CURS 8

Modele matematice în dinamica unei populații

$x(t)$ – mărimea unei pop. la momentul $t>0$

x_0 – mărimea pop. la mom. ~~inti~~ inițial $t_0=0$

$$\boxed{x(0)=x_0}$$

$x'(t)$ – viteza cu care se modifică mărimea pop.

Ipoteze:

– se consid. o pop. izolată – o pop. a cărui mod de viață nu este influențat de coexistența cu alte pop.

– fenomenul de migrație este neglijat (pop. închisă).

$$\frac{x'(t)}{x(t)}$$ – rata de creștere „per capita" (pe cap de locuitor)

1) Modelul creșterii exponențiale (Malthus (1798))

- rata de creștere per capita este constantă în timp și este dată de diferența dintre rata nașterilor per capita și rata deceselor per capita.

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = b - \mu = \text{const.} \qquad \begin{array}{l} b = \text{const} \\ \mu = \text{const.} \end{array}$$

b - rata nașterilor per capita

μ - rata deceselor per capita.

$$r = b - \mu$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{x} = r \Rightarrow x' = rx \quad , r \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x' = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

modelul lui Malthus

$x_0 > 0$

$x' = rx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = rx \Rightarrow$

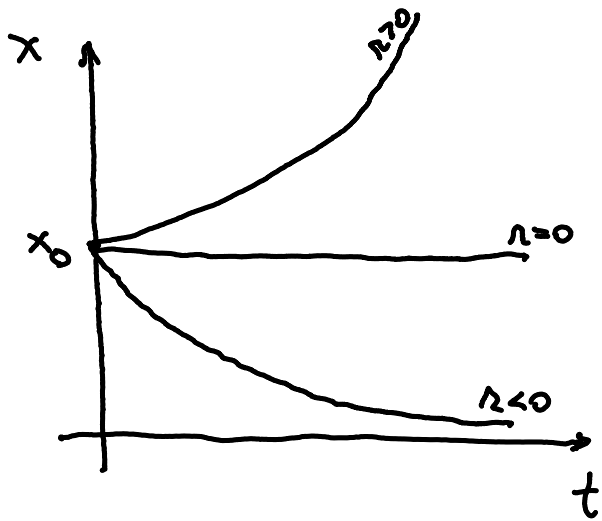
$\Rightarrow \frac{dx}{x} = r.dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int r.dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x = rt + \ln c$

$\Rightarrow x(t) = c.e^{rt}, c \in \mathbb{R}$ sol. gen. a ec. dif.

$x(0) = x_0 \Rightarrow c = x_0$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 . e^{rt}}$ sol. modelului lui Malthus.



1. dacă $r<0 \Leftrightarrow b<\mu$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

$\Rightarrow$ pop. dispare în timp

2. dacă $r=0 \Leftrightarrow b=\mu$

$\Rightarrow x(t) \equiv x_0$

3. dacă $r>0 \Leftrightarrow b>\mu$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$

pop. crește nelimitat.

2) <u>Modelul logistic</u> (Verhulst (1838))

- rata creștere per capita nu este constantă în timp, aceasta are o tendință de descreștere atunci când pop. crește. Acest fenomen se datorează competiției pt resurse între membri pop.

- se consideră rata creșteri per capita e o funcție ce depinde de mărimea pop. la mom. resp.

$$R = r(x).$$

$r(x)$ trebuie să satisfacă următ. propr.

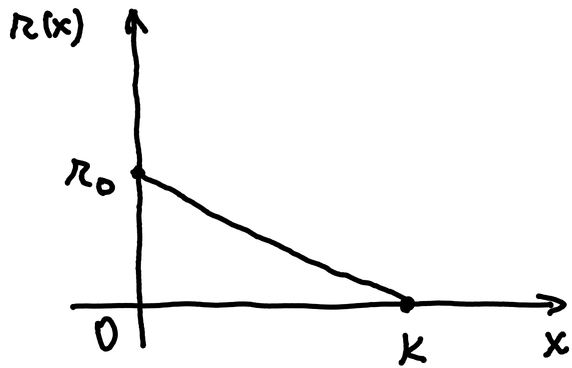
- $r(x)$ este o fct descrescăt.
- K = constanta de suport a mediului =
  = pop. maximă pe care mediul o poate întreține în viață. $(K>0)$.

dacă $x \to K \Rightarrow r(x) \to 0$, adică dacă pop. tinde către K atunci rata creștere tinde la 0, pop. având resurse puține de dezv.

