# Teoria probabilităţilor discrete - Curs 5

Olariu E. Florentin

Martie, 2016

# Table of contents

## Covarianţa a două variabile



**Definition 1.1**

*Fie $X$ şi $Y$ două variabile aleatoare discrete ca mai sus, care admit medie fiecare.*

(i) **Covarianţa** *celor două variabile (dacă există) este definită prin*

$$cov[X, Y] = M\left[(X - M[X])(Y - M[Y])\right] =$$

$$= \sum_{i,j} (x_i - M[X])(y_j - M[Y]) P\{X = x_i \cap Y = y_j\}.$$

(ii) **Corelaţia** *sau* **coeficientul de corelaţie** *a celor două variabile cu dispersii nenule este*

$$\rho(X, Y) = \frac{cov[X, Y]}{D[X]D[Y]}.$$

## Repartiţia comună şi covarianţa - exemplu

*Exemplu.* Se dau două urne: $U_1$ care conţine două bile albe, două negre şi trei bile roşii şi $U_2$ care conţine trei bile albe, două negre şi o bilă roşie. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de-a doua urnă, iar apoi se extrage o bilă din cea de a doua urnă. Se notează cu $X$ numărul de bile albe obţinute şi cu $Y$ numărul de bile negre obţinute.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor $X$ şi $Y$.

(b) Să se determine repartiţia şi apoi media variabilei $XY$.

(c) Să se determine covarianţa şi corelaţia celor două variabile.

*Soluţie:* Observăm că variabilele $X$ şi $Y$ sunt dependente: sunt legate prin relaţia $X + Y \leqslant 2$. Notăm cu $A_i$ evenimentul "a i-a bilă extrasă este albă", cu $B_i$ evenimentul "a i-a bilă extrasă este neagră" şi cu $C_i$ evenimentul "a i-a bilă extrasă este roşie" ($i = \overline{1, 2}$).

# Repartiţia comună şi covarianţa - exemplu



| | | $X$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | |
| | 0 | 6/49 | 11/49 | 8/49 | 25/49 |
| $Y$ | 1 | ? | ? | 0 | ? |
| | 2 | ? | 0 | 0 | ? |
| | | ? | ? | 8/49 | |

## Covarianţa a două variabile

### Proposition 1.1

*Fie $X$ şi $Y$ două variabile aleatoare discrete care admit medie. Atunci*

(i) $cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y]$.

(ii) $D^2[X + Y] = D^2[X] + 2cov[X, Y] + D^2[Y]$.

(iii) $-1 \leqslant \rho[X, Y] = \rho[Y, X] \leqslant 1$ *şi* $\rho[X, X] = 1$ *(i. e.,* $cov[X, X] = D^2[X]$*).*

(iv) *(exerciţiu)* $\rho[aX + b, Y] = \rho[X, Y]$, *dacă* $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

(v) $cov[aX + bY + c, Z] = a \cdot cov[X, Z] + b \cdot cov[Y, Z]$, *pentru* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(vi) *(exerciţiu)* $cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov[X_i, Y_j]$.

## Covarianţa a două variabile - exemplu



*Exemplu.* Fie $X_1$, $Y_1$ şi $X_2$, $Y_2$ două perechi de variabile aleatoare având următoarele tablouri de repartiţie comună:

| | | $X_1 = 1$ | $X_1 = 2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $Y_1$ | 2 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| | 4 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| | | 1/2 | 1/2 | |

| | | $X_2 = 1$ | $X_2 = 2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $Y_2$ | 2 | 1/2 | 0 | 1/2 |
| | 4 | 0 | 1/2 | 1/2 |
| | | 1/2 | 1/2 | |

Arătaţi că $\rho[X_1, Y_1] \neq \rho[X_2, Y_2]$ şi $cov[X_1, Y_1] \neq cov[X_2, Y_2]$.

