Logică pentru Informatică - Săptămâna 11
Deducția Naturală

1 Introducere

În cursul anterior am discutat câteva noțiuni importante care țin de *semantica* logicii de ordinul I:

1. valoarea unui termen într-o atribuire;
2. valoarea de adevăr a unei formule într-o structură și o atribuire;
3. satisfiabilitate;
4. validitate;
5. echivalență;
6. consecință semantică.

Am văzut că pentru a stabili, de exemplu, că două formule sunt echivalente, este necesar un raționament la nivel semantic (adică raționament care folosește noțiunile semantice de valoare de adevăr, structură, etc.).

În acest curs, vom prezenta deducția naturală pentru logica de ordinul I. Vom prezenta noțiunea de substituție, vom reaminti câteva dintre noțiunile specifice deducției naturale (discutate în prealabil la logica propozițională) și vom prezenta sistemul deductiv extins împreună cu proprietățile sale.

2 Substituţii

Definiția 2.1. *O* substituție *este o funcție $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, cu proprietatea că $\sigma(x) \neq x$ pentru un număr finit de variabile $x \in \mathcal{X}$.*

Definiția 2.2. *Dacă $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ este o substituție, atunci mulțimea $dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$ se numește* domeniul substituției *σ.*

Observația 2.1. *Prin definiție, domeniul unei substituții este o mulțime finită.*

Definiția 2.3. *Dacă $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ este o substituție, atunci* extensia *unică substituției σ la mulțimea termenilor este funcția $\sigma^\sharp : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, definită recursiv astfel:*

1. $\sigma^\sharp(x) = \sigma(x)$, *pentru orice* $x \in \mathcal{X}$*;*

2. $\sigma^\sharp(c) = c$, *pentru orice simbol constant* $c \in \mathcal{F}_0$*;*

3. $\sigma^\sharp(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma^\sharp(t_1), \ldots, \sigma^\sharp(t_n))$, *pentru orice simbol funcțional* $f \in \mathcal{F}_n$ *de aritate* $n \in \mathbb{N}*$ *și orice termeni* $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$.

Substituţiile se notează cu $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_1, \sigma'$, etc.

Observația 2.2. *Dacă* $t \in \mathcal{T}$ *este un termen, atunci* $\sigma^\sharp(t) \in \mathcal{T}$ *este termenul obținut din* t *prin* aplicarea *substituției* σ *sau termenul obținut prin* aplicarea subtituției σ asupra termenului t.

Practic, pentru a obține $\sigma^\sharp(t)$ din t, toate apariţile unei variabile x din t sunt înlocuite simultan cu termenul corespunzător $\sigma(x)$.

Exemplul 2.1. *Fie substituția* $\sigma_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ *definită astfel:*

1. $\sigma_1(x_1) = x_2$*;*

2. $\sigma_1(x_2) = f(x_3, x_4)$*;*

3. $\sigma_1(x) = x$ *pentru orice* $x \in \mathcal{X} \setminus \{x_1, x_2\}$.

Fie termenul $t = f(f(x_1, x_2), f(x_3, e))$. *Avem că:*

$$\begin{aligned}
\sigma_1^\sharp\Big(t\Big) &= \sigma_1^\sharp\Big(f(f(x_1, x_2), f(x_3, e))\Big) \\
&= f(\sigma_1^\sharp\Big(f(x_1, x_2)\Big), \sigma_1^\sharp\Big(f(x_3, e)\Big)) \\
&= f(f(\sigma_1^\sharp\Big(x_1\Big), \sigma_1^\sharp\Big(x_2\Big)), f(\sigma_1^\sharp\Big(x_3\Big), \sigma_1^\sharp\Big(e\Big))) \\
&= f(f(\sigma_1\Big(x_1\Big), \sigma_1\Big(x_2\Big)), f(\sigma_1\Big(x_3\Big), e)) \\
&= f(f(x_2, f(x_3, x_4)), f(x_3, e)).
\end{aligned}$$

Observați că prin aplicarea unei substituții asupra unui termen, se înlocuiesc (simultan) toate aparițiile variabilelor din domeniul substituției cu termenii asociați acestora.

Notație 2.1. *Dacă* $dom(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, *atunci substituția* σ *se mai poate scrie în felul următor:*

$$\sigma = \{x_1 \mapsto \sigma(x_1), \ldots, x_n \mapsto \sigma(x_n)\}.$$

Atenție, nu este vorba de o mulțime, ci doar de o notație pentru substituții.

Exemplul 2.2. *Pentru substituția din exemplul anterior, avem*

$$\sigma_1 = \{x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto f(x_3, x_4)\}.$$

Definiția 2.4. *Dacă $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ este o substituție și $V \subseteq \mathcal{X}$ este o submulțime de variabile, atunci* restricția substituției σ la mulțimea V este o nouă substituție notată $\sigma|_V : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, *definită astfel:*

1. $\sigma|_V(x) = \sigma(x)$ *pentru orice* $x \in V$;
2. $\sigma|_V(x) = x$ *pentru orice* $x \in \mathcal{X} \setminus V$.

Exemplul 2.3. $\sigma_1|_{\{x_1\}} = \{x_1 \mapsto x_2\}$.

Practic, prin restricția unei substituții la o mulțime de variabile, se scot celelalte variabile din domeniul substituției.

