Seminario 2

Andoni Latorre Galarraga, Mariana Emilia Zaballa Bernabe

9.

Se pide probar que ($\exists n \in \mathbb{N}^+$ t.q. $a^n \in I \Rightarrow a \in I$) $\Leftrightarrow A/I$ no tiene elementos nilpotentes no nulos.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $\exists \bar{a} \in A/I$ y $\exists n \in \mathbb{N}^+$ t.q. $\bar{a}^n = \bar{0}$.

$$(\bar{a}^n) = (a+I)^n = a^n + I = \bar{0}$$

$$\Rightarrow a^n \in I \overset{\text{hip.}}{\Rightarrow} a \in I \Rightarrow \bar{a} = \bar{0}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Por hipótesis si A/I no tiene elementos nipotentes no nulos. Dado $\bar{a} \in A/I$, si $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\bar{a}^n = \bar{0}$. Entonces,

$$\bar{a}^n = (a+I)^n = a^n + I = \bar{0}$$

$$\Rightarrow a^n \in I \Rightarrow \bar{a} = \bar{0} \Rightarrow a \in I$$

11.

(a) Si $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, tenemos que $(2) \neq \{0\} \neq (3)$ y $(2) \cap (3) = \{0\}$.

(b) Sean I, J ideales no nulos tales que $I \cap J = \{0_A\}$. Si $0_A \neq i \in I$, $0_A \neq j \in J$. Tenemos que $ij \in I$ por ser I ideal. Además $ij \in J$ por ser J ideal. Es decir, $ij \in I \cap J \Rightarrow ij = 0_A$ #

Queremos probar que si $\{I_k\}_{1 \leq k \leq n}$ con $n \geq 2$ entonces $\bigcap_{k=1}^n I_k \neq \{0_A\}$. Por inducción, ya hemos probado para $n = 2$.

$$\bigcap_{k=1}^{n} I_k = I_n \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \neq \{0_A\}$$

por ser $\bigcap_{k=1}^{n-1}$ no nulo por hipótesis de inducción.

(c) $\mathbb{Z}$ es D.I. y (n) es no nulo para $n \in \mathbb{N}^+$

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} (n) = \{0\}$$

25.

Supongamos que ϕ, ψ son homomorfismos. Sea $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$

$$\begin{cases} \phi(a+bi) = \phi(a) + \phi(b)a_0 \\ \psi(a+bi) = \psi(a) + \psi(b)a_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(0) = 0_A = \psi(0) & \\ \phi(a) = \phi(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{a}) = a1_a & a > 0 \\ \psi(a) = \psi(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{a}) = a1_a & \\ \phi(-a) = \phi(\underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{a}) = -a1_a & a > 0 \\ \psi(-a) = \psi(\underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{a}) = -a1_a & a > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(a+bi) = \psi(a+bi)$$

Es decir, el homomorfismo es único.

El homomorfismo explícito es:

$$\begin{array}{rrcl} \phi: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \\ & i & \longmapsto & \bar{7} \\ & a \in \mathbb{Z} & \longmapsto & \bar{a} \end{array}$$

veamos que es homomorfismo. Si $x = +bi$, $y = c + di$

$$\phi(x+y) = \phi(a + c + (b+d)i)$$

$$= \phi(a) + \phi(c) + \phi(b)\bar{7} + \phi(d)\bar{7} = \phi(a+bi) + \phi(c+di)$$

$$= \phi(x) + \phi(y)$$

$$\phi(xy) = \phi(ac - bd + adi + bci)$$

$$= \phi(a)\phi(c) - \phi(b)\phi(d) + \phi(a)\phi(d)\bar{7} + \phi(b)\phi(c)\bar{7}$$

$$\bar{a}\bar{c} - \bar{b}\bar{d} + \bar{a}\bar{d}\bar{7} + \bar{b}\bar{c}\bar{7} = \bar{a}\bar{c} + (\bar{b}\bar{7})(\bar{d}\bar{7}) + \bar{a}\bar{d}\bar{7} + \bar{b}\bar{c}\bar{7}$$

