Mihăilă Andra 7.04.2021

grupa 214

Lucrare de control

Geometrie - informatică

V_1

Problema 1. Se dau vectorii a (3,5,2) și b(-4,0,3). Determinați doi vectori c și d astfel încât să avem $\vec{a} = \vec{c} + \vec{d}$, unde c este coliniar cu b și este perpendicular ~~cu~~ pe d.

$a = c + d \Rightarrow (x_c + x_d, y_c + y_d, z_c + z_d) = (3, 5, 2)$

a(3,5,2)

b(-4,0,3)

$\vec{a} = \vec{c} + \vec{d}$

c coliniar cu b $\Rightarrow \vec{c} = \alpha \cdot \vec{b}$ sau $\frac{x_c}{-4} = \frac{y_c}{0} = \frac{z_c}{3}$

$c \perp d$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_c + x_d = 3 \\ y_c + y_d = 5 \quad (1) \\ z_c + z_d = 2 \end{cases}$$

$y_b = 0 \Rightarrow$ Prin convenție, $\boxed{y_c = 0}$ (2)

Fie $c(x_c, y_c, z_c)$

$d(x_d, y_d, z_d)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow 0 + y_d = 5$

$\Rightarrow \boxed{y_d = 5}$

$c \perp d \Rightarrow x_c \cdot x_d + \underbrace{\underset{0}{y_c} \cdot \underset{5}{y_d}}_{0} + z_c \cdot z_d = 0$

$x_c \cdot x_d + z_c \cdot z_d = 0$

Ajungem la sistemul:

$$\begin{cases} x_c + x_d = 3 \\ z_c + z_d = 2 \\ \frac{x_c}{-4} = \frac{z_c}{3} \Rightarrow 3x_c = -4z_c \Rightarrow x_c = -\frac{4}{3} \cdot z_c \\ x_c \cdot x_d + z_c \cdot z_d = 0 \end{cases}$$

~~Problema 2 Se dau trei vectori a, b și c astfel încât a + b = c și ||a|| + ||b|| = ||c||. Calculați unghiul dintre vectorii a și b.~~

$$-\frac{4}{3}\cdot z_c\cdot x_d + z_c\cdot z_d = 0$$

$$z_c\left(-\frac{4}{3}\cdot x_d + z_d\right) = 0$$

Cazul I $\boxed{z_c = 0} \Rightarrow \boxed{x_c = -\frac{4}{3}\cdot 0 = 0}$

$$0 + x_d = 3 \Rightarrow \boxed{x_d = 3}$$

$$0 + z_d = 2 \Rightarrow \boxed{z_d = 2}$$

$\begin{cases} \text{Avem } c(0,0,0) \\ d(3,5,2) \end{cases}$

Cazul II $-\frac{4}{3}\cdot x_d + z_d = 0$

Reținem că aveam

$$\left.\begin{cases} x_c + x_d = 3 \Rightarrow x_d = 3 - x_c \\ z_c + z_d = 2 \Rightarrow z_d = 2 - z_c \end{cases} \Rightarrow x_d = 3 + \frac{4}{3} z_c \right| \Rightarrow$$

Dar $x_c = -\frac{4}{3}\cdot z_c$

$$-\frac{4}{3}\left(3 + \frac{4}{3} z_c\right) + 2 - z_c = 0$$

$$-\frac{4}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot z_c + 2 - z_c = 0$$

$$-4 - \frac{16}{9}\cdot z_c + 2 - z_c = 0$$

$$-2 - \frac{16}{9}\cdot z_c - z_c = 0 \quad |\cdot 9$$

$$-18 - 16 z_c - 9 z_c = 0$$

$$-25 z_c = 18 \Rightarrow \boxed{z_c = -\frac{18}{25}}$$

$$x_d = \overset{25}{\overline{3}} + \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{18^{6}}{25}\right) = \frac{75-24}{25} = \frac{51}{25}$$

$$z_d = \overset{25}{\overline{2}} + \frac{18}{25} = \frac{50+18}{25} = \frac{68}{25}$$

~~Avem c(~~ $x_c = +\frac{4}{3}\cdot\left(+\frac{18^{6}}{25}\right) = \frac{24}{25}$

Avem $c\left(\frac{24}{25}, 0, -\frac{18}{25}\right)$

$d\left(\frac{51}{25}, 5, \frac{68}{25}\right)$

Problema 2 Se dau trei vectori a, b și c astfel încât $a+b=c$ și $\|a\| + \|b\| = \|c\|$. Calculați unghiul dintre vectorii a și b.

$$\begin{cases} a+b=c \\ \|a\|+\|b\|=\|c\| \end{cases}$$

$(\widehat{a,b}) = ?$

$a(x, y, z)$

$b(x', y', z')$

$c(x'', y'', z'')$

$$a+b=c \Rightarrow \begin{cases} x+x'=x'' \;|\,{}^2 \Rightarrow x^2+x'^2+2xx'=x''^2 \quad (1) \\ y+y'=y'' \;|\,{}^2 \Rightarrow y^2+y'^2+2y\cdot y'=y''^2 \quad (2) \\ z+z'=z'' \;|\,{}^2 \Rightarrow z^2+z'^2+2z\cdot z'=z''^2 \quad (3) \end{cases}$$

$$\|a\|+\|b\|=\|c\| \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2} \;|\,{}^2$$

