Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Estatística
Disciplina: 8067 – Estatística Computacional II
Professor: Dr. Josmar Mazucheli
Acadêmico: André Felipe B. Menezes

Métodos de Estimação para os Parâmetros da Distribuição Gama Inversa

Maringá
Agosto de 2016

Conteúdo

1 Distribuição Gama Inversa

A família de distribuições gama inversa ou gama invertida é bastante útil nas áreas de análise de sobrevivência, confiabilidade e inferência Bayesiana. Glen (2011) propõe a distribuição gama inversa como um modelo do tempo de vida no contexto de estudos em confiabilidade e sobrevivência. Por outro lado, Gelman (2006) mostra aplicações da distribuição gama inversa como sendo uma a priori não informativa. Alguns exemplos de aplicação da distribuição gama inversa são: teste de tempo de vida, problemas de controle de qualidade e tempo de falha de um determinado material (LIMA; FARIAS, 2013).

Entre as características marcantes da distribuição gama inversa está seu elevado grau de assimetria e curtose. Como bem específica Lima e Farias (2013), a distribuição gama inversa tem origem a partir da transformação recíproca de uma variável com distribuição pertencente a família de distribuições gama.

Dessa forma, considere que variável aleatória X tem distribuição gama com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta), \qquad x > 0. \tag{1}$$

Sendo que $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma e $\beta > 0$ é denominado parâmetro de escala (CASELLA; BERGER, 2011).

Assim a seguinte transformação de variável

$$Y = \frac{1}{X}. \tag{2}$$

define a distribuição gama inversa $GI(\alpha, \beta)$, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(y \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, y^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/y), \qquad x > 0. \tag{3}$$

De (3) temos que a função de distribuição acumulada da distribuição gama inversa é:

$$F(y \mid \alpha, \beta) = \int_0^y \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, u^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/u)\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha, \frac{\beta}{y})}{\Gamma(\alpha)} \tag{4}$$

Sendo que o numerador é a função gama incompleta superior e o denominador é a função gama.

Conforme o método da transformação inversa (RUBINSTEIN; KROESE, 2008, p. 51) valores pseudos aleatórios da distribuição gama inversa podem ser gerados a partir da equação.

$$y = F^{-1}(U \mid \alpha, \beta), \quad U \sim \mathit{Uniforme}(0, 1) \tag{5}$$

1.1 Implementação SAS®

Uma maneira alternativa de criar alguma distribuição de probabilidade não implementada pelo SAS® é via SAS/IML®. No que se refere a distribuição gama inversa (3) o seguinte código define as funções densidade (`d`), distribuição (`p`), quantil (`q`) e variate (`r`).

Código – SAS 1.1: Funções da Distribuição Gama Inversa

```
proc iml;
/*Funcao Densidade de Probabilidade*/
start dinvgama(x, alpha, beta);
        pdf = ((beta##alpha)/gamma(alpha)) # x##(-alpha - 1) #
           exp(-beta/x);
        return(pdf);
finish;
/*Funcao Distribuicao Acumulada*/
start pinvgama(q,alpha,beta);
        cdf = 1 - cdf("GAMMA",1/q,alpha,1/beta);
        return(cdf);
finish;
/*Funcao Quantil*/
start qinvgama(p,alpha,beta);
        qf      = 1/quantile("GAMMA",1-p,alpha,1/beta);
        return(qf);
finish;
/*Funcao Variate*/
start rinvgama(n,alpha,beta);
        aux     = j(n,1);
        call randgen(aux, "Gamma", alpha, 1/beta);
        rg      = 1/aux;
        return(rg);
finish;
quit;
```

1.2 Implementação R

Já no software R a família de funções `d`, `p`, `q`, `r` da distribuição gama inversa foi implementada com o código abaixo:

Código – R 1.1: Funções da Distribuição Gama Inversa

```r
# Funcao densidade de probabilidade
dinvgama <- function(x, alpha, beta){
  (beta^alpha)/gamma(alpha)*x^(-alpha - 1)*exp(-beta/x)
}

# Funcao distribuicao acumulada
pinvgama <- function(q, alpha, beta){
  1 - pgamma(1/q, alpha, beta)
}

# Funcao quantil
qinvgama <- function (p, alpha, beta) {
  1/qgamma(1 - p, alpha, beta)
}

# Funcao variate
rinvgama <- function(n, alpha, beta){
  1/rgamma(n, alpha, beta)
}
```

Na Figura 1 observamos os gráficos da função densidade (3) e função distribuição acumulada (4) da distribuição gama inversa para diferentes valores dos parâmetros α e β. Observa-se que a medida que α aumenta mais assimétrica a distribuição se torna.

