

## Análise do Artigo:

### “O uso do gráfico de controle $\bar{X}$ e $R$ no monitoramento do volume de envase de refrigerante”

André Felipe Berdusco Menezes

Departamento de Estatística, Universidade Estadual de Maringá  
Maringá, PR, Brasil

## 1 Introdução

O presente trabalho tem por objetivo realizar uma resenha crítica do artigo de Kappel e Rodrigues (2008) intitulado “O uso do gráfico de controle  $\bar{X}$  e  $R$  no monitoramento do volume de envase de refrigerante” publicado em 2008 na revista *FAMAT em revista*.

O artigo inicia com a discussão acerca das causas de variação que podem estar presentes em um processo de produção. Segundo os autores, existem duas causas de variação, sendo elas: causas especiais e causas comuns. Na terminologia de Montgomery (2013) os autores querem dizer que em um processo de produção as amostras (características) estão suscetíveis a causas inerentes (naturais) de variabilidade ou causas atribuíveis (conhecidas) de variabilidade. Nesse sentido, um processo que está operando apenas devido ao acaso é dito estar em controle estatístico.

O principal objetivo do artigo foi empregar técnicas de controle de qualidade, especificamente os gráficos de controle  $\bar{X}$  e  $R$ , para monitorar o processo de produção de refrigerantes da Indústria de Refrigerante Ltda (IRL) no que tange o volume de envase nas embalagens PET de 2 litros.

Segundo os autores o acompanhamento do volume de refrigerante no processo de envase é fundamental para evitar perdas por excesso, bem como apresentar volumes abaixo do nominal, isto é, aquele volume estipulado no rótulo. Tais fatos, podem causar multas por órgãos de fiscalização e insatisfação ou perda de clientes. Dessa forma, o controle estatístico de qualidade é imprescindível para acompanhar, fornecer suporte, manter um padrão e assegurar as características do produto final para o consumidor.

Para melhor organização a presente resenha foi dividida em três seções. Na seção 2, será discutida a forma em que os dados foram coletados, bem como a metodologia estatística empregada para analisá-los. Apresentação e discussão dos resultados obtidos são expostos na seção 3. A resenha finaliza com algumas considerações finais e alternativas ao artigo estudado.

## 2 Materiais e Métodos

### 2.1 Coleta dos dados

O conjunto de dados utilizados foram cedidos pela Indústria de Refrigerantes Ltda (IRL) de Uberaba-MG. A variável (característica) de interesse foi o volume de envase de refrigerantes em garrafas PET de 2 litros, na qual é obtida por uma máquina envasadora.

Conforme Montgomery (2013) o uso do gráfico de controle envolve aplicação da **fase I** e **fase II**. Na fase I um conjunto de dados é coletado e analisado afim de determinar os parâmetros do processo bem como limites de controle confiáveis. Para tal, é necessário que o processo esteja operando apenas devido ao acaso. Logo, se for detectada uma amostra fora de controle a mesma deve ser descartada ou então iniciar uma nova coleta. Na fase II o gráfico de controle é utilizado para monitorar o processo, comparando as estatísticas amostrais (média, amplitude e desvio-padrão) com o limites de controle estabelecidos na fase I.

No artigo, para a fase I foram coletadas  $m = 20$  amostras de tamanho  $n = 5$  com intervalos de  $t = 15$  minutos entre cada amostra. Já para a fase II, cujo o objetivo é avaliar o monitoramento futuro,  $m = 15$  amostras foram coletadas de tamanho  $n = 5$  e intervalos de  $t = 15$  minutos entre cada amostra.

### 2.2 Gráficos de controle

Assumindo que uma característica de qualidade  $X$  tem distribuição Normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , em que ambos  $\mu$  e  $\sigma$  são conhecidos. Seja  $x_1, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável  $X$ , então a média amostral

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

também tem distribuição Normal com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$ .

