Algoritmica grafurilor - Cursul 5

Noiembrie 2018

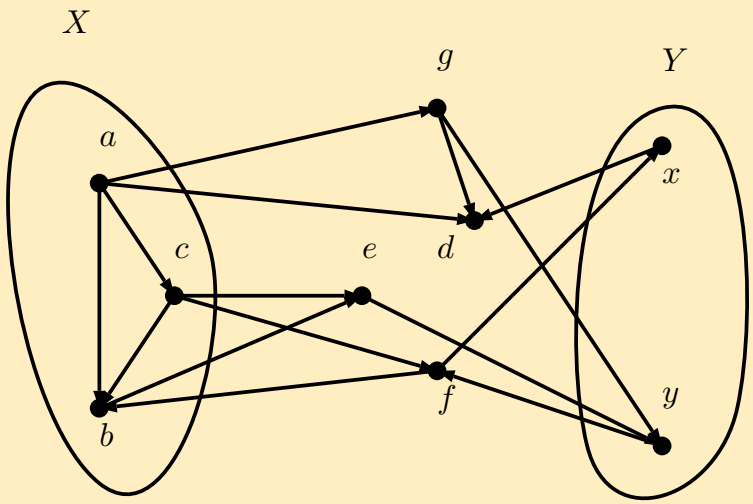
Cuprins

Definiţia 1

Fie $G = (V, E)$ un (di)graf şi $X, Y \subseteq V$. Un XY-drum este orice drum P din G de la un nod $x \in X$ la un nod $y \in Y$ astfel încât $V(P) \cap X = \{x\}$ şi $V(P) \cap Y = \{y\}$.

Notăm cu $\mathcal{P}(X, Y, G)$ familia tuturor XY-drumurilor din G. Observăm că dacă $x \in X \cap Y$ atunci $P = \{x\}$, de lungime 0, este un XY-drum.

Exemplu



XY-paths: (b, e, y), (c, f, x), and (a, g, y); an YX-path: (y, f, b)

Conexiune - Teorema lui Menger şi aplicaţii

- Spunem că drumurile P_1 şi P_2 sunt **disjuncte** (pe noduri) dacă $V(P_1) \cap V(P_2) = \varnothing$.
- Motivată de problemele practice din reţelele de comunicaţii şi de asemeni de studiile teoretice asupra conexiunii în (di)grafuri, este de interes determinarea mulţimilor de cardinal maxim de XY-drumuri disjuncte.
- Notăm cu $p(X, Y; G)$ **numărul maxim de XY-drumuri disjuncte în G**.
- Teorema care determină acest număr este datorată lui **Menger (1927)** şi reprezintă unul dintre rezultatele fundamentale din Teoria grafurilor.

Definiţia 2

Fie $G = (V, E)$ *un (di)graf şi* $X, Y \subseteq V$. *O* **mulţime** XY**-separatoare** *în* G *este orice submulţime* $Z \subseteq V$ *astfel încât*

$$V(P) \cap Z \neq \varnothing, \text{ pentru fiecare } P \in \mathcal{P}(X, Y; G).$$

Notăm cu

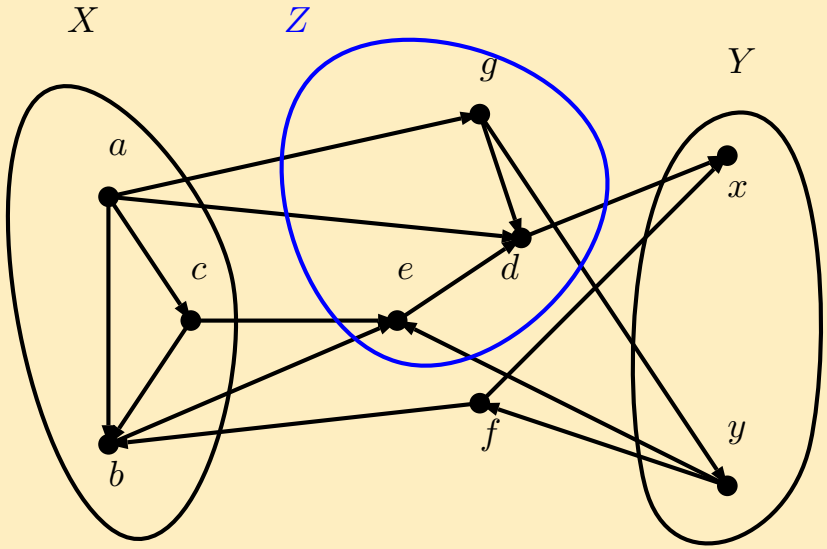
$$\mathbf{S}(X, Y; G) = \{Z \ : \ Z \text{ este mulţime } XY\text{-separatoare din } G\} \text{ şi}$$

$$k(X, Y; G) = \min\{|Z| \ \ Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)\}$$

Din definiţie urmează că:

- Dacă $Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$, atunci $\mathcal{P}(X, Y; G \setminus Z) = \varnothing$.
- $X, Y \in \mathbf{S}(X, Y; G)$. tion

Exemplu



A XY-separating set: $Z = \{g, e, d\}$

- Dacă $Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$, atunci $A \in \mathbf{S}(X, Y; G)$, $\forall A$ astfel încât $Z \subseteq A \subseteq V$.
- Dacă $Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$ şi $T \in \mathbf{S}(Z, Y; G)$, atunci $T \in \mathbf{S}(X, Y; G)$.

Teorema 1

Teorema lui Menger. Fie $G = (V, E)$ un (di)graf şi $X, Y \subseteq V$. Atunci $p(X, Y; G) = k(X, Y; G)$.
(I. e., numărul maxim de XY-drumuri disjuncte = cardinalul minim al unei mulţimi XY-separatoare.)

