# Seminario Picard

Andoni Latorre Galarraga, Aitor Moreno Rebollo, Yeray Alvarez Gimenez

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \quad \text{para } x \leq 0 \\ 2x \quad \text{para } 0 < x,\ 0 \leq y \leq x^2 \\ 2x - 4\frac{y}{x} \quad 0 < x, 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x \quad \text{para} \quad 0 < x,\ x^2 < y \end{cases}$$

Se pide:
i) Demuestre que $f(x,y)$ es una función continua pero no Lipschitziana.
Veámoslo:
Es evidente que $f$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$ excepto los ejes y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, x^2 = y\}$, donde no es tan trivial. En los ejes se tiene,

$$0 = -2 \cdot 0 = -2x$$

$$2x - \frac{4y}{x} = 2x - \frac{4 \cdot 0}{x} = 2x$$

$$2x = 2 \cdot 0 = 0$$

En la sección parabólica se tiene,

$$2x - \frac{4y}{x} = 2x - \frac{4x^2}{x} = -2x$$

En el origen es evidendente que $f \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ en todas las regiones excepto debajo de la parabola. Vemaos que también se cumple debajo de la parabola. Obsevamos que $0 \leq y \leq x^2$

$$2x - \frac{4 \cdot 0}{x} \geq 2x - \frac{4 \cdot y}{x} \geq 2x - \frac{4 \cdot x^2}{x}$$

$$2x \geq 2x - \frac{4 \cdot y}{x} \geq -2x$$

Por el teorema del sándwich se tiene que $f \to 0$ en el origen y por lo tanto es continua en $\mathbb{R}^2$.
Veamos que no es Lipschitziana:
Tomamos los puntos $(1, y_1),\ (1, y_2)$, con $y_2 < 1 \leq y_1$. Entonces, $|f(1,y_1) - f(1,y_2)| = 4y_2$. Supongamos que se da que $4y_2 \leq L|y_1 - y_2|$. Entonces, podemos tomar $y_1$ y $y_2$ arbitrariamente cerca a la vez que $y_2$ está arbitrariamente cerca de 1. Entonces, basta tomar $y_2 = 1 - \epsilon$ y $y_1 = 1 + \epsilon$, y entonces debería cumplirse que $4(1-\epsilon) \leq L|1 + \epsilon - 1 - \epsilon| = 0$, lo cual es falso para $\epsilon < 1$.

ii) Estudie la convergencia de la iteración de Picard para el problema:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Veámoslo:
La iteración de Picard está dada por la fórmula $y_{n+1} = y_0 + \int_0^t f(u, y_n)du$. Tomamos $y_0 = 0$ y tenemos:

$$y_1 = 0 + \int_0^t 2udu = t^2$$

$$y_2 = \int_0^t -2udu = -t^2$$

$$y_3 = \int_0^t 2udu = t^2 = y_1$$

Por tanto, la sucesión toma los valores $t^2$ y $-t^2$ cíclicamente.
iii) Estudie la convergencia de la poligonal de Euler.

La fórmula de la poligonal de Euler es

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \text{con} \quad y_0 \xrightarrow[h \to 0]{} y(0) = 0,\ t_n = t_0 + nh = nh.$$

Veamos que $0 \leq y_n \leq \frac{1}{3}n^2h^2 \ \forall\ n \geq 4$ por inducción, para $n \geq 4$. La base:

$$y_4 = 2h^2 + hf(3h, 2h^2) = \frac{1}{3} \cdot 4^2h^2$$

Veamos la inducción:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(nh, y_n) \\ &= y_n + h\left(2nh - 4\frac{y_n}{nh}\right) \\ &= y_n\frac{n-4}{n} + 2nh^2 \end{aligned}$$

Por hipotesis inductiva, $y_n$ es positivo. Como $n \geq 4$, $(n-4)/n$ es positivo. Por tanto, $y_n(n-4)/n+2nh^2 \geq 0$. Veamos que $y_{n+1} \leq \frac{1}{3}(n+1)^2h^2$.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\overset{\text{h.i.}}{\leq} \frac{1}{3}n^2h^2\frac{n-4}{n} + 2nh^2 \\ &= \frac{1}{3}nh^2(n-4) + 2nh^2 \\ &= nh^2\left(\frac{1}{3}n - \frac{4}{3} + 2\right) \\ &= \frac{1}{3}nh^2(n+2) \leq \frac{1}{3}h^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

Análogamente $y_n \geq \frac{1}{3}(n-1)^2h^2 \quad \forall\ n \geq 4$.

Por tanto, tenemos que $\frac{1}{3}(n-1)^2h^2 \leq y_n \leq \frac{1}{3}n^2h^2$.

Ahora, siendo $t = nh$, tenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{3}n^2h^2 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{3}t^2 = \frac{1}{3}t^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{3}(n-1)^2h^2 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{3}(t-h)^2 = \frac{1}{3}t^2$$

Y entonces, tomando $n$ suficientemente grande, $\lim_{h\to 0} y_n = \frac{1}{3}t^2$, que es solución pues

$$f(t, t^2/3) = 2t - 4\frac{1}{3}\frac{t^2}{t} = \frac{2}{3}t = \left(\frac{1}{3}t^2\right)'.$$

Por tanto, la poligonal de Euler converge.