Na prática  $\mu$  e  $\sigma$  são desconhecidos, portanto devemos estima-los a partir de amostras preliminares retiradas quando o processo esta em controle. Suponha que  $m$  amostras estão disponíveis, cada uma contendo  $n$  observações da variável de interesse. Seja  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  a média de cada amostra. Logo, uma estimativa para  $\mu$  é dada por

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i. \quad (1)$$

Assim,  $\bar{\bar{x}}$  será utilizado como linha central (CL) no gráfico  $\bar{X}$ . A amplitude amostral é a diferença entre o maior e menor valor observado, isto é,  $R_i = x_{\max_i} - x_{\min_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Logo, o valor médio das amplitudes é dado por

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i \quad (2)$$

que será utilizado como linha central (CL) no gráfico  $\bar{R}$ .

Os limites de controle para o gráfico  $\bar{X}$  podem ser obtidos por dois métodos. Os autores utilizam o método  $3\text{-}\sigma$ , portanto os limites superior e inferior são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= \bar{\bar{x}} + 3 \frac{S_d}{\sqrt{n}} \\ \text{LCL} &= \bar{\bar{x}} - 3 \frac{S_d}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (3)$$

sendo que

$$S_d = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (4)$$

em que  $\bar{R}$  foi definido em (2) e  $d_2$  uma constante que depende do tamanho amostral, pode-se consultar o Apêndice VI do livro de Montgomery (2013) para obter os valores de  $d_2$ .

A variabilidade do processo foi monitorada utilizando as amplitudes amostrais. Segundo Montgomery (2013) os limites superior e inferior para o gráfico  $\bar{R}$ , são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \text{UCL} &= D_4 \bar{R} \\ \text{LCL} &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \quad (5)$$

em que  $D_3$  e  $D_4$  são constantes dependentes dos tamanhos amostra e que estão tabuladas no Apêndice VI do livro de Montgomery (2013).

## 2.3 Implementação computacional

Os autores conduziram as análise utilizando software Minitab. Em contrapartida, neste trabalho funções foram implementadas no ambiente estatístico R (R Core Team, 2016), e a biblioteca `ggplot2` (WICKHAM, 2009) foi empregada para construção dos gráficos de controle. Alternativamente, pode-se utilizar a biblioteca `qcc` (SCRUCCA, 2004) a qual contém recursos específicos para análise de dados de controle de qualidade.

## 3 Resultados

Inicialmente, foi verificado se é possível supor uma distribuição Normal para as médias das  $m$  amostras de ambas as fases I e II. Para tal, os testes de Kolmogorov-Smirnov (KS), Shapiro-Wilk (SW), Cramér-von-Mises (CvM) e Anderson-Darling (AD) foram uti-

lizados. Uma inspeção visual da normalidade dos dados foi empregada comparando as probabilidades empíricas com as teóricas (ver Figura 1). Pelos resultados apresentados na Tabela 1 temos evidências que os dados de ambas as fases seguem distribuição Normal. Tais resultados também são sustentados pelos PP-Plots da Figura 1.

Tabela 1: Estatísticas (valor- $p$ ) dos testes de aderência de acordo com a fase.

Teste	Fase I	Fase II
SW	0.9345 (0.1881)	0.9521 (0.5580)
KS	0.2198 (0.2887)	0.1429 (0.9195)
CvM	0.1224 (0.4893)	0.0497 (0.8851)
AD	0.6154 (0.6314)	0.3168 (0.9240)