Demonstraţie:
$k(X, Y; G) \geqslant p(X, Y; G) = p$. Fie $P_1, \ldots, P_p$ XY-drumuri disjuncte din G; $Z \cap V(P_i) \neq \varnothing$, $\forall Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$. Deoarece P_i sunt disjuncte ($i = \overline{1, p}$):

$$|Z| \geqslant \left| Z \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} V(P_i) \right) \right| = \sum_{i=1}^{p} |Z \cap V(P_i)| \geqslant \sum_{i=1}^{p} 1 = p.$$

Astfel, $|Z| \geqslant p$, $\forall Z \in \mathbf{S}(X, Y; G)$; urmează că $k(X, Y; G) \geqslant p$.

$k(X, Y; G) \leqslant p(X, Y; G) = p$. Omisă. (Vom arăta mai târziu că $\forall G = (V, E)$ şi $\forall X, Y \subseteq V$, $\exists k(X, Y; G)$ XY-drumuri disjuncte în G folosind fluxuri în anumite reţele.) □

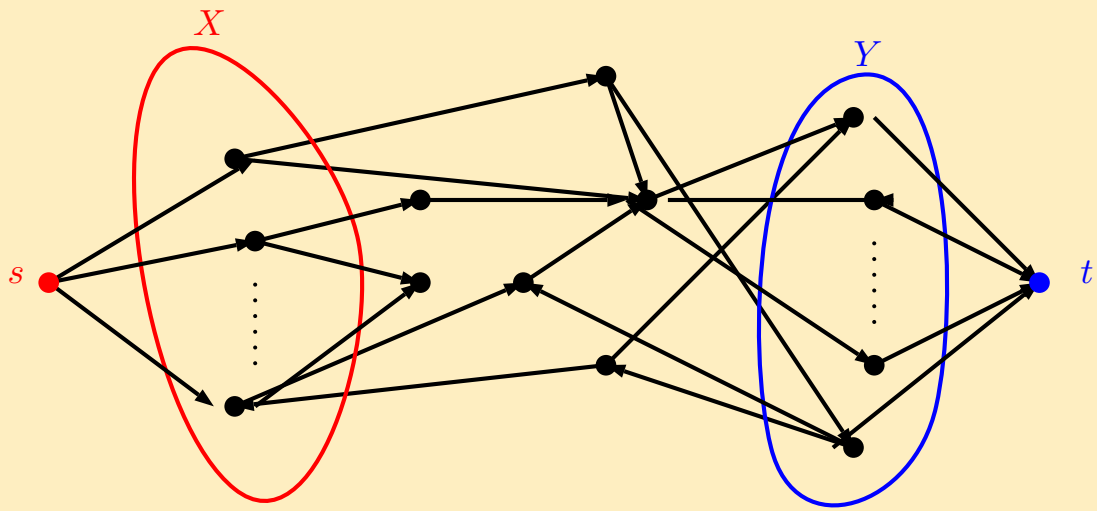
Menger (1927) a enunţat echivalent teorema de mai sus, utilizând drumuri intern-disjuncte: $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{st}$ astfel încât $V(P_1) \cap V(P_2) = \{s, t\}$:

Teorema 2

Fie $G = (V, E)$ un (di)graf şi $s, t \in V$, astfel încât $s \neq t$, $st \notin E$. Există k drumuri intern-disjuncte de la s la t în G dacă şi numai dacă există cel puţin un drum de la s la t în (di)graful obţinut din G prin ştergerea oricărei mulţime de $< k$ noduri diferite de s şi t.

Demonstraţia echivalenţei:

Teorema 1 $\Rightarrow$ Teorema 2: luăm $X = N_G^+(s)$ $(N_G(s))$ şi $Y = N_G^-(t)$ $(N_G(t))$.



Teorema 2 $\Rightarrow$ Teorema 1: adăugăm două noi noduri s şi t (di)grafului G, şi toate muchiile (orientate) de la s la orice nod din X şi de la orice nod din Y la t. $\square$

Aplicaţii: p-conexiune

- Un graf G este p-conex ($p \in \mathbb{N}^*$) dacă fie $G = K_p$, fie $|G| > p$ şi $G \setminus A$ este conex pentru orice $A \subseteq V(G)$ cu $|A| < p$.
- Din Teorema 2, o caracterizare echivalentă a p-conexiunii este:
  Un graf G este p-conex ($p \in \mathbb{N}^*$) dacă fie $G = K_p$, fie $\forall st \in E(\overline{G})$ există p drumuri intern-disjuncte de la s la t în G.
- Urmează că, pentru a calcula $k(G)$ - **numărul de conexiune pe noduri** al grafului G, trebuie aflat

$$\min_{st \notin E(G)} p(\{s\}, \{t\}; G),$$

  care poate fi determinat în timp polinomial folosind fluxuri în reţele.

Aplicaţii: Teorema lui König

- O **acoperire cu noduri a grafului** G este o mulţime $X \subseteq V(G)$ de noduri astfel încât $G - X$ este un graf nul (orice muchie din G are cel puţin o extremitate în X).
- Un caz special al Teoremei 1 se obţine când G este bipartit şi X, Y sunt cele două clase ale bipartiţiei lui G:

Teorema 3

(König, 1931) Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit. Atunci, cardinalul maxim al unui cuplaj din G este egal cu cardinalul minim al unei acoperiri cu noduri a lui G.