## Covarianţa a două variabile - exemplu

*Soluţie:* Deoarece, după cum se observă din tablourile de mai sus, $X_1$ şi $X_2$ ($Y_1$ şi $Y_2$) au aceeaşi repartiţie, $D[X_1] = D[X_2]$ şi $D[Y_1] = D[Y_2]$, va fi deci suficient să arătăm: $cov[X_1, Y_1] \neq cov[X_2, Y_2]$.

$$M[X_1] = M[X_2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, M[Y_1] = M[Y_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Determinăm media variabilei $X_1 Y_1$ şi apoi covarianţa variabilelor $X_1$ şi $Y_1$:

$$X_1 Y_1 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow M[X_1 Y_1] = 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{2},$$

$$cov[X_1, Y_1] = M[X_1 Y_1] - M[X_1]M[Y_1] = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0.$$

## Covarianţa a două variabile - exemplu

Apoi determinăm media variabilei $X_2 Y_2$ şi covarianţa variabilelor $X_2$ şi $Y_2$:

$$X_2 Y_2 : \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M[X_2 Y_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 5,$$

de unde

$$cov[X_2, Y_2] = M[X_2 Y_2] - M[X_2] M[Y_2] = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}. \clubsuit$$

## Variabile aleatoare independente



**Definition 2.1**

*Două variabile aleatoare $X$ şi $Y$ se numesc* **independente** *dacă, pentru orice două mulţimi de valori $A$ şi $B$, a lui $X$, respectiv $Y$, avem*

$$P\{(X \in A) \cap (Y \in B)\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}.$$

Deoarece $P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot q_j$, în acest caz, repartiţia comună poate fi calculată mai simplu: $r_{ij} = p_i q_j$.

**Theorem 2.1**

*Fie $X$ şi $Y$ variabile aleatoare discrete independente. Atunci:*

(i) $M[XY] = M[X]M[Y]$.

(ii) $D^2[X + Y] = D^2[X] + D^2[Y]$.

(iii) $cov[X, Y] = 0$.

## Variabile aleatoare independente - exemplu



*Exemplu.* Se aruncă două zaruri. Să se determine media produsului şi dispersia sumei.

*Soluţie:* Fie $X_1$ şi $X_2$ rezultatele de pe cele două zaruri. Aceste două variabile sunt independente (dar şi identic repartizate), deci

$$M[X_1X_2] = M[X_1]M[X_2] = \frac{49}{4} \text{ şi } D^2[X_1 + X_2] = D^2[X_1] + D^2[X_2]. \clubsuit$$

## Introducere



- Rezultatele din această secţiune ne ajută să determinăm majoranţi şi minoranţi pentru probabilităţile care implică o variabilă aleatoare, în cazul în care se cunosc media sau media şi dispersia acesteia.

## Inegalitatea lui Markov

**Theorem 2.1**

*(**Inegalitatea lui Markov.**) Fie $X \geqslant 0$ o variabilă aleatoare cu media $M[X] = \mu$. Atunci*

$$P\{X \geqslant t\} \leqslant \frac{\mu}{t}, \forall t > 0.$$

**proof:** în cazul în care variabila $X$ este discretă şi repartiţia ei este

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

unde $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$. Să presupunem că $t \in (x_{k-1}, x_k]$ $(x_0 = -\infty)$, atunci

$$\mu = M[X] = \sum_i p_i x_i \geqslant \sum_{i \geqslant k} p_i x_i \geqslant t \sum_{i \geqslant k} p_i = t \cdot P\{X \geqslant t\}.$$

# Inegalitatea lui Markov



**Proposition 2.1**

*Egalitatea are loc în inegalitatea lui Markov dacă şi numai dacă*

$$P\{X = 0\} + P\{X = t\} = 1.$$

**proof:** Dacă reluăm şirul de inegalităţi din demonstraţia Teoremei 2.1, transformându-le în egalităţi, obţinem

$$p_i x_i = 0, \forall i < k \text{ şi } p_i x_i = p_i t, \forall t \geqslant k.$$

Deoarece în tabloul de repartiţie considerăm doar valori posibile ale variabilei (i. e., $p_i > 0$, $\forall i$), urmează că

$X$ are doar două valori $x_1 = 0$ şi $x_2 = t$ sau are o singură valoare $X \equiv t$.