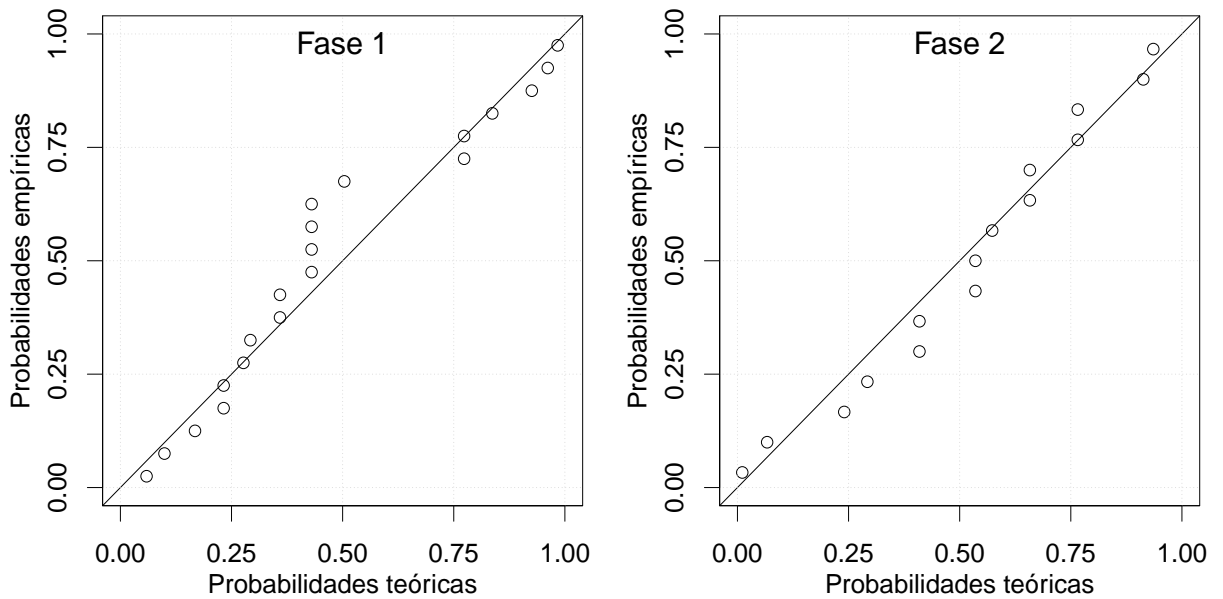


Figura 1: PP-Plots para avaliar a normalidade das médias das  $m$  amostras conforme as fases.

Para estimar os parâmetros do processo (média e desvio padrão) amostras preliminares foram retiradas e então pode-se determinar os limites de controle, supondo que as amostras não foram influenciadas por causas conhecidas. Na Figura 2 apresentam-se os gráficos de controle  $\bar{X}$  e  $R$  para o monitoramento do volume de envase na fase 1.

Observa-se que as amostras 1, 3, 11, 12 e 16 estão fora do limite de controle, indicando que o processo não está operando como deveria. Segundo os autores foi constatado que essas amostras foram influenciadas por causas conhecidas. Portanto, elas devem ser removidas para que o limite de controle seja estimado na presença apenas de causas inerentes ao processo.

