

Universidade Estadual de Maringá

Departamento de Estatística

Centro de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Projeto de Iniciação Científica
Correções do Viés dos EMV Via a Biblioteca mle.tools

Prof. Dr. Josmar Mazucheli (DEs/UEM) — Orientador
André Felipe Berdusco Menezes (DEs/UEM) — Acadêmico

Maringá, 31 de julho de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS
DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA — PIBIC/CNPq-
FUNDAÇÃO ARAUCÁRIA — UEM
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
ORIENTADOR: PROF. DR. JOSMAR MAZUCHELI
BOLSISTA: ANDRÉ FELIPE BERDUSCO MENEZES
(DEs/UEM)

Correções do Viés dos EMV Via a Biblioteca mle.tools

Relatório contendo os resultados finais do projeto de iniciação científica vinculado ao PIBIC/CNPq-FUNDAÇÃO

Maringá, 31 de julho de 2018

Resumo

A estimação de parâmetros a partir do método da máxima verossimilhança seguramente é a técnica mais utilizada nas diversas áreas da estatística. Este método desfruta de muitas propriedades importantes que não são compartilhadas com outros métodos de estimação. Todavia, algumas propriedades dependem essencialmente do tamanho da amostra — amostras pequenas geralmente fornecem estimativas viesadas. Devido a esta razão, existem na literatura diversas metodologias para a obtenção de estimativas próximas de serem não viesadas. Neste projeto são consideradas três metodologias usadas na correção/redução do vício dos estimadores de máxima verossimilhança, sendo elas as propostas de Cox e Snell (1968), Efron (1982) e Firth (1993). Outro aspecto importante do método da máxima verossimilhança é determinar a precisão das estimativas, a qual é obtida por meio das matrizes informação de Fisher esperada ou observada. Neste relatório apresentamos uma revisão teórica dos três principais métodos de correção de vício dos estimadores de máxima verossimilhança. Discutimos também um método alternativo para dedução da informação de Fisher baseado na função de risco. Considerando a distribuição unit-Gamma apresentamos, pela primeira vez, a dedução dos vícios utilizando a metodologia de Cox-Snell. Um estudo de simulação foi conduzido para averiguar o desempenho dos estimadores propostos, onde foi possível verificar que de fato os estimadores com correção de viés são bastante eficientes e superam os estimadores não corrigidos em termos de vício e consistência. Ademais, mostramos a eficiência da biblioteca **mle.tools** para estimar o vício usando a fórmula de Cox-Snell e para calcular a informação de Fisher esperada e observada.

Palavras Chave: Estimadores de máxima verossimilhança, informação de Fisher, correção de viés, teoria assintótica, distribuições de probabilidade.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 6 |
| 2 | Inferência via verossimilhança | 7 |
| 2.1 | Informação de Fisher em termos da função de risco | 9 |
| 3 | Métodos para correção do vício dos EMV | 9 |
| 3.1 | Correção de Vício Analítica de Cox e Snell | 9 |
| 3.2 | Correção de Vício de Firth | 10 |
| 3.3 | Correção de Vício Bootstrap Paramétrico | 11 |
| 4 | Resultados | 12 |
| 4.1 | Distribuição unit-Gamma | 12 |
| 4.2 | Biblioteca mle.tools | 20 |
| 4.2.1 | Estudo Comparativo | 22 |
| 4.2.2 | Aplicação em dados reais | 44 |
| 5 | Conclusão | 46 |

1 Introdução

Desde que foi proposto por Fisher em uma série de artigos durante o período de 1912 a 1934 o método da máxima verossimilhança tem sido empregado em diversos problemas no contexto da inferência estatística, uma vez que os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) possuem propriedades desejáveis e podem ser utilizados na construção de intervalos ou regiões de confiança e também em estatísticas de testes. Por exemplo, os EMV são assintoticamente não viciados, eficientes, consistentes, invariante sob transformação e assintoticamente com distribuição Normal (EDWARDS, 1992; LEHMANN, 1999).

Contudo, nota-se que as propriedades estatísticas que fazem dos EMV atraentes, em sua maioria, são propriedades assintóticas, isto é, são válidas para grandes amostras. Assim, propriedades como a não tendenciosidade, podem não ser atendida para amostras pequenas ou moderadas (KAY, 1995). De fato, os EMV possuem um vício de ordem $\mathcal{O}(n^{-1})$, em que n é tamanho da amostra, logo esse vício reduz a medida que a amostra aumenta.

Na literatura existem alguns métodos para correção de viés de segunda ordem. A abordagem mais usual para correção de viés foi proposta por Cox e Snell (1968) e consiste em subtrair os EMV da expressão analítica do viés obtida através de uma expansão de segunda de Taylor sob o vetor escore. Uma abordagem preventiva para correção do vício dos EMV foi introduzida por Firth (1993) e consiste em uma transformação sob o vetor escore. Além disso, outro método alternativo é a obtenção do(s) vício(s) através do método *Bootstrap* (EFRON, 1982; DAVISON; HINKLEY, 1997).

Aplicando as abordagens mencionadas para correção de vício, em específico a metodologia corretiva de Cox-Snell, muitos pesquisadores derivaram estimadores quase não viciados para os parâmetros de várias distribuições de probabilidade. Podemos mencionar os seguintes trabalhos: Cordeiro et al. (1997), Cribari-Neto e Vasconcellos (2002), Saha e Paul (2005), Lemonte, Cribari-Neto e Vasconcellos (2007), Giles e Feng (2009), Lagos-Álvarez, Jiménez-Gamero e Alba-Fernández (2011), Lemonte (2011), Giles (2012a), Giles (2012b), Schwartz, Godwin e Giles (2013), Giles, Feng e Godwin (2013), Teimouri e Nadarajah (2013), Ling e Giles (2014), Zhang e Liu (2015), Singh, Singh e Murphy (2015), Teimouri e Nadarajah (2016), Schwartz e Giles (2016), Wang e Wang (2017), Mazucheli, Menezes e Dey (2017), Reath, Dong e Wang (2018), Mazucheli e Dey (2018) e Mazucheli, Menezes e Dey (2018).

Outro aspecto relevante da teoria da verossimilhança é determinar a matriz de covariância dos EMV, uma vez que, a partir dela obtemos a acurácia dos EMV, bem como possibilita a aplicação de alguns testes de hipóteses. As duas formas usuais para estimar a matriz de covariância são: via inversa da matriz informação de Fisher observada (\mathbf{H}^{-1}) ou inversa da matriz informação de Fisher esperada (\mathbf{I}^{-1}) (LEHMANN; CASELLA, 1998).

A matriz \mathbf{H} é dada pelo negativo da matriz hessiana, isto é, o negativo das segundas derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros, já a matriz \mathbf{I} é obtida calculando a esperança de \mathbf{H} em termos da distribuição da variável, condicionada aos parâmetros.

Neste projeto de iniciação científica apresentamos uma revisão teórica dos três principais métodos de correção de vício dos estimadores de máxima verossimilhança. Apresenta-se também um método alternativo para obtenção da informação de Fisher esperada o qual baseia-se na função de risco. Além disso, mostramos a eficiência da biblioteca **mle.tools** para estimar o vício usando a fórmula de Cox-Snell e para calcular a informação de Fisher esperada e observada.

Na Seção 2 introduzimos alguns conceitos da função de verossimilhança e a estimação por máxima verossimilhança. Algumas propriedades importantes dos estimadores de máxima verossimilhança também são destacadas. Apresenta-se também o método alternativo proposto por (EFRON; JOHNSTONE, 1990a) para o cálculo da informação de Fisher esperada. Na Seção 3 discutimos a teoria dos três métodos de correção de vício estudados. Exemplos da aplicação dos métodos de correção de vícios são apresentados e discutidos na seção 4. Ilustramos também a eficiência da biblioteca **mle.tools** para o cálculo do viés bem como da informação de Fisher.

2 Inferência via verossimilhança

A ciência estatística procura entender e descrever a incerteza presente em uma população ou fenômeno a partir de uma amostra aleatória. Supõe-se então que exista um mecanismo estocástico gerador dos dados no qual é descrito através de um modelo probabilístico, representado por uma distribuição de probabilidade na qual é tipicamente indexada por quantidades fixas e desconhecidas denominadas parâmetros. A inferência estatística é realizada sob tais parâmetros utilizando-se dos dados previamente coletados. Como aponta Cordeiro e Cribari-Neto (2014), ao realizar inferências sob os parâmetros do modelo fazemos inferência sobre o modelo e, portanto, sobre o fenômeno que supostamente ele descreve.

Assumindo um modelo estatístico parametrizado por um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top$ fixo e constante, a função de verossimilhança, $L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x})$, é uma medida de plausibilidade com a amostra observada \mathbf{x} , tendo como propósito transmitir informações dos dados sobre $\boldsymbol{\theta}$. Vamos supor que $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ é uma amostra independente e identicamente distribuída de uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x \mid \boldsymbol{\theta})$ indexada pelo vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Então a função de verossimilhança é

definida por

$$L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i \mid \boldsymbol{\theta}). \quad (1)$$

Dizemos que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é um estimador de máxima verossimilhança (EMV) de $\boldsymbol{\theta}$ se $L(\hat{\boldsymbol{\theta}} \mid \mathbf{x}) \geq L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}), \forall \boldsymbol{\theta}$. Uma vez que a função logaritmo é monótona crescente por questões de conveniência computacional lidamos com a função de log-verossimilhança, $\ell(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}) = \log L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x})$, pois ambas levam ao mesmo ponto de máximo.

A primeira derivada da função de log-verossimilhança com respeito a $\boldsymbol{\theta}_j, j = 1, \dots, p$ é denominada de função escore de Fisher. É possível mostrar que

$$\mathbb{E} \left[\frac{d}{d\boldsymbol{\theta}_j} \ell(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}) \right] = 0$$

isto é, a função escore tem média zero. Note que a função escore é um vetor de primeiras derivadas parciais, uma para cada elemento de $\boldsymbol{\theta}$. Se a função log-verossimilhança é côncava, pode-se encontrar o EMV $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ igualando a função escore a zero e resolvendo o sistemas de equações.

Outra quantidade importante presente na teoria da verossimilhança é a matriz informação de Fisher esperada, definida por

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_j \partial \boldsymbol{\theta}_k} \log f(x \mid \boldsymbol{\theta}) \right] \quad (2)$$

para $j, k = 1, \dots, p$.

O inconveniente de se trabalhar com \mathbf{I} é a dificuldade de obter uma expressão analítica para a esperança. Sob certas condições de regularidades, expostas em Lehmann e Casella (1998), a matriz informação de Fisher observada, definida por

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_j \partial \boldsymbol{\theta}_k} \log f(x_i \mid \boldsymbol{\theta}), \quad (3)$$

é um estimador consistente de $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$. Ressalta-se que o conceito de informação esta associado a curvatura da função de verossimilhança sendo que quanto maior a curvatura mais precisa é a informação contida na verossimilhança.

Uma importante propriedade do EMV é a invariância. Isto é, seja $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ um EMV de $\boldsymbol{\theta}$ e seja $g(\cdot)$ uma função monótona, então, $g(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ é um EMV de $g(\boldsymbol{\theta})$. Os EMV também desfrutam de propriedades assintóticas. Por exemplo, os EMV são consistente, isto é, conforme o tamanho da amostra aumenta a distribuição amostral dos estimadores torna-se cada vez mais concentrada no verdadeiro valor do parâmetro. Além disso, os EMVs são assintoticamente não viciados e eficientes.

Por fim, outra imprescindível propriedade esta relacionada a distribuição assintótica dos EMV. A distribuição assintótica do EMV $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é tal que

$$\sqrt{n} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right) \xrightarrow{D} N \left(0, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \right)$$

em que \xrightarrow{D} denota convergência em distribuição e $\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ é a inversa da matriz informação de Fisher esperada. Para a demonstração e discussão mais detalhada dessas e outras propriedades indicamos o livro de Cox e Hinkley (1979).

2.1 Informação de Fisher em termos da função de risco

Como discutido anteriormente a informação de Fisher é de fundamental importância na teoria clássica da estatística, sendo obtida por meio da primeira e segunda derivadas da função log-verossimilhança. Por outro lado, a função de risco (ou taxa de falha) desempenha um papel fundamental no contexto da análise de sobrevivência ou confiabilidade e diversos fenômenos são descritos por ela. Assim, uma vez que a função densidade e a função de risco são equivalentes, para identificação de uma população, podemos pensar que essas funções podem ser trocadas no cálculo da informação de Fisher. De fato, Efron e Johnstone (1990b) mostraram que a informação de Fisher $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ pode ser expressa em termos da função de risco da seguinte forma:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E} \left[-\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}_j \partial \boldsymbol{\theta}_k} \log h(x | \boldsymbol{\theta}) \right] \quad (4)$$

em que $h(x | \boldsymbol{\theta})$ é a função de risco da variável aleatória X , definida como $h(x | \boldsymbol{\theta}) = -\frac{d}{dx} \log [S(x | \boldsymbol{\theta})]$, sendo que $S(x | \boldsymbol{\theta})$ é a função de sobrevivência de X .

3 Métodos para correção do vício dos EMV

3.1 Correção de Vício Analítica de Cox e Snell

Considere que $\ell = \ell(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{x})$ denote a função de log-verossimilhança de um vetor de parâmetros p -dimensional baseado em uma amostra $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$. Devemos assumir as condições de regularidade apresentadas em Cox e Hinkley (1979) a respeito do comportamento da função de log-verossimilhança.

Os cumulantes conjuntos das derivadas de ℓ são dados por

$$\mathbf{I}_{ij} = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j} \right], \quad \mathbf{I}_{ijl} = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j \partial \boldsymbol{\theta}_l} \right] \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{ij,l} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j} \right) \left(\frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}_l} \right) \right]$$

para $i, j, l = 1, \dots, p$. Assumimos que todas expressões acima são da ordem $\mathcal{O}(n)$.

Cox e Snell (1968) mostraram que quando os dados são independentes, porém não necessariamente identicamente distribuídos, o vício do r -ésimo elemento do EMV de $\boldsymbol{\theta}$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, pode ser expresso como

$$\mathcal{B}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_r) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \mathbf{I}^{ri} \mathbf{I}^{jl} [0.5 \mathbf{I}_{ijl} + \mathbf{I}_{ij,l}] + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad (5)$$

em que $r = 1, \dots, p$ e \mathbf{I}^{ij} denota o (i, j) -ésimo elemento da inversa da matriz informação de Fisher esperada.

