Mihăilă Andra

Test Algebră

13.01.2021

1. a). O funcție $f: A \to B$ se numește inversabilă dacă există o altă funcție $f': B \to A$ astfel încât $f' \circ f = 1_A$ și $f \circ f' = 1_B$.

- Un grup ciclic este un grup care este generat de un singur element al său.
- Un corp este un inel unitar $(K, +, \cdot)$ cu proprietatea că oricare $x \in K^*$ este inversabil (în raport cu $\cdot$). (K^* se notează cu $K^* = K \setminus \{0\}$). De asemenea, inelul unitar K este corp atunci când $(K^*, \cdot)$ este un grup.
- Se numește directă o sumă $S+T$ a două subspații S și T care satisface condițiile de echivalență următoare:
  1. $S \cap T = 0$
  2. Scrierea oricărui vector din $S+T$ ca o sumă dintre un vector din S și unul din T este unică.

Notare: $S \oplus T = S + T$.

Nucleul unei aplicații liniare este ~~imaginea imaginea~~ mulțimea: $\operatorname{Ker} f = \{ x \in A \mid f(x) = 0 \}$, pentru $f: A \to B$ o aplicație liniară.

b) - Relație de echivalență pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$:

$(a, b) \sim (c, d)$ dacă $ad = cb$

- Funcție injectivă:

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = 2x + 1$

- ~~Ex~~ Subgrupuri netriviale ale lui $\mathbb{Z}_8$:

$A = \{0, 4\}$

$H = \{0, 2, 4, 6\}$

- Vectori liniari independenți pe $\mathbb{R}^2$:

$v_1 = [0, 1]^t$ $v_2 = [1, 0]^t$

- Nucleu al unui endomorfism al $\mathbb{R}$-spațiului vectorial $\mathbb{R}^2$

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in (-\infty, 0] \\ x+3, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in (0, \infty) \end{cases} \quad f'(0) \text{ nu există}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$f(x) = y \iff \begin{cases} 2x+1 = y, & x \in (-\infty, 0] \\ x+2 = y, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & \frac{y-1}{2} \in (-\infty, 0] \left(\frac{y-1}{2} \leq 0 \right) \\ x = y-3, & y-3 \in (0, \infty) \quad (y-3 > 0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{y-1}{2}, & y \leq 1, \quad (y \in (\infty, 1]) \\ x = y-3, \Rightarrow & y > 3, \quad (y \in (3, +\infty)) \end{cases}$$

$(-\infty, 1] \cup (3, \infty) \neq \mathbb{R} \Rightarrow$ ~~f este surj~~ f nu este surj

$(-\infty, 1] \cap (3, \infty) = \emptyset$
sol. unică pe ramură $\Big| \Rightarrow f$ este inj.

inj g

Contra exemplu

$x_1 = -2 \Rightarrow f(x_1) = 5$

$x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = 5$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g$ nu este inj.

Surj. g

$\forall\, y \in [1, +\infty)$, $\exists\, x \in \mathbb{R}$ a.i. $f(x) = y$

C.E. $x^2+1 \geq 1 \;|-1$

$x^2 \geq 0$ (A)

$x^2 + 1 = y$

$x^2 = y-1$

$x = \pm\sqrt{y-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ este surj.

b) f inj. / f nu e surj. $\Rightarrow f$ nu este inv/bij $\Rightarrow \nexists\, f^{-1}$

g nu e inj. / g surj $\Rightarrow g$ nu este inv/bij $\Rightarrow \nexists\, g^{-1}$

c) $f \circ g = f(g(x))$

$g(x) \in [1, \infty) \Rightarrow g(x) \geq 1 \Rightarrow f(g(x)) = g(x)+3$ cu $g(x) \in [1, \infty)$

$g(x)+3 = x^2+1+3 = x^2+4$

$f(g(x)) = x^2+4$ există $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$g \circ f = g(f(x))$

Pt. $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 1 = 4x^2+4x+2$

$\underbrace{(2x+1)^2}_{>0}+1 \geq 1 \Rightarrow g(f(x)) \in [1,\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x))$ are sens pt. $x \in (-\infty, 0]$

Pt. $x = (0,\infty)$

$g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2+1 = x^2+6x+10$

$\underbrace{(x+3)^2}_{>0}+1 \geq 1 \Rightarrow g(f(x)) \in [1,\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x))$ are sens pt $x \in (0,\infty)$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x))$ are sens $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$

d)