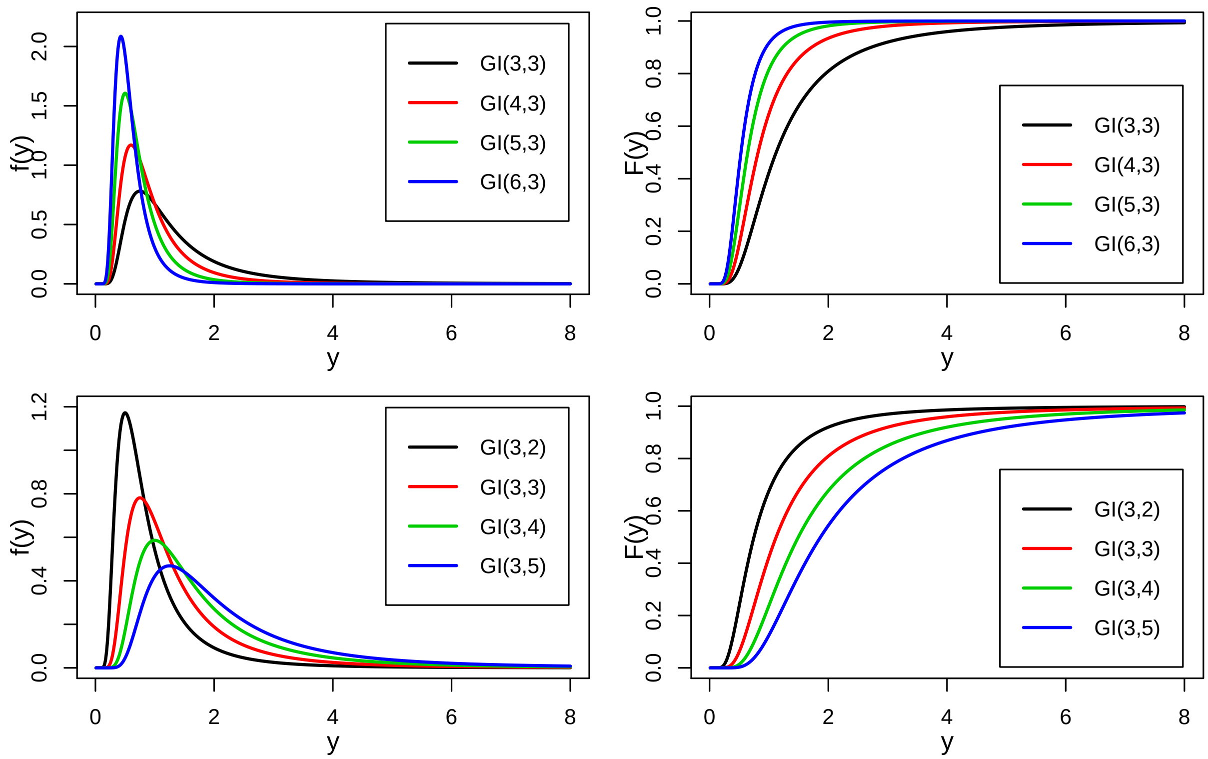

Figura 1: Função densidade de probabilidade e Função distribuição acumulada da distribuição gama inversa

2 Métodos de Estimação

Nesta seção serão apresentados cinco métodos de estimação para os parâmetros de distribuições de probabilidade. Esta seção está organizada com a explicação teórica dos métodos, a implementação computacional nos softwares SAS® e R e, ao final um exemplo com a distribuição gama inversa.

2.1 Máxima Verossimilhança (MLE)

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ um conjunto de observações provenientes de (3) a função de verossimilhança de $(\alpha,\, \beta)$ pode ser escrita na forma:

$$L(\alpha, \beta \mid \mathbf{y}) = \left(\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}\right) \prod_{i=1}^{n} (y_i)^{-(\alpha+1)} \tag{6}$$

Aplicando a função logarítmica em (6) têm-se a função log-verossimilhança:

$$l(\alpha, \beta \mid \mathbf{y}) = n\,\alpha\,\log(\beta) - n\,\log\left(\Gamma(\alpha)\right) - \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} - (\alpha+1) \sum_{i=1}^{n} \log(y_i) \tag{7}$$

Sabe-se que as estimativas de máxima verossimilhança são os valores de α, β que maximizam a função verossimilhança ou a função log-verossimilhança da amostra. Fazendo com que os dados observados sejam tão prováveis quanto possíveis. Assim os valores de $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ são as raízes do vetor gradiente, dado por:

$$U(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \mathbf{y}) = \begin{cases} n\,\log(\beta) - n\,\psi(\alpha) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log(y_i) \\ \dfrac{n\,\alpha}{\beta} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} \end{cases} \tag{8}$$

em que ψ é a função digama.

2.1.1 Implementação SAS®

Em relação ao software SAS® utilizamos duas formas para encontrar as estimativas de máxima verossimilhança de α e β. Por meio do SAS/IML® e via SAS-data-step utilizando a `proc nlp`.

No SAS/IML® a priori deve-se construir a função objetiva (7), determinar os valores inciais (`ini`), o suporte dos parâmetros (`sup`) a natureza do problema (`max`) e por fim, chamar (`call`) o procedimento **`nlpnra`**. As estimativas de α e β são guardadas na matriz **`res_mle`** e o número de iterações na matriz **`it`**.