Posteriormente, Cordeiro e Klein (1994) perceberam que a equação (5) é válida mesmo que os dados não sejam independentes, e pode ser re-escrita como

$$\mathcal{B}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_r) = \sum_{i=1}^p \mathbf{I}^{si} \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \left[\mathbf{I}_{ij}^{(l)} - 0.5 \mathbf{I}_{ijl} \right] \mathbf{I}^{jl} + \mathcal{O}(n^{-2}). \quad (6)$$

Definindo $a_{ij}^{(l)} = \mathbf{I}_{ij}^{(l)} - 0.5 \mathbf{I}_{ijl}$, $A^{(l)} = \{a_{ij}^{(l)}\}$ e $K = [-\mathbf{I}_{ij}]$, a matriz informação de Fisher esperada para $i, j, l = 1, \dots, n$, a expressão do vício para $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ em notação matricial é dada por

$$\mathcal{B}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = K^{-1} \text{Avec}(K^{-1}) + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad (7)$$

em que $\text{vec}(K^{-1})$ é o vetor obtido empilhando as colunas de K^{-1} e $A = \{A^1 \mid \dots \mid A^p\}$.

Finalmente, o EMV com correção de viés para $\boldsymbol{\theta}_r$ pode ser obtido por

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_r = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_r - \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_r). \quad (8)$$

Alternativamente, usando notação matricial, o EMV com correção de viés pode ser expresso como

$$\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}} - \widehat{K}^{-1} \widehat{A} \text{vec}(\widehat{K}^{-1}), \quad (9)$$

em que $\widehat{K} = K|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}$ e $\widehat{A} = A|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}$.

3.2 Correção de Vício de Firth

Uma diferente abordagem que pode ser utilizada para obtenção de estimadores corrigidos até segunda ordem foi introduzida por Firth (1993). Este método consiste em

transformar a função escore $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ antes de obter as estimativas de máxima verossimilhança. A função escore modificada é definida como

$$\mathbf{U}^*(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (10)$$

em que $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz informação de Fisher esperada e $\mathcal{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ é o vetor de vício de segunda ordem definido em (5).

Em particular, quando a matriz informação de Fisher esperada $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ coincide com a matriz informação de Fisher observada $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ os estimadores com correção de viés podem ser obtidos maximizando a função de log-verossimilhança modificada expressa por

$$\ell^* = \ell + \frac{1}{2} \log |\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})|. \quad (11)$$

em que $|\cdot|$ denota o determinante.

Destaca-se que o método proposto por Firth (1993) é considerado na literatura como “preventivo” ao invés de “corretivo”, uma vez que modifica a função escore (ou, a função de log-verossimilhança) para produzir um estimador modificado.

3.3 Correção de Vício Bootstrap Paramétrico

Uma abordagem alternativa a correção de vício analítica é baseada no método de reamostragem Bootstrap introduzido por Efron (1982) e discutida em detalhes nos livros Efron e Tibshirani (1993) e Davison e Hinkley (1997). Neste método a correção de vício é obtida numericamente sem envolver expressões analíticas. De fato, os estimadores com correção de vício Bootstrap paramétrico (PBE, acrônimo em inglês) utilizam os EMVs dos dados para gerar amostras pseudo aleatórias da distribuição, estimar o vício e depois subtrair o vício das estimativas obtidas.

A estimativa Bootstrap para o vício de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é definida como

$$\hat{\mathcal{B}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(j)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (12)$$

em que B é o número de amostras Bootstrap e $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(j)}$ é o EMV de $\boldsymbol{\theta}$ obtido da j -ésima amostra Bootstrap. Logo, o estimador com correção de viés Bootstrap é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{PBE} = 2\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(j)}. \quad (13)$$

Para uma discussão entre a relação dos métodos de correção analítica de Cox e Snell (1968) e o método Bootstrap referimos o trabalho de Ferrari e Cribari-Neto (1998).

4 Resultados

Nas seguintes subseções apresento dois trabalhos realizados durante o projeto. No primeiro derivamos as correções analíticas de Cox e Snell (1968) para o vício dos parâmetros da distribuição unit-Gamma. Um estudo de simulação foi conduzido para avaliar a performance dos estimadores propostos. Já na segunda subseção apresentamos as funcionalidades e a eficiência da biblioteca **mle.tools** para obtenção do vício dos EMV, bem como para o cálculo da informação de Fisher esperada e observada.

4.1 Distribuição unit-Gamma

Seja X uma variável não negativa com distribuição Gamma, então sua função densidade de probabilidade (f.d.p.) é dada por

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (14)$$

em que $\Gamma(u) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$ é a função gamma completa, $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma e $\beta > 0$ é o parâmetro de taxa. Ao considerar a transformação

$$Y = e^{-X} \quad (15)$$

Grassia (1977) derivaram uma nova distribuição a qual foi denominada por Ratnaparkhl e Mosimann (1990) de distribuição unit-Gamma (UG), uma vez que seu suporte se encontra no intervalo unitário $(0, 1)$.

A f.d.p. de Y é definida por

$$f(y \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\beta-1} (-\log y)^{\alpha-1} \quad (16)$$

em que $0 < y < 1$ e $\alpha, \beta > 0$ são parâmetros de forma. A f.d.p. da UG inclui a forma de sino ($\alpha > 1$ e $\beta > 1$), formato de J (invertido ou reverso), formato triangular e formato de U . Na Figura 4.1 exibimos algumas formas da f.d.p. da distribuição UG considerando diferentes valores para α e β .

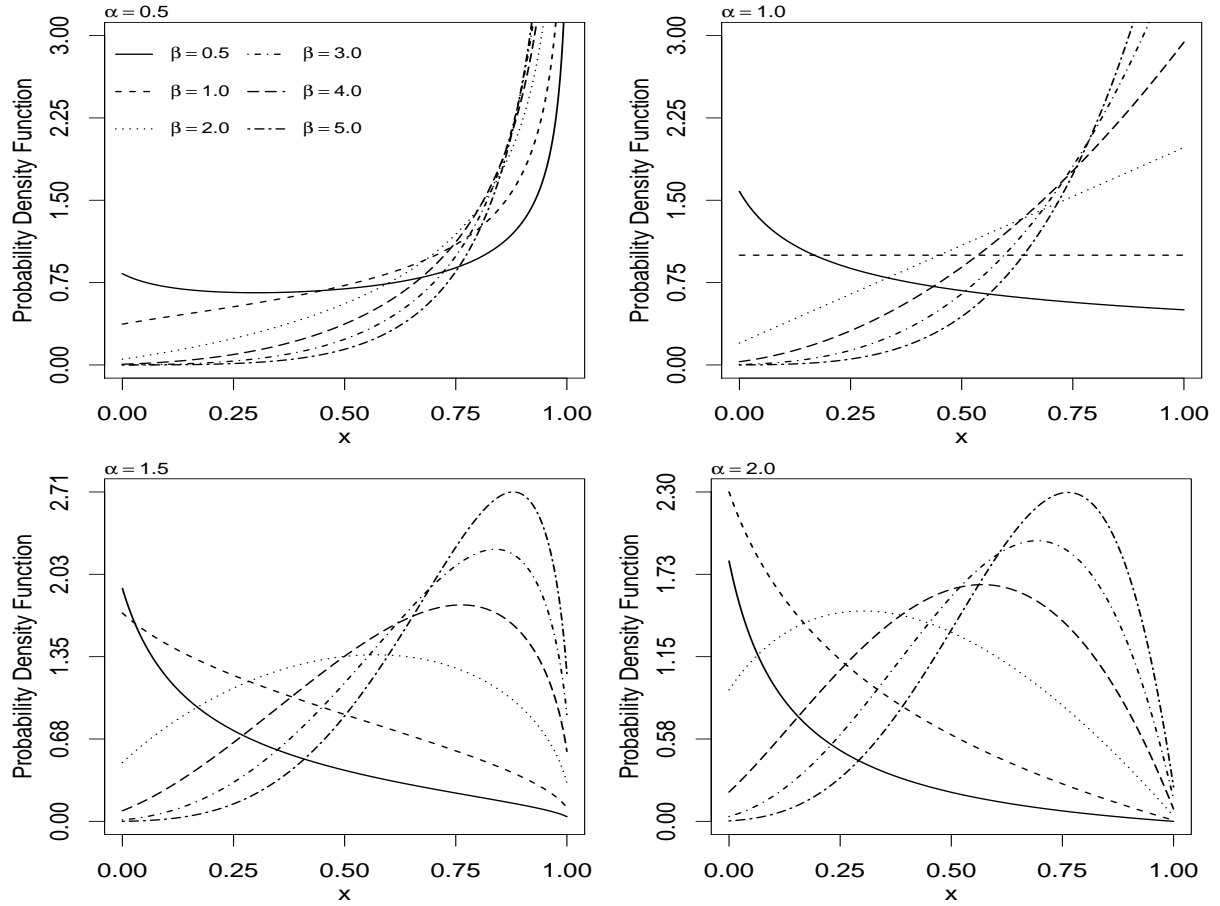


Figura 1: Função densidade de probabilidade da distribuição unit-Gamma para diferentes valores de α e β .

Apesar da sua flexibilidade a distribuição UG foi pouco explorada na literatura estatística. Tadikamalla (1981) em seu trabalho apontou que a distribuição UG pode ser uma alternativa as distribuições Beta e Johnson S_B . Ele também investigou algumas de suas propriedades matemáticas. Ratnaparkhi e Mosimann (1990) estudaram as transformações logarítmicas e lambda de Tukey sobre a distribuição unit-Gamma.

Vamos considerar que $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ seja uma amostra aleatória de (16), a função de log-verossimilhança, sem termos constantes, pode ser expressa como

$$\ell(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) \propto n\alpha \log \beta - n \log \Gamma(\alpha) + \beta \sum_{i=1}^n y_i + \alpha \sum_{i=1}^n \log(-\log y_i) \quad (17)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$. Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ de α e β , respectivamente podem ser obtidos pela maximização numérica de (14), ou equivalentemente

resolvendo o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} \ell(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) &= n \log \beta - n \psi(\alpha) + \sum_{i=1}^n \log(-\log y_i) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \ell(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) &= \frac{n \beta}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log y_i\end{aligned}$$

em que $\psi(\cdot)$ denota a função digamma, definida como $\psi(u) = \frac{d}{du} \log \Gamma(u)$.

A matriz de informação de Fisher esperada da distribuição unit-Gamma é dada por

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = n \begin{bmatrix} \psi'(\alpha) & \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

e sua correspondente inversa é

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\psi'(\alpha) \alpha - 1} & \frac{\beta}{\psi'(\alpha) \alpha - 1} \\ \frac{\beta}{\psi'(\alpha) \alpha - 1} & \frac{\psi'(\alpha) \beta^2}{\psi'(\alpha) \alpha - 1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

em que $\psi'(\cdot)$ denota a função trigamma, definida como $\psi'(u) = \frac{d}{du} \psi(u)$.

De (18) notamos que α e β não são ortogonais, o que significa que os EMVs, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, não são assintoticamente independentes. Também é interessante notar que a informação de Fisher esperada coincide com a observada.

Utilizando a formula geral (5) introduzida por Cox e Snell (1968) e considerando a distribuição unit-Gamma, obtemos, após extensas manipulações algébricas, os seguintes cumulantes

- $\mathbf{I}_{111} = \frac{2 n \alpha}{\beta^3},$
- $\mathbf{I}_{112} = \mathbf{I}_{121} = \mathbf{I}_{211} = -\frac{n}{\beta^2},$
- $\mathbf{I}_{222} = -n \psi''(\alpha).$

em que $\psi''(\cdot)$ denota a função tetragamma, definida como $\psi''(u) = \frac{d}{du} \psi'(u)$. Uma vez que a matriz informação de Fisher é independente dos dados, todos os outros termos utilizados em (5) são iguais a zero.

Substituindo os cumulantes em (5), obtemos explicitamente os vieses de segunda ordem

dos estimadores de máxima verossimilhança de α e β , definidos como

$$\mathcal{B}(\hat{\alpha}) = \frac{0.5 \alpha \psi'(\alpha) - 0.5 \alpha^2 \psi''(\alpha) - 1}{n [\alpha \psi'(\alpha) - 1]^2} \quad (20)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\beta}) = \frac{\beta [\alpha(\psi'(\alpha))^2 - 1.5 \psi'(\alpha) - 0.5 \alpha \psi''(\alpha)]}{n [\alpha \psi'(\alpha) - 1]^2}. \quad (21)$$

Assim, utilizando (20) e (21), definimos os estimadores com correção de viés (BCE, acrônimo em inglês) como

$$\hat{\alpha}_{BCE} = \hat{\alpha} - \hat{\mathcal{B}}(\hat{\alpha}) \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_{BCE} = \hat{\beta} - \hat{\mathcal{B}}(\hat{\beta}).$$

Um estudo de simulação Monte Carlo foi conduzido com o intuito de avaliar a performance dos estimadores com correção de viés obtida pela metodologia de Cox-Snell (BCE) e pelo método Bootstrap paramétrico (PBE). O experimento de Monte Carlo foi repetido $M = 10.000$ considerando os tamanhos amostrais $n = 10, 20, 30, 40$ e 50 e os seguintes valores para os parâmetros $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5$ e 2.0 e $\beta = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ e 5.0 . Para cada combinação de (n, α, β) geramos X com distribuição Gamma e aplicamos a transformação $Y = e^{-X}$. O número de réplicas Bootstrap foi fixado em $B = 1000$. A performance foi avaliada por meio de duas critérios, o viés e a raiz quadrada do erro quadrático médio, cujas expressões são

$$\text{Vício}(\hat{\theta}) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\hat{\theta}_j - \theta), \quad \text{RMSE}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\hat{\theta}_j - \theta)^2}.$$

Todo o estudo foi conduzido no Ox Console (DOORNIK, 2007) e a função `MaxBFGS` foi utilizada para obtenção das estimativas de máxima verossimilhança. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 1 a 4.

Na Tabela 1, observamos que os MLE de β são altamente viesados, enquanto que para α , o viés é moderado, particularmente quando o tamanho da amostra é pequeno. Por exemplo, para $n = 10, \alpha = 0.5$ e $\beta = 0.5$ o vieses dos MLEs de α e β são 0.151 e 0.305, respectivamente. Em contrapartida, considerando o mesmo cenário observamos que os estimadores propostos claramente superam os MLE, em que o viés de α_{BCE} , α_{PBE} , β_{BCE} e β_{PBE} são -0.006, -0.153, -0.0001 e -0.058, respectivamente. Resultados similares também são observados nas Tabelas 2, 3 e 4. De fato, esses estimadores conseguem uma redução substancial do viés, especialmente em pequenas amostras e portanto eles são boas alternativas na estimação dos parâmetros da distribuição unit-Gamma. Embora os estimadores propostos são bastante eficientes, é importante destacar que na correção por meio das expressões analíticas de Cox-Snell não é necessário esforço computacional.

Além disso, a raiz quadrada do erro quadrático médio das estimativas corrigidas é menor do que o estimativas não corrigidas. Assim, é notório que os estimadores corrigidos também realizam uma redução no RMSE.

