EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

PROVA DE INFERÊNCIA

07 de janeiro de 2019

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.

2. Não é permitido consulta.

3. Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada.

4. Escolha 4 das 5 questões, indicando-as claramente. Responda, mostrando seu argumento de forma clara e concisa. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

5. Tranquilidade e Boa Sorte.

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de $X|\theta \sim N(\theta, b\sigma^2 + a\theta^2)$, com a e b conhecidos e positivas.

   (a) [0.8] Suponha que n é grande e σ^2 conhecido. Encontre um teste para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$;

   (b) [0.8] Para $n = 20$ e $b = 0$, obtenha um IC para θ (positivo) com coeficiente de confinaça γ;

   (c) [0.9] Considere o modelo particular $X|\theta \sim N(\theta, 1)$, com $\theta \sim N(0, 1)$. Para uma amostra de tamanho 1, sabe-se que $\theta|x \sim N(x/2, 1/2)$. Para fun§ao de perda

   $$L(\theta, d) = e^{3\theta^2/4}(\theta - d)^2.$$

   Mostre que o estiamdor de Bayes é dado por $d^\pi(X) = 2X$ e compare com EMV usando o EQM.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma distribuição geométrica com função de probabilidade

   $$f(x|\theta) = (1 - \theta)^x \theta I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x), \ 0 < \theta < 1.$$

   Suponha que θ tenha distribuição priori $Beta(\alpha, \beta)$

   (a) [0.8] Encontre a distribuição posteriori de θ dado $X_1, \ldots, X_n$.

   (b) [0.8] Encontre o estimador de Bayes de θ sob a perda quadrática.

   (c) [0.9] Encontre o estimador de Bayes de $(1 - \theta)/\theta^2$ sob a perda quadrática.

3. Seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a. a. de $X \sim U(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$ com $\alpha \in \Re$ e $\beta > 0$.

   (a) [0.8] Obtenha os estimadores obtido pelo método dos momentos de α e β;

   (b) [0.8] Se $\alpha = \beta$ encontre um ENVUMV de β^2;

   (c) [0.9] Para $\alpha = \beta$ e considerando uma amostra de tamanho 1, encontre o estimador de Bayes com respeito a perda $L(\beta, d) = \beta(d - \beta)^2$ quando $\beta \sim U(0, 1)$.

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de uma $N(\mu, \sigma^2)$

   (a) [0.5] Para μ conhecido, encontre um ENVUMV para $\tau(\sigma^2) = \mu\sigma^4$;

   (b) [1.0]Qual é o EMV para o terceiro quartil?;

   (c) [1.0] Existe ENVUMV para $P(X_1 > 0)$? Se sim, encontre-o.

   Obs.: $X_1 - \bar{X}$ é independente de $\bar{X}$, e $\bar{X}$ é independente de S^2

5. Considere o modelo de regressão linear definido por

$$Y_i = \mu + \beta x_i + e_i, \quad i = 1, ..., n,$$

   onde $e_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, ..., n$ são independentes, e as variávesi $x_1, ..., x_n$ conhecidas.

   (a) [0.5] Para σ^2 conhecida, determine as estatística suficientes;

   (b) [1.0] Encontre um ENVUMV para β quando $\mu = 2$;

   (c) [1.0] Para $\beta = 0$, obtenha a estatistica de Wald, para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Mostre que converge em distribuição para uma qui-quadrado sob H_0.