∎

## Inegalitatea lui Markov - exemplu

*Exemplu.* Fie $X \geqslant 0$ o variabilă aleatoare cu $M[X] = 1$. Să se majoreze probabilităţile

$$P\{X \geqslant 2\}, P\{X \geqslant 4\} \text{ şi } P\{X \geqslant 2^k\}.$$

*Soluţie:* Conform inegalităţii lui Markov

$$P\{X \geqslant 2\} \leqslant \frac{M[X]}{2} = \frac{1}{2}, P\{X \geqslant 4\} \leqslant \frac{M[X]}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X \geqslant 2^k\} \leqslant \frac{M[X]}{2^k} = \frac{1}{2^k} \clubsuit$$

*Observaţie.* Probabilitatea ca o variabilă $X \geqslant 0$ cu medie finită, să aibă valori mai mari sau egale decât un număr $t$, foarte mare, devine foarte mică pe măsură ce $t$ creşte.

# Inegalitatea lui Cebâşev

**Theorem 2.2**

(**Inegalitatea lui Cebâşev.**) *Fie $X$ o variabilă aleatoare cu media $M[X] = \mu$ şi dispersia $D^2[X] = \sigma^2$. Atunci*

$$P\{|X-\mu| \geqslant t\} \leqslant \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$

**proof:**

Considerăm variabila $Y = (X-\mu)^2$ care are $M[Y] = D^2[X]$, conform inegalităţii lui Markov,

$$P\{|X-\mu| \geqslant t\} = P\left\{(X-\mu)^2 \geqslant t^2\right\} \leqslant \frac{M[Y]}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$

∎

## Inegalitatea lui Cebâşev



- O posibilă interpretare a acestei inegalităţi este următoarea: dacă o variabilă are o dispersie mică, atunci probabilitatea ca această variabilă să ia valori departe de medie este scăzută.
- Următoarea consecinţă a inegalităţii lui Cebâşev spune că probabilitatea ca o variabilă să ia o valoare depărtată de medie la cel puţin $k$ deviaţii standard este cel mult $\dfrac{1}{k^2}$.
- În acest sens se poate spune că deviaţia standard este o măsură împrăştierii valorilor variabilei în jurul mediei.

# Inegalitatea lui Cebâşev

**Corollary 2.1**

*Fie $X$ o variabilă cu media $M[X]=\mu$ şi dispersia $D^2[X]=\sigma^2>0$.*

$$P\left\{|X-\mu|\geqslant k\sigma\right\}\leqslant \frac{1}{k^2}, \forall k>0.$$

**Proposition 2.2**

*Egalitatea are loc în inegalitatea lui Cebâşev dacă şi numai dacă*

$$P\{X=\mu-t\}+P\{X=\mu\}+P\{X=\mu+t\}=1.$$

**proof:** Inegalitatea lui Cebâşev se bazează pe cea a lui Markov, deci vom avea egalitate dacă şi numai dacă $P\{Y=0\}+P\{Y=t^2\}=1$.

$$P\{Y=0\}=P\{(X-\mu)^2=0\}=P\{X=\mu\}, \text{ iar}$$

$$P\{Y=t^2\}=P\{(X-\mu)^2=t^2=P\{|X-\mu|=t\}=$$

$$=P\{X-\mu=t\}+P\{X-\mu=-t\}.$$

## Inegalitatea lui Cebâşev - exemplu

*Exemplu.* Fie $X$ o variabilă aleatoare cu $M[X] = 1$ şi $D^2[X] = 4$. Să se majoreze probabilităţile

$$P\{X \geqslant 3\}, P\{|X - 1| \geqslant 6\} \text{ şi } P\{X \leqslant -9\}.$$

*Soluţie:* Conform inegalităţii lui Cebâşev

$$P\{X \geqslant 3\} \leqslant P\{|X - 1| \geqslant 2\} \leqslant \frac{D^2[X]}{2^2} = 1,$$

$$P\{|X - 1| \geqslant 6\} \leqslant \frac{4}{9},$$

$$P\{X \leqslant -9\} \leqslant P\{|X - 1| \geqslant 10\} \leqslant \frac{1}{25} \clubsuit$$

## Inegalitatea lui Chernoff



**Theorem 3.1**

*Fie* $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *variabile independente, repartizate Bernoulli fiecare cu parametrul* $p_i$. *Dacă notăm* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = M[X]$, *atunci*

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} < \left[\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{\mu} \textit{ (upper tail)}, \ \forall\delta > 0 \textit{ şi}$$

$$P\{X < (1-\delta)\mu\} < \left[\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right]^{\mu} \textit{ (lower tail)}, \ \forall\delta \in [0,1).$$

# Inegalitatea lui Chernoff



- Prima dintre inegalităţile de mai sus arată că suma unui număr finit de variabile Bernoulli independente scade exponenţial pe măsură ce ne depărtăm (către dreapta) de media acestei sume:

$$\lim_{\delta \to +\infty} \left[ \frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right]^{\mu} = 0.$$

- Ambele inegalităţi de mai sus au forme mai simple după cum vom vedea mai jos.

