

Setul 13

de probleme și exerciții de matematică
(relative la integrale ale funcțiilor reale scalar-scalare)

S13.1 Să se calculeze:

$$\begin{aligned} a) \int \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx; \quad b) \int x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx; \\ c) \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt[5]{\sin x - \cos x}} dx; \quad d) \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx; \\ e) \int \frac{\sqrt[5]{3 - \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad f) \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x-x^2}}; \\ g) \int_{-2}^2 \min \{ x(x^2 - 1), x + 1 \} dx; \quad h) \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}. \end{aligned}$$

S13.2 Să se stabilească natura următoarelor integrale improprii:

$$\begin{aligned} a) \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx; \quad b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi \sin x)^\alpha \cdot (\cos x)^\beta dx, \text{ cu } \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \\ c) \int_0^\infty \frac{dx}{x \sqrt{|x^2 + 2x - 1|}}; \quad d) \int_{-2}^\infty \frac{e^{1/x}}{(x+1)^2} dx; \\ e) \int_0^\infty \frac{x^p \sqrt{1 + \sqrt{x}} \ln x}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}} dx, \text{ } p \in \mathbb{R}; \quad f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{-2x} + \sqrt{5}} dx. \end{aligned}$$

S13.3 Să se arate că dacă $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, astfel încât

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq 3 \left(\int_0^1 F(x) dx \right)^2,$$

unde F este o primitivă a lui f , pentru care $F(1) = 0$, atunci f este liniară.

S13.4 Determinați $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\sin x}}{(1+x)^{1/x} - e}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases},$$

admite primitive.

S13.5 Să se calculeze următoarele integrale folosind derivatele lor:

$$\begin{aligned} a) F(y) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + y \cos x)}{\cos x} dx, \text{ } |y| < 1; \quad b) F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y \sin x)}{\sin x} dx, \text{ } y \in \mathbb{R}; \\ c) F(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y_1^2 \sin^2 x + y_2^2 \cos^2 x) dx, \text{ } (y_1, y_2) \in A \subseteq \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

S13.6 Să se arate că:

$$a) \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin(\gamma x) dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\gamma} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\gamma}, \text{ cu } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0;$$

$$b) \Gamma(p) = \int_0^1 (\ln \frac{1}{t})^{p-1} dt, \forall p > 0;$$

$$c) \int_0^\infty e^{-tp} dt = \Gamma(1 + \frac{1}{p}), \forall p > 0.$$

S13.7 Dată fiind funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1}, x \in \mathbb{R},$$

să se găsească primitivele funcției $f|_{\mathbb{R}_+^*}$, prin substituția $t = x + \frac{1}{x}$. Să se determine apoi o primitivă a lui f , pe \mathbb{R} .

S13.8 Să se arate că:

$$\int_0^a e^{x^2} dx \cdot \int_0^a e^{-x^2} dx \geq a^2, \forall a \in \mathbb{R}_+.$$

S13.9 Să se calculeze:

$$\int_0^{1/2} x \ln \frac{1+x}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx.$$

S13.10 Să se studieze convergența integralelor improprii

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{|3x^2 - 2x - 1|}} \text{ și } \int_{-\infty}^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^4} dx, \text{ cu } \alpha \in \mathbb{R}.$$

S13.11 Date fiind funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$,

să se arate că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ și să se deducă valoarea integralei $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Bibliografie orientativă

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme (Cap.10, 11, 12 și 13)*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
2. S. Găină, E. Câmpu, Gh. Bucur - *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, Ed. Tehnică, București, 1966.
3. R. Miculescu, Corina Ciobotaru, Al. Roșioru ș. a. - *Probleme de calcul integral*, Editura Gil, Zalău, 2005.
4. M. Postolache (coord.), Ariana Pitea, Dragoș Cioroboiu - *Calcul integral. Exerciții și probleme*, Editura "Fair Partners", București, 2010.
5. John K. Hunter - *An Introduction to Real Analysis*, Univ. of California Publ., 2013.
6. I. M. Roussos - *Improper Riemann Integrals*, A Chapman & Hall Book, CRC Press, 2013.
7. Marta Hidegkuti - *Lecture Notes and Worksheets on Improper Integrals*, City Colleges of Chicago, 2015.