Exame de Qualificação

Mestrado em Estatística

Prova de Probabilidade

02 de Agosto de 2019

Instruções:

- *A prova é composta de 5 questões.*
- *A duração da prova é de 4 horas.*
- *Não é permitido consulta.*
- *Inicie a resolução de cada questão em uma nova folha.*
- *Escreva seu nome completo e seu RA em cada folha.*
- *Escreva de maneira clara e organizada.*
- *Justifique suas respostas.*

Boa prova!

Questão 1:

Sejam $A, B, A_1, A_2, \dots$ eventos em um espaço de probabilidade. Suponha que $A_n \uparrow A$, ou seja,

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ para todo } n \geq 1 \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Suponha também que B é independente de A_n para todo $n \geq 1$. Prove que A e B são independentes.

Questão 2:

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $[0, \theta]$, onde $\theta > 0$. Sejam

$$U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{e} \quad V = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

(a) Prove que a densidade conjunta de (U, V) é

$$f(u, v) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)(v-u)^{n-2}}{\theta^n}, & \text{se} \quad 0 \leq u < v \leq \theta, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Obtenha a densidade de $V - U$.

Questão 3:

Seja (X, Y) um ponto escolhido aleatoriamente no quadrado $(0, 1) \times (0, 1)$. A densidade conjunta de X e Y é

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $Z = XY$. Determine:

(a) A densidade de Z.

(b) $E(X \mid Z = z)$ para $0 < z < 1$.

Questão 4:

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $X_1 \sim U[0,1]$.

(a) Prove que $n^{-X_n} \xrightarrow{\text{P}} 0$, ou seja, $n^{-X_n} \to 0$ em probabilidade.

(b) Prove que n^{-X_n} não converge quase certamente para 0.

Questão 5:

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme em $(-\theta, \theta)$, $\theta > 0$. Para $n \geq 1$, definimos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Mostre que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n} Y_n} \xrightarrow{\text{D}} N\left(0, \tfrac{1}{3}\right),$$

ou seja, $\dfrac{S_n}{\sqrt{n} Y_n}$ converge em distribuição para uma variável aleatória que possui distribuição $N\left(0, \frac{1}{3}\right)$.