- dacă val. x este mică în comparație cu val. K, adică fenomenul de competiție pt resurse este mic atunci

$$r(x) \to r_0$$

r_0 numită rata de creștere nerestrictivă coresp. modelului creșterii exp. deoarece mediul asigură resurse mai mult decât sunt necesare pop. resp.



funcția $r(x)$ interpolează punctele $(K,0)$ și $(0,r_0)$
cea mai simplă interpolare este interpolarea liniară

$$\Rightarrow r(x) = r_0\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{x} = r(x) \longrightarrow \frac{x'}{x} = r_0\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = r_0 x\left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad x_0 > 0,\ K > 0.$$

$x' = f(x)$ unde $f(x) = r_0 x\left(1 - \frac{x}{K}\right) = -\frac{r_0}{K} \cdot x^2 + r_0 x$

ec. autonomă.

<u>Puncte de echilibru</u> sol. de echil: $x(t) \equiv x^*$

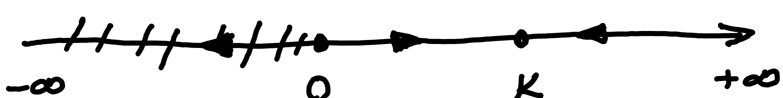
$f(x) = 0 \Longrightarrow r_0 x\left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0$ (presup. $r_0 \neq 0$).

$x_1^* = 0$, $x_2^* = K$ puncte de echilibru.

<u>Stabilitatea punctelor de echilibru</u>

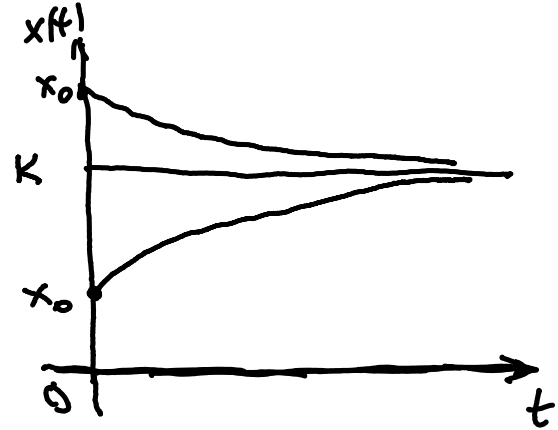
1. <u>$r_0 > 0$</u>.

x		0		K	
$f(x)$	$- - -$ $\leftarrow$	0	$+ + +$ $\rightarrow$	0	$- -$ $\leftarrow$



instab. loc.as.stabil

$r_0>0$

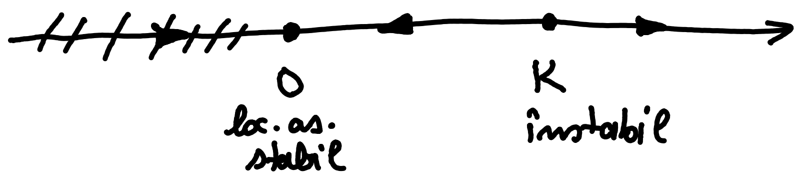


dacă $r_0>0 \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} K$

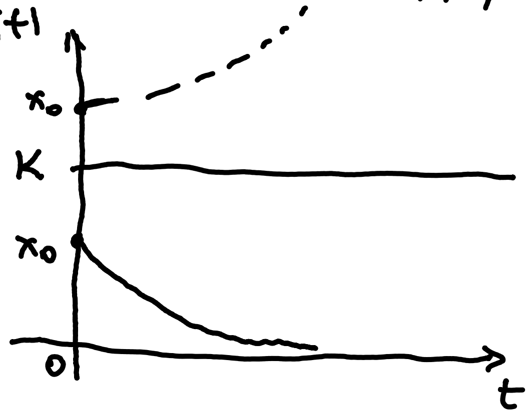
pop. tinde către const. de suport a mediului.

2. $r_0<0$

x		0		K	
f(x)	+ +	0	− −	0	+ +



$r_0<0$



dacă $x_0 \in (0,K) \to x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

dacă $x_0 \in (K,+\infty) \Rightarrow x(t) \to +\infty$.

situație nerealistă

($r_0<0 \Leftrightarrow b<\mu$)

Obs. Modelul logistic se aplică pt $x_0 \in (0,K)$.

