Seminario 6

Andoni Latorre Galarraga

2.

c)
Sean $x, y \in \varphi(N_1)$, $a, b \in A$. Entonces,

$$\exists u, v \in N_1 : \varphi(u) = x, \varphi(v) = y$$

Ahora, por $N_1 \leq M_1$,

$$\begin{gathered} au + bv \in N_1 \\ \Rightarrow \varphi(au + bv) \in \varphi(N_1) \\ \Rightarrow a\varphi(u) + b\varphi(v) \in \varphi(N_1) \\ \Rightarrow ax + by \in \varphi(N_1) \end{gathered}$$

Como se cumple $\forall x, y \in \varphi(N_1)$, $\forall a, b \in A$, tenemos que $\varphi(N_1) \leq M_2$.

Sean $x, y \in \varphi^{-1}(N_2)$, $a, b \in A$. Como $N_2 \leq M_2$ y $\varphi(x), \varphi(y) \in N_2$.

$$\begin{gathered} \varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y) \in N_2 \\ \Rightarrow ax + by \in \varphi^{-1}(N_2) \end{gathered}$$

Como se cumple $\forall x, y \in \varphi^{-1}(N_2)$, $\forall a, b \in A$, tenemos que $\varphi^{-1}(N_2) \leq M_1$.

d)

$$M_1 \leq M_1 \Rightarrow \mathrm{im}\varphi = \varphi(M_1) \leq M_2$$

$$\{0_{M_2}\} \leq M_2 \Rightarrow \ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0_{M_2}\}) \leq M_1$$

3.

Veamos que la siguiente aplicación es un isomorfismo.

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi} : & \frac{M_1}{\ker\varphi} & \longrightarrow & \mathrm{im}\varphi \\ & m + \ker\varphi & \longmapsto & \varphi(m) \end{array}$$

Veamos que está bien definido.

$$\begin{gathered} m + \ker\varphi = m' + \ker\varphi \\ \Rightarrow m - m' \in \ker\varphi \\ \Rightarrow \varphi(m - m') = 0 \\ \Rightarrow \varphi(m) - \varphi(m') = 0 \\ \Rightarrow \varphi(m) = \varphi(m') \end{gathered}$$

Veamos que es homomorfismo.

$$\begin{gathered} \overline{\varphi}(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{\varphi}(\overline{x + y}) = \varphi(x + y) \\ = \varphi(x) + \varphi(y) = \overline{\varphi}(\overline{x}) + \overline{\varphi}(\overline{y}) \end{gathered}$$

$$\overline{\varphi}(a\overline{x}) = \overline{\varphi}(\overline{ax}) = \varphi(ax) = a\varphi(x) = a\overline{\varphi}(\overline{x})$$

Veamos que es inyectivo.

$$\begin{gathered} \overline{\varphi}(\overline{x}) = \overline{\varphi}(\overline{y}) \\ \Rightarrow \overline{\varphi}(\overline{x - y}) = 0 \\ \Rightarrow \varphi(x - y) = 0 \\ \Rightarrow x - y \in \ker\varphi \\ \Rightarrow \overline{x} = \overline{y} \end{gathered}$$

Veamos que es suprayectivo.

$$\begin{gathered} m \in \mathrm{im}\varphi \\ \Rightarrow \exists x \in M_1 : \varphi(x) = m \\ \Rightarrow \overline{\varphi}(\overline{x}) = \varphi(x) = m \text{ con } \overline{x} \in \tfrac{M_1}{\ker\varphi} \end{gathered}$$

4.

Consideramos la siguiente aplicación.

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \frac{M}{N} & \longrightarrow & \frac{M}{L} \\ & m + N & \longmapsto & m + L \end{array}$$

Veamos que está bien definido.

$$\begin{gathered} m + N = m' + N \Rightarrow m - m' \in N \subseteq L \\ \Rightarrow m + L = m' + L \end{gathered}$$

Veamos que es homomorfismo.

$$\begin{gathered} \varphi((a + b) + N) = (a + b) + L = (a + L) + (b + L) \\ = \varphi(a + N) + \varphi(b + N) \end{gathered}$$

Veamos que es suprayectivo. Dado $m + L \in M/L$, $\varphi(m + N) = m + L$.
Calculamos el núcleo.

$$(\varphi(m + N) = m + L = 0 + L \Leftrightarrow m \in L) \Rightarrow \ker\varphi = \frac{L}{N}$$

Por el ejercicio 3, concluimos

$$\frac{M/N}{L/N} \simeq \frac{M}{L}$$

12.

Si $x, y \in A[X^2]$, $a, b \in A$. Evidentemente, $ax + by \in A[X^2]$ y concuimos $A[X^2] \leq A[X]$.

Dos elementos $\overline{p}, \overline{q} \in \frac{A[X]}{A[X^2]}$ son iguales si y solo si $p - q \in A[X^2]$. Esto ocurre si y solo si los coeficientes $\left(\sum_{i=0}^{N} k_i X^i\right)$ con i impar son iguales en p y q. Es decir, no importa el valor de de los k_i con i par. Entonces,

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A[X]/A[X^2] & \longrightarrow & A[X] \\ & \displaystyle\sum_{i=0}^{N} k_i X^i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impar}}}^{N} k_i X^{\frac{i-1}{2}} \end{array}$$

Es inyectivo y está bien definido. Finalmente, como esta claro que es suprayectivo, quedaría ver que es homomorfismo.

$$\varphi\left(\overline{\sum_{i=0}^{N}k_iX^i}+\overline{\sum_{i=0}^{N}l_iX^i}\right)=\varphi\left(\overline{\sum_{i=0}^{N}(k_i+l_i)X^i}\right)$$

$$=\sum_{\substack{i=0\\ i\text{ impar}}}^{N}(k_i+l_i)X^{\frac{i-1}{2}}=\sum_{\substack{i=0\\ i\text{ impar}}}^{N}k_iX^{\frac{i-1}{2}}+\sum_{\substack{i=0\\ i\text{ impar}}}^{N}l_iX^{\frac{i-1}{2}}$$

$$=\varphi\left(\overline{\sum_{i=0}^{N}k_iX^i}\right)+\varphi\left(\overline{\sum_{i=0}^{N}l_iX^i}\right)$$

$$\varphi\left(a\overline{\sum_{i=0}^{N}k_iX^i}\right)=\varphi\left(\overline{\sum_{i=0}^{N}ak_iX^i}\right)$$

$$=\sum_{\substack{i=0\\ i\text{ impar}}}^{N}ak_iX^{\frac{i-1}{2}}=a\sum_{\substack{i=0\\ i\text{ impar}}}^{N}k_iX^{\frac{i-1}{2}}=a\varphi\left(\overline{\sum_{i=0}^{N}k_iX^i}\right)$$

Conluimos $\dfrac{A[X]}{A[X^2]}\simeq A[X]$.