Demonstraţie: Cardinalul maxim al unui cuplaj în G este $p(S, T; G) = k(S, T; G)$, din Teorema 1. Deoarece o mulţime de noduri este o mulţime ST-separatoare dacă şi numai dacă este o acoperire cu noduri, Teorema 3 este dovedită. □

Aplicaţii: Teorema lui Hall

- Fie I şi S mulţimi finite nevide. O familie submulţimi ale lui S (indexată după I) este o funcţie $A : I \to 2^S$. Notăm $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ şi (folosind notaţia funcţională) $\mathcal{A}(J) = \bigcup_{j \in J} A_j$ (pentru $J \subseteq I$).
- O funcţie de reprezentare pentru familia $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ este orice funcţie $r_{\mathcal{A}} : I \to S$ cu proprietatea $r_{\mathcal{A}}(i) \in A_i$, $\forall i \in I$; atunci, $(r_{\mathcal{A}}(i))_{i \in I}$ este numit un sistem de reprezentanţi pentru $\mathcal{A}$.
- Dacă funcţia de reprezentare, $r_{\mathcal{A}}$, este injectivă, atunci $r_{\mathcal{A}}(I)$ este o submulţime a lui S şi este numită **sistem de reprezentanţi distincţi** pentru $\mathcal{A}$, sau o **transversal** a lui $\mathcal{A}$.
- Problema centrală în Teoria Transversalelor este de a caracteriza familiile care admit o transversală (cu anumite proprietăţi). Teorema lui **Hall (1935)** este primul rezultat de acest tip.

Teorema 4

Hall, 1935 *Familia $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ de submulţimi ale lui S are o transversală dacă şi numai dacă*

(H) $$|\mathcal{A}(J)| \geqslant |J|, \forall J \subseteq I.$$

Demonstraţie: "$\Rightarrow$" Dacă $r_{\mathcal{A}}$ este o funcţie de reprezentare injectivă pentru $\mathcal{A}$, atunci $r_{\mathcal{A}}(J) \subseteq \mathcal{A}(J)$, $\forall J \subseteq I$. Astfel, $r_{\mathcal{A}}$ fiind injectivă, $|\mathcal{A}(J)| \geqslant |r_{\mathcal{A}}(J)| \geqslant |J|$.
"$\Leftarrow$" Fie $G_{\mathcal{A}} = (I, S; E)$ graful bipartit asociat familiei $\mathcal{A}$ (dacă $I \cap S \neq \varnothing$, putem considera copii izomorfe disjuncte): $E = \{is | i \in I, s \in S \cap A_i\}$. Se observă că $N_{G_{\mathcal{A}}}(i) = A_i$. Mai mult, $\mathcal{A}$ are o transversală dacă şi numai dacă $G_{\mathcal{A}}$ are un cuplaj de cardinal $|I|$.

Demonstraţia Teoremei lui Hall (continuare): Arătăm că dacă relaţia (H) are loc, atunci orice acoperire cu noduri a lui $G_{\mathcal{A}}$ are cel puţin $|I|$ noduri, şi - din Teorema lui Konig - $G_{\mathcal{A}}$ are un cuplaj de cardinal $|I|$.

Fie $X = I' \cup S' \subseteq I \cup S$ o acoperire cu noduri a lui $G_{\mathcal{A}}$: urmează că $N_{G_{\mathcal{A}}}(I \setminus I') \subseteq S'$, adică, $\mathcal{A}(I \setminus I') \subseteq S'$. Atunci,

$$|X| = |I'| + |S'| \geqslant |I'| + |\mathcal{A}(I \setminus I')|.$$

Deoarece are loc (H), obţinem

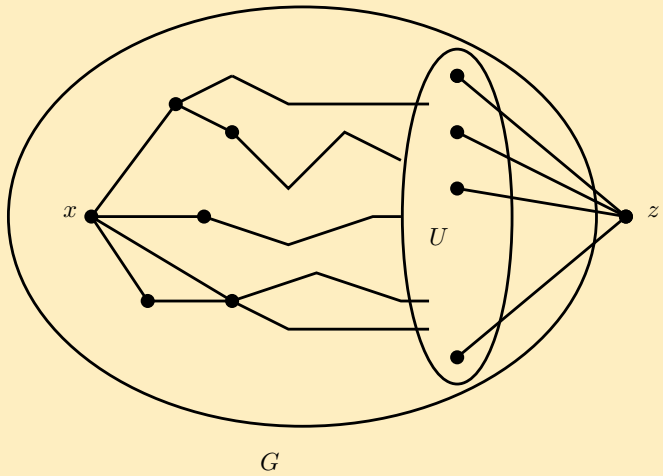
$$|X| \geqslant |I'| + |\mathcal{A}(I \setminus I')| \geqslant |I'| + |I \setminus I'| = |I|. \square$$

Aplicaţii: Teorema lui Dirac (structura grafurilor p-conexe)

Lemă

Fie $G = (V, E)$ un graf p-conex de ordin $|G| \geqslant p + 1$, $U \subseteq V$, $|U| = p$ şi $x \in V \setminus U$. Atunci există p xU-drumuri astfel încât oricare două dintre ele îl au numai pe x drept nod comun.

Demonstraţie: Fie $G' = (V \cup \{z\}, E')$, unde $E' = E \cup \{zu : u \in U\}$.



Aplicaţii: Teorema lui Dirac (structura grafurilor p-conexe)

Demonstraţie (continuare). Atunci, G' este un graf p-conex. Într-adevăr, fie $A \subseteq V(G')$ cu $|A| \leqslant p-1$. Dacă $A \subseteq V(G)$, atunci $G'-A$ este conex (din k-conexiunea lui G, $G-A$ este conex; cum $|A| < p$, $\exists u \in U \setminus A$ şi, astfel, există $zu \in E(G'-A)$. Dacă $z \in A$, atunci $G'-A = G-A$ care este conex.