Soluția modelului logistic

$$x' = r_0 x\left(1-\frac{x}{K}\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = r_0 x \cdot \frac{K-x}{K} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{K}{x(K-x)}\,dx = r_0\,dt \Rightarrow \int \frac{K}{x(K-x)}\,dx = \int r_0\,dt$$

$$\frac{K}{x(K-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{K-x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{K-x}\,dx = \int r_0\,dt \Rightarrow$$

$$\ln x - \ln(K-x) = r_0 t + \ln c.$$

$$\ln \frac{x}{K-x} = r_0 t + \ln c.$$

$$\frac{x}{K-x} = c \cdot e^{r_0 t}$$

$$x = c \cdot K \cdot e^{r_0 t} - c\, x\, e^{r_0 t}$$

$$x \left(1 + c \cdot e^{r_0 t} \right) = c \cdot K \cdot e^{r_0 t}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{c K \cdot e^{r_0 t}}{1 + c \cdot e^{r_0 t}}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \frac{cK}{1+c} = x_0 \Rightarrow x_0 + c x_0 = cK$$

$$\Rightarrow c\,(K - x_0) = x_0 \Rightarrow c = \frac{x_0}{K - x_0}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\frac{x_0}{K - x_0} \cdot K \cdot e^{r_0 t}}{1 + \frac{x_0}{K - x_0} e^{r_0 t}}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0 K \cdot e^{r_0 t}}{K - x_0 + x_0 \cdot e^{r_0 t}}}$$

soluția modelului logistic.

1. dacă $r_0 > 0 \Rightarrow x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} K$

2. dacă $r_0 = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$, pop. rămâne const. în timp

3. dacă $r_0 < 0$, $x_0 \in (0, K) \Rightarrow x(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$, pop. dispare în timp.

3). <u>Modelul cu recoltare cu o rată constantă</u>

O pop. se dezv. conform modelului logistic

$$\begin{cases} x' = r_0 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad \underline{r_0, K > 0}, \quad x_0 > 0.$$

Din pop. resp. se face o recoltare cu o rată constantă $h > 0$.

$$x' = r_0 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - h$$

Care este efectul recoltării asupra dinamicii pop.?

$x' = f(x)$ $\qquad f(x) = r_0 x\left(1-\frac{x}{K}\right) - h =$

$$= -\frac{r_0}{K}\cdot x^2 + r_0 x - h.$$

$\boxed{f(x)=0}$

$$\Delta = r_0^2 - 4\cdot\frac{r_0}{K}\cdot h = $$

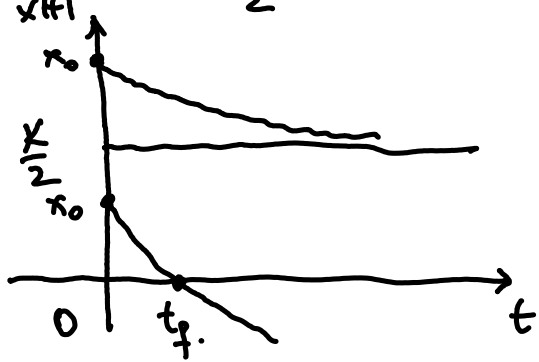
$$= \underbrace{r_0}_{>0}\Big(\underbrace{r_0 - \frac{4h}{K}}_{?}\Big).$$

$\underline{I}$. $\Delta = 0 \iff r_0 = \frac{4h}{K} \iff h = \frac{r_0 K}{4}.$

$$x_1^* = x_2^* = \frac{-r_0}{-2\frac{r_0}{K}} = \frac{K}{2}.$$

x		$\frac{K}{2}$	
$f(x)$	$- - - -$	0	$- - - -$
	$\leftarrow$		$\leftarrow$

$-\infty \qquad 0 \qquad \frac{K}{2} \qquad +\infty$



dacă $x_0 > \frac{K}{2} \Rightarrow x(t) \longrightarrow \frac{K}{2}, \ t \to +\infty$

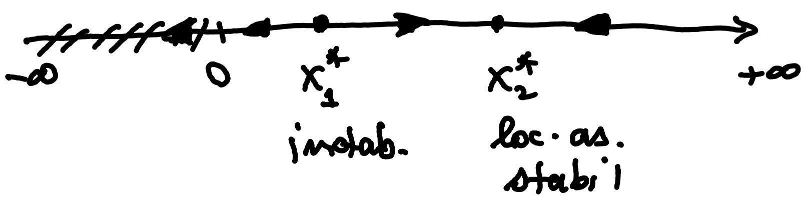
dacă $x_0 \in \left(0, \frac{K}{2}\right) \Rightarrow \exists\, t_f > 0$ aî $x(t_f) = 0$

