Modelo de Regressão Multinomial Ordinal com Chances Proporcionais: Uma Aplicação a Avaliação do Presidente Golpista

André Felipe Berdusco Menezes

Departamento de Estatística, Universidade Estadual de Maringá, Brasil

Resumo

O modelo de regressão multinomial ordinal é apropriado em situações quando queremos modelar uma variável dependente categórica ordinal em termos de uma ou mais variáveis independentes. Neste trabalho apresento uma revisão do modelo de regressão multinomial ordinal com chances proporcionais junto com uma aplicação real cujo objetivo é determinar quais os fatores que influenciam a opinião do eleitor em relação a avaliação do presidente Michel Temer. Diante dos resultados obtidos verificou-se que o modelo de chances proporcionais apresentou um ajuste satisfatório aos dados. Além disso, foi possível identificar que existe uma maior chance dos eleitores que votaram no Aécio em 2014 avaliarem o governo Temer na direção ótimo do que os eleitores da Dilma em 2014.

Palavras-chave: respostas ordinais, modelo de chances proporcionais, avaliação presidente.

1 Introdução

Uma tarefa comum na análise de dados é descrever a relação entre uma variável resposta e determinadas variáveis explicativas para então obter predições a partir do modelo estabelecido. Na literatura estatística esta tarefa é usualmente resolvida a partir dos modelos de regressão, os quais são classificados por diferentes critérios, tais como a natureza da variável resposta, relação entre a variável resposta e as covariáveis, entre outros. Quando a variável resposta assume valores categóricos que possuem uma ordem inerente (ótimo, bom, regular, ruim, péssimo), isto é, uma variável resposta ordinal, então o modelo de regressão multinomial ordinal é seguramente a abordagem mais usual utilizada na literatura (ver, por exemplo, Agresti, 1990, 2007; Derr, 2013; Giolo, 2017; High, 2013; Stokes et al., 2000).

O presente trabalho tem como objetivos apresentar uma revisão do modelo de regressão multinomial ordinal, especificamente o modelo com chances proporcionais e utilizá-lo em uma aplicação real para determinar quais os fatores que influenciam a opinião do eleitor em relação a avaliação do presidente Michel Temer nos seus 1 ano e 4 meses de governo.

Além desta introdução este trabalho esta organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta a formulação do modelo, estimação de seus parâmetros sob o enfoque da verossimilhança e duas medidas para avaliar a afastamentos das suposições empregadas pelo modelo. Na Seção 3 são apresentados os resultados e realizada uma profunda discussão acerca do modelo adotado para responder os objetivos da análise.

2 O modelo

Considere uma variável resposta Y politômica ordinal com J categorias. Assume-se que Y tem distribuição multinomial com probabilidades $\{p_1, \ldots, p_J\}$, satisfazendo $\sum_{j=1}^{J} p_j = 1$. Para introduzir o modelo de regressão multinomial basta associar os parâmetros $\{p_1, \ldots, p_J\}$ as variáveis explicativas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^\top$. Denotaremos por $p_j(\mathbf{x})$ a probabilidade de ocorrência da categoria j com $j = 1, \ldots, J$, para um dado vetor $\mathbf{x}$ de variáveis explicativas tal que $\sum_{j=1}^{J} p_j(\mathbf{x}) = 1$. Além disso, considere as seguintes probabilidades acumuladas, definidas por

$$
\begin{aligned}
\theta_1(\mathbf{x}) &= p_1(\mathbf{x}) = \Pr(Y \leq 1 \mid \mathbf{x}) \\
\theta_2(\mathbf{x}) &= p_1(\mathbf{x}) + p_2(\mathbf{x}) = \Pr(Y \leq 2 \mid \mathbf{x}) \\
&\vdots \\
\theta_J(\mathbf{x}) &= p_1(\mathbf{x}) + p_2(\mathbf{x}) + \ldots + p_J(\mathbf{x}) = \Pr(Y \leq J \mid \mathbf{x})
\end{aligned}
$$

tal que $\theta_1(\mathbf{x}) \leq \theta_2(\mathbf{x}) \leq \ldots \leq \theta_J = 1$.

Desse modo, o modelo de regressão multinomial ordinal ou mais conhecido como modelo logitos cumulativos é expresso por

$$\log\left[\frac{\theta_j(\mathbf{x})}{1-\theta_j(\mathbf{x})}\right] = \log\left[\frac{\Pr(Y \leq j \mid \mathbf{x})}{\Pr(Y > j \mid \mathbf{x})}\right] \tag{1}$$

com $j = 1, \ldots, J-1$.

