Estatísticas da Razão de Verossimilhança, Wald e Escore em amostras pequenas para a distribuição Beta.

Rosangela Getirana Santana[1], Wesley Oliveira Furriel[2] e André Felipe B. Menezes[3]

[1,2,3] Universidade Estadual de Maringá

RESUMO

Sabendo-se a importância dos indicadores sociais e da saúde para compreensão dos fenômenos que cercam a sociedade contemporânea e a flexibilidade da distribuição de probabilidade Beta para sua modelagem. Este trabalho buscou averiguar as estatísticas dos testes da Razão de Verossimilhança, Wald e Escore, analisando a probabilidade do *Erro Tipo I* (α), com base na condução de um estudo de simulação Monte Carlo, visando avaliá-los em distintos cenários, variando o tamanho das amostras (n) e os valores dos parâmetros μ e ϕ. Para a execução desse procedimento foi adotada uma reparametrização da Beta proposta por Ferrari e Cribari-Neto (2004) presente na análise de regressão. Espera-se obter diferenças entre os testes em relação a α, quando o tamanho da amostra é pequeno.
Palavras chave: Distribuição Beta, simulação Monte Carlo, *Erro Tipo I*, teste da Razão de Verossimilhança, teste de Wald, teste Escore.

1 Introdução

Nas mais variadas áreas do conhecimento o emprego de indicadores, proporções ou taxas tem sido amplamente utilizado para a sumarização, identificação e hierarquização de distintos fenômenos analisados pelos pesquisadores. Isso ocorre devido ao fato de que, variáveis que assumem um intervalo definido entre um valor mínimo e um máximo, permitem diagnósticos rápidos a cerca de determinado evento, uma vez que, elas podem, por exemplo, indicar o quão adequado ou inadequado determinado caso está na medida em que ele se aproxima dos valores presentes em umas destas extremidades. Exemplos desses casos são o IDH (Índice de Desenvolvimento Humano) e a Cobertura Vacinal.

A família de distribuições Beta é apresentada como uma alternativa na modelagem de variáveis com características descritas acima. Ferrari e Cribari-Neto (2004) propõe uma reparametrização desta distribuição para sua utilização no modelo de regressão. Já que, na análise de regressão, geralmente é mais útil modelar resposta média, assim, o modelo segue as propriedades da Beta, sendo adequado para casos em que a variável resposta Y é medida continuamente no intervalo $0 < Y < 1$. Seguindo essa parametrização, $\mu = \alpha/(\alpha + \beta)$ e $\phi = \alpha + \beta$, ou seja, $\alpha = \mu\,\phi$ e $\beta = (1 - \mu)\,\phi$. Isto posto, a média e a variância de Y são dadas pelas seguintes expressões,

$$\mathbb{E}(Y) = \mu \;\text{ e }\; \mathrm{Var}(Y) = \frac{\mathrm{V}(\mu)}{(1 + \phi)} \tag{1}$$

em que $\mathrm{V}(\mu) = \mu(1 - \mu)$, de modo que μ é a média da variável resposta e ϕ pode ser interpretado como um parâmetro de dispersão. Tendo em vista essa nova parametrização em termos de μ e ϕ, Y tem-se uma função de densidade Beta dada por:

$$f(y \mid \mu, \phi) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\mu\phi)\Gamma((1-\mu)\phi)} y^{\mu\phi - 1}(1 - y)^{(1-\mu)\phi - 1},\; 0 < y < 1 \tag{2}$$

com $0 < \mu < 1$ e $\phi > 0$. Assim como na parametrização original é possível obter diferentes formas no comportamento da distribuição de acordo com os valores de seus parâmetros μ e ϕ. Ferrari e Cribari-Neto(2004) apontam que a distribuição pode ser simétrica quando $\mu = 1/2$ e assimétrica quando $\mu \neq 1/2$. Além disso, a dispersão da distribuição, para um μ fixado diminui quando os valores de ϕ aumentam.

Tendo em vista o panorama apresentado o presente trabalho analisou o comportamento do *Erro Tipo I* dos testes da Razão de Verossimilhança, Wald e Escore a partir da condução de um estudo de simulação Monte Carlo, que nos permitiu avaliar os testes, em distintos cenários, nos quais foram variados o tamanho das amostras (n) e os valores dos parâmetros μ e ϕ.

