

Знаходження мінімального кістякового дерева

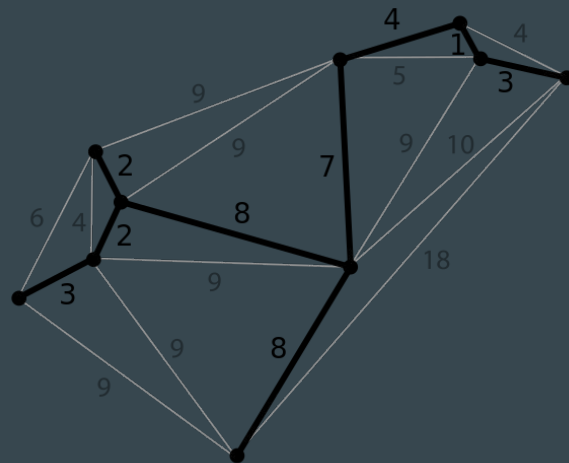
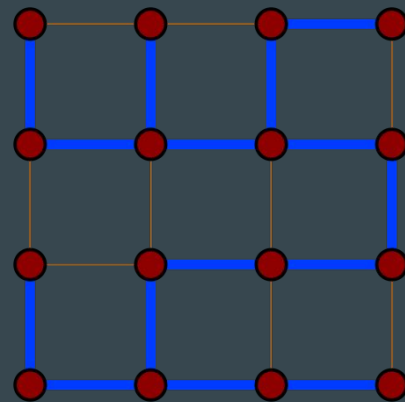
...

Марія Любарська

15 травня 2020

Мінімальне кістякове дерево

- Кістякове дерево (англ. **Spanning tree**) зв'язаного неорієнтованого графа - ациклічний зв'язний підграф цього графа, який містить всі його вершини.
- Мінімальне кістякове дерево у зв'язаному, зваженому, неорієнтованому графі - це кістяк цього графа, що має мінімальну можливу вагу, де під вагою дерева розуміється сума ваг його ребер.



Пошук мінімального кістякового дерева

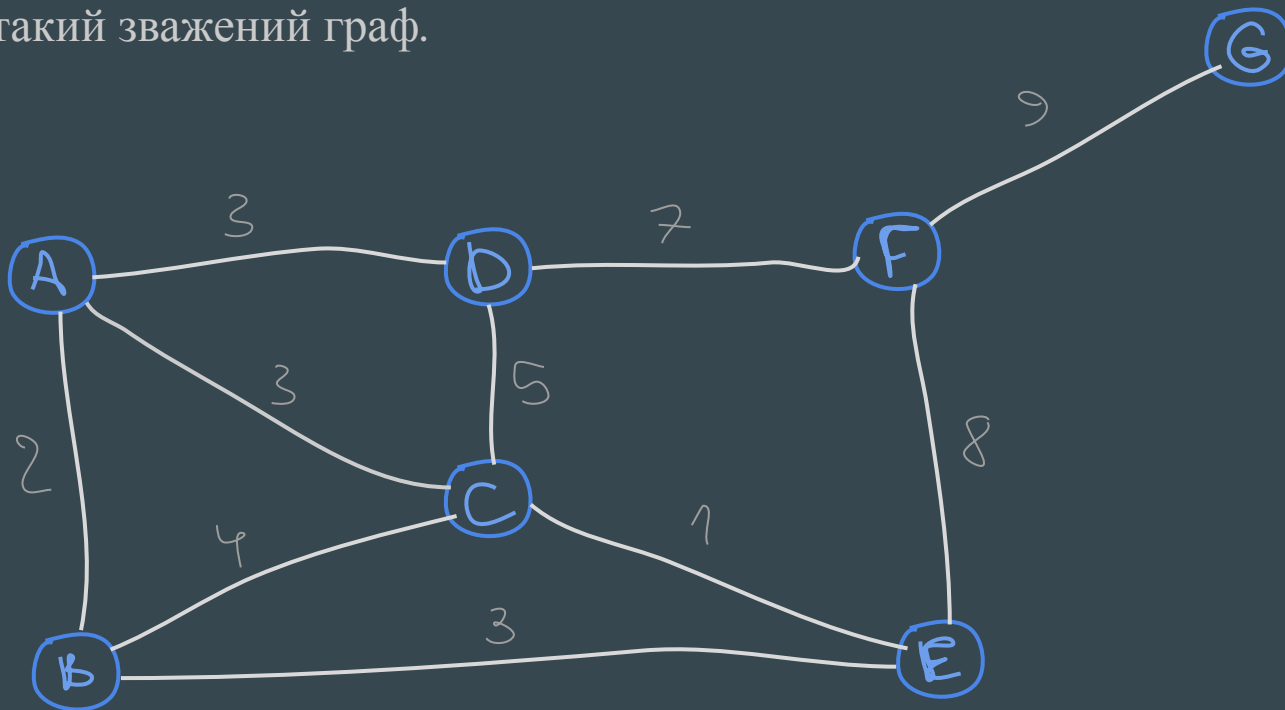
- Два основних алгоритми:
 - Алгоритм Пріма
 - Алгоритм Краскала
- Часова складність (V - кількість вершин, E - кількість ребер):
 - Алгоритм Пріма - $O((E+V) \log(V))$
 - Алгоритм Краскала - $O(E \log(V))$
- На практиці частіше використовується алгоритм Краскала

Алгоритм Пріма

- **Твердження:** якщо поділити вершини графа на дві множини, одна з яких складає зв'язану частину мінімального кістякового дерева, то ребро мінімальної довжини, що пов'язує ці дві множини гарантовано буде входити у мінімальне кістякове дерево.
- **Алгоритм:**
 - Підтримуємо дві непов'язані множини вершин. Перша містить вершини, що належать до зростаючого мін. кіст. дерева; друга - всі інші вершини.
 - Обираємо ребро з найменшою вагою для того, щоб додати одну з сусідніх вершин до мін. кіст. дерева. Це може бути зроблене за допомогою черги з пріоритетом.
 - Перевіряємо, щоб не було циклів. Це можна зробити помічаючи ребра, що утворюють цикл і не додавати помічені ребра в чергу з пріоритетом.

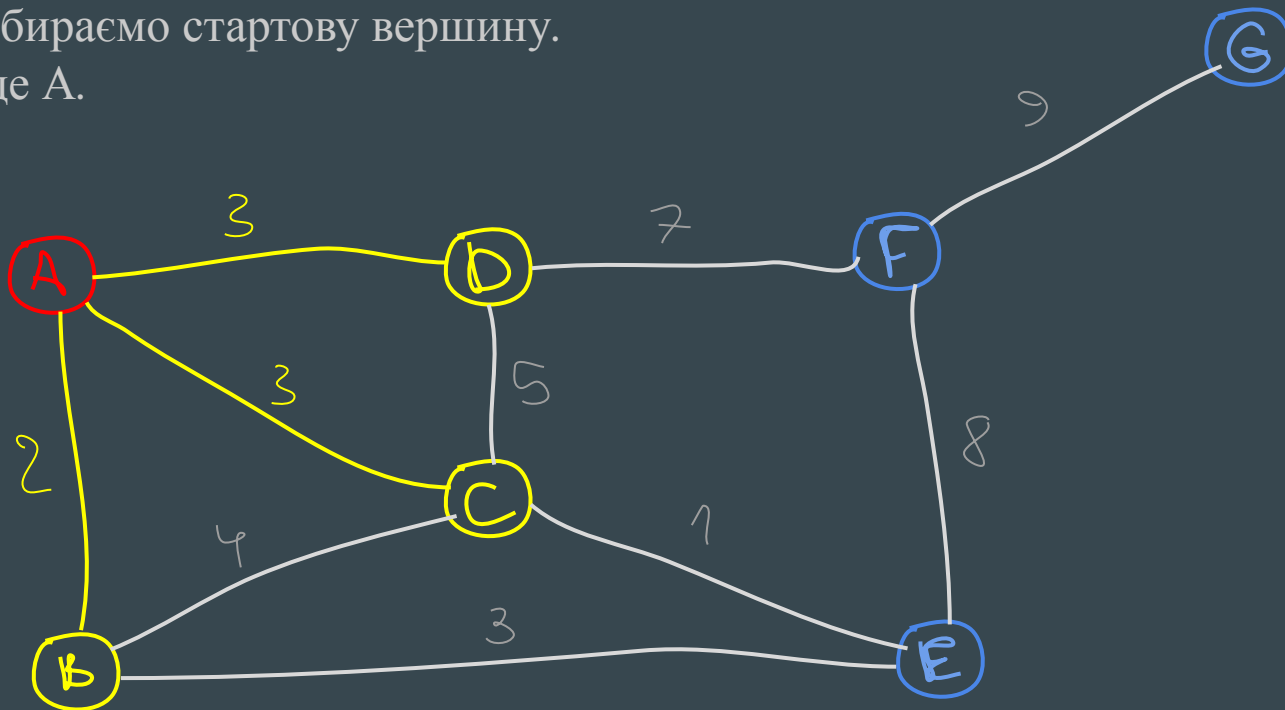
Алгоритм Пріма: приклад

Розглянемо такий зважений граф.



