

# Seminario 1

Andoni Latorre Galarraga

**7.**

Por el teorema de Cayley sabemos que  $Q_8$  se puede sumergir en  $S_n$  con  $n \geq 8$ . Veamos que es necesario que  $n \geq 8$ . Supongamos que tenemos la siguiente acción fiel de  $Q_8$  sobre  $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$ .

$$\begin{array}{ccccc} \theta : Q_8 & \longrightarrow & S_n & & \\ g & \longmapsto & \theta_g : \Omega_n & \longrightarrow & \Omega_n \\ & & \omega & \longmapsto & \omega^g \end{array}$$

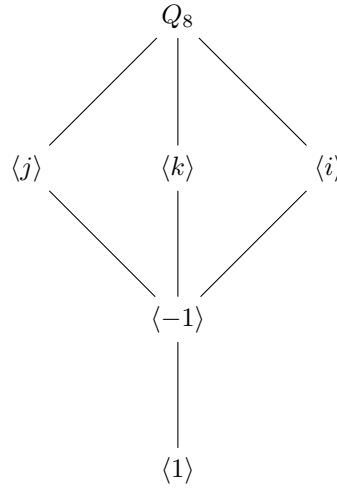
Por ser fiel,  $\theta$  tiene núcleo trivial y por lo tanto es inyectiva. Entonces,

$$Q_8 \simeq \text{Im}(\theta) \leq S_n$$

Como el núcleo es trivial, tenemos que

$$\text{Ker}\theta = \{1\} = \bigcap_{\omega \in \Omega_n} \text{Stab}_{Q_8}(\omega)$$

Sabemos que  $Q_8$  tiene el siguiente retículo:



Observamos que todo subgrupo no trivial de  $Q_8$  contiene a  $\langle -1 \rangle$ . Al ser los estabilizadores subgrupos, la única manera de que su intersección sea  $\{1\}$  es que al menos uno de ellos sea trivial. En caso contrario se tendría  $\langle -1 \rangle \subseteq \bigcap_{\omega \in \Omega_n} \text{Stab}_{Q_8}(\omega)$  que contradice que la acción sea fiel. Sea  $\omega$  tal que  $\text{Stab}_{Q_8}(\omega) = \{1\}$ .

$$|\text{Orb}_{Q_8}(\omega)| = |Q_8|/|\text{Stab}_{Q_8}(\omega)| = 8/1$$

Como  $\text{Stab}_{Q_8}(\omega) \subseteq \Omega_n$ ,  $|\text{Stab}_{Q_8}(\omega)| \leq |\Omega_n| = n$  y vemos que es necesario  $n \geq 8$ .

**8.**

i)

En  $D_{2p} = \langle r, s \mid r^p = s^2 = 1, r^s = r^{-1} \rangle$ ,  $\langle s \rangle$  tiene índice  $p$  pero  $s^r = sr^2 \notin \langle s \rangle$ .

ii)

Sea  $\Omega = \{Hx \mid x \in G\}$ , observamos  $|\Omega| = p$ . Consideramos la siguiente acción sobre las coclases a derecha:

$$\begin{array}{ccccc} \theta : G & \longrightarrow & S_\Omega \simeq S_p & & \\ g & \longmapsto & \theta_g : \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & & Hx & \longmapsto & Hxg \end{array}$$

Sabemos que el núcleo de  $\theta$  es  $H_G$ , por el primer teorema de isomorfía,

$$G/H_G \simeq \text{Im}(\theta) \leq S_\Omega \simeq S_p$$

De donde se tiene,

$$|G : H_G| \Big| p! \Rightarrow |G : H_G| = |G : H| \cdot |H : H_G| = p |H : H_G| \Big| p! \Rightarrow |H : H_G| \Big| (p-1)!$$

Por otra parte,

$$|G| = |G : \{1\}| = |G : H| \cdot |H : H_G| \cdot |H_G : \{1\}| \Rightarrow |H : H_G| \Big| |G|$$

Por  $|H : H_G| \Big| (p-1)!$ ,  $|H : H_G|$  no tiene factores primos  $> p-1$ . Por  $|H : H_G| \Big| |G|$ ,  $|H : H_G|$  no tiene factores primos  $\leq p-1$  ya que estos dividirían a  $|G|$  y  $p$  no sería el menor primo que divide a  $|G|$ . Concluimos que  $|H : H_G| = 1 \Rightarrow H = H_G$  y por lo tanto  $H \trianglelefteq G$ .

**15.**

i)

Sea  $R_i(G) = \{g \in G \mid o(g) = p^i\}$ . Consideramos la acción por conjugación:

$$\begin{array}{ccccc} \theta : & G & \longrightarrow & S_{R_i(G)} & \\ & g & \longmapsto & \theta_g : R_i(G) & \longrightarrow R_i(G) \\ & & & r & \longmapsto g^{-1}rg \end{array}$$

$$\text{Fix}(R_i(G)) = \{r \in R_i(G) \mid r^g = r \forall g \in G\} = R_i(G) \cap Z(G) = R_i(Z(G))$$

Por ser  $p$ -grupo,

$$\begin{aligned} |R_i(G)| &\equiv_p |G(R_i(G))| \\ N_i(G) &\equiv_p |R_i(Z(G))| = N_i(Z(G)) \end{aligned}$$

ii)