# CURS 5

## Modele matematice date prin ecuații diferențiale de ordinul I

### 1) Dezintegrarea radioactivă

Legea lui Rutherford: viteza de dezintegrare a unei substanțe radioactive este direct prop. cu cantitatea de subst. la mom. respectiv.

$x(t)$ – cant. de subst. radioactivă la mom. $t>0$

$x_0$ – cant de subst. la mom. inițial $t_0=0$.

$$\boxed{x(0)=x_0}$$

$t \to x(t)$

$t+\Delta t \to x(t+\Delta t)$

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \to \text{viteza medie pe interv. de timp } \Delta t$$

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} x'(t)$$

$x'(t) \sim x(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t), \ \underline{\underline{k>0}} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$k$ – const. de dezintegrare.

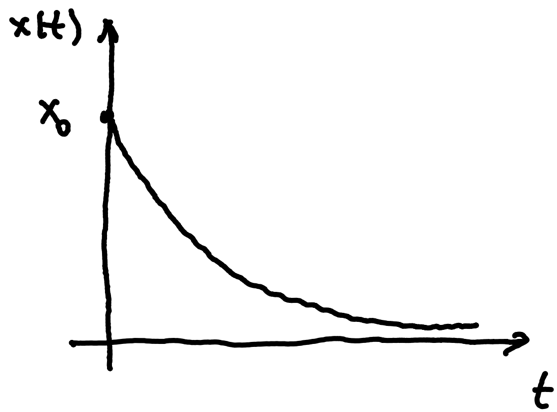
$$x' = -kx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -k \cdot x \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -k \, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = -k \cdot t + \ln c$$

$$x(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}, \ c \in \mathbb{R}$$ sol. gen. a ec.

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c = x_0$$

$\Rightarrow$ soluţia modelului: $\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t}}$




$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

Concluzie: în timp subst. radioactivă dispare.

Timp de înjumătățire: intervalul de timp necesar unei subst. radioactive să-și înjumătățească cantitatea.

$T_{1/2}$ – timp. de înjumătățire

$t=0 \mapsto x_0$

$t=T_{1/2} \mapsto \frac{x_0}{2} \Rightarrow x(T_{1/2}) = \frac{x_0}{2}$

$$x_0 \cdot e^{-k \cdot T_{1/2}} = \frac{x_0}{2} \quad \Big| : x_0$$

$$e^{-k \cdot T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$-k \cdot T_{1/2} = \ln \frac{1}{2}$$

$$-k \cdot T_{1/2} = -\ln 2$$

$$\boxed{k \cdot T_{1/2} = \ln 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}} \qquad \boxed{k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}}$$

soluția modelului în termenii lui $T_{1/2}$ :

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-k \cdot t} = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} =$$

$$= x_0 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = x_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}}$$

2) <u>Datarea prin $C^{14}$</u> (Willard Libby 1949, 1960 - Pr. Nobel)

$C^{14}$ – izotop radioactiv al izotop. stabil $C^{12}$

$T_{1/2} \simeq 5730$ ani

– organismele vii, pe lângă izotopul stabil $C^{12}$ conțin o cant. mică de $C^{14}$ generat de radiații cosmice și este asimilat de către organismele vii prin hrană.

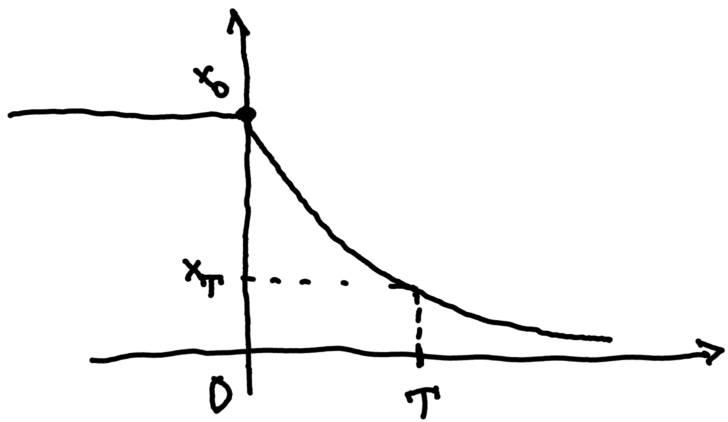
– datorită proceselor biochimice în organisme raportul $C^{14}/C^{12}$ are o val. constantă pe durata vieții acestora

- dacă organismul moare aceste procese biochimice încetează și în consecință cant. $C^{14}$ începe să scadă datorită fenomenului de dezintegrare.

$$x(t) - \text{cant. } C^{14}/C^{12} \text{ la mom. } t>0$$

se consideră momentul inițial $t_0=0$ momentul decesului organismului resp.

$$x_0 - \text{cant. } C^{14}/C^{12} \text{ la mom. } t_0=0$$




$$\begin{cases} x' = -k x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \text{ ani}^{-1}$$

