# Cuarto Seminario de Estructuras Algebraicas

Andoni Latorre Galarraga

**Orden** 11

Sea $G$ grupo de orden 11. Sea $a \in G - \{1\}$, como $o(a) \neq 1$ y $o(a) \mid 11$ se tiene que $o(a) = 11$, ahora $| < a > | = 11$ y como $< a > \leq G$ y $| < a > | = |G|$ se tiene que $< a >= G$ y por lo tanto $G \simeq C_{11}$.

**Orden** 22

Sea $G$ grupo de orden 22. Por el primer teorema de Sylow sabemos que existen un 11-Sylow y un 2-Sylow. Estos grupos son de orden primo y por lo tanto cíclicos, sean $a, b$ sus generadores respectivos. Tenemos que $| < a, b > | \in \{1, 2, 11, 22\}$, 1 no puede ser porque $a \neq 1$ y por lo tanto el grupo se no trivial. 2 no puede ser ya que $o(a) = 11$ y 11 no divide a 2. 11 no puede ser ya que $o(b) = 2$ y 2 no divide a 11. Se tiene que $G =< a, b >$. Por el tercer teorema de Sylow $\nu_{11}(G) \mid 2$ y $\nu_{11}(G) \equiv 1 \mod 11$ por lo tanto $\nu_{11}(G) = 1$ y por el segundo teorema de Sylow el unico grupo de orden 11, $< a >$, y es normal. Ahora tenemos que $bab^{-1} = a^i$ para algun $i$, con $1 \leq i \leq 10$ ahora $a = (b^2)^{-1}ab^2 = b^{-1}a^ib = \underbrace{(b^{-1}ab) \cdots (b^{-1}ab)}_{i} = (a^i)^i = a^{i^2}$ y $a^{i^2-1} = 1$ y 11 divide a $i^2 - 1 = (i-1)(i+1)$ entonces $i = 1$ o $i = 10$. Cuando $i = 1$ $bab^{-1} = a$ y el grupo es abeliano e isomorfo a $C_{22}$. Cuando $i = 10$, $bab^{-1} = a^{p-1} = a^{-1}$ y se tiene $G =< a, b \mid a^{11} = b^2 = 1,^b = a^{-1} >$ que es isomorfo a $D_{11}$.

**Orden** 35

Sea $G$ grupo de orden 35. Sabemos que existen un único 5-Sylow que es normal y un único 7-Sylow que es normal, su intersección es trivial ya que los elementos no identidad son de orden 5 y 7 respectivamente y por tanto distintos. Por definición de producto directo y sabiendo que los Sylow son ciclicos $G \simeq C_5 \times C_7 \simeq C_{35}$.

**Orden** 49

Sea $G$ grupo de orden 49. Veamos que $|Z(G)| = 49$, sabemos que $|Z(G)|$ divide a 49 por lo que tiene que ser 1, 7 o 49. Como $49 = 7^2$ tenemos que $G$ es p-grupo y por lo tanto $|Z(G)| > 1$ entonces $|Z(G)|$ solo puede ser 7 o 49. Si es 7 entonces $|G/Z(G)| = 7$ y $G/Z(G)$ seria cíclico, teniendose que $G$ es abeliano. Esto es contradictorio ya que si $G$ es abeliano $G/Z(G) \simeq 1$ y $1 \neq 7$. Por lo tanto $|Z(G)| = 49 = |G|$ y $G$ es abeliano. Ahora sabemos que $G \simeq C_{49}$ o $G \simeq C_7 \times C_7$. Estos no son isomorfos ya que en $C_{49}$ existen elementos de orden 49 y en $C_7| \times C_7$ todos los elementos tienen orden menor o igual que 7.

$$\forall (g, g') \in C_7 \times C_7 \quad (g, g')^7 = 1 \quad \because g, g' \in C_7 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = g^{|C_7|} = g^7 \\ 1 = g^{|C_7|} = g'^7 \end{array} \right.$$