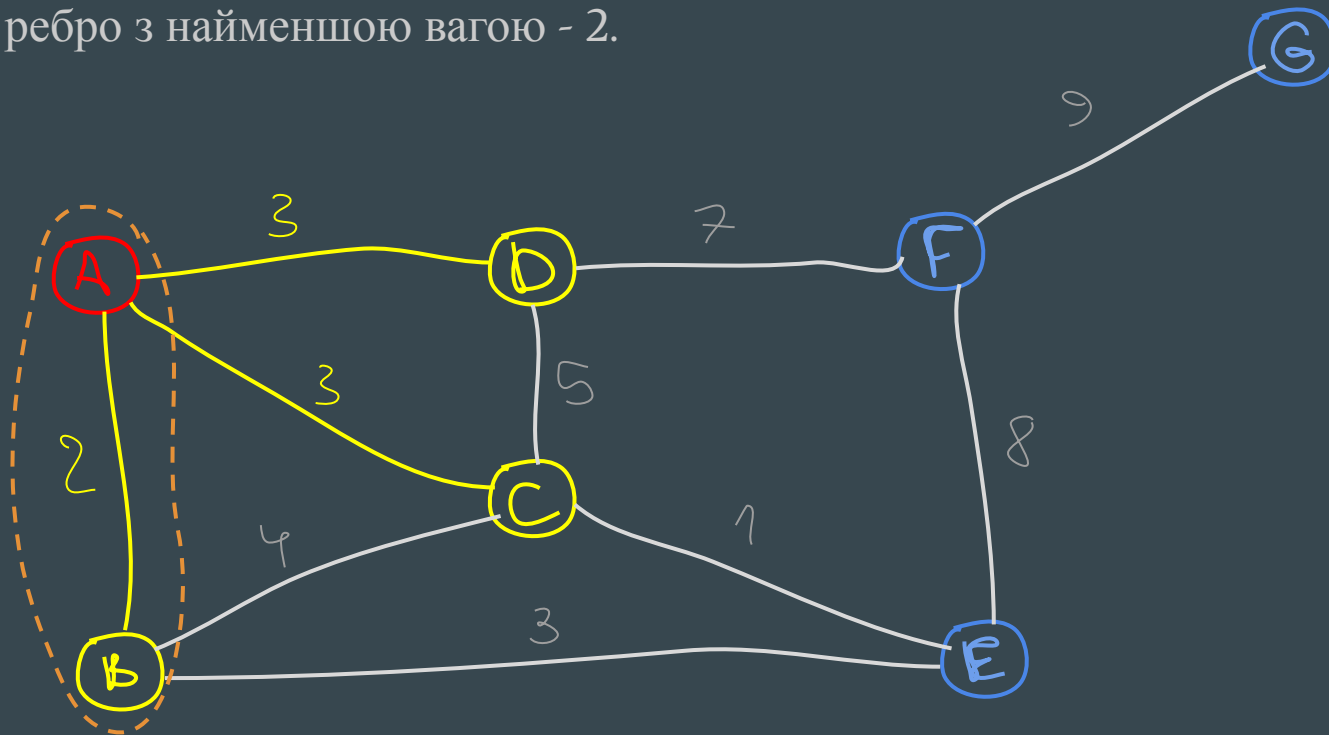
Алгоритм Пріма: приклад

Випадково обираємо стартову вершину.
Нехай це буде А.



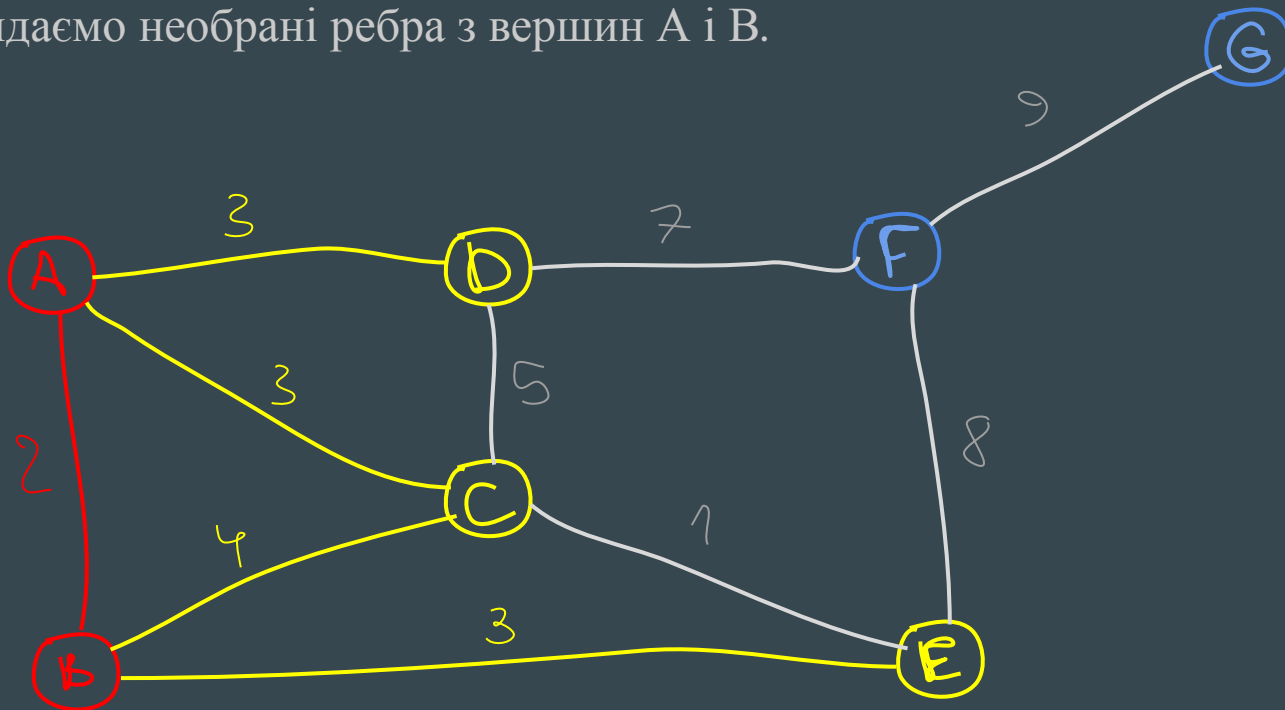
Алгоритм Пріма: приклад

Обираємо ребро з найменшою вагою - 2.



