Exerciții temă Seminar 2 Sisteme dinamice

3. $y'' + 2y' + y = 0$

- Ecuație caracteristică atașată: $r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0$

$r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -1$

- Ne aflăm în cazul b)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ r_1 = r_2 \\ \Delta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1(x) = e^{r_1 x} \\ y_2(x) = x \cdot e^{r_1 x} \end{array}}$$

- Construim sistemul fundamental de soluții:

$$r_{1,2} = -1 \Rightarrow y_1(x) = e^{-x}$$
$$y_2(x) = x \cdot e^{-x}$$

- Ecuația este omogenă, atunci soluția generală este:

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4. $y'' + 3y' + 2y = e^x$ ec. liniară neomogenă

I. $y'' + 3y' + 2y = 0$

$r^2 + 3r + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 9 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 1}{2}$; $r_1 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$; $r_2 = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Suntem în cazul a)

$$\left.\begin{array}{l} r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ r_1 \neq r_2 \\ \Delta > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} y_1(x) = e^{r_1 x} \\ y_2(x) = e^{r_2 x} \end{array}$$

$r_1 = -2 \Rightarrow y_1(x) = e^{-2x}$

$r_2 = -1 \Rightarrow y_2(x) = e^{-x}$

$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1\cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

II. Pentru determinarea soluției particulare, aplicăm metoda coeficienților nedeterminați:

$f(x) = e^x = P_2(x)$

Relația noastră inițială era: $\underbrace{y'' + 3y' + 2y}_{} = \underbrace{e^x}_{f(x)} = P_2(x)$

$y_p = e^x \cdot Q_2(x) = e^x \cdot (ax^2 + bx + c)$ și det. $a, b, c \in \mathbb{R}$

a.î. y_p să fie soluție a ec. neomogenice

6

Suntem în cazul II, a)

Cazul I: $f(x) = e^{rx}\cdot P_m(x)$ $\Rightarrow$

$f(x) = e^x$

$r = 1$

$P_m(x) = 1$

cazul a):

Avem $r \neq r_1, r_2$

$$\left.\begin{array}{l} r = 1 \\ r_1 = -2 \\ r_2 = -1 \end{array}\right| \Rightarrow y_p = e^{rx}\cdot Q_m(x)$$

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = e^x \quad (*)$$

- Calculăm derivata lui y_p

$$y_p = e^x(ax^2+bx+c)$$

$$y_p' = e^x(ax^2+bx+c) + e^x(2ax+b)$$

$$y_p' = e^x(ax^2+bx+c+2ax+b)$$

$$y_p'' = e^x(ax^2+bx+c+2ax+b) + e^x(2ax+b+2a)$$

$$y_p'' = e^x(ax^2+4ax+2a+bx+2b+c)$$

GREŞIT

- înlocuim în ec. $*$

$$\cancel{e^x}(ax^2+4ax+2a+bx+2b+c)+3\cancel{e^x}(ax^2+bx+c+2ax+b)+2\cancel{e^x}(ax^2+bx+c)=\cancel{e^x}$$

$$ax^2+4ax+2a+bx+2b+c+3ax^2+3bx+3b+3c+6ax+2ax^2+2bx+2c=1$$

$$6ax^2+10ax+6bx+2a+5b+6c=1$$

$$6ax^2+x\underbrace{(10a+6b)}+\underbrace{2a+5b+6c}=0\cdot x^2+0\cdot x+1$$

$$6a=0 \Rightarrow \boxed{a=0} \Rightarrow 6b=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$10a+6b=0$$

$$2a+5b+6c=1 \Rightarrow 6c=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{6}}$$

$$y_p = e^x(ax^2+bx+c) \Rightarrow y_p = \frac{1}{6}e^x$$

- Soluţia generală a ec. neomogene este

$$y = y_0 + y_p$$

$$y = c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot e^{-x} + \frac{1}{6}\cdot e^x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Suntem în cazul II, a)

$$f(x) = e^x = e^x \cdot 1 = e^x \cdot P_0(x)$$

Relația noastră inițială era

$$\underbrace{y'' + 3y' + 2y}_{f(x)} = e^x = e^x \cdot P_0(x)$$

Cazul I : $f(x) = e^{rx} \cdot P_m(x)$

$f(x) = e^x$

$r = 1$

$P_m(x) = 1$

Cazul al :

