

5. Sucesiones y series de funciones

De ahora en adelante X representa un conjunto no vacío y $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones tales que $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$.

5.1. Convergencia puntual

Definición: Se dice que $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

5.1.1. Ejemplo

Si $X = [0, 1]$ y $f_n(x) = x^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

5.1.2. Ejemplo

Si $X = [0, 1]$, y $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$$

5.1.3. Ejemplo

Si $X = [0, 1]$ y $f_n = \begin{cases} nx & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$