Scanned with CamScanner

③ $G=\{1,-1,i,-i\}$

b) $f:\mathbb{Z}\to G$

$$f(k)=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}$$

f morfism $\Rightarrow f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)\ (\forall)\ x,y\in G$

$$f(xy)=\cos\frac{2xy\pi}{4}+i\sin\frac{2xy\pi}{4}\quad(1)$$

$$f(x)\cdot f(y)=\left(\cos\frac{2x\cancel{y}\pi}{4}+i\sin\frac{2x\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{2y\pi}{4}+i\sin\frac{2y\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{2xy\pi}{4}+i\sin\frac{2xy\pi}{4}\quad(2)$$

Din (1) + (2) $\Rightarrow f$ morfism (A)

4) $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ $\quad v_1 = (1,1,1,1)$

$T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ $\quad v_2 = (1,0,1,-1)$

$u_1 = (1,2,1,-2)$ $\quad v_3 = (1,3,0,-3)$

$u_2 = (2,3,1,0)$

$u_3 = (1,2,2,-3)$

a) S este subspatiu in $\mathbb{R}^3$

i) $0 \in S$

ii) $(\forall)\, x, y \in S \Rightarrow x+y \in S$

iii) $(\forall)\, x \in S,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in S$

b) dim S = rangul matricii (u_1, u_2, u_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_2 - 2L_1}{\overset{L_3 - L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(u_1, u_2, u_3) = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ e bază in S

$$\det(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{liniar independenti}$$

$\dim T$ = rangul matricei (v_1, v_2, v_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 - L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{L_3 + 2L_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ rang $= 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1,$$ liniar independenti $\Big/ \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ formează o bază în T

$\dim S + \dim T = \dim(S + T) + \dim(S \cap T)$

$\dim(S+T) =$ rang $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4 = 4$

$\Rightarrow 3 + 3 = 4 + \dim(S \cap T) \Rightarrow \dim(S \cap T) = 2$

5. $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$

$e = [e_1, e_2, e_3]^t$ $\qquad e_1 = [1, 0, 0]$

$\qquad e_2 = [0, 1, 0]$

$[f]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad e_3 = [0, 0, 1]$

a) $f(x) = ?\ \forall,\ x \in \mathbb{R}^3$

$$[f]_e = \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(e_1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3 = 1 \cdot [1, 0, 0] + 0[0, 1, 0] + 1 \cdot [0, 0, 1]$

$= [1, 0, 0] - [0, 0, 1] = [1, 0, -1]$

$f(e_2) = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 = [-1, 0, 0] + [0, 0, 1] =$

$= [-1, 0, 1]$

$f(e_3) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = [0, 0, 0]$

$f[x_1, x_2, x_3] = [a - b, 0, b - a]$

b) $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$

$\operatorname{im} f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(e_3) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow e_3 = [0,0,1]^t$ o bază din $\operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 1$

$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^3$

$1 + \dim(\operatorname{Im} f) = 3 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 2$

Cei doi vectori din $\operatorname{im} f$ sunt $[1,0,0]^t$ și $[0,1,0]^t$, adică e_1 și e_2

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ vectorii sunt liniar independenți, $\Rightarrow$ sunt baze

c) $b = [e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3]$

$b = [(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)]$

$e_1 + e_2 = [1,0,0] + [0,1,0] = [1,1,0]$

$e_1 + e_2 + e_3 = [1,0,0] + [0,1,0] + [0,0,1] = [1,1,1]$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$

b bază $\Rightarrow$ b liniar independent $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot (e_1 + e_2) + \alpha_3 \cdot (e_1 + e_2 + e_3) \neq 0$

$[\alpha_1, 0, 0] + [\alpha_2, \alpha_2, 0] + [\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3] \neq 0$

$[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3] \neq 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0 \\ \alpha_3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1^3 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow b$ este liniar independent $\Rightarrow$

$\Rightarrow b$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$

$$[f]_b = \begin{bmatrix} f(b_1) \\ f(b_2) \\ f(b_3) \end{bmatrix}$$

cu $b_1 = [1, 0, 0]$

$b_2 = [1, 1, 0]$

$b_3 = [1, 1, 1]$

$f(x) = [a - b, 0, b - a]$

$f(b_1) = [1, 0, -1]$

$f(b_2) = [0, 0, 0]$

$f(b_3) = [0, 0, 0]$

$$\Rightarrow [f]_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$