Avem $r \neq r_1, r_2$

$\left.\begin{array}{l} r = 1 \\ r_1 = -2 \\ r_2 = -1 \end{array}\right| \Rightarrow y_p = e^{rx} \cdot Q_m(x)$

$$y_p = e^x \cdot Q_0(x) = e^x \cdot a \quad , a \in \mathbb{R}$$

- Calculăm derivatele lui y_p

$$\left.\begin{array}{l} y_p = e^x \cdot a \\ y'_p = e^x \cdot a \\ y''_p = e^x \cdot a \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} e^x \cdot a + 3e^x \cdot a + 2e^x \cdot a = e^x \\ 6e^x \cdot a = e^x \,\Big|\cdot \frac{1}{e^x} \neq 0 \\ 6a = 1 \\ a = \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{6} \cdot e^x$$

- Soluția generală a ec. neomogene este

$y = y_0 + y_p$

$$y = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{6} \cdot e^x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Metoda

d) $y_1' =$

$y_2' =$

Exerciții Seminar 3 Sisteme dinamice

e) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \quad \Big|' \Rightarrow y_1'' = y_1' - 5y_2' \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$

Avem $y_1' = y_1 - 5y_2$

$y_1' - y_1 = -5y_2$

$\dfrac{y_1 - y_1'}{5} = y_2 \quad (*)$

1. a

$y_1'' = y_1 - 5y_2 - 5(2y_1 - y_2)$

$y_1'' = y_1 - \cancel{5y_2} - 10y_1 + \cancel{5y_2}$

$y_1'' = -9y_1 \Rightarrow y_1'' + 9y_1 = 0$

Rezolvăm ec. $y_1'' + 9y_1 = 0$

Ec. caracteristică atașată este $r^2 + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = -4 \cdot 1 \cdot 9 = -36 < 0$

$r_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{\pm i \cdot 6}{2} = \pm 3i$

- Ne aflăm în cazul c/

$\left.\begin{array}{l} r_{1,2} \in \mathbb{C} \\ r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \\ \Delta < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array}$

Sistemul fundamental de soluții este:

$\left.\begin{array}{l} \text{Avem } r_{1,2} = \pm 3i \\ \alpha = 0 \\ \beta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Phi_1(x) = \cos 3x \\ \Phi_2(x) = \sin 3x \end{array}$

Soluția generală este de forma:

$y_1(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y_1(x) = C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x)$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

- calculăm $y_2(x)$ din (*)

$$y_2 = \frac{y_1 - y_1'}{5}$$

- Calc. mai întâi y_1' și înlocuiesc

$-y_1' = 3C_1 \sin 3x - 3C_2 \cos 3x$

$$y_2 = \frac{1}{5} \cdot (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 3C_1 \sin 3x - 3C_2 \cos 3x)$$

$$y_2(x) = C_1\left(\frac{1}{5} \cos 3x + \frac{3}{5} \sin 3x\right) + C_2\left(\frac{1}{5} \sin 3x - \frac{3}{5} \cos 3x\right)$$

În concluzie, avem sistemul:

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x \\ y_2(x) = C_2\left(\frac{1}{5} \cos 3x + \frac{3}{5} \sin 3x\right) + C_2\left(\frac{1}{5} \sin 3x - \frac{3}{5} \cos 3x\right) \end{cases}$$

~~$y^2 = 2\ln|1+e^x| + C$~~

~~$y = \pm\sqrt{2\ln|1+e^x| + C}$~~

~~$y(x) = \sqrt{2\ln|1+e^x| + C}$~~

~~$y(0) = 1$~~ Condiția pt.