Definiția 2.5. *Pentru orice substituție* $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, extensia *lui σ la mulțimea formulelor este funcția* $\sigma^\flat$: `LP1` $\to$ `LP1`, *definită astfel:*

1. $\sigma^\flat(P(t_1, \ldots, t_n)) = P(\sigma^\sharp(t_1), \ldots, \sigma^\sharp(t_n))$;
2. $\sigma^\flat(\neg\varphi) = \neg\sigma^\flat(\varphi)$;
3. $\sigma^\flat(\varphi_1 \land \varphi_2) = \sigma^\flat(\varphi_1) \land \sigma^\flat(\varphi_2)$;
4. $\sigma^\flat(\varphi_1 \lor \varphi_2) = \sigma^\flat(\varphi_1) \lor \sigma^\flat(\varphi_2)$;
5. $\sigma^\flat(\varphi_1 \to \varphi_2) = \sigma^\flat(\varphi_1) \to \sigma^\flat(\varphi_2)$;
6. $\sigma^\flat(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = \sigma^\flat(\varphi_1) \leftrightarrow \sigma^\flat(\varphi_2)$;
7. $\sigma^\flat(\forall x.\varphi) = \forall x.(\rho^\flat(\varphi))$, *unde* $\rho = \sigma|_{dom(\sigma)\setminus\{x\}}$;
8. $\sigma^\flat(\exists x.\varphi) = \exists x.(\rho^\flat(\varphi))$, *unde* $\rho = \sigma|_{dom(\sigma)\setminus\{x\}}$.

Practic, pentru a obține formula $\sigma^\flat(\varphi)$ din formula φ, fiecare apariţie liberă a variabilei x din formula φ este înlocuită cu termenul $\sigma(x)$.

Exemplul 2.4.

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1^\flat\Big(\big(\forall x_2.P(x_1, x_2)\big) \land P(x_2, x_2)\Big) \equiv\\
&\sigma_1^\flat\Big(\big(\forall x_2.P(x_1, x_2)\big)\Big) \land \sigma_1^\flat\Big(P(x_2, x_2)\Big) \equiv\\
&\big(\forall x_2.\sigma_1|^\flat_{\{x_1\}}\Big(P(x_1, x_2)\Big)\big) \land P(\sigma_1^\sharp\Big(x_2\Big), \sigma_1^\sharp\Big(x_2\Big)) \equiv\\
&\big(\forall x_2.P(\sigma_1|^\sharp_{\{x_1\}}\Big(x_1\Big), \sigma_1|^\sharp_{\{x_1\}}\Big(x_2\Big))\big) \land P(\sigma_1\Big(x_2\Big), \sigma_1\Big(x_2\Big)) \equiv\\
&\big(\forall x_2.P(\sigma_1|_{\{x_1\}}\Big(x_1\Big), \sigma_1|_{\{x_1\}}\Big(x_2\Big))\big) \land P(f(x_3, x_4), f(x_3, x_4)) \equiv\\
&\big(\forall x_2.P(\sigma_1\Big(x_1\Big), x_2)\big) \land P(f(x_3, x_4), f(x_3, x_4)) \equiv\\
&\big(\forall x_2.P(x_2, x_2)\big) \land P(f(x_3, x_4), f(x_3, x_4)).
\end{aligned}
$$

Observația 2.3. *Atenție: aparițiile legate ale variabilelor nu sunt înlocuite prin aplicarea substituției!*

Notație 2.2. *Conform Notației 2.1 pentru substituțiile care au domeniul finit mai utilizăm notația* $\{x_1 \mapsto \sigma(x_1), \ldots, x_n \mapsto \sigma(x_n)\}$. *De multe ori vom utiliza substituții pentru care nu vom mai asocia un nume, deoarece ele sunt foarte simple având forma:* $\{x \mapsto t\}$. *Pentru a exprima faptul că aplicăm această substituție unei formule, conform notațiilor noastre, ar trebui să scriem* $\{x \mapsto t\}(\varphi)$. *Însă în literatură sunt preferate alte notații pe care le vom utiliza și noi. O variantă este să scriem* $\varphi[t/x]$. *O altă variantă este* $\varphi[x \mapsto t]$. *În acest document vom prefera ultima notație.*

3 Secvențe

Definiția 3.1 (Secvență). *O* secvență *este o pereche formată dintr-o mulțime de formule* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq$ ***LP1*** *și dintr-o formulă* $\varphi \in$ ***LP1****, notată astfel:*

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi.$$

Câteodată citim notația $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ sub forma φ *este consecință sintactică din* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. De multe ori, vom nota cu $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ mulțimea de ipoteze și în acest caz vom scrie secvența ca $\Gamma \vdash \varphi$.

Observația 3.1. *Reamintim că notația uzuală în literatură permite scrierea* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ *(adică fără acolade) în loc de* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$. *Totuși trebuie să ținem cont că în partea stângă a simbolului* $\vdash$ *este tot timpul o mulțime. Această notație fără acolade ne permite să scriem* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash \varphi$ *în loc de* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\psi\} \vdash \varphi$.

Exemplul 3.1. *În multe dintre exemplele din acest material vom lucra cu o signatură* $\Sigma = (\{P, Q\}, \{a, b, f, g\})$*, unde predicatele* P *și* Q *au aritate 1, simbolurile funcționale* f *și* g *au aritate 1, iar simbolurile* a *și* b *sunt constante (aritate 0).*

Exemplul 3.2. *Fie signatura* Σ *din Exemplul 3.1. Iată câteva exemple de secvențe:*

1. $\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)} \land \mathtt{Q(a)}$;
2. $\{\forall\mathtt{x}.\mathtt{Q(x)}, \mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)} \land \mathtt{Q(a)}$;
3. $\{\exists\mathtt{x}.\mathtt{Q(x)}\} \vdash \mathtt{Q(a)}$.