Os três testes citados acima são fundamentados na teoria da verossimilhança, especificamente eles avaliam a função log-verossimilhança em diferentes escalas. A estatística da Razão de Verossimilhança compara a altura das log-verossimilhança dos modelos completo e restrito, ao passo que a estatística de Wald compara a estimativa do parâmetro ($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$) com o valor do parâmetro sob a hipótese nula ($\boldsymbol{\theta}_0$). Enquanto que, a estatística Escore verifica a inclinação da log-verossimilhança sob a hipótese nula. Além disso, ambas as estatísticas Wald e Escore são formas quadráticas. Por outro lado, a estatística Gradiente não é uma forma quadrática e mede a projeção ortogonal do vetor escore avaliado em H_0 sob o vetor $\widehat{\theta} - \theta_0$. Muggeo e Lovison (2014) apresentam uma excelente interpretação geométrica e gráfica dessas estatísticas.

Para a melhor sistematização e organização da discussão e dos resultados, o trabalho foi dividido em quatro seções. Na seção 2 apresenta-se a função de verossimilhança da distribuição Beta, as componentes do vetor escore e a matriz de informação observada utilizados nos testes avaliados. Os testes da razão de verossimilhança, Wald, Escore e Gradiente são descritos na seção 3. Na seção 4 nos ocupamos em detalhar os cenários sob os quais foi realizado o estudo de simulação e por fim na seção 5, foram apresentados e discutidos os resultados obtidos.

É preciso ressaltar que este estudo tem como intuito iniciar a discussão acerca do uso da distribuição Beta para a modelagem de indicadores sociais e da saúde, atentando-se a sua importância para a compreensão da realidade social e consequentemente para o auxílio das políticas públicas, uma vez que, pretende-se em estudos posteriores realizar uma análise de regressão tendo como variável de interesse o IDH, bem como, indicadores básicos de saúde.

2 A função de verossimilhança

Considere $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ uma amostra aleatória de n observações oriundas de (2), têm-se que o logaritmo natural da função verossimilhança pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} l(\mu, \phi \mid \boldsymbol{y}) = & n \log \Gamma(\phi) - n \log \Gamma(\mu\phi) - n \log \Gamma(\phi - \mu\,\phi) \\ & + (\mu\,\phi - 1) \sum_{i=1}^{n} \log y_i + [\phi - \mu\,\phi - 1] \sum_{i=1}^{n} \log(1 - y_i) \end{aligned} \tag{3}$$

Diferenciando (3) em relação μ e ϕ temos as componentes do vetor escore:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\mu(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) &= n\,\phi\,\Psi\,(\phi - \mu\,\phi) - n\,\phi\,\Psi\,(\mu\,\phi) + \phi \sum_{i=1}^{n} \log\, y_i - \phi \sum_{i=1}^{n} \log\,(1 - y_i)\,, \\ \mathcal{U}_\phi(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) &= n\,\Psi\,(\phi) + n\,(\mu - 1)\,\Psi(\phi - \mu\,\phi) - n\,\mu\,\Psi(\mu\,\phi) + \mu \sum_{i=1}^{n} \log\, y_i + (1 - \mu) \sum_{i=1}^{n} \log(1 - y_i). \end{aligned}$$

em que $\Psi(\cdot)$ é a função digama. Os estimadores de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \phi)$, denotados por $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\mu}, \widehat{\phi})$, podem ser obtidos igualando o vetor escore a zero e resolvendo simultaneamente o sistema de equações não lineares.

Além disso, a matriz de informação observada de $\boldsymbol{\theta}$ através da amostra $\boldsymbol{y}$, definida como sendo o negativo da segunda derivada da função log-verossimilhança, é dada por:

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} K_{\mu\,\mu} & K_{\mu\,\phi} \\ K_{\phi\,\mu} & K_{\phi\,\phi} \end{bmatrix} \tag{4}$$

em que:

- $K_{\mu\,\mu} = n\,\phi^2\,\Psi_1\,(\mu\,\phi) + n\,\phi^2\,\Psi_1\,(\phi - \mu\,\phi)$.
- $K_{\mu\,\phi} = K_{\phi\,\mu} = n\,\mu\,\phi\,\Psi_1(\mu\,\phi) + n\,\Psi(\mu\,\phi) - n\,(1 - \mu)\,\phi\,\Psi_1(\phi - \mu\,\phi) - n\,\Psi(\phi - \mu\,\phi) - \sum_{i=1}^{n} \log\, y_i + \sum_{i=1}^{n} \log(1 - y_i)$.
- $K_{\phi\,\phi} = n\,\mu^2\,\Psi_1\,(\mu\,\phi) + n\,(\mu - 1)^2\,\Psi_1\,(\phi - \mu\,\phi) - n\,\Psi_1\,(\phi)$.

sendo $\Psi_1(\cdot)$ a função trigama.

