

- Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât lista
 $v = [v_1, v_2, v_3]^T$ să fie o bază a lui \mathbb{R}^3 , unde:

$$v_1 = (a, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, a, 1)$$

$$v_3 = (1, 1, a)$$

v este o bază a lui $\mathbb{R}^3 \Rightarrow v$ este linier independentă,

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 \neq 0$$

P.r.că $\alpha_1 (a, 1, 1) + \alpha_2 (1, a, 1) + \alpha_3 (1, 1, a) = 0$

$$(\alpha_1 \cdot a, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2 \cdot a, \alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3 \cdot a, \alpha_3, \alpha_3 \cdot a) = 0$$
 $\Rightarrow (\alpha_1 \cdot a + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot a, \alpha_1 + \alpha_2 \cdot a + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot a) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 a + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot a = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \cdot a + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot a = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - (a + a + a) =$$

$$= a^3 + 2 - 3a = a^3 - 3a + 2$$

$$\begin{aligned} a^3 - 3a + 2 &= a^3 - 4a + a + 2 = a(a^2 - 4) + (a + 2) = \\ &= a(a - 2)(a + 2) + (a + 2) \cdot (a - 2)(a + 2) = \\ &= (a + 2) (a^2 - 2a + 1) = (a + 2) (a - 1)^2 \end{aligned}$$

$$(a + 2) (a - 1)^2 = 0$$

$$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{ sau } (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \text{Pf. } a \in \{-2, 1\} \Rightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v$ este linear dependentă |

Dar v este linear independentă \Rightarrow

$\exists t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, v este o bază
a lui \mathbb{R}^3