~~$\Rightarrow y(0) = \sqrt{2\ln 2 + C} \Rightarrow$~~

c) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \Rightarrow y_2 = y_1' - y_1 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}$

- Alegem prima ecuaţie a sist. şi o derivăm:

$$y_1'' = y_1' + y_2'$$

- Inlocuim:

$$y_1'' = y_1 + y_2 + 4y_2 - 2y_1$$

$$y_1'' = 5y_2 - y_1$$

- Calculăm y_2 din prima rel. a sist.:

$$y_2 = y_1' - y_1$$

$$y_1'' = 5(y_1' - y_1) - y_1$$

$$y_1'' = 5y_1' - 6y_1$$

$$y_1'' - 5y_1' + 6y_1 = 0$$

- Scriem ec. caracteristică ataşată:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$(r-2)(r-3) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{array}$$

- Ne aflăm în cazul a)

$$\left.\begin{array}{l} r_1=2,\ r_2=3 \\ r_1 \neq r_2 \\ r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ \Delta > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \Phi_1(x) = e^{r_1 x} = e^{2x} \\ \Phi_2(x) = e^{r_2 x} = e^{3x} \end{array}$$

$$y_1(x) = c_1\, \Phi_1(x) + c_2 \cdot \Phi_2(x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Știm că $y_2 = y_1' - y_1$

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = y_1' - y_1 \\ y_1' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} \end{array}\right/ \Rightarrow y_2 = 2c_1 \cdot e^{2x} + 3c_2 e^{3x} - c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x}$$

$$y_2(x) = c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

În concluzie, soluția sistemului este:

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x} \\ y_2(x) = c_1 \cdot e^{2x} + 2c_2 \cdot e^{3x} \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Metoda ecuației caracteristice

d) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$

- Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Știm din teorie că ec. caracteristică atașată este:

$$\det(\lambda E_2 - A) = 0$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ \Rightarrow \lambda E_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Ajungem la:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0-(-1) \\ 0-1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 - 1\cdot(-1) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\cdot 1\cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm i2}{2} = 1 \pm i$$

- Suntem în cazul valorilor proprii complexe.
- Aleg $\lambda = 1 + i$ și construiesc soluția de variabilă reală dar cu val. complexe $Z(x)$.
- Din teorie, avem:

$$\boxed{(\lambda_1 E_2 - A)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

și înlocuim cu $\lambda = 1 + i$

$$\begin{pmatrix} 1 + i - 2 & 1 \\ -1 & 1 + i - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Adică:

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot i + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + i\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

- Aleg $\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 \cdot i + 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \cdot i = -1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{i}$

- Scriem soluția $Z(x)$ de var. egală, dar cu val. complexe:

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

- În cazul nostru:
  - am ales $\lambda = 1 + i$
  - $\alpha_1 = -\frac{1}{i}$, $\alpha_2 = 1$

$$Z(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{i} \cdot e^{(1+i)x} \\ 1 \cdot e^{(1+i)x} \end{pmatrix}$$

- Folosim formula lui Euler:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)]$$

- Obținem

$$z(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{i} \cdot e^{x}(\cos x + i \sin x) \\ e^{x}(\cos x + i\sin x) \end{pmatrix}$$

- Identificăm Re z și Im z

$$z(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} -e^{x}\sin x \\ e^{x}\cos x \end{pmatrix}}_{y^1(x) = \mathrm{Re}\, z(x)} + i \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{i^2} \cdot e^{x}\cos x \\ e^{x}\sin x \end{pmatrix}}_{y^2(x) = \mathrm{Im}\, z(x)}$$

- Matricea fundamentală este:

$$U = (y_1 \quad y_2)$$

$$U(x) = \begin{pmatrix} -e^{x}\sin x & -\frac{1}{i^2} e^{x}\cos x \\ e^{x}\cos x & e^{x}\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{x}\sin x & e^{x}\cos x \\ e^{x}\cos x & e^{x}\sin x \end{pmatrix}$$

- Soluția generală a sistemului:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = U(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} -e^{x}\sin x & e^{x}\cos x \\ e^{x}\cos x & e^{x}\sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Adică rezultatul nostru este:

$$\begin{cases} y_1(x) = -c_1 \cdot e^{x}\sin x + c_2 \cdot e^{x}\cos x \\ y_2(x) = c_1 e^{x}\cos x + c_2 \cdot e^{x}\sin x \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$