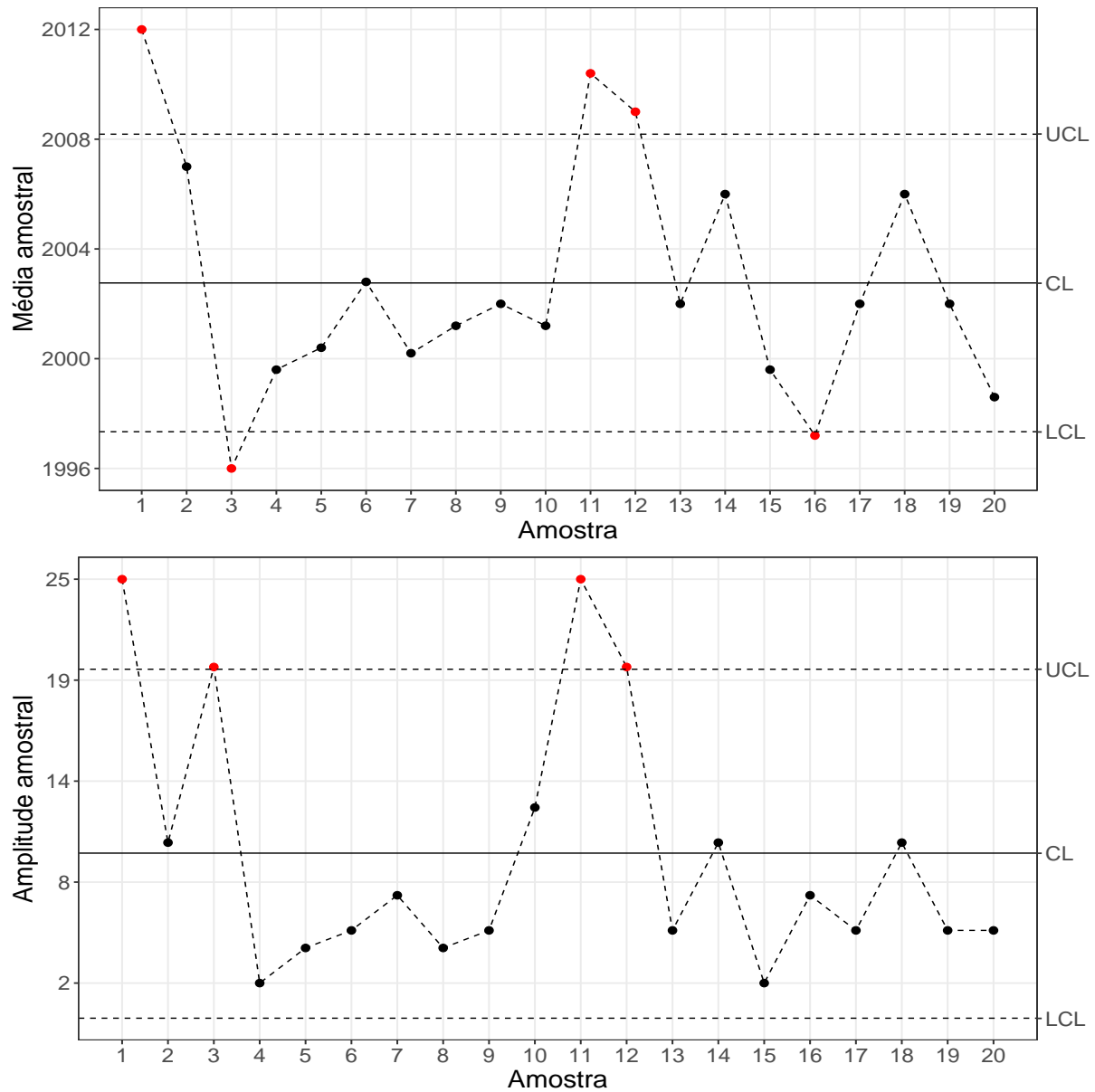


Figura 2: Gráficos de controle  $\bar{X}$  e  $R$  para o monitoramento do volume de envase, fase 1.

Os gráficos de controle  $\bar{X}$  e  $R$  após retirada das amostras influenciadas são apresentados na Figura 3. Verifica-se que as amostras 1, 10 e 13 estão fora dos limites, porém os autores argumentam que essas observações não foram afetadas por causas conhecidas. Embora o gráfico de controle  $\bar{X}$  não apresente um comportamento sistemático como existem pontos fora do limite, de acordo com Montgomery (2013) o processo ainda não está operando em controle, logo o recomendado seria coletar novas amostras. Como isso não foi realizado os autores continuaram as análises considerando o limite de controle para  $\bar{X}$  e  $R$  obtido nos gráficos da Figura 3.

