Seminar 4 – Probleme atașate ecuațiilor diferențiale

1. Problema Cauchy

Se consideră sistemul de ecuații diferențiale

$$y' = f(x,y) \quad (1), \text{ unde } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Printr-o problemă Cauchy (problemă cu valori inițiale) atașată sistemului de ecuații (1) înțelegem problema:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y^0 \end{cases}, \text{ unde } x_0 \in I, \ y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Rezolvarea problemelor Cauchy revine la det. soluției generale a ecuației, după care sunt utilizate condițiile inițiale pt. det. valorilor constante de integrare. Soluția problemei fiind soluția obținută prin înlocuirea acestor constante în expresia soluției generale.

Ex 1: Să se det. soluția următoarelor pb. Cauchy:

a) $\begin{cases} (1+e^x)yy' - e^x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Sol: $(1+e^x)yy' - e^x = 0$

$$yy' = \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow y' = \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \frac{1}{y}, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^x} \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow y\, dy = \frac{e^x}{1+e^x}\, dx \ \Big| \int$$

$$\int y\, dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + c_1$$

$$y^2 = 2\ln|1+e^x| + 2c_1 \qquad 2c_1 := c$$

$$y^2 = 2\ln|1+e^x| + c \quad |\sqrt{\ }$$

$$y = \pm\sqrt{2\ln|1+e^x| + c}$$

$$y(x) = \sqrt{2\ln|1+e^x| + c}$$

$y(0) = 1$ condiția pt. pb. Cauchy

$$y(0) = \sqrt{2\ln 2 + c} \Rightarrow \sqrt{2\ln 2 + c} = 1 \quad |^2$$

$$2\ln 2 + c = 1 \Rightarrow c = 1 - 2\ln 2$$

$$y(x) = \sqrt{2\ln|1+e^x| + 1 - 2\ln 2}$$

b) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}$

Sol: $y_1' = y_1 + y_2 \quad |' \Rightarrow y_1'' = y_1' + y_2'$

$$y_1'' = y_1 + y_2 - 2y_1 + 4y_2$$

$$y_1'' = -y_1 + 5y_2$$

$\begin{cases} y_1'' = -y_1 + 5y_2 \\ y_1' = y_1 + y_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = y_1' - y_1$

$$y_1'' = -y_1 + 5y_1' - 5y_1 = -6y_1 + 5y_1'$$

$$y_1'' - 5y_1' + 6y_1 = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 3 \longmapsto \phi_1(x) = e^{3x}$$
$$r_2 = 2 \longmapsto \phi_2(x) = e^{2x}$$

$$y_1(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$
$$y_2(x) = y_1' - y_1 = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x} - c_1 e^{3x} - c_2 e^{2x} =$$
$$= 2c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \\ y_2(x) = 2c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} \end{cases}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

*Pb. Cauchy:

$y_1(0) = 0 \Rightarrow y_1(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$y_2(0) = -1 \Rightarrow y_2(0) = 2c_1 + c_2 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = -1$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -2c_2 + c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = -e^{3x} + e^{2x} \\ y_2(x) = -2e^{3x} + e^{2x} \end{cases}$$

Temă:

c) $\begin{cases} xy' + y = e^x \\ y(a) = b \end{cases}, \ a, b \in \mathbb{R}$ Sol: $y(x) = \dfrac{e^x + ab - e^a}{x}$

d) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = 10y_1 - 4y_2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 5 \end{cases}$ Sol: $\begin{cases} y_1(x) = e^{-2x} \\ y_2(x) = 5e^{-2x} \end{cases}$

În cazul ecuațiilor diferențiale de ordinul n problema Cauchy are următoarea formă:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_1^0 \\ y'(x_0) = y_2^0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \end{cases}, \quad x_0 \in I, \; y_1^0, \dots, y_n^0 \in \mathbb{R}$$

Ex2: Să se det. soluția următoarei pb. Cauchy:

a) $$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \quad \text{ec. omogenă} \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$$