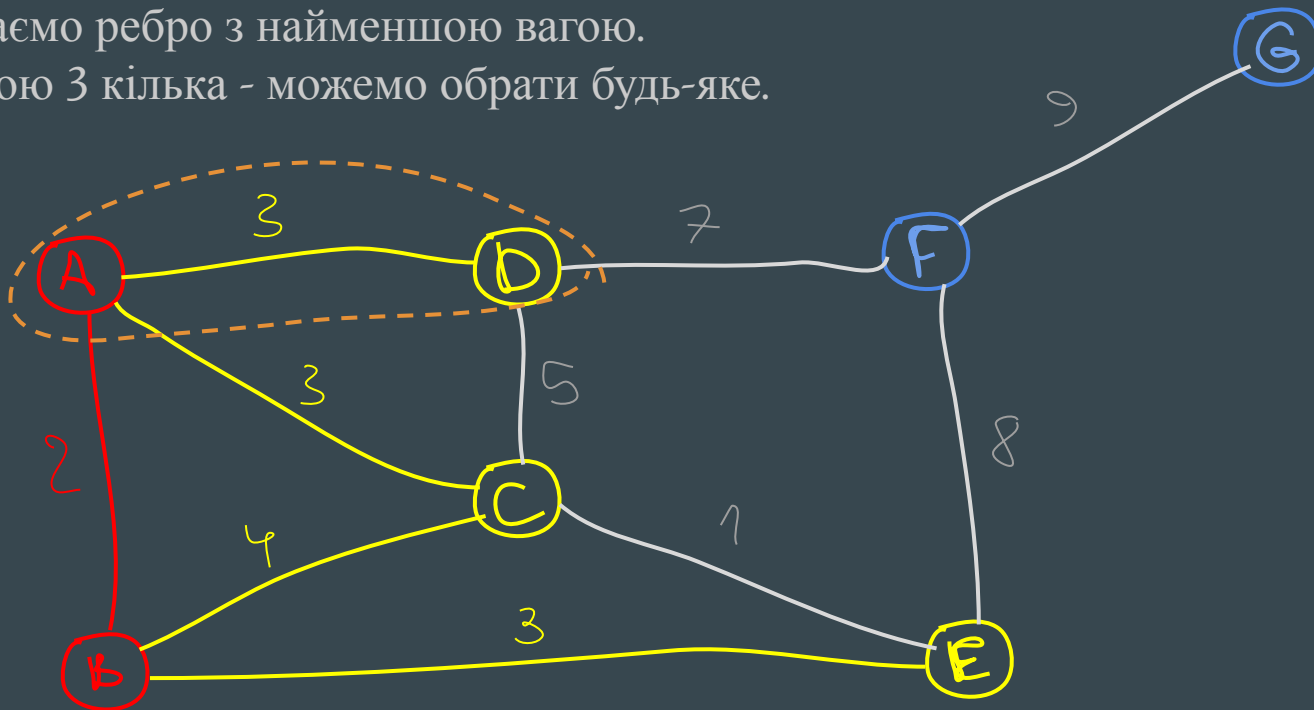
Алгоритм Пріма: приклад

Тепер розглядаємо необрані ребра з вершин A і B.



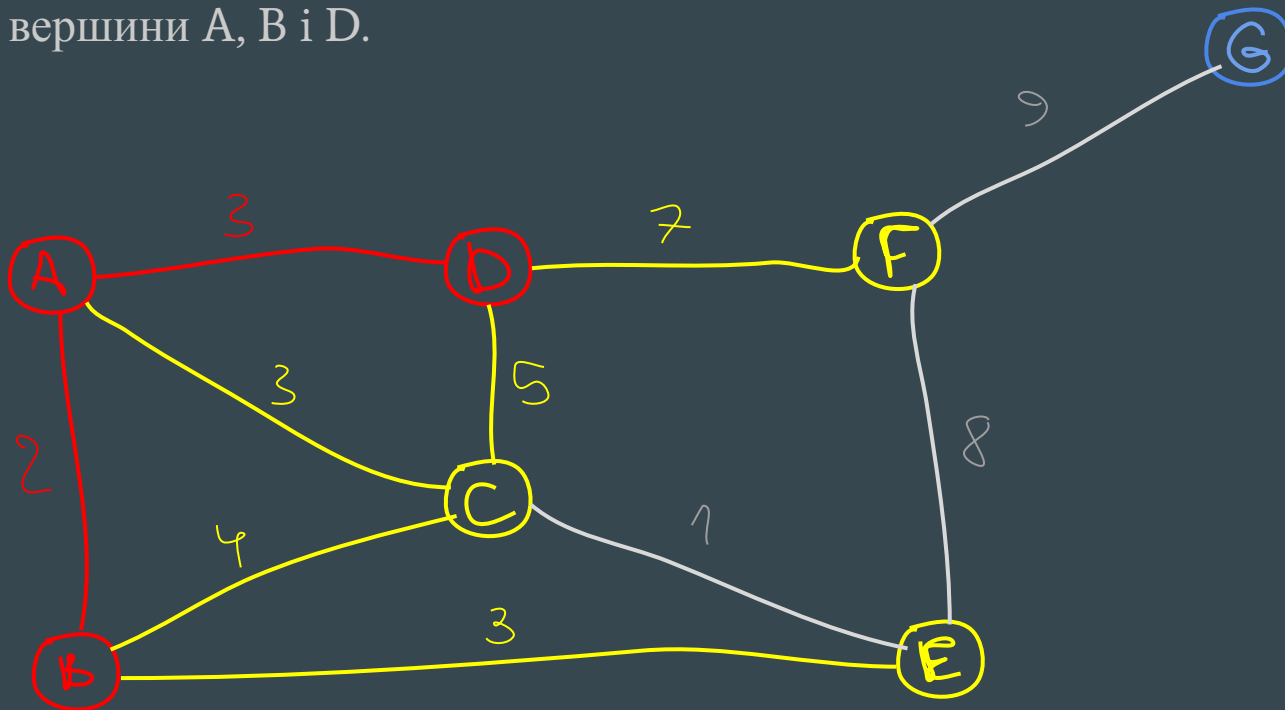
Алгоритм Пріма: приклад

Знову шукаємо ребро з найменшою вагою.
Ребер з вагою 3 кілька - можемо обрати будь-яке.



Алгоритм Пріма: приклад

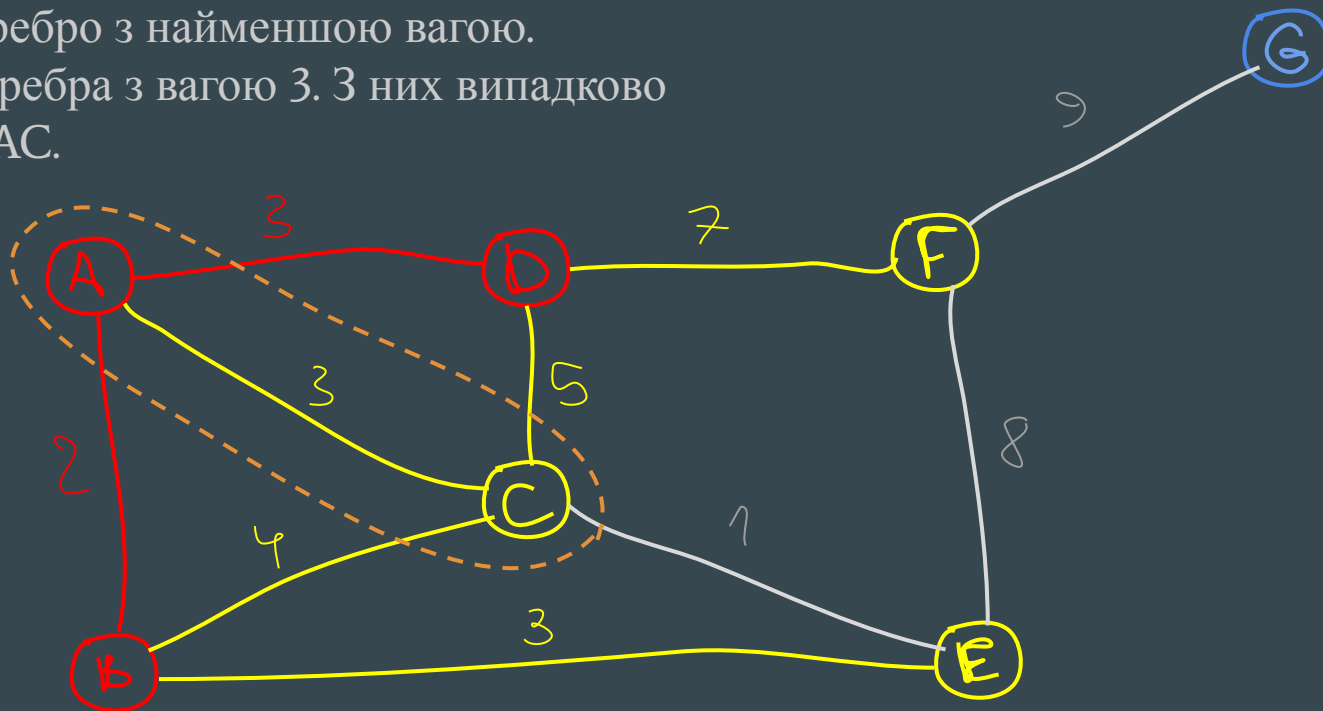
Розглядаємо вершини A, B і D.