- la momentul $T > 0$, momentul descop. rămășitelor ale acelui organism, se măsoară raut. de $C^{14}/C^{12}$ și se obține valoarea $x_T$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x(T) = x_T \qquad\qquad T = ?$$

$$x_0 \cdot e^{-kT} = x_T$$

$$e^{-kT} = \frac{x_T}{x_0} \Rightarrow -kT = \ln\frac{x_T}{x_0}$$

$$kT = \ln\frac{x_0}{x_T}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{k} \cdot \ln\frac{x_0}{x_T}}$$

## 3) Problema "răcirii" corpurilor

Legea lui Newton: viteza de "răcire" a unui corp este proporțională cu diferența dintre temp. corpului la mom. respectiv și temp. mediului înconjurător.

$T(t)$ – temp. corpului la mom. $t>0$.

$T_0$ – temp. corpului la mom. inițial $t_0=0$

$$\boxed{T(0)=T_0.}$$

viteza de „răcire" – $T'(t)$

$T' \sim T-T_m$

$T_m$ – temp. mediului înconjurător (temp. mediului ambiant).

$T_m$ – constantă în timp.

$$\Rightarrow \begin{cases} T' = -k\cdot(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}, \quad \underline{k>0} \text{ – const. de „răcire" a corpului}$$

$k>0$?

dacă $T(t) < T_m \Rightarrow$ corpul se încălzește $\Rightarrow T(t)$ cresc. $\Rightarrow$

$\Rightarrow T'(t) > 0$

$$\underbrace{T'}_{>0} = -k\cdot\underbrace{(T - T_m)}_{<0} \Rightarrow -k<0 \Rightarrow k>0$$

dacă $T(t) > T_m \Rightarrow$ corpul se răcește $\Rightarrow T(t)$ descresc. $\Rightarrow$

$\Rightarrow T'(t) < 0$

$$\underbrace{T'}_{<0} = -k\cdot\underbrace{(T - T_m)}_{>0} \Rightarrow -k<0 \Rightarrow k>0$$

$$T' = -k(T - T_m) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_m) \Rightarrow$$

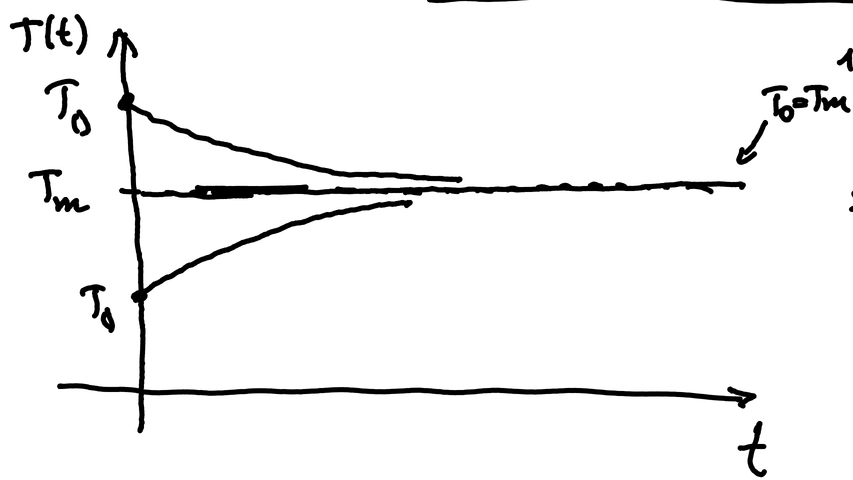
$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T - T_m} = \int -k \cdot dt \Rightarrow \ln(T - T_m) = -k \cdot t + \ln c$$

$$T - T_m = c \cdot e^{-kt}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(t) = c \cdot e^{-kt} + T_m, \ c \in \mathbb{R}} \rightarrow \text{sol. gen. a ec.}$$

$$T(0) = T_0 \Rightarrow c + T_m = T_0 \Rightarrow c = T_0 - T_m$$

$\Rightarrow$ soluția modelului: $\boxed{T(t) = (T_0 - T_m)e^{-kt} + T_m}$




1. dacă $T_0 = T_m \Rightarrow$
$\Rightarrow T(t) \equiv T_m$

2. $T_0 \neq T_m \Rightarrow$
$\lim_{t \to \infty} T(t) = T_m$

Concluzie: În timp temp. corpului tinde către valoarea temp. mediului înconjurător. $T(t) \to T_m$.