Código – SAS 2.1: MLE

```
/*Via SAS/IML */
proc iml;
start MLE(par) global(x);
        alpha   = par[1];
        beta    = par[2];
        n       = nrow(x);
        l       = n#(alpha#log(beta) - log(gamma(alpha))) -
           beta#sum(1/x) - (alpha + 1)#sum(log(x));
        return (l);
finish;

call randseed(1515);
x = rinvgama(100,5,3);

sup = { 1e-10   1e-10,
        .       .};
ini = {5 3};
max = {1};
call nlpnra(it, res_mle, "MLE", ini, max, sup);
print it res_mle;
quit;

/*Via SAS-data-step*/
data simulados(keep=y);
        call streaminit(1515);
        do i=1 to 100;
                x = rand("Gamma",5,1/3);
                y = 1/x;
                output;
        end;
run;

proc nlp data=simulados tech=nrr;
        max ll;
        bounds alpha > 1e-10, beta > 1e-10;
        parms alpha=5, beta=3;
        ll = alpha*log(beta) + log(gamma(alpha)) - beta*(1/y) -
           (alpha+1)*log(y);
run;
```

2.1.2 Implementação R

No ambiente estatístico R existem milhares de funções para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança. Neste trabalho, optou-se por utilizar a função `optim` a qual minimiza ou maximiza a função objetiva. Além disso, utilizou-se também a função `fitdist` da biblioteca `fitdistrplus`.

Por meio da função `optim` é necessário informar a função objetiva, isto é, a log-verossimilhança (6), os valores iniciais para α e β, e a opção `control = list(fnscale=-1)` para determinar que a função `logLH` deve ser maximizada.

Por outro lado, via função `fitdist` é obrigatório existir as funções `d` e `p` da distribuição gama inversa e os valores iniciais para os parâmetros.

O código abaixo apresenta as estimativas de máxima verossimilhança de α e β para dados pseudos aleatórios da distribuição gama inversa:

Código – R 2.1: MLE

```
library(fitdistrplus)

logLH <- function(par, x){
  alpha <- par[1]
  beta <- par[2]
  n <- length(x)
  return(n*(alpha*log(beta) - log(gamma(alpha))) - beta*sum(1/x) -
     (alpha + 1)*sum(log(x)))
}

set.seed(1502)
y <- rinvgama(100, 5, 3)

optim(par = c(5, 3), fn = logLH, x=y, control = list(fnscale=-1))
fitdist(data = y, distr = "invgama", start = c(5, 3), method =
   "mle")
```

2.2 Produto Máximo de Espaçamento (MPS)

Considerado um método alternativo a máxima verossimilhança, o método do produto máximo de espaçamento (*maximum product of spacing*) de acordo com Mazucheli, Ghitany e Louzada (2016) foi desenvolvido por Cheng e Amin em 1979. O MPS busca encontrar a função de distribuição acumulada tal que os espaçamentos sejam aproximadamente com o mesmo comprimento, para isso deve-se maximizar a média geométrica dos espaçamentos (D_i).

Dessa forma, dada uma amostra aleatória $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de (3), sejam $y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots, y_{(n)}$ a amostra correspondente ordenada. Definimos os espaçamentos uniformes sendo:

$$D_i(\alpha, \beta) = F(y_{(i)} \mid \alpha, \beta) - F(y_{(i-1)} \mid \alpha, \beta), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

em que $F(y_{(0)} \mid \alpha, \beta) = 0$ e $F(y_{(n+1)} \mid \alpha, \beta) = 1$.

Portanto, conforme definem Cheng e Amin (1979) o estimador de espaçamento máximo de α e β são os valores que maximizam a média geométrica dos espaçamentos, isto é:

$$G(\alpha, \beta) = \left(\prod_{i=1}^{n+1} D_i(\alpha, \beta) \right)^{\dfrac{1}{n+1}} \tag{10}$$

No qual é equivalente a maximizar o logaritmo da média geométrica (10):

$$H(\alpha, \beta) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \log D_i(\alpha, \beta) \tag{11}$$

Os autores explicam que em virtude da transformação uniformizante (*probability integral transform*) os "espaçamentos" entre cada observação devem ser uniformemente distribuídos. Isso implica que a diferença entre os valores da função de distribuição acumulada em observações consecutivas devem ser iguais.

2.2.1 Implementação SAS®

É possível via SAS/IML® implementarmos a função (11) e maximiza-lá utilizando. No código abaixo temos sua implementação e um exemplo.

Código – SAS 2.2: MPS

```
proc iml;
start MPS(par) global(x);
        call sort(x);
        alpha = par[1];
        beta = par[2];
        xin  = {0} // x;
        n = nrow(xin);
        i1 = 2:n;
        i2 = 1:(n-1);
        Di = pinvgama(xin[i1], alpha, beta) - pinvgama(xin[i2],
           alpha, beta);
        G = (1/(n+1)) # sum(log(Di));
        return(G);
finish;

/*Exemplo*/
call randseed(1515);
x = rinvgama(100,2,3); /*Simulando Dados*/

sup = { 0   0,
        .   .};
ini = {2 3};
max = {1};
call nlpnra(it, res_mps, "MPS", ini, max, sup);
print it res_mps;
quit;
```

2.2.2 Implementação R

A implementação do MPS no `R` foi realizada escrevendo a função (11) e por meio da função `optim` maximizando a função `MPS`. Note que na função MPS é necessário informar a função de distribuição acumulada (`p`).

Código – R 2.2: MPS

```
MPS <- function(par, x, p){
  xin <- sort(x)
  n <- length(xin)
  Di <- diff(c(0, p(xin, par[1], par[2]),1))
  H <- (1/(n+1)) * sum(log(Di))
  return(H)
}

set.seed(1502)
y <- rinvgama(100, 5, 3)

optim(par = c(5, 3), fn = MPS, p=pinvgama, x=y, control =
   list(fnscale=-1))
```

2.3 Método dos Percentis (PCE)

Conforme Gupta e Kundu (2001) este método foi explorado inicialmente por Kao em 1958 na estimação dos parâmetros da distribuição Weibull.