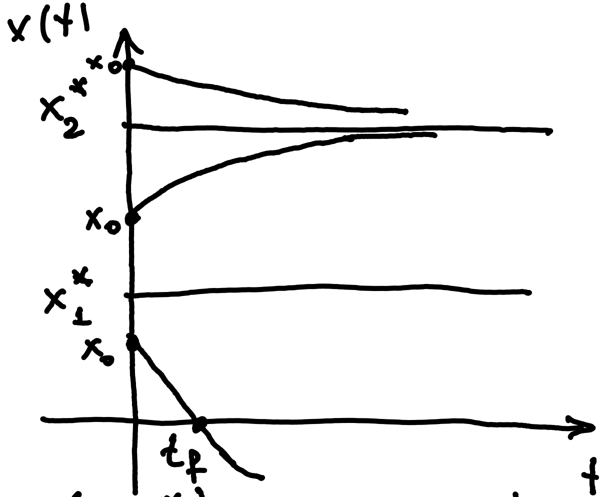
$\underline{\text{II}}$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow r_0 > \frac{4h}{K} \Leftrightarrow h < \frac{r_0 K}{4}$.

$$x^*_{1,2} = \frac{-r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - 4\frac{r_0 h}{K}}}{-\frac{2r_0}{K}} = \frac{K}{2r_0} \cdot \left(r_0 \mp \sqrt{r_0^2 - 4\frac{r_0 h}{K}} \right)$$

se observă că $0 < x_1^* < x_2^*$

x		x_1^*		x_2^*	
$f(x)$	$- - -$ $\leftarrow$	0	$+ +$ $\rightarrow$	0	$- -$ $\leftarrow$



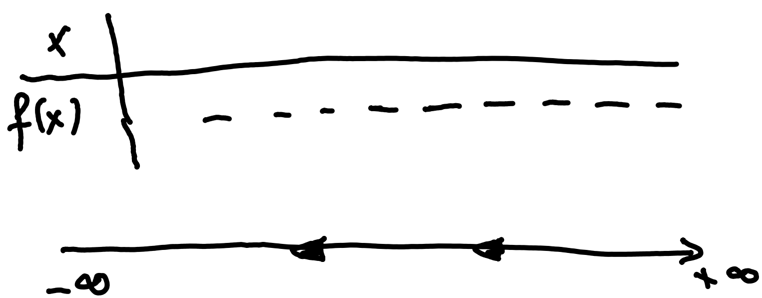


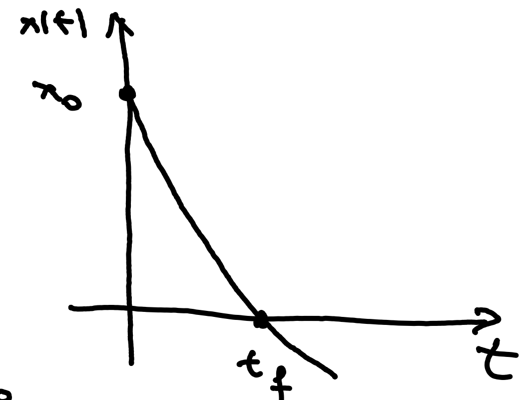
dacă $x_0 \in (0, x_1^*) \Rightarrow \exists\, t_f > 0$ ai $x(t_f) = 0$

dacă $x_0 \in (x_1^*, +\infty) \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_2^*$.

$\overline{\text{III}}$ $D < 0 \iff h > \frac{r_0 K}{4}$

$\Rightarrow$ ec. nu are pct. de echil.





$\forall x_0 > 0 \ \exists t_f > 0$ a.î. $x(t_f) = 0$.

<u>Concluzie</u>

- dacă h satisf. $0 < h \le \frac{r_0 K}{4}$

  atunci există o valoare prag $x_T > 0$ a.î. dacă $x_0 < x_T$ atunci $\exists t_f > 0$ a.î. $x(t_f) = 0$, adică pop. dispare în timp finit

  dacă $x_0 > x_T$ atunci $x(t) \longrightarrow x^*$, adică pop. tinde către o sol. de echilibru.

$$\left(\begin{array}{ll} \underline{\mathrm{I}}. & x_T = \frac{K}{2}, \ x^* = \frac{K}{2} \\ \underline{\mathrm{II}} & x_T = x_1^*, \ x^* = x_2^* \end{array} \right)$$

- dacă $h > \frac{r_0 K}{4}$

  $\Rightarrow \exists t_f > 0$ a.î. $x(t_f) = 0$, $\forall x_0 > 0$.

  adică pop. dispare în timp finit indiferent de mărimea acesteia la mom. inițial (recoltare excesivă).