A partir de (1) três principais modelos logitos cumulativos foram propostos na literatura. O primeiro proposto por Williams and Grizzle (1972) assume que os efeitos das covariáveis $\mathbf{x}$ diferem entre os $J-1$ logitos cumulativos. Assim, o modelo é definido por

$$\log\left[\frac{\theta_j(\mathbf{x})}{1-\theta_j(\mathbf{x})}\right] = \log\left[\frac{\Pr(Y \leq j \mid \mathbf{x})}{\Pr(Y > j \mid \mathbf{x})}\right] = \beta_{0j} + \boldsymbol{\beta}_j\,\mathbf{x}, \qquad j = 1, \ldots, J-1, \tag{2}$$

em que $\boldsymbol{\beta}_j = (\beta_{1j}, \ldots, \beta_{pj})$ são os coeficientes da regressão tal que β_{kj} descreve, para o logito j, o efeito da covariável k.

Em contrapartida, McCullagh (1980) propôs o modelo logito cumulativos com chances proporcionais, isto é, assumindo que $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\beta}$ para todo j. O modelo é expresso por

$$\log\left[\frac{\theta_j(\mathbf{x})}{1-\theta_j(\mathbf{x})}\right] = \log\left[\frac{\Pr(Y \leq j \mid \mathbf{x})}{\Pr(Y > j \mid \mathbf{x})}\right] = \beta_{0j} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{x}, \qquad j = 1, \ldots, J-1, \tag{3}$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ são os coeficientes da regressão. Em termos das probabilidades acumuladas o modelo pode ser definido como sendo

$$\theta_j(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(\beta_{0j} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{x}\right)}{1 + \exp\left(\beta_{0j} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{x}\right)}, \qquad j = 1, \ldots, J-1. \tag{4}$$

Além disso, as probabilidades em cada classe podem ser obtidas a partir da seguinte relação

$$p_j(\mathbf{x}) = \theta_j(\mathbf{x}) - \theta_{j-1}(\mathbf{x}), \qquad j = 1, \ldots, J, \tag{5}$$

em que $\theta_0(\mathbf{x}) = 0$.

Considerando que $\boldsymbol{y} = (y_{1j}, \ldots, y_{nj}), j = 1, \ldots, J$ seja uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição Multinomial com J categorias ordinais. Então, assumindo o modelo de chances proporcionais (3), a função de verossimilhança é dada por

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\nu} \mid \boldsymbol{y}, \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{J} [p_j(\mathbf{x}_i)]^{y_{ij}} \right\} = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{J} [\theta_j(\mathbf{x}_i) - \theta_{j-1}(\mathbf{x}_i)]^{y_{ij}} \right\} \tag{6}$$

em que $\boldsymbol{\nu} = (\beta_{0j}, \boldsymbol{\beta})$ e $y_{ij} = 1$ se a resposta da observação i esta na categoria j e $y_{ij} = 0$, caso contrário, com $\sum_{j=1}^{J} y_{ij} = 1$.

A partir de (6) têm-se que a função log-verossimilhança pode ser escrita por

$$\ell(\boldsymbol{\nu} \mid \boldsymbol{y}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{J} y_{ij} \log [p_j(\mathbf{x}_i)] \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{J} y_{ij} \, \log [\theta_j(\mathbf{x}_i) - \theta_{j-1}(\mathbf{x}_i)] \right\}. \tag{7}$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são obtidos pela maximização da função (7), entretanto não é possível encontrar uma solução analítica para eles, assim sendo algum método numérico, tais como Newton-Raphson ou quasi-Newton pode ser utilizado para obter a solução numérica. No presente trabalho a *procedure* `LOGISTIC` (SAS, 2010) do software SAS foi empregada para o ajuste dos modelos.

Para avaliar se a suposição de chances proporcionais do modelo esta condizente com os dados é necessário testar a hipótese $\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_j$ para todo j. A estatística mais utilizada para esta finalidade é a estatística escore definida por

$$S_R = \mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0)^{\top} \, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\beta}_0) \, \mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0) \tag{8}$$

em que, $\boldsymbol{\beta}_0$ é o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\beta}$ sob a hipótese nula, $\mathbf{U}(\boldsymbol{\beta}_0)$ é o vetor de primeiras derivadas da função log-verossimilhança (7) em relação a $\boldsymbol{\beta}$ e $\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta}_0)$ é a matriz de informação de Fisher avaliada sob a hipótese nula. A estatística S_R, sob a hipótese nula, tem assintoticamente distribuição qui-quadrado com os graus de liberdade definidos pela diferença entre os números de parâmetros dos modelo sob $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}_j$.

Quando a hipótese nula for rejeitada para uma parte das covariáveis Peterson and Harrell (1990) propuseram o modelo de chances proporcionais parciais o qual pode ser visto com maiores detalhes em Derr (2013), High (2013) e Giolo (2017).

2.1 Qualidade do ajuste

Uma etapa fundamental na modelagem estatística é a avaliação da qualidade do ajuste do modelo, isto é, verificar se as suposições impostas são adequadas para o conjunto de dados em análise. Segundo Agresti (2007) para dados não esparsos dispostos em tabelas de contingência e na ausência de covariáveis contínuas a qualidade do ajuste pode ser investigada por meio das estatísticas Pearson (Q_P) e Deviance (Q_L).

