

• Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât lista $v = [v_1, v_2, v_3]^T$ este o bază a lui \mathbb{R}^3 , unde:

$$v_1 = (a, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, a, 1)$$

$$v_3 = (1, 1, a)$$

v este o bază a lui $\mathbb{R}^3 \Rightarrow v$ este linear independentă,

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 \neq 0$$

Ppt. că $\alpha_1 (a, 1, 1) + \alpha_2 (1, a, 1) + \alpha_3 (1, 1, a) = 0$

$$(\alpha_1 \cdot a, \alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_2 \cdot a, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3 \cdot a) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 \cdot a + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 a + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - (a + a + a) = a^3 - 3a + 2$$

$$a^3 - 3a + 2 = a^3 - 4a + a + 2 = a(a^2 - 4) + (a + 2) =$$

$$= a(a-2)(a+2) + (a+2) = (a+2)(a(a-2) + 1) =$$

$$= (a+2)(a^2 - 2a + 1) = (a+2)(a-1)^2$$

$$(a+2)(a-1)^2 = 0$$

$$a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

$$\text{sau } (a-1)^2=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \text{Pt. } a \in \{-2, 1\} \Rightarrow \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v$ este liniear dependentă

Dar v este liniear independentă \Rightarrow

$\Rightarrow (\forall) a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, v este o bază
a lui \mathbb{R}^3