# Seminario 1

Andoni Latorre Galarraga

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$

En el caso $n = 1$, como $f$ no puede tener más de una raiz y tiene al menos una, $f$ tiene exactamnete una raiz. Ahora, argumentamos por inducción sobre el grado del polinomio. Sea $f(x) \in k[x]$ de grado $\delta(f) = n \geq 2$, como tiene al menos una raiz, supongamos que $a \in K$ es raiz de $f$. Tenemos que $(x-a) \mid f(x)$. Es decir, $f(x) = (x-a)g(x)$, y también $\delta(g) = n - 1$. Por la hipótesis de inducción $g$ tiene $n-1$ raices y $f$ se anula en esas $n-1$ raices y en $a$ dando un total de $n$ raices cmo se quería probar.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$

Si $f$ tiene $n$ raices y $n \geq 1$ entonces, $f$ tiene al menos una raiz.

$\boxed{c) \Rightarrow d)}$

Como $K[x]$ es DFU todo polinomio se puede escribir como producto de irreducibles. Veamos que todo polinomio de grado 1 se puede escibir en la forma $c(x-a)$ para concluir $d)$.

$$ux + v \underset{\substack{\uparrow \\ K \text{ cuerpo}}}{=} u(x + u^{-1}v)$$

$\boxed{d) \Rightarrow c)}$

Los polinomios de grado 1 siempre son irreducibles. Además, tenemos que un polinomio de grado $n \geq 2$ no es irreducible ya que se puede poner de la forma $c(x - a_1^{n_1}) \cdots (x - a_t^{n_t})$ y los polinomios de grado 1 no son unidades.

$\boxed{d) \Rightarrow a)}$

Evidentemente $a_1$ es raiz de $f$.

$\boxed{a) \Rightarrow d)}$

Argumentando por inducción como en $\boxed{a) \Rightarrow b)}$ para obtener $f(x) = (x-a)g(x)$ con $\delta(g) = n - 1$ y reescribiendo como en $\boxed{c) \Rightarrow d)}$ si fuera necesario se tiene el resultado deseado.