Mai târziu vom vedea că primele două secvențe de mai sus sunt valide*, iar ultima secvență nu este validă.*

4 Reguli de inferență

Definiția 4.1. *O* regulă de inferență *este un tuplu format din:*

1. *o mulțime de secvențe* $S_1, \ldots, S_n$*, care se numesc* ipotezele *regulii;*

2. *o secvență S care se numește* concluzia *regulii;*

3. *o* condiție *de aplicare a regulii;*

4. *un nume.*

O regulă de inferență se notează în felul următor:

$$\text{NUME}\ \frac{S_1 \qquad \ldots \qquad S_n}{S}\ \textit{condiție.}$$

Observația 4.1. *Regulile de inferență care au $n = 0$ ipoteze, se numesc axiome. De asemenea, condiția de aplicare poate să lipsească.*

Exemplul 4.1. *Iată câteva exemple de reguli de inferență pe care le-am întâlnit și la logica propozițională:*

$$\wedge i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \wedge e_2\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi'.}$$

Ca și în logica propozițională, toate cele trei reguli de inferență de mai sus sunt corecte*. Niciuna dintre cele trei reguli de mai sus nu are o condiție atașată. Iată și un exemplu de regulă cu $n = 0$ ipoteze, dar cu o condiție:*

$$\text{IPOTEZĂ}\ \frac{}{\Gamma \vdash \varphi}\ \varphi \in \Gamma.$$

Mai jos avem un exemplu de regulă de inferență incorectă (într-un sens pe care îl vom preciza mai târziu, dar care poate fi deja intuit):

$$\text{REGULĂ INCORECTĂ}\ \frac{\Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi').}$$

Observația 4.2. *Ipotezele regulii de inferență, precum și concluzia, sunt de fapt* scheme *de secvențe și nu secvențe propriu-zise. Aceste scheme pot fi instanțiate, adică o regulă de inferență (prezentată ca mai sus) are mai multe* instanțe*, obținute prin înlocuirea variabilelor matematice $\varphi, \varphi', \Gamma$ cu formele concrete. De exemplu, iată două instanțe ale regulii $\wedge i$ de mai sus:*

$$\wedge i\ \frac{\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)} \qquad \{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash \mathtt{Q(a)}}{\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)});}$$

$$\wedge i\ \frac{\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}, \mathtt{Q(b)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}) \qquad \{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}, \mathtt{Q(b)}\} \vdash \mathtt{P(a)}}{\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}, \mathtt{Q(b)}\} \vdash ((\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}) \wedge \mathtt{P(a)}).}$$

În prima instanță, am înlocuit variabila matematică Γ cu mulțimea de formule $\{\mathtt{P}(\mathtt{a}), \mathtt{Q}(\mathtt{a})\}$, variabila matematică φ cu formula $\mathtt{P}(\mathtt{a})$ și variabila matematică φ' cu formula $\mathtt{Q}(\mathtt{a})$. Exercițiu: stabiliți singuri cu ce am înlocuit fiecare variabilă matematică în cea de-a doua instanță.

Iată un exemplu de regulă care nu este instanță a regulii $\wedge i$ (exercițiu: explicați de ce nu):

$$? \frac{\{\mathtt{P}(\mathtt{a}), \mathtt{Q}(\mathtt{a})\} \vdash \mathtt{P}(\mathtt{a}) \qquad \{\mathtt{P}(\mathtt{a}), \mathtt{Q}(\mathtt{a})\} \vdash \mathtt{Q}(\mathtt{a})}{\{\mathtt{P}(\mathtt{a}), \mathtt{Q}(\mathtt{a})\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{P}(\mathtt{a}));}$$

5 Sistem deductiv

Definiția 5.1. *Un* sistem deductiv *este o mulțime de reguli de inferență.*

Exemplul 5.1. *Fie sistemul deductiv D_1, format din următoarele patru reguli de inferență:*

$$\text{IPOTEZĂ} \frac{}{\Gamma \vdash \varphi,} \varphi \in \Gamma \qquad \wedge i \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1 \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,}$$

$$\wedge e_2 \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi'.}$$

6 Demonstrație formală

Definiția 6.1 (Demonstrație formală)**.** *O* demonstrație formală *într-un sistem deductiv este o listă de secvențe*

1. S_1
2. S_2

...

n. S_n,

cu proprietatea că fiecare secvență S_i este justificată de o regulă de inferență a sistemului deductiv din secvențele anterioare ($S_1, \ldots, S_{i-1}$), în sensul în care S_i este concluzia unei instanțe a unei reguli de inferență din sistemul deductiv, regulă care folosește ca ipoteze doar secvențe alese dintre $S_1, \ldots, S_{i-1}$. În plus, dacă regula de inferență are condiție, această condiție trebuie să fie adevărată. Să notăm și faptul că orice prefix al unei demonstrații este tot o demonstrație.

Exemplul 6.1. *Iată un exemplu de demonstrație formală în sistemul D_1 introdus mai sus:*

1. $\{\mathtt{P}(\mathtt{a}), \mathtt{Q}(\mathtt{a})\} \vdash \mathtt{P}(\mathtt{a})$; *(*IPOTEZĂ*)*

2. $\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash \mathtt{Q(a)}$; *(*Ipoteză*)*

3. $\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})$; *(*$\wedge i$, 1, 2*)*

4. $\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash (\mathtt{Q(a)} \wedge (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}))$. *(*$\wedge i$, 2, 3*)*

Ca și în cazul logicii propoziționale, fiecare linie este adnotată cu numele regulii de inferență aplicate, plus liniile la care se găsesc ipotezele necesare aplicării (în aceeași ordine folosită pentru prezentarea sistemului deductiv).

Observația 6.1. *Definiția demonstrației formale în logica de ordinul întâi este aceeași ca în cazul logicii propoziționale. Totuși, vom vedea mai târziu că pentru aplicarea regulilor de inferență noi, asociate cuantificatorilor, vom folosi adnotări suplimentare.*

Definiția 6.2 (Secvență validă)**.** *O secvență* $\Gamma \vdash \varphi$ *este* validă într-un sistem deductiv D *dacă există o demonstrație formală* $S_1, \ldots, S_n$ *în* D *astfel încât* $S_n = \Gamma \vdash \varphi$.