Алгоритм Пріма: приклад

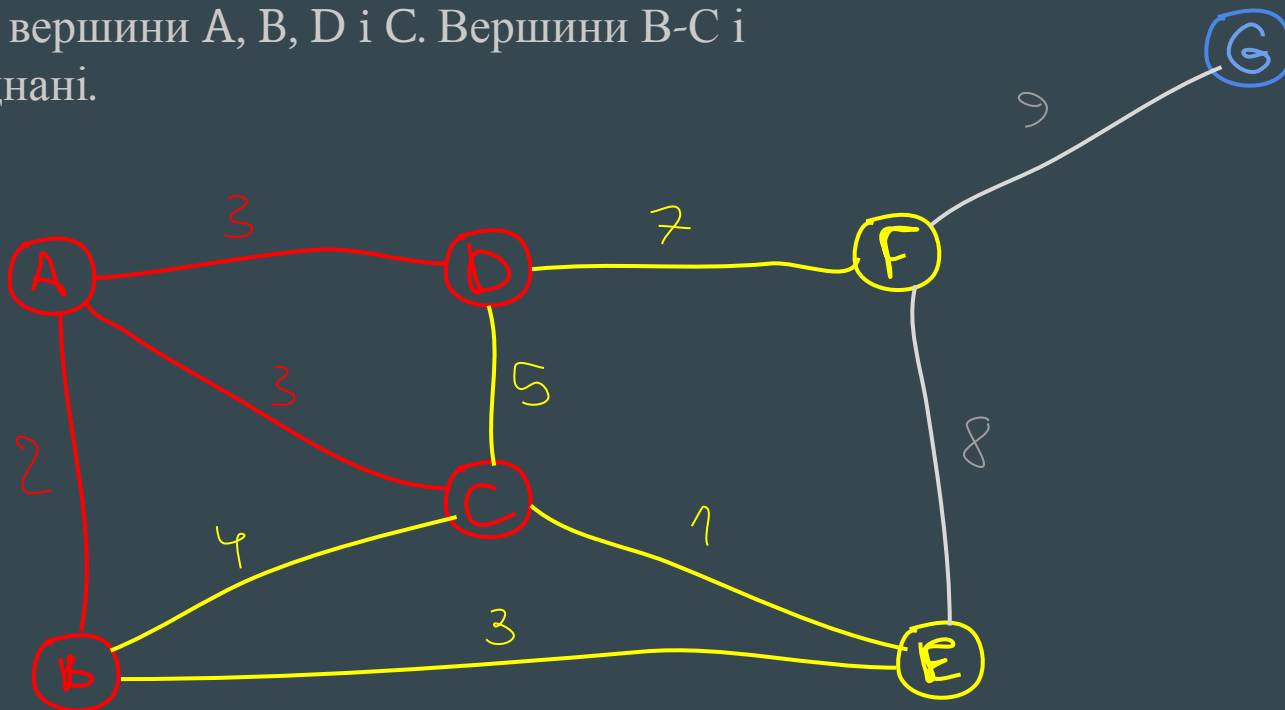
Шукаємо ребро з найменшою вагою.

Це все ще ребра з вагою 3. З них випадково обираємо АС.



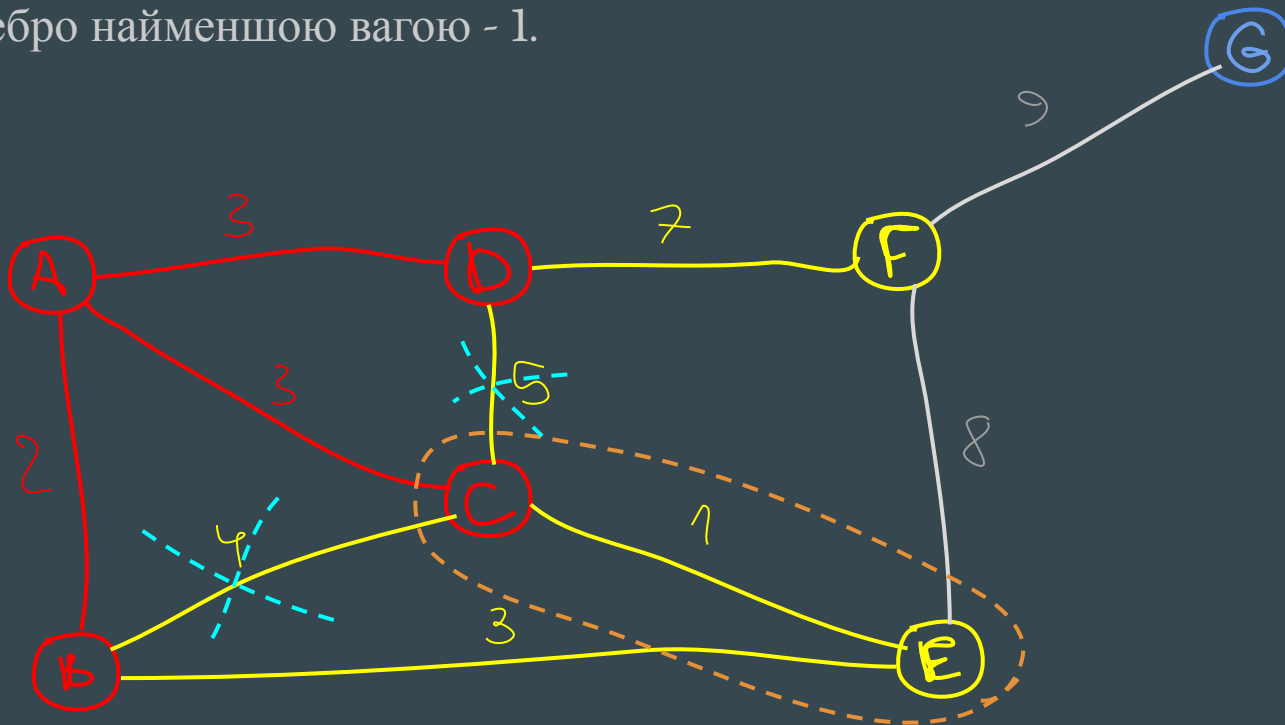
Алгоритм Пріма: приклад

Розглядаємо вершини A, B, D і C. Вершини B-C і D-C вже з'єднані.



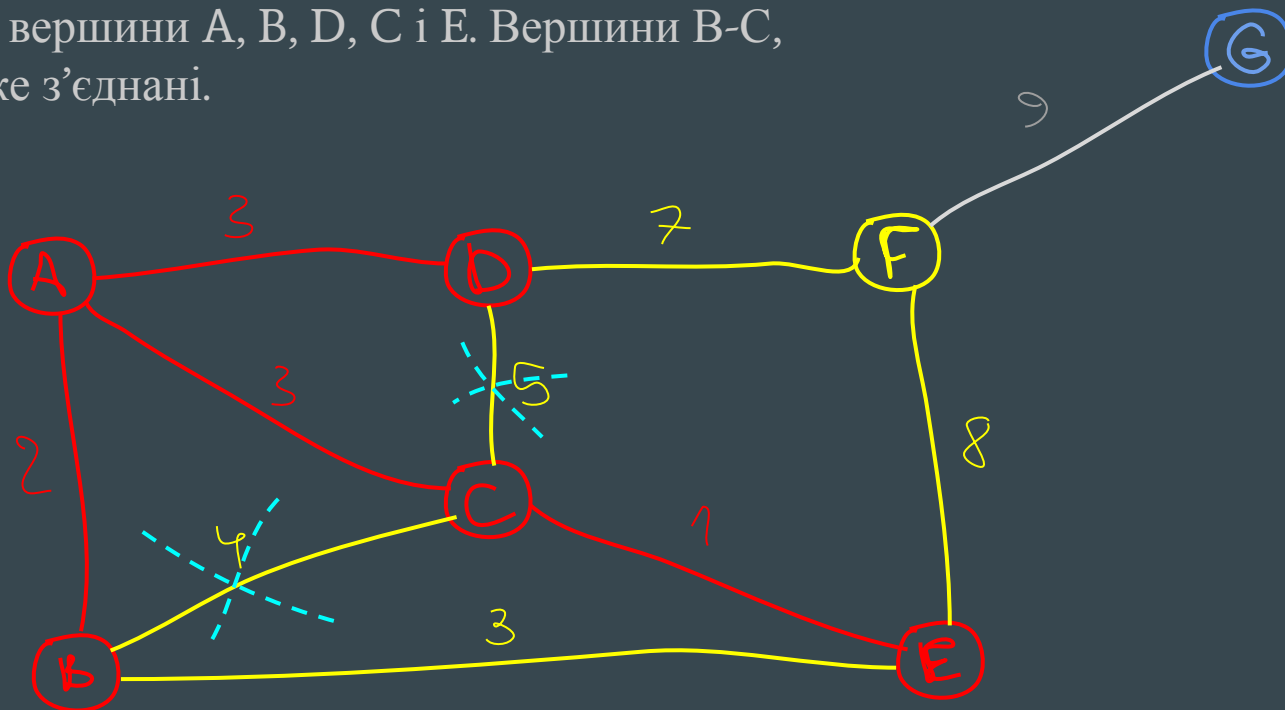
Алгоритм Пріма: приклад

Обираємо ребро найменшою вагою - 1.



