Calcul Numeric

Cursul 10

2020

Anca Ignat

Interpolare Newton pe noduri echidistante

Pp. că nodurile de interpolare sunt echidistante:

$$x_i = x_0 + i\,h \quad , \quad i = 0,1,...,n$$

În relația de mai sus fie se dă $\boldsymbol{h}$ distanța între 2 noduri succesive, fie se precizează primul și ultimul nod, $\boldsymbol{x_0}$ și $\boldsymbol{x_n}$ iar $\boldsymbol{h}$ se calculează:

$$h = \frac{(x_n - x_0)}{n}.$$

$$\left[x_i, x_{i+1}\right]_f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Se introduce noțiunea de **diferență finită de ordinul 1:**

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Pornind de la această definiție se pot introduce și diferențe finite de ordin superior:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) =$$

$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

și în general se pot introduce recursiv **diferențele finite de ordin *k***:

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x).$$

Prin inducție după ***k*,** se poate deduce formula de calcul a diferențelor finite de ordin ***k*** folosind doar valorile funcției ***f***:

$$\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \, f(x+ih).$$

Observație: Dacă funcția $\boldsymbol{f}$ este polinom de grad $\boldsymbol{m}$ atunci $\boldsymbol{\Delta f(x)}$ este polinom de grad ***m-1***, $\boldsymbol{\Delta^2 f(x)}$ este polinom de grad ***m-2***, ş.a.m.d. Prin urmare:

$$\boldsymbol{\Delta^k f(x) \equiv 0\,,\ \text{pentru}\ k > m\,,\ \ f\ -\text{polinom de grad}\ m}.$$

Legătura între diferențele divizate şi cele finite:

$$\boldsymbol{\left[x_i, x_{i+1}\right]_f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{\Delta f(x_i)}{h}}$$

$$\boldsymbol{\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\right]_f = \frac{\left[x_{i+1}, x_{i+2}\right]_f - \left[x_i, x_{i+1}\right]_f}{(x_{i+2} - x_i)} = \frac{\Delta^2 f(x_i)}{2h^2}}$$

Prin inducție se poate arăta următoarea legătură între diferențele divizate de ordin ***k*** şi cele finite:

$$\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right]_f = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!h^k}.$$

Polinoame de interpolare pe noduri echidistante

$$l_n(x) = y_0 + \left[x_0, x_1\right]_f (x - x_0) + \left[x_0, x_1, x_2\right]_f (x - x_0)(x - x_1) + \cdots +$$
$$+ \left[x_0, x_1, ..., x_k\right]_f (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1}) + \cdots +$$
$$+ \left[x_0, x_1, ..., x_n\right]_f (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Consideră că punctul de interpolare este de forma:

$$\bar{x} = x_0 + t\,h$$

și înlocuim diferențele divizate cu diferențe finite în forma Newton a polinomului de interpolare:

$$(\bar{x} - x_0)\cdots(\bar{x} - x_{k-1}) = (x_0 + t\,h - x_0)\cdots(x_0 + t\,h - x_0 - (k-1)h) =$$

$$= h^k t(t-1)\cdots(t-k+1)$$

$$l_n(\overline{x}) = l_n(x_0 + th) = y_0 + \Delta f(x_0)t + \Delta^2 f(x_0)\frac{t(t-1)}{2} + \cdots +$$

$$+ \Delta^k f(x_0)\frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!} + \cdots +$$

$$+ \Delta^n f(x_0)\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}$$

Această relație poartă numele de **formula lui Newton progresivă pe noduri echidistante.**

Considerăm polinomul de interpolare Lagrange pe nodurile în ordine inversă $\{x_n, x_{n-1}, ..., x_0\}$:

$$l_n(x) = y_n + [x_n, x_{n-1}]_f (x - x_n) + [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]_f (x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$
$$+ \cdots + [x_n, x_{n-1}, ..., x_0]_f (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0)$$

