Seminar 2 - Ecuații diferențiale de ordinul 2

1. Ecuații de forma $y''(x) = f(x)$

Cea mai simplă formă a ec. de ord. 2 este

$$\boxed{y''(x) = f(x)} \quad (1), \ f \text{ - funcție continuă}$$

Sol. generală se obține integrând de 2 ori ecuația, după fiecare integrare adăugându-se câte o constantă de integrare.

Ex1: Să se rezolve:

1. $y'' = x + \cos x + \sin x \quad \Big| \int$

$$y' = \int (x + \cos x + \sin x)\, dx = \frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + c_1, \quad \Big| \int \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + c_1\right) dx = \frac{x^3}{6} - \cos x - \sin x + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. $y'' = 1 + tg^2 x \quad \Big| \int$

$$y' = \int (1 + tg^2 x)\, dx = \int 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int 1\, dx + \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= x + \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}}\, dx = x + tg\, x - x + c_1 = tg\, x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y' = tg\, x + c_1 \quad \Big| \int$$

$$y = \int (tg\, x + c_1)\, dx = -\ln|\cos x| + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Temă:

3. $y'' = \frac{1}{x}$
4. $y'' = \ln x$
5. $y'' = x \cdot e^x$
6. $y'' = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$

2. Ecuații de forma $y''(x) = f(x, y')$

Putem reduce ordinul cu o unitate prin substituția:

$$z(x) = y'(x)$$

astfel se obține o ec. dif. de ordinul întâi

$$z'(x) = f(x, z(x))$$

Rezolvarea ec. $y'' = f(x, y')$ revine la rezolvarea a 2 ec. dif.

$z'(x) = f(x, z(x))$ dacă aceasta este o ec. rezolvabilă efectiv și $y'(x) = z(x)$ care este o ec. de forma (1)

Ex: 1. $xy'' + y' + x = 0$

Substituția $z = y' \Rightarrow z' = y''$

$$\Rightarrow xz' + z + x = 0$$

$$xz' + z = -x \quad \Big| : x$$

$$z' + \frac{z}{x} = -1 \quad \text{ec. neomogenă}$$

I Ec. omogenă

$$z' + \frac{z}{x} = 0$$

$$z' = -\frac{z}{x}$$

$$z' = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{1}{x}\, dx \quad \Big| \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln|z| = -\ln|x| + c_1 \quad ; \; c_1 := \ln c_2, \; c_2 > 0$$

$$\ln|z| = \ln c_2 - \ln|x| \quad ; \; c_2 := c, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{c}{x}$$

II Ec. particulară $\xleftarrow{}$ funcție (met. variației constantelor)

$$z_p = \frac{\varphi(x)}{x}$$

$$z_p' = \frac{\varphi' \cdot x - \varphi \cdot x'_1}{x^2}$$ (ne întoarcem la ec. neomog. și înlocuim z cu z_p)

$$\frac{\varphi' \cdot x - \varphi}{x^2} + \frac{\varphi}{x^2} = -1$$

$$\frac{\varphi' \cdot \cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} - \frac{\cancel{\varphi}}{\cancel{x^2}} + \frac{\cancel{\varphi}}{\cancel{x^2}} = -1$$

$$\Rightarrow \varphi' = -x$$

$$\varphi = -\frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow z_p = -\frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = -\frac{x}{2}$$

Sol. generală a ec. liniare neomogene în z este

$$z = z_o + z_p = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}$$

Revenim la substituția $y' = z$

$$y' = \frac{c}{x} - \frac{x}{2} \quad \Big| \int \quad \Rightarrow \quad y = c \cdot \ln|x| - \frac{x^2}{4} + c_1 \quad , c, c_1 \in \mathbb{R}$$

2. $x y'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

$$y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}$$

Dacă facem subst. $y' = z$ ne rezultă ec. omogenă în sens Euler și mai avem nevoie de subst. $u = \frac{z}{x}$. Pt. a reduce volumul de muncă combinăm cele 2 substituții și notăm

$$z = \frac{y'}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = x \cdot z$$

$$y'' = z + x \cdot z'$$

Înlocuim în ec. $\Rightarrow$ $z + x \cdot z' = z \ln z$

$$z' = \frac{z \ln z - z}{x} = \frac{z(\ln z - 1)}{x}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$g(z) = z(\ln z - 1)$, $z > 0$

Studiul existenței soluțiilor singulare ne conduce la

$g(z) = 0 \Rightarrow z(\ln z - 1) = 0 \Rightarrow z = 0$ și $z = e$

Sol. $z=0$ nu convine pt. că $\ln$ nu este definit în 0, deci sol. singulară este $z = e$

$$z' = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z(\ln z - 1)}{x}$$

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x} \quad \Big| \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{z(\ln z - 1)} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(\ln z - 1) = \ln x + c_0 \quad ; \quad c_0 := \ln c_1 > 0$$

$$\ln(\ln z - 1) = \ln c_1 \cdot x \quad \Big| e$$

$$\ln z - 1 = c_1 x$$

$$\ln z = c_1 x + 1 \quad \Big| e \qquad c_1 := c, \ c \in \mathbb{R}$$

$$z = e^{cx+1}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Am inclus și sol. singulară $z(x) = e$ în expresia soluției generale, aceasta fiind obținută pt. $c=0$.