Exemplul 6.2. *Secvența* $\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})$ *este validă în sistemul deductiv* D_1 *de mai sus, deoarece este ultima secvență din următoarea demonstrație formală:*

1. $\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$; *(*Ipoteză*)*

2. $\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash \mathtt{Q(a)}$; *(*Ipoteză*)*

3. $\{\mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})$. *(*$\wedge i$, 1, 2*)*

Observația 6.2. *Atenție! Nu confundați noțiunea de* secvență validă într-un sistem deductiv *cu noțiunea de* formulă validă.

7 Deducția naturală

Deducția naturală este un sistem deductiv pentru logica de ordinul I. De fapt, sistemul deductiv pentru logica de ordinul I include toate regulile de deducție studiate la logica propozițională. În plus, pentru logica de ordinul I mai apar reguli noi, și anume cele de introducere și eliminare a cuantificatorilor. În această secțiune vom prezenta în detaliu fiecare regulă de inferență care aparține deducției naturale în logica de ordinul I.

7.1 Regulile pentru conjuncții

Am văzut deja regulile de introducere și de eliminare pentru conectorul "și":

$$\wedge i \, \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1 \, \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \wedge e_2 \, \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi'.}$$

Acest sistem deductiv se numește deducție *naturală* deoarece regulile de inferență mimează raționamentul uman, bazat în esență pe o semantică intuitivă a noțiunii de adevăr:

1. Regula de introducere a conectorului $\wedge$ ne indică că putem demonstra o conjuncție $\varphi \wedge \varphi'$ din ipotezele Γ dacă știm deja că fiecare parte a conjuncției, φ și respectiv φ', sunt consecințe ale ipotezelor Γ.

   Cu alte cuvinte, pentru a arăta o conjuncție dintr-un set de ipoteze, este suficient să stabilim individual că fiecare parte a conjuncției este o consecință a ipotezelor.

2. Pentru conectorul $\wedge$ avem două reguli de eliminare. Prima regulă de eliminare a conectorului $\wedge$ ne precizează că dacă am stabilit deja că o conjuncție $(\varphi \wedge \varphi')$ este consecința unei mulțimi Γ de ipoteze, atunci și partea stângă a conjuncției, φ, este consecință a mulțimii Γ.

   A doua regulă este simetrică față de prima și ne permite să concluzionăm că și partea dreaptă a unei conjuncții este consecința unei mulțimi de formule dacă și conjuncția este consecința a aceleiași mulțimi de formule.

Iată un exemplu de demonstrație formală care utilizează regulile de inferență pentru conectorul $\wedge$:

1. $\{(\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}), \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})$; (Ipoteză)
2. $\{(\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}), \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash \forall\mathtt{x.P(x)}$; (Ipoteză)
3. $\{(\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}), \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$; $(\wedge e_1,\ 1)$
4. $\{(\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}), \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \forall\mathtt{x.P(x)})$. $(\wedge i,\ 3,\ 2)$

Exerciții:

1. $\{((\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}) \wedge \forall\mathtt{x.P(x)})\} \vdash (\mathtt{Q(a)} \wedge \forall\mathtt{x.P(x)})$;
2. $\{((\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}) \wedge \forall\mathtt{x.P(x)}), \forall\mathtt{x.Q(x)}\} \vdash (\forall\mathtt{x.Q(x)} \wedge \mathtt{Q(a)})$;
3. $\{((\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}) \wedge \forall\mathtt{x.P(x)})\} \vdash (\forall\mathtt{x.P(x)} \wedge (\mathtt{Q(a)} \wedge \mathtt{P(a)}))$.

7.2 Regulile pentru implicații

Regula de eliminare a implicației, numită și *modus ponens* în latină, este una dintre cele mai importante reguli de inferență pe care le aplicăm.

$$\to e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi') \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi'}$$

Regula ne arată că, presupunând că am demonstrat $\varphi \to \varphi'$ (din Γ) și în plus am demonstrat și φ (tot din Γ), atunci putem demonstra φ' (din Γ).

Iată un exemplu de demonstrație formală care folosește regula de eliminare a implicației:

1. $\{(\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)}), (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})$; (Ipoteză)

2. $\{(\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)}), (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})\} \vdash \mathtt{P(a)}$; ($\wedge e_1$, 1)

3. $\{(\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)}), (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})\} \vdash (\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)})$; (Ipoteză)

4. $\{(\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)}), (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})\} \vdash \forall \mathtt{x.P(x)}$. ($\to e$, 3, 1)

Această demonstrație arată că secvența $\{(\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)}), (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})\} \vdash \forall \mathtt{x.P(x)}$ este validă, adică formula $\forall \mathtt{x.P(x)}$ este o consecință a mulțimii de formule $\{(\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)}), (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})\}$. Observați ordinea în care apar liniile 3 și 1 în explicația liniei 4: urmează aceeași ordine, fixată prin regula de inferență.

Exercițiul 7.1. *Arătați că sunt valide următoarele secvențe:*

1. $\{((\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}) \to \forall \mathtt{x.P(x)}), \mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash \forall \mathtt{x.P(x)}$;

2. $\{(\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)}), \mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash (\mathtt{Q(a)} \wedge \forall \mathtt{x.P(x)})$.

Regula de introducere a implicației este mai subtilă. Pentru a arăta că o implicație $(\varphi \to \varphi')$ decurge din Γ, *presupunem* φ (în plus față de Γ) și arătăm φ'. Cu alte cuvinte, în ipoteza regulii, adăugăm formula φ la formulele din Γ. Regula poate fi scrisă în două moduri echivalente, care se deosebesc doar prin faptul că prima regulă folosește convenția de notație referitoare la acoladele din jurul premiselor unei secvențe, în timp ce în a doua regulă acoladele care marchează mulțimea apar explicit:

$$\to i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi'),} \qquad\qquad \to i\ \frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi').}$$

Ceea ce este important de observat și de înțeles la regula de introducere a implicației este că mulțimea de premise se schimbă. Dacă în concluzie avem că formula $(\varphi \to \varphi')$ decurge din Γ, în ipoteză trebuie să arătăm că φ' decurge din premisele $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Cu alte cuvinte, la modul intuitiv, pentru a demonstra o implicație $(\varphi \to \varphi')$, presupunem antecedentul φ și arătăm consecventul φ'.