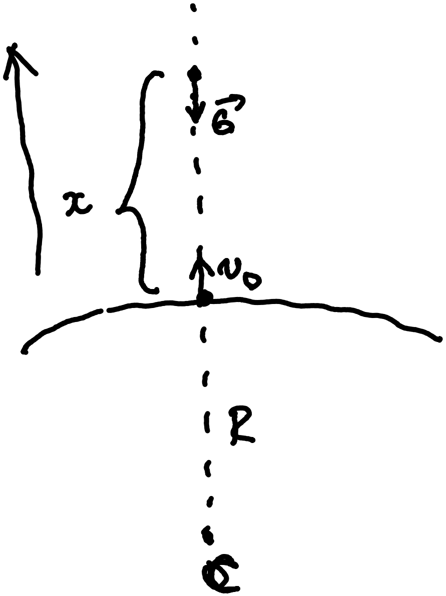
## 4) Mișcarea pe verticală în câmp gravitațional

Problemă: Un corp de masă $m$ este proiectat vertical de la suprafața pământului cu o viteză inițială $v_0$.
Presupunând că nu există frecare cu aerul, dar luând în considerare variațiile câmpului gravitațional în raport cu distanța să se determine expresia vitezei în funcție de distanța $x$ de la corp la supr. pământului.

$x$ – distanța de la supr. la corp.

$v(x)$ – viteza corpului la înălțimea $x$.

$v_0$ – viteza inițială la supr.




$R$ – raza pământului

$G(x)$ – forța gravitațională la înălțimea $x$.

$G(x)$ – forța gravit. esti invers prop. cu pătratul distanței de la corp la centrul pământului

$$G(x) = -\frac{k}{(x+R)^2}$$

la supr. accel. gravit. $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

$x = 0 \qquad G(0) = -mg$

$$\Rightarrow -mg = -\frac{k}{R^2} \Rightarrow k = mgR^2$$

$$\Rightarrow \boxed{G(x) = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}}$$

$m . a = F \qquad F = G$

$x = x(t)$

$v(t) = x'(t)$

$a(t) = v'(t) = x''(t)$

$v = v(x) = v(x(t))$

$v'(t) = v'(x) . x'(t) =$

$= v'(x) . v(x)$

$m . a = F \Rightarrow m . v'(t) = G(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{m}\, v'(x) . v(x) = - \frac{\cancel{m} g R^2}{(x+R)^2}$

$$\begin{cases} v'(x) . v(x) = - \dfrac{g R^2}{(x+R)^2} \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$\to$ ec. cu var. sep.

$$v \cdot v' = \frac{-gR^2}{(x+R)^2} \Rightarrow v \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

$$\Rightarrow v \cdot dv = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \cdot dx \Big| \cdot 2$$

$$\Rightarrow \int 2 \cdot v \cdot dv = \int -\frac{2gR^2}{(x+R)^2} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{2gR^2}{x+R} + c, \ c \in \mathbb{R}}$$ sol. gen. în formă implicită

$v(0) = v_0 \Leftrightarrow$ pt $x = 0$ avem $v = v_0$

$$\Downarrow$$

$$v_0^2 = \frac{2gR^{\cancel{2}}}{R} + c \Rightarrow c = v_0^2 - 2gR$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x) = \pm \sqrt{\frac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR}}$$

„+" – corpul urcă

„–" – corpul coboară

Altitudinea maximă

Problemă: Știind valoarea vitezei inițiale $v_0$ să se det. altitudinea maximă $h$ la care ajunge corpul.

$h$ – altitudinea maximă

atunci când corpul atinge altitudinea maximă acesta se oprește, adică

$$v(h) = 0$$

$$v(h) = 0 \Rightarrow \frac{2gR^2}{h+R} + v_0^2 - 2gR = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2gR^2}{h+R} = 2gR - v_0^2 \Rightarrow h+R = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2} - \overset{2gR - v_0^2}{R} = \frac{\cancel{2gR^2} - \cancel{2gR^2} + v_0^2 R}{2gR - v_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(v_0) = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}}$$

# Viteza de evadare din câmpul gravitațional

Problemă: Care este viteza inițială cu care trebuie proiectat corpul pt. ca acesta să părăsească câmpul gravitațional al pământului?

$v_e$ – viteza de evadare.

corpul nu se mai întoarce pe pământ atunci $h \to +\infty$

$$\boxed{v_e = \lim_{h\to\infty} v_0(h)}$$

$v_0(h)$ – viteza inițială pt a atinge altitudinea $h$.

$v_0(h)$ se obține din relația ce dă altitudinea maximă

adică $v(h)=0 \Rightarrow$

$$\frac{2gR^2}{h+R} + v_0^2 - 2gR = 0 \Rightarrow v_0^2 = 2gR\,\frac{h+R}{} - \frac{2gR^2}{h+R}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{2gRh + \cancel{2gR^2} - \cancel{2gR^2}}{h+R} \Rightarrow v_0^2 = \frac{2gRh}{h+R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_0(h) = \sqrt{\frac{2gRh}{h+R}}$$

$$v_e = \lim_{h\to\infty} v_0(h) = \lim_{h\to\infty} \sqrt{\frac{2gRh}{h+R}} = \sqrt{2gR}$$

$$g = 9.81\ \frac{m}{s^2}\ , \quad R = 6371\ Km \quad \Rightarrow v_e \simeq 11.1\ \frac{km}{s}.$$