Revenim $y' = xz$

$$y' = xe^{c_1x+1}, \quad \text{înlocuim din nou } c \text{ cu } c_1$$

$$y = \int xe^{c_1x+1} dx$$

Avem 2 cazuri

① $c_1 = 0$ - coresp. sol. singulare $z(x) = e$

$y = \int x \cdot e \, dx = e\frac{x^2}{2} + c_2$, adică $y = e \cdot \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$

sol. singulară a ec. în y

① $c_1 \neq 0$

$$y=\int x e^{c_1 x+1}\,dx=\frac{1}{c_1}\int x\left(e^{c_1x+1}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{c_1}x e^{c_1x+1}-\frac{1}{c_1}\int e^{c_1x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{c_1}x e^{c_1x+1}-\frac{1}{c_1^2}e^{c_1x+1}+c_2$$

$\Rightarrow$ sol. generală a ec. este

$$y=\frac{1}{c_1}x e^{c_1x+1}-\frac{1}{c_1^2}e^{c_1x+1}+c_2,\quad c_1\in\mathbb{R}^*,\ c_2\in\mathbb{R}.$$

Temă:

3. $y''-2y'=-x^2$
4. $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$
5. $(1+x^2)y''=2xy'$
6. $y'(1+(y')^2)=ay''$, $a\in\mathbb{R}^*$

3. Ecuații liniare cu coeficienți constanți

Forma gen. a ec. dif. liniare neomogene cu coef. constanți este:

$$y''+ay'+by=f(x)\qquad(2),\quad a,b\in\mathbb{R}$$

Ec. liniară omogenă este $y''+ay'+by=0$ (3)

În cazul ec. lin. omogene cu coef. constanți, sistemul fundamental de soluții se construiește căutând sol. de forma $y(x)=e^{rx}$, astfel se obține ecuația caracteristică atașată ec. liniare omogene (3)

$$\boxed{r^2+ar+b=0}\qquad(4)$$

Algoritmul de det. a soluției generale pt. ec. lin. omog.

Pas 1: Se atașează ecuației dif. omog. (3) ecuația caract. (4)

Pas 2: Se det. rădăcinile ecuației caract. (4)

Pas 3: Fiecărei rădăcini r_1 și r_2 i se atașează funcțiile y_1 și y_2 în modul următor:

(a) dacă r_1 și r_2 sunt reale a.î. $\boxed{r_1 \neq r_2}$ $(\Delta > 0)$ atunci:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{și} \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

(b) dacă r_1 și r_2 sunt reale a.î. $\boxed{r_1 = r_2}$ $(\Delta = 0)$ at:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{și} \quad y_2(x) = x \cdot e^{r_1 x}$$

(c) dacă r_1 și r_2 sunt complexe a.î. $\boxed{r_{1,2} = \alpha \pm i\beta}$ $(\Delta < 0)$ at:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{și} \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Pas 4: Se scrie sol. generală de forma:

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

În cazul ec. liniare neomogene cu coef. constanți, sol. generală este de forma

$$y(x) = y_o(x) + y_p(x)$$

y_o - sol. generală a ec. liniare omogene (5)

y_p - sol. particulară a ec. lin. neomogene (se det. prin met. variației constantei sau în cazuri speciale pt. funcția f prin met. coeficienților nedeterminați).

Cazuri speciale de determinare a lui y_p:

Caz I Dacă $f(x) = P_m(x)$ atunci:

(a) dacă $b \neq 0$ atunci $y_p(x) = Q_m(x)$

(b) dacă $b = 0$ și $a \neq 0$ atunci $y_p(x) = x \cdot Q_m(x)$

Caz II Dacă $f(x) = e^{rx} P_m(x)$ atunci

(a) dacă r nu este rădăcină a ec. caract. (4) at.

$$y_p(x) = e^{rx} Q_m(x)$$

(b) dacă r este rădăcină a ec. caract. (4) cu ordinul de multiplicitate μ atunci:

$$y_p(x) = x^{\mu} e^{rx} Q_m(x)$$

Caz III Dacă $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cos \beta x$ sau

$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \sin \beta x$ atunci:

(a) dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ec. caract. (4) at.

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \left[Q_m(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x \right]$$

(b) dacă $\alpha + i\beta$