Dacă punctul de interpolare este de forma:

$$\overline{x} = x_n + th$$

analog ca mai sus obține **formula lui Newton regresivă pe noduri echidistante:**

$$
\begin{aligned}
l_n(\bar{x}) = l_n(x_n + th) = y_n + \Delta f(x_{n-1})t + \Delta^2 f(x_{n-2})\frac{t(t+1)}{2} + \cdots + \\
+ \Delta^k f(x_{n-k})\frac{t(t+1)\cdots(t+k-1)}{k!} + \cdots + \\
+ \Delta^n f(x_0)\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}
\end{aligned}
$$

Funcții spline

Fie nodurile:

$$x_i \in [a,b],\, i = 0,1,\ldots,n\,,$$

cu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se consideră funcția continuă polinomială pe porțiuni:

$$S(x) = P_i(x) \;\; \textbf{pentru} \;\; x \in [x_i, x_{i+1}] \quad \forall\, i = 0,\ldots,n-1$$

$$S(x)=\begin{cases} P_0(x), & x\in[x_0,x_1],\\ P_1(x), & x\in[x_1,x_2],\\ P_2(x), & x\in[x_2,x_3],\\ \quad\vdots & \\ P_{n-2}(x), & x\in[x_{n-2},x_{n-1}],\\ P_{n-1}(x), & x\in[x_{n-1},x_n]. \end{cases}$$

$P_i(x)$, $i=0,...,n$ sunt polinoame. O asemenea funcție poartă numele de ***funcție spline***.

Funcții spline liniare continue

Definiție

Funcția ***S(x)*** definită mai sus se numește ***funcție spline liniară continuă*** dacă polinoamele $P_i(x), i = 0,\dots,n-1$ sunt polinoame de gradul ***1*** și ***S(x)*** $\in$ ***C[a,b]***, adică:

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} S(x) = \lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} S(x), \; i = 1,\dots,n-1.$$

Fie funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ pentru care se cunosc valorile**:**

$$y_i = f(x_i), i = 0,\dots,n.$$

Funcția spline liniară de interpolare **S** pentru funcţia **f** îndeplinește condițiile de interpolare:

$$S(x_i) = y_i \;, i = 0,\ldots,n.$$

Ținând seamă că polinoamele **$P_i(x)$** sunt polinoame de gradul **1** și **$S(x)$** este continuă vom avea condițiile:

$$\begin{cases} P_i(x_i) = y_i \;, \\ P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \qquad i = 0,\ldots,n-1, \\ P_i(x) - \textbf{polinom de gradul 1.} \end{cases}$$

Din aceste condiții rezultă:

$$P_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\, y_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\, y_i \;, i = 0,\ldots,n-1$$

$$S(x_k) = P_{k-1}(x_k) = P_k(x_k) = y_k\ , k = 1,\ldots,n-1,$$
$$S(x_0) = P_0(x_0) = y_0\ , S(x_n) = P_{n-1}(x_n) = y_n\ .$$

Funcții spline cubice de clasă C^2

Se consideră sistemul de noduri distincte din intervalul ***[a,b]***:
$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$
Funcția ***S(x)*** asociată divizării ***Δ*** care îndeplinește condițiile :

$$S(x) \in C^2[a,b],$$

polinoamele $P_i(x)$ **au gradul** 3 , $i = 0,\ldots,n-1,$

se numește ***funcție spline cubică***.

