, 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 = 1 + 0\sqrt{2} \in A$$

Tenemos que $A \supseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ya que A es subanillo de $\mathbb{R}$ y $\{\sqrt{2}\} = \{0 + 1\sqrt{2}\} \subseteq A$. También tenemos que $A \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ya que dado $a + b\sqrt{2} \in A$,

$$a + b\sqrt{2} = \underbrace{\underbrace{a \cdot 1}_{\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]} + \underbrace{b\sqrt{2}}_{\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}}_{\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}$$

Tambien sabemos que $S = \{\sqrt{2}\}$ es mínimo ya que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}[\emptyset]$.

(d) Probaremos que A es subanillo de $\mathbb{R}$.

(d.i) Veamos que $(A,+)$ es subgrupo de $(\mathbb{R},+)$.
(d.i.i) $0 \in A$

$$0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 = \frac{0}{2^n3^m} \in A$$

(d.i.ii) $x, y \in A \Rightarrow x - y \in A$.
Sean $x = \frac{a_1}{2^{n_1}3^{m_1}}$, $y = \frac{a_2}{2^{n_2}3^{m_2}}$.

$$\frac{a_1}{2^{n_1}3^{m_1}} - \frac{a_2}{2^{n_2}3^{m_2}}$$

$$= \frac{a_12^{n_2}3^{m_2} - a_22^{n_1}3^{m_1}}{2^{n_1+n_2}3^{m_1+m_2}} \in A$$

$$\because \begin{array}{l} a_12^{n_2}3^{m_2} - a_22^{n_1}3^{m_1} \in \mathbb{Z} \\ n_1 + n_2, m_1 + m_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

(d.ii) $x, y \in A \Rightarrow xy \in A$.
Sean $x = \frac{a_1}{2^{n_1}3^{m_1}}$, $y = \frac{a_2}{2^{n_2}3^{m_2}}$.

$$xy = \frac{a_1}{2^{n_1}3^{m_1}}\frac{a_2}{2^{n_2}3^{m_2}}$$

$$= \frac{a_1a_2}{2^{n_1+n_2}3^{m_1+m_2}} \in A$$

$$\because \begin{array}{l} a_1a_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 + n_2, m_1 + m_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

(d.iii) $1 \in A$

$$1 \in \mathbb{Z}, 0 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 1 = \frac{1}{2^03^0} \in A$$

Tenemos que $A \supseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ ya que A es subanillo de $\mathbb{R}$ y $\{\frac{1}{6}\} = \{\frac{1}{2^13^1}\} \subseteq A$. Tambien tenemos que $A \subseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$ ya que dado $\frac{a}{2^n3^m} \in A$,

$$\frac{a}{2^n3^m} = \begin{cases} a3^{n-m} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n & n \geq m \\ a2^{m-n} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^m & n \leq m \end{cases}$$

También sabemos que $S = \{\frac{1}{6}\}$ es mínimo ya que $\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z}[\emptyset]$.

2.

Tenemos que

$$\frac{a}{2^n3^m} \in \mathcal{U}(A)$$

$$\Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z}n', m' \in \mathbb{Z}^+ \mid \frac{2^n3^m}{a} = \frac{a'}{2^{n'}3^{m'}}$$

Ahora, $2^n3^m2^{n'}3^{m'} = aa' \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 2^s3^t \mid s, t \in \mathbb{Z}$, es decir, $\mathfrak{U} = \{2^s3^t \mid s, t \in \mathbb{Z}\} \supseteq \mathcal{U}(A)$. Veamos que $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{U}(A)$. Dado $2^s3^t \in \mathfrak{U}$, $\exists\frac{2^{s-|s|}2^{t-|t|}}{2^{s+|s|}2^{t+|t|}} \in A$ ya que $2^{s-|s|}2^{t-|t|} \in \mathbb{Z}$ y $2^{s+|s|}, 2^{t+|t|} \in \mathbb{Z}^+$.

5.

(b) B no es anillo ya que $X \in B$ pero $X \cdot X = X^2 \notin B$.