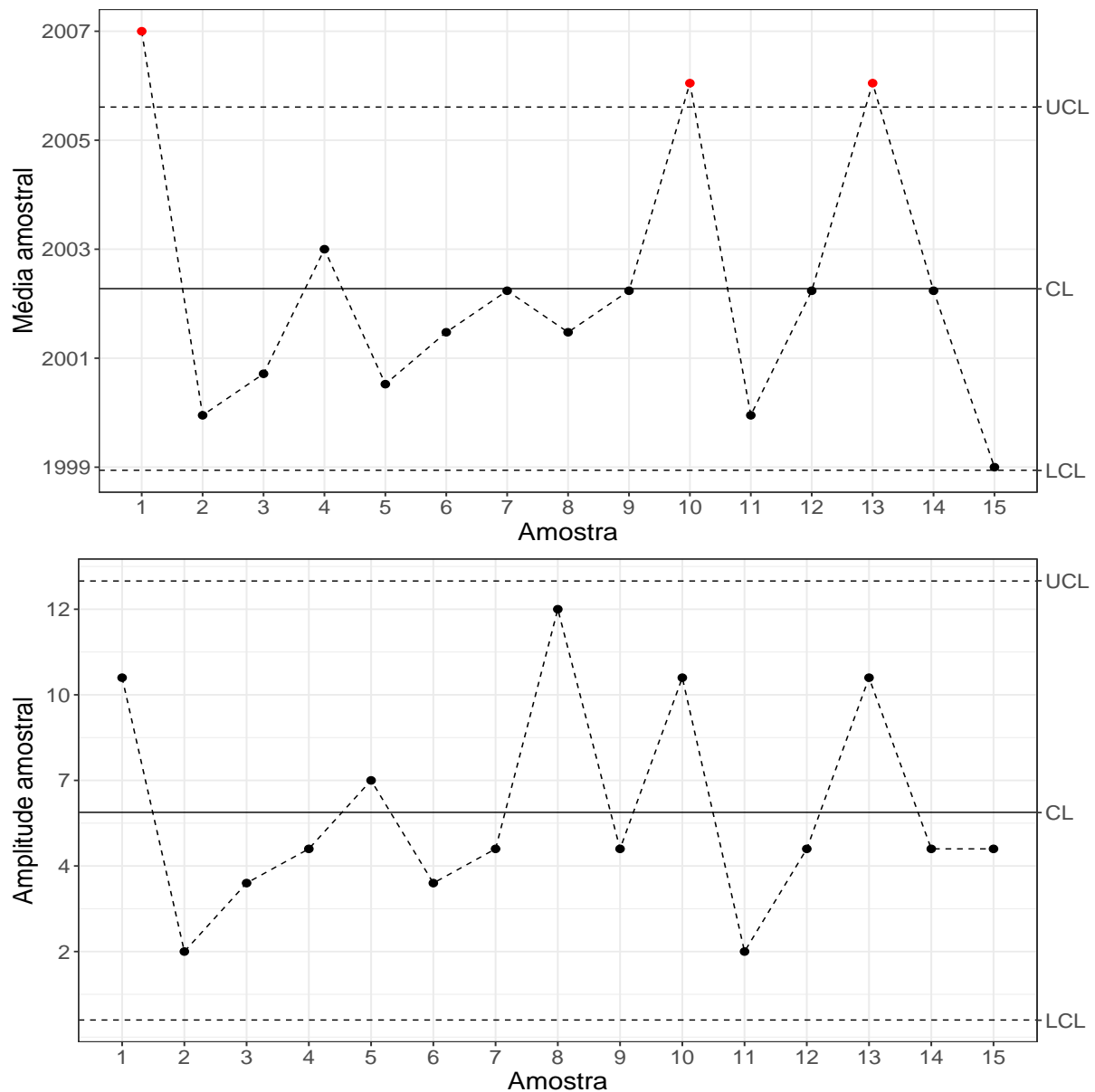


Figura 3: Gráficos de controle  $\bar{X}$  e  $R$  para o monitoramento do volume de envase após a eliminação, fase 1.

Considerando os limites de controle identificados na fase 1, então 15 amostras foram coletadas na fase 2 com intuito de monitorar o processo de envase. Na Figura 4 observa-se os gráficos de controle  $\bar{X}$  e  $R$ , sendo que a partir da linha vertical em azul apresentam-se as amostras de monitoramento. Pelo gráfico  $\bar{X}$  percebe-se que várias amostras estão fora do limite de controle indicando que o processo está fora de controle, isto é, houve alteração na média do processo devido a causas não inerentes. Na variabilidade pode-se observar o mesmo fato, uma vez que diversos pontos localizam-se fora do limite de controle do gráfico da amplitude. Segundo os autores as amostras 16 e 17 foram coletadas no início do turno o que pode ter afetado o processo.

