

Uma revisão da literatura acerca dos gráficos de controle para monitoramento de variáveis do tipo fração e proporção

André F. B. Menezes

Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Estatística, Brasil

13 de Junho de 2018

1 Motivação e Objetivo

2 Revisão da literatura

- Gráfico de controle p e seus refinamentos
- Gráfico de controle Beta
- Gráfico de controle via regressão Beta

3 Aplicações

4 Referências

- ▶ Seguramente os gráficos de controle p e np são as principais ferramentas para monitorar variáveis do tipo proporção ou fração;
- ▶ Como apontam vários autores é comum em situações práticas a proporção (p) ser muito pequena ou grande, logo a distribuição Binomial é assimétrica e a aproximação para a Normal pode não ser satisfatória;
- ▶ É muito comum também em processos de produção várias características serem observadas simultaneamente, ao invés de somente uma característica.
- ▶ Ou seja, sabe-se que um conjunto de características influenciam uma variável de interesse;
- ▶ Objetivo do deste trabalho é apresentar e comparar por meio de aplicações reais os principais avanços e propostas presentes na literatura para monitoramento de variáveis do tipo fração e proporção.

Artigos que motivaram o trabalho

- ▶ BAYER, F. M.; TONDOLO, C. M.; MULLER, F. M. **Beta regression control chart for monitoring fractions and proportions.** Computers & Industrial Engineering, v. 119, p. 416–426, 2018.
- ▶ SANT'ANNA, Â. M. O.; CATEN, C. S. ten. **Beta control charts for monitoring fraction data.** Expert Systems with Applications, v. 39, n. 11, p. 10236–10243, 2012.

Revisão da literatura

1. Gráfico p de Shewhart e três refinamentos;
 - (1) Proposta de Ryan (1989);
 - (2) Proposta de Chen (1998);
 - (3) Proposta de Joeques e Barbosa (2013).
2. Beta Control Chart (BCC) proposto por Sant'Anna e Caten (2012);
3. Beta Regression Control Chart (BRCC) proposto por Bayer, Tondolo e Müller (2018).

Gráfico de controle p e seus refinamentos

- ▶ Considere que uma amostra aleatória de n unidades de um determinado produto seja selecionada;
- ▶ Se X representa o número de unidades do produto que não está em conformidade, então a variável aleatória X tem distribuição Binomial com p.m.f. dada por

$$\Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

em que p é a proporção de unidades não conformes.

- ▶ Lembre-se que $\mathbb{E}(X) = n p$ e $\text{Var}(X) = n p (1 - p)$.

Gráfico de controle p e seus refinamentos

- ▶ A proporção amostral de não conformes é definida como a razão do número de unidades não conformes na amostra pelo tamanho amostral, isto é, $\hat{p} = \frac{X}{n}$.
- ▶ A média e variância da variável aleatória \hat{p} são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{V}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}. \quad (2)$$

- Pelo teorema do limite central têm-se que

$$\hat{p} \dot{\sim} \mathcal{N} \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right).$$

- Logo, os limites de controle são definidos por

$$\text{UCL} = p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{e} \quad \text{LCL} = p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

- Essa aproximação é considerada razoável quando $np(1-p) > 5$ e $0.1 < p < 0.9$ ou quando $np(1-p) > 25$.

Gráfico de controle p e seus refinamentos

- ▶ Essa aproximação é considerada razoável quando $np(1-p) > 5$ e $0.1 < p < 0.9$ ou quando $np(1-p) > 25$.
- ▶ Segundo Joeques e Barbosa (2013) em processos de alta qualidade os valores de p são usualmente pequenos e as amostras não são grandes o suficiente.
- ▶ Logo, os limites de controle baseado na aproximação Normal podem não ser adequados para descrever a real situação do processo.

Gráfico de controle p e seus refinamentos

Proposta de Ryan (1989)

$$UCL_1 = UCL + \frac{1.25}{n} \quad \text{e} \quad LCL_1 = LCL + \frac{1.25}{n}.$$

Proposta de Chen (1998)

$$UCL_2 = UCL + \frac{4}{3n} (1 - 2p) \quad \text{e} \quad LCL_2 = LCL + \frac{4}{3n} (1 - 2p).$$

Proposta de Joekes e Barbosa (2013)

$$UCL_3 = UCL_2 - \frac{p(1-p) + 2}{6n^2 [p(1-p)/n]^{1/2}}$$
$$LCL_3 = LCL_2 - \frac{p(1-p) + 2}{6n^2 [p(1-p)/n]^{1/2}}.$$

- Sant'Anna e Caten (2012) introduziram o gráfico de controle Beta (Beta Control Chart, BCC) considerando que a proporção de não conformes pode ser descrita pela distribuição Beta com densidade dada por

$$f(y \mid \theta_1, \theta_2) = \frac{\Gamma(\theta_1 + \theta_2)}{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)} y^{\theta_1-1} (1-y)^{\theta_2-1}, \quad 0 < y < 1 \quad (3)$$

em que $\theta_1, \theta_2 > 0$ são parâmetros de forma e $\Gamma(\theta_1) = \int_0^\infty u^{\theta_1-1} e^{-u} du$ é a função gama completa.