Seja $\mathbf{x}_i$ a i-ésima combinação de categorias das covariáveis, com $i = 1, \ldots, s$ para o qual se tem n_{1+} observações, em que n_{ij} denota a frequência observada para a categoria j, $j = 1, \ldots, J$, tal que $\sum_{j=1}^{J} n_{ij} = n_{i+}$. Então as estatísticas mencionadas são definidas por

$$Q_P = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{J} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \qquad \text{e} \qquad Q_L = 2 \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \log\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right), \tag{9}$$

sendo $e_{ij} = n_{i+} \times \widehat{p}_j(\mathbf{x}_i)$ é a frequência esperada sob a hipótese nula de que o modelo esta bem ajustado.

Quando o modelo é corretamente especificado ambas as estatísticas Q_P e Q_L tem distribuição assintótica qui-quadrado com $g.l. = (J-1)(s-1)-q$, sendo J o número de categorias da variável resposta Y, s o número de subpopulações e q o número de parâmetros do modelo associado as covariáveis. Portanto, um teste formal utilizando essas estatísticas pode ser conduzido para validar o modelo.

Na presença de variáveis contínuas as estatísticas Q_P e Q_L não possuem um bom comportamento (Agresti, 2007). Nesse contexto, Lipsitz et al. (1996) introduziram uma generalização da estatística de Hosmer-Lemeshow.

3 Resultados e Discussões

Os dados analisados neste trabalho foram cedidos pelo instituto de pesquisa Datafolha e obtidos através de uma pesquisa de opinião cujo objetivo era avaliar o presidente Michel Temer (golpista) nos seus 1 ano e 4 meses de governo. O questionário é composto por um total de 124 perguntas. Além disso, uma amostra do Brasil de 2772 pessoas foi coletada. Importante destacar que os dados são provenientes de um estudo transversal.

O objetivo da análise foi determinar quais os fatores que influenciam a opinião do entrevistado em relação a avaliação do governo golpista. Nesse sentido, do total de 124 perguntas somente quatro foram consideradas na análise e elas estão descritas na Tabela 1. A questão que avalia a opinião do entrevistado em relação ao governo é composta por 5 níveis ordinais, sendo eles na forma decrescente: ótimo, bom, regular, ruim e péssimo.

Table 1: Descrição das variáveis selecionadas.

Código	**Descrição**	**Níveis**
TEMER (Y)	Na sua opinião o presidente Michel Temer está fazendo um governo:	(1) Ótimo, (2) Bom, (3) Regular, (4) Ruim, (5) Péssimo
SEXO	Sexo do individuo	(1) Masculino, (2) Feminino
DENUNCIA	Na sua opinião, os deputados federais deveriam ou não autorizar a segunda denúncia do Ministério Público contra o presidente Michel Temer?	(1) Sim, (2) Não
VOTOU2014	Em quem você votou no segundo turno da eleição para presidente em 2014?	(1) Aécio, (2) Dilma, (3) Branco/Nulo/Não votou

Primeiramente foi realizada uma análise exploratória do comportamento da variável resposta independente e na presença das possíveis variáveis explicativas, isto é, fatores que podem determinar a avaliação da pessoa em relação ao governo. Na Figura 1 apresenta-se quatro gráficos descritivos que nos possibilitam retirar algumas implicações. Por exemplo, é possível verificar que mais da metade dos entrevistados (58,96%) avaliaram o 1 ano e 4 meses do governo Temer como sendo péssimo. Outro fato interessante que pode ser notado é dentre as pessoas que acham que os deputados não deveriam autorizar a segunda denúncia do Ministério Público contra o presidente a maioria, isto é, 43.63% acha que o governo é regular.