Em sua essência o método dos percentis procura minimizar a diferença entre os percentis amostrais $(y_{(i)})$ e os percentis teóricos.

Considere que p_i seja um estimador para $F(y_{(i)} \mid \alpha, \beta)$ (4), então as estimativas pelo método dos percentis de α e β podem ser encontradas minimizando a função:

$$P(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_{(i)} - F^{-1}\left(p_i \mid \alpha, \beta\right) \right)^2 \tag{12}$$

em que $p_i = \dfrac{i}{n+1}$ e $F^{-1}(p_i \mid \alpha, \beta)$ é dado em (5).

A distribuição gama inversa não possui função quantil com forma explicita, isso em alguns casos pode levar a complicações em relação a este método.

2.3.1 Implementação SAS®

É possível com auxílio do SAS/IML® implementarmos o método dos percentis. Na sequência o código com um exemplo prático:

Código – SAS 2.3: PCE

```
proc iml;
start PCE(par) global(x);
        call sort(x);
        alpha = par[1];
        beta = par[2];
        n = nrow(x);
        i = 1:n;
        pi = i/(n+1);
        P = sum((t(x) - qinvgama(pi,alpha,beta))##2);
        return(P);
finish;

/*Exemplo*/
call randseed(1515);
x = rinvgama(100,2,3);

sup = { 0   0,
        .   .};
ini = {2 3};
min = {0};
call nlpnra(it, res_pce, "PCE", ini, min, sup);
print it res_pce;
quit;
```

2.3.2 Implementação R

O método dos percentis pode ser implementado no R escrevendo a função (12) e minimizando ela por meio do `optim`. Ressalta-se, que a função `PCE` é genérica, isto é, para qualquer distribuição, uma vez que o parâmetro `q` determina a função quantil da distribuição de probabilidade.

Código – R 2.3: PCE

```
PCE <- function(par, x, q){
  xin <- sort(x)
  n <- length(xin)
  i <- 1:n
  pi <- i / (n+1)
  P <- sum((xin - q(pi, par[1], par[2]))^2)
  return(P)
}

set.seed(1502)
y <- rinvgama(100, 5, 3)

optim(par = c(5, 3), fn = PCE, x=y, q=qinvgama)
```

2.4 Mínimos Quadrados Ordinários (OLS)

Originalmente proposto por Swain, Venkatraman e Wilson (1988) para estimar os parâmetros da distribuição beta, o método dos mínimos quadrados faz uso da função de distribuição acumulada das estatísticas de ordem, isto é, $F(Y_{(i)})$. Conforme Larson (1974, p. 355), para uma amostra de tamanho n temos que $F(Y_{(i)}) \sim Beta(i, n-i+1)$. Dessa forma, têm-se que:

$$\mathbb{E}\left(F(Y_{(i)})\right) = \frac{i}{n+1}, \qquad \text{Var}\left(F(Y_{(i)})\right) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)} \tag{13}$$

Portanto, encontramos as estimativas de mínimos quadrados ordinários de α e β minimizando a função:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(F(y_{(i)} \mid \alpha, \beta) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \tag{14}$$

em que $F(y_{(i)} \mid \alpha, \beta)$ é a função de distribuição acumulada (4) aplicada na amostra ordenada.

2.4.1 Implementação SAS®

Assim como os outros métodos, o método dos mínimos quadrados ordinários pode ser implementado no SAS/IML®. A implementação juntamente com um exemplo é apresentada no código abaixo:

Código – SAS 2.4: OLS

```
OLS <- function(par, x, p){
  xin <- sort(x)
  n <- length(xin)
  i <- 1:n
  S <- sum(((p(xin, par[1], par[2])) - i/(n+1))^2)
  return(S)
}

set.seed(1502)
y <- rinvgama(50, 5, 3)

optim(par = c(5, 3), fn = OLS, x=y, p=pinvgama)
```

2.4.2 Implementação R

De maneira semelhante ao método dos percentis, o método dos mínimos quadrados ordinários pode ser implementado no `R`, escrevendo a função (14) e minimizando-a com auxilio da função `optim`.

Código – R 2.4: OLS

```
OLS <- function(par, x, p){
  xin <- sort(x)
  n <- length(xin)
  i <- 1:n
  S <- sum(((p(xin, par[1], par[2])) - i/(n+1))^2)
  return(S)
}

set.seed(1502)
y <- rinvgama(50, 5, 3)

optim(par = c(5, 3), fn = OLS, x=y, p=pinvgama)
```

2.5 Mínimos Quadrados Ponderados (WLS)

Em contrapartida ao OLS, o método de mínimos quadrados ponderados, atribui um "peso" para cada observação. Ou seja, cada observação será ponderada com sua respectiva variância.

Dessa forma, encontra-se as estimativas de mínimos quadrados ponderados minimizando a função:

$$W(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)} \left(F(y_{(i)} \mid \alpha, \beta) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \tag{15}$$

sendo $F(y_{(i)} \mid \alpha, \beta)$ a função de distribuição acumulada (4) aplicada na amostra ordenada.

2.5.1 Implementação SAS®

Da mesma forma que os demais métodos o WLS pode ser implementado no SAS/IML®. Abaixo apresenta-se o código juntamente com um exemplo.