~~$(x^2+y^2+z^2)+(x'^2+y'^2+z'^2) = x''^2+y''^2+z''^2$~~

$$(x^2+y^2+z^2) + 2\cdot\|a\|\cdot\|b\| + x'^2+y'^2+z'^2 = x''^2+y''^2+z''^2$$

Înlocuim cu (1), (2), (3) și avem:

$$2\cdot\|a\|\cdot\|b\| + \cancel{x''^2} - 2xx' + \cancel{y''^2} - 2yy' + \cancel{z''^2} - 2z\cdot z' = \cancel{x''^2}+\cancel{y''^2}+\cancel{z''^2}$$

$$2\|a\|\cdot\|b\| - 2(xx'+yy'+zz') = 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{2\|a\|\cdot\|b\|}$$

$$1 - \frac{xx'+yy'+zz'}{\|a\|\cdot\|b\|} = 0$$

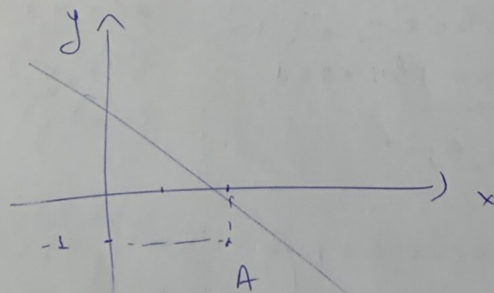
$$\Rightarrow \frac{xx'+yy'+zz'}{\|a\|\cdot\|b\|} = 1 \Rightarrow$$ $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos 1$

$\cancel{\alpha = \arccos 1 \Rightarrow \cos\alpha = 1}$

$\boxed{\alpha = 0} \Rightarrow$ vectorii a, b sunt coliniari

$\Rightarrow m(\widehat{a, b}) = 0$

Problema 3 Un triunghi echilateral are o latură pe dreapta $x+y-2=0$ şi un vârf în punctul $A(2,-1)$. Determinaţi ecuaţiile dreptelor suport ale celorlalte două laturi.



Δ echilateral

$d: x+y-2=0$

vf $A(2,-1)$

Fie $B(x_b, y_b)$

$C(x_c, y_c)$

$d(B,C) = d(A,B) = d(A,C)$ (Pentru că ΔABC echilat)

$d(A,B) = \sqrt{(x_B-2)^2+(y_B+1)^2}$

$d(A,C) = \sqrt{(x_C-2)^2+(y_B+1)^2}$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x_B-2)^2+(y_B+1)^2} = \sqrt{(x_C-2)^2+(y_B+1)^2} \Rightarrow$

$(x_B-2)^2+(y_B+1)^2 = (x_C-2)^2+(y_C+1)^2 \Rightarrow$ $\cancel{(x_B-2)^2+(x_C-2)^2+(y_B+1)^2}$

Calculez ecuația înălțimii dusă din A

$m_h = 1 \Rightarrow y - y_0 = m_h (x - x_0)$

$y + 1 = 1 \cdot (x - 2)$

$y + 1 = x - 2 \Rightarrow x - y - 3 = 0$

$h: x - y - 3 = 0$ ec. înălțimii dusă din A

Revin la distanțe

$(x_B - 2)^2 + (y_B + 1)^2 = (x_C - 2)^2 + (y_C + 1)^2$

$(x_B - 2)^2 - (x_C - 2)^2 = -\left((y_B + 1)^2 - (y_C + 1)^2\right)$

$\Rightarrow (x_B - 2)^2 - (x_C - 2)^2 + (y_B + 1)^2 - (y_C + 1)^2 = 0$

$\Rightarrow x_B - x_C + y_B - y_C = 0$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1 - x \quad (+)$$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y = 1 - 2 = -1$

$\Rightarrow M(2, 1)$ mijl $[BC]$

$$\begin{cases} x_B + x_C = 5 \\ y_B + y_C = -1 \\ x_B - x_C + y_B - y_C = 0 \\ x_B + y_B = 2 \\ x_C + y_C = 2 \end{cases}$$

$d: x + y - 2 = 0$

$B, C \in d$

Problema 4 Verificați că dreptele

$$\Delta_1 \begin{cases} 2x+9y+z+35=0 \\ 2x+3y-z+9=0 \end{cases}$$

și

$$\Delta_2 \begin{cases} 4x-2y+z+18=0 \\ 4x-4y-z+30=0 \end{cases}$$

sunt necoplanare, determinați ecuațiile perpendicularei comune și calculați lungimea acestei perpendiculare.

- Pentru Δ_1:

$\vec{v_1}(2,9,1)$

$\vec{v_2}(2,3,-1)$

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-9-3)\,i - j \cdot (-2-2) + k \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 9)$$

$$= -12i + 4j - 12k \;\Big|\cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \vec{v}_{\Delta_1}(-3, 1, -3)$$

$$= -3i + j - 3k$$

- Pentru Δ_2:

$\vec{v_1}(4,-2,1)$

$\vec{v_2}(4,-4,-1)$

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 6i + 8j - 8k \;\Big|\cdot \frac{1}{2}$$

$$= 3i + 4j - 4k \Rightarrow \vec{v}_{\Delta_2}(3, 4, -4)$$

Observ că punctul $A(-3,4,2)$ este sol. pt. Δ_2

și $B(-2,-3,-4)$ este sol. pt. Δ_1

=) prin formula $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$

Avem: $\begin{vmatrix} -5 & -7 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 20+63+72+18-60+84$

$= 194-123 = 71 \neq 0 =)$

=) nu sunt coplanare

$\vec{v}_{\Delta 1} \times \vec{v}_{\Delta 2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

$\beta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -4+12 = 8$

$\beta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -9+12 = 3$

$\beta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -12+3 = -9$

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuațiile perpendicularei comune

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+4 \\ 3 & 4 & -4 \\ 8 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \frac{71}{\sqrt{64+9+81}} \right|$$

Formula pt. dist. de la un pct. la un plan