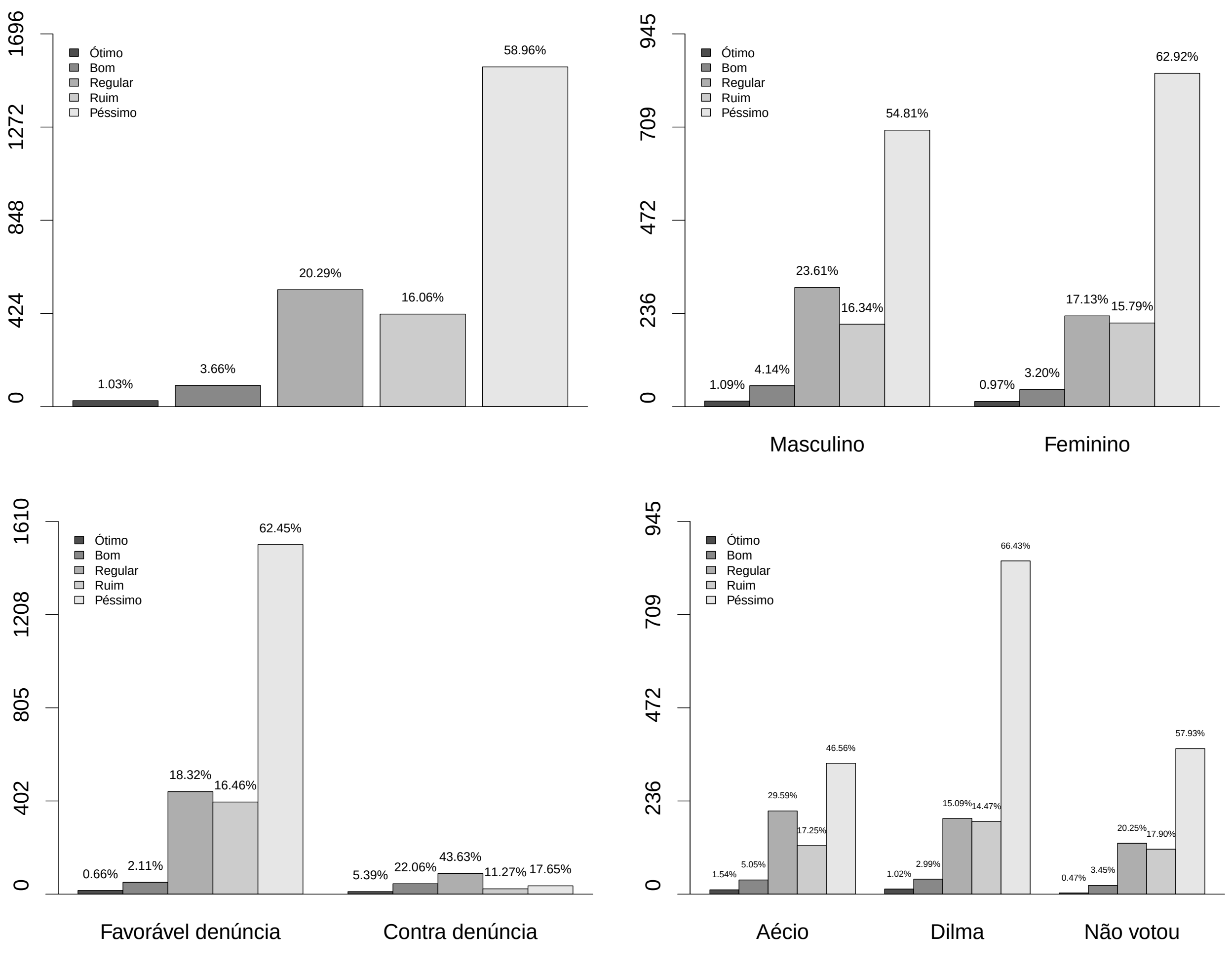

Figure 1: Comportamento da variável resposta e demais variáveis explicativas.

Com a finalidade de determinar qual o efeito das variáveis explicativas SEXO, DENUNCIA e

VOTOU2014 em relação ao desempenho do governo Temer, o modelo de regressão multinomial ordinal supondo chances proporcionais descrito na seção anterior, foi empregado. A partir deste modelo será possível também estimar chances e probabilidades da opinião dos eleitores em relação ao governo.

Assim sendo, considerando que a variável resposta Y (avaliação do governo Temer) é composta por $r = 5$ categorias, os quatro logitos cumulativos ficam definidos por

$$
\begin{aligned}
\log\left[\frac{\theta_1(\mathbf{x})}{1-\theta_1(\mathbf{x})}\right] &= \log\left[\frac{P(Y\leq 1\mid \mathbf{x})}{P(Y>1\mid \mathbf{x})}\right] = \log\left[\frac{p_1(\mathbf{x})}{p_2(\mathbf{x})+p_3(\mathbf{x})+p_4(\mathbf{x})+p_5(\mathbf{x})}\right],\\
\log\left[\frac{\theta_2(\mathbf{x})}{1-\theta_2(\mathbf{x})}\right] &= \log\left[\frac{P(Y\leq 2\mid \mathbf{x})}{P(Y>2\mid \mathbf{x})}\right] = \log\left[\frac{p_1(\mathbf{x})+p_2(\mathbf{x})}{p_3(\mathbf{x})+p_4(\mathbf{x})+p_5(\mathbf{x})}\right],\\
\log\left[\frac{\theta_3(\mathbf{x})}{1-\theta_3(\mathbf{x})}\right] &= \log\left[\frac{P(Y\leq 3\mid \mathbf{x})}{P(Y>3\mid \mathbf{x})}\right] = \log\left[\frac{p_1(\mathbf{x})+p_2(\mathbf{x})+p_3(\mathbf{x})}{p_4(\mathbf{x})+p_5(\mathbf{x})}\right],\\
\log\left[\frac{\theta_4(\mathbf{x})}{1-\theta_4(\mathbf{x})}\right] &= \log\left[\frac{P(Y\leq 4\mid \mathbf{x})}{P(Y>4\mid \mathbf{x})}\right] = \log\left[\frac{p_1(\mathbf{x})+p_2(\mathbf{x})+p_3(\mathbf{x})+p_4(\mathbf{x})}{p_5(\mathbf{x})}\right]
\end{aligned}
$$

para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ um dado vetor de covariáveis X_1 (1 se sexo masculino e 0 se feminino), X_2 (1 se votou no Aécio, 0 se votou na Dilma ou não votou), X_3 (1 se não votou, 0 se votou na Dilma ou Aécio) e X_4 (1 se é favorável a denuncia e 0 se é contra). É importante destacar que no modelo as probabilidades acumuladas são acumuladas sobre os valores inferiores, sendo o menor valor inferior o nível de avaliação ótimo.