Exemplul 7.1. *Să arătăm că secvența* $\{\} \vdash (\mathtt{P(a)} \to \mathtt{P(a)})$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$; *(*Ipoteză*)*

2. $\{\} \vdash (\mathtt{P(a)} \to \mathtt{P(a)})$. *(*$\to i$, 1*)*

Exemplul 7.2. *Să arătăm că secvența* $\{(\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), (\mathtt{Q(a)} \to \mathtt{P(b)})\} \vdash (\mathtt{P(a)} \to \mathtt{P(b)})$ *este validă:*

1. $\{(\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), (\mathtt{Q(a)} \to \mathtt{P(b)}), \mathtt{P(a)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)})$; *(*Ipoteză*)*

2. $\{(\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), (\mathtt{Q(a)} \to \mathtt{P(b)}), \mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$; *(*Ipoteză*)*

3. $\{(\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), (\mathtt{Q(a)} \to \mathtt{P(b)}), \mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{Q(a)}$; *(*$\to e$, 1, 2*)*

4. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{Q}(\mathtt{a})), (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b})), \mathtt{P}(\mathtt{a})\} \vdash (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b}))$; *(*IPOTEZĂ*)*
5. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{Q}(\mathtt{a})), (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b})), \mathtt{P}(\mathtt{a})\} \vdash \mathtt{P}(\mathtt{b})$; *($\rightarrow e$, 4, 3)*
6. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{Q}(\mathtt{a})), (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b}))$. *($\rightarrow i$, 5)*

Exercițiul 7.2. *Arătați că următoarele secvențe sunt valide:*

1. $\{((\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a})) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b})), \mathtt{P}(\mathtt{a}), \mathtt{Q}(\mathtt{a})\} \vdash \mathtt{P}(\mathtt{b})$;
2. $\{((\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a})) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \rightarrow (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b})))$;
3. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \rightarrow (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b})))\} \vdash ((\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a})) \rightarrow \mathtt{P}(\mathtt{b}))$.

7.3 Regulile pentru disjuncții

Conectorul $\vee$ are două reguli de introducere:

$$\vee i_1 \; \frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),} \qquad\qquad \vee i_2 \; \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2).}$$

Prima regulă ne arată că dacă știm φ_1 (din Γ), atunci știm și $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ (din Γ), indiferent de φ_2. A doua regulă de eliminare este simetrică, pentru partea dreaptă a disjuncției.

Exemplul 7.3. *Să arătăm că secvența* $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a}))$ *este validă:*

1. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))$; *(*IPOTEZĂ*)*
2. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash \mathtt{P}(\mathtt{a})$; *($\wedge e_1$, 1)*
3. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a}))$. *($\vee i_1$, 2)*

O altă demonstrație formală pentru aceeași secvență este:

1. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))$; *(*IPOTEZĂ*)*
2. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash \mathtt{Q}(\mathtt{a})$; *($\wedge e_2$, 1)*
3. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a}))$. *($\vee i_2$, 2)*

Exercițiul 7.3. *Arătați că secvența* $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{b}) \vee \mathtt{P}(\mathtt{a}))$ *este validă.*

Regula de eliminare a disjuncției este ușor mai complicată, fiind o altă regulă în care mulțimea de premise ale secvențelor variază de la ipoteză la concluzie:

$$\vee e \; \frac{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi' \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash \varphi'}$$

Prima ipoteză a regulii, $\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, este ușor de înțeles: pentru a "elimina" o disjuncție, trebuie să avem o disjuncție printre ipoteze (disjuncție pe care să o "eliminăm"). Ultimele două ipoteze ale regulii de eliminare a disjuncției trebuie înțelese intuitiv după cum urmează. Din prima ipoteză știm $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ (din Γ); cu alte cuvinte, măcar una dintre formulele φ_1 și respectiv φ_2 decurge din Γ. Ipotezele 2 și 3 ne indică faptul că, indiferent care dintre formulele φ_1 și respectiv φ_2 ar avea loc, în orice caz φ' are loc. Adică dacă presupunem φ_1 (în plus față de Γ), φ' are loc, iar dacă presupunem φ_2 (în plus față de Γ), φ' tot are loc. Și atunci concluzia ne indică că φ' are loc indiferent care dintre φ_1 și respectiv φ_2 ar avea loc.

Exemplul 7.4. *Să arătăm că secvența* $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{P}(\mathtt{a}))$ *este validă:*

1. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a})), \mathtt{P}(\mathtt{a})\} \vdash \mathtt{P}(\mathtt{a})$; (Ipoteză)
2. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a})), \mathtt{P}(\mathtt{a})\} \vdash (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{P}(\mathtt{a}))$; ($\vee i_2$, 1)
3. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a})), \mathtt{Q}(\mathtt{a})\} \vdash \mathtt{Q}(\mathtt{a})$; (Ipoteză)
4. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a})), \mathtt{Q}(\mathtt{a})\} \vdash (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{P}(\mathtt{a}))$; ($\vee i_1$, 1)
5. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a}))$; (Ipoteză)
6. $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a}))\} \vdash (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{P}(\mathtt{a}))$. ($\vee e$, 5, 2, 4)

Observați cu atenție modul în care mulțimea de premise variază de la o secvență la alta pe parcursul demonstrației formale, respectând regulile de inferență.