4) Modelul cu recoltare proporțională

- recoltarea se face cu o rată prop. cu mărimea pop. la momentul respectiv, adică:

$$\begin{cases} x' = r_0 x\left(1-\frac{x}{K}\right) - E.x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad r_0, K, E, x_0 > 0$$

Care este efectul recoltării?

$$x' = f(x) \qquad f(x) = r_0 x\left(1-\frac{x}{K}\right) - E.x$$

$$f(x) = 0 \rightarrow x\left(r_0\left(1-\frac{x}{K}\right) - E\right) = 0$$

$$x_1^* = 0 \qquad r_0\left(1-\frac{x}{K}\right) - E = 0$$

$$r_0 - \frac{r_0 x}{K} - E = 0$$

$$\frac{r_0 x}{K} = r_0 - E$$

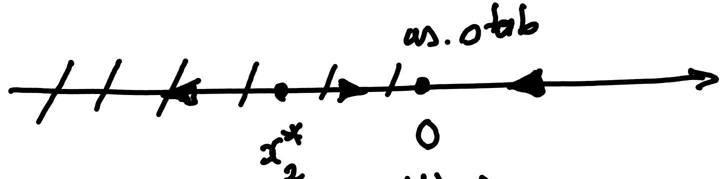
$$\boxed{x_2^* = \frac{K}{r_0}(r_0 - E).}$$

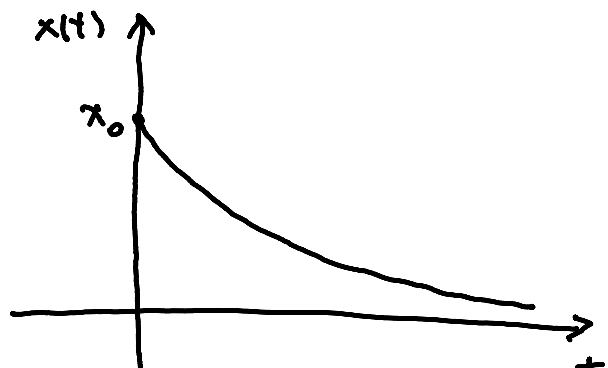
$x_2^* \geq 0 \iff r_0 \geq E$.

dacă $r_0 < E \Rightarrow x_2^* < 0$ nu are semnif. biologică.

1. $\underline{r_0 \leq E} \iff x_2^* \leq 0$

x			x_2^*		0		
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

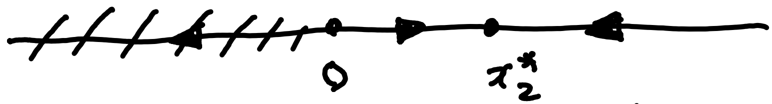




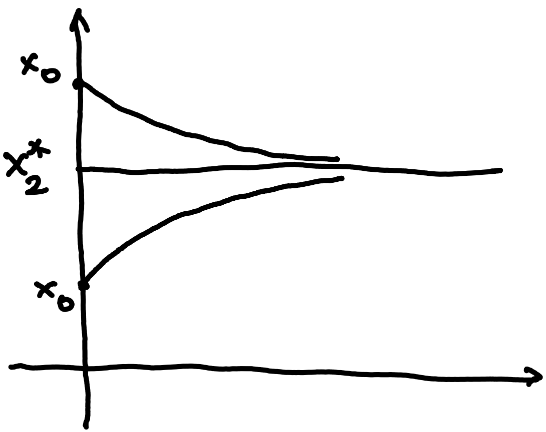
$\forall\ x_0 > 0$ avem $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

2. $\underline{r_0 > E} \iff x_2^* > 0$

x		0		x_2^*	
$f(x)$	$-\ -$	0	$+$	0	$-\ -$
	$\leftarrow$		$\rightarrow$		$\leftarrow$



l. as. stab



$\forall\, x_0 > 0$ avem $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} x_2^*$.

Concluzie:

- dacă $r_0 > E$ atunci $x(t) \to x_2^*$, $\forall x_0 > 0$, adică pop. tinde către sol. de echil. $x_2^* > 0$, $\forall x_0 > 0$.
- dacă $r_0 \le E$ atunci $x(t) \to 0$, $\forall x_0 > 0$, adică pop. dispare în timp indiferent de mărimea la mom. inițial