Dată fiind o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu valorile:

$$y_i = f\left(x_i\right),\ i=0,\ldots,n,$$

se consideră funcția spline cubică ***S(x)*** de interpolare ce satisface

$$S(x_i)=y_i\ ,i=0,\ldots,n.$$

Pentru determinarea funcției spline cubice de interpolare observăm că polinoamele:

$$P_i(x)=\alpha_i x^3+\beta_i x^2+\gamma_i x+\delta_i\ ,\ x\in[x_i,x_{i+1}],i=0,\ldots,n-1,$$

implică determinarea a celor ***4n*** necunoscute $\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i\ ;i=0,\ldots,n-1\}$ pentru care se impun:

$$\begin{cases} \boldsymbol{n+1} \textbf{ condiţii din relaţiile de interpolare } \boldsymbol{S(x_i) = y_i \;, i = 0,\ldots,n,} \\ \boldsymbol{3(n-1)} \textbf{ condiţii de continuitate pentru } \boldsymbol{S(x), S^{'}(x)} \textbf{ şi } \boldsymbol{S^{''}(x)} \\ \qquad\qquad \textbf{în nodurile } \boldsymbol{x_i \;, i = 1,\ldots,n-1\,,} \end{cases}$$

în total ***4n-2*** condiții.

Se pot avea în vedere pentru adăugarea a două condiții suplimentarea următoarele abordări :

- fixarea pantelor în extremitățile intervalului ***[a,b].*** Se presupune că funcția ***f*** este derivabilă şi se cunosc valorile ***f′(a), f′(b)***. Se impun condițiile:

  $$S'(x_0) = P_0'(x_0) = f'(a)\,, S'(x_n) = P_{n-1}'(x_n) = f'(b);$$

- periodicitatea primelor două derivate:

$$f'(a)=f'(b) \quad (S'(x_0)=P_0'(x_0)=P_{n-1}'(x_n)=S'(x_n)),$$

$$f''(a)=f''(b) \quad (S''(x_0)=P_0''(x_0)=P_{n-1}''(x_n)=S''(x_n));$$

- anularea derivatei secunde în capetele intervalului:

$$f''(a)=f''(b)=0$$

$$(S''\left(x_0\right)=P_0''\left(x_0\right)=0\,,\,S''\left(x_n\right)=P_{n-1}''\left(x_n\right)=0).$$

Funcțiile spline care îndeplinesc aceste condiții se numesc ***funcții spline cubice normale***.

- derivata de ordinul al treilea a funcției $\boldsymbol{S}$ este continuă în punctele $\boldsymbol{x_1}$ și $\boldsymbol{x_{n-1}}$. Aceasta înseamnă că polinoamele $\boldsymbol{P_0}$**,** $\boldsymbol{P_1}$ respectiv $\boldsymbol{P_{n-2}}$**,** $\boldsymbol{P_{n-1}}$ coincid. Acest tip de funcție spline se numește „*not – a – knot*” și este utilizat în MATLAB.

Ne vom ocupa în continuare de determinarea funcţiei spline de interpolare în cazul în care cunoaştem prima derivată a funcţiei $\boldsymbol{f}$ în capetele intervalului de interpolare**:** $\boldsymbol{f'(a),\ \ f'(b)}$.

Recapitulând, vom avea următoarele condiţii :

$$\begin{cases} P_i(x_i) = y_i\ , i = 0,\ldots,n-1,\ P_{n-1}(x_n) = y_n\ -\ \textbf{interpolare}\,, \\ P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i)\,, i = 1,\ldots,n-1, -\ \textbf{continuitatea funcţiei}\ S\,, \\ P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i)\,, i = 1,\ldots,n-1, -\ \textbf{continuitatea primei derivatei,} \\ P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i)\,, i = 1,\ldots,n-1, -\ \textbf{continuitatea derivatei secund} \\ P'_0(x_0) = f'(a),\ P'_{n-1}(x_n) = f'(b). \end{cases}$$