Tabela 1: Estimativas do viés (raiz quadrada do erro quadrático médio) para β e α , ($\alpha = 0.5$).

| β | n | Estimadores de β | | | Estimadores de α | | |
|---------|-----|------------------------|----------------|----------------|-------------------------|----------------|----------------|
| | | MLE | BCE | PBE | MLE | BCE | PBE |
| 0.5 | 10 | 0.305 (0.732) | -0.006 (0.448) | -0.153 (0.391) | 0.151 (0.371) | -0.000 (0.243) | -0.058 (0.209) |
| | 20 | 0.120 (0.316) | -0.005 (0.242) | -0.030 (0.236) | 0.060 (0.178) | -0.002 (0.145) | -0.013 (0.141) |
| | 30 | 0.078 (0.227) | -0.001 (0.189) | -0.011 (0.186) | 0.040 (0.132) | 0.000 (0.115) | -0.004 (0.114) |
| | 40 | 0.056 (0.181) | -0.001 (0.157) | -0.006 (0.156) | 0.029 (0.107) | -0.000 (0.097) | -0.003 (0.096) |
| | 50 | 0.045 (0.155) | 0.000 (0.138) | -0.003 (0.137) | 0.023 (0.094) | 0.000 (0.086) | -0.001 (0.085) |
| 1.0 | 10 | 0.614 (1.400) | -0.010 (0.842) | -0.303 (0.744) | 0.152 (0.371) | 0.001 (0.243) | -0.057 (0.210) |
| | 20 | 0.255 (0.649) | 0.003 (0.495) | -0.048 (0.480) | 0.065 (0.182) | 0.002 (0.147) | -0.009 (0.143) |
| | 30 | 0.158 (0.456) | 0.001 (0.379) | -0.019 (0.374) | 0.041 (0.132) | 0.001 (0.114) | -0.003 (0.113) |
| | 40 | 0.113 (0.367) | -0.001 (0.319) | -0.012 (0.317) | 0.030 (0.108) | 0.000 (0.097) | -0.002 (0.096) |
| | 50 | 0.087 (0.312) | -0.003 (0.279) | -0.009 (0.278) | 0.023 (0.093) | 0.000 (0.085) | -0.001 (0.085) |
| 2.0 | 10 | 1.258 (3.002) | 0.001 (1.826) | -0.594 (1.587) | 0.150 (0.371) | -0.001 (0.244) | -0.059 (0.210) |
| | 20 | 0.506 (1.306) | 0.003 (0.998) | -0.098 (0.970) | 0.062 (0.176) | -0.001 (0.143) | -0.011 (0.140) |
| | 30 | 0.320 (0.933) | 0.006 (0.775) | -0.035 (0.765) | 0.039 (0.131) | -0.001 (0.114) | -0.005 (0.113) |
| | 40 | 0.240 (0.747) | 0.011 (0.646) | -0.010 (0.641) | 0.030 (0.107) | 0.000 (0.096) | -0.002 (0.096) |
| | 50 | 0.190 (0.635) | 0.010 (0.563) | -0.003 (0.561) | 0.023 (0.093) | -0.000 (0.085) | -0.001 (0.085) |
| 3.0 | 10 | 1.901 (4.459) | 0.012 (2.703) | -0.881 (2.329) | 0.152 (0.380) | 0.000 (0.250) | -0.057 (0.215) |
| | 20 | 0.773 (1.955) | 0.016 (1.488) | -0.137 (1.443) | 0.064 (0.180) | 0.001 (0.145) | -0.010 (0.142) |
| | 30 | 0.479 (1.366) | 0.008 (1.131) | -0.052 (1.117) | 0.040 (0.131) | 0.001 (0.114) | -0.004 (0.113) |
| | 40 | 0.342 (1.085) | 0.000 (0.940) | -0.032 (0.935) | 0.030 (0.108) | 0.000 (0.097) | -0.002 (0.096) |
| | 50 | 0.276 (0.929) | 0.007 (0.825) | -0.012 (0.822) | 0.024 (0.093) | 0.001 (0.085) | -0.001 (0.085) |
| 5.0 | 10 | 3.062 (7.372) | -0.052 (4.503) | -1.506 (3.933) | 0.146 (0.374) | -0.004 (0.247) | -0.060 (0.214) |
| | 20 | 1.212 (3.211) | -0.037 (2.466) | -0.291 (2.401) | 0.061 (0.179) | -0.002 (0.145) | -0.012 (0.142) |
| | 30 | 0.728 (2.201) | -0.050 (1.837) | -0.149 (1.819) | 0.036 (0.128) | -0.003 (0.112) | -0.007 (0.111) |
| | 40 | 0.527 (1.791) | -0.039 (1.563) | -0.091 (1.554) | 0.027 (0.106) | -0.002 (0.096) | -0.004 (0.095) |
| | 50 | 0.409 (1.539) | -0.036 (1.380) | -0.069 (1.377) | 0.021 (0.092) | -0.002 (0.085) | -0.003 (0.085) |

Tabela 2: Estimativas do viés (raiz quadrada do erro quadrático médio) para β e α , ($\alpha = 1.0$).

| β | n | Estimadores de β | | | Estimadores de α | | |
|---------|-----|------------------------|----------------|----------------|-------------------------|----------------|----------------|
| | | MLE | BCE | PBE | MLE | BCE | PBE |
| 0.5 | 10 | 0.248 (0.583) | -0.002 (0.367) | -0.112 (0.319) | 0.343 (0.844) | -0.005 (0.544) | -0.153 (0.474) |
| | 20 | 0.102 (0.266) | -0.001 (0.208) | -0.019 (0.202) | 0.141 (0.398) | -0.003 (0.318) | -0.028 (0.310) |
| | 30 | 0.062 (0.188) | -0.002 (0.159) | -0.009 (0.158) | 0.086 (0.284) | -0.005 (0.245) | -0.015 (0.243) |
| | 40 | 0.044 (0.152) | -0.003 (0.134) | -0.007 (0.133) | 0.061 (0.231) | -0.005 (0.207) | -0.011 (0.206) |
| | 50 | 0.036 (0.132) | -0.001 (0.120) | -0.004 (0.119) | 0.049 (0.203) | -0.003 (0.185) | -0.006 (0.185) |
| 1.0 | 10 | 0.488 (1.118) | -0.008 (0.700) | -0.226 (0.616) | 0.347 (0.837) | -0.002 (0.537) | -0.150 (0.466) |
| | 20 | 0.198 (0.519) | -0.005 (0.406) | -0.043 (0.396) | 0.140 (0.388) | -0.004 (0.309) | -0.029 (0.302) |
| | 30 | 0.128 (0.378) | -0.001 (0.319) | -0.016 (0.315) | 0.091 (0.288) | 0.000 (0.247) | -0.010 (0.244) |
| | 40 | 0.092 (0.303) | -0.002 (0.267) | -0.010 (0.265) | 0.066 (0.233) | -0.000 (0.207) | -0.005 (0.206) |
| | 50 | 0.071 (0.259) | -0.002 (0.233) | -0.007 (0.232) | 0.052 (0.199) | -0.000 (0.181) | -0.004 (0.181) |
| 2.0 | 10 | 0.995 (2.341) | -0.003 (1.474) | -0.442 (1.276) | 0.351 (0.859) | 0.001 (0.553) | -0.148 (0.475) |
| | 20 | 0.406 (1.049) | -0.003 (0.819) | -0.077 (0.798) | 0.144 (0.399) | -0.000 (0.318) | -0.026 (0.310) |
| | 30 | 0.251 (0.739) | -0.006 (0.623) | -0.035 (0.617) | 0.089 (0.287) | -0.002 (0.246) | -0.012 (0.244) |
| | 40 | 0.192 (0.617) | 0.004 (0.541) | -0.012 (0.538) | 0.067 (0.237) | 0.001 (0.211) | -0.005 (0.210) |
| | 50 | 0.152 (0.537) | 0.004 (0.483) | -0.006 (0.482) | 0.052 (0.204) | -0.001 (0.186) | -0.004 (0.185) |
| 3.0 | 10 | 1.486 (3.383) | -0.009 (2.113) | -0.667 (1.853) | 0.348 (0.823) | -0.001 (0.526) | -0.149 (0.456) |
| | 20 | 0.613 (1.599) | -0.000 (1.250) | -0.112 (1.217) | 0.147 (0.402) | 0.002 (0.319) | -0.023 (0.311) |
| | 30 | 0.391 (1.149) | 0.005 (0.970) | -0.039 (0.959) | 0.095 (0.291) | 0.003 (0.249) | -0.007 (0.246) |
| | 40 | 0.286 (0.925) | 0.005 (0.812) | -0.020 (0.807) | 0.069 (0.235) | 0.003 (0.208) | -0.003 (0.207) |
| | 50 | 0.232 (0.808) | 0.010 (0.726) | -0.005 (0.723) | 0.056 (0.204) | 0.003 (0.185) | -0.000 (0.185) |
| 5.0 | 10 | 2.428 (5.596) | -0.051 (3.505) | -1.139 (3.092) | 0.335 (0.806) | -0.011 (0.517) | -0.157 (0.454) |
| | 20 | 0.998 (2.688) | -0.022 (2.113) | -0.208 (2.059) | 0.139 (0.399) | -0.005 (0.320) | -0.030 (0.312) |
| | 30 | 0.616 (1.893) | -0.025 (1.606) | -0.098 (1.589) | 0.086 (0.287) | -0.005 (0.248) | -0.015 (0.245) |
| | 40 | 0.442 (1.523) | -0.025 (1.346) | -0.064 (1.338) | 0.061 (0.234) | -0.005 (0.209) | -0.011 (0.208) |
| | 50 | 0.329 (1.291) | -0.037 (1.172) | -0.061 (1.168) | 0.046 (0.201) | -0.006 (0.184) | -0.010 (0.184) |

Tabela 3: Estimativas do viés (raiz quadrada do erro quadrático médio) para β e α , ($\alpha = 1.5$).

| β | n | Estimadores de β | | | Estimadores de α | | |
|---------|-----|------------------------|----------------|----------------|-------------------------|----------------|----------------|
| | | MLE | BCE | PBE | MLE | BCE | PBE |
| 0.5 | 10 | 0.234 (0.545) | -0.001 (0.344) | -0.102 (0.299) | 0.554 (1.326) | -0.003 (0.846) | -0.241 (0.733) |
| | 20 | 0.097 (0.257) | 0.000 (0.202) | -0.017 (0.196) | 0.229 (0.634) | -0.001 (0.503) | -0.041 (0.490) |
| | 30 | 0.061 (0.184) | 0.000 (0.156) | -0.007 (0.155) | 0.144 (0.457) | -0.001 (0.391) | -0.017 (0.387) |
| | 40 | 0.043 (0.149) | -0.001 (0.132) | -0.005 (0.131) | 0.101 (0.370) | -0.004 (0.329) | -0.013 (0.328) |
| | 50 | 0.034 (0.129) | -0.001 (0.117) | -0.003 (0.116) | 0.080 (0.319) | -0.003 (0.290) | -0.009 (0.290) |
| 1.0 | 10 | 0.479 (1.083) | 0.006 (0.678) | -0.198 (0.591) | 0.566 (1.324) | 0.005 (0.841) | -0.234 (0.731) |
| | 20 | 0.201 (0.517) | 0.006 (0.405) | -0.029 (0.393) | 0.233 (0.631) | 0.003 (0.499) | -0.038 (0.486) |
| | 30 | 0.126 (0.369) | 0.004 (0.312) | -0.010 (0.309) | 0.148 (0.455) | 0.003 (0.388) | -0.013 (0.384) |
| | 40 | 0.091 (0.298) | 0.002 (0.262) | -0.005 (0.261) | 0.107 (0.369) | 0.001 (0.327) | -0.007 (0.325) |
| | 50 | 0.073 (0.255) | 0.003 (0.229) | -0.002 (0.229) | 0.085 (0.316) | 0.002 (0.287) | -0.004 (0.285) |
| 2.0 | 10 | 0.922 (2.120) | -0.012 (1.334) | -0.417 (1.172) | 0.550 (1.286) | -0.006 (0.817) | -0.243 (0.715) |
| | 20 | 0.400 (1.034) | 0.012 (0.809) | -0.057 (0.787) | 0.242 (0.640) | 0.010 (0.505) | -0.031 (0.491) |
| | 30 | 0.258 (0.740) | 0.013 (0.624) | -0.015 (0.616) | 0.156 (0.464) | 0.010 (0.394) | -0.006 (0.389) |
| | 40 | 0.188 (0.600) | 0.010 (0.526) | -0.005 (0.524) | 0.114 (0.374) | 0.007 (0.330) | -0.001 (0.328) |
| | 50 | 0.146 (0.512) | 0.006 (0.461) | -0.003 (0.459) | 0.087 (0.321) | 0.004 (0.291) | -0.002 (0.290) |
| 3.0 | 10 | 1.393 (3.195) | -0.012 (2.008) | -0.621 (1.756) | 0.552 (1.295) | -0.004 (0.823) | -0.242 (0.718) |
| | 20 | 0.585 (1.492) | 0.005 (1.165) | -0.099 (1.134) | 0.233 (0.620) | 0.003 (0.490) | -0.038 (0.476) |
| | 30 | 0.377 (1.078) | 0.011 (0.908) | -0.030 (0.898) | 0.148 (0.444) | 0.003 (0.377) | -0.014 (0.373) |
| | 40 | 0.287 (0.887) | 0.020 (0.776) | -0.003 (0.771) | 0.112 (0.367) | 0.006 (0.324) | -0.003 (0.322) |
| | 50 | 0.231 (0.772) | 0.020 (0.692) | 0.006 (0.689) | 0.089 (0.319) | 0.006 (0.288) | 0.000 (0.287) |
| 5.0 | 10 | 2.365 (5.325) | 0.010 (3.332) | -1.007 (2.930) | 0.557 (1.293) | -0.001 (0.820) | -0.238 (0.718) |
| | 20 | 0.987 (2.514) | 0.018 (1.963) | -0.157 (1.909) | 0.234 (0.620) | 0.003 (0.490) | -0.038 (0.476) |
| | 30 | 0.617 (1.798) | 0.008 (1.518) | -0.061 (1.500) | 0.147 (0.444) | 0.001 (0.378) | -0.015 (0.374) |
| | 40 | 0.449 (1.464) | 0.005 (1.288) | -0.032 (1.282) | 0.107 (0.363) | 0.001 (0.321) | -0.008 (0.319) |
| | 50 | 0.351 (1.252) | 0.002 (1.129) | -0.022 (1.125) | 0.083 (0.311) | -0.000 (0.282) | -0.006 (0.281) |

Tabela 4: Estimativas do viés (raiz quadrada do erro quadrático médio) para β e α , ($\alpha = 2.0$).