3 Teste de hipóteses

Nesta seção apresentamos a teoria dos testes que foram avaliados no estudo de simulação. Seja $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ uma amostra aleatória de n observações independentes proveniente de (2), suponha o interesse em testar a hipótese nula $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ versus a alternativa $H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \phi)$.

Através do teste da razão de verossimilhança deve-se avaliar o máximo das funções log-verossimilhanças dos modelos restrito e completo. Sob a hipótese nula a estatística:

$$T_1 = 2\left[l(\widehat{\boldsymbol{\theta}} \mid \boldsymbol{y}) - l(\boldsymbol{\theta}_0 \mid \boldsymbol{y})\right] \tag{5}$$

possui distribuição assintótica qui-quadrado com $p = 2$ graus de liberdade (PAWITAN, 2001).

Por outro lado, o teste de Wald consiste em comparar a estimativa do parâmetro $(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ com o valor do parâmetro sob a hipótese nula $(\boldsymbol{\theta}_0)$, por isso requer somente o ajuste do modelo completo. Como temos duas restrições, sob a hipótese nula a estatística do teste tem forma quadrática definida por (MILLAR, 2011):

$$T_2 = \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right)^T \mathcal{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right) \tag{6}$$

sendo $\mathcal{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ a matriz de informação observada localmente nas estimativas de máxima verossimilhança $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\phi}$. Desse modo, sob a hipótese nula T_2 tem assintoticamente distribuição qui-quadrado com $p = 2$ graus de liberdade.

Por fim, o teste Escore baseia-se na conjectura da função escore $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_0)$ e da matriz de informação $\mathcal{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)$ sob a hipótese nula. Conforme Millar (2011), a estatística do teste pode ser determinada em termos de forma quadrática por:

$$T_3 = \left(\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_0)\right)^T \mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}\, \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_0) \tag{7}$$

em que, $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}_0) = \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} l(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y})\big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0}$ e $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1}$ é a inversa da matriz de informação observada avaliada sob a hipótese nula. A estatística T_3, tem assintoticamente distribuição qui-quadrado com $p = 2$ graus de liberdade.

Os autores Mazuchelli e Louzada (2014) ressaltam que estes três testes são assintoticamente equivalentes, todavia podem diferir em amostras pequenas.

4 Estudo de simulação

Diante dos testes descritos na seção anterior, que avaliam as mesmas hipóteses por meio de escalas diferentes é de grande interesse verificarmos seu comportamento em distintas situações. Dessa forma, foi conduzido um estudo de simulação Monte Carlo para averiguar o comportamento do tamanho do teste (*Erro Tipo I*) em diferentes cenários. Assim, foram tomadas amostras de tamanhos $n = 20, 40, 60, 80$ e 100, $\mu = 0.05, 0.25, 0.5, 0.75$ e 0.95 e $\phi = 5, 15$ e 50. Para cada combinação (n, μ, ϕ) foram geradas $B = 10000$ amostras pseudoaleatórias da distribuição Beta (2). Em todas as instâncias foram adotados níveis de significância nominais $\alpha = 0,01$ e $\alpha = 0,05$.

Para atingir os objetivos propostos foi implementado no *software* SAS uma *macro* para calcular as probabilidades de rejeitar H_0 quando a mesma é verdadeira (valores-p) dos testes da Seção 2. Sendo que, o teste da Razão de Verossimilhança e Wald foram obtidos via `PROC NLMIXED`, um procedimento do SAS que utiliza métodos baseado em verossimilhança para o estudo de modelos não lineares e mistos. Já o teste Escore foi implementado no SAS/IML.

Referências

[1] FERRARI, S.; CRIBARI-NETO, F. Beta regression for modelling rates and proportions. Journal of Applied Statistics, v. 31, n. 7, p. 799-815, 2004.

[2] MAZUCHELI, J.; LOUZADA, F. Discriminação entre as distribuições Odd Weibull e Weibull. Rev. Bras. Biom 32.2 (2014): 226-237.

[3] MILLAR, R. B. Maximum likelihood estimation and inference: with examples in R, SAS and ADMB. Vol. 111. John Wiley & Sons, 2011.

[4] PAWITAN, Y. In all likelihood: statistical modelling and inference using likelihood. Oxford University Press, 2001.