$$
\mathcal{B}(\widehat{\delta}) = \frac{5\,\delta}{4n} + \mathcal{O}(n^{-2}). \tag{10}
$$

Inicialmente, foram considerados os seguintes modelos

$$
\log\left[\frac{\theta_j(\mathbf{x})}{1-\theta_j(\mathbf{x})}\right] = \beta_{01}+\beta_{02}+\beta_{03}+\beta_{04}+\beta_{1j}\,x_1+\beta_{2j}\,x_2+\beta_{3j}\,x_3+\beta_{4j}\,x_4, \tag{11}
$$

e

$$
\log\left[\frac{\theta_j(\mathbf{x})}{1-\theta_j(\mathbf{x})}\right] = \beta_{01}+\beta_{02}+\beta_{03}+\beta_{04}+\beta_{1}\,x_1+\beta_{2}\,x_2+\beta_{3}\,x_3+\beta_{4}\,x_4, \tag{12}
$$

com $j = 1, 2, 3, 4$.

O modelo (11) assume que as covariáveis diferem entre os logitos, enquanto que o modelo de chances proporcionais (12) assumimos os mesmos coeficientes para as variáveis explicativas, independente do nível da variável resposta. Nesse sentido, deve-se avaliar a suposição de chances proporcionais, para tal prosseguiu-se com o seguinte teste de hipótese $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\beta}$, $j = 1, \ldots, 4$ utilizando a estatística escore (S_R) como sugerido em Stokes et al. (2000). Os resultados do teste foram $S_R = 20.54$ com $g.l. = 12$ e valor-$p = 0.0575$. Portanto, verifica-se que a suposição de chances proporcionais não pode ser fortemente garantida uma vez que o valor-p do teste esta próximo do usual nível de 5% de significância.

Considerando que a suposição de chances proporcionais não foi violada, avançou-se na analise adotando o modelo de chances proporcionais. Apresentamos na Tabela 2 os testes da razão de verossimilhança (TRV) sequencias bem como os valores dos critérios de informação, AIC e BIC, para discriminar entre os modelos adotados. Pode-se observar que a interação entre as covariáveis sexo, aécio, não votou e denuncia, denotada por $X_1 * X_2 * X_3 * X_4$, não apresentou efeito significativo. Nota-se que o modelo com todas as covariáveis e sem interação apresentou os menores valores do critérios AIC e BIC.

É importante ressaltar que o modelo (11) apresentou o seguintes valores de AIC e BIC 5445.0751 e 5562.5091, respectivamente, indicando que a suposta violação da suposição de chances proporcionais do modelo (12) não é substancialmente suficiente para justificar os parâmetros extras do modelo (11). Sendo assim, o modelo (12) selecionado para descrever os dados.

Table 2: Discriminação entre os modelos considerados.

	G.L.	TRV	valor-p	AIC	BIC
Nulo	—	—	—	6028.4309	6052.0615
X_1	1	17.1873	<0.0001	6013.2436	6042.7818
$X_2, X_3 \mid X_1$	1	521.5128	<0.0001	5493.7308	5528.9609
$X_4 \mid X_1, X_2, X_3$	2	55.4504	<0.0001	5442.2803	5489.2539
$X_1 * X_2 * X_3 * X_4 \mid X_1, X_2, X_3, X_4$	7	9.4453	0.2222	5446.8350	5534.9104

Seguindo com a análise, na Tabela 3 apresenta-se as estimativa, erro padrão, estatística χ^2 do teste de Wald e seu respectivo valor-p para os parâmetros do modelo adotado. Como esperado e visto globalmente pelo TRV da Tabela 2 percebe-se que todas as covariáveis são altamente significativas para o modelo.

Table 3: Resumos inferências do modelo adotado.