| β | n | Estimadores de β | | | Estimadores de α | | |
|---------|-----|------------------------|----------------|----------------|-------------------------|----------------|----------------|
| | | MLE | BCE | PBE | MLE | BCE | PBE |
| 0.5 | 10 | 0.233 (0.533) | 0.003 (0.335) | -0.096 (0.292) | 0.782 (1.839) | 0.009 (1.167) | -0.322 (1.013) |
| | 20 | 0.096 (0.252) | 0.001 (0.198) | -0.015 (0.193) | 0.322 (0.874) | 0.004 (0.691) | -0.052 (0.673) |
| | 30 | 0.061 (0.181) | 0.002 (0.153) | -0.005 (0.151) | 0.207 (0.629) | 0.006 (0.535) | -0.016 (0.529) |
| | 40 | 0.043 (0.146) | 0.000 (0.129) | -0.003 (0.128) | 0.146 (0.509) | 0.000 (0.451) | -0.011 (0.449) |
| | 50 | 0.035 (0.126) | 0.001 (0.114) | -0.001 (0.114) | 0.116 (0.441) | 0.002 (0.400) | -0.006 (0.398) |
| 1.0 | 10 | 0.452 (1.019) | -0.004 (0.639) | -0.200 (0.560) | 0.762 (1.734) | -0.006 (1.092) | -0.333 (0.958) |
| | 20 | 0.193 (0.499) | 0.004 (0.391) | -0.029 (0.380) | 0.325 (0.858) | 0.007 (0.675) | -0.049 (0.657) |
| | 30 | 0.124 (0.362) | 0.005 (0.306) | -0.008 (0.303) | 0.209 (0.623) | 0.009 (0.529) | -0.014 (0.523) |
| | 40 | 0.090 (0.291) | 0.004 (0.256) | -0.003 (0.254) | 0.154 (0.503) | 0.007 (0.444) | -0.004 (0.441) |
| | 50 | 0.070 (0.250) | 0.002 (0.226) | -0.003 (0.225) | 0.119 (0.436) | 0.004 (0.394) | -0.003 (0.393) |
| 2.0 | 10 | 0.874 (2.134) | -0.029 (1.361) | -0.415 (1.197) | 0.735 (1.820) | -0.024 (1.168) | -0.347 (1.021) |
| | 20 | 0.370 (0.983) | -0.005 (0.773) | -0.072 (0.753) | 0.314 (0.860) | -0.003 (0.682) | -0.058 (0.664) |
| | 30 | 0.236 (0.696) | -0.001 (0.589) | -0.028 (0.583) | 0.199 (0.604) | -0.001 (0.514) | -0.023 (0.508) |
| | 40 | 0.173 (0.574) | 0.000 (0.506) | -0.014 (0.503) | 0.148 (0.502) | 0.002 (0.444) | -0.010 (0.441) |
| | 50 | 0.137 (0.491) | 0.000 (0.443) | -0.009 (0.441) | 0.117 (0.430) | 0.002 (0.390) | -0.006 (0.388) |
| 3.0 | 10 | 1.350 (3.093) | -0.016 (1.946) | -0.606 (1.708) | 0.761 (1.778) | -0.006 (1.127) | -0.335 (0.985) |
| | 20 | 0.562 (1.472) | -0.002 (1.156) | -0.102 (1.124) | 0.321 (0.860) | 0.004 (0.679) | -0.052 (0.659) |
| | 30 | 0.360 (1.067) | 0.004 (0.903) | -0.036 (0.894) | 0.208 (0.621) | 0.007 (0.528) | -0.015 (0.522) |
| | 40 | 0.260 (0.862) | 0.001 (0.760) | -0.021 (0.756) | 0.152 (0.505) | 0.006 (0.445) | -0.006 (0.443) |
| | 50 | 0.202 (0.740) | -0.002 (0.669) | -0.015 (0.668) | 0.119 (0.434) | 0.004 (0.392) | -0.003 (0.392) |
| 5.0 | 10 | 2.325 (5.362) | 0.025 (3.378) | -0.968 (2.923) | 0.768 (1.777) | -0.001 (1.124) | -0.330 (0.979) |
| | 20 | 0.920 (2.401) | -0.018 (1.884) | -0.185 (1.836) | 0.310 (0.834) | -0.006 (0.659) | -0.062 (0.643) |
| | 30 | 0.590 (1.741) | -0.002 (1.473) | -0.069 (1.458) | 0.202 (0.605) | 0.002 (0.514) | -0.021 (0.509) |
| | 40 | 0.426 (1.415) | -0.006 (1.247) | -0.042 (1.240) | 0.146 (0.494) | 0.001 (0.437) | -0.011 (0.434) |
| | 50 | 0.337 (1.217) | -0.003 (1.099) | -0.026 (1.096) | 0.116 (0.428) | 0.002 (0.387) | -0.006 (0.386) |

Finalmente, avaliamos o desempenho geral de cada estimador com relação ao vício e RMSE através de duas medidas proposta por Cribari-Neto e Vasconcellos (2002). Essa medidas apresentadas nas Tabelas 5 e 6 são calculadas para cada tamanho amostras n da seguinte forma

$$IBSQ_{(n)} = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{h=1}^{20} (r_{h,n})^2} \quad \text{e} \quad ARMSE_{(n)} = \frac{1}{20} \sum_{h=1}^{20} RMSE_{h,n}$$

em que $r_{h,n}$ e $RMSE_{h,n}$ são as estimativas dos vieses e da raiz quadrada do erro quadrático

médio para o h -ésimo cenário, $h = 1, \dots, 20$.

No geral, os resultados indicam que ambos os estimadores, BCE e PBE, superam o MLE. Entre os métodos BCE e PBE, as diferenças nessas medidas são insignificantes.

Tabela 5: Integrated bias squared norm.

| n | Estimates of β | | | Estimates of α | | |
|-----|----------------------|--------|--------|-----------------------|--------|--------|
| | MLE | BCE | PBE | MLE | BCE | PBE |
| 10 | 1.4379 | 0.0198 | 0.6581 | 0.5076 | 0.0070 | 0.2208 |
| 20 | 0.5857 | 0.0126 | 0.1161 | 0.2125 | 0.0040 | 0.0363 |
| 30 | 0.3654 | 0.0137 | 0.0506 | 0.1356 | 0.0043 | 0.0130 |
| 40 | 0.2657 | 0.0120 | 0.0299 | 0.0988 | 0.0037 | 0.0072 |
| 50 | 0.2078 | 0.0132 | 0.0228 | 0.0777 | 0.0029 | 0.0046 |

Tabela 6: Average root mean-squared error.

| n | Estimates of β | | | Estimates of α | | |
|-----|----------------------|--------|--------|-----------------------|--------|--------|
| | MLE | BCE | PBE | MLE | BCE | PBE |
| 10 | 3.3488 | 2.0789 | 1.8166 | 1.1981 | 0.7624 | 0.6646 |
| 20 | 1.5288 | 1.1884 | 1.1566 | 0.5745 | 0.4548 | 0.4429 |
| 30 | 1.0814 | 0.9099 | 0.9000 | 0.4138 | 0.3525 | 0.3486 |
| 40 | 0.8765 | 0.7687 | 0.7642 | 0.3371 | 0.2986 | 0.2969 |
| 50 | 0.7516 | 0.6764 | 0.6742 | 0.2908 | 0.2638 | 0.2629 |

Dessa forma, baseado nos resultados do estudo de simulação, fica evidente que os estimadores com correção de viés podem ser bastante eficiente em aproximar as estimativas corrigidas de seus valores verdadeiros.

4.2 Biblioteca **mle.tools**

A versão atual da biblioteca **mle.tools**, enviada ao CRAN em Fevereiro de 2017, tem implementada três funções — `observed.varcov`, `expected.varcov` e `coxsnell.bc` — que são de grande interesse na análise de dados sob o paradigma da verossimilhança. Essas funções calculam respectivamente, a informação de Fisher observada, a informação de Fisher esperada e EMV com correção de vício utilizando a fórmula apresentada em (5). As funções supracitadas podem ser aplicada a qualquer função densidade de probabilidade cujos termos estão disponíveis na tabela de derivadas da função D (ver o código fonte “deriv.c” para maiores detalhes). Integrais, quando necessárias, são computadas numericamente via a função `integrate`. Na sequência apresentamos alguns detalhes matemáticos de como os valores retornados das três funções são calculados.

Seja X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade $f(x_i | \boldsymbol{\theta})$ dependendo de um vetor de parâmetros p -dimensional $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)$. O elemento (j, k) da informação de Fisher observada, H_{jk} , e esperada, I_{jk} , são calculados, respectivamente, como

$$H_{jk} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \log f(x_i | \boldsymbol{\theta}) \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

e

$$I_{jk} = -n \times E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \log f(x | \boldsymbol{\theta}) \right) = -n \times \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \log f(x | \boldsymbol{\theta}) \times f(x | \boldsymbol{\theta}) dx \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}},$$

em que $j, k = 1, \dots, p$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é o EMV de $\boldsymbol{\theta}$ e \mathcal{X} denota o suporte da variável aleatória X .

A função `observed.varcov` tem os seguintes argumentos

```
function(logdensity, X, parms, mle)
```

em que `logdensity` é uma expressão em R do logaritmo da função densidade de probabilidade, `X` é um vetor numérico contendo as observações, `parms` é um vetor carácter especificando os nomes dos parâmetros na expressão da `logdensity` e `mle` é o vetor numérico com valores dos parâmetros estimados. Essa função retorna uma lista com dois componentes (i) `mle`: os EMV inseridos e (ii) `varcov`: a matriz informação de Fisher observada avaliada nos EMV. Os elementos da matriz Hessiana são calculados analiticamente.

As funções `expected.varcov` e `coxsnell.bc` tem os mesmos argumentos e são os seguintes

```
function(density, logdensity, n, parms, mle, lower = "-Inf", upper = "Inf",
...)
```

em que `density` e `logdensity` são expressões em R da função densidade de probabilidade e seu logaritmo, respectivamente, `n` é um escalar numérico indicando o tamanho amostral `parms` é um vetor carácter especificando os nomes dos parâmetros na expressão da `logdensity` `mle` é um vetor numérico com valores dos parâmetros estimados `lower` é o limite inferior de integração (`-Inf` é o padrão), `upper` é o limite superior de integração (`Inf` é o padrão) e `...` são argumentos adicionais que podem ser passados para a função `integrate`. A função `expected.varcov` retorna uma lista com dois componentes (i) `mle`: os EMV inseridos e (ii) `varcov`: a matriz informação de Fisher observada avaliada nos

EMV. A função `coxsnell.bc` retorna uma lista com cinco componentes (i) `mle`: os EMV inseridos, (ii) `varcov`: a matriz informação de Fisher esperada avaliada nos EMV (iii) `mle.bc`: os EMV com correção de viés (iv) `varcov.bc`: a matriz informação de Fisher esperada avaliada nos EMV corrigidos e (v) `bias`: a estimativa do vício(s).

Além disso, EMV com correção de viés de θ_s , $s = 1, \dots, p$ denotada por $\tilde{\theta}_s$ é calculado como $\tilde{\theta}_s = \hat{\theta}_s - \hat{\mathcal{B}}(\hat{\theta}_s)$, em que $\hat{\theta}_s$ é o EMV de θ_s e

$$\hat{\mathcal{B}}(\hat{\theta}_s) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \mathbf{I}^{sj} \mathbf{I}^{kl} [0.5 \mathbf{I}_{jkl} + \mathbf{I}_{jk,l}] \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}},$$

em que

$$\mathbf{I}_{jkl} = n \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^3}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_l} \log f(x | \boldsymbol{\theta}) f(x | \boldsymbol{\theta}) dx \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}},$$

$$\mathbf{I}_{jk,l} = n \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \log f(x | \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta_l} \log f(x | \boldsymbol{\theta}) f(x | \boldsymbol{\theta}) dx \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

e \mathcal{X} denota o suporte da variável aleatória X .

É importante enfatizar que as derivas parciais de primeira, segunda e terceira ordem da log-densidade são calculadas analiticamente via função `D`, enquanto que as integrais são computadas numericamente utilizando a função `integrate`. Ademais, se a integração numérica falir e/ou a informação de Fisher é singular uma mensagem de erro é retornada.

4.2.1 Estudo Comparativo

Afim de avaliar a robustez da função `coxsnell.bc`, comparamos através de aplicações reais, o viés estimado obtido pela biblioteca com o viés calculado via expressões analíticas para um total de trinta e uma distribuições de probabilidade contínuas.

Na sequência, apresentamos a função densidade de probabilidade, a expressão analítica do viés e as estimativas para o viés considerando as seguintes distribuições: Lindley, inversa Lindley, inversa Exponencial, Shanker, inversa Shanker, Topp-Leone, Lévy, Rayleigh, inversa Rayleigh, Half-Logística, Half-Cauchy, Half-Normal, Normal, inversa Gaussian, Log-Normal, Log-Logística, Gamma, inversa Gamma, Lomax, Lindley ponderada, Rayleigh generalizada, Weibull, inversa Weibull, Half-Normal generalizada, inversa Half-Normal generalizada, Exponencial Estendida de Marshal-Olkin, Beta, Kumaraswamy, inversa Beta, Birnbaum-Saunders e Pareto generalizada.

É importante ressaltar que as expressões analíticas para as seguintes distribuições Lindley, Shanker, inversa Shanker, Lévy, inversa Rayleigh, Half-Cauchy, inversa Half-Normal generalizada e Exponencial Estendida de Marshal-Olkin não foram reportadas na literatura.

Conforme os resultados apresentados abaixo, observamos uma concordância entre as estimativas dos vieses obtidas pela função `coxsnell.bc` e as expressões analíticas para 28 das 31 distribuições. As distribuições cuja as estimativas dos vieses não concordaram com a função `coxsnell.bc` foram Beta, Kumaraswamy e inversa Beta. Tendo isso em vista, recalculamos as expressões analíticas para os vieses e observamos que realmente existem erros nas expressões apresentadas por (CORDEIRO et al., 1997) e (STOČSIĆ; CORDEIRO, 2009) para as distribuições Beta e inversa Beta. Para a distribuição Kumaraswamy não conseguimos obter a expressão apresenta pelo autor, porém comparamos o resultado da função `coxsnell.bc` com uma implementação em *Maple* (??) resultando em mesmas estimativas.