# Inegalitatea lui Chernoff



**Corollary 3.1**

*Fie* $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *variabile independente, repartizate Bernoulli fiecare cu parametrul* $p_i$*. Dacă notăm* $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = M[X]$, *atunci*

$$P\{X > (1\pm\delta)\mu\} < \exp\left(\frac{-\delta^2\mu}{2+\delta}\right), \forall\delta\geqslant 0.$$

## Inegalitatea lui Chernoff - o aplicaţie



*Aplicaţie.* Se aruncă de $n$ ori o monedă şi fie $X_i$ o variabilă egală cu 1 dacă apare stema la a $i$-a aruncare şi 0 altfel. $X = \sum\limits_{i=1} X_i$ numără de câte ori apare stema în cele $n$ aruncări. Ştim că

$$M[X_i] = p_i = \frac{1}{2}, D^2[X_i] = p_i(1 - p_i) = \frac{1}{4},$$

$$\mu = M[X] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{n}{2} \text{ şi } \sigma^2 = D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} D^2[X_i] = \frac{n}{4}.$$

(Aceasta este o altă metodă de a calcula caracteristicile unei variabile binomiale.)

Folosind inegalitatea lui Chernoff putem evalua probabilitatea ca variabila $X$ să fie mai mare decât media astfel

# Inegalitatea lui Chernoff - o aplicaţie

$$P\{X > \mu + \lambda\} = P\left\{X > \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)\mu\right\} < exp\left(\frac{-\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\right).$$

Vom utiliza acum şi inegalităţile lui Markov şi Cebâşev:

$$P\{X \geqslant \mu + \lambda\} \leqslant \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{n}{n + 2\lambda} \text{ (Markov)},$$

$$P\{X \geqslant \mu + \lambda\} \leqslant P\{|X - \mu| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{\sigma^2}{\lambda^2} = \frac{n}{4\lambda^2} \text{ (Cebâşev)}.$$

$$P\{X > \mu + \lambda\} < \exp\left(\frac{-\lambda^2}{\lambda + \sqrt{n}}\right) \text{ (Chernoff)}.$$

Se observă că inegalitatea lui Markov este mai slabă decât aceea a lui Cebâşev, iar aceasta este mai slabă decât cea a lui Chernoff. Pe de altă parte însă, inegalitatea lui Markov (ca şi cea a lui Cebâşev) nu necesită independenţa celor $n$ variabile aleatoare; în al doilea caz însă, independenţa poate uşura calculul dispersiei lui $X$.

# Inegalitatea lui Hoeffding



**Theorem 4.1**

*Fie* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *variabile aleatoare independente mărginite:* $a_i \leqslant X_i \leqslant b_i$, $a_i \neq b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ *şi* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Atunci*

$$P\{X - M[X] \geqslant \pm\delta\} \leqslant \exp\left(-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right), \forall \delta \geqslant 0.$$



**Corollary 4.1**

*În condiţiile teoremei avem*

$$P\{|X - M[X]| \geqslant \delta\} \leqslant 2\exp\left(-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right), \forall \delta \geqslant 0.$$

## Exerciţii pentru seminar



- **Repartiţii comune:** II.1, II.2, II.3, II.4, II.5, II.8.
- **Inegalităţile lui Markov şi Cebâşev:** III.1, III.2, III.4, III.6.
- **Rezervă:** II.6, II.7, II.10, III.3, III.5.

# Exerciţii - covarianţa variabilelor aleatoare



**I.1.** Demonstraţi că ($X$, $Y$ şi $Z$ sunt variabile aleatoare)

(a) $cov[aX + bY + c, Z] = a \cdot cov[X, Z] + b \cdot cov[Y, Z], \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) $cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov[X_i, Y_j]$, pentru orice variabile aleatoare $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ şi $(Y_i)_{1\leqslant j\leqslant m}$ (inducţie).