Parâmetro	Estimativa	E.P.	Wald χ^2	valor-p
β_{01} (ótimo)	-3.3746	0.2295	216.2090	<0.0001
β_{02} (bom)	-1.7414	0.1580	121.4214	<0.0001
β_{03} (regular)	0.4190	0.1534	7.4612	0.0063
β_{04} (ruim)	1.2381	0.1552	63.6629	<0.0001
β_1 (masculino)	0.2850	0.0787	13.1224	0.0003
β_2 (aécio)	0.6893	0.0929	55.0789	<0.0001
β_3 (não votou)	0.3479	0.0982	12.5496	0.0004
β_4 (favorável)	-2.1629	0.1443	224.6461	<0.0001

No que tange a qualidade do ajuste calculamos as estatística de Pearson e Deviance definidas em (9). Essas estatísticas podem ser utilizadas uma vez que não há covariáveis contínuas e os dados não estão esparsos (Agresti, 2007). Os resultados obtidos foram $Q_P = 50.6142$ e $Q_L = 50.6458$ com graus de liberdade iguais a 20, o valor-p para ambas as estatística foi aproximadamente 0.12, indicando um ajuste aceitável do modelo. Ademais, comparamos as probabilidade empíricas versus as preditas pelo modelo em cada nível da variável resposta, os resultados estão apresentados na Figura 2 e Tabela 4 onde também reportamos a raiz quadrada do erro quadrático médio definido como

$$\text{REQM} = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \left[\widetilde{\boldsymbol{p}}_j(\mathbf{x}) - \widehat{\boldsymbol{p}}_j(\mathbf{x})\right]^2}, \qquad j = 1, 2 \ldots, 5 \tag{13}$$

em que $\widetilde{\boldsymbol{p}}_j(\mathbf{x})$ denota a probabilidade empírica e $\widehat{\boldsymbol{p}}_j(\mathbf{x})$ representa a probabilidade predita pelo modelo.

Visualmente nota-se que somente no nível Péssimo, onde houve maior frequência, as probabilidades preditas estão próximas das empíricas. Entretanto uma inspeção atenta a Tabela 4 mostra que os valores do REQM são pequenos, indicando que o modelo faz boas predições independente do nível da variável resposta.

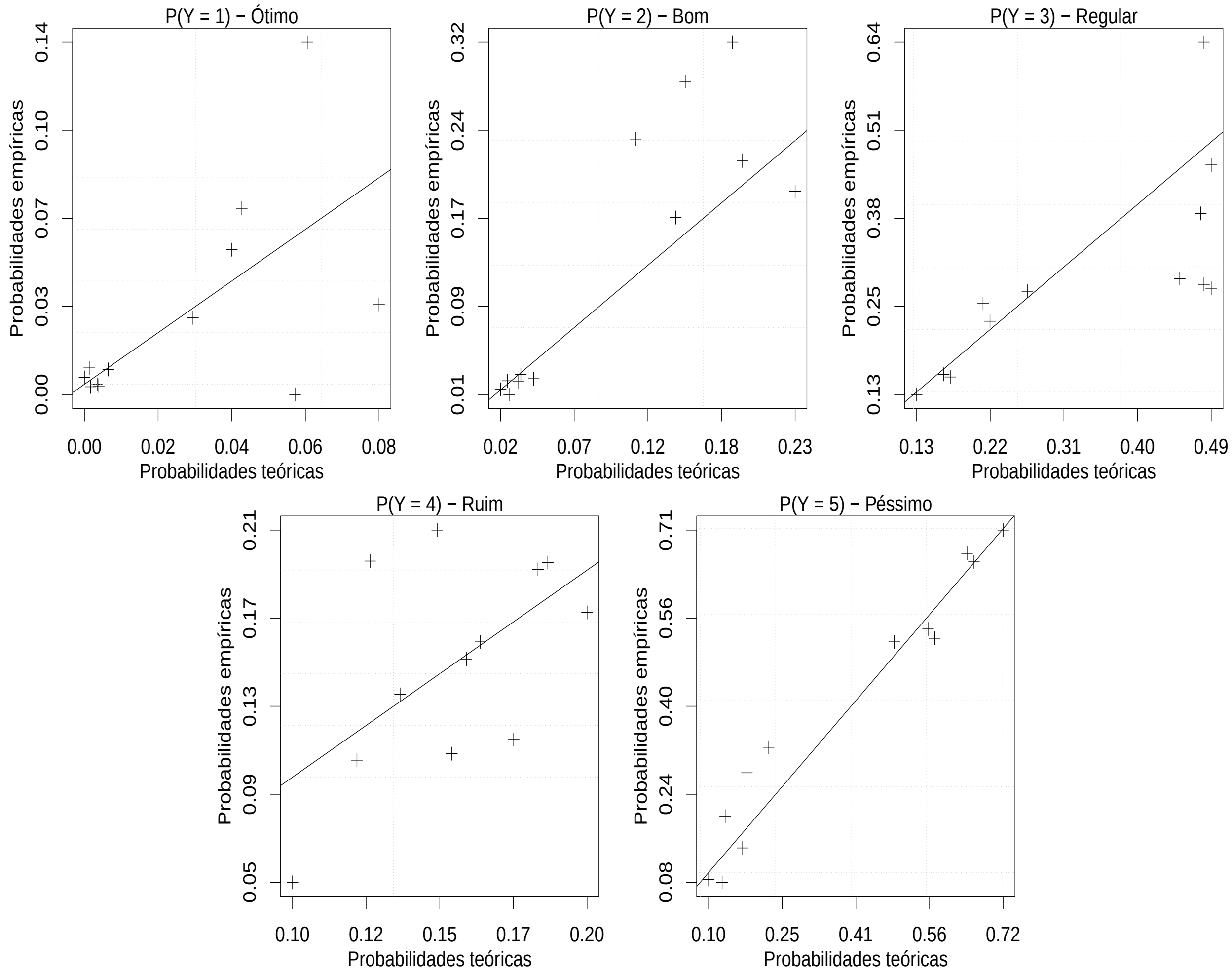

Figure 2: Probabilidades empíricas versus probabilidades preditas pelo modelo de regressão.