Sol: $y'' - 5y' + 4y = 0$

$r^2 - 5r + 4 = 0$

$\Delta = 9 \Rightarrow r_1 = 4 \longmapsto y_1(x) = e^{4x}$

$r_2 = 1 \longmapsto y_2(x) = e^{x}$

$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y(0) = 5 \Rightarrow y(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 5$

$y'(0) = 8 \Rightarrow y'(x) = 4c_1 e^{4x} + c_2 e^{x}$

$y'(0) = 4c_1 + c_2 \Rightarrow 4c_1 + c_2 = 8$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ 4c_1 + c_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 5 - c_1 \\ 4c_1 + 5 - c_1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 4 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

$y(x) = e^{4x} + 4e^{x}$

b) $\begin{cases} y'' + 4y = 4x \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$ ec. neomogenă

Sol: $y'' + 4y = 4x$ ec. neomog.

I. Ec. omogenă:

$$y'' + 4y = 0$$

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4i^2$$

$$r_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow r_1 = 2i \longmapsto y_1(x) = \cos(2x)$$

$$y_2(x) = \sin(2x)$$

$$\Rightarrow y_0 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

II $y'' + 4y = 4x$

$$f(x) = 4x$$

Funcția f este de forma $f(x) = P_1(x)$, adică cazul I b) și căutăm y_p de forma

$$y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx$$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

$$2a + 4ax^2 + 4bx = 4x \Rightarrow \begin{cases} 4a = 0 \\ 4b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = x$$

$$y(x) = y_0 + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x$$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow y(\pi) = c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi + \pi = c_1 + \pi \Rightarrow$

$$c_1 + \pi = 0 \Rightarrow c_1 = -\pi$$

$y'(\pi) = 1 \Rightarrow y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x + 1$

$$y'(\pi) = -2c_1 \sin 2\pi + 2c_2 \cos 2\pi + 1 = 2c_2 + 1$$

$$2c_2 + 1 = 1 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(x) = -\pi \cos 2x + x$$

Temă:

c) $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

Sol: $y(x) = -2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x + (x+1)^2 e^x$

d) $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 6\cos x + 8\sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Sol: $y(x) = e^{-3x} + 3e^{-3x} + \sin(x)$

2. Problema bilocală

Problema bilocală se atașează ecuațiilor dif. de ordinul II și spre deosebire de problema Cauchy condițiile sunt date în două puncte diferite, adică:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

Det. soluției se face ca în cazul pb. Cauchy, adică se det. soluția generală a ecuației, după care sunt utilizate cele 2 condiții pt. determinarea celor două constante de integrare, soluția pb. bilocale fiind sol. obținută prin înlocuirea acestor constante în expresia soluției generale.

⊙ Problema Cauchy are soluție unică (în general), dar în cazul pb. bilocale pot fi mai multe soluții.

Ex 3: Să se det. soluțiile următoarelor pb. bilocale:

a) $\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Sol: $y'' + \pi^2 y = 0$ ec. omogenă

Ec. caract: $r^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \pi^2 i^2 \mid \sqrt{\ }$

$r_{1,2} = \pm \pi i \mapsto y_1(x) = \cos(\pi x)$

$y_2(x) = \sin(\pi x)$

$y(x) = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \underbrace{\sin 0}_{0} = 0$

$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot \cos \pi + c_2 \sin \pi = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

$y(x) = 0$

b) $\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Sol: $y'' + y = x$ ec. neomog.

I $y'' + y = 0$ ec. omog.

$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 = i^2 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i \mapsto y_1 = \cos x$

$y_2 = \sin x$

$y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

II $y'' + y = x$

$f(x) = x$

Suntem în cazul I b)

$$y_p(x) = x(ax+b) = ax^2 + bx$$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

$$2a + ax^2 + bx = x \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y_p = x$$

$$y = y_o + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_2 + \cancel{\frac{\pi}{2}} = \cancel{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(x) = \cos x + x$$

Temă: c) $\begin{cases} y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(3) = 0 \end{cases}$ Sol: $y(x) = 0$

d) $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y(\ln 2) = 1 \end{cases}$