(c) $D^2\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D^2[X_i] + 2\sum_{i<j} cov[X_i, X_j]$, pentru orice variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

## Exerciţii - repartiţii comune şi variabile independente.



**II.1.** Să presupunem că $X$ şi $Y$ au următoarea repartiţie comună

| | | $Y$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $-3$ | $2$ | $4$ |
| $X$ | 1 | 0.2 | ? | 0.2 |
| | 3 | 0.3 | 0.05 | 0.05 |

(a) Determinaţi repartiţiile individuale ale variabilelor $X$ şi $Y$.

(b) Calculaţi $cov[X, Y]$ şi $\rho[X, Y]$.

(c) Sunt $X$ şi $Y$ independente?

## Exerciţii - repartiţii comune şi variabile independente.

**II.2.** O monedă este aruncată de trei ori. Fie $X$ o variabilă egală cu 1 dacă apare stema şi 0 dacă apare banul la prima aruncare, iar $Y$ o variabilă egală cu numărul de apariţii ale stemei. Determinaţi:

(a) Repartiţia comună acelor două variabile.

(b) Repartiţiile individuale ale lui $X$ şi $Y$ şi covarianţa lor.

**II.3.** Fie $X$ o variabilă aleatoare cu următoarea distribuţie şi $Y = X^2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Determinaţi

(a) Repartiţia lui $Y$ şi repartiţia comună acelor două variabile.

(b) Covarianţa şi corelaţia celor două variabile.

## Exerciţii - repartiţii comune şi variabile independente.



**II.4.** Fie $X$ şi $Y$ două variabile aleatoare independente cu următoarele distribuţii

$$X : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \; Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinaţi repartiţia comună a celor două variabile şi covarianţa lor.

(b) Determinaţi repartiţia şi media variabilei $X + Y$.

**II.5.** Într-o urnă sunt trei bile roşii şi cinci bile negre. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu o bilă de culoare diferită. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu $X$ numărul de bile roşii şi cu $Y$ numărul de bile negre extrase.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor $X$ şi $Y$.

(b) Variabilele $X$ şi $Y$ sunt independente?

## Exerciţii - repartiţii comune şi variabile independente.



**II.6.** Într-o urnă sunt patru bile albe (două numerotate cu 1 şi două numerotate cu 2) şi trei bile negre (două numerotate cu 1 şi una numerotată cu 2). Din urnă se extrag succesiv şi fără întoarcere două bile. Fie $X$ numărul de bile albe obţinute şi $Y$ numărul de bile numerotate cu 2.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor $X$ şi $Y$.

(b) Variabilele $X$ şi $Y$ sunt independente?

**II.7.** O monedă se aruncă de trei ori. Se notează cu $X$ numărul de steme care apar la primele două aruncări şi cu $Y$ numărul de steme care apar la ultima aruncare. Să se determine

(a) repartiţiile variabilelor $X$ şi $Y$.

(b) repartiţia comună a variabilelor $X$ şi $Y$. (Sunt $X$ şi $Y$ independente?)

(c) repartiţia variabilei $X + Y$.

## Exerciţii - repartiţii comune şi variabile independente.

**II.8.** Variabilele $X$ şi $Y$ au repartiţia comună dată mai jos.

| $Y$ \ $X$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $0$ | $1/36$ | $1/6$ | $1/12$ |
| $0$ | $1/18$ | $0$ | $1/18$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1/36$ | $1/6$ | $1/12$ |
| $2$ | $1/12$ | $0$ | $1/12$ | ? |

(a) Să se calculeze $P(X \geqslant 2 \text{ şi } Y \leqslant 0)$.

(b) Sunt variabilele $X$ şi $Y$ independente?

(c) Să se determine repartiţia variabilei $X + Y$.

**II.9.** Se aruncă două monede $A$ şi $B$ de trei ori; moneda $B$ este falsificată: probabilitatea de a apărea stema este 0.4. Fie $X$ variabila care numără de câte ori apare stema pe moneda $A$ şi $Y$ cea care numără de câte ori apare stema pe moneda $B$.

## Exerciţii - repartiţii comune şi variabile independente.

(a) Sunt variabilele $X$ şi $Y$ independente?

(b) Să se determine repartiţia comună a variabilelor $X$ şi $Y$.

