Interpolación trigonométrica

Yeray Alvarez, Andoni Latorre

En primer lugar, vamos a encontrar una fórmula cerrada para la suma de senos y cosenos. Para ello, vamos a considerar la siguiente suma:

$$\sum_{j=0}^{n}\cos(jx)+i\sum_{j=0}^{n}\operatorname{sen}(jx)=\sum_{j=0}^{n}\cos(jx)+i\operatorname{sen}(jx)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{De Moivre}}}{=}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(\cos(x)+i\operatorname{sen}(x))^{j}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Euler}}}{=}\sum_{j=0}^{n}(e^{ix})^{j}=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \tag{1}$$

Ahora bien, podemos escribir la siguiente igualdad:

$$\operatorname{sen}(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{e^{2ix}-1}{2ie^{ix}}\Rightarrow 1-e^{2ix}=-2ie^{ix}\operatorname{sen}(x)$$

De donde se deduce, sustituyendo x por $\frac{x}{2}$ y x por $\frac{n+1}{2}x$, las igualdades:

$$\begin{aligned} i)\quad & 1-e^{ix}=-2ie^{i\frac{x}{2}}\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\\ ii)\quad & 1-e^{i(n+1)x}=-2ie^{i\frac{n+1}{2}x}\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}x)\end{aligned}$$

Ahora llevamos estos resultados a (1) y obtenemos:

$$=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=(1)=\frac{-2ie^{i\frac{n+1}{2}x}\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}x)}{-2ie^{i\frac{x}{2}}\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}=e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}x)}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}$$

$$=\cos(\frac{n}{2}x)\frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}x)}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}+i\operatorname{sen}(\frac{n}{2}x)\frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}x)}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}$$

Con este resultado en mente, podemos probar la ortogonalidad del sistema trigonométrico. Sustituyendo en la igualdad anterior n por $2N-1$ y x por $(p\pm q)\frac{\pi}{N}$ y obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{j=0}^{2N-1}\cos px_j\cos qx_j=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos{(p-q)x_j}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos{(p+q)x_j}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos\left((p-q)\frac{\pi}{N}j\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos\left((p+q)\frac{\pi}{N}j\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2N-1}{2N}(p-q)\pi\right)\frac{\operatorname{sen}((p-q)\pi)}{\operatorname{sen}((p-q)\frac{\pi}{2N})}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2N-1}{2N}(p+q)\pi\right)\frac{\operatorname{sen}((p+q)\pi)}{\operatorname{sen}((p+q)\frac{\pi}{2N})}\underset{\substack{\uparrow\\ p\neq q}}{=}0$$

Cuando $p=q$,

$$\sum_{j=0}^{2N-1}\cos\left(p\frac{\pi}{N}j\right)\cos\left(p\frac{\pi}{N}j\right)=\sum_{j=0}^{2N-1}\cos^2\left(p\frac{\pi}{N}j\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}1+\cos\left(\frac{p}{n}2\pi pj\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}1+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos\left(\frac{p}{N}2\pi j\right)\underset{\substack{\uparrow\\ p\neq 0,N}}{=}N+\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2N-1}{2N}2\pi p\right)\frac{\operatorname{sen}(2p\pi)}{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{N}\pi\right)}\right)=N$$

Cuando $p=q=0,N$,

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}1+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos\left(\frac{p}{N}2\pi j\right)\underset{\substack{\uparrow\\ p=0,N}}{=}N+N=2N$$

La suma finita de productos de senos es bastante similar a la de los cosenos:

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \operatorname{sen} px_j \operatorname{sen} qx_j = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \cos\left((p-q)x_j\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \cos\left((p+q)x_j\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \cos\left((p-q)\frac{\pi}{N}j\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \cos\left((p+q)\frac{\pi}{N}j\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2N-1}{2N}(p-q)\pi\right)\frac{\operatorname{sen}\left((p-q)\pi\right)}{\operatorname{sen}((p-q)\frac{\pi}{2N})} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2N-1}{2N}(p+q)\pi\right)\frac{\operatorname{sen}\left((p+q)\pi\right)}{\operatorname{sen}((p+q)\frac{\pi}{2N})} \underset{\substack{\uparrow \\ p\neq q}}{=} 0$$