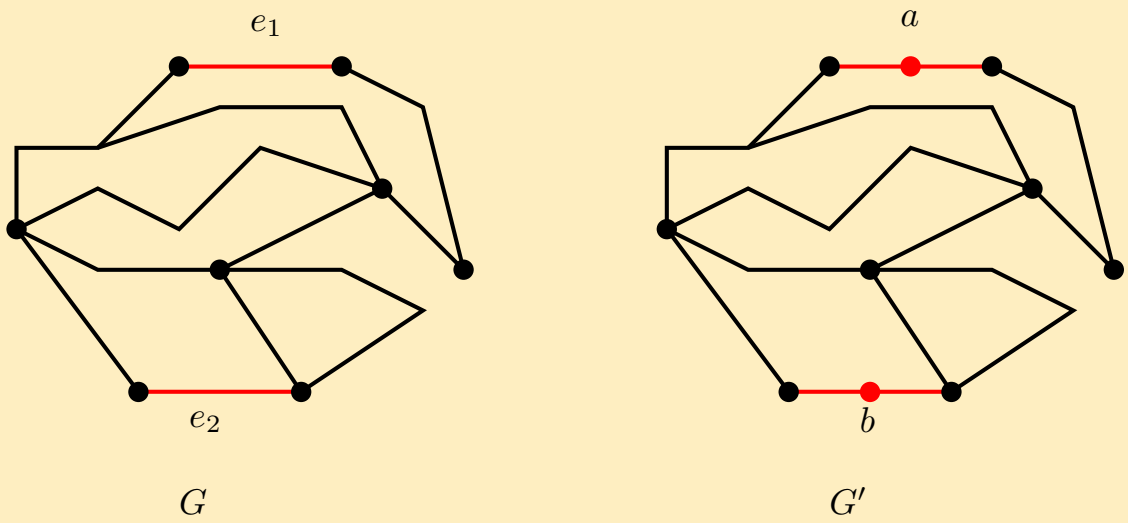
Lema urmează aplicând Teorema 2 grafului G' şi perechii x, z. $\square$

Propoziţie

Fie $G = (V, E)$ un graf p-conex, $p \geqslant 2$. Atunci, pentru orice două muchii e_1 şi e_2 ale lui G şi pentru orice, $x_1, \ldots, x_{p-2}$, $p-2$ noduri ale lui G, există un circuit în G care conţine toate aceste muchii şi noduri.

Demonstraţie: Inducţie după p.

Pentru $p = 2$, trebuie să arătăm că într-un graf 2-conex, G, orice două muchii e_1 şi e_2 aparţin unui circuit. Fie G' graful obţinut din G prin inserarea unui nod a pe e_1 şi a unui nod b pe e_2:

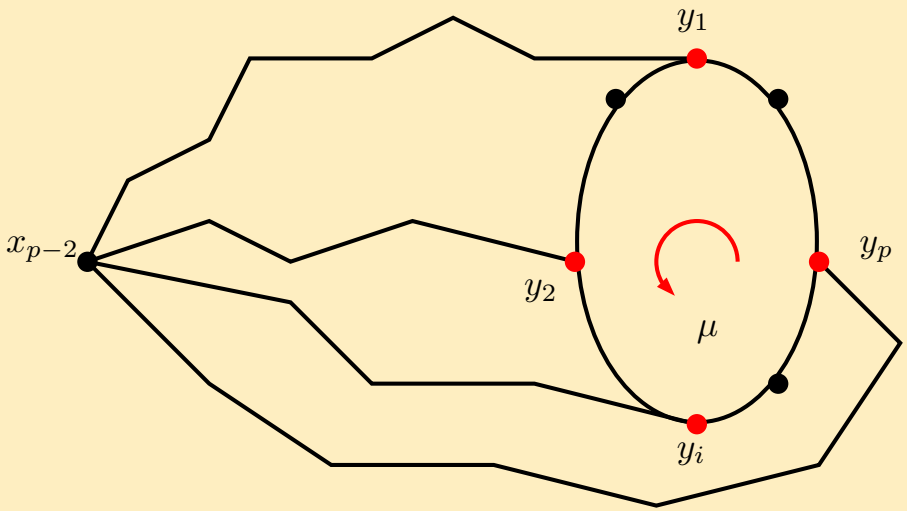


G' este 2-conex (orice graf de tipul $G' - v$ este conex). Astfel,există două drumuri intern-disjuncte de la a la b, care dau circuitul din G conţinând e_1 şi e_2.

Demonstraţie (continuare). În pasul inductiv, fie $p \geqslant 3$, presupunem că Propoziţia este adevărată pentru orice graf p'-conex cu $2 \leqslant p' < p$, şi considerăm un graf p-conex G, două dintre muchiile, sale e_1 şi e_2 şi o mulţime de $p-2$ noduri $\{x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}\}$.
Putem presupune că nicio extremitate v a lui e_1 sau e_2 nu aparţine mulţimii $\{x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}\}$ (altfel, aplicăm ipoteza inductivă şi obţinem că în graful $(p-1)$-conex, G, există un circuit C conţinând e_1, e_2 şi mulţimea de noduri $\{x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}\} \setminus \{v\}$; iar v este un nod al lui C deoarece e_1 şi e_2 sunt muchii ale lui C).
Graful $G - x_{p-2}$ este $(p-1)$-conex. Din ipoteza inductivă, există un circuit μ care conţine $x_1, x_2, \ldots, x_{p-3}$, e_1 şi e_2. Fie Y mulţimea nodurilor lui μ. Evident, $|Y| \geqslant p$ (mulţimii de $p-3$ noduri $x_1, x_2, \ldots, x_{p-3}$, îi adăugăm cel puţin trei extremităţi ale muchiilor e_1 şi e_2). Din Lema de mai sus, există p $x_{p-2}\,Y$-drumuri astfel încât oricare două dintre ele au în comun doar un singur nod, x_{p-2}.

Demonstraţie (continuare). Fie $P_{x_{p-2}y_1}, P_{x_{p-2}y_2}, \ldots P_{x_{p-2}y_p}$ aceste drumuri, unde ordinea $y_1, \ldots, y_p$ se obţine în urma unei parcurgeri a lui μ.

