Mihăilă Andra

26.05.2021

gr. 214

anul I iR

Lucrare 2

Geometrie

1. Găsiți tangentele la elipsa $4x^2+5y^2=120$ care sunt paralele cu dreapta $4x-2y+15=0$ și determinați distanța dintre ele.

$4x^2+5y^2=120$

$d: 4x-2y+15=0 \Rightarrow 2y = 4x+15 \Rightarrow y = 2x+\frac{15}{2}$

$\Rightarrow m_d = 2$

- Elipsă $\rightarrow$ $4x^2+5y^2=120 \;\Big|\cdot \frac{1}{120}$

$$\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$$

$\rightarrow$ Forma generală tangențială:

$y = k\cdot x \pm \sqrt{k^2a^2+b^2}$ $\qquad k=2$

$y_1 = 2x \pm \sqrt{120+24}$ $\qquad a^2=30$

$\qquad b^2=24$

$y_1 = 2x + \sqrt{144}$

$y_1 = 2x+12 \Rightarrow \boxed{2x-y_1+12=0}$

$y_2 = 2x-12 \Rightarrow \boxed{2x-y_1+12=0}$

- Iau $P(0,12)$

$\rightarrow d(P, y_2) = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|0-12-12|}{\sqrt{4+1}} = \frac{24}{\sqrt{5}} = \frac{24\sqrt{5}}{5}$

2. Determinați generatoarele rectilinii ale suprafeței $2x^2 - y^2 = 36z$ care trec prin punctul $M(36,36,36)$.

$2x^2 - y^2 = 36z \;\Big|\cdot \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{18} = 2z$

$M(36,36,36)$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{3\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3\sqrt{2}}\right) = 2z \cdot 1$$

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{3\sqrt{2}}\right) = 2\mu z \\ \mu\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3\sqrt{2}}\right) = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 36 \\ y = 36 \\ z = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda\left(12 - \frac{12}{\sqrt{2}}\right) = 72\mu \\ \mu\left(12 + \frac{12}{\sqrt{2}}\right) = \lambda \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

· Rezolvăm inițial sistemul:

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{3\sqrt{2}}\right)=2\mu z \\ \mu(12+6\sqrt{2})=\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{\mu}(12+6\sqrt{2})\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{3\sqrt{2}}\right)=2\cancel{\mu}z$$ prima ecuație

$$4x-\frac{4y}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}x-\frac{2\cancel{\sqrt{2}}y}{\cancel{\sqrt{2}}}=2z$$

$$4x-\frac{4\sqrt{2}y}{2}+2\sqrt{2}x-2y=2z \;\Big|\cdot\frac{1}{2}$$

$$2x-y\sqrt{2}+\sqrt{2}x-y=z$$

$$x(2+\sqrt{2})-y(\sqrt{2}+1)-z=0$$ formă finală

· Calculăm apoi sistemul:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3\sqrt{2}}\right)=2\beta z \\ \beta\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{3\sqrt{2}}\right)=\alpha \end{cases}$$

$$\cancel{\beta}(12-6\sqrt{2})\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{3\sqrt{2}}\right)=2\cancel{\beta}z$$

$$4x+\frac{4y}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}x-\frac{2\cancel{\sqrt{2}}y}{\cancel{\sqrt{2}}}=2z \;\Big|\cdot\frac{1}{2}$$

$$2x+\frac{\cancel{2}\sqrt{2}y}{\cancel{2}}-\sqrt{2}x-y=z$$

$\cancel{x(2-\sqrt{2})-z=0}$ $x(2-\sqrt{2})+y(\sqrt{2}-1)-z=0$ formă finală

3. O dreaptă paralelă cu planul xOy se deplasează sprijinindu-se pe axa Oz și pe cercul (γ) de ec

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$$

Det. ec. suprafeței conoide generată de dr. mobilă.

$$Oz: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda y$$

$$xOy: \{ z=0 \Rightarrow z=\mu$$

$\Rightarrow$ Deci știm:
$$\begin{cases} x=\lambda y \\ z=\mu \\ 2x+2y-1=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

$$2x+2y=1$$

$$2\lambda y+2y=1$$

$$y(2\lambda+2)=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2\lambda+2} \Rightarrow x=\frac{\lambda}{2\lambda+2}$$

$$\frac{\lambda^2}{(2\lambda+2)^2}+\frac{1}{(2\lambda+2)^2}+\mu^2-1=0$$

• Știm că $\lambda = \frac{x}{y}$, $\mu = z$ și înlocuim în:

$$1 + \lambda^2 + (2\lambda + 2)^2 \cdot (\mu^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{2x+2y}{y}\right)^2 \cdot (z^2 - 1) = 0$$

$$1 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{4x^2 + 4xy + 4y^2}{y^2} \cdot (z^2 - 1) = 0 \;\Big|\cdot y^2$$

$$y^2 + x^2 + 4x^2z^2 + 4xyz^2 + 4y^2z^2 - 4x^2 - 4xy - 4y^2 = 0$$

$$4x^2z^2 + 4xyz^2 + 4y^2z^2 - 3x^2 - 4xy - 3y^2 = 0$$

4) Se consideră pătratul ABCD, cu A(0,0), B(3,0), C(3,3) și D(0,3). Să se determine imaginea acestui pătrat prin reflexia față de dreapta $2x+y-3=0$, urmată de o rotație de unghi $-45°$ relativ la punctul Q(2,-1). Reprezentați grafic, pe același sistem de axe de coordonate, pătratul inițial și imaginea sa prin compunerea celor două transformări.

$$\text{Mirror}(a=2, b=1, c=-3) = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot \begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2-b^2 & -2bc \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{12}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta)+q_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta + q_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Q(2,-1)$ și $\theta = -45°$ $\quad (\cos -45° = \cos 45°, \sin -45° = -\sin 45°)$

$$\text{Rot}(2,-1,-45°) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = Rot \cdot Mirror = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{12}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{7}{5\sqrt{2}} & -\frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{10\sqrt{2}+13}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{5\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} & \frac{9-5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A'B'C'D'] = T_1 \cdot [ABCD] = T_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A'B'C'D'] = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 10\sqrt{2}+13 \\ -1 & 7 & 9-5\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \cancel{7}\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 10\sqrt{2}+13 & 10\sqrt{2}-8 & 10\sqrt{2}-11 & 10\sqrt{2}+10 \\ 9-5\sqrt{2} & 6-5\sqrt{2} & 27-5\sqrt{2} & 30-5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$[A'B'C'D'] = \begin{array}{cccc} A' & B' & C' & D' \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{13+10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} & \frac{10-4\sqrt{2}}{5} & 10\sqrt{2}-11 & 2+\sqrt{2} \\ \frac{9-5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} & \frac{6-5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} & \frac{27-5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} & \frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A'\left(\frac{13+10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}, \frac{9-5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\right)$, $B'\left(\frac{10-4\sqrt{2}}{5}, \frac{6-5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\right)$

$C'\left(10\sqrt{2}-11, \frac{27-5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\right)$, $D'\left(2+\sqrt{2}, \frac{6-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$