Código – SAS 2.5: WLS

```
WLS <- function(par, x, p){
  xin <- sort(x)
  n <- length(xin)
  i <- 1:n
  W <- sum(i*(n-i+1)/((n+1)^2*(n+2))*((p(xin,par[1],
     par[2]))-i/(n+1))^2)
  return(W)
}

set.seed(1502)
y <- rinvgama(50, 5, 3)

optim(par = c(5, 3), fn = WLS, x=y, p=pinvgama)
```

2.5.2 Implementação R

Analogamente ao OLS o método do mínimos quadrados ponderados é implementado no ambiente estatístico `R` escrevendo a função (15) e minimizando-a por meio da função `optim`.

Código – R 2.5: WLS

```
WLS <- function(par, x, p){
  xin <- sort(x)
  n <- length(xin)
  i <- 1:n
  W <- sum(i*(n-i+1)/((n+1)^2*(n+2))*((p(xin,par[1],
     par[2]))-i/(n+1))^2)
  return(W)
}

set.seed(1502)
y <- rinvgama(50, 5, 3)

optim(par = c(5, 3), fn = WLS, x=y, p=pinvgama)
```

3 Estudo de Simulação

Nesta seção apresentaremos os resultados do estudo de simulação Monte Carlo, cujo objetivo foi comparar os métodos de estimação discutidos nas seções anteriores em termos de tendenciosidade e consistência.

Este estudo foi conduzido variando o tamanho amostral, $n = 10, 20, 40, 60, 80$ e 100, o parâmetro de escala $\alpha = 1, 2, 3$ e 4 e fixado o parâmetro de forma $\beta = 1$ da distribuição gama inversa (3).

Para cada cenário (n, α, β) foram simuladas $B = 10000$ amostras pseudas aleatórias da distribuição gama inversa, pelo método discutido em (5). Toda simulação foi desenvolvida no ambiente estatístico R e com auxilio da função `optim` e dos métodos implementados nas seções anteriores.

Como o intuito é verificar as propriedades assintóticas de tendenciosidade e consistência dos métodos de estimação, foram calculados os vícios e erros quadráticos médios das estimativas dos parâmetros (α e β), conforme as equações 16 e 17 respectivamente.

$$\mathcal{B}(\widehat{\alpha}) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\widehat{\alpha}_i - \alpha), \quad \mathcal{B}(\widehat{\beta}) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\widehat{\beta}_i - \beta) \tag{16}$$

$$\text{EQM}(\widehat{\alpha}) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\widehat{\alpha}_i - \alpha)^2, \quad \text{EQM}(\widehat{\beta}) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\widehat{\beta}_i - \beta)^2 \tag{17}$$

Nas Figuras 2 à 5 são apresentados os comportamentos assintóticos dos vícios ($\mathcal{B}$) e erros quadráticos médios (EQM) de α e β para os diferentes cenários e métodos de estimação.

Em relação ao vicio de α, observa-se pela Figura 2, que os métodos MLE, OLS e WLS são assintoticamente não viesados em todos os cenários. Em contrapartida, os métodos MPS e PCE são assintoticamente viesados negativamente, isto é, em média os estimadores não atingem o verdadeiro valor do parâmetro.