1. Distribuição Lindley com parâmetro de escala θ

$$f(x | \theta) = \frac{\theta^2}{1 + \theta} (1 + x) \exp(-\theta x), \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (não apresentado anteriormente na literatura):

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}) = \frac{(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)(\theta + 1)\theta}{n(\theta^2 + 4\theta + 2)^2}. \quad (22)$$

Utilizando o conjunto de dados de Ghitany, Atieh e Nadarajah (2008) temos $n = 100$, $\hat{\theta} = 0.1866$ e $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 0.0133$. Avaliando a expressão analítica (22) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> lindley.bc(n = 100, mle = 0.1866)
```

```
theta
0.0009546
```

```
R> pdf <- quote(theta^2 / (theta + 1) * (1 + x) * exp(-theta * x))
R> lpdf <- quote(2 * log(theta) - log(1 + theta) - theta * x)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 100,
+   parms = c("theta"), mle = 0.1866, lower = 0)$bias
```

```
theta
0.0009546
```

2. Distribuição inversa Lindley com parâmetro de escala θ

$$f(x | \theta) = \frac{\theta^2}{1 + \theta} \left(\frac{1 + x}{x^3} \right) \exp \left(-\frac{\theta}{x} \right), \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (WANG; WANG, 2017):

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}) = \frac{(\theta + 1) \theta (\theta^3 + 6 \theta^2 + 6 \theta + 2)}{n (\theta^2 + 4 \theta + 2)^2}. \quad (23)$$

Utilizando o conjunto de dados de Sharma et al. (2015) temos $n = 58$, $\hat{\theta} = 60.0016$ e $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 7.7535$. Avaliando a expressão analítica (23) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> invlindley.bc(n = 58, mle = 60.0016)

theta
1.017

R> pdf <- quote(theta^2 / (theta + 1) * ((1 + x) / x^3) *
+   exp(-theta / x))
R> lpdf <- quote(2 * log(theta) - log(1 + theta) - theta / x)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 58,
+   parms = c("theta"), mle = 60.0016, lower = 0)$bias

theta
1.017
```

3. Distribuição inversa Exponencial com parâmetro de taxa θ

$$f(x | \theta) = \frac{\theta}{x^2} \exp \left(-\frac{\theta}{x} \right), \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (JOHNSON; QI; CHUEH, 2012):

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}) = \frac{\theta}{n}. \quad (24)$$

Utilizando o conjunto de dados de Lawless (2011), temos que $n = 30$, $\hat{\theta} = 11.1786$ e $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 2.0409$. Avaliando a expressão analítica (24) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> invexp.bc(n = 30, mle = 11.1786)
```

```
theta
0.3726
```

```
R> pdf <- quote(theta / x^2 * exp(- theta / x))
R> lpdf <- quote(log(theta) - theta / x)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 30,
+   parms = c("theta"), mle = 11.1786, lower = 0)$bias
```

```
theta
0.3726
```

4. Distribuição Shanker com parâmetro de escala θ

$$f(x | \theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + 1} (\theta + x) \exp(-\theta x), \quad x > 0.$$

- Para a expressão do viés (não apresentado anteriormente na literatura) ver o arquivo “analyticalBC.R”.

Utilizando o conjunto de dados de Shanker (2015), temos que $n = 31$, $\hat{\theta} = 0.0647$ e $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 0.0082$. Avaliando a expressão analítica e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> shanker.bc(n = 31, mle = 0.0647)
```

```
theta
0.001035
```

```
R> pdf <- quote(theta^2 / (theta^2 + 1) * (theta + x) *
+   exp(-theta * x))
R> lpdf <- quote(2*log(theta) - log(theta^2 + 1) + log(theta + x) -
+   theta * x)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 31,
+   parms = c("theta"), mle = 0.0647, lower = 0)$bias
```

```
theta
0.001035
```

5. Distribuição inversa Shanker com parâmetro de escala θ

$$f(x | \theta) = \frac{\theta^2}{1 + \theta^2} \left(\frac{1 + \theta x}{x^3} \right) \exp \left(-\frac{\theta}{x} \right), \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (não apresentado anteriormente na literatura):

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}) = \frac{\theta^3 + 2\theta}{n(\theta^2 + 1)}. \quad (25)$$

Utilizando o conjunto de dados de Sharma et al. (2015), temos que $n = 58$, $\hat{\theta} = 59.1412$ e $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 7.7612$. Avaliando a expressão analítica (25) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> invshanker.bc(n = 58, mle = 59.1412)

theta
1.02

R> pdf <- quote(theta^2 / (theta^2 + 1) * (theta * x + 1) /
+   x^3 * exp(-theta / x))
R> lpdf <- quote(log(theta) - 2 * log(x) - theta / x)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 58,
+   parms = c("theta"), mle = 59.1412, lower = 0)$bias

theta
1.02
```

6. Distribuição Topp-Leone com parâmetro de forma ν

$$f(x | \nu) = 2\nu(1-x)x^{\nu-1}(2-x)^{\nu-1}, \quad 0 < x < 1.$$

- Expressão do viés (GILES, 2012b):

$$\mathcal{B}(\hat{\nu}) = \frac{\nu}{n}. \quad (26)$$

Utilizando o conjunto de dados de Cordeiro e Brito (2012), temos que $n = 107$, $\hat{\nu} = 2.0802$ e $\widehat{se}(\hat{\nu}) = 0.2011$. Avaliando a expressão analítica (26) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> toppleone.bc(n = 107, mle = 2.0802)

nu
0.01944

R> pdf <- quote( 2 * nu * x^(nu - 1) * (1 - x) * (2 - x)^(nu - 1))
R> lpdf <- quote(log(nu) + nu * log(x) + log(1 - x) + (nu - 1) *
```

```
+ log(2 - x))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 107,
+ parms = c("nu"), mle = 2.0802, lower = 0, upper = 1)$bias

nu
0.01944
```

7. Distribuição Lévy com parâmetro de escala σ

$$f(x | \sigma) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2x}\right), \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (não apresentado anteriormente na literatura):

$$\mathcal{B}(\hat{\sigma}) = \frac{2\sigma}{n}. \quad (27)$$

Utilizando o conjunto de dados de Achcar et al. (2013), temos que $n = 361$, $\hat{\sigma} = 4.4461$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 0.3309$. Avaliando a expressão analítica (27) e a função `coxsnell.bc`, obtemos que, respectivamente,

```
R> levy.bc(n = 361, mle = 4.4460)

sigma
0.02463

R> pdf <- quote(sqrt(sigma / (2 * pi)) * exp(-0.5 * sigma / x) /
+ x^(3 / 2))
R> lpdf <- quote(0.5 * log(sigma) - 0.5 * sigma / x - (3 / 2) * log(x))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 361,
+ parms = c("sigma"), mle = 4.4460, lower = 0)$bias

sigma
0.02463
```

8. Distribuição Rayleigh com parâmetro de escala σ

$$f(x | \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (LING; GILES, 2014):

$$\mathcal{B}(\hat{\sigma}) = -\frac{\sigma}{8n}. \quad (28)$$

Utilizando o conjunto de dados de Bader e Priest (1982), temos que $n = 69$, $\hat{\sigma} = 1.2523$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 0.0754$. Avaliando a expressão analítica (28) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> rayleigh.bc(n = 69, mle = 1.2522)

sigma
-0.002268

R> pdf <- quote(x / sigma^2 * exp(- 0.5 * (x / sigma)^2))
R> lpdf <- quote(- 2 * log(sigma) - 0.5 * x^2 / sigma^2)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 69,
+   parms = c("sigma"), mle = 1.2522, lower = 0)$bias

sigma
-0.002268
```

9. Distribuição inversa Rayleigh com parâmetro de escala σ

$$f(x | \sigma) = \frac{2\sigma^2}{x^3} \exp\left(-\frac{\sigma}{x^2}\right), \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (não apresentado anteriormente na literatura):

$$\mathcal{B}(\hat{\sigma}) = \frac{3\sigma}{8n}. \quad (29)$$

Utilizando o conjunto de dados de Bader e Priest (1982), temos que $n = 63$, $\hat{\sigma} = 2.8876$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 0.1819$. Avaliando a expressão analítica (29) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> invrayleigh.bc(n = 63, mle = 2.8876)

sigma
0.01719

R> pdf <- quote(2 * sigma^2 / x^3 * exp(-sigma^2 / x^2))
R> lpdf <- quote(2 * log(sigma) - sigma^2 / x^2)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 63,
+   parms = c("sigma"), mle = 2.8876, lower = 0)$bias

sigma
0.01719
```

10. Distribuição Half-Logística com parâmetro de escala σ

$$f(x | \sigma) = \frac{2 \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)}{\sigma \left[1 + \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right)\right]^2}, \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (GILES, 2012a):

$$\mathcal{B}(\hat{\sigma}) = -\frac{0.05256766607 \sigma}{n}. \quad (30)$$

Utilizando o conjunto de dados de Bhaumik, Kapur e Gibbons (2009), temos que $n = 34$, $\hat{\sigma} = 1.3926$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 0.2056$. Avaliando a expressão analítica (29) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> halflogistic.bc(n = 34, mle = 1.3925)

sigma
-0.002153

R> pdf <- quote((2/sigma) * exp(-x / sigma) / (1 + exp(-x / sigma))^2)
R> lpdf <- quote(-log(sigma) - x / sigma - 2 * log(1 + exp(-x / sigma)))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 34,
+   parms = c("sigma"), mle = 1.3925, lower = 0)$bias

sigma
-0.002153
```

11. Distribuição Half-Cauchy com parâmetro de escala σ

$$f(x | \sigma) = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + x^2}, \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (não apresentado anteriormente na literatura):

$$\mathcal{B}(\hat{\sigma}) = -\frac{\sigma}{n}. \quad (31)$$

Utilizando o conjunto de dados de Alzaatreh et al. (2016), temos que $n = 64$, $\hat{\sigma} = 28.3345$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 4.4978$. Avaliando a expressão analítica (31) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> halfcauchy.bc(n = 64, mle = 28.3345)
```

```
sigma
0.4427
```

```
R> pdf <- quote( 2 / pi * sigma / (x^2 + sigma^2))
R> lpdf <- quote(log(sigma) - log(x^2 + sigma^2))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 64,
+   parms = c("sigma"), mle = 28.3345, lower = 0)$bias
```

```
sigma
0.4456
```

12. Distribuição Half-Normal com parâmetro de escala σ

$$f(x | \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (LING; GILES, 2014):

$$\mathcal{B}(\hat{\sigma}) = -\frac{\sigma}{4n}. \quad (32)$$

Utilizando o conjunto de dados de Raqab, Madi e Kundu (2008), temos que $n = 69$, $\hat{\sigma} = 1.5323$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 0.1304$. Avaliando a expressão analítica (32) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> halfnormal.bc(n = 69, mle = 1.5323)
```

```
sigma
-0.005552
```

```
R> pdf <- quote(sqrt(2) / (sqrt(pi) * sigma) * exp(-x^2 / (2 * sigma^2)))
R> lpdf <- quote(-log(sigma) - x^2 / sigma^2 / 2 )
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 69,
+   parms = c("sigma"), mle = 1.5323, lower = 0)$bias
```

```
sigma
-0.005552
```

13. Distribuição Normal com média μ e desvio padrão σ

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in (-\infty, \infty).$$

- Expressão do viés (STOČSIĆ; CORDEIRO, 2009):

$$\mathcal{B}(\hat{\mu}) = 0 \text{ e } \mathcal{B}(\hat{\sigma}) = -\frac{3\sigma}{4n}. \quad (33)$$

Utilizando o conjunto de dados de Kundu (2005), temos que $n = 23$, $\hat{\mu} = 4.1506$, $\hat{\sigma} = 0.5215$, $\widehat{se}(\hat{\mu}) = 0.1087$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 0.0769$. Avaliando as expressões analíticas (33) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> normal.bc(n = 23, mle = c(4.1506, 0.5215))

mu      sigma
0.00000 -0.01701

R> pdf <- quote(1 / (sqrt(2 * pi) * sigma) *
+   exp(-0.5 / sigma^2 * (x - mu)^2))
R> lpdf <- quote(-log(sigma) - 0.5 / sigma^2 * (x - mu)^2)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 23,
+   parms = c("mu", "sigma"), mle = c(4.1506, 0.5215))$bias

mu      sigma
-4.071e-13 -1.701e-02
```

14. Distribuição inversa Gaussiana com média μ e parâmetro de forma λ

$$f(x | \mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp \left[-\frac{\lambda(x - \mu)^2}{2x\mu^2} \right], \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (STOČSIĆ; CORDEIRO, 2009):

$$\mathcal{B}(\hat{\mu}) = 0 \text{ e } \mathcal{B}(\hat{\lambda}) = \frac{3\lambda}{n}. \quad (34)$$

Utilizando o conjunto de dados de Chhikara e Folks (1977), temos que $n = 46$, $\hat{\mu} = 3.6067$, $\hat{\lambda} = 1.6584$, $\widehat{se}(\hat{\mu}) = 0.7843$ e $\widehat{se}(\hat{\lambda}) = 0.3458$. Avaliando as expressões analíticas (34) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> invgaussian.bc(n = 46, mle = c(3.6065, 1.6589))

mu lambda
0.0000 0.1082

R> pdf <- quote(sqrt(lambda / (2 * pi * x^3)) *
+   exp(-lambda * (x - mu)^2 / (2 * mu^2 * x)))
```

```
R> lpdf <- quote(0.5 * log(lambda) - lambda * (x - mu)^2 /
+   (2 * mu^2 * x))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 46,
+   parms = c("mu", "lambda"), mle = c(3.6065, 1.6589), lower = 0)$bias

mu      lambda
3.483e-07 1.082e-01
```

15. Distribuição Log-Normal com parâmetros de locação μ e escala σ

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x \sigma} \exp \left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{\sigma^2} \right], \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (STOČSIĆ; CORDEIRO, 2009):

$$\mathcal{B}(\hat{\mu}) = 0 \text{ e } \mathcal{B}(\hat{\sigma}) = -\frac{3\sigma}{4n}. \quad (35)$$

Utilizando o conjunto de dados de Kumagai et al. (1989), temos que $n = 30$, $\hat{\mu} = 2.164$, $\hat{\sigma} = 1.1765$, $\widehat{se}(\hat{\mu}) = 0.2148$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 0.1519$. Avaliando as expressões analíticas (35) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> lognormal.bc(n = 30, mle = c(2.1643, 1.1765))

mu      sigma
0.00000 -0.02941

R> pdf <- quote(1 / (sqrt(2 * pi) * x * sigma) *
+   exp(-0.5 * (log(x) - mu)^2 / sigma^2))
R> lpdf <- quote(-log(sigma) - 0.5 * (log(x) - mu)^2 / sigma^2)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 30,
+   parms = c("mu", "sigma"), mle = c(2.1643, 1.1765), lower = 0)$bias

mu      sigma
-5.952e-09 -2.941e-02
```

16. Distribuição Log-Logística com parâmetros de forma β e escala α

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{(\beta/\alpha) (x/\alpha)^{\beta-1}}{[1 + (x/\alpha)^\beta]^2}, \quad x > 0.$$

- Para as expressões dos vícios, ver Reath, Dong e Wang (2018) .