(c) B Es anillo. Veamos que es subanillo de $A[X]$.
(c.i) Veamos que $(B,+)$ es subgrupo de $(A[x],+)$.
(c.i.i) $0 \in B$

$$0 = 0X^0$$

(c.i.ii) $p, q \in B \Rightarrow p - q \in B$.

Sean $p = \sum_{i\geq 0} a_{i,p}X^i$, $q = \sum_{i\geq 0} a_{i,q}X^i$

$$p - q = \sum_{i\geq 0}(a_{i,p} - a_{i,q})X^i$$

Cuando i es impar

$$a_{i,p}, a_{i,q} = 0 \Rightarrow a_{i,p} - a_{i,q} = 0 \Rightarrow p - q \in B$$

(c.ii) $p, q \in B \Rightarrow pq \in B$.

Sean $p = \sum_{j\geq 0} a_{j,p}X^i$, $q = \sum_{k\geq 0} a_{k,q}X^i$.

Si $pq = \sum_{i\geq 0} a_iX^i$. Tenemos que

$$a_i = \sum_{j,k|j+k=1} a_{j,p}a_{k,q} \Rightarrow pq \in B$$

$$\because i \text{ impar} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k \text{ impar} \\ \text{ó} \\ j \text{ impar} \end{array}\right. \Rightarrow a_{j,p}a_{k,q} = 0$$

(c.iii) $1 \in B$.

$$1 = 1X^0$$

10.

(a) Veamos que $\mathcal{U}(A \times B) \subseteq \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$. Sea $(u_a, u_b) \in \mathcal{U}(A \times B)$, entoneces $\exists(v_a, v_b) \in A \times B$ tal que $(u_a, u_b)(v_a, v_b) = 1_{A\times B}$.

$$(u_a, u_b)(v_a, v_b) = (1_A, 1_B) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_av_a = 1_A \\ u_b, v_b = 1_B \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow (u_a, u_b) \in \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$$

Veamos que $\mathcal{U}(A \times B) \supseteq \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$. Sean $(u_a, u_b) \in \mathcal{U}(A) \times \mathcal{U}(B)$, $u_av_a = 1_A$, $u_bv_b = 1_B$.

$$(u_a, u_b) \cdot (v_a, v_b) = (1_A, 1_B) = 1_{A\times B}$$

$$\Rightarrow (u_a, u_b) \in \mathcal{U}(a \times B)$$

(b) Sean $0 \neq x = (x_a, x_b)$, $0 \neq y = (y_a, y_b)$ distintos de $0_{A\times B}$ tales que $xy = 0$.

$$xy = (x_a, x_b)(y_a, y_b) = (x_ay_a, x_by_b) = (0_A, 0_B)$$

$$\Leftrightarrow x_ay_a = 0_A, a_by_b = 0_B$$

Es decir, los divisoresde cero en $A \times B$ son de la forma (a, b) con a y b divisores de cero en A y B respectivamente.

(c) Es suficiente con encontar un elemento no nulo de $A \times B$ que no sea inversible.

$$\underbrace{(1_A, 0_B)}_{\neq 0_{A\times B}} \underbrace{(a, b)}_{\in A\times B} = (a, 0_B) \neq 1_{A\times B}$$

17.

Queremos encontrar el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que $1^n_{A\times B} = 0_{A\times B}$.

$$\left.\begin{array}{l} 1^n_{A\times B} = (1^n_A, 1^n_B) \\ 0_{A\times B} = (0_A, 0_B) \end{array}\right\} \Rightarrow (1^n_A, 1^n_B) = (0_A, 0_B)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{char}(A) \mid n \\ \text{char}(B) \mid n \end{array}\right. \Rightarrow \text{mcm}(\text{char}(A), \text{char}(B)) \mid n$$

Además,

$$1^{\text{mcm}(\text{char}(A),\text{char}(B))}_{A\times B}$$

$$= (1^{\text{mcm}(\text{char}(A),\text{char}(B)))}_A, 1^{\text{mcm}(\text{char}(A),\text{char}(B))}_B)$$

$$= (0_A, 0_B) = 0_{A\times B}$$

$$\Rightarrow n \mid \text{mcm}(\text{char}(A), \text{char}(B))$$

Se tiene que $n = \text{mcm}(\text{char}(A), \text{char}(B))$