Table 4: Probabilidades empíricas $\widetilde{\boldsymbol{p}}_j(\mathbf{x})$ e preditas $\widehat{\boldsymbol{p}}_j(\mathbf{x})$ para dado valores das covariáveis.

X_1	X_2	X_3	$\widetilde{\boldsymbol{p}}_1(\mathbf{x})$	$\widehat{\boldsymbol{p}}_1(\mathbf{x})$	$\widetilde{\boldsymbol{p}}_2(\mathbf{x})$	$\widehat{\boldsymbol{p}}_2(\mathbf{x})$	$\widetilde{\boldsymbol{p}}_3(\mathbf{x})$	$\widehat{\boldsymbol{p}}_3(\mathbf{x})$	$\widetilde{\boldsymbol{p}}_4(\mathbf{x})$	$\widehat{\boldsymbol{p}}_4(\mathbf{x})$	$\widetilde{\boldsymbol{p}}_5(\mathbf{x})$	$\widehat{\boldsymbol{p}}_5(\mathbf{x})$
1	1	1	0.0096	0.0103	0.0256	0.0404	0.2756	0.2659	0.1763	0.1958	0.5128	0.4876
1	1	2	0.0102	0.0052	0.0238	0.0209	0.1548	0.1625	0.1548	0.1567	0.6565	0.6547
1	1	3	0.0038	0.0074	0.0231	0.0292	0.2577	0.2111	0.1962	0.1799	0.5192	0.5725
1	2	1	0.0345	0.0831	0.1897	0.2340	0.6379	0.4840	0.0517	0.1002	0.0862	0.0986
1	2	2	0.0556	0.0435	0.1667	0.1455	0.3889	0.4801	0.1111	0.1519	0.2778	0.1790
1	2	3	0.0000	0.0606	0.3200	0.1876	0.2800	0.4930	0.2000	0.1254	0.2000	0.1334
2	1	1	0.0033	0.0078	0.0294	0.0308	0.2320	0.2197	0.1993	0.1831	0.5359	0.5586
2	1	2	0.0065	0.0039	0.0163	0.0158	0.1254	0.1291	0.1384	0.1352	0.7134	0.7160
2	1	3	0.0030	0.0055	0.0118	0.0222	0.1509	0.1707	0.1627	0.1612	0.6716	0.6403
2	2	1	0.1351	0.0638	0.2162	0.1950	0.4595	0.4930	0.1081	0.1211	0.0811	0.1270
2	2	2	0.0294	0.0331	0.2353	0.1160	0.2941	0.4541	0.1176	0.1720	0.3235	0.2248
2	2	3	0.0714	0.0462	0.2857	0.1526	0.2857	0.4840	0.2143	0.1472	0.1429	0.1699
REQM			0.1095		0.2296		0.3825		0.1347		0.1786	

X_1 : 1 masculino e 2 feminino; X_2 : 1 favorável denuncia e 2 não favorável denúncia;
X_3 : 1 votou Aécio, 2 votou na Dilma e 3 não votou.

Desse modo tem-se que o modelo estimado pode ser expresso em termos dos logitos cumulativos por

$$\log\left[\frac{\widehat{\theta}_j(\mathbf{x})}{1-\widehat{\theta}_j(\mathbf{x})}\right] = \widehat{\beta}_{0j} + 0.2650\, x_1 + 0.6893\, x_2 + 0.3479\, x_3 - 2.1629\, x_4, \qquad j = 1,2,3,4, \quad (14)$$

ou ainda, em termos das probabilidades acumuladas, por

$$\widehat{\theta}_j(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(\widehat{\beta}_{0j} + 0.2650\, x_1 + 0.6893\, x_2 + 0.3479\, x_3 - 2.1629\, x_4\right)}{1+\exp\left(\widehat{\beta}_{0j} + 0.2650\, x_1 + 0.6893\, x_2 + 0.3479\, x_3 - 2.1629\, x_4\right)}, \qquad j = 1,2,3,4. \quad (15)$$

Na Figura 3 estão apresentadas as probabilidades preditas e seus intervalos de predição a partir do modelo ajustado. Por exemplo, destaca-se que a probabilidade de uma pessoa do sexo feminino, favorável a denúncia e que votou na Dilma em 2014 de avaliar o governo em péssimo é aproximadamente 0.71 com intervalo de predição dado por $(0.68, 0.74)$.