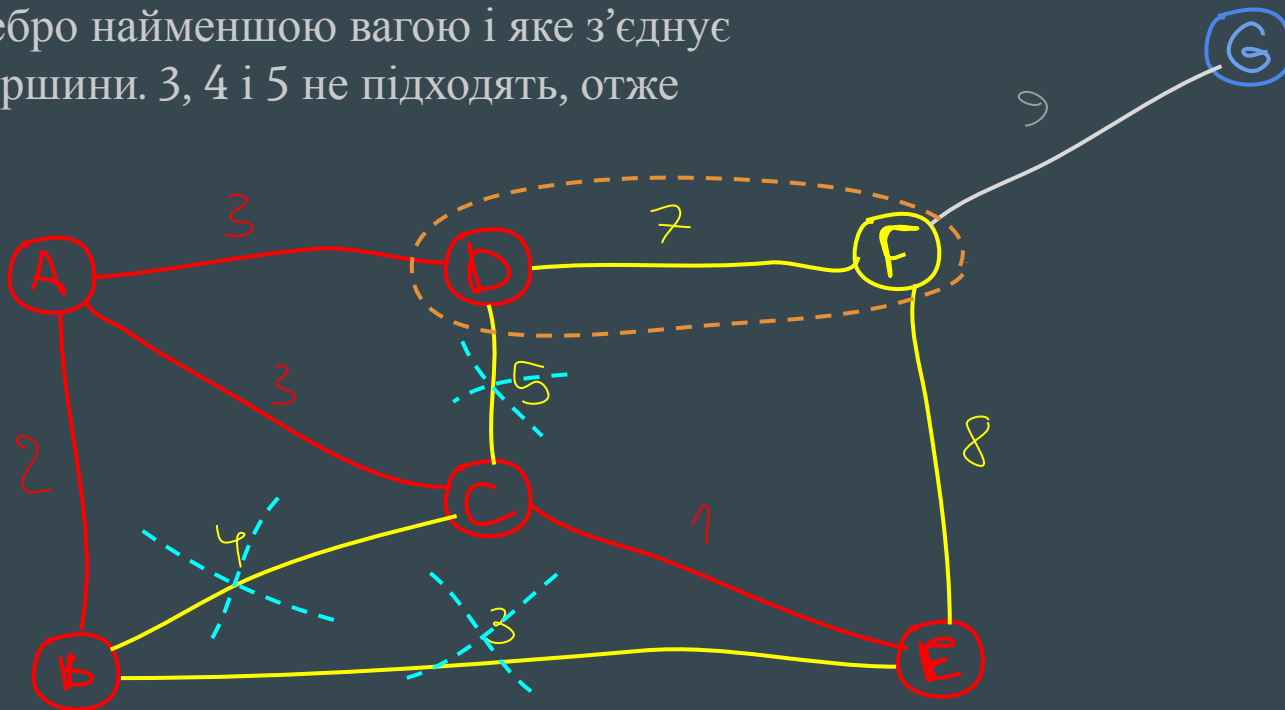
Алгоритм Пріма: приклад

Розглядаємо вершини A, B, D, C і E. Вершини B-C,
D-C і B-E вже з'єднані.



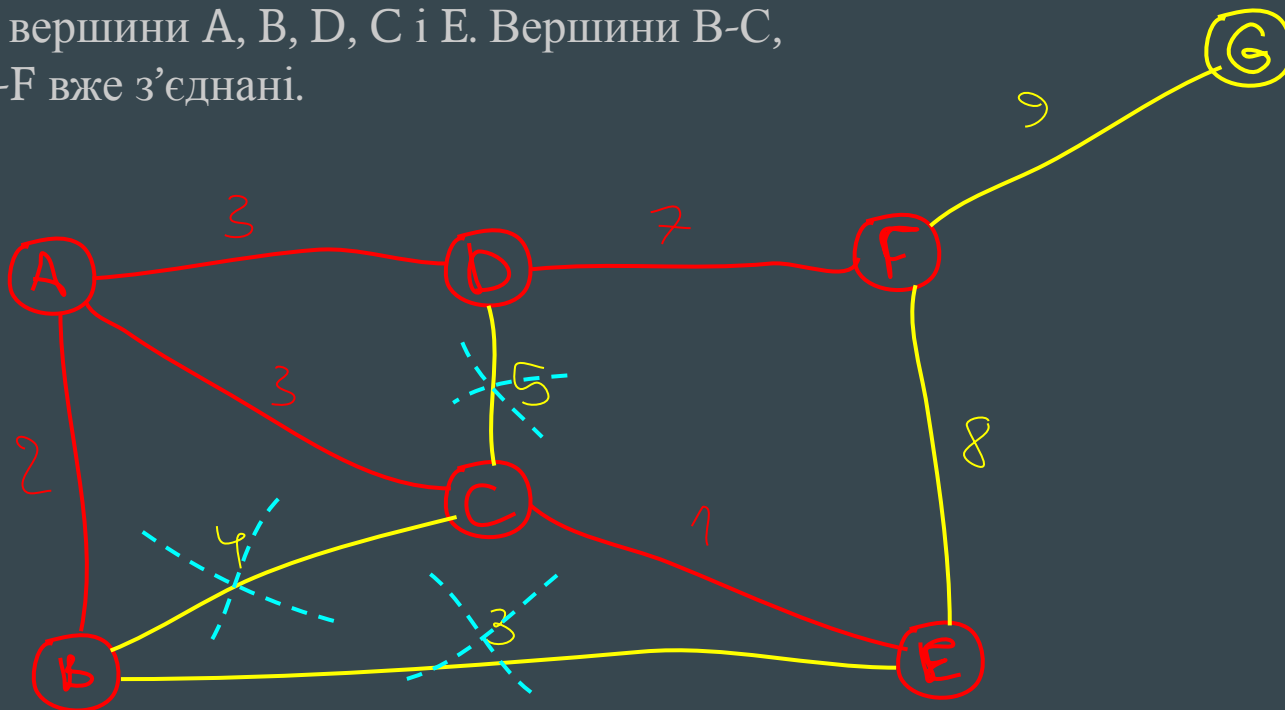
Алгоритм Пріма: приклад

Обираємо ребро найменшою вагою і яке з'єднує незв'язані вершини. 3, 4 і 5 не підходять, отже обираємо 7.



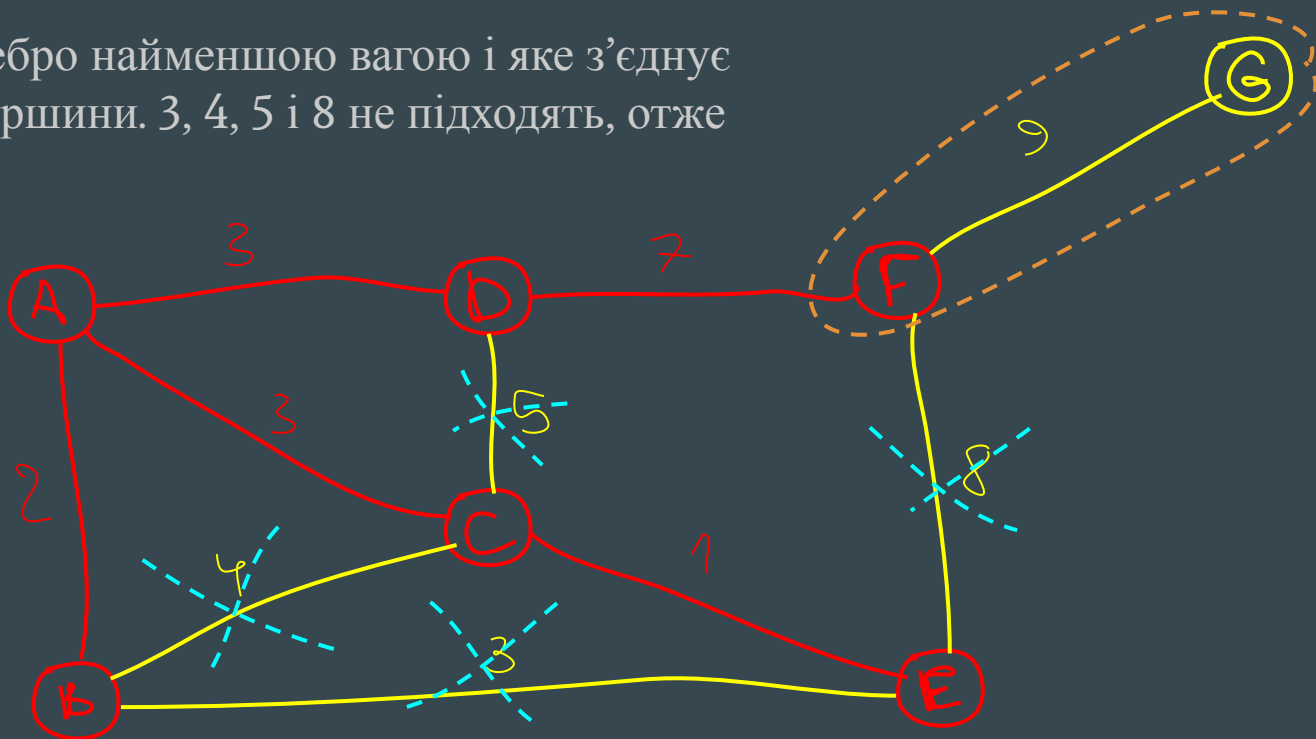
Алгоритм Пріма: приклад

Розглядаємо вершини A, B, D, C і E. Вершини B-C, D-C, B-E і E-F вже з'єднані.