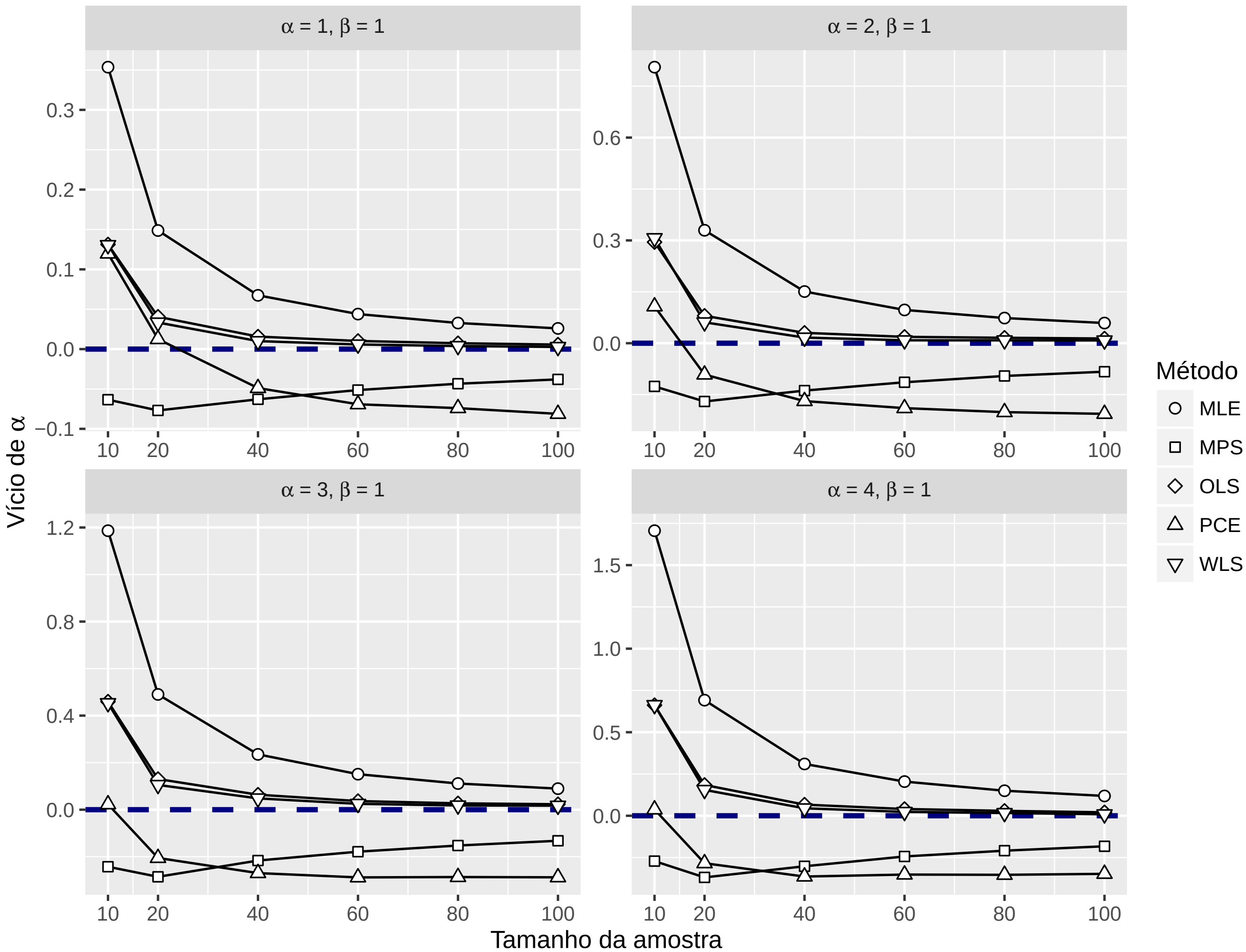

Figura 2: Vícios estimados de α

Verifica-se na Figura 3 que, embora os métodos MLE, OLS e WLS sejam assintoticamente não viesados em termos de β, os métodos de mínimos quadrados (OLS e WLS) atingem mais rapidamente a não tendenciosidade comparado ao MLE. Ressalta-se que o método PCE é viesado positivamente quando $\alpha = \beta = 1$, no entanto, à medida que α se afasta de β ele se torna viesado negativamente.

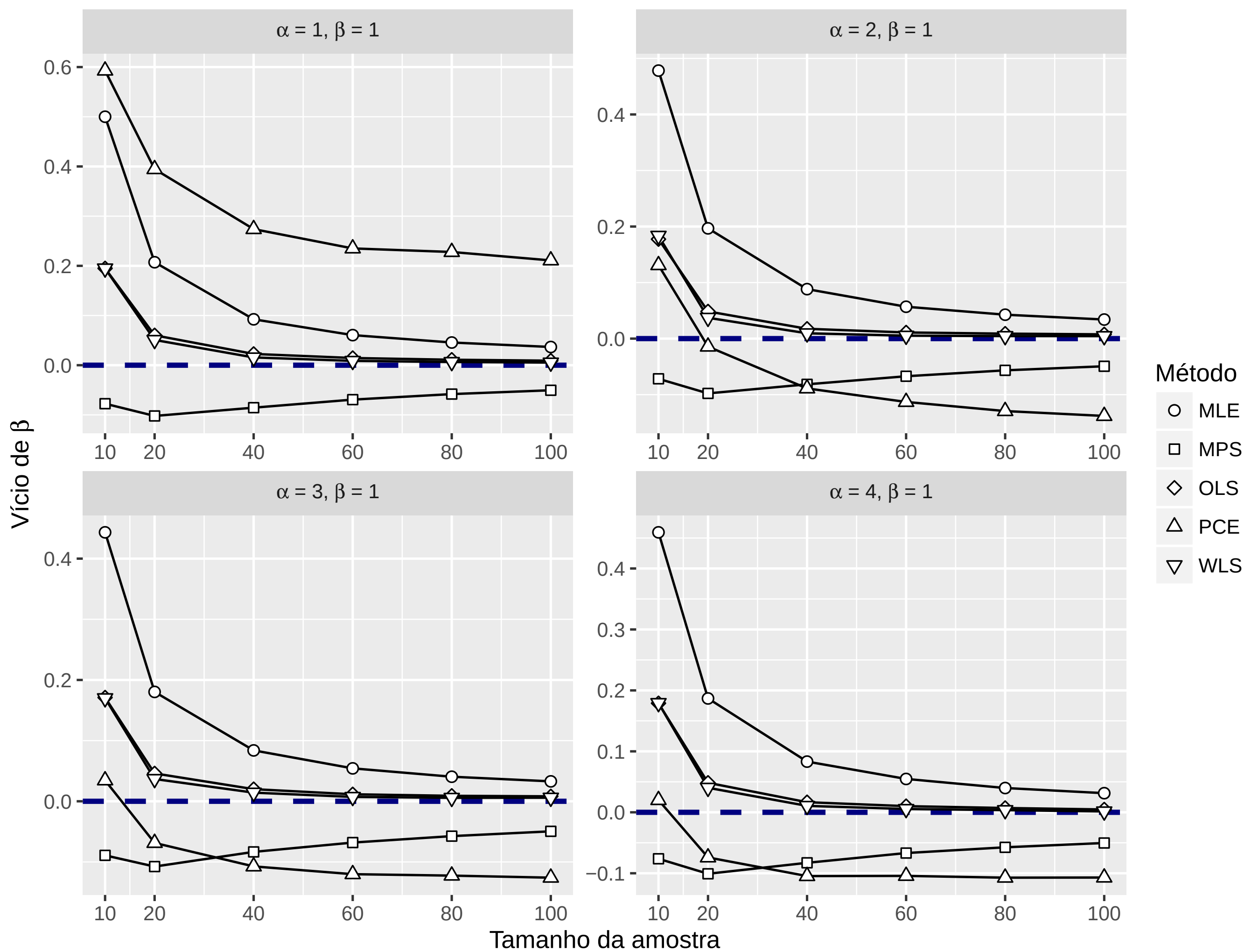

Figura 3: Vícios estimados de β

No que tange a consistência dos métodos de estimação em termos de α, pode-se observar pela Figura 4 que todos os métodos possuem a propriedade de consistência, isto é, conforme o tamanho da amostra aumenta a distribuição amostral dos estimadores torna-se cada vez mais concentrada no verdadeiro valor do parâmetro.

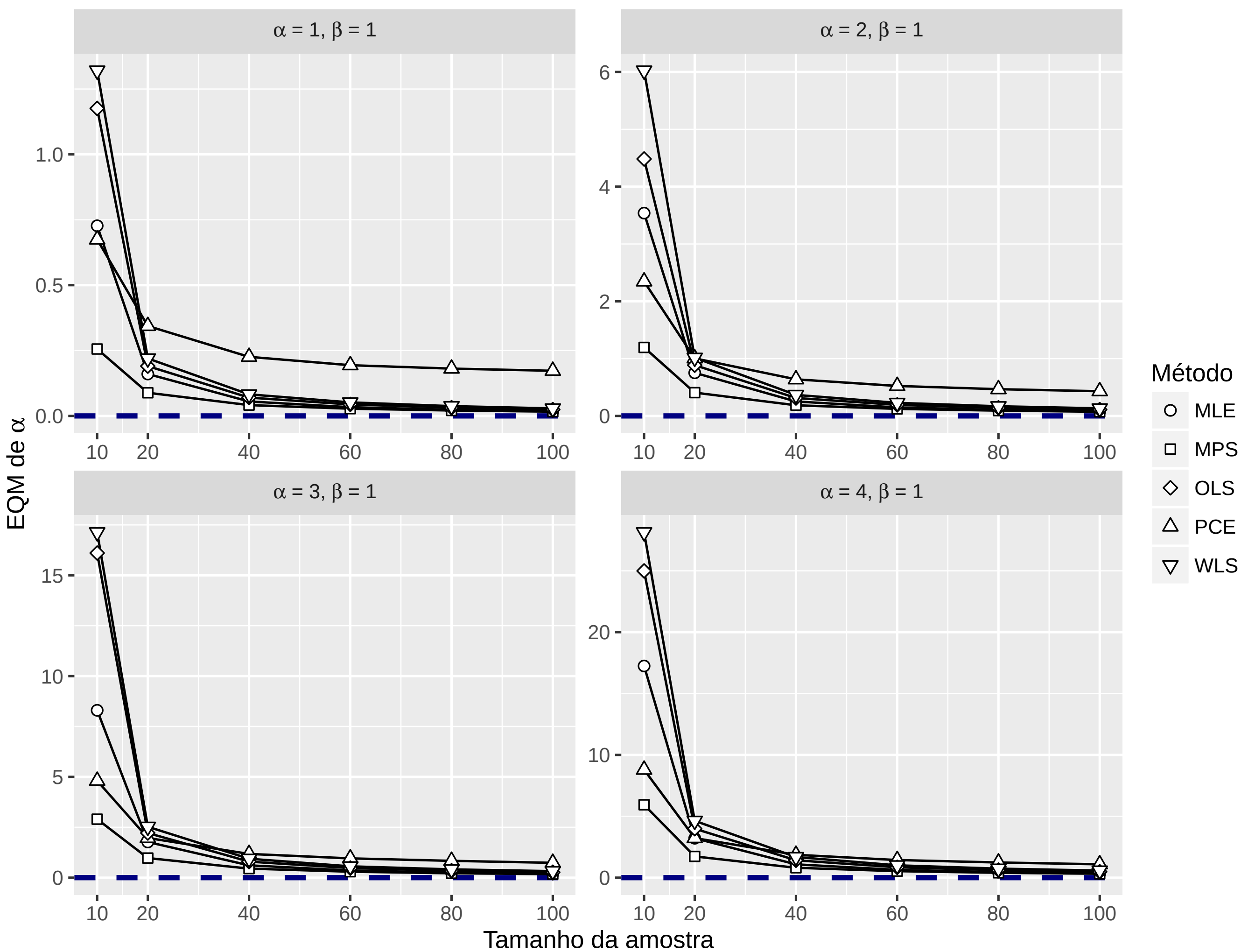

Figura 4: Erros quadráticos médios estimados de α

Observa-se na Figura 5 que os métodos MLE, MPS, OLS e WLS são consistentes. Por outro lado, percebe-se no método PCE os efeitos do parâmetro α nos erros quadráticos de β, ou seja, a medida que α se distância de β o estimador PCE se torna um estimador consistente para β.