Nodurile $y_1, \ldots, y_p$ împart circuitul μ în drumurile $P_{y_1y_2}$, $P_{y_2y_3}, \ldots, P_{y_{p-1}y_p}$, $P_{y_py_1}$:



Cel puţin unul dintre drumurile de mai sus nu conţine în interior niciun element din mulţimea $x_1, x_2, \ldots, x_{p-3}$, e_1 şi e_2 (pigeon hole principle).

Fie $P_{y_1y_2}$ acest drum (altfel, renumerotăm nodurile y_i).

Demonstraţie (continuare). Atunci,

$$P_{x_{p-2}y_2}, P_{y_2y_3}, \ldots, P_{y_py_1}, P_{y_1x_{p-2}}$$

este circuitul din G care conţine $x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}$, e_1 şi e_2. □

Teorema 5

(Dirac, 1953) *Prin orice $p \geqslant 2$ noduri ale unui graf p-conex trece un circuit.*

Demonstraţie: Fie $G = (V, E)$ un graf p-conex, $p \geqslant 2$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_p$ p noduri ale lui G. Deoarece G este conex, există muchiile $e_1 = xx_{p-1}$ şi $e_2 = yx_p$. Atunci, teorema urmează din Propoziţia de mai sus. □

O aplicaţie interesantă a acestei teoreme (şi a demonstraţiei propoziţiei) este următoarea condiţie suficientă pentru ca un graf să fie Hamiltonian dată de Erdös şi Chvatal.

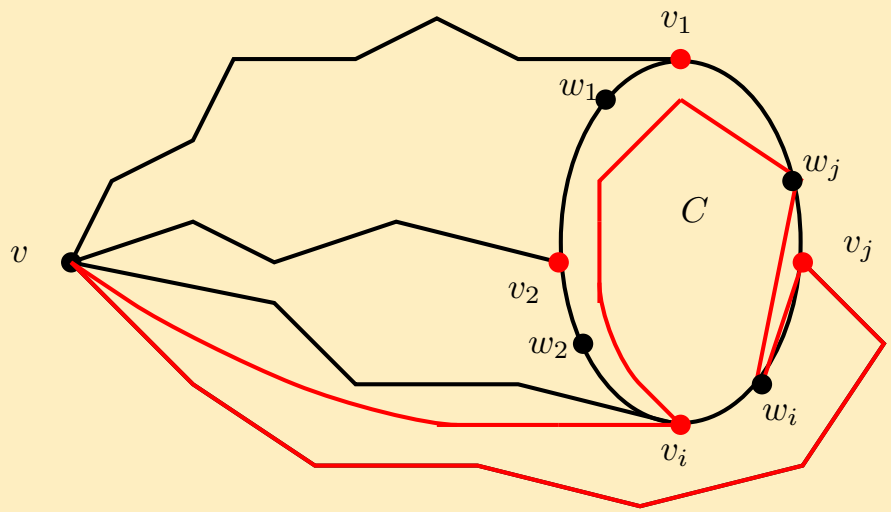
Teorema 6

(Erdös-Chvatal, 1972) *Fie $G = (V, E)$ un graf p-conex. Dacă $\alpha(G) \leqslant p$ atunci G este graf Hamiltonian.*

Demonstraţie: Să presupunem, prin contradicţie că G nu este Hamiltonian. Fie C un cel mai lung circuit din G.
Din Teorema lui Dirac $|C| \geqslant p$ şi din presupunerea noastră, există un nod $v \in V(G) \setminus V(C) \neq \varnothing$.

Demonstraţie (continuare). Cum $|C| \geqslant p$, putem repeta argumentul din demonstraţia Propoziţiei de mai sus pentru a arăta că există P_{vv_1}, $P_{vv_2}, \ldots, P_{vv_p}$, p vC-drumuri care se intersectează două câte două doar în v şi cu extremităţi v_i etichetate în ordinea în care apar la o parcurgere a circuitului.

Fie w_i succesorul nodului v_i pe circuit.



Demonstraţie (continuare). Observăm că $vw_i \notin E$ (altfel, circuitul $vw_i, w_i, C \setminus \{w_i v_i\}, P_{v_i v}$ este mai lung decât C, contradicţie).
Deoarece $\alpha(G) \leqslant p$, mulţimea $\{v, w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ nu este stabilă, şi din remarca de mai sus, urmează că există o muchie $w_i w_j \in E$.
Dar atunci, P_{vv_i}, inversul drumului de la v_i la w_j de pe circuit, muchia $w_j w_i$, drumul de la w_i la v_j de pe circuit, şi drumul $P_{v_j v}$ oferă un circuit mai lung decât C, contradicţie). □

Un **arbore** este un graf conex fără circuite.

Teorema 7

Fie $G = (V, E)$ un graf. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *G este un arbore (este conex şi nu are circuite).*

(ii) *G este conex şi este minimal cu această proprietate.*

(iii) *G nu are circuite şi este maximal cu această proprietate.*

Demonstraţie: Omisă. □

Minimalitatea şi maximalitatea din afirmaţiile de mai sus sunt relativ la relaţia de ordine parţială dată de incluziune pe submulţimile muchii. Mai precis afirmaţile (ii) şi (iii) înseamnă:

(ii) G este conex şi $\forall e \in E$, $G - e$ nu este conex.

(iii) G nu are circuite şi $\forall e \notin E$, $G + e$ are un circuit.

Definiţie

Fie $G = (V, E)$ un (multi)graf. Un **arbore parţial** *G este un graf parţial al lui G, $T = (V, E')$ $(E' \subseteq E)$, care este arbore. Notăm cu $\mathcal{T}_G$ mulţimea tuturor arborilor parţiali ai lui G.*

Remarci

1. $\mathcal{T}_G \neq \varnothing$ dacă şi numai dacă G este conex. Într-adevăr, dacă $\mathcal{T}_G \neq \varnothing$, atunci există un arbore parţial $T = (V, E')$ al lui G. T este conex, deci între orice două noduri ale lui G there este un drum P în T. Deoarece $E' \subseteq E$, P este un drum şi în G, deci G este conex.

