Mihăilă Andra

21.04.2021

Seminar 9

- Geometrie -

Problema 8

- Să se găsească un punct al elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad a > b > c > 0$$

astfel încât planul tangent în acest punct să taie segmente de lungime egală pe axele de coordonate.

- Soluție:

- Ecuația planului tangent într-un punct oarecare al elipsoidului este:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} - 1 = 0$$

- Ecuația planului tangent prin tăieturi este:

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_0}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_0}} + \frac{z}{\frac{c^2}{z_0}} - 1 = 0$$

- Tăieturile planului pe axe sunt: $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$.

Scanned with CamScanner

- Știm că tăieturile au aceeași lungime =>

$$\Rightarrow \left|\frac{a^2}{x_0}\right| = \left|\frac{b^2}{y_0}\right| = \left|\frac{c^2}{z_0}\right| \quad \text{(în modul deoarece sunt lungimi)}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{|x_0|} = \frac{b^2}{|y_0|} = \frac{c^2}{|z_0|}$$

- Coordonatele punctului de tangență sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{|x_0|} = \dfrac{b^2}{|y_0|} = \dfrac{c^2}{|z_0|} \\[2ex] \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Cazul I $\quad x_0, y_0, z_0 > 0$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{x_0} = \frac{b^2}{y_0} = \frac{c^2}{z_0}$$ și scot y_0, z_0 în funcție de x_0.

$$\frac{a^2}{x_0} = \frac{b^2}{y_0} \Rightarrow y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot x_0$$

$$\frac{a^2}{x_0} = \frac{c^2}{z_0} \Rightarrow z_0 = \frac{c^2}{a^2} \cdot x_0$$

- înlocuiesc în $(*)$:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{b^2 x_0^2}{a^4} + \frac{c^2 x_0^2}{a^4} = 1 \quad \Big| \cdot a^4$$

$$a^2 x_0^2 + b^2 x_0^2 + c^2 x_0^2 = a^4$$

$$x_0^2 \underbrace{(a^2+b^2+c^2)}_{>0} = a^4 \quad \Big| \cdot \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

$$x_0^2 = \frac{a^4}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow x_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$y_0 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad z_0 = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- $A(x_0, y_0, z_0)$ este un punct al elipsoidului în care planul tangent în acest punct taie segmente de lungime egală pe axele de coordonate.

Cazul II $\quad x_0, y_0, z_0 < 0$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{-x_0} = \frac{b^2}{-y_0} = \frac{c^2}{-z_0} \Rightarrow$$ Ajungem la exact aceeași relație

$$\frac{a^2}{x_0} = \frac{b^2}{y_0} = \frac{c^2}{z_0} \Rightarrow x_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$y_0 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad z_0 = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

- Toate soluțiile se obțin în același mod, ele fiind simetrice soluției inițiale relativ la axele și planele de coord. și origine.