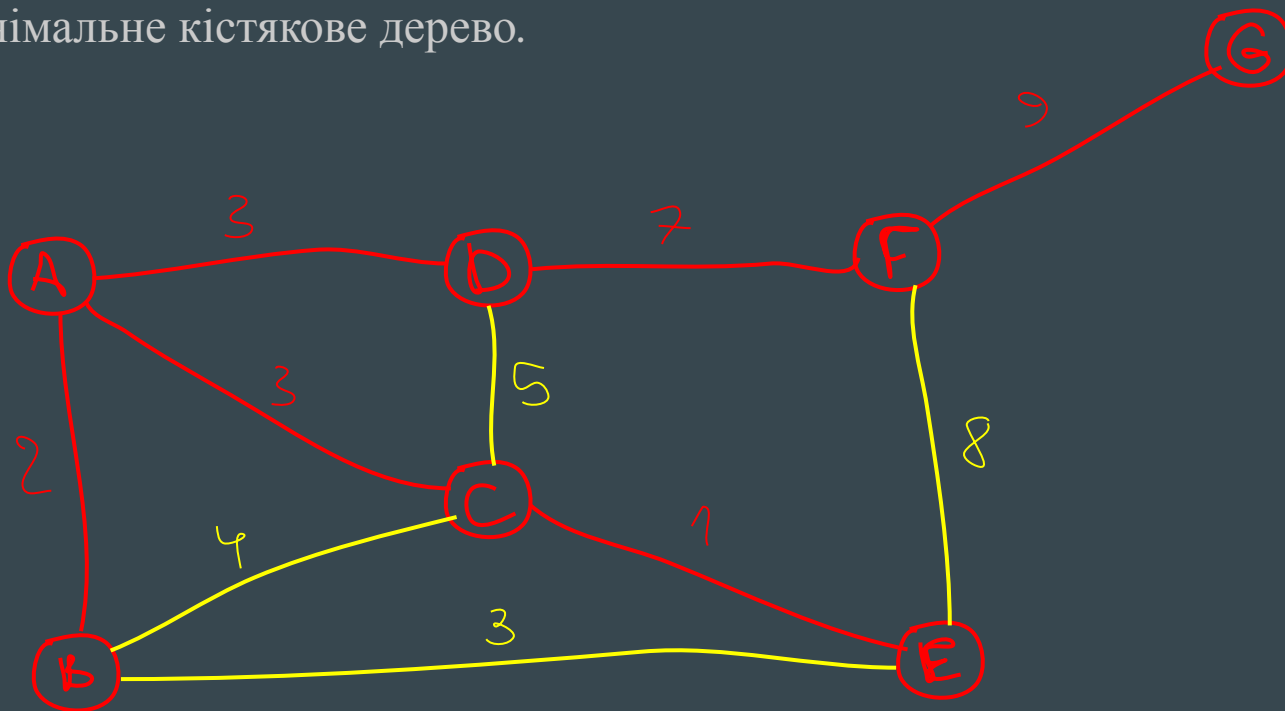
Алгоритм Пріма: приклад

Обираємо ребро найменшою вагою і яке з'єднує незв'язані вершини. 3, 4, 5 і 8 не підходять, отже обираємо 9.



Алгоритм Пріма: приклад

Знайшли мінімальне кістякове дерево.

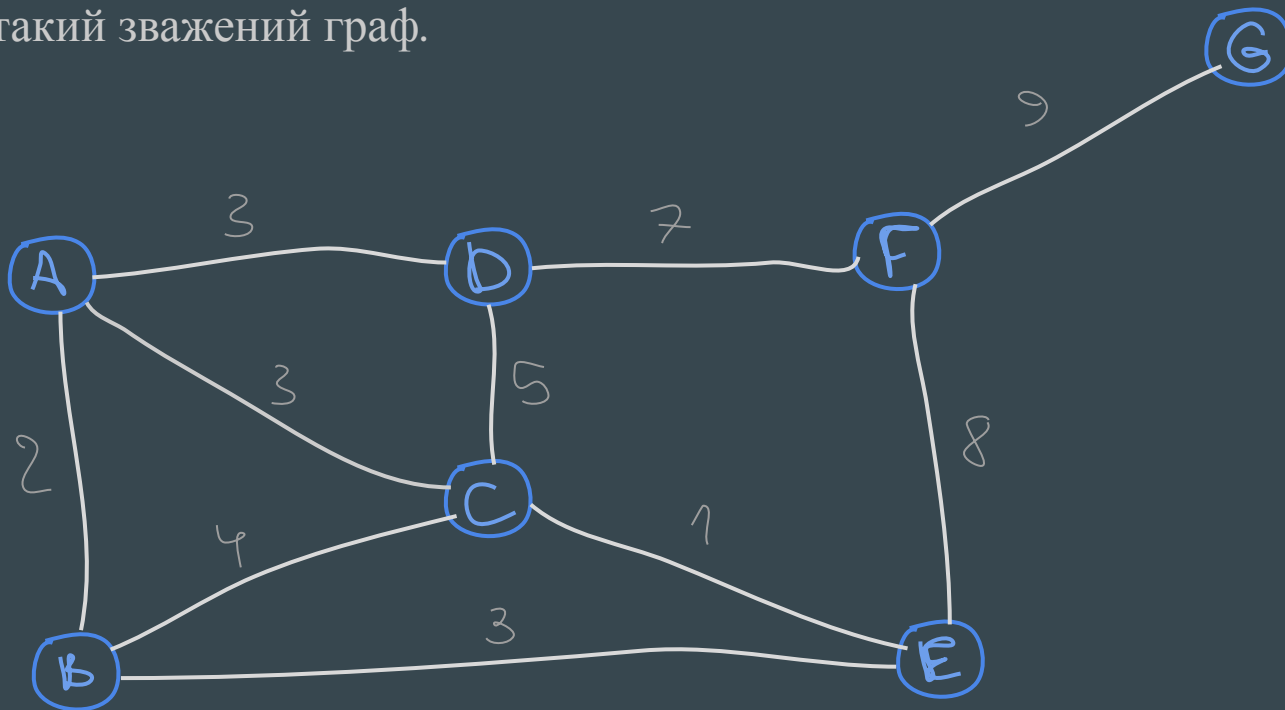


Алгоритм Краскала

- Твердження: серед ребер, що поєднують різні компоненти зв'язності, у мінімальне кістякове дерево буде входити ребро з мінімальною довжиною.
- Алгоритм:
 - Сортуємо ребра графа за їх вагою.
 - Починаємо додавати ребра до мінімального кістякового дерева починаючи з ребра з найменшою вагою до ребра з найбільшою.
 - Додаємо тільки ребра, що не утворюють циклів, ребра, що поєднують тільки нез'єднані компоненти.

