Seminario 5

Andoni Latorre Galarraga, Mariana Emilia Zaballa Bernabe

9.
Consideramos el homomorfismo evaluación φ_1.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_1: & K[X,Y]=K[X][Y] & \longrightarrow & K[X] \\ & p(Y) & \longmapsto & p(g(X)) \end{array}$$

Junto con el homomorfismo φ_2.

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_2: & K[X] & \longrightarrow & \frac{K[X]}{(f(X))}=D \\ & p & \longmapsto & p+(f(X)) \end{array}$$

Tenemos que $\varphi=\varphi_1\circ\varphi_2$ es homomorfismo por ser composición de homomorfismos.

$$\begin{array}{rrcccl} \varphi: & K[X,Y]=K[X][Y] & \longrightarrow & K[X] & \longrightarrow & \frac{K[X]}{(f(X))}=D \\ & p(Y) & \longmapsto & p(g(X)) & \longmapsto & p(g(X))+(f(X)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \varphi: & K[X,Y] & \longrightarrow & D \\ & X & \longmapsto & X+(f(X)) \\ & Y & \longmapsto & g(x)+(f(X)) \\ & k\in K & \longmapsto & k+(f(X)) \end{array}$$

Veamos que $ker\varphi=(f(X),Y-g(X))$.
$\boxed{ker\varphi\supseteq(f(X),Y-g(X))}$

$$\varphi(f(X))=f(X)+(f(X))=0_D$$

$$\varphi(Y-g(X))=\varphi(Y)-\varphi(g(X))=(g(X)+(f(X)))-(g(x)+(f(X)))=0_D$$

$\boxed{ker\varphi\subseteq(f(X),Y-g(X))}$
Sea $p\in ker\varphi$. Dividimos entre $Y-g(X)$.

$$p=q(Y-g(X))+r \text{ con } q,r\in K[X,Y] \text{ y } 1>deg_Y(r)=0\Rightarrow r\in K[X]$$

Aplicando φ:

$$0_D=\varphi(q)0_D+\varphi(r)=\varphi(r)=r+(f(X))\Rightarrow r\in(f(X))\subseteq(f(X),Y-g(X))$$

Tenemos que $p\in(f(X),Y-g(X))$.
Por el primer teorema de isomorfía y por ser φ sobreyectivo.

$$\frac{K[X,Y]}{(f(X),Y-g(X))}\sim im(\varphi)=D$$

$$f \text{ irreducible } \Leftrightarrow \frac{K[X]}{(f(X))} \text{ DI } \Leftrightarrow \frac{K[X,Y]}{(f(X),Y-g(X))} \text{ DI } \Leftrightarrow (f(X),Y-g(X)) \text{ primo}$$

1.
a)
Por inducción en n.
$\boxed{n=1}$

$$X^\alpha\geq X^0 \text{ porque } \alpha\geq 0$$

$\boxed{n-1\Rightarrow n}$

$$(X_1^{\alpha_1}\cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}})X_n^{\alpha_n}>(X_1^0\cdots X_{n-1}^0)X_n^0 \text{ y } \alpha_n>0$$

b)
$\boxed{n=1}$

$$X^\alpha\geq X^\beta\Leftrightarrow\alpha\geq\beta$$

$\boxed{n-1\Rightarrow n}$

$$(X_1^{\alpha_1}\cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}})X_n^{\alpha_n}\geq(X_1^{\beta_1}\cdots X_{n-1}^{\beta_{n-1}})X_n^{\beta_n}$$

c)
Tomando $(\bar{X}^{\bar{\alpha}_1},\cdots,\bar{X}^{\bar{\alpha}_n},\cdots)\subseteq Mon(X_1,\cdots,X_n)\Rightarrow \exists\bar{X}^{\bar{\alpha}_i}\in(\bar{X}^{\bar{\alpha}_1},\cdots,\bar{X}^{\bar{\alpha}_n},\cdots)$ t.q. $\bar{X}^{\bar{\alpha}_i}<\bar{X}^{\bar{\alpha}_j}\ \forall j\neq i$ (es decir, todo subconjnto de $Mon(X_1,\cdots,X_n)$ tiene un elemento mínimo y máximo) $\Rightarrow\ \forall j>i$ t.q $\bar{X}^{\bar{\alpha}_i}\geq\bar{X}^{\bar{\alpha}_l}$, $\bar{X}^{\bar{\alpha}_i}=\bar{X}^{\bar{\alpha}_j}$.

2.

a)

$$
\begin{array}{cccccc|l}
6X^2Y & & -X & +4Y^3 & -1 & & 2XY+Y^3 \\
\cline{7-7}
-6X^2Y & -3XY^3 & & & & & 3X-\frac{3}{2}Y^2 \\
\cline{1-5}
/ & -3XY^3 & -X & +4Y^3 & -1 & & \\
 & 3XY^3 & & & & +\frac{3}{2}Y^5 & \\
\cline{2-6}
 & / & -X & +4Y^3 & -1 & +\frac{3}{2}Y^5 &
\end{array}
$$

$6X^2Y-X+4Y^3-1=(2XY+Y^3)(3X-\frac{3}{2}Y^2)-X+4Y^3-1+\frac{3}{2}Y^5$

b)

$$
\begin{array}{cccccc|l}
4Y^3 & +6X^2Y & -X & & -1 & & Y^3+2XY \\
\cline{7-7}
-4Y^3 & -8XY & & & & & 4 \\
\cline{1-6}
/ & 6X^2Y & -8XY & -X & -1 & &
\end{array}
$$

$6X^2Y-X+4Y^3-1=4(2XY+Y^3)+6X^2Y-8XY-X-1$