Utilizando o conjunto de dados de Reath, Dong e Wang (2018) temos que $n = 19$, $\hat{\alpha} = 6.2542$, $\hat{\beta} = 1.1732$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 2.1352$, $\widehat{se}(\hat{\beta}) = 0.2239$, $\widehat{\mathcal{B}}(\hat{\alpha}) = 0.3585$ e $\widehat{\mathcal{B}}(\hat{\beta}) = 0.0789$. Avaliando a função `coxsnell.bc`, obtemos que:

```
R> pdf <- quote((beta / alpha) * (x / alpha)^(beta - 1) /
+   (1 + (x / alpha)^beta)^2)
R> lpdf <- quote(log(beta) - log(alpha) + (beta - 1) * log(x / alpha) -
+   2 * log(1 + (x / alpha)^beta))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 19,
+   parms = c("alpha", "beta"), mle = c(6.2537, 1.1734),
+   lower = 0)$bias

alpha      beta
0.35854 0.07883
```

17. Distribuição Gamma com parâmetros de forma α e taxa λ

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x), \quad x > 0.$$

- Expressão dos vieses (GILES; FENG, 2009):

$$\mathcal{B}(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha [\Psi'(\alpha) - \alpha \Psi''(\alpha)] - 2}{2n [\alpha \Psi'(\alpha) - 1]^2} \quad (36)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda [2\alpha (\Psi'(\alpha))^2 - 3\Psi'(\alpha) - \alpha \Psi''(\alpha)]}{2n [\alpha \Psi'(\alpha) - 1]^2}. \quad (37)$$

Utilizando o conjunto de dados de Delignette-Muller et al. (2008), temos que $n = 254$, $\hat{\alpha} = 4.0083$, $\hat{\lambda} = 0.0544$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 0.3413$ e $\widehat{se}(\hat{\lambda}) = 0.0049$. Avaliando as expressões analíticas (36), (37) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> gamma.bc(n = 254, mle = c(4.0082, 0.0544))

alpha      lambda
0.0448278 0.0006618

R> pdf <- quote((lambda^alpha) / gamma(alpha) * x^(alpha - 1) *
+   exp(-lambda * x))
R> lpdf <- quote(alpha * log(lambda) - lgamma(alpha) + alpha * log(x) -
+   lambda * x)
```



```
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 254,
+   parms = c("alpha", "lambda"), mle = c(4.0082, 0.0544),
+   lower = 0)$bias

alpha    lambda
0.0448278 0.0006618
```

18. Distribuição inversa Gamma com parâmetros de forma α e escala β

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \quad x > 0.$$

- Expressão dos vieses (STOČSIĆ; CORDEIRO, 2009):

$$\mathcal{B}(\hat{\alpha}) = \frac{-0.5 \alpha^2 \Psi''(\alpha) + 0.5 \Psi'(\alpha) \alpha - 1}{n \alpha (\Psi'(\alpha) - 1)^2} \quad (38)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\beta}) = \frac{\beta (-0.5 \alpha \Psi''(\alpha) - 1.5 \Psi'(\alpha) + (\Psi'(\alpha))^2 \alpha)}{n (\Psi'(\alpha) \alpha - 1.0)^2}. \quad (39)$$

Utilizando o conjunto de dados de Kumagai e Matsunaga (1995), temos que $n = 31$, $\hat{\alpha} = 1.0479$, $\hat{\beta} = 5.491$, $\hat{se}(\hat{\alpha}) = 0.2353$ e $\hat{se}(\hat{\beta}) = 1.5648$. Avaliando as expressões analíticas (38), (39) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> invgamma.bc(n = 31, mle = c(5.4901, 1.0479))

beta    alpha
0.60849 0.08388

R> pdf <- quote(beta^alpha / gamma(alpha) * x^(-alpha - 1) *
+   exp(-beta / x))
R> lpdf <- quote(alpha * log(beta) - lgamma(alpha) -
+   alpha * log(x) - beta / x)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 31,
+   parms = c("beta", "alpha"), mle = c(5.4901, 1.0479), lower = 0)$bias

beta    alpha
0.60847 0.08388
```

19. Distribuição Lomax com parâmetros de forma α e escala β

$$f(x | \alpha, \beta) = \alpha \beta (1 + \beta x)^{-(\alpha+1)}, \quad x > 0.$$

- Expressões dos vieses (GILES; FENG; GODWIN, 2013):

$$\mathcal{B}(\hat{\alpha}) = \frac{2\alpha(\alpha+1)(\alpha^2+\alpha-2)}{(\alpha+3)n} \quad (40)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\beta}) = -\frac{2\beta(\alpha+1.6485)(\alpha+0.3934)(\alpha-1.5419)}{n\alpha(\alpha+3)}. \quad (41)$$

Utilizando o conjunto de dados de Tahir et al. (2016), temos que $n = 179$, $\hat{\alpha} = 4.9103$, $\hat{\beta} = 0.0028$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 0.6208$ e $\widehat{se}(\hat{\beta}) = 3.4803 \times 10^{-4}$. Avaliando a expressão analíticas (40), (41) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> lomax.bc(n = 179, mle = c(4.9103, 0.0028))

alpha      beta
1.281e+00 -9.438e-05

R> pdf <- quote(alpha * beta / (1 + beta * x)^(alpha + 1))
R> lpdf <- quote(log(alpha) + log(beta) - (alpha + 1) *
+   log(1 + beta * x))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 179,
+   parms = c("alpha", "beta"), mle = c(4.9103, 0.0028),
+   lower = 0)$bias

alpha      beta
1.281e+00 -9.439e-05
```

20. Distribuição Lindley ponderada com parâmetro de forma α e escala θ

$$f(x | \alpha, \theta) = \frac{\theta^{\alpha+1}}{(\theta + \alpha) \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} (1+x) \exp(-\theta x), \quad x > 0.$$

- Para expressões dos vieses, ver Wang e Wang (2017):

Utilizando o conjunto de dados de Ghitany et al. (2013), temos que $n = 69$, $\hat{\alpha} = 22.8889$, $\hat{\theta} = 9.6246$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 3.9507$ e $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 1.6295$. Avaliando a expressão analíticas e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> wlindley.bc(n = 69, mle = c(22.8889, 9.6246))

alpha  theta
1.0070 0.4167
```

```
R> pdf <- quote(theta^(alpha + 1) / ((theta + alpha) * gamma(alpha)) *
+   x^(alpha - 1) * (1 + x) * exp(-theta * x))
R> lpdf <- quote((alpha + 1) * log(theta) + alpha * log(x) -
+   log(theta + alpha) - lgamma(alpha) - theta * x)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 69,
+   parms = c("alpha", "theta"), mle = c(22.8889, 9.6246),
+   lower = 0)$bias

alpha  theta
1.0068 0.4166
```

21. Distribuição Rayleigh Generalizada com parâmetros de forma α e escala θ

$$f(x \mid \beta, \mu) = \frac{2\theta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{2\alpha+1} \exp(-\theta x^2), \quad x > 0.$$

• Para as expressões dos vieses, ver Ling e Giles (2014):

Utilizando o conjunto de dados de Gomes et al. (2014), temos que $n = 384$, $\hat{\theta} = 0.5195$, $\hat{\alpha} = 0.0104$, $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 0.2184$ e $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 0.0014$. Avaliando a expressão analíticas e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> generalizedrayleigh.bc(n = 384, mle = c(0.5195, 0.0104))

alpha      theta
1.035e-02 8.865e-05

R> pdf <- quote(2 * theta^(alpha + 1) / gamma(alpha + 1) *
+   x^(2 * alpha + 1) * exp(-theta * x^2))
R> lpdf <- quote((alpha + 1) * log(theta) - lgamma(alpha + 1) +
+   2 * alpha * log(x) - theta * x^2)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 384,
+   parms = c("alpha", "theta"), mle = c(0.5195, 0.0104),
+   lower = 0)$bias

alpha      theta
1.035e-02 8.865e-05
```

22. Distribuição Weibul com parâmetros de forma β e escala μ

$$f(x \mid \beta, \mu) = \frac{\beta}{\mu^\beta} x^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)^\beta, \quad x > 0.$$

- Expressão do viés (as expressões abaixo diferem de Stoćsić e Cordeiro (2009)):

$$\mathcal{B}(\hat{\mu}) = \frac{\mu (0.5543324495 - 0.3698145397 \beta)}{n \beta^2} \quad (42)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\beta}) = \frac{1.379530692 \beta}{n}. \quad (43)$$

Utilizando o conjunto de dados de Datta e Datta (2013), temos que $n = 50$, $\hat{\mu} = 2.5752$, $\hat{\beta} = 38.0866$, $\widehat{se}(\hat{\mu}) = 0.2299$ e $\widehat{se}(\hat{\beta}) = 2.2299$. Avaliando as expressões analíticas (42), (43) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> weibull.bc(n = 50, mle = c(38.0866, 2.5751))

mu      beta
-0.04572 0.07105

R> pdf <- quote(beta / mu^beta * x^(beta - 1) *
+   exp(-(x / mu)^beta))
R> lpdf <- quote(log(beta) - beta * log(mu) + beta * log(x) -
+   (x / mu)^beta)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 50,
+   parms = c("mu", "beta"), mle = c(38.0866, 2.5751), lower = 0)$bias

mu      beta
-0.04572 0.07105
```

23. Distribuição inversa Weibull com parâmetros de forma β e escala μ

$$f(x | \beta, \alpha) = \beta \mu^\beta x^{-(\beta+1)} \exp \left[- \left(\frac{\mu}{x} \right)^\beta \right], \quad x > 0.$$

- Expressões dos vieses (não apresentado anteriormente na literatura):

$$\mathcal{B}(\hat{\beta}) = \frac{1.379530690 \beta}{n} \quad (44)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\mu}) = \frac{\mu (0.3698145391 \beta + 0.5543324494)}{n \beta^2}. \quad (45)$$

Utilizando o conjunto de dados de Nichols e Padgett (2006), temos que $n = 100$, $\hat{\beta} = 1.769$, $\hat{\mu} = 1.8917$, $\widehat{se}(\hat{\beta}) = 0.1119$ e $\widehat{se}(\hat{\mu}) = 0.1138$. Avaliando as expressões analíticas (44), (45) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> inverseweibull.bc(n = 100, mle = c(1.7690, 1.8916))

beta      mu
0.024404 0.007305

R> pdf <- quote(beta * mu^beta * x^(-beta - 1) *
+   exp(-(mu / x)^beta))
R> lpdf <- quote(log(beta) + beta * log(mu) - beta * log(x) -
+   (mu / x)^beta)
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 100,
+   parms = c("beta", "mu"), mle = c(1.7690, 1.8916), lower = 0)$bias

beta      mu
0.024404 0.007305
```

24. Distribuição Half-Normal Generalizada com parâmetros de forma α e escala θ

$$f(x \mid \alpha, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{2\alpha} \right].$$

- Expressões dos vieses (MAZUCHELI; DEY, 2018):

$$\mathcal{B}(\hat{\alpha}) = 1.483794456 \frac{\alpha}{n} \quad (46)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\theta}) = (0.2953497661 - 0.3665611957 \alpha) \frac{\theta}{n \alpha^2}. \quad (47)$$

Utilizando o conjunto de dados de Nadarajah e Kotz (2007), temos que $n = 119$, $\hat{\alpha} = 3.8096$, $\hat{\theta} = 4.9053$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 0.2758$ e $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 0.0913$. Avaliando as expressões analíticas (46), (47) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> genhalfnormal.bc(n = 119, mle = c(3.8095, 4.9053))

alpha     theta
0.047500 -0.003127

R> pdf <- quote(sqrt(2 / pi) * alpha / theta^alpha * x^(alpha - 1)*
+   exp(- 0.5 * (x / theta)^(2 * alpha) ))
R> lpdf <- quote(log(alpha) - alpha * log(theta) + alpha * log(x) -
+   0.5 * (x / theta)^(2 * alpha))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 119,
```

```
+   parms = c("alpha", "theta"), mle = c(3.8095, 4.9053),
+   lower = 0)$bias
```

```
alpha      theta
0.047500 -0.003127
```

25. Distribuição generalizada inversa Half-Normal com parâmetros de forma α e escala θ

$$f(x | \alpha, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\alpha}{x}\right) \left(\frac{1}{\theta x}\right)^\alpha \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\theta x}\right)^{2\alpha} \right], \quad x > 0.$$

- Para as expressões de vieses (não apresentado anteriormente na literatura), ver o arquivo “analyticalBC.R”.

Utilizando o conjunto de dados de Nadarajah, Bakouch e Tahmasbi (2011), temos que $n = 20$, $\hat{\alpha} = 3.0869$, $\hat{\theta} = 0.6731$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 0.5534$ e $\widehat{se}(\hat{\theta}) = 0.0379$. Avaliando as expressões analíticas e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> invgenhalfnormal.bc(n = 20, mle = c(3.0869, 0.6731))
```

```
alpha      theta
0.229016 -0.002953
```

```
R> pdf <- quote(sqrt(2) * pi^(-0.5) * alpha * x^(-alpha - 1) *
+   exp(-0.5 * x^(-2 * alpha) * (1 / theta)^(2 * alpha))
+   * theta^(-alpha))
R> lpdf <- quote(log(alpha) - alpha * log(x) - 0.5e0 / (x^alpha)^2*
+   theta^(-2 * alpha) - alpha * log(theta))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 20,
+   parms = c("alpha", "theta"), mle = c(3.0869, 0.6731),
+   lower = 0)$bias
```

```
alpha      theta
0.229016 -0.002953
```

26. Distribuição Exponencial Estendida de Marshal-Olkin com parâmetros de forma α e taxa λ

$$f(x | \alpha, \lambda) = \frac{\lambda \alpha \exp(-\lambda x)}{[1 - (1 - \alpha) \exp(-\lambda x)]^2}, \quad x > 0.$$

- Para as expressões dos vieses (não apresentado anteriormente na literatura), ver o arquivo “analyticalBC.R”.

Utilizando o conjunto de dados de Linhart e Zucchini (1986), temos que $n = 20$, $\hat{\alpha} = 0.2782$, $\hat{\lambda} = 0.0078$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 0.2321$ e $\widehat{se}(\hat{\lambda}) = 0.0049$. Avaliando as expressões analíticas e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> moeexp.bc(n = 20, mle = c(0.2781, 0.0078))

alpha    lambda
0.210919 0.003741

R> pdf <- quote(alpha * lambda * exp(-x * lambda) /
+   ((1- (1 - alpha) * exp(- x * lambda)))^2)
R> lpdf <- quote(log(alpha) + log(lambda) - x * lambda -
+   2 * log((1 - (1-alpha) * exp(- x * lambda))))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 20,
+   parms = c("alpha", "lambda"), mle = c(0.2781, 0.0078),
+   lower = 0)$bias

alpha    lambda
0.21086 0.00374
```

27. Distribuição Beta com parâmetros de forma α e β

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

- Para as expressões dos vieses, ver Cordeiro et al. (1997)