Exercițiul 7.4. *Arătați că secvența* $\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a})), (\mathtt{P}(\mathtt{a}) \to \mathtt{P}(\mathtt{b})), (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \to \mathtt{P}(\mathtt{b}))\} \vdash \mathtt{P}(\mathtt{b})$ *este validă.*

Exercițiul 7.5. *Arătați că următoarea secvență este validă:*

$$\{(\mathtt{P}(\mathtt{a}) \to \mathtt{P}(\mathtt{b})), (\mathtt{Q}(\mathtt{a}) \to \mathtt{P}(\mathtt{b}))\} \vdash ((\mathtt{P}(\mathtt{a}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{a})) \to \mathtt{P}(\mathtt{b})).$$

7.4 Regulile pentru negații

Regulile pentru introducerea și respectiv eliminarea negației sunt prezentate împreună cu o regulă pentru eliminarea lui $\perp$:

$$\neg i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \qquad \neg e\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \perp} \qquad \perp e\ \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Să ne readucem aminte că $\perp$ este un conector logic de aritate 0. Cu alte cuvinte, conectorul $\perp$ este de sine stătător o formulă. Semantica formulei $\perp$ este că este falsă în orice atribuire. Cu alte cuvinte, $\perp$ este o contradicție.

Prima regulă dintre cele de mai sus, cea de introducere a negației, este ușor de explicat intuitiv: cum putem arăta că o formulă de forma $\neg\varphi$ decurge din premisele Γ? Presupunem, în plus față de premisele Γ, că avem φ și arătăm că din Γ și φ decurge o contradicție ($\Gamma, \varphi \vdash \bot$). În acest fel, arătăm că $\neg\varphi$ decurge din Γ.

A doua regulă, pentru eliminarea negației, ne indică faptul că dacă atât o formulă φ, cât și negația sa, $\neg\varphi$, decurg din aceeași mulțime de premise Γ, atunci din Γ decurge și o contradicție, $\bot$. O mulțime Γ din care decurge o contradicție se numește și mulțime *inconsistentă* de formule.

A treia regulă indică că, dacă Γ este o mulțime inconsistentă de formule, atunci orice formulă φ decurge din Γ.

Nu există nicio regulă pentru introducerea conectorului $\bot$ (sau, regula de eliminare a negației se poate considera ca fiind și regula de introducere a lui $\bot$).

Exemplul 7.5. *Să arătăm că secvența* $\{\mathtt{P(a)}\} \vdash \neg\neg\mathtt{P(a)}$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$; (Ipoteză)
2. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \neg\mathtt{P(a)}$; (Ipoteză)
3. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 1, 2)
4. $\{\mathtt{P(a)}\} \vdash \neg\neg\mathtt{P(a)}$. ($\neg i$, 3)

Exemplul 7.6. *Să arătăm că secvența* $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(b)}$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$; (Ipoteză)
2. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \neg\mathtt{P(a)}$; (Ipoteză)
3. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 1, 2)
4. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(b)}$. ($\bot e$, 3)

Exercițiul 7.6. *Arătați că următoarele secvențe sunt valide:*

1. $\{(\mathtt{P(a)} \vee \mathtt{Q(a)})\} \vdash \neg(\neg\mathtt{P(a)} \wedge \neg\mathtt{Q(a)})$;
2. $\{(\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})\} \vdash \neg(\neg\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{Q(a)})$;
3. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{Q(a)})\} \vdash \neg(\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})$;
4. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \wedge \neg\mathtt{Q(a)})\} \vdash \neg(\mathtt{P(a)} \vee \mathtt{Q(a)})$;
5. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \mathtt{Q(a)})\} \vdash (\neg\mathtt{P(a)} \wedge \neg\mathtt{Q(a)})$.

7.4.1 Eliminarea dublei negații

La logica propozițională am întâlnit și următoarea regulă pentru eliminarea dublei negații:

$$\neg\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Exemplul 7.7. *Să arătăm că secvența* $\{(\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), \neg\mathtt{Q(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$ *este validă:*

1. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), \neg\mathtt{Q(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \neg\mathtt{P(a)}$; (IPOTEZĂ)
2. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), \neg\mathtt{Q(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash (\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)})$; (IPOTEZĂ)
3. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), \neg\mathtt{Q(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{Q(a)}$; ($\to e$, 2, 1)
4. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), \neg\mathtt{Q(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \neg\mathtt{Q(a)}$; (IPOTEZĂ)
5. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), \neg\mathtt{Q(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \bot$; ($\neg i$, 4, 3)
6. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), \neg\mathtt{Q(a)}\} \vdash \neg\neg\mathtt{P(a)}$; ($\neg i$, 5)
7. $\{(\neg\mathtt{P(a)} \to \mathtt{Q(a)}), \neg\mathtt{Q(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$. ($\neg\neg e$, 6)

Exemplul 7.8. *Să arătăm că secvența* $\{\} \vdash (P(a) \vee \neg P(a))$ *este validă:*

1. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)}), \mathtt{P(a)}\} \vdash \neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})$; (IPOTEZĂ)
2. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)}), \mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$; (IPOTEZĂ)
3. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)}), \mathtt{P(a)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})$; ($\vee i_1$, 2)
4. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)}), \mathtt{P(a)}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 1, 3)
5. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})\} \vdash \neg\mathtt{P(a)}$; ($\neg i$, 4)
6. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})\} \vdash (\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})$; ($\vee i_2$, 5)
7. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})\} \vdash \neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})$; (IPOTEZĂ)
8. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 7, 6)
9. $\{\} \vdash \neg\neg(\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})$; ($\neg i$, 8)
10. $\{\} \vdash (\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{P(a)})$. ($\neg\neg e$, 9)

Exercițiul 7.7. *Arătați că umătoarele secvențe sunt valide:*

1. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})\} \vdash (\neg\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{Q(a)})$;
2. $\{\neg(\neg\mathtt{P(a)} \vee \neg\mathtt{Q(a)})\} \vdash (\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)})$;
3. $\{\neg(\neg\mathtt{P(a)} \wedge \neg\mathtt{Q(a)})\} \vdash (\mathtt{P(a)} \vee \mathtt{Q(a)})$.