- Lembre-se que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)^2 (\theta_1 + \theta_2 + 1)}. \quad (4)$$

- A função de distribuição acumulada da variável aleatória Y é definida como

$$F(y | \theta_1, \theta_2) = \int_0^y f(u | \theta_1, \theta_2) du = I_y(\theta_1, \theta_2) = \frac{B(y | \theta_1, \theta_2)}{B(\theta_1, \theta_2)} \quad (5)$$

em que $I_y(\theta_1, \theta_2)$ é a razão da função beta incompleta, $B(\theta_1, \theta_2)$ é a função beta e $B(y | \theta_1, \theta_2)$ é a função beta incompleta.

- A função quantil da distribuição Beta é dada por

$$\psi(\alpha | \theta_1, \theta_2) = F^{-1}(\alpha | \theta_1, \theta_2) = I_{\alpha}^{-1}(\theta_1, \theta_2), \quad (6)$$

que é a inversa da razão da função beta incompleta.

Gráfico de controle Beta

- Os limites de controle para o BCC são obtidos, respectivamente, por

$$\text{LCL} = \bar{p} - w_1 \sqrt{s^2(\bar{p})} \quad (7)$$

$$\text{UCL} = \bar{p} + w_2 \sqrt{s^2(\bar{p})} \quad (8)$$

em que \bar{p} e $s^2(\bar{p})$ são a média e a variância da proporção de não conformes, w_1 e w_2 são constantes que definem a largura dos limites de controle.

- Os valores de w_1 e w_2 são dados por

$$w_1 = \frac{\bar{p} - \psi(\alpha/2 \mid \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{s^2(\bar{p})}} \quad (9)$$

$$w_2 = \frac{\psi(1 - \alpha/2 \mid \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{s^2(\bar{p})}} \quad (10)$$

em que $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$ definem a região de controle desejada, usualmente assume-se que $\alpha = 0.005$.

- Pode se mostrar que substituindo (9) em (7) e (10) em (8) os limites de controle podem ser obtidos diretamente pelo quantil da distribuição Beta, isto é,

$$\text{LCL} = \psi(\alpha/2 \mid \theta_1, \theta_2) \quad (11)$$

$$\text{UCL} = \psi(1 - \alpha/2 \mid \theta_1, \theta_2) . \quad (12)$$

- ▶ Na prática, não conhecemos os verdadeiros valores dos parâmetros θ_1 e θ_2 , portanto devemos estimar eles com base em uma amostra. Para tal, o método da máxima verossimilhança será empregado.
- ▶ Seja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ uma amostra de proporções não conformes, então os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ de θ_1 e θ_2 , respectivamente são obtidos maximizando a função log-verossimilhança cuja expressão é dada por

$$\begin{aligned}\ell(\theta_1, \theta_2 \mid \mathbf{y}) &= n \log \Gamma(\theta_1, \theta_2) - n \log \Gamma(\theta_1) + (\theta_1 - 1) \sum_{i=1}^n \log y_i \\ &\quad + (\theta_2 - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - y_i).\end{aligned}$$

- ▶ O gráfico de controle Beta não possibilita situações onde variáveis de qualidade influenciam a característica de interesse, uma vez que a média e dispersão da variável é constante ao longo das observações.
- ▶ Bayer, Tondolo e Muller (2018) introduziram o gráfico de controle via regressão Beta (*beta regression control chart*, BRCC), que permite monitorar a média e dispersão da variável do tipo proporção de fração na presença de variáveis de controle.

- ▶ Os autores consideraram a seguinte parametrização da distribuição Beta:
- ▶ $\mu = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$ e $\sigma^2 = \frac{1}{1 + \theta_1 + \theta_2}$, isto é,
- ▶ $\theta_1 = \mu \left(\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} \right)$ e $\theta_2 = (1 - \mu) \left(\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} \right)$.
- ▶ Sendo que $\mu \in (0, 1)$ representa a média e $\sigma \in (0, 1)$ é um o parâmetro de dispersão;

- A função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{Beta}(\mu, \sigma)$ é dada por

$$\begin{aligned} f(y \mid \mu, \sigma) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2}\right)}{\Gamma\left[\mu\left(\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2}\right)\right] \Gamma\left[(1-\mu)\left(\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2}\right)\right]} y^{\mu\left(\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2}\right)-1} \\ &\times (1-y)^{(1-\mu)\left(\frac{1-\sigma^2}{\sigma^2}\right)-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

- Sob essa parametrização têm-se que

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = \mu(1-\mu)\sigma^2.$$

- A função de distribuição acumulada e quantil sob a parametrização (13) pode ser obtida utilizando (5) e (6), isto é,

$$\mathcal{F}(y \mid \mu, \sigma) = F \left(y \mid \mu \left(\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} \right), (1 - \mu) \left(\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} \right) \right) \quad (14)$$

$$\mathcal{Q}(\alpha \mid \mu, \sigma) = \psi \left(\alpha \mid \mu \left(\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} \right), (1 - \mu) \left(\frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2} \right) \right). \quad (15)$$

Gráfico de controle via regressão Beta

- Considere que uma amostra aleatória de tamanho n da característica de interesse y_i , $i = 1, \dots, n$ com distribuição Beta e densidade dada por (13).
- O modelo de regressão beta com dispersão variando é definido assumindo a seguinte estrutura

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad (16)$$

$$h(\sigma_i) = \mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\gamma}, \quad (17)$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_k)^\top$ e $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)^\top$.

- Os limites do gráfico de controle via regressão Beta são definidos por

$$\text{LCL}_i = \mathcal{Q}(\alpha/2 \mid \mu_i, \sigma_i) \quad (18)$$

$$\text{UCL}_i = \mathcal{Q}(1 - \alpha/2 \mid \mu_i, \sigma_i), \quad (19)$$

em que μ_i e σ_i são obtidos pelas estruturas de regressão da média $\mu_i = g^{-1}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$ e dispersão $\sigma_i = h^{-1}(\mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\beta})$ e α é a probabilidade de falso alarme.

Gráfico de controle via regressão Beta

- Na prática, a estimação dos parâmetros μ_i e σ_i é realizada sob o paradigma da verossimilhança, com $\hat{\mu}_i = g^{-1}(\mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})$ e $\hat{\sigma}_i = h^{-1}(\mathbf{z}_i^\top \hat{\boldsymbol{\gamma}})$, sendo que os coeficientes de regressão $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ são estimados maximizando a função log-verossimilhança, definida por

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \mid \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\mu_i, \sigma_i)$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_i(\mu_i, \sigma_i) &= \log \Gamma \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - \log \Gamma \left[\mu_i \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right] \\ &- \log \Gamma \left[(1 - \mu_i) \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) \right] + \left[\mu_i \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - 1 \right] \log y_i \\ &+ \left[(1 - \mu_i) \left(\frac{1 - \sigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - 1 \right] \log(1 - y_i). \end{aligned}$$

Gráfico de controle via regressão Beta

1. Ajuste o modelo de regressão Beta obtendo as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ dos vetores de parâmetros β e γ , respectivamente;
2. Obtenha as estimativas da média μ e dispersão σ para cada amostra i , com $i = 1, \dots, n$. Ou seja, $\hat{\mu}_i = g^{-1}(\mathbf{x}_i^\top \hat{\beta})$ e $\hat{\sigma}_i = h^{-1}(\mathbf{z}_i^\top \hat{\gamma})$;
3. Determine os limites de controle para um dado valor de ARL_0 , isto é,

$$\widehat{LCL}_i = \mathcal{Q}(\alpha/2 \mid \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i) \quad (20)$$

$$\widehat{UCL}_i = \mathcal{Q}(1 - \alpha/2 \mid \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i), \quad (21)$$

em que $\alpha = \frac{1}{ARL_0}$.

4. Plote cada amostra y_i junto com seu limite de controle \widehat{LCL}_i e \widehat{UCL}_i , para $i = 1, \dots, n$.

Bayer, Tondolo e Muller (2018) apontam que as principais vantagens do BRCC são:

1. acomoda características assimétricas e heterocedásticas;
2. seus limites são restritos ao intervalo unitário e
3. permite a modelagem simultânea da média e do parâmetro de dispersão.

Aplicações

Embalagens não conformes

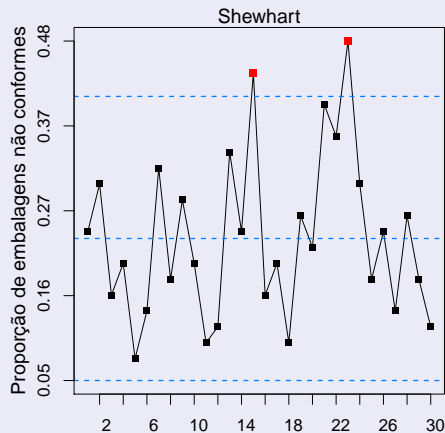
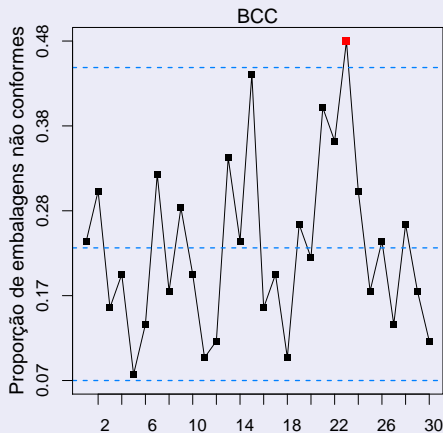
- ▶ Dados apresentados em Montgomery (2013) relacionado ao processo de fabricação de embalagens de suco de laranja concentrado e congelado em 30 lotes de 50 embalagens;
- ▶ A característica que será monitorada é a proporção de embalagens não conforme.

Embalagens não conformes

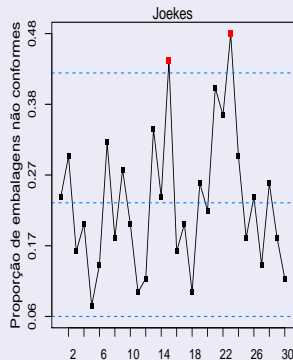
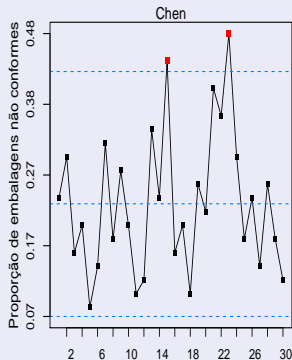
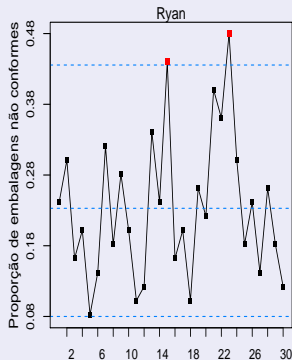
Tabela: Limites dos gráficos de controle.

Método	LCL	CL	UCL
BCC	0.0726	0.2318	0.4482
Shewhart	0.0524	0.2313	0.4102
Ryan	0.0774	0.2313	0.4352
Chen	0.0668	0.2313	0.4246
Joeques	0.0643	0.2313	0.4221

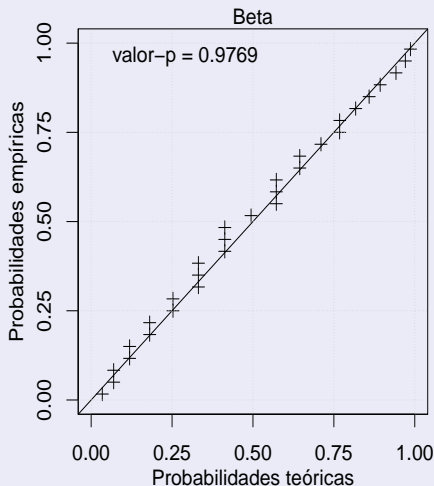
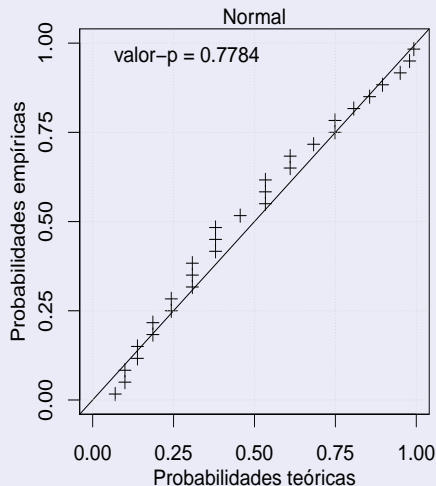
Embalagens não conformes



Embalagens não conformes



Embalagens não conformes



Amendoins não contaminados

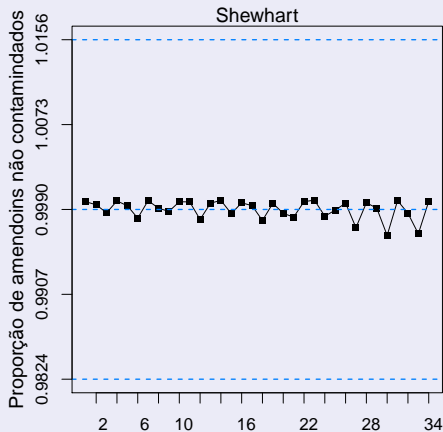
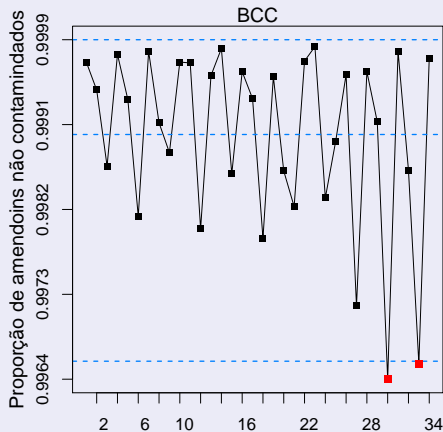
- ▶ Conjunto de dados retirado de Draper e Smith (1998), consiste em um estudo de contaminação de amendoins por substâncias tóxicas coletados em 34 lotes de 120 libras;
- ▶ A característica de qualidade que será monitorada é a proporção de amendoins não contaminados;

Amendoins não contaminados

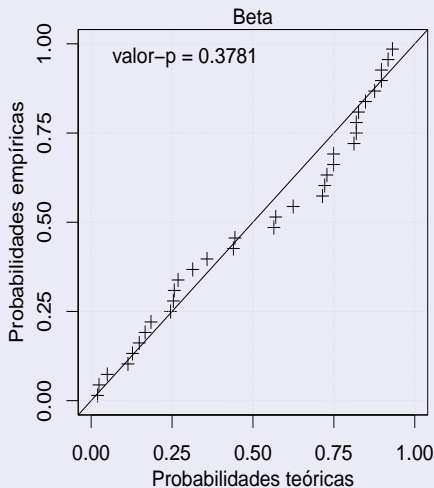
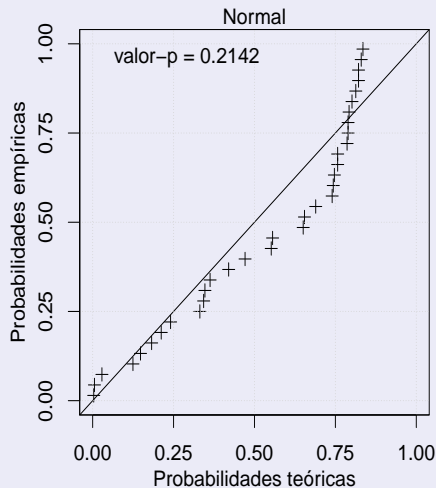
Tabela: Limites dos gráficos de controle.

Método	LCL	CL	UCL
BCC	0.9966	0.9990	0.9999
Shewhart	0.9824	0.9990	1.0156
Ryan	1.0191	0.9990	1.0523
Chen	0.9432	0.9990	0.9764
Joeke	0.8911	0.9990	0.9243

Amendoins não contaminados



Amendoins não contaminados



Oxidação da amônia

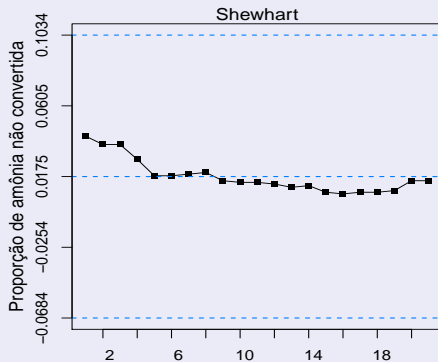
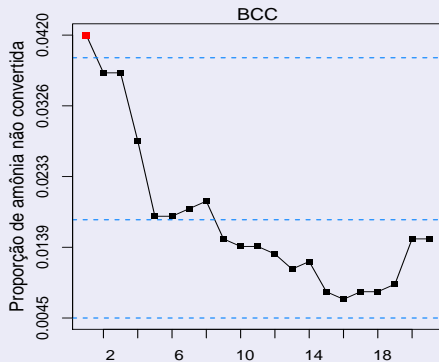
- ▶ Este conjunto de dados foi obtido no livro de Brownlee (1965);
- ▶ A característica de interesse é a proporção de amônia não convertida;
- ▶ Obtida em um processo de fabricação de ácido nítrico por oxidação de amônia coletados em 21 dias.

Oxidação da amônia

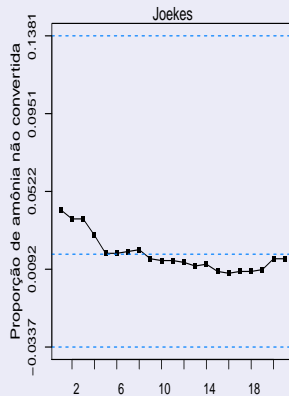
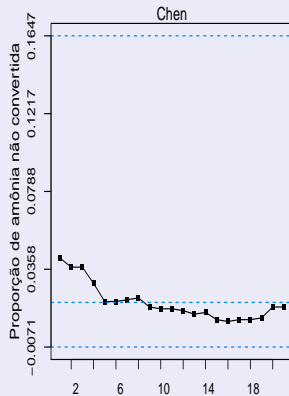
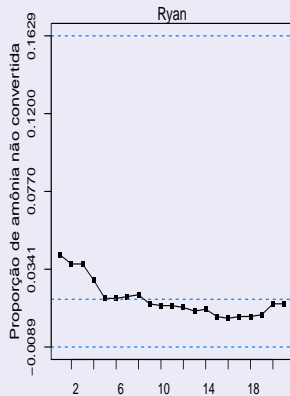
Tabela: Limites dos gráficos de controle.

Método	LCL	CL	UCL
BCC	0.0045	0.0175	0.0390
Shewhart	-0.0684	0.0175	0.1034
Ryan	-0.0089	0.0175	0.1629
Chen	-0.0071	0.0175	0.1647
Joeques	-0.0337	0.0175	0.1381

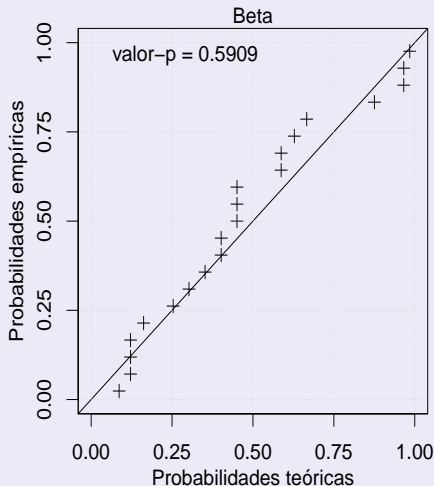
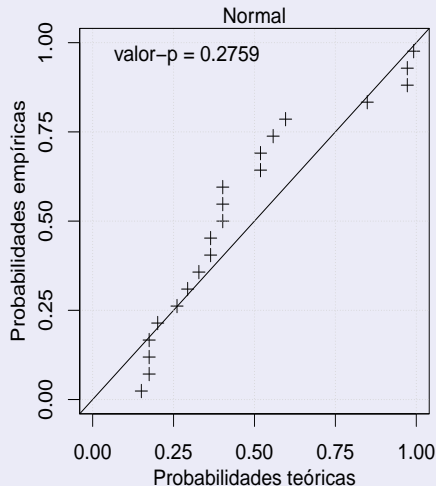
Oxidação da amônia



Oxidação da amônia



Oxidação da amônia



Transistores

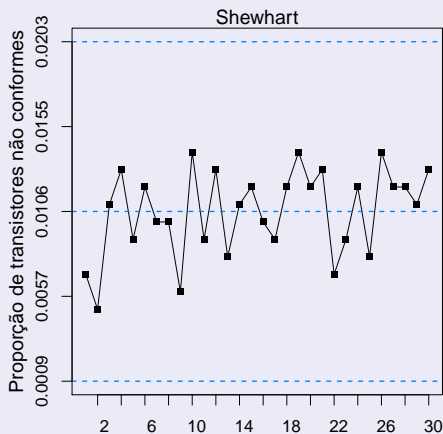
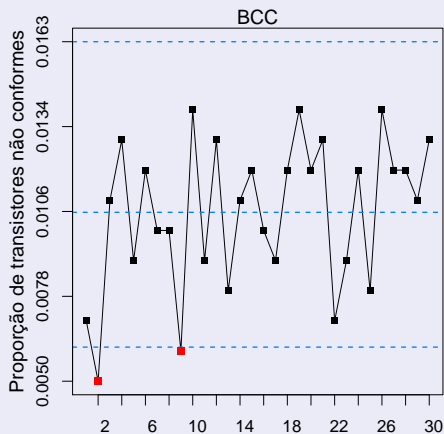
- ▶ Os dados aqui analisados estão presentes no livro de Ryan (1989);
- ▶ A característica de interesse a proporção de transistores não conformes em um total de 1000 inspecionados.

Transistores

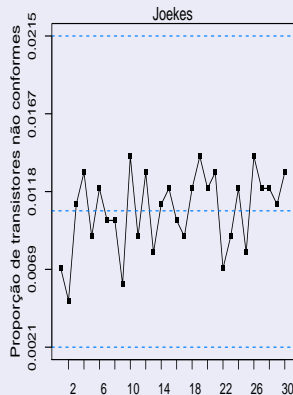
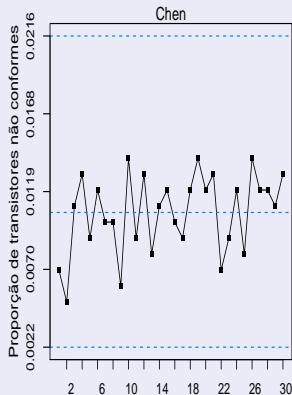
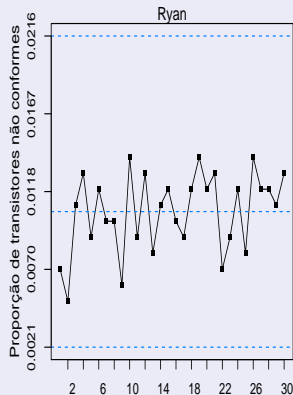
Tabela: Limites dos gráficos de controle.

Método	LCL	CL	UCL
BCC	0.0061	0.0106	0.0163
Shewhart	0.0009	0.0106	0.0203
Ryan	0.0021	0.0106	0.0216
Chen	0.0022	0.0106	0.0216
Joeke	0.0021	0.0106	0.0215

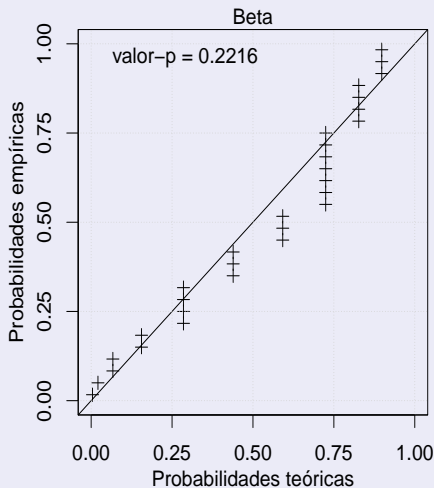
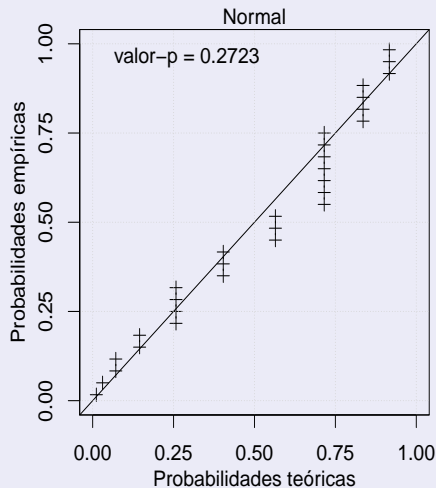
Transistores



Transistores



Transistores



Manufatura de pneus

- ▶ Conjunto de dados analisado por Sant'Anna (2009) relacionado a fabricação de pneus radiais de uma empresa multinacional de borrachas.
- ▶ A característica de qualidade monitorada é a proporção de massa não convertida, obtida pela razão entre o volume de matéria-prima não convertida em produto dividida pelo volume total.
- ▶ As variáveis de controle no processo são comprimento da banda de rodagem (x_1), comprimento da seção (x_2), comprimento do flanco (x_3), postamento do friso (x_4) e postamento da cova (x_5).

Manufatura de pneus

- ▶ Os dados foram obtidos através de um experimento fatorial fracionário com as variáveis de controle ajustadas em dois níveis mais dois pontos centrais resultando em 18 ensaios experimentais, com 30 pneus em cada ensaio;
- ▶ Assim, as variáveis de controle estão classificadas em três distintos níveis, assumindo os valores $-1, 0$ e 1 .

Manufatura de pneus

Seguindo Bayer, Tondolo e Muller (2018) o modelo de regressão considerado é dado por

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right) &= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 I_{1i} + \beta_4 I_{2i} + \beta_5 I_{3i} \\ \log\left(\frac{\sigma_i}{1-\sigma_i}\right) &= \gamma_0 + \gamma_1 x_{1i} + \gamma_2 I_{1i}, \quad i = 1, \dots, 18\end{aligned}\tag{22}$$

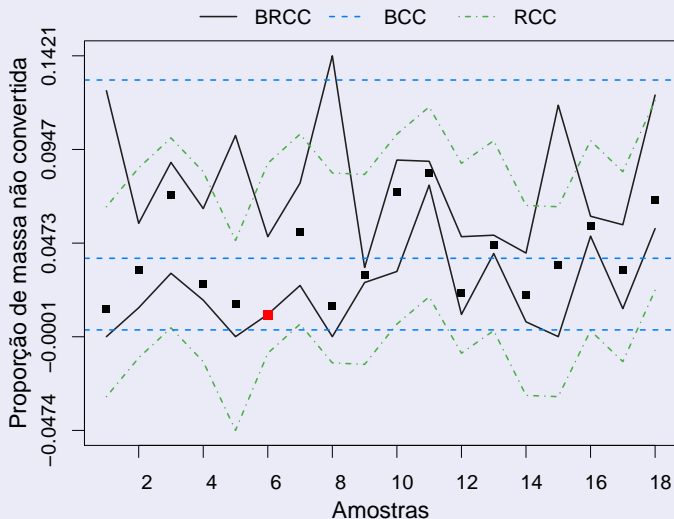
em que I_1 , I_2 e I_3 são interações entre as variáveis de controle, definidas por $I_1 = x_1 \times x_2$, $I_2 = x_1 \times x_4$ e $I_3 = x_2 \times x_5$.

Manufatura de pneus

Tabela: Resultados inferências do modelo (22).

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	IC 95%	valor- <i>p</i>
β_0	-3.5896	0.2126	(-4.0063, -3.1729)	0.0000
β_1	0.4599	0.2229	(0.0231, 0.8967)	0.0391
β_2	0.4751	0.2291	(0.0261, 0.9240)	0.0381
β_3	-0.6807	0.2198	(-1.1115, -0.2499)	0.0020
β_4	0.3055	0.0178	(0.2707, 0.3403)	<0.0001
β_5	0.2106	0.0178	(0.1757, 0.2455)	<0.0001
γ_0	-3.0944	0.2552	(-3.5946, -2.5942)	<0.0001
γ_1	-0.8731	0.3664	(-1.5911, -0.1551)	0.0172
γ_2	0.8750	0.3660	(0.1576, 1.5923)	0.0168

Manufatura de pneus



Manufatura de pneus

- ▶ Observa-se que o RCC apresenta limites inferior a 0
- ▶ Somente o BRCC indica que o processo esta fora de controle, pois a observação seis esta abaixo do limite inferior do gráfico de controle.
- ▶ Analisando as características desta amostra, foi possível notar que sua proporção de massa não convertida esta abaixo do valor esperado quando todas as covariáveis são mantidas constante.

Umidade relativa

- ▶ Os dados foram coletados pela estação meteorológica 83767 durante o período de 10/05/2016 a 10/06/2018, totalizando um total de 727 observações diárias;
- ▶ O objetivo da análise é monitorar a umidade relativa ao longo deste período afim de detectar se em determinado dia a umidade estava fora de controle;
- ▶ O monitoramento da umidade relativa pode ser importante, por exemplo para diagnósticos ambientais e avaliação de risco;
- ▶ Variáveis *dummy* representando cada estação do ano foram utilizadas como variáveis de controle, sendo que a primavera foi considerada como estação de referência.

Umidade relativa

O modelo de regressão considerado é dado por

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right) &= \beta_0 + \beta_1 \text{Inverno}_i + \beta_2 \text{Verao}_i + \beta_3 \text{Outono}_i \\ \log\left(\frac{\sigma_i}{1-\sigma_i}\right) &= \gamma_0 + \gamma_1 \text{Inverno}_i + \gamma_2 \text{Verao}_i + \gamma_3 \text{Outono}_i\end{aligned}\tag{23}$$

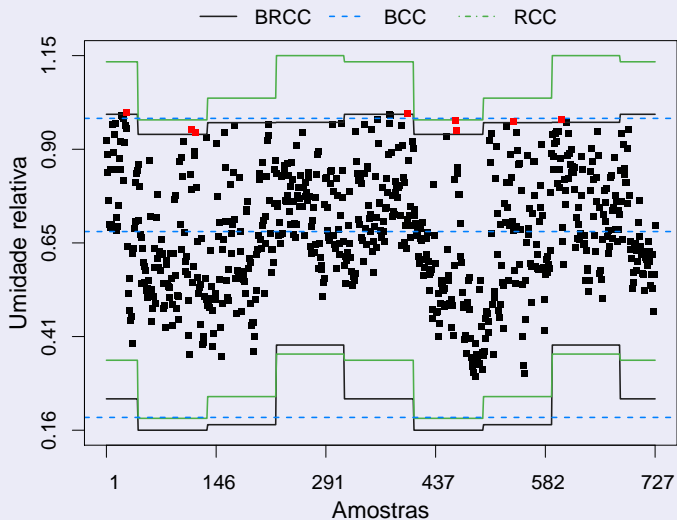
para $i = 1, \dots, 727$.

Umidade relativa

Tabela: Resultados inferências do modelo (23).

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	IC 95%	valor- <i>p</i>
β_0	0.6027	0.0536	(0.4976, 0.7078)	<0.0001
β_1	-0.2389	0.0723	(-0.3807, -0.0971)	0.0010
β_2	0.5209	0.0704	(0.3828, 0.6589)	<0.0001
β_3	0.4600	0.0806	(0.3021, 0.6180)	<0.0001
γ_0	-0.6289	0.0668	(-0.7597, -0.4980)	<0.0001
γ_1	-0.1011	0.0935	(-0.2844, 0.0822)	0.2795
γ_2	-0.3968	0.0932	(-0.5795, -0.2141)	<0.0001
γ_3	0.0348	0.0956	(-0.1525, 0.2220)	0.7161

Umidade relativa



Umidade relativa

Tabela: Observações fora de controle e estatísticas descritivas conforme a estação.

Obs.	Data	Estação	Umidade relativa	Média	Mediana	Max.	D. P.
113	2016-08-30	Inverno	95.25	58.38	56.50	97.50	15.00
119	2016-09-05	Inverno	94.25				
463	2017-08-15	Inverno	97.50				
464	2017-08-16	Inverno	95.00				
27	2016-06-05	Outono	99.75	73.68	72.00	99.75	13.75
400	2017-06-13	Outono	99.50				
539	2017-10-30	Primavera	97.25	64.10	62.38	97.25	15.91
603	2018-01-02	Verão	97.75	75.31	76.12	97.75	10.75

- [1] BAYER, F. M.; TONDOLO, C. M.; MULLER, F. M. **Beta regression control chart for monitoring fractions and proportions.** Computers & Industrial Engineering, v. 119, p. 416–426, 2018.

- [2] BROWNLEE, K. A. **Statistical theory and methodology in science and engineering.** John Willey & Sons, Inc, 1965.

- [3] CHEN, G. **An improved p -chart through simple adjustments.** Journal of Quality Technology, v. 30, n. 2, p. 142-151, 1998.

- [4] DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied Regression Analysis.** John Willey & Sons, Inc, 1998.

- [5] JOEKES, S.; BARBOSA, E. P. **An improved attribute control chart for monitoring non-conforming proportion in high quality processes.** Control Engineering Practice, v. 21, n. 4, p. 407–412, 2013.
- [6] MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control.** 7th. ed. John Willey & Sons, Inc, 2013.
- [7] RYAN, T. P. **Statistical Methods for Quality Improvement.** New York, John Wiley & Sons, 1989.
- [8] SANT'ANNA, Â. M. O. **Ferramentas para modelagem e monitoramento de características de qualidade do tipo fração.** Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.
- [9] SANT'ANNA, Â. M. O.; CATEN, C. S. ten. **Beta control charts for monitoring fraction data.** Expert Systems with Applications, v. 39, n. 11, p. 10236–10243, 2012.