Seminario 1

Andoni Latorre Galarraga

7.

Por el teorema de Cayley sabemos que Q_8 se puede sumergir en S_n con $n \geq 8$. Veamos que es necesario que $n \geq 8$. Supongamos que tenemos la siguiente acción fiel de Q_8 sobre $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{array}{rccc} \theta: & Q_8 & \longrightarrow & S_n \\ & g & \longmapsto & \begin{array}{rccc} \theta_g: & \Omega_n & \longrightarrow & \Omega_n \\ & \omega & \longmapsto & \omega^g \end{array} \end{array}$$

Por ser fiel, θ tiene núcleo trivial y por lo tanto es inyectiva. Entonces,

$$Q_8 \simeq Im(\theta) \leq S_n$$

Como el núcleo es trivial, tenemos que

$$\mathrm{Ker}\theta = \{1\} = \bigcap_{\omega \in \Omega_n} \mathrm{Stab}_{Q_8}(\omega)$$

Sabemos que Q_8 tiene el sigiente retículo:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & Q_8 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \langle j \rangle \arrow[dr] & \langle k \rangle \arrow[d] & \langle i \rangle \arrow[dl] \\ & \langle -1 \rangle \arrow[d] & \\ & \langle 1 \rangle & \end{tikzcd}$$

Observamos que todo subgrupo no trivial de Q_8 contiene a $\langle -1 \rangle$. Al ser los estabilizadores subgrupos, la única manera de que su intersección sea $\{1\}$ es que al menos uno de ellos sea trivial. En caso contrario se tendria $\langle -1 \rangle \subseteq \bigcap_{\omega \in \Omega_n} \mathrm{Stab}_{Q_8}(\omega)$ que contradice que la acción sea fiel.
Sea ω tal que $\mathrm{Stab}_{Q_8}(\omega) = \{1\}$.

$$|\mathrm{Orb}_{Q_8}(\omega)| = |Q_8|/|\mathrm{Stab}_{Q_8}(\omega)| = 8/1$$

Como $\mathrm{Stab}_{Q_8}(\omega) \subseteq \Omega_n$, $|\mathrm{Stab}_{Q_8}(\omega)| \leq |\Omega_n| = n$ y vemos que es necesario $n \geq 8$.

8.
i)
En $D_{2p} = \langle r, s \mid r^p = s^2 = 1, r^s = r^{-1} \rangle$, $\langle s \rangle$ tiene indice p pero $s^r = sr^2 \notin \langle s \rangle$.
ii)
Sea $\Omega = \{Hx \mid x \in G\}$, observamos $|\Omega| = p$ Consideramos la siguiente acción sobre las coclases a derecha:

$$\begin{array}{rccc} \theta: & G & \longrightarrow & S_\Omega \simeq S_p \\ & g & \longmapsto & \begin{array}{rccc} \theta_g: & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & Hx & \longmapsto & Hxg \end{array} \end{array}$$

Sabemos que el núcleo de θ es H_G, por el primer teorema de isomorfía,

$$G/H_G \simeq Im(\theta) \leq S_\Omega \simeq S_p$$

De donde se tiene,

$$|G : H_G| \Big| p! \Rightarrow |G : H_G| = |G : H| \cdot |H : H_G| = p|H : H_G| \Big| p! \Rightarrow |H : H_G| \Big| (p-1)!$$

Por otra parte,

$$|G| = |G : \{1\}| = |G : H| \cdot |H : H_G| \cdot |H_G : \{1\}| \Rightarrow |H : H_G| \Big| |G|$$

Por $|H : H_G| \Big| (p-1)!$, $|H : H_G|$ no tiene factores primos $> p-1$. Por $|H : H_G| \Big| |G|$, $|H : H_G|$ no tiene factores primos $\leq p-1$ ya que estos dividiarian a $|G|$ y p no sería el menor primo que divide a $|G|$. Concluimos que $|H : H_G| = 1 \Rightarrow H = H_G$ y por lo tanto $H \trianglelefteq G$.

15.
i)
Sea $R_i(G) = \{g \in G \mid o(g) = p^i\}$. Consideramos la acción por conjugación:

$$\begin{array}{rccl} \theta : & G & \longrightarrow & S_{R_i(G)} \\ & g & \longmapsto & \begin{array}{rccc} \theta_g : & R_i(G) & \longrightarrow & R_i(G) \\ & r & \longmapsto & g^{-1}rg \end{array} \end{array}$$

$$\mathrm{Fix}(R_i(G)) = \{r \in R_i(G) \mid r^g = r \forall g \in G\} = R_i(G) \cap Z(G) = R_i(Z(G))$$

Por ser p-grupo,

$$|R_i(G)| \equiv_p |\mathrm{G}(R_i(G))|$$

$$N_i(G) \equiv_p |R_i(Z(G))| = N_i(Z(G))$$

ii)