7.5 Reguli pentru cuantificatori

7.5.1 Eliminarea cuantificatorului universal.

Regula pentru eliminarea cuantificatorului universal este:

$$\forall e \ \frac{\Gamma \vdash \forall x.\varphi}{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}$$

Regula de eliminare a cuantificatorului universal este foarte simplă: practic, dacă știm că $\forall x.\varphi$ este o consecință sintactică din Γ atunci putem instanția variabila legată x cu orice termen t.

Exercițiul 7.8. *Întrebare: regula de eliminare de mai sus mai are sens dacă x nu apare în φ? De exemplu, din $\Gamma \vdash \forall \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{a})$ putem deduce că $\Gamma \vdash \mathtt{P}(\mathtt{a})[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{b}]$?*

Exemplul 7.9. *Să ne amintim un exemplu discutat anterior în care aveam două afirmații:* Orice om este muritor *și* Socrate este om*. Putem trage concluzia că* Socrate este muritor*? Pentru a răspunde la întrebare, am putea încerca să demonstrăm secvența: $\{\forall \mathtt{x}.(Om(\mathtt{x}) \rightarrow Muritor(\mathtt{x})), Om(\mathtt{s})\} \vdash Muritor(\mathtt{s})$, unde* Om *și* Muritor *sunt predicate de aritate 1 iar s este o constantă (simbol funcțional de aritate 0) asociată numelui Socrate. Iată demonstrația formală a secvenței:*

1. $\{\forall \mathtt{x}.(Om(\mathtt{x}) \rightarrow Muritor(\mathtt{x})), Om(\mathtt{s})\} \vdash \forall \mathtt{x}.(Om(\mathtt{x}) \rightarrow Muritor(\mathtt{x}))$(Ipoteză)
2. $\{\forall \mathtt{x}.(Om(\mathtt{x}) \rightarrow Muritor(\mathtt{x})), Om(\mathtt{s})\} \vdash (Om(\mathtt{s}) \rightarrow Muritor(\mathtt{s}))$ $(\forall e, 1, s)$
3. $\{\forall \mathtt{x}.(Om(\mathtt{x}) \rightarrow Ouritor(\mathtt{x})), Om(\mathtt{s})\} \vdash Om(\mathtt{s})$ (Ipoteză)
4. $\{\forall \mathtt{x}.(Om(\mathtt{x}) \rightarrow Muritor(\mathtt{x})), Om(\mathtt{s})\} \vdash Muritor(\mathtt{s})$ $(\rightarrow e, 2, 3)$

Observați că la pasul 2 al demonstrației am utilizat regula $\forall e$, care instanțiază în formula $\forall \mathtt{x}.(Om(\mathtt{x}) \rightarrow Muritor(\mathtt{x}))$ pe variabila legată $\mathtt{x}$ cu $\mathtt{s}$: $(Om(\mathtt{s}) \rightarrow Muritor(\mathtt{s}))$. În limbaj natural, e ca și cum am dedus prin raționament că Dacă Socrate e om, atunci el este muritor *din* Orice om este muritor*.*

7.5.2 Introducerea cuantificatorul existențial.

Există o oarecare dualitate a regulilor pentru introducerea și eliminarea cuantificatorilor. Astfel, regula de introducere a cuantificatorului existențial de mai jos poate văzută ca duala regulii de eliminare a cuantificatorului universal:

$$\exists i \ \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}{\Gamma \vdash \exists x.\varphi}$$

Regula ne indică faptul că putem deduce $\exists x.\varphi$ atunci când $\varphi[x \mapsto t]$ este consecință semantică din Γ. Informal, dacă există un x concret — și anume t — astfel încât $\varphi[x \mapsto t]$ este adevărată vom trage concluzia că $\exists \mathtt{x}.\varphi$ este adevărată.

Exemplul 7.10. *Să arătăm că secvența* $\{\mathtt{P(a)}\} \vdash \exists\mathtt{x.P(x)}$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$ (Ipoteză)
2. $\{\mathtt{P(a)}\} \vdash \exists\mathtt{x.P(x)}$ $(\exists i, 1)$

Observați că în acest caz φ *este* $\mathtt{P(x)}$ *iar* $\varphi[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{a}]$ *este* $\mathtt{P(x)}[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{a}] = \mathtt{P(a)}$.

Exemplul 7.11. *Să arătăm că secvența* $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \mathtt{P(a)}\} \vdash \exists\mathtt{x.Q(x)}$ *este validă:*

1. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \mathtt{P(a)}\} \vdash \forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}$ (Ipoteză)
2. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$ (Ipoteză)
3. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \mathtt{P(a)}\} \vdash (\mathtt{P(a)} \rightarrow \mathtt{Q(a)})$ $(\forall e, 1, \mathtt{a})$
4. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{Q(a)}$ $(\rightarrow e, 3, 2)$
5. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \mathtt{P(a)}\} \vdash \exists\mathtt{x.Q(x)}$ $(\exists i, 4)$

7.5.3 Introducerea cuantificatorului universal.

Regula de introducere a cuantificatorului universal este:

$$\forall i \ \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto x_0]}{\Gamma \vdash \forall x.\varphi} \ x_0 \notin vars(\Gamma, \varphi)$$

Regula de mai sus ne spune că vom putea deriva concluzia $\Gamma \vdash \forall x.\varphi$ dacă vom arăta că $\varphi[x \mapsto x_0]$ este consecință sintactică din Γ, unde x_0 este o variabilă *nouă*: ea nu mai apare în alte formule și asupra ei nu facem nici o presupunere.