Utilizando o conjunto de dados de Javanshiri, Rad e Arghami (2015), temos que $n = 48$, $\hat{\alpha} = 5.941$, $\hat{\beta} = 21.2024$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 1.1812$ e $\widehat{se}(\hat{\beta}) = 4.3462$. Avaliando as expressões analíticas apresentadas em Cordeiro et al. (1997), nossas expressões analíticas e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> beta.gauss.bc(n = 48, mle = c(5.941, 21.2024))

alpha    beta
-4.784 -4.125

R> beta.bc(n = 48, mle = c(5.941, 21.2024))

alpha    beta
0.3582 1.3315
```

```

R> pdf <- quote(gamma(alpha + beta) / (gamma(alpha) * gamma(beta)) *
+   x^(alpha - 1) * (1 - x)^(beta - 1))
R> lpdf <- quote(lgamma(alpha + beta) - lgamma(alpha) -
+   lgamma(beta) + alpha * log(x) + beta * log(1 - x))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 48,
+   parms = c("alpha", "beta"), mle = c(5.941, 21.2024),
+   lower = 0, upper = 1)$bias

alpha    beta
0.3582 1.3315

```

28. Distribuição Kumaraswamy com parâmetros de forma α e β

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1 - x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

- Para as expressões dos vieses, ver Lemonte (2011).

Utilizando o conjunto de dados de Wang, Wang e Yu (2017), temos que $n = 20$, $\hat{\alpha} = 6.3478$, $\hat{\beta} = 4.4898$, $\hat{se}(\hat{\alpha}) = 1.5576$ e $\hat{se}(\hat{\beta}) = 2.0414$. Avaliando as expressões analíticas e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```

R> kum.bc(n = 20, mle = c(6.3478, 4.4898))

alpha    beta
-6.573 -13.323

R> pdf <- quote(alpha * beta * x^(alpha - 1) *
+   (1 - x^alpha)^(beta - 1))
R> lpdf <- quote(log(alpha) + log(beta) + alpha * log(x) + (beta - 1) *
+   log(1 - x^alpha))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 20,
+   parms = c("alpha", "beta"), mle = c(6.3478, 4.4898),
+   lower = 0, upper = 1)$bias

alpha    beta
0.514 1.013

```

29. Distribuição inversa Beta com parâmetros de forma α e β

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1 + x)^{-(\alpha+\beta)}, \quad x > 0.$$

- Para as expressões dos vieses, ver Stočsić e Cordeiro (2009)

Utilizando o conjunto de dados de Nadarajah (2008), temos que $n = 116$, $\hat{\alpha} = 28.5719$, $\hat{\beta} = 1.3783$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 4.0367$ e $\widehat{se}(\hat{\beta}) = 0.1637$. Avaliando as expressões analíticas e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> invbeta.bc(n = 116, mle = c(28.5719, 1.3782))

alpha    beta
534.26   17.73

R> pdf <- quote(gamma(alpha + beta) * x^(alpha - 1) *
+   (1 + x)^(- alpha - beta) / gamma(alpha)/gamma(beta))
R> lpdf <- quote(lgamma(alpha + beta) + alpha * log(x)
+   - (alpha + beta) * log(1 + x) - lgamma(alpha) - lgamma(beta))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 116,
+   parms = c("alpha", "beta"), mle = c(28.5719, 1.3782),
+   lower = 0)$bias

alpha    beta
0.8025  0.0306
```

30. Distribuição Birnbaum-Saunders com parâmetros de forma α e escala β

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\beta}{x}\right)^{1/2} + \left(\frac{\beta}{x}\right)^{3/2} \right] \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} + \frac{\beta}{x} - 2 \right) \right], \quad x > 0.$$

• Expressões dos vieses (LEMONTE; CRIBARI-NETO; VASCONCELLOS, 2007):

$$\mathcal{B}(\hat{\alpha}) = -\frac{\alpha}{4n} \left(1 + \frac{2 + \alpha^2}{\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1} \right) \quad (48)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\beta}) = \frac{\beta^2 \alpha^2}{2n [\alpha(2\pi)^{-1/2}h(\alpha) + 1]}, \quad (49)$$

where

$$h(\alpha) = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \pi e^{2/\alpha^2} \left[1 - \Phi \left(\frac{2}{\alpha} \right) \right].$$

Utilizando o conjunto de dados de Gross e Clark (1976), temos que $n = 20$, $\hat{\alpha} = 0.3149$, $\hat{\beta} = 1.8105$, $\widehat{se}(\hat{\alpha}) = 0.0498$ e $\widehat{se}(\hat{\beta}) = 0.1259$. Avaliando as expressões analíticas (48), (49) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> birnbaumsaunders.bc(n = 20, mle = c(0.3148, 1.8104))
```

```
alpha      beta
-0.011991  0.004374
```

```
R> pdf <- quote(1 / (2 * alpha * beta * sqrt(2 * pi)) *
+ ((beta / x)^0.5 + (beta / x)^1.5) *
+ exp(- 1/(2 * alpha^2) * (x / beta + beta/ x - 2)))
R> lpdf <- quote(-log(alpha) - log(beta) - 1 / (2 * alpha^2) *
+ (x / beta + beta/ x - 2) + log((beta / x)^0.5 + (beta / x)^1.5))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 20,
+ parms = c("alpha", "beta"), mle = c(0.3148, 1.8104), lower = 0)$bias
```

```
alpha      beta
-0.011991  0.004374
```

31. Distribuição Generalizada Pareto com parâmetros de forma ξ e escala σ

$$f(x | \xi, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-(1/\xi+1)}, \quad x > 0, \xi \neq 0.$$

• Expressões dos vieses (GILES; FENG; GODWIN, 2016):

$$\mathcal{B}(\hat{\xi}) = -\frac{(1 + \xi)(3 + \xi)}{n(1 + 3\xi)} \quad (50)$$

e

$$\mathcal{B}(\hat{\sigma}) = -\frac{\sigma(3 + 5\xi + 4\xi^2)}{n(1 + 3\xi)}. \quad (51)$$

Utilizando o conjunto de dados de Ross e Lott (2003), temos que $n = 58$, $\hat{\xi} = 0.736$, $\hat{\sigma} = 1.709$, $\widehat{se}(\hat{\xi}) = 0.223$ e $\widehat{se}(\hat{\sigma}) = 0.41$. Avaliando as expressões analíticas (50), (51) e a função `coxsnell.bc`, obtemos, respectivamente,

```
R> genpareto.bc(n = 58, mle = c(0.736, 1.709))
```

```
xi      sigma
-0.03486 0.08126
```

```
R> pdf <- quote(1 / sigma * (1 + xi * x / sigma)^(-(1 + 1 / xi)))
R> lpdf <- quote(-log(sigma) - (1 + 1 / xi) * log(1 + xi * x / sigma))
R> coxsnell.bc(density = pdf, logdensity = lpdf, n = 58,
+ parms = c("xi", "sigma"), mle = c(0.736, 1.709), lower = 0)$bias
```

```
xi      sigma
-0.03486 0.08126
```

4.2.2 Aplicação em dados reais

Na sequência, mostramos a eficiência das funções `cosnell.bc`, `observed.varc` e `expected.varcov` para análise de um conjunto de dados da literatura. Considerando os dados que descrevem os tempos entre pulsos elétricos sucessivos na superfície da fibra muscular isolada apresentados em Cox e Lewis (1966) e Jørgensen (1982), ajustamos as distribuições Weibull exponenciada, Weibull estendida de Marshall-Olkin, Weibull, Exponencial estendida de Marshall-Olkin e Exponencial. O tamanho amostral é de 799 observações. Estas distribuições também foram consideradas por Cordeiro e Lemonte (2013). Para cada distribuição reportamos os EMV, os EMV com correção de viés e as matrizes de variância-covariância observada obtida da Hessiana numérica $\mathbf{H}_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, variância-covariância observada obtida da Hessiana analítica $\mathbf{H}_2^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, variância-covariância esperada $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ e variância-covariância esperada avaliada nos EMV com correção de viés $\mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$. Os EMV e a matriz $\mathbf{H}_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ foram obtidas pela função `fitdist` da biblioteca `fitdistrplus` (DELIGNETTE-MULLER; DUTANG; SIBERCHICOT, 2017).

É importante enfatizar que para as distribuições Weibull exponenciada e Weibull estendida de Marshall-Olkin, não é possível obter expressões analíticas para as correções de viés. A distribuição Weibull exponencial foi proposta por Mudholkar e Srivastava (1993). Sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x \mid \lambda, \beta, \alpha) = \alpha \beta \lambda x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\beta} \left(1 - e^{-\lambda x^\beta}\right)^{\alpha-1},$$

em que $\lambda > 0$ é o parâmetro de escala e $\beta, \alpha > 0$ são parâmetros de forma.

A distribuição Weibull estendida de Marshall-Olkin foi introduzida por Marshall e Olkin (1997). Sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x \mid \lambda, \beta, \alpha) = \frac{\alpha \beta \lambda x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\beta}}{(1 - \bar{\alpha} e^{-\lambda x^\beta})^2},$$

em que $\lambda > 0$ é o parâmetro de escala, $\beta > 0$ é o parâmetro de forma, $\alpha > 0$ é um parâmetro adicional de forma e $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$.

As estimativas dos parâmetros e suas versões com correção de viés são expostas na Tabela 7. Podemos verificar que os EMV corrigidos para α e λ das distribuições MOE-Weibull e Exp-Weibull são bastante diferentes dos EMV originais. Para as outras distribuições não é possível observar muita diferença em virtude do tamanho amostral dos dados.

Tabela 7: EMV e suas versões com correção de viés.

| Distribuição | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\lambda}$ | $\tilde{\alpha}$ | $\tilde{\beta}$ | $\tilde{\lambda}$ |
|-----------------|----------------|---------------|-----------------|------------------|-----------------|-------------------|
| MOE-Weibull | 0.3460 | 1.3247 | 0.0203 | 0.3283 | 1.3240 | 0.0188 |
| Exp-Weibull | 1.9396 | 0.7677 | 0.2527 | 1.8973 | 0.7625 | 0.2461 |
| Weibull | – | 1.0829 | 0.0723 | – | 1.0811 | 0.0723 |
| MOE-Exponencial | 1.1966 | – | 0.0998 | 1.1820 | – | 0.0994 |
| Exponencial | – | – | 0.0913 | – | – | 0.0912 |

Um fato crucial na inferência estatística é avaliar a acurácia dos estimadores. Sob o paradigma da verossimilhança existem duas formas comuns para isso, através das matrizes inversa da informação de Fisher observada ou inversa da informação de Fisher esperada. Os resultados abaixo mostram grande diferenças entre as matrizes de informação observada \mathbf{H}^{-1} e esperada \mathbf{I}^{-1} . Como demonstrado por Cao (2013), a matriz \mathbf{I}^{-1} supera a matriz \mathbf{H}^{-1} sob o critério de erro quadrático, portanto com a biblioteca **mle.tools** os pesquisadores podem escolher um deles e não optar pela mais fácil. Por fim, no geral, observamos que os EMV corrigidos por viés diminuem a variância das estimativas.

- Distribuição Weibull Exponenciada:

$$\mathbf{H}_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00726 & -0.00717 & 0.03564 \\ -0.00717 & 0.00718 & -0.03493 \\ 0.03564 & -0.03493 & 0.18045 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00729 & -0.00720 & 0.03579 \\ -0.00720 & 0.00721 & -0.03509 \\ 0.03579 & -0.03509 & 0.18120 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00532 & -0.00524 & 0.02609 \\ -0.00524 & 0.00527 & -0.02545 \\ 0.02609 & -0.02545 & 0.13333 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00510 & -0.00510 & 0.02482 \\ -0.00510 & 0.00519 & -0.02454 \\ 0.02482 & -0.02454 & 0.12590 \end{bmatrix}.$$

- Distribuição Weibull estendida de Marshall-Olkin:

$$\mathbf{H}_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & -0.00036 & 0.00052 \\ -0.00036 & 0.00361 & -0.00430 \\ 0.00052 & -0.00430 & 0.00748 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00005 & -0.00047 & 0.00068 \\ -0.00047 & 0.00468 & -0.00582 \\ 0.00068 & -0.00582 & 0.00967 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00006 & -0.00056 & 0.00082 \\ -0.00056 & 0.00542 & -0.00699 \\ 0.00082 & -0.00699 & 0.01146 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00005 & -0.00051 & 0.00072 \\ -0.00051 & 0.00526 & -0.00651 \\ 0.00072 & -0.00651 & 0.01030 \end{bmatrix}.$$

- Distribuição Weibull:

$$\mathbf{H}_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & -0.00018 \\ -0.00018 & 0.00086 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & -0.00018 \\ -0.00018 & 0.00087 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & -0.00018 \\ -0.00018 & 0.00089 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & -0.00018 \\ -0.00018 & 0.00089 \end{bmatrix}.$$

- Distribuição Exponencial estendida de Marshall-Olkin:

$$\mathbf{H}_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & 0.00081 \\ 0.00081 & 0.02022 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & 0.00081 \\ 0.00081 & 0.02023 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & 0.00083 \\ 0.00083 & 0.02094 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} 0.00004 & 0.00082 \\ 0.00082 & 0.02047 \end{bmatrix}.$$

- Distribuição Exponencial:

$$\mathbf{H}_1^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.000010433, \quad \mathbf{H}_2^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.000010436,$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.000010436, \quad \mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = 0.000010410.$$

5 Conclusão

Neste projeto foi estudado em detalhes as três abordagens presente na literatura para correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança, uma tarefa muito usual no estudo da teoria assintótica. Considerando a distribuição unit-Gamma, pouco explorada na literatura, deduzimos correções analíticas para os vieses de seus parâmetros e mostramos por meio de um estudo de simulação Monte Carlo que os estimadores propostos são não viesados e consistentes.

Uma revisão sistemática apontou que diversos pesquisadores vem desenvolvendo estimadores corrigidos até segunda ordem utilizando a metodologia proposta por Cox e Snell (1968). Contudo, as expressões analíticas são notoriamente complicadas ou até mesmo impossíveis de serem deduzidas. Nesse contexto, foi mostrado que a biblioteca **mle.tools** pode ser uma alternativa bastante eficiente para obtenção de estimadores corrigidos. A utilidade da função **coxsnell.bc** foi testada e comparada com as expressões analíticas dos vieses para trinta e uma distribuições de probabilidade contínuas.

Por fim, é importante destacar que ao longo deste projeto os seguintes artigos foram aceitos ou publicados:

- Mazucheli, Menezes e Nadarajah (2017) — MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F. B.; NADARAJAH, S. **mle.tools: An R Package for Maximum Likelihood Bias Correction**. R Journal, v. 9, p. 268–290, 2017.
- Mazucheli, Menezes e Dey (2017) — MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F. B.; DEY, S. **Improved Maximum Likelihood Estimators for the Parameters of the unit-Gamma Distribution**. Communications in Statistics - Theory e Methods, v. 47, p. 1–12, 2017.
- Mazucheli, Menezes e Dey (2018) — MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F. B.; DEY, SANKU. **Bias-Corrected Maximum Likelihood Estimators of the Parameters of the Inverse Weibull Distribution**. Communications in Statistics - Simulation e Computation, 2018. (to appear).
- Mazucheli, Menezes e Chakraborty (2018) — MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F. B.; CHAKRABORTY, S. **On the one parameter unit-lindley distribution and its associated regression model for proportion data**. Journal of Applied Statistics, Taylor & Francis, p. 1–15, 2018. (in press).
- Menezes e Mazucheli (2018) — MENEZES, A. F. B.; MAZUCHELI, J.. **Improved Maximum Likelihood Estimators for the Parameters of the Johnson S_B Distribution**. Communications in Statistics - Simulation e Computation, 2018. (to appear).

Além disso, os seguinte artigos estão em processo de avaliação ou submissão:

- **Improved Parameter Estimation of Chaudhry e Ahmad Distribution with Climate Applications** por Josmar Mazucheli, André F. B. Menezes, Sanku Dey e Saralees Nadarajah. Em avaliação pela revista Journal of Statistical Computation e Simulation.
- **Bias-corrected maximum likelihood estimation of the parameters of the Gamma-Uniform distribution** por André F. B. Menezes, Josmar Mazucheli, Ricardo P. de Oliveira e Subrata Chakraborty. Em avaliação pela revista Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.
- **Bias-Corrected Maximum Likelihood Estimators for the unit-Weibull Distribution** por Josmar Mazucheli, André F. B. Menezes e M. E. Ghitany. Em processo de submissão.

Referências

- ACHCAR, J. A. et al. A Bayesian approach for stable distributions: Some computational aspects. *Open Journal of Statistics*, v. 3, n. 04, p. 268, 2013.
- ALZAATREH, A. et al. The Gamma Half-Cauchy distribution: Properties and applications. *HACETTEPE Journal of Mathematics and Statistics*, v. 45, n. 4, p. 1143–1159, 2016.
- BADER, M.; PRIEST, A. Statistical aspects of fibre and bundle strength in hybrid composites. *Progress in Science and Engineering of Composites*, p. 1129–1136, 1982.
- BHAUMIK, D.; KAPUR, K.; GIBBONS, R. Testing parameters of a Gamma distribution for small samples. *Technometrics*, v. 51, n. 3, p. 326–334, 8 2009.
- CAO, X. *Relative performance of expected and observed Fisher information in covariance estimation for maximum likelihood estimates*. Tese (Doutorado) — Johns Hopkins University, 2013.
- CHHIKARA, R.; FOLKS, J. The inverse gaussian distribution as a lifetime model. *Technometrics*, v. 19, n. 4, p. 461–468, 1977.
- CORDEIRO, G. M.; BRITO, R. dos S. The Beta power distribution. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, v. 26, n. 1, p. 88–112, 2012.
- CORDEIRO, G. M.; CRIBARI-NETO, F. *An Introduction to Bartlett Correction and Bias Reduction*. New York: SpringerBriefs in Statistics, 2014.
- CORDEIRO, G. M.; KLEIN, R. Bias correction in ARMA models. *Statistics & Probability Letters*, v. 19, n. 3, p. 169–176, 1994.
- CORDEIRO, G. M.; LEMONTE, A. J. On the Marshall-Olkin extended Weibull distribution. *Statistical Papers*, v. 54, n. 2, p. 333–353, 2013.
- CORDEIRO, G. M. et al. Bias-corrected maximum likelihood estimation for the Beta distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 58, n. 1, p. 21–35, 1997.
- COX, D. R.; HINKLEY, D. V. *Theoretical Statistics*. CRC Press, 1979.
- COX, D. R.; LEWIS, P. A. W. *The statistical analysis of series of events*. Springer, Netherlands, 1966.
- COX, D. R.; SNELL, E. J. A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B.*, v. 30, n. 2, p. 248–275, 1968.
- CRIBARI-NETO, F.; VASCONCELLOS, K. L. P. Nearly unbiased maximum likelihood estimation for the Beta distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 72, n. 2, p. 107–118, 2002.
- DATTA, D.; DATTA, D. Comparison of Weibull distribution and exponentiated Weibull distribution based estimation of mean and variance of wind data. *International Journal of Energy, Information and Communications*, v. 4, n. 4, p. 1–11, 2013.

- DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. *Bootstrap Methods and Their Applications*. New York, Cambridge University Press, 1997.
- DELIGNETTE-MULLER, M. et al. Quantitative risk assessment for Escherichia Coli o157: H7 in frozen ground beef patties consumed by young children in french households. *International Journal of Food Microbiology*, v. 128, n. 1, p. 158–164, 2008.
- DELIGNETTE-MULLER, M. L.; DUTANG, C.; SIBERCHICOT, A. **ftdistrplus**: *Help to Fit of a Parametric Distribution to Non-Censored or Censored Data*. 2017. R package version 1.0-8.
- DOORNIK, J. A. *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*, 3rd ed. London: Timberlake Consultants Press and Oxford, 2007.
- EDWARDS, A. W. F. *Likelihood (Expanded Edition)*. Baltimore Johns Hopkins University Press, 1992.
- EFRON, B. *The Jackknife, the Bootstrap and other resampling plans*. SIAM, 1982. v. 38.
- EFRON, B.; JOHNSTONE, I. M. Fisher's information in terms of the hazard rate. *The Annals of Statistics*, v. 18, n. 1, p. 38–62, 1990.
- EFRON, B.; JOHNSTONE, I. M. Fisher's information in terms of the hazard rate. *The Annals of Statistics*, v. 18, n. 1, p. 38–62, 1990.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An introduction to the Bootstrap*. New York, Chapman & Hall/CRC, 1993.
- FERRARI, S. L.; CRIBARI-NETO, F. On bootstrap and analytical bias corrections. *Economics Letters*, v. 58, n. 1, p. 7–15, 1998. ISSN 0165-1765.
- FIRTH, D. Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, [Oxford University Press, Biometrika Trust], v. 80, n. 1, p. 27–38, 1993. ISSN 00063444.
- GHITANY, M. E. et al. Power Lindley distribution and associated inference. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 64, p. 20–33, 2013.
- GHITANY, M. E.; ATIEH, B.; NADARAJAH, S. Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 78, n. 4, p. 493–506, 2008.
- GILES, D. E. Bias reduction for the maximum likelihood estimators of the parameters in the Half-Logistic distribution. *Communication in Statistics - Theory and Methods*, v. 41, n. 2, p. 212–222, 2012.
- GILES, D. E. *A Note on Improved Estimation for the Topp-Leone Distribution*. 2012.
- GILES, D. E.; FENG, H. *Bias of the maximum likelihood estimators of the two-parameter Gamma distribution revisited*. 2009.
- GILES, D. E.; FENG, H.; GODWIN, R. T. On the bias of the maximum likelihood estimator for the two-parameter Lomax distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 42, n. 11, p. 1934–1950, 2013.

- GILES, D. E.; FENG, H.; GODWIN, R. T. Bias-corrected maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized Pareto distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, v. 45, n. 8, p. 2465–2483, 2016.
- GOMES, A. E. et al. A new lifetime model: The Kumaraswamy generalized Rayleigh distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 84, n. 2, p. 290–309, 2014.
- GRASSIA, A. On a family of distributions with argument between 0 and 1 obtained by transformation of the Gamma distribution and derived compound distributions. *Australian Journal of Statistics*, Blackwell Publishing Ltd, v. 19, n. 2, p. 108–114, 1977. ISSN 1467-842X.
- GROSS, A. J.; CLARK, V. A. *Survival Distributions: Reliability Applications in the Biometrical Sciences*. John Wiley & Sons Inc., 1976.
- JAVANSHIRI, Z.; RAD, A. H.; ARGHAMI, N. R. Exp-Kumaraswamy distributions: Some properties and applications. *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran*, v. 26, n. 1, p. 57–69, 2015.
- JOHNSON, P. H.; QI, Y.; CHUEH, Y. C. *CSECK MLE Bias Calculation*. Urbana-Champaign, Champaign, IL, 2012.
- JØRGENSEN, B. *Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution*. Springer, 1982.
- KAY, S. Asymptotic maximum likelihood estimator performance for chaotic signals in noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 43, n. 4, p. 1009–1012, 1995.
- KUMAGAI, S.; MATSUNAGA, I. Changes in the distribution of short-term exposure concentration with different averaging times. *American Industrial Hygiene Association*, Taylor & Francis, v. 56, n. 1, p. 24–31, 1995.
- KUMAGAI, S. et al. Assessment of occupational exposures to industrial hazardous substances. iii. On the frequency distribution of daily exposure averages (8-h twa). *Japanese Journal of Industrial Health*, v. 31, n. 4, p. 216–226, 1989.
- KUNDU, D. Discriminating between normal and Laplace distributions. p. 65–79, 2005.
- LAGOS-ÀLVAREZ, B.; JIMÉNEZ-GAMERO, M. D.; ALBA-FERNÁNDEZ, V. Bias correction in the Type I Generalized Logistic distribution. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, v. 40, n. 4, p. 511–531, 2011.
- LAWLESS, J. F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data, Second Edition*. John Wiley & Sons, 2011. v. 362.
- LEHMANN, E. *Elements of Large-Sample Theory*. Springer-Verlag New York, 1999.
- LEHMANN, E. J.; CASELLA, G. *Theory of Point Estimation*. Springer Verlag, 1998.
- LEMONTE, A. J. Improved point estimation for the Kumaraswamy distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 81, n. 12, p. 1971–1982, 2011.

- LEMONTE, A. J.; CRIBARI-NETO, F.; VASCONCELLOS, K. L. Improved statistical inference for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, n. 9, p. 4656–4681, 2007. ISSN 0167-9473.
- LING, X.; GILES, D. E. Bias reduction for the maximum likelihood estimator of the parameters of the generalized Rayleigh family of distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 43, n. 8, p. 1778–1792, 2014.
- LINHART, H.; ZUCCHINI, W. *Model Selection*. Wiley, 1986.
- MARSHALL, A. W.; OLKIN, I. A New Method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, v. 84, n. 3, p. 641–652, 1997.
- MAZUCHELI, J.; DEY, S. Bias-corrected maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized Half-Normal distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 88, n. 6, p. 1027–1038, 2018.
- MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F. B.; CHAKRABORTY, S. On the one parameter unit-lindley distribution and its associated regression model for proportion data. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, p. 1–15, 2018. (in press).
- MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F. B.; DEY, S. Improved maximum-likelihood estimators for the parameters of the unit-Gamma distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 47, p. 1–12, 2017.
- MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F. B.; DEY, S. Bias-corrected maximum likelihood estimators of the parameters of the Inverse Weibull distribution. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Taylor & Francis, 2018. (to appear).
- MAZUCHELI, J.; MENEZES, A. F. B.; NADARAJAH, S. mle.tools: An R Package for Maximum Likelihood Bias Correction. *The R Journal*, v. 9, n. 2, p. 268–290, 2017. Disponível em: <<https://journal.r-project.org/archive/2017/RJ-2017-055/index.html>>.
- MENEZES, A. F. B.; MAZUCHELI, J. Improved maximum likelihood estimators for the parameters of the johnson S_B distribution. *Communications in Statistics - Simulation e Computation*, 2018. (to appear).
- MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 42, n. 2, p. 299–302, Jun 1993.
- NADARAJAH, S. A truncated inverted Beta distribution with application to air pollution data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, Springer, v. 22, n. 2, p. 285–289, 2008.
- NADARAJAH, S.; BAKOUCH, H. S.; TAHMASBI, R. A generalized Lindley distribution. *Sankhya B*, Springer, v. 73, n. 2, p. 331–359, 2011.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. On the alternative to the Weibull function. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 74, n. 3, p. 451–456, 2007.

- NICHOLS, M. D.; PADGETT, W. A Bootstrap control chart for Weibull percentiles. *Quality and reliability engineering international*, Wiley Online Library, v. 22, n. 2, p. 141–151, 2006.
- RAQAB, M. Z.; MADI, M. T.; KUNDU, D. Estimation of $P(Y < X)$ for the three-parameter generalized Exponential distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 37, n. 18, p. 2854–2864, 2008.
- RATNAPARKHL, M. V.; MOSIMANN, J. E. On the normality of transformed Beta and unit-Gamma random variables. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 19, n. 10, p. 3833–3854, 1990.
- REATH, J.; DONG, J.; WANG, M. Improved parameter estimation of the Log-Logistic distribution with applications. *Computational Statistics*, v. 33, n. 1, p. 339–356, 2018.
- ROSS, T.; LOTT, N. *A climatology of 1980 – 2003 extreme weather and climate events*. 2003.
- SAHA, K.; PAUL, S. Bias-corrected maximum likelihood estimator of the negative Binomial dispersion parameter. *Biometrics*, [Wiley, International Biometric Society], v. 61, n. 1, p. 179–185, 2005.
- SCHWARTZ, J.; GILES, D. E. Bias-reduced maximum likelihood estimation of the zero-inflated Poisson distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 45, n. 2, p. 465–478, 2016.
- SCHWARTZ, J.; GODWIN, R. T.; GILES, D. E. Improved maximum-likelihood estimation of the shape parameter in the Nakagami distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 83, n. 3, p. 434–445, 2013.
- SHANKER, R. Shanker distribution and its applications. *International Journal of Statistics and Applications*, v. 5, n. 6, p. 338–348, 2015.
- SHARMA, V. K. et al. The inverse Lindley distribution: A stress-strength reliability model with application to head and neck cancer data. *Journal of Industrial and Production Engineering*, v. 32, n. 3, p. 162–173, 2015.
- SINGH, A. K.; SINGH, A.; MURPHY, D. J. On bias corrected estimators of the two parameter Gamma distribution. In *Information Technology - New Generations (ITNG), 2015 12th International Conference on*. 2015. p. 127–132.
- STOČSIĆ, B. D.; CORDEIRO, G. M. Using Maple and Mathematica to derive bias corrections for two parameter distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 79, n. 6, p. 751–767, 2009.
- TADIKAMALLA, P. R. On a family of distributions obtained by the transformation of the Gamma distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 13, n. 3–4, p. 209–214, 1981.
- TAHIR, M. et al. The Gumbel-Lomax distribution: Properties and applications. *Journal of Statistical Theory and Applications*, v. 15, n. 1, p. 61–79, 2016.

TEIMOURI, M.; NADARAJAH, S. Bias corrected MLEs for the Weibull distribution based on records. *Statistical Methodology*, v. 13, p. 12–24, 2013.

TEIMOURI, M.; NADARAJAH, S. Bias corrected MLEs under progressive type-II censoring scheme. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 86, n. 14, p. 2714–2726, 2016.

WANG, B. X.; WANG, X. K.; YU, K. Inference on the Kumaraswamy distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 46, n. 5, p. 2079–2090, 2017.

WANG, M.; WANG, W. Bias-corrected maximum likelihood estimation of the parameters of the weighted Lindley distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 46, n. 1, p. 530–545, 2017.

ZHANG, G.; LIU, R. Bias-corrected estimators of scalar skew Normal. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, v. 46, n. 2, p. 831–839, 2015.