Cuando $p = q$,

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \operatorname{sen}\left(p\frac{\pi}{N}j\right)\operatorname{sen}\left(p\frac{\pi}{N}j\right) = \sum_{j=0}^{2N-1} \operatorname{sen}^2\left(p\frac{\pi}{N}j\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} 1 - \cos\left(2p\frac{\pi}{N}j\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} 1 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \cos\left(\frac{p}{N}2\pi j\right) \underset{\substack{\uparrow \\ p\neq 0, N}}{=} N - \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2N-1}{2N}2\pi p\right)\frac{\operatorname{sen}(2p\pi)}{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{N}\pi\right)}\right) = N$$

Finalmente, veremos que la suma de productos de senos y cosenos es nula:

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \cos px_j \operatorname{sen} qx_j = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \operatorname{sen}(p-q)x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \operatorname{sen}(p+q)x_j =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \operatorname{sen}\left((p-q)\frac{\pi}{N}j\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2N-1} \operatorname{sen}\left((p+q)\frac{\pi}{N}j\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2N-1}{2N}(p-q)\pi\right)\frac{\operatorname{sen}\left((p-q)\pi\right)}{\operatorname{sen}((p-q)\frac{\pi}{2N})} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2N-1}{2N}(p+q)\pi\right)\frac{\operatorname{sen}\left((p+q)\pi\right)}{\operatorname{sen}((p+q)\frac{\pi}{2N})} = 0$$

Utilizando estas relaciones de ortogonalidad, demuestre que existe un único polinomio trigonométrico que interpola la función f por los nodos (1) con los coeficientes:

$$A_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\cos kx_j \qquad k = 0, \ldots, N$$

$$B_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\operatorname{sen} kx_j \qquad k = 1, \ldots, N-1$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}(A_k\cos kx + B_k\operatorname{sen} kx) + \frac{A_N}{2}\cos Nx$$

Veamos primero el valor del coeficiente A_0. Evaluamos la función interpoladora en x_j.

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}(A_k\cos kx_j + B_k\operatorname{sen} kx_j) + \frac{A_N}{2}\cos Nx_j = f(x_j)$$

Ahora, sumamos las expresiones para cada valor de j.

$$\sum_{j=0}^{2N-1}\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{2N-1}(A_k\cos kx_j + B_k\operatorname{sen} kx_j) + \sum_{j=0}^{2N-1}\frac{A_N}{2}\cos Nx_j = \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)$$

$$2N\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}\left(A_k\sum_{j=0}^{2N-1}\cos kx_j+B_k\sum_{j=0}^{2N-1}\operatorname{sen} kx_j\right)+\frac{A_N}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos Nx_j=\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j)$$

Aplicando las relaciones de ortogonalidad vemos que las sumas marcadas valen 0.

$$2N\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}\left(A_k\sum_{j=0}^{2N-1}\cos kx_j\cos 0x_j+B_k\sum_{j=0}^{2N-1}\operatorname{sen} kx_j\cos 0x_j\right)+\frac{A_N}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos Nx_j\cos 0x_j=\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j)$$

De donde finalmente se deduce:

$$NA_0=\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j)\Rightarrow A_0=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j)$$

Para hallar el valor de A_N, partimos de la igualdad clásica multiplicada por $\cos Nx_j$ y sumamos en j:

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}(A_k\cos kx_j+B_k\sin kx_j)+\frac{A_N}{2}\cos Nx_j=f(x_j)$$

$$\frac{A_0}{2}\cos Nx_j+\sum_{k=1}^{N-1}(A_k\cos kx_j\cos Nx_j+B_k\sin kx_j\cos Nx_j)+\frac{A_N}{2}\cos Nx_j\cos Nx_j=f(x_j)\cos Nx_j$$

$$\frac{A_0}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos Nx_j\cos 0x_j+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{2N-1}(A_k\cos kx_j\cos Nx_j+B_k\sin kx_j\cos Nx_j)+\frac{A_N}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos Nx_j\cos Nx_j$$
$$=\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j)\cos Nx_j$$

De donde finalmente deducimos:

$$2N\frac{A_N}{2}=\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j)\cos Nx_j\Rightarrow A_N=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j)\cos Nx_j$$

Para hallar los coeficientes A_m con $m\in\{1,\dots,N-1\}$ tomamos la igualdad:

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}(A_k\cos kx_j+B_k\operatorname{sen} kx_j)+\frac{A_N}{2}\cos Nx_j=f(x_j)$$