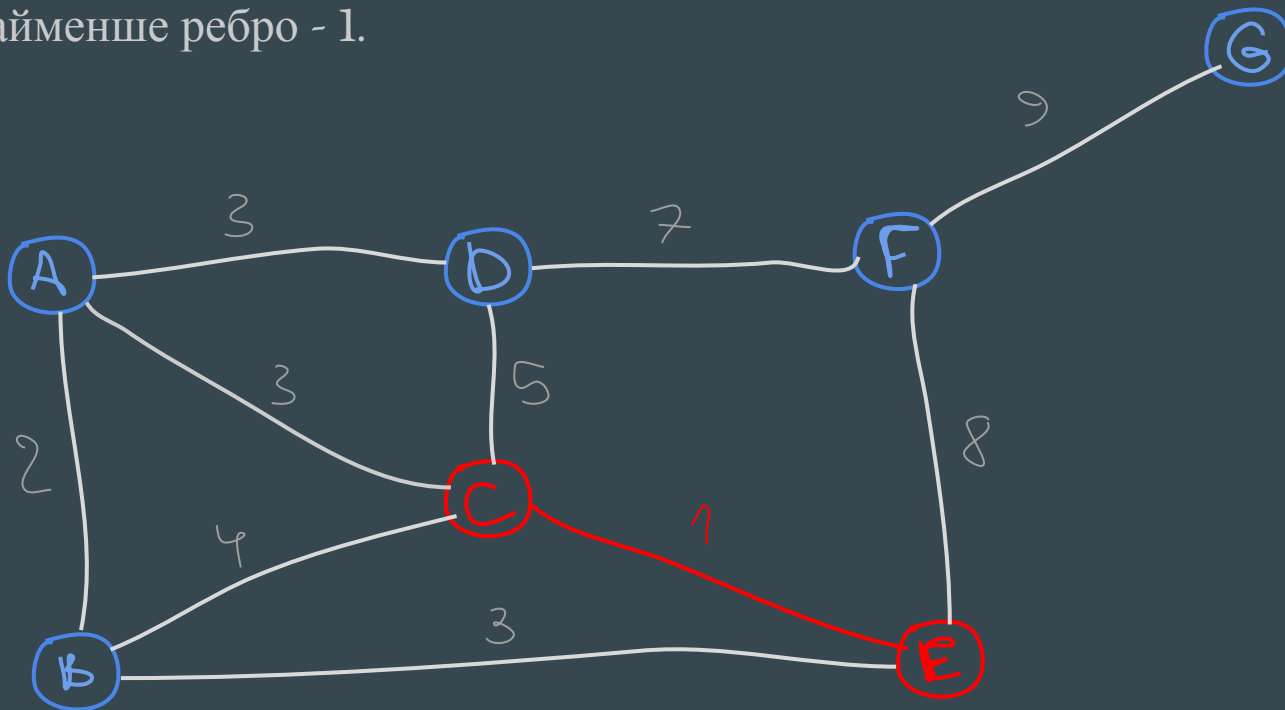
Алгоритм Краскала: приклад

Розглянемо такий зв'язаний граф.



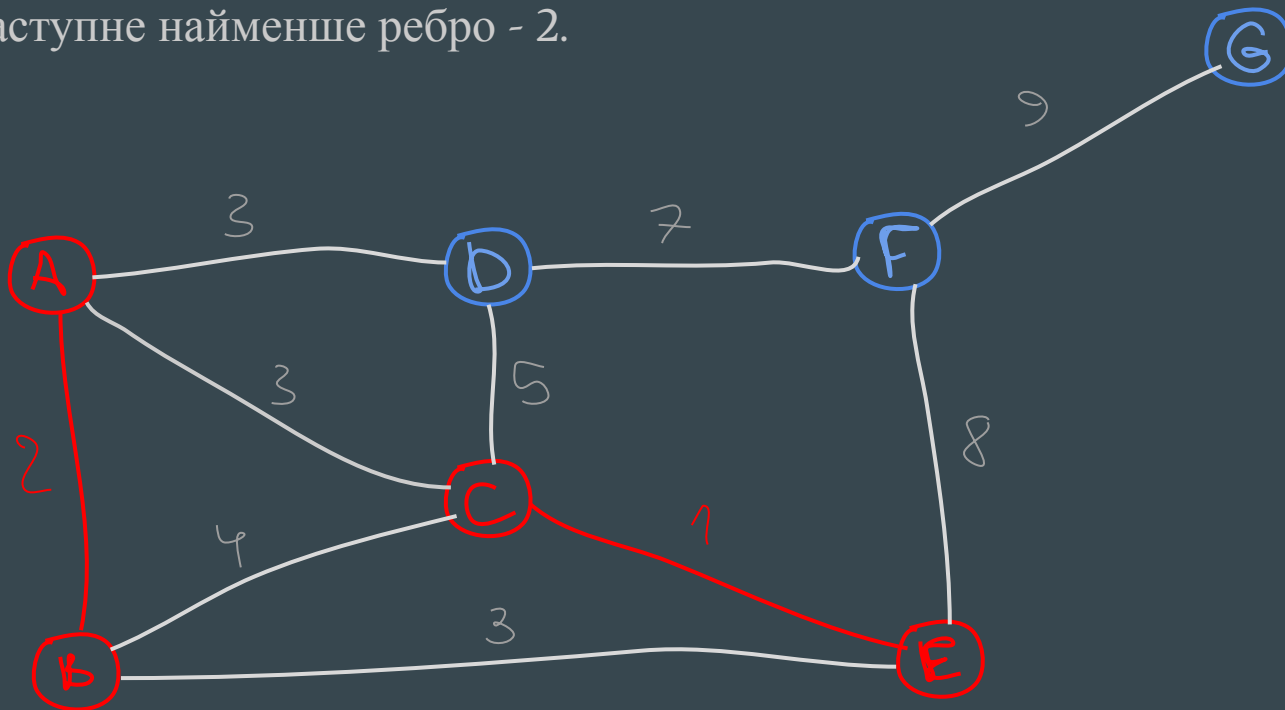
Алгоритм Краскала: приклад

Обираємо найменше ребро - 1.



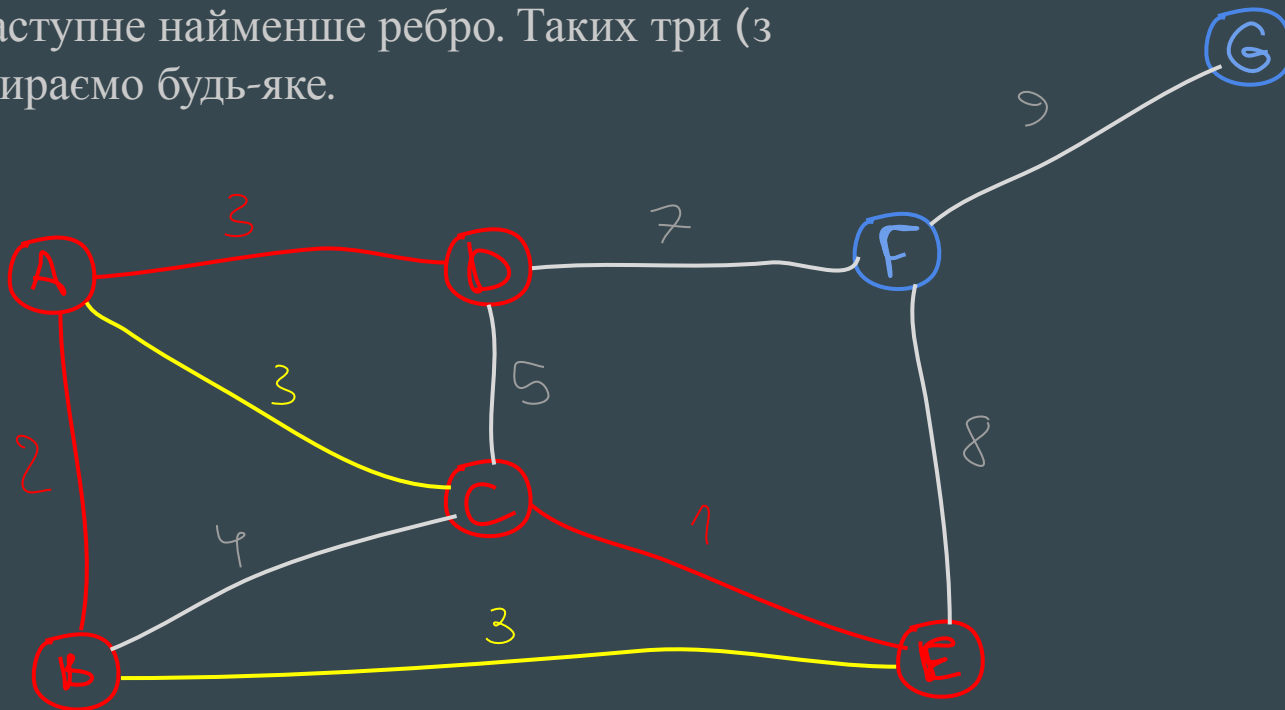
Алгоритм Краскала: приклад

Обираємо наступне найменше ребро - 2.