Reciproc, dacă G este conex, atunci considerăm următorul algoritm:

$T \leftarrow G$;
while ($\exists e \in E(T)$ astfel încât $T - e$ este conex) **do**
  $T \leftarrow T - e$;

Din construcţie, T este graf parţial al lui G, şi are loc afirmaţia (ii) din Teorema 7, deci T este un arbore.

2. O altă demonstraţie constructivă (dacă G este conex atunci $\mathcal{T}_G \neq \varnothing$) se bazează pe observaţia că există o muchie în cross între cele două clase ale oricărei bipartiţii a lui V: $\exists e = v_1 v_2 \in E$ cu $v_i \in V_i$, $i = \overline{1,2}$.
Dacă $|V| = n > 0$ atunci următorul algoritm construieşte un arbore parţial al grafului conex $G = (V, E)$:

$k \leftarrow 1$; $T_1 \leftarrow (\{v\}, \varnothing)$; // $v \in V$
while $(k < n)$ **do**
  fie $xy \in E$ cu $x \in V(T_k), y \in V \setminus V(T_k)$;
  // o astfel de muchie există din conexiunea lui G
  $V(T_{k+1}) \leftarrow V(T_k) \cup \{y\}$;
  $E(T_{k+1}) \leftarrow E(T_k) \cup \{xy\}$;
  $k++$;

Evident, T_k este un arbore $\forall k = \overline{1, n}$ (inductiv, dacă T_k este un arbore atunci, din construcţie, T_{k+1} este conex şi nu are circuite). Mai mult, avem $|V(T_k)| = k$ şi $|E(T_k)| = k - 1$, $\forall k = \overline{1, n}$.

3. Dacă această construcţie este aplicată unui arbore G cu n noduri, vom obţine că G are $n - 1$ muchii. Această proprietate poate fi folosită pentru a extinde Teorema 7 cu alte caracterizări ale arborilor:

Teorema 8

Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru un graf $G = (V, E)$ cu n noduri:

(i) *G este un arbore.*

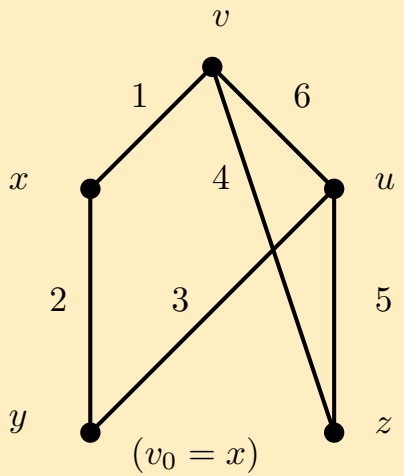
(ii) *G este conex şi are $n - 1$ muchii.*

(iii) *G nu are circuite şi are $n - 1$ muchii.*

(iv) *$G = K_n$ pentru $n \in \{1, 2\}$, iar pentru $n \geqslant 3$ $G \neq K_n$ şi $G + e$ are exact un circuit, pentru orice muchie $e \in E$.*

Demonstraţie: Omisă. □

- Descriem o metodă simplă de tip **backtracking** pentru a genera toţi arborii parţiali ai unui graf conex $G = (V, E)$, unde $V = \{1, \ldots, n\}$, $|E| = m$.
- Mulţimea de muchii, E, va fi reprezentată cu un tablou $E[1..2, 1..m]$ cu elemente din V, cu semnificaţia: dacă $v = E[1, i]$ şi $w = E[2, i]$, atunci vw este muchia i a lui G. Mai mult, vom presupune că primele $d_G(v_0)$ coloane din tabloul E au v_0 în linia 1 ($E[1, i] = v_0$, $\forall i = \overline{1, d_G(v_0)}$), pentru $v_0 \in V$.



1	2	3	4	5	6
x	x	y	z	z	u
v	y	u	v	u	v

Arbori - Generarea $\mathcal{T}_G$

- Un arbore parţial $T \in \mathcal{T}_G$ va fi reprezentat ca o mulţime de $n-1$ indecşi (în ordine crescătoare) ai coloanelor din tabloul E (desemnându-i muchiile).
- Întimpul generării, menţinem un vector $T[1..n-1]$ cu elemente din $\{1,\ldots,m\}$ şi o variabilă flag $i \in \{1,\ldots,n\}$ cu următoarele semnificaţii:
  Căutăm toţi arborii parţiali ai lui G, cu proprietatea că cele mai mici $i-1$ muchii sunt: $T[1] < T[2] < \ldots < T[i-1]$.
- Pentru exemplul de mai sus, dacă $i = 2$, $T[1] = 1$, şi $T[2] = 2$, atunci arborii care vor fi găsiţi sunt $\{1,2,3\}$, $\{1,2,5\}$, şi $\{1,2,6\}$. Dacă, $i = 2$, $T[1] = 3$, şi $T[2] = 5$ atunci arborele care trebuie găsit este $\{3,5,6\}$. Dar dacă $i = 2$, $T[1] = 1$, şi $T[2] = 6$, niciun arbore nu va fi găsit.