La multiplicamos por $\cos(mx_j)$:

$$\frac{A_0}{2}\cos mx_j+\sum_{k=1}^{N-1}(A_k\cos kx_j\cos mx_j+B_k\sin kx_j\cos mx_j)+\frac{A_N}{2}\cos Nx_j\cos mx_j=f(x_j)\cos mx_j$$

Y sumamos en j:

$$\sum_{j=0}^{2N-1}\frac{A_0}{2}\cos mx_j+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{2N-1}(A_k\cos kx_j\cos mx_j+B_k\sin kx_j\cos mx_j)+\sum_{j=0}^{2N-1}\frac{A_N}{2}\cos Nx_j\cos mx_j$$
$$=\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j)\cos mx_j$$

Aplicando las relaciones de ortogonalidad obtenemos los valores de las sumas marcadas:

$$\frac{A_0}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos mx_j\cos 0x_j+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{2N-1}(A_k\cos kx_j\cos mx_j+B_k\sin kx_j\cos mx_j)+\frac{A_N}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos Nx_j\cos mx_j$$

$$= \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\cos mx_j$$

Del sumatorio en j del producto de $A_k \cos kx_j \cos mx_j$ sobrevive el término que corresponde a $j = m$:

$$NA_m = \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\cos mx_j \Rightarrow A_m = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\cos mx_j$$

Mutatis mutandis, para hallar los coeficientes B_m con $m \in \{1, \ldots, N-1\}$ seguiremos la misma serie de pasos multiplicando esta vez las respectivas igualdades por $\operatorname{sen} mx_j$ y luego sumando en j:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1}(A_k \cos kx_j + B_k \operatorname{sen} kx_j) + \frac{A_N}{2}\cos Nx_j = f(x_j)$$

$$\frac{A_0}{2}\cos mx_j + \sum_{k=1}^{N-1}(A_k \cos kx_j \operatorname{sen} mx_j + B_k \sin kx_j \operatorname{sen} mx_j) + \frac{A_N}{2}\cos Nx_j \operatorname{sen} mx_j = f(x_j)\operatorname{sen} mx_j$$

$$\sum_{j=0}^{2N-1}\frac{A_0}{2}\operatorname{sen} mx_j + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{2N-1}(A_k \cos kx_j \operatorname{sen} mx_j + B_k \operatorname{sen} kx_j \operatorname{sen} mx_j) + \sum_{j=0}^{2N-1}\frac{A_N}{2}\cos Nx_j \operatorname{sen} mx_j$$

$$= \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\operatorname{sen} mx_j$$

$$\frac{A_0}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\operatorname{sen} mx_j \cos 0x_j + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{2N-1}(A_k \cos kx_j \operatorname{sen} mx_j + B_k \sin kx_j \operatorname{sen} mx_j) + \frac{A_N}{2}\sum_{j=0}^{2N-1}\cos Nx_j \operatorname{sen} mx_j$$

$$= \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\operatorname{sen} mx_j$$

Análogamente, del sumatorio en j del producto de $B_k \operatorname{sen} kx_j \operatorname{sen} mx_j$ sobrevive el término que corresponde a $j = m$:

$$NB_m = \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\operatorname{sen} mx_j \Rightarrow B_m = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\operatorname{sen} mx_j$$

(iii) Suponga ahora que la función f tiene un desarrollo de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

que converge puntualmente en $[0, 2\pi]$. ¿Están relacionados los coeficientes ak, Ak, bk, Bk ?
Es bien conocido que los coeficientes de Fourier para una función de clase C1 a trozos son de la siguiente forma:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \quad \sim \quad A_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\cos kx_j$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx dx \quad \sim \quad B_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\operatorname{sen} kx_j$$

Si escribimos

$$A_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\cos kx_j = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\cos kx_j = \frac{1}{\pi}\sigma(f(x)\cos kx, [0, 2\pi], \pi/N)$$

Que se trata de una suma de Riemann (1826-1866) en el intervalo $[0, 2\pi]$ con diámetro de partición $\frac{\pi}{N}$ para la función $g(x) = f(x)\cos(kx)$, y tomando limites cuando $N \to \infty$ queda

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx$$

Siguiendo un razonamiento similar podemos probar que B_k es una suma de Riemann (1826-1866) en el intervalo $[0, 2\pi]$ con diámetro de partición $\frac{\pi}{N}$ para la función $g(x) = f(x)\operatorname{sen}(kx)$, y tomando limites una vez más obtenemos el resultado deseado:

$$B_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\operatorname{sen} kx_j = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)\operatorname{sen} kx_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx dx$$