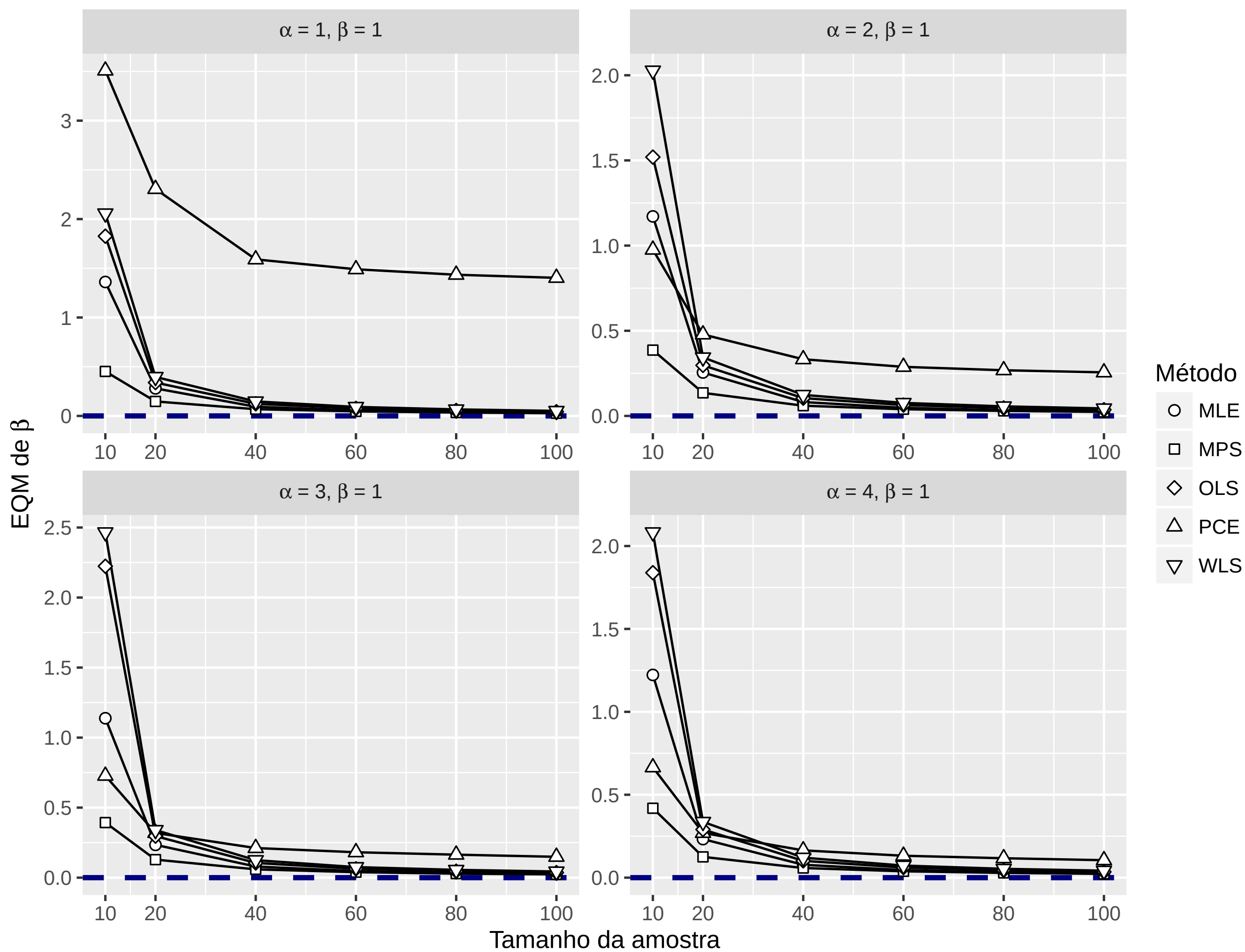

Figura 5: Erros quadráticos médios estimados de β

Referências

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. [S.l.: s.n.], 2011.

CHENG, R.; AMIN, N. **Maximum product of spacings estimation with application to the lognormal distribution**. 1979. 79–1 p.

GELMAN, A. et al. **Prior distributions for variance parameters in hierarchical models (comment on article by Browne and Draper)**. [S.l.]: International Society for Bayesian Analysis, 2006. 515–534 p.

GLEN, A. G. **On the inverse gamma as a survival distribution.** [S.l.]: J Qual Technol, 2011.

GUPTA, R. D.; KUNDU, D. **Generalized exponential distribution: different method of estimations**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2001. 315–337 p.

KAO, J. H. **Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies**. [S.l.]: IEEE, 1958. 15–22 p.

LARSON, J. H. **Introduction to Probability Theory and Statistical Inference**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1974.

LIMA, K.; FARIAS, R. **Distribuição Gama Inversa: conceitos e propriedades**. 2013. Acesso em: 05 de agosto de 2016. Disponível em: ⟨http://www.rbras.org.br/rbras58/sites/default/files/submissoes⟩.

MAZUCHELI, J.; GHITANY, M.; LOUZADA, F. **Comparisons of Ten Estimation Methods for the Parameters of Marshall-Olkin Extended Exponential Distribution**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2016.

RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. **Simulation and the Monte Carlo method**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 707.

SWAIN, J. J.; VENKATRAMAN, S.; WILSON, J. R. **Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1988. 271–297 p.