Arbori - Generarea $\mathcal{T}_G$

ALL-ST-Gen(i)

// sunt generaţi toţi arborii parţiali G , cu cele mai mici $i-1$ muchii: $T[1], \ldots, T[i-1]$

if $(i = n)$ **then**

// $\{T[1], \ldots, T[n-1]\}$ este arbore parţial

process(T); // printează, memorează etc

else

if $(i = 1)$ **then**

for $(j = \overline{1, d_G(v_0)})$ **do**

$T[i] \leftarrow j$; **A** All-ST-Gen$(i+1)$ **B**

else

for $(j = \overline{T[i-1]+1, m-(n-1)+i})$ **do**

if ($\langle \{T[1], \ldots, T[i-1]\} \cup \{j\} \rangle_G$ has no circuit) **then**

$T[i] \leftarrow j$; **A** All-ST-Gen$(i+1)$ **B**

Arbori - Generarea $\mathcal{T}_G$

- Prin apelul All-ST-Gen(1) obţinem $\mathcal{T}_G$.
- Pentru a testa dacă graful $\langle \{T[1], \ldots, T[i-1]\} \cup \{j\} \rangle_G$ nu are circuite, observăm că, din construcţie,

$$\langle \{T[1], \ldots, T[i-1]\} \rangle_G$$

  nu are circuite, deci este o pădure (fiecare componentă conexă este un arbore).
- Fie $root[1..n]$ un vector (global) cu elemente din V şi semnificaţia: $root[v]$ = rădăcina componentei conexe care conţine v (unul dintre nodurile sale).
- Înaintea apelului All-ST-Gen(1), vectorul $root$ este iniţializat pentru a satisface proprietatea: $root[v] \leftarrow v$ $(\forall v \in V)$ (deoarece atunci, $\{T[1], \ldots, T[i-1]\} = \varnothing$).

Arbori - Generarea $\mathcal{T}_G$

- În timpul apelurilor recursive, când se testează dacă muchia j poate fi adăugată mulţimii $\{T[1], \ldots, T[i-1]\}$ fără a crea vreun circuit, fie $v = E[1, j]$ şi $w = E[2, j]$. Atunci, $\langle \{T[1], \ldots, T[i-1]\} \cup \{j\} \rangle_G$ nu are circuite dacă şi numai dacă v şi w sunt în componente conexe diferite ale pădurii, i.e., $root[v] \neq root[w]$.
- Pentru a actualiza vectorul *root*, în locurile marcate cu **A** şi **B** din algoritm, trebuie făcute următoarele modificări.
- în loc de **A**:

$S \leftarrow \varnothing$; $x \leftarrow root[v]$;
for $(u \in V)$ **do**
  if $(root[u] = x)$ **then**
    $S \leftarrow S \cup \{u\}$; $root[u] \leftarrow root[w]$;

- Cu alte cuvinte toate nodurile din arborele cu rădăcina x sunt adăugate arborelui cu rădăcina $root[w]$; aceste noduri sunt salvate în mulţimea S.
- După apelul All-ST-Gen$(i+1)$, vector $root$ trebuie setat din nou la valoarea dinaintea apelului, aceasta poate fi făcută **B** prin:

  for $(u \in S)$ **do**
  $root[u] = x;$

Fie $G = (V, E)$ un multi-graf cu $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, şi matricea de adiacenţă $A = (a_{ij})_{n \times n}$ (a_{ij} = multiplicitatea muchiei ij dacă $ij \in E$, 0 altfel). Fie

$$\mathbf{D = diag(d_G(1), d_G(2), \ldots, d_G(n))} = \begin{pmatrix} d_G(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_G(2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_G(n) \end{pmatrix}.$$

Matricea Laplaciană a lui G (sau **Laplacianul**) este definită ca fiind:

$$\mathbf{L[G] = D - A}.$$

Observăm că suma tuturor elementelor din fiecare linie sau din fiecare coloană a lui $L[G]$ este 0. Notăm cu $L[G]_{ij}$ minorul matrcii $L[G]$ obţinut prin ştergerea liniei i şi a coloanei j.

Teorema 9

(Kirchoff-Trent). *Fie G un (multi)graf cu mulţimea nodurilor $\{1, \ldots, n\}$ şi Laplacianul $L[G]$. Atunci, numărul arborilor parţiali ai lui G este: $|\mathcal{T}_G| = det(L[G]_{ii}), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.*

Demonstraţie: *Omisă.* □

Corolar

(Formula lui Cayley). $|\mathcal{T}_{K_n}| = n^{n-2}$.

Demonstraţie:

$$L[K_n] = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Astfel:

$$det(L[K_n]_{11}) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

Dacă adunăm toate liniile la prima obţinem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$ (De ce?)

□

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 1. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $v \in V$ astfel încât $N_G(v) \neq V \setminus \{v\}$. Pentru $X \subseteq V$ notăm $N_G(X) = \left(\bigcup_{v \in X} N_G(v) \right) \setminus X$.

Evident, mulţimea $A = \{v\}$ satisface următoarele proprietăţi:

(i) $v \in A$ şi $[A]_G$ este conex.

(ii) $N = N_G(A) \neq \varnothing$.

(iii) $R = V \setminus (A \cup N) \neq \varnothing$.

(a) Arătaţi că, dacă $A \subseteq V$ este orice mulţime noduri care satisface (i) - (iii) şi maximală (relativ la "$\subseteq$") cu aceste proprietăţi, atunci $\forall x \in R$ şi $\forall y \in N$ avem $xy \in E$.

(b) Dovediţi că dacă A este ca la (a) şi G este $\{C_k\}_{k \geqslant 4}$-free, atunci N este o clică în G.

(c) Deduceţi că K_n ($n \in \mathbb{N}^*$) sunt singurele grafuri regulate, triangulate şi conexe.

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 2. Un graf de ordin cel puţin trei este numit confidenţial conex dacă, pentru orice trei noduri distincte a, b şi c, există un drum de la a la b astfel încât c este diferit de şi nu este adiacent cu niciun nod intern (dacă există) al acestui drum. (Un exemplu de graf confidenţial conex este graful complet K_n, cu $n \geqslant 3$.)
Arătaţi că un graf conex, necomplet, $G = (V, E)$, cu cel puţin trei noduri este confidenţial conex dacă şi numai dacă:

(i) pentru orice $v \in V$, $N_{\overline{G}}(v) \neq \varnothing$ şi induce un subgraf conex;

(ii) orice muchie a lui G face parte dintr-un C_4 indus sau este muchia mediană a unui P_4 indus.