$$\bar{a}(\bar{c} + \bar{d}\bar{7}) + \bar{b}\bar{7}(\bar{d}\bar{7} + \bar{c}) = (\bar{c} + \bar{d}\bar{7})(\bar{a} + \bar{b}\bar{7}) =$$

$$\phi(c+di)\phi(a+bi) = \phi(y)\phi(x) = \phi(x)\phi(y)$$

$$\phi(0) = \bar{0} + \bar{0}\bar{7} = \bar{0}$$

$$\phi(1) = \bar{1} + \bar{0}\bar{7} = \bar{1}$$

26.

Lema $a + bi \in (3+i) \Rightarrow \alpha + \beta i \in (3+i) \forall \alpha \in \bar{a}, \beta \in \bar{b}$
Dem Basta con probar que $\exists c, d \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$(c+di)(3+i) = \alpha + \beta i$$

Por hipótesis $\exists \gamma\delta \in \mathbb{Z}$ t.q. $(\gamma + \delta i)(3+1) = a + bi$. Si $\alpha = a + 10n$, $\beta = b + 10m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces, $d = 3m - n + \delta$ y $c = m + 3n + \gamma$.

$$(c+di)(3+i)$$

$$= (m + 3n + \gamma + (3m - n + \delta)i)(3+i)$$

$$= (3+i)\gamma - (1-3i)\delta + 10im + 10n$$

$$(3+i)\gamma + (3+i)i\delta + 10im + 10n = \alpha + \beta i$$

(i), (iii) Bastaría con probar $ker\phi = (3+i)$ y el resutado sería evidente por el primer teorema de isomorfía.

$$a + bi \in ker\phi \Leftrightarrow \bar{a} + \bar{7}\bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow a \equiv 3b \pmod{10}$$

$\bar{a}$	$\bar{b}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$
$\bar{6}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$
$\bar{8}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{9}$

Por el lema, basta con observar que:

$$(0+0i)(3+i) = 0+0i$$
$$(1+0i)(3+i) = 3+1i$$
$$(2+0i)(3+i) = 6+2i$$
$$(3+0i)(3+i) = 9+3i$$
$$(1+1i)(3+i) = 2+4i$$
$$(2+1i)(3+i) = 5+5i$$
$$(3+1i)(3+i) = 8+6i$$
$$(1+2i)(3+i) = 1+7i$$
$$(2+2i)(3+i) = 4+8i$$
$$(3+2i)(3+i) = 7+9i$$

(ii) Por se ϕ biyectiva, basta con observar que $\{\phi(n) \mid n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq 9\} = \{\bar{n} \mid n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq 9\} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

28.

Consideramos el homomorfismo

$$\begin{array}{rrcl} \phi: & K[X_1,\cdots,X_n] & \longrightarrow & K[X_{r+1},\cdots,X_n] \\ i=1,\cdots,r & X_i & \longmapsto & a_i \\ & P & \longmapsto & P \quad \forall P \in K[X_{r+1},\cdots,X_n] \end{array}$$

Veamos que ϕ es homomorfismo. Sean $Q, P \in K[X_1,\cdots,X_n]$.

$$P = \sum_{j_1,\cdots,j_n} c_{j_1,\cdots,j_n} X_1^{j_1}\cdots X_n^{j_n} \quad j_k \in \mathbb{N}$$

$$Q = \sum_{i_1,\cdots,i_n} b_{i_1,\cdots,i_n} X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n} \quad i_k \in \mathbb{N}$$

$$\phi(PQ) = \phi\left(\sum_{i_k}\sum_{j_k} c_{j_1,\cdots,j_n} b_{i_1,\cdots,i_n} X_1^{i_1+j_1}\cdots X_n^{i_n+j_n}\right) =$$

$$\sum_{i_k}\sum_{j_k} c_{j_1,\cdots,j_n} b_{i_1,\cdots,i_n} a_1^{i_1+j_1}\cdots a_r^{i_r+j_r} X_{r+1}^{i_{r+1}+j_{r+1}}\cdots X_n^{i_n+j_n}$$

