Seminar 3 – Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

3.1. Mulțimea soluțiilor. Sistem fundamental de soluții:

Se consideră sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) \end{cases} \quad (1)$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = \overline{1,2}$. Dacă notăm cu

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

obținem forma vectorială a sist. (1)

$$Y' = A \cdot Y \quad (2) \quad , \text{ unde } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Not. cu S_0 mulțimea soluțiilor sistemului liniar omogen (1).

Teorema 3.1. S_0 este un subspațiu finit dimensional cu $\dim S_0 = 2$ al spațiului $C^1(I, \mathbb{R}^2)$.

$\{y^1, y^2\}$ bază în S_0 s.n. sistem fundamental de soluții, iar matricea $U = (Y^1\ Y^2 \dots Y^n)$ s.n. matrice fundamentală de soluții.

Soluția generală a sistemului liniar omogen este:

$$Y = U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (3).$$

3.2. Metoda reducerii la o ecuație cu coeficienți constanți

Considerăm cazul sistemelor de două ecuații:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{cases} \qquad (4)$$

Se alege una dintre ecuațiile sistemului și se derivează:

$$y_1'' = a_{11} y_1' + a_{12} y_2' = a_{11}(a_{11} y_1 + a_{12} y_2) + a_{12}(a_{21} y_1 + a_{22} y_2) =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{12} a_{21}) y_1 + (a_{11} a_{12} + a_{12} a_{22}) y_2$$

Pentru simplificarea scrierii vom nota

$$\alpha_1 = a_{11}^2 + a_{12} a_{21}$$

$$\alpha_2 = a_{11} a_{12} + a_{12} a_{22}$$

Astfel, obținem:

$$y_1'' = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Folosim această relație și ec. sistemului (4) de la care am pornit și obținem sistemul:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ y_1'' = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \end{cases} \qquad (5)$$

din care îl exprimăm pe y_2 în funcție de y_1, y_1':

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}} (y_1' - a_{11} y_1) \qquad (6)$$

și prin înlocuirea în cea de a 2-a ecuație obținem:

$$y_1'' = \alpha_1 y_1 + \frac{\alpha_2}{a_{12}} (y_1' - a_{11} y_1)$$

$$y_1'' = \frac{\alpha_2}{a_{12}} y_1' + \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 a_{11}}{a_{12}}\right) y_1$$

adică o ecuație cu coeficienți constanți de ord. 2 cu necunoscuta y_1:

$$y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1 = 0 \quad (7), \quad p_1 = -\frac{\alpha_2}{a_{12}}$$
$$p_2 = -\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 a_{11}}{a_{12}}\right)$$

Prin rezolvarea acestei ec. folosind metoda de rezolvare a ecuațiilor liniare omogene de ordinul 2 cu coef. constanți obținem:

$$y_1(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

$\{\phi_1, \phi_2\}$ este sistemul fundamental de soluții coresp. ecuației (7).

Expresia celei de a 2-a componente a sist. se obține din (6) prin înlocuirea lui y_1 cu expresia determinată.

Ex 1: a) $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$

Soluție: Alegem prima ec. și o derivăm:

$$y_1'' = y_2'$$

Din a 2-a ec. avem că $y_2' = y_1$, deci

$$y_1'' = y_1$$

adică obținem ec. liniară omogenă de ordinul 2 în y_1

$$y_1'' - y_1 = 0$$

Ec. caracteristică atașată

$$r^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm 1$$

Astfel, sist. fundamental de soluții coresp. acestei ec. este:

$$\phi_1(x) = e^x, \quad \phi_2(x) = e^{-x}$$

deci sol. corespunzătoare pt. y_1 este

$$y_1(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Expresia celei de a 2-a componente a sistemului se obține din prima ec. a sist., știm că

$$y_2 = y_1' \Rightarrow y_2 = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sol. sistemului este:

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \\ y_2(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e) $$\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

Soluție:

$$y_1'' = y_1' - 5y_2'$$

$$y_1'' = y_1 - 5y_2 - 5(2y_1 - y_2) = y_1 \cancel{-5y_2} - 10y_1 \cancel{+5y_2}$$

$$y_1'' = -9y_1$$

Adică y_1 este soluție a ec:

$$y_1'' + 9y_1 = 0$$

Ec. caract: $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 3i$

Astfel, avem sist. fundamental de soluții:

$$\phi_1(x) = \cos(3x), \quad \phi_2(x) = \sin(3x)$$

$$y_1(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cea de-a 2-a componentă se det. din prima ecuație:

$$y_2 = \frac{1}{5}(y_1 - y_1')$$

$$y_2(x) = \frac{1}{5}\left[c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + 3c_1 \sin(3x) - 3c_2 \cos(3x)\right]$$

$$y_2 = c_1\left[\frac{1}{5}\cos(3x) + \frac{3}{5}\sin(3x)\right] + c_2\left[\frac{1}{5}\sin(3x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\right]$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Soluția sistemului este:

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) \\ y_2(x) = c_1\left[\frac{1}{5}\cos(3x) + \frac{3}{5}\sin(3x)\right] + c_2\left[\frac{1}{5}\sin(3x) - \frac{3}{5}\cos(3x)\right] \end{cases}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Temă:

c) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}$ Sol. este: $\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ y_2(x) = c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x}, \end{cases}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$ Sol. este: $\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^x \sin(x) + c_2 e^x \cos(x) \\ y_2(x) = -c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x), \end{cases}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

e) $\begin{cases} y_1' = 7y_1 + y_2 \\ y_2' = 7y_2 \end{cases}$ Sol. este: $\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^{7x} + c_2 x e^{7x} \\ y_2(x) = c_2 e^{7x} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

f) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 \end{cases}$ Sol. este: $\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \\ y_2(x) = c_1 e^x + 3c_2 e^{-x}, \end{cases}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3.3. Metoda ecuației caracteristice (metoda valorilor proprii)

Considerăm sistemul liniar omogen cu coeficienți constanți (1) scris în forma vectorială (2)

$$Y' = A \cdot Y$$

Căutăm soluții de forma

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} \quad (8) \quad \text{a.î. } (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$$

Deoarece Y trebuie să fie soluție a sistemului (2) atunci

$$Y' - A \cdot Y = 0$$

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda E_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică (α_1, α_2) este soluție a sist. liniar omogen

$$(\lambda E_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

și cum $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ atunci $\boxed{\det(\lambda E_2 - A) = 0 \quad (10)}$

Ec. (10) s.n. ecuația caracteristică atașată sist. (2) și observăm că sol. ecuației caract. sunt valorile proprii ale matricii A, iar coef. $(\alpha_1, \alpha$