Exerciţiul 3. Dovediţi că un graf conex, p-regulat şi bipartit este 2-conex.

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 4. Fie $G = (V, E)$ un digraf. Demonstraţi că:

(a) G este tare conex dacă şi numai dacă pentru orice $S \subsetneq V$, $S \neq \varnothing$, există măcar un arc care pleacă din S.

(b) Dacă G este tare conex şi poate fi deconectat prin ştergerea a cel mult p arce (i. e., $\exists A \subseteq E$, $|A| \leqslant p$ astfel încât $G - A$ nu este tare conex), atunci G poate fi deconectat prin inversarea a cel mult p arce (adică $\exists B \subseteq E$, $|B| \leqslant p$ astfel încât $G' = (V, (E \setminus B) \cup \{uv : vu \in B\})$ nu este tare conex).

Exerciţiul 5. Fie G un graf 2-muchie-conex ($G - e$ este conex, $\forall e \in E(G)$). Definim următoarea relaţie binară $e \asymp f$ dacă $e = f$ or $G - \{e, f\}$ nu este conex.

(a) Arătaţi că $e \asymp f$ dacă şi numai dacă e şi f aparţin aceloraşi circuite.

(b) Arătaţi că o clasă de echivalenţă $[e]_{\asymp}$ este inclusă într-un circuit.

(c) Ştergând toate muchiile dintr-o clasă de echivalenţă $[e]_{\asymp}$, componentele conexe ale grafului rămas sunt grafuri 2-muchie-conexe.

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 6. Arătaţi că un graf este 2-muchie conex dacă şi numai dacă G poate fi orientat astfel ca graful orientat rezultat să fie tare conex.

Exerciţiul 7.

(a) Fie G un graf cu cel puţin 3 noduri. Dacă G este 2-conex, atunci putem să-i orientăm muchiile aşa încât graful orientat rezultat să fie tare conex.

(b) Reciproca afirmaţiei de mai sus este adevărată?

Exerciţiul 8.

(a) Fie G un graf 2-conex, necomplet şi $xy \in E(G)$. Arătaţi că $G - xy$ sau $G|xy$ este 2-conex.

(b) Daţi câte un exemplu de un graf G şi o muchie $xy \in E(G)$ astfel ca: (b1) $G - xy$ şi $G|xy$ sunt 2-conexe; (b2) $G - xy$ nu este 2-conex dar $G|xy$ este 2-conex; (b3) $G - xy$ este 2-conex dar $G|xy$ nu este 2-conex;

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 9. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $u, v \in V$ două noduri distincte ale lui G. O submulţime de noduri X se numeşte uv-separatoare minimală dacă a u şi v se află în componente conexe diferite ale lui $G - X$, dar pentru orice $X' \subsetneq X$, u şi v sunt în aceeaşi componentă a lui $G - X'$.

(a) Dovediţi că $X \subseteq V$ este muţime uv-separatoare minimală dacă şi numai dacă u şi v se află în componente diferite ale lui $G - X$, iar orice nod din X are vecini în ambele aceste componente.

(b) Dacă X_1 şi X_2 sunt două mulţimi uv-separatoare minimale din G astfel încât X_1 intersectează cel puţin două componente din $G - X_2$, atunci X_1 intersectează componentele lui $G - X_2$ care conţin pe u şi v.

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 10. Pentru un graf conex G dat aplicăm următorul algoritm:

$\mathcal{Q} \leftarrow \{G\}$; // $\mathcal{Q}$ este o coadă;
while $(\mathcal{Q} \neq \varnothing)$ **{**
  $H \leftarrow \mathbf{pop}(\mathcal{Q})$;
  fie $A \subseteq V(H)$ **o mulţime de articulaţie minimală din** H;
  fie $G_1, \ldots, G_k$ **componentele conexe ale lui** $H - A$;
  pentru $(j = 1$ **to** $k)$
    $\mathbf{push}(\mathcal{Q}, [A \cup V(G_j)]_G)$;
  }

Observăm că dacă G este a graf complet, atunci în $\mathcal{Q}$ nu se mai adaugă vreun alt graf.

a) Arătaţi că orice graf adăugat în $\mathcal{Q}$ este conex.

b) Dovediţi că numărul total de grafuri adăugate la coada $\mathcal{Q}$ este cel mult $|G|^2$.

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 11. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi T_1, T_2 doi arbori parţiali ai lui G ($T_1, T_2 \in \mathcal{T}_G$).

(a) Dovediţi că T_1 poate fi transformat în T_2 prin aplicarea repetată a următoarei proceduri: şterge o muchie şi adaugă o altă muchie arborelui curent.

(b) Dacă, în plus, G este 2-conex arătaţi că T_1 poate fi transformat în T_2 prin aplicarea repetată a următoarei proceduri: şterge o muchie uv şi adaugă o altă muchie uw arborelui curent.

Exerciţiul 12. Demonstraţi că mulţimea de muchii a unui graf complet K_n ($n \geqslant 2$) poate fi partiţionată în $\lceil n/2 \rceil$ submulţimi fiecare reprezentând mulţimea de muchii ale unui arbore (subgraf al lui K_n).

Exerciţii pentru seminarul de săptămâna viitoare

Exerciţiul 13.

Fie n un întreg pozitiv şi $G_n = (V, E)$ un graf definit astfel:

- $V = \{(i, j) : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$;
- $(i, j)(k, l) \in E$ (pentru $(i, j) \neq (k, l)$ din V) dacă şi numai dacă $i = l$ sau $j = k$.

Arătaţi că G_n este universal pentru familia arborilor deordin n: pentru orice arbore T de ordin n, $\exists A \subseteq V$ astfel încât $T \cong [A]_{G_n}$.