Vom nota:

$$S''(x_i) = a_i \ , i = 0,\ldots n.$$

Ţinând seama de faptul că funcţia ***S″∈C[a,b]*** este o funcţie

liniară pe fiecare din intervalele $[x_i, x_{i+1}]$ rezultă că:

$$S''(x) = \frac{x - x_i}{h_i} a_{i+1} + \frac{x_{i+1} - x}{h_i} a_i \ , x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \forall i = 0,\ldots,n-1$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad , \ i = 0,\ldots,n-1$$

iar din

$$S'(x) = \int S''(x)dx\,, \qquad S(x) = \int S'(x)dx$$

rezultă:

$$S'(x) = \frac{\left(x - x_i\right)^2}{2h_i} a_{i+1} - \frac{\left(x_{i+1} - x\right)^2}{2h_i} a_i + b_i\,,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], b_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots n-1,$$

$$S(x) = \frac{\left(x - x_i\right)^3}{6h_i} a_{i+1} + \frac{\left(x_{i+1} - x\right)^3}{6h_i} a_i + b_i x + c_i\,,$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots n-1,$$

$$P_i(x)=\frac{\left(x-x_i\right)^3}{6h_i}a_{i+1}+\frac{\left(x_{i+1}-x\right)^3}{6h_i}a_i+b_i x+c_i\ ,$$

$$b_i,c_i\in\mathbb{R}\,,i=0,\dots n-1,$$

Vom calcula funcţia spline pentru cazul:

$$S'(a)=P_0'(x_0)=f'(a),$$
$$S'(b)=P_{n-1}'(x_n)=f'(b).$$

Impunând condiţiile de interpolare şi de continuitate vom obţine:

$$P_i(x_i) = \frac{h_i^2}{6} a_i + b_i x_i + c_i = y_i \ ,$$

$$P_i(x_{i+1}) = \frac{h_i^2}{6} a_{i+1} + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1} \ , \ i = 0, \ldots n-1.$$

Din aceste relaţii calculăm b_i şi c_i în funcţie de a_i , a_{i+1}, y_i , y_{i+1}:

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(a_{i+1} - a_i\right),$$

$$c_i = \frac{x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(x_{i+1} a_i - x_i a_{i+1}\right), i = 0, \ldots n-1.$$

Avem:

$$P_0'(x)=\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2h_0}a_1-\frac{\left(x_1-x\right)^2}{2h_0}a_0+b_0$$

$$P_{n-1}'(x)=\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^2}{2h_{n-1}}a_n-\frac{\left(x_n-x\right)^2}{2h_{n-1}}a_{n-1}+b_{n-1}$$

Din condiţia $S'(a)=P_0'(x_0)=f'(a)$ avem

$$P_0'(x_0)=-\frac{h_0}{2}a_0+b_0=-\frac{2h_0}{6}a_0-\frac{h_0}{6}a_1+\frac{y_1-y_0}{h_0}=f'(a)$$

$$2h_0 a_0 + h_0 a_1 = 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a) \right) \qquad (1)$$

Din condiţia $S'(b) = P'_{n-1}(x_n) = f'(b)$ avem

$$P'_{n-1}(x_n) = \frac{h_{n-1}}{2} a_n + b_{n-1} = \frac{h_{n-1}}{6} a_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{6} a_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} = f'(b)$$

$$h_{n-1} a_{n-1} + h_{n-1} a_n = 6\left(f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \qquad (2)$$

Din condiţia de continuitate a primei derivate a funcţiei spline cubice $P'_{i-1}(x_i) = P'_i\left(x_i\right)$, $i = 1,...,n-1$, ţinând seama de:

$$P'_{i-1}(x) = \frac{\left(x - x_{i-1}\right)^2}{2h_{i-1}}a_i - \frac{\left(x_i - x\right)^2}{2h_{i-1}}a_{i-1} + b_{i-1},$$

$$P'_i(x) = \frac{\left(x - x_i\right)^2}{2h_i}a_{i+1} - \frac{\left(x_{i+1} - x\right)^2}{2h_i}a_i + b_i,$$

rezultă, utilizând formulele pentru b_{i-1} şi b_i deduse mai sus:

$$P'_{i-1}(x_i) = \frac{h_{i-1}}{2} a_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}\left(a_i - a_{i-1}\right) =$$

$$P'_i(x_i) = -\frac{h_i}{2} a_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left(a_{i+1} - a_i\right)$$

sau

$$(h_{i-1} + h_i)\, a_i + h_i\, a_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \; i = 1, \ldots, n-1.$$