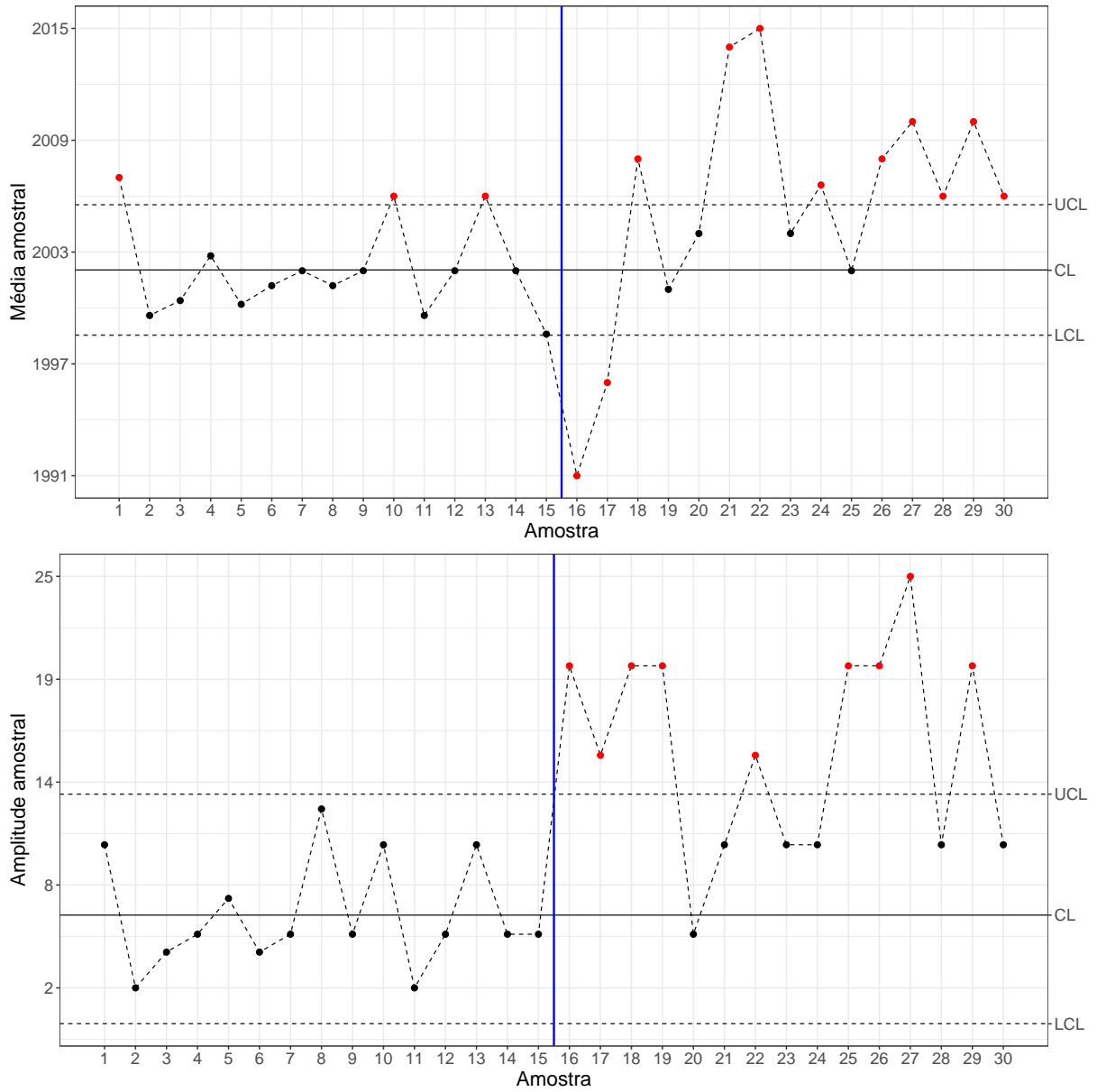


Figura 4: Gráficos de controle  $\bar{X}$  e  $R$  para o monitoramento do volume de envase, fase 2.

A habilidade do gráfico  $\bar{X}$  em detectar mudanças na qualidade do processo é descrita por sua curva característica de operação (MONTGOMERY, 2013). Tal curva é construída calculando a probabilidade teórica de não detectar uma mudança quando ela de fato existir, isto é, o erro do tipo II para diferentes mudanças expressas na unidade de desvio padrão.

Montgomery (2013) mostra que a probabilidade do erro tipo II em um processo  $3-\sigma$  é dada por

$$\beta = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n}) \quad (6)$$

em que  $L = 3$ ,  $k$  é a mudança na média,  $n$  o tamanho amostral e  $\Phi$  a distribuição acumulada da Normal padrão.

Na Figura 5 apresenta-se a curva característica de operação considerando diferentes

tamanhos amostrais e mudanças de 0 a 5 unidades de desvio padrão. Naturalmente, quanto maior o tamanho da amostra menor a probabilidade de não detectar uma mudança no processo quando de fato ela existir, isto é, maior o poder  $(1 - \beta)$ .