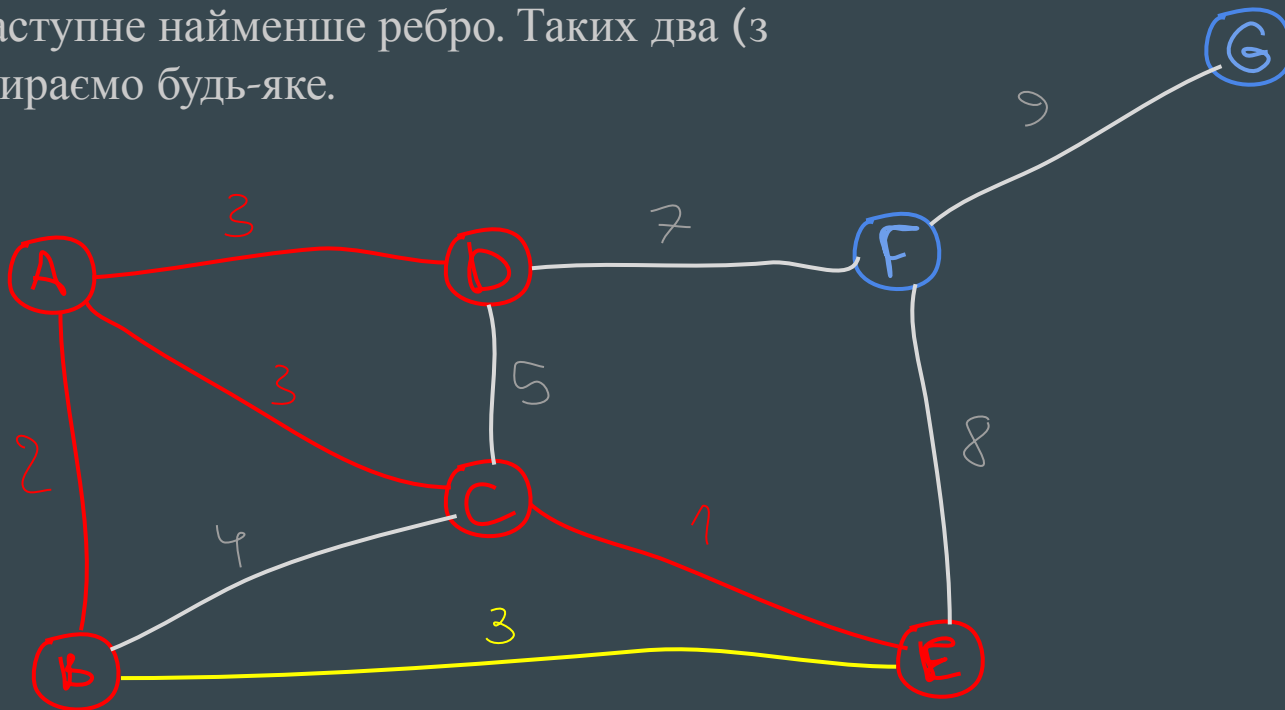
Алгоритм Краскала: приклад

Обираємо наступне найменше ребро. Таких три (з вагою 3). Обираємо будь-яке.



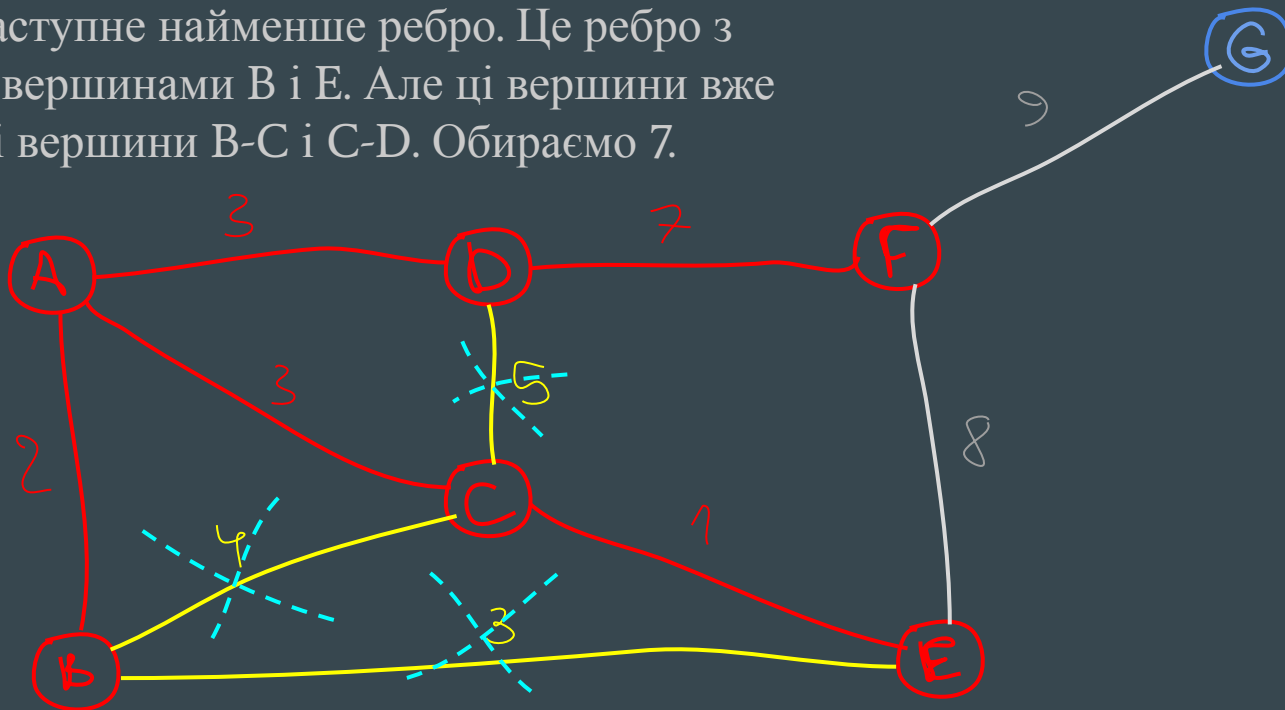
Алгоритм Краскала: приклад

Обираємо наступне найменше ребро. Таких два (з вагою 3). Обираємо будь-яке.



Алгоритм Краскала: приклад

Обираємо наступне найменше ребро. Це ребро з вагою 3 між вершинами В і Е. Але ці вершини вже з'єднані. Як і вершини В-С і С-Д. Обираємо 7.



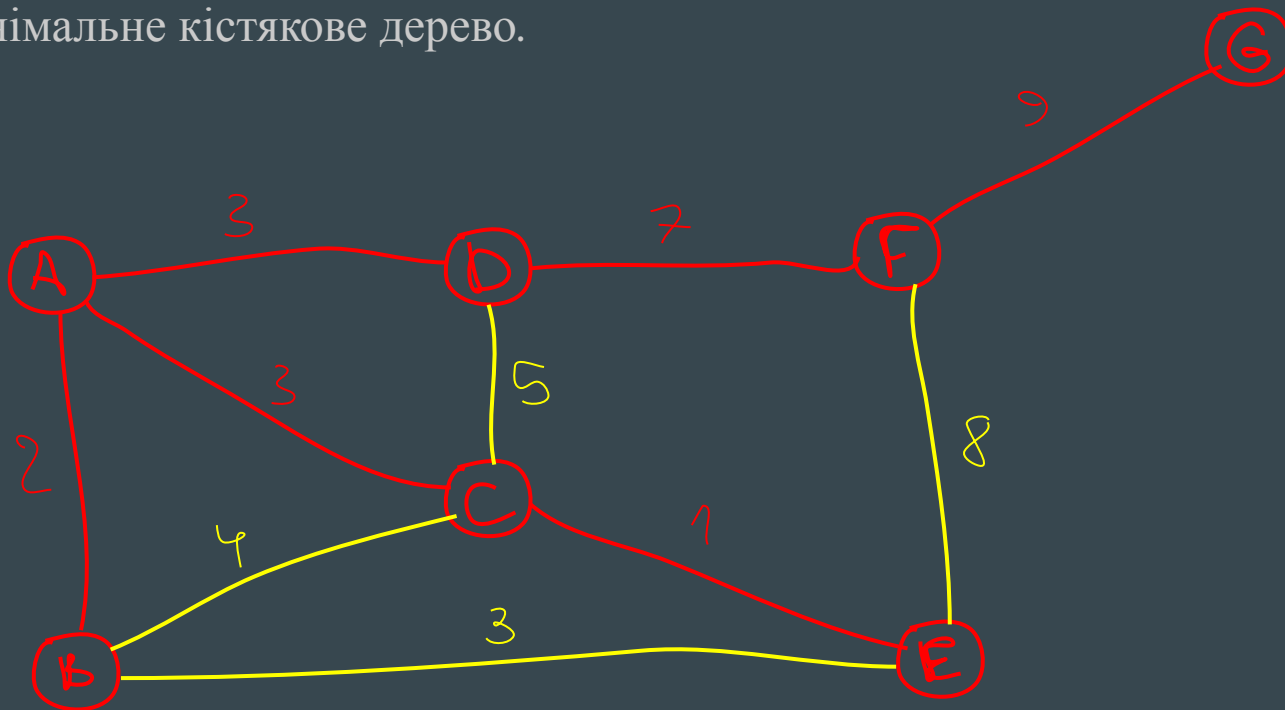
Алгоритм Краскала: приклад

Обираємо наступне найменше ребро між нез'єднаними вершинами. Це ребро з вагою 9.



Алгоритм Краскала: приклад

Знайшли мінімальне кістякове дерево.



Дякую за увагу!