(3)

Sistemul liniar format din ecuaţiile (1), (3), (2) cu necunoscutele $\left\{\boldsymbol{a}_0\ ,\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right\}$ are forma:

$$\boldsymbol{Ha} = \boldsymbol{f}\ ,\text{cu } \boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}\ ,\ \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$2h_0 a_0 + h_0 a_1 = 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a) \right)$$

$$(h_{i-1} + h_i)a_i + h_i a_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) i = 1, \ldots, n-1$$

$$h_{n-1} a_{n-1} + h_{n-1} a_n = 6\left(f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right)$$

$$
H = \begin{bmatrix}
2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 6\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a)\right) \\ 6\left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \quad i = 1,\dots,n-1 \\ 6\left(f'(b) - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \end{bmatrix}
$$

Matricea ***H*** are diagonala dominantă atât pe linii cât şi pe coloane, este simetrică şi pozitiv definită prin urmare putem utiliza metoda Gauss-Seidel sau o metodă de relaxare pentru rezolvarea sistemului ***Ha=f***.

Interpolare în sensul celor mai mici pătrate

x	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
f	y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

$$f(x_i) = y_i \ , \ i=0,...,n$$

$$f(x) \approx S_f(x; a_0, a_1, ..., a_m)$$

$$S_f(x; a_0, a_1, ..., a_m) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Coeficienții $a_0, a_1, ..., a_m$ se găsesc rezolvând problema de minimizare în sensul celor mai mici pătrate:

$$\min\{ \sum_{r=0}^{n} \Big(S_f(x_r; a_0, a_1, ..., a_m) - y_r \Big)^2 ; a_0, a_1, ..., a_m \in \mathbb{R} \} \quad \textbf{(LSP)}$$

$$g : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_+ \ ,$$

$$g(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{r=0}^{n} \Big(S_f(x_r; a_0, a_1, ..., a_m) - y_r \Big)^2$$

$$g(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{r=0}^{n} \Big(a_m x_r^m + \cdots + a_k x_r^k + \cdots + a_1 x_r + a_0 - y_r \Big)^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial a_k}(a_0, a_1, ..., a_m) = 2 \sum_{r=0}^{n} \Big(a_m x_r^m + \cdots + a_k x_r^k + \cdots + a_1 x_r + a_0 - y_r \Big) x_r^k$$

Soluția problemei de minimizare a problemei **(LSP)** este obținută rezolvând sistemul de ecuații liniare, de dimensiune ***(m+1)***:

$$\frac{\partial g}{\partial a_k}(a_0, a_1, ..., a_m) = 0 \ , \quad k = 0, 1, ..., m$$

$$\sum_{r=0}^{n}\left(a_m x_r^m + \cdots + a_k x_r^k + \cdots + a_1 x_r + a_0\right) x_r^k = \sum_{r=0}^{n} y_r x_r^k \ , \ k = 0, ..., m$$

$$a_0 \sum_{r=0}^{n} x_r^k + a_1 \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+1} + \cdots + a_{m-1} \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+m-1} + a_m \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+m} = \sum_{r=0}^{n} y_r x_r^k \ ,$$

$$k = 0, ..., m$$

Constantele $\{ a_0, a_1, ..., a_m \}$ sunt soluția sistemului liniar:

$$Ba = z \ ,$$

$$B \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \ , \ B = (b_{kj})_{k,j=0}^{m} \ , \ z \in \mathbb{R}^{(m+1)} \ z = (z_k)_{k=0}^{m}$$

$$b_{kj} = \sum_{r=0}^{n} x_r^{k+j} \quad , \quad z_k = \sum_{r=0}^{n} y_r x_r^k \ , \qquad k, j = 0, ..., m$$