Seminario 2

Andoni Latorre Galarraga

(8.)
i) G es de orden $24 = 3 \cdot 2^3$ de manera que todos los 3-subgrupos de Syllow son de orden 3. Como todos los p-subgrupos estan relacionados por conjugación es sufiente con encontrar uno que sea normal para concluir que este es único. Buscamos un elemento de orden 3, de la presentación de G concluimos que $o(x^2) = 3$. Tenemos que $\mathrm{Syl}_3(G) = \{\langle x^2 \rangle\}$. Para ver que $P = \langle x^2 \rangle$ es normal, conjugamos con los generadores de G.

$$(x^2)^x = x^2 \in \langle x^2 \rangle$$

$$(x^2)^y = (x^2)^{-1} \in \langle x^2 \rangle$$

Todo subgrupo, H, de orden divisible entre 3 tiene un elemento de orden 3 y por lo tanto un subgrupo, $K \leq H$, de orden 3 (el generado por ese elemento). Como solo existe un subgrupo de G de orden 3, este tiene que ser P y concluimos que $P \leq H$.
ii) Veamos que $G/P = \langle \bar{x}, \bar{y} \mid \overline{x}^2 = \overline{y}^4 = 1, \overline{y}^{\overline{x}} = \overline{y} \rangle$

$$\overline{y}^{\overline{x}} = \overline{x^{-1}yx} = \overline{(y^{-1}xy)yx} = \overline{y^{-2}x^{-1}y^3x} = \overline{y^{-3}xy^4x} = \overline{yx^2} = \overline{y}$$

Para encontrar los subrupos de orden divisible entre 3 de G buscamos los subgrupos H/P de G/P. Como G/P es abeliano los H/P son de la forma $\{1\}, C_2, C_4, C_2 \times C_2, C_2 \times C_4$. Teniendo en cuenta el orden de los elementos de G/P

$\overline{h}$	$o(\overline{h})$
$\overline{1}$	1
$\overline{y^2}$	2
$\overline{x}$	2
$\overline{xy^2}$	2
$\overline{y}$	4
$\overline{y^3}$	4
$\overline{xy}$	4
$\overline{xy^3}$	4

Por lo que los subgrupos de G/P son:

$$\{\langle\overline{1}\rangle, \langle\overline{y^2}\rangle, \langle\overline{x}\rangle, \langle\overline{xy^2}\rangle, \langle\overline{y}\rangle, \langle\overline{xy}\rangle, \langle\overline{y^2}, \overline{x}\rangle, \langle\overline{y}, \overline{x}\rangle\}$$

Y los subgrupos de G que buscamos son:

$$\{\langle x^2\rangle, \langle y^2, x^2\rangle, \langle x, x^2\rangle, \langle xy^2, x^2\rangle, \langle y, x^2\rangle, \langle xy, x^2\rangle, \langle y^2, x, x^2\rangle, \langle y, x, x^2\rangle\}$$

$$\{\langle x^2\rangle, \langle y^2, x^2\rangle, \langle x\rangle, \langle xy^2, x^2\rangle, \langle y, x^2\rangle, \langle xy, x^2\rangle, \langle y^2, x\rangle, \langle y, x\rangle\}$$

Todos son normales. Por ser G/P abeliano, $H/P \trianglelefteq G/P$ y $H \trianglelefteq P$.
iii) Probamos con $Q = \langle x^3, y \rangle$.

$$(x^3)^y = (x^3)^{-1} = x^3$$

Tenemos que $Q \simeq C_2 \times C_4$. Como $n_2 \equiv 1 \pmod 2$, $n_2 \mid 3$ y Q no es normal en G, hay 3 2-subgrupos de Syllow. Obtenemos los que faltan por conjugación.

$$Q^x = \langle x^3, y^x \rangle = \langle x^3, yx^2 \rangle$$

$$Q^{x^2} = \langle x^3, y^{x^2} \rangle = \langle x^3, yx^4 \rangle$$

16.
i) $144 = 2^4 3^2$. Tenemos que $n_3 \equiv 1 \pmod 3$ y $n_3 \mid 16$. Est nos da 3 valores posibles: $1, 4, 16$. Suponiedo que G es simple tendriamos que no es abeliano por no ser de orden primo y $n_3 >= 5$. Es decir $n_3 = 16$.
ii) $|G : \langle P, Q \rangle| \leq 4 \Leftrightarrow |\langle P, Q \rangle| \geq 36$.

$$|\langle P, Q \rangle| \geq |PQ| = \frac{|P| \cdot |Q|}{|P \cap Q|} \geq \frac{81}{3} = 27$$

Ya que $|P \cap Q| \leq 3$ por ser distintos y ser 3-Syllow. Ahora, tenemos tres opciones para $|P \cap Q|$: 1, 2 y 3. 2 no puede ser ya que entonces habria un elementos de orden 2 en P y Q. Como P y Q son abelianos por ser de orden 3 o 9, su intersección es normal en P y en Q, por ser G simple, es necesrio $|P \cap Q| = 1$.
iii)