(c) Să se calculeze probabilităţile $P(X = Y)$, $P(X > Y)$ şi $P(X + Y \geqslant 4)$.

**II.10.** Repartiţia comună a două variabile $X$ şi $Y$ este dată prin

$$p(X = x_i \cap Y = y_j) = \begin{cases} kx_iy_j, & x_i = \overline{1,2}, y_j = \overline{1,3} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}, \text{ unde } k \in \mathbb{R}.$$

(a) Să se determine $k$.

(b) Să se determine repartiţiile celor două variabile $X$ şi $Y$.

(c) Sunt variabilele $X$ şi $Y$ independente?

## Exerciţii - Markov şi Cebâşev



**III.1.** O variabilă aleatoare $X \geqslant 0$ are media şi dispersia egale amândouă cu 20. Folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev ce se poate spune despre probabilitatea $P\{X \geqslant 40\}$? Dar despre $P\{-60 \leqslant X \leqslant 100\}$?

**III.2.** Se dă o variabilă aleatoare $X \geqslant 0$ cu $M[X] = D^2[X] = 1$. Majoraţi sau minoraţi, corespunzător, folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev, următoarele probabilităţi:

$$P\{X \geqslant 2\}, P\{|X - 1| \geqslant 2\}, P\{X \leqslant -3\}$$

**III.3.** Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare a unei monede falsificate este 0.3. Moneda este aruncată de 300 de ori. Majoraţi probabilitatea ca stema să apară de cel puţin 100 de ori.

**III.4.** Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare a unei monede falsificate este 0.2. Moneda este aruncată de $n$ ori. Găsiţi un majorant pentru probabilitatea ca stema să apară în cel puţin 50% din cazuri.

## Exerciţii - inegalitatătăţile lui Markov şi Cebâşev

**III.5.** Se aruncă o monedă de $n$ ori. Fie $X$ numărul de apariţii ale stemei. Găsiţi câte un majorant (cât mai mic) pentru

(a) $P\{|X - n/2| > \sqrt{n}\}$ şi $P\{X > n/2 + \sqrt{n}\}$;

(b) $P\{|X - n/2| > 5\sqrt{n}\}$ şi $P\{X > n/2 + 5\sqrt{n}\}$.

**III.6.** Fie $X$ o variabilă repartizată a Poisson cu parametrul $\lambda$. Estimaţi probabilitatea ca $X$ să devieze de la medie cu cel puţin $2\sqrt{\lambda}$.

**III.7*.** (Borel-Cantelli) Fie $(A_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de evenimente cu $\sum\limits_{n\geqslant 1} P(A_n) < +\infty$. Arătaţi că probabilitatea ca cel mult $k$ dintre aceste evenimente să se producă este cel puţin

$$1 - \frac{\sum\limits_{n\geqslant 1} P(A_n)}{k}.$$

(*Indicaţie: Folosiţi inegalitatea lui Markov pentru o variabilă care numără câte din evenimente se realizează.*)

# Anexa 1



**dem.:** (pentru Propoziţia 1.1) Vom considera doar cazul în care variabilele sunt amândouă finite. Pentru relaţia (i)

$$cov[X,Y] = M\left[(X - M[X])(Y - M[Y])\right] =$$

$$= M\left[XY - M[Y]X - M[X]Y + M[X]M[Y]\right] =$$

$$= M[XY] - 2M[X]M[Y] + M[X]M[Y] = M[XY] - M[X]M[Y].$$

Pentru cea de-a doua relaţie

$$D^2[X+Y] = M\left[(X+Y)^2\right] - M^2[X+Y] =$$

$$= M\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - \left(M^2[X] + 2M[X]M[Y] + M^2[Y]\right) =$$

$$= \left(M\left[X^2\right] - M^2[X]\right) + 2\left(M[XY] - M[X]M[Y]\right) + \left(M\left[Y^2\right] - M^2[Y]\right) =$$

$$= D^2[X] + 2cov[X,Y] + D^2[Y].$$

# Anexa 1



În continuare, pentru (iii), deoarece $0 \leqslant D^2[tX+Y] = t^2 D^2[X] + 2t \cdot cov[X, Y] + D^2[Y]$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, trebuie ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul doi să fie mai mic sau egal cu zero:

$$\Delta = 4cov^2[X, Y] - 4D^2[X]D^2[Y] \leqslant 0 \Leftrightarrow |cov[X, Y]| \leqslant D[X]D[Y].$$

Apoi, $cov[X, X] = \frac{1}{2}\left(D^2[2X] - 2D^2[X]\right) = D^2[X]$.

