Setul 11

de probleme şi exerciţii de matematică

(cu privire la extreme libere şi condiţionate, funcţii definite implicit, inversarea locală a funcţiilor şi dependenţa / independenţa funcţională)

S11.1 Să se găsească extremele locale / globale ale următoarelor funcţii:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$;

b) $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x\,(\ln x)^2$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\cos x + x^2$;

d) $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} - 3$;

e) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{2-xy}{x^2+y^2+1}$;

f) $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

S11.2 Să se stabilească dacă este sau nu posibilă explicitarea lui y şi z, ca funcţii dependente de x, pe baza relaţiilor:

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz &= 2 \end{cases},$$

în vecinătatea punctului $(1,1,0)$.

S11.3

a) Relaţiile $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$ şi $z = u^3 + v^3$ definesc pe z ca funcţie de x şi y. Să se arate că există $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, după care să se calculeze aceste derivate.

b) Să se determine du şi dv, unde funcţiile u şi v (dependente de x şi y) sunt definite implicit de sistemul: $e^u + u\sin v = x$, $e^u - u\cos v = y$.

S11.4 Să se arate că teorema de inversare locală se poate aplica asupra sitemului de ecuaţii neliniare

$$\begin{cases} x^2 - yz &= u \\ y^2 - zx &= v \\ z^2 - xy &= w \end{cases},$$

unde $(x,y,z) \in A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x,\ 0 < y,\ \ z > x + y\right\}$.

Care este funcţia f^{-1} în acest caz?

S11.5

a) Să se stabilească relaţia de dependenţă funcţională existentă între funcţiile:

$$f_1(x,y) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$f_2(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{1+xy}{x-y}, \forall x,y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

b) Ce relaţie există între funcţiile

$$f_1(x, y, z) = x + y + z,$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx,$$

$$f_3(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ?$$

c) Să se determine mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^3$ pe care funcţiile $f_1(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 - x_2 + x_3} - 3$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = \ln\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1\right)$ şi $f_3(x_1, x_2, x_3) = 1 - \cos(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)$ sunt, două câte două, funcţional dependente.

S11.6 Să se determine cum trebuie tăiată o bară metalică, cu profil cornier, pentru a putea confecţiona apoi cadrul unui acvariu paralelipipedic de capacitate volumică maximă.

S11.7 Să se afle punctele de extrem local, condiţionat, în fiecare din cazurile de mai jos:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, cu legătura $3x + 2y - 6 = 0$;

b) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$;

c) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, cu legăturile $x + y + z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

d) $f(x, y, z) = xyz$, cu legăturile $x + y + z = 5$ şi $xy + yz + zx = 8$.

S11.8 Să se determine extremele globale ale funcţiilor indicate mai jos, pe mulţimea K dată.

a) $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$, $(x, y) \in K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$;

b) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $(x, y) \in K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

S11.9 Să se găsească extremele următoarelor două funcţii:

a) $f_1(x, y) = x^2 e^{-x^4 - y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

b) $f_2(x, y, z) = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

S11.10 Să se arate că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} xyu - yv^2 + 2v^3 & = & 0 \\ 4u^2 + 2v^2 - x^3y & = & 0 \end{cases}$$

se poate rezolva în raport cu u şi v, dând u şi v ca funcţii de x şi y într-o vecinătate a punctului $(1, 2, 0, 1)$.

Să se determine $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

S11.11 Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin $f(x, y) = \left(e^x \cos y, e^{-x} \sin y\right)$, poate fi inversată local în jurul oricărui punct din $\mathbb{R}^2$. Ce se poate spune despre inversabilitatea globală a acestei funcţii?

S11.12 Să se analizeze dacă funcţiile date mai jos sunt dependente funcţional pe $\mathbb{R}^3$:

$$f_1(x, y, z) = (x + y + z)^3 - 1,$$

$$f_2(x, y, z) = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$f_3(x, y, z) = (xy + yz + zx)^2 + 2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

S11.13 Să se determine extremele cu legături ale funcţiilor următoare:

a) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, pentru $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

b) $f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \log_2 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \right)$, cu $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ şi $p_i \in (0, 1)$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$ (entropia Rényi).

Bibliografie indicată

1. Liana Manu-Iosifescu, S. Baz, B. Iftimie - *Analiză matematică. Culegere de probleme pentru anul I,* ASE Bucureşti, 2000.

2. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme. (Cap. 6 şi 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

3. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică. Exerciţii şi probleme,* Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

4. C. Drăguşin - *Calcul diferenţial (Culegere de exerciţii şi probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2008.

5. Chris Good - *Extreme Values of Functions of Several Real Variables*, 2014.

6. Ron Larson, Bruce H. Edwards - *Multivariable Calculus,* Amazon, 2015.

7. James Miller - *Maxima and Minima of Functions of Several Variables*, Website owner, 2016.