Figure 3: Estimativas pontuais e intervalares das probabilidades por categoria conforme valores das covariáveis.

Por outro lado, a Figura 4 exibe as probabilidades acumuladas preditas e seus respectivos intervalos de predição. Dentre as várias informações, ressalta-se que a probabilidade de uma pessoa do sexo masculino, contra a denúncia e que votou no Aécio em 2014 avaliar o governo em ótimo ou bom ou regular é aproximadamente 0.75 com um intervalo de predição dado por $(0.80, 0.84)$.

Figure 4: Estimativas pontuais e intervalares das probabilidades acumuladas conforme valores das covariáveis.

Em relação a interpretação dos coeficientes estimados do modelo (14) será realizada em termos das razão de chances decorrentes do modelo. As estimativas pontuais e intervalares das razão de chances estão reportadas na Tabela 5. Analisando os resultados as seguintes conclusões pode ser retiradas:

- Para um nível fixo j da avaliação do governo Temer, a chance estimada de uma pessoa do sexo masculino avaliar o governo Temer na direção ótima (i.e., $Y \leq j$ ao invés de $Y > j$) é aproximadamente 1.3297 vezes a chance de uma pessoa do sexo feminino. Em outras palavras existe um associação moderada dos homens acharem o governo Temer mais ótimo do que as mulheres;

- Para um nível fixo j da avaliação do governo Temer, a chance estimada de uma pessoa que votou no Aécio em 2014 avaliar o governo Temer na direção ótima (i.e., $Y \leq j$ ao invés de $Y > j$) é aproximadamente 2 vezes a chance de uma pessoa que votou na Dilma em 2014. Portanto, existe uma associação substancial das pessoas que votaram no Aécio tenderem a acharem o governo Temer mais ótimo do que as pessoas que votaram na Dilma;

- Para um nível fixo j da avaliação do governo Temer, a chance estimada de uma pessoa que votou em branco/nulo ou não votou 2014 avaliar o governo Temer na direção ótima (i.e., $Y \leq j$ ao invés de $Y > j$) é aproximadamente 1.4 vezes a chance de uma pessoa que votou na Dilma em 2014. Logo, existe uma associação moderada das pessoas que votaram em branco/nulo ou não votaram 2014 acharem o governo Temer mais ótimo do que as pessoas que votaram na Dilma;

- Para um nível fixo j da avaliação do governo Temer, a chance estimada de uma pessoa a qual acredita que os deputados deveriam autorizar a denúncia contra o Temer avaliar o governo na direção ótima (i.e., $Y \leq j$ ao invés de $Y > j$) é aproximadamente 0.11 vezes a chance de uma pessoa a qual acredita que os deputados não deveriam autorizar a denúncia. Isso significa que as pessoas que são favoráveis a denúncia contra o Temer tender a avaliar o governo na direção Péssimo comparada com as pessoas que não são favoráveis a denúncia.

Table 5: Estimativas pontuais e intervalares da razão de chances.

Efeito	$\exp\left(\widehat{\beta}\right)$	I.C. 95%
Masculino vs Feminino	1.3297	(1.1397, 1.5514)
Aécio vs Dilma	1.9923	(1.6607, 2.3900)
Não votou vs Dilma	1.4161	(1.1682, 1.7168)
Favorável vs Não favorável	0.1150	(0.0867, 0.1526)

References

Agresti, A., 1990. Categorical Data Analysis. Wiley, New York.

Agresti, A., 2007. An Introduction to Categorical Data Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Derr, B., 2013. Ordinal response modeling with the LOGISTIC procedure. In: Proceedings of the SAS Global Forum 2013 Conference. Paper 446–2013.

Giolo, S. R., 2017. Introdução à análise de dados categóricos com aplicações. Edgard Blücher Ltda.

High, R., 2013. Models for ordinal response data. In: Proceedings of the SAS Global Forum 2013 Conference. Paper 445–2013.

Lipsitz, S. R., Fitzmaurice, G. M., Molenberghs, G., 1996. Goodness-of-fit tests for ordinal response regression models. Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics) 45 (2), 175–190.

McCullagh, P., 1980. Regression models for ordinal data. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) 42 (2), 109–142.

Peterson, B., Harrell, F. E., 1990. Partial proportional odds models for ordinal response variables. Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics) 39 (2), 205–217.

SAS, 2010. The LOGISTIC Procedure, SAS/STAT® User's Guide, Version 9.4. Cary, NC: SAS Institute Inc.

Stokes, M. E., Davis, C. S., Koch, G. G., 2000. Categorical Data Analysis Using The SAS® System, 2nd Edition. Cary, NC: SAS Institute Inc.

Williams, O. D., Grizzle, J. E., 1972. Analysis of contingency tables having ordered response categories. Journal of the American Statistical Association 67 (337), 55–63.