$$= \sum_{i_k} b_{i_1,\cdots,i_n} a_1^{i_1}\cdots a_r^{i_r} X_{r+1}^{i_{r+1}}\cdots X_n^{i_n}$$

$$\cdot \sum_{j_k} c_{j_1,\cdots,j_n} a_1^{j_1}\cdots a_r^{j_r} X_{r+1}^{j_{r+1}}\cdots X_n^{j_n}$$

$$= \phi(P)\phi(Q)$$

$$\phi(P+Q) = \phi\left(\sum_{i_k} (c_{i_1,\cdots,i_n} b_{i_1,\cdots,i_n}) X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}\right)$$

$$\sum_{i_k} (c_{i_1,\cdots,i_n} + b_{i_1,\cdots,i_n})\, a_1^{i_1}\cdots a_r^{i_r} X_{r+1}^{i_{r+1}}\cdots X_n^{i_n}$$

$$\sum_{i_k} c_{i_1,\cdots,i_n} a_1^{i_1}\cdots a_r^{i_r} X_{r+1}^{i_{r+1}}\cdots X_n^{i_n}$$

$$+\sum_{i_k} b_{i_1,\cdots,i_n} a_1^{i_1}\cdots a_r^{i_r} X_{r+1}^{i_{r+1}}\cdots X_n^{i_n}$$

$$= \phi(P) + \phi(Q)$$

$$\phi(1) = 1$$

Veamos que $ker\phi = (X_1 - a_1, \cdots, X_r - a_r)$.

$\boxed{\subseteq}$

$$\phi(X_i - a_i) = 0 \Rightarrow (X_1 - a_1, \cdots, X_r - a_r) \subseteq ker\phi$$

$\boxed{\supseteq}$ Dado $P \in ker\phi$ $\exists q, r \in K[X_1, \cdots]$ t.q.

$$P = q\sum_{i=1}^{r}(X_i - ai) \quad deg(r) < deg\left(\sum_{i=1}^{r}(X_i - ai)\right) = 1$$

$$\Rightarrow deg(r) = 0$$

Además,

$$0 = \phi(p) = \phi(q) + \phi\left(\sum_{i=1}^{r}(X_i - ai)\right) + \phi(r)$$

$$= \phi(q) + \sum_{i=1}^{r}\underbrace{\phi(X_i - ai)}_{=0} + \phi(r) = \phi(r) \Rightarrow r = 0$$

$$\downarrow$$

$$r \in K[X_{r+1}, \cdots, X_n]$$

$$\Rightarrow P = q\sum_{i=1}^{r}(X_i - ai)$$

$$\Rightarrow P \in (X_1 - a_1, \cdots, X_r - a_r)$$

$$(X_1 - a_1, \cdots, X_r - a_r) \subseteq Ker\phi$$

Así se concluye que

$$Ker\phi = (X_1 - a_1, \cdots, X_r - a_r)$$

Por el primer teorema de isomorfía,

$$\frac{K[X_1,\cdots,X_n]}{(X_1 - a_1, \cdots, X_r - a_r)} \simeq K[X_{r+1}, \cdots, X_n]$$

$$I = (X_1 - a_1, \cdots, X_r - a_r)$$
$$A = K[X_1, \cdots, X_n]$$
$$B = K[X_{r+1}, \cdots, X_n]$$

Veamos que I es primo. I primo $\Leftrightarrow A/I$ D.I. K cuerpo $\Rightarrow B$ D.I. $\Rightarrow A/I$ D.I. $\Leftrightarrow I$ primo.
Cuando $r \neq n$, I no es maximal ya que A no es cuerpo, en concreto no es D.I.P.
Cuando $r = n$, $\frac{K[X_1,\cdots,X_n]}{(X_1 - a_1,\cdots,X_n - a_n)} \simeq K$ y $(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) = J$ es primo en $A \Leftrightarrow J$ es maximal. Además está claro que $\forall J' \subset A$ ideal en A, se tiene que $J' \subseteq J$.