Proprietatea (v):

$$cov[aX + bY + c, Z] = M[aXZ + bYZ + cZ] - M[aX + bY + c]M[Z] =$$

$$= aM[XZ] + bM[YZ] + cM[Z] - (aM[X] + bM[Y] + c)M[Z]. \blacksquare$$

# Anexa 1



**dem.:** (pentru teorema 2.1) Vom considera, ca şi mai sus, doar cazul în care variabilele sunt amândouă finite. Pentru (i):

$$M[XY] = \sum_z zP\{XY = z\} = \sum_z z \cdot \left( \sum_{z = x_i y_j} P\{X = x_i \cap Y = y_j\} \right) =$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = \sum_{i,j} x_i y_j P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} =$$

$$= \left( \sum_i x_i P\{X = x_i\} \right) \cdot \left( \sum_j y_j P\{Y = y_j\} \right) = M[X]M[Y].$$

# Anexa 1



Din această relaţie rezultă, în particular, (iii): $cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y] = 0$.

Pentru (ii) folosim Propoziţia 1.1 sau procedăm direct:

$$D^2[X+Y] = M\left[(X+Y)^2\right] - (M[X+Y])^2 =$$

$$= M\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - (M[X] + M[Y])^2 =$$

$$= M\left[X^2\right] + 2M[XY] + M\left[Y^2\right] - M^2[X] - 2M[X]M[Y] - M^2[Y] =$$

$$= M\left[X^2\right] - M^2[X] + M\left[Y^2\right] - M^2[Y] = D^2[X] + D^2[Y]. \blacksquare$$

# Anexa 1



**dem.:** (pentru teorema 3.1) Fie $t > 0$, atunci, conform inegalităţii lui Markov, avem

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} = P\{e^{tX} > e^{t(1+\delta)\mu}\} < \frac{M\left[e^{tX}\right]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Folosind independenţa variabilelor

$$M\left[e^{tX}\right] = M\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] = M\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M\left[e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n}\left[p_i e^{t} + (1-p_i)\right],$$

Astfel

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} < \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[1 + p_i(e^{t} - 1)\right]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

# Anexa 1



Folosind inegalitatea $x+1<e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, obţinem

$$P\{X>(1+\delta)\mu\}<\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\exp\left(p_i(e^t-1)\right)\right]}{e^{t(1+\delta)\mu}}=\frac{\exp\left(\sum_{i=1}^{n}p_i(e^t-1)\right)}{e^{t(1+\delta)\mu}},$$

deci

$$P\{X>(1+\delta)\mu\}<\frac{\exp\mu(e^t-1)}{\exp t\mu(1+\delta)},\forall t>0.$$

Căutăm minimul funcţiei $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, dată prin $f(t)=(e^t-1)\mu-t\mu(1+\delta)$:

$$f'(t)=\mu(e^t-1-\delta), f'(t)=0\Leftrightarrow t=\ln(1+\delta),$$

# Anexa 1

$f$ este descrescătoare pe intervalul $(0, \ln(1+\delta)]$ şi crescătoare pe intervalul $[\ln(1+\delta), +\infty)$.
Astfel, obţinem, în final

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} < \left[\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{\mu}.$$

O demonstraţie similară se poate face pentru cealaltă inegalitate din teoremă. $\blacksquare$

# Anexa 1

**proof:** (pentru corolarul 3.1) Putem rescrie majorantul din Teorema 3.1 astfel

$$\left[\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{\mu} = \left(\exp\left[\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta)\right]\right)^{\mu}.$$

Se poate arăta că $ln(1+\delta) > \dfrac{2\delta}{1+\delta}, \forall\delta > 0$, de unde

$$\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta) \leqslant \frac{-\delta^2\mu}{2+\delta}.$$

∎

## Anexa 1



**dem.:** (pentru teorema 4.1) Este suficient să abordăm doar una dintre inegalităţi:

$$P\{X - M[X] \geqslant \delta\} = P\{e^{tX} \geqslant e^{t(\delta+M[X])}\} \overset{(Markov)}{\leqslant} \frac{M\left[e^{tX}\right]}{e^{t(\delta+M[X])}} \leqslant$$

$$\overset{(indep.)}{\leqslant} \exp\left[-t(M[X]+\delta)\right] \cdot \prod_{i=1}^{n} M\left[e^{tX_i}\right] = e^{-t\delta} \cdot \prod_{i=1}^{n} M\left[e^{tX_i}\right] e^{-tM[X_i]}.$$

Pentru a majora în continuare, studiem funcţia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dată prin $f(t) = e^t$:

$$f'(t) = f''(t) = e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, \text{ deci } f \text{ este concavă pe } \mathbb{R}_+, \text{ i. e.,}$$

$$f\left[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\right] \leqslant \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2), \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \lambda \in [0,1].$$

# Anexa 1



Deoarece $X_i \in [a_i, b_i]$, putem scrie $X_i = \lambda a_i + (1-\lambda)b_i$, unde $\lambda = \dfrac{X_i - a_i}{b_i - a_i} \in [0,1]$. Astfel,

$$e^{tX_i} = exp[t\lambda a_i + t(1-\lambda)b_i] \leqslant \lambda e^{ta_i} + (1-\lambda)e^{tb_i} \text{ de unde}$$

$$M\left[e^{tX_i}\right] \leqslant M\left[\lambda e^{ta_i} + (1-\lambda)e^{tb_i}\right] = e^{ta_i} M\left[\frac{X_i - a_i}{b_i - a_i}\right] + e^{tb_i} M\left[\frac{b_i - X_i}{b_i - a_i}\right],$$

$$M\left[e^{t(X_i - M[X_i])}\right] \leqslant e^{-tM[X_i]}\left(e^{ta_i} \cdot \frac{M[X_i] - a_i}{b_i - a_i} + e^{tb_i} \cdot \frac{b_i - M[X_i]}{b_i - a_i}\right).$$

Vom arăta că expresia de mai sus este mai mică sau egală cu

$$\exp\left[\frac{t^2(b_i - a_i)^2}{8}\right].$$

# Anexa 1



Pentru aceasta notăm $\theta = t(b_i - a_i)$ şi $\alpha = \dfrac{M[X_i] - a_i}{b_i - a_i}$, considerăm funcţia $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (obţinută prin logaritmarea expresiei de mai sus):

$$g(\theta) = -\theta\alpha + \ln\left(1 - \alpha + \alpha e^{\theta}\right) - \frac{\theta^2}{8}$$

şi arătăm că $g(\theta) \leqslant 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(\theta) = -\alpha - \frac{\theta}{4} + \frac{\alpha e^{\theta}}{(1-\alpha) + \alpha e^{\theta}} = -\alpha - \frac{\theta}{4} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha},$$

$$g''(\theta) = -\frac{1}{4} + \frac{\alpha(1-\alpha)e^{-\theta}}{\left[(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha\right]^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha} \cdot \frac{(1-\alpha)e^{-\theta}}{(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha} \leqslant$$

## Anexa 1



$$\leqslant -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)e^{-\theta}+\alpha}+\frac{(1-\alpha)e^{-\theta}}{(1-\alpha)e^{-\theta}+\alpha}\right)^2=0$$

Conform formulei lui Taylor există un $\theta_0 \in [0,\theta]$, astfel în cât

$$g(\theta)=g(0)+g'(0)\frac{\theta}{1!}+g''(\theta_0)\frac{\theta_0^2}{2!}\leqslant 0.$$

Astfel

$$M\left[e^{t(X_i-M[X_i])}\right]\leqslant \exp\left[\frac{t^2(b_i-a_i)^2}{8}\right], \forall i$$

şi de aici

$$P\{X-M[X]\geqslant \delta\}\leqslant \exp\left[\frac{t^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2-t\delta\right], \forall t\geqslant 0.$$

## Anexa 1



Exponentul de mai sus este o funcţie de gradul doi în $t$, care-şi atinge minimul pentru $t = \dfrac{4\delta}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}$:

$$\exp\left[\frac{t^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 - t\delta\right] \geqslant \exp\left[-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right].$$

## Bibliography


- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Hoeffding, W., *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, J. of the Amer. Statistical Assoc. vol. 58, issue 301, pp. 13-30, 1963.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.