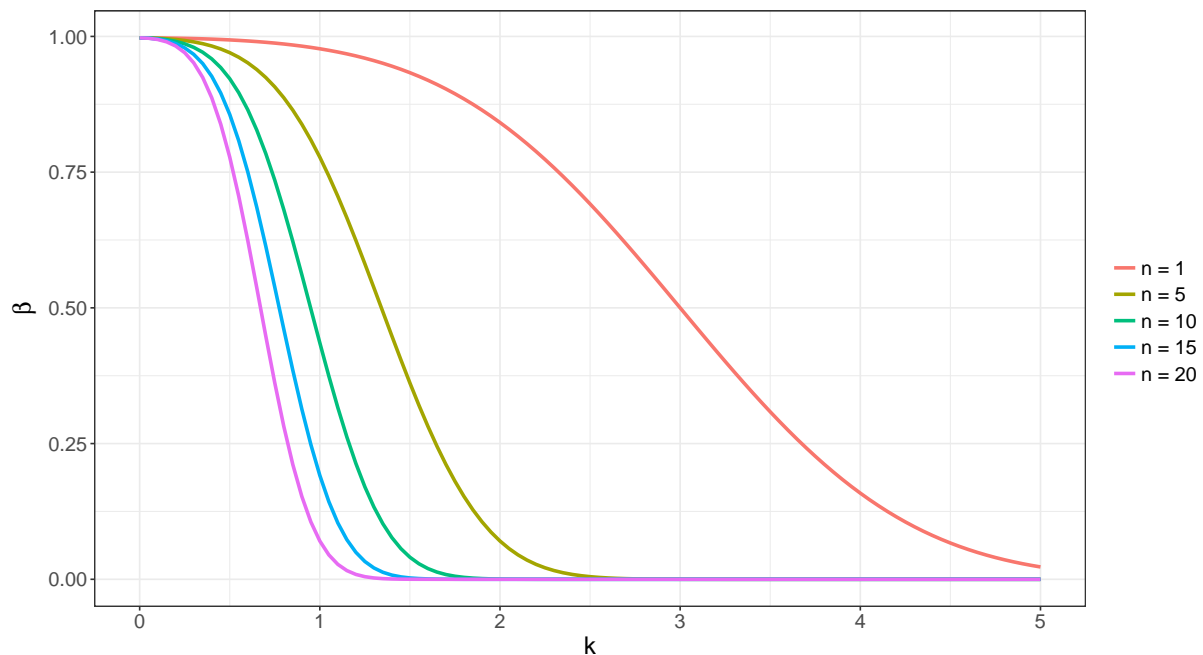


Figura 5: Curva característica de operação.

## 4 Considerações finais

Neste trabalho uma análise do artigo de Kappel e Rodrigues (2008) foi realizada. Os principais pontos levantados pelos autores foram discutidos e a análise foi refeita utilizando o software R.

Dentre os resultados discutidos destaca-se que (i) as amostras obtidas na fase 1, para estimação dos parâmetros do processo, não foi possível garantir que o processo estava em controle, portanto os limites obtidos não são confiáveis; (ii) das 15 amostras coletadas para a fase 2, de monitoramento, 10 estiveram fora do limite de controle, no entanto os autores não souberam explicar o motivo.

Por fim, para ilustrar a capacidade de detectar mudanças na qualidade do processo a curva característica de operação foi construída variando o tamanho amostral ( $n$ ) e a mudança na média do processo ( $k$ ).

## Referências

KAPPEL, M. A.; RODRIGUES, A. A. A. O uso do gráfico de controle  $\bar{X}$  e  $R$  no monitoramento do volume de envase de refrigerante. *FAMAT em Revista*, n. 10, p. 21–32, 2008.



MONTGOMERY, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*. Seventh Edition. John Wiley & Sons, Inc, 2013.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2016. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.

SCRUCCA, L. qcc: An R package for quality control charting and statistical process control. *R News*, v. 4/1, p. 11–17, 2004. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/doc/Rnews/>>.

WICKHAM, H. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York, 2009. ISBN 978-0-387-98140-6. Disponível em: <<http://ggplot2.org>>.