Exemplul 7.12. *Să arătăm că secvența* $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash \forall\mathtt{x.Q(x)}$ *este validă:*

1. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash \forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}$ (Ipoteză)
2. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash \forall\mathtt{x.P(x)}$ (Ipoteză)
3. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash (\mathtt{P(x_0)} \rightarrow \mathtt{Q(x_0)})$ $(\forall e, 1, \mathtt{x_0})$
4. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash \mathtt{P(x_0)}$ $(\forall e, 2, \mathtt{x_0})$
5. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash \mathtt{Q(x_0)}$ $(\rightarrow e, 3, 4)$
6. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \rightarrow \mathtt{Q(x))}, \forall\mathtt{x.P(x)}\} \vdash \forall\mathtt{x.Q(x)}$ $(\forall i, 5)$

Observați că pentru secvențele 3, 4 și 5 utilizăm variabila x_0 *asupra căreia nu facem nici o presupunere. Prin urmare, la nivel intuitiv,* $Q(x_0)$ *va avea loc pentru orice* x_0.

Exercițiul 7.9. *Arătați că următoarele secvențe sunt valide:*

1. $\{\forall\mathtt{x.(P(x)} \land \mathtt{Q(x))}\} \vdash \forall\mathtt{x.P(x)}$;
2. $\{\forall\mathtt{x.Q(x)}, \mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)} \land \mathtt{Q(a)}$;
3. $\{\forall\mathtt{x.P(x)}, \forall\mathtt{x.Q(x))}\} \vdash \forall\mathtt{x.(P(x)} \land \mathtt{Q(x))}$.

7.5.4 Eliminarea cuantificatorului existențial

Regula pentru eliminarea cuantificatorului existențial este următoarea:

$$\exists e \; \frac{\Gamma \vdash \exists x.\varphi \qquad \Gamma \cup \{\varphi[x \mapsto x_0]\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} \; x_0 \notin \mathit{vars}(\Gamma, \varphi, \psi)$$

Prima ipoteză a regulii este $\Gamma \vdash \exists x.\varphi$, care, la nivel intuitiv, ne asigură că există cel puțin un termen (pot fi mai mulți) care îl poate înlocui x astfel încât φ este consecință sintactică din Γ. Nu știm însă care sunt acești termeni (în cazul în care sunt mai mulți). Știm doar că măcar unul există și îi vom nota generic cu x_0. Pentru a demonstra concluzia, adică ψ este consecință sintactică din Γ, va trebui să facem o analiză de cazuri după toți x_0. Practic, acest lucru este sumarizat de cea de-a doua ipoteză a regulii unde trebuie arătat că ψ este consecință sintactică din $\Gamma \cup \{\varphi[x \mapsto x_0]\}$.

Exemplul 7.13. *Să arătăm că secvența* $\{\forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})), \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x})\} \vdash \exists \mathtt{x}.\mathtt{Q}(\mathtt{x})$ *este validă:*

1. $\{\forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})), \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x})\} \vdash \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x})$ (Ipoteză)
2. $\{\forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})), \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x}), \mathtt{P}(\mathtt{x_0})\} \vdash \mathtt{P}(\mathtt{x_0})$ (Ipoteză)
3. $\{\forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})), \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x}), \mathtt{P}(\mathtt{x_0})\} \vdash \forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$ (Ipoteză)
4. $\{\forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})), \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x}), \mathtt{P}(\mathtt{x_0})\} \vdash (\mathtt{P}(\mathtt{x_0}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x_0}))$ $(\forall e, 3, \mathtt{x_0})$
5. $\{\forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})), \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x}), \mathtt{P}(\mathtt{x_0})\} \vdash \mathtt{Q}(\mathtt{x_0})$ $(\to e, 4, 2)$
6. $\{\forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})), \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x}), \mathtt{P}(\mathtt{x_0})\} \vdash \exists \mathtt{x}.\mathtt{Q}(\mathtt{x})$ $(\exists i, 5)$
7. $\{\forall \mathtt{x}.(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})), \exists \mathtt{x}.\mathtt{P}(\mathtt{x})\} \vdash \exists \mathtt{x}.\mathtt{Q}(\mathtt{x})$ $(\exists e, 1, 6)$

Observați că pentru a demonstra secvența 7, am utilizat secvența 1 și secvența 6. Aceasta din urmă a fost demonstrată de pașii 2, 3, 4 și 5, unde am utilizat ca ipoteză și formula $\mathtt{P}(\mathtt{x_0})(= \mathtt{P}(\mathtt{x})[\mathtt{x} \mapsto \mathtt{x_0}])$.

7.6 Alte reguli

O altă regulă utilă, care nu ține de un anumit conector, este regula de extindere, care a fost prezentă și în capitolul dedicat logicii propoziționale:

$$\textsc{Extindere} \; \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi' \vdash \varphi}$$

Această regulă ne indică faptul că, dacă φ este consecință a unei mulțimi de formule Γ, atunci φ este consecință și a mulțimii $\Gamma \cup \{\varphi'\}$ (indiferent de φ'). Cu alte cuvinte, putem extinde oricând mulțimea de premise ale unei secvențe valide și obținem o nouă secvență validă.

Exemplul 7.14. *Să arătăm că secvența* $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{Q(a)}, \mathtt{P(f(a))}, (\mathtt{P(b)} \wedge \mathtt{Q(b)})\} \vdash \neg\neg\mathtt{P(a)}$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)}$; (IPOTEZĂ)
2. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \neg\mathtt{P(a)}$; (IPOTEZĂ)
3. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{P(a)}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 1, 2)
4. $\{\mathtt{P(a)}\} \vdash \neg\neg\mathtt{P(a)}$; ($\neg i$, 3)
5. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{Q(a)}\} \vdash \neg\neg\mathtt{P(a)}$; (EXTINDERE, 4)
6. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{Q(a)}, \mathtt{P(f(a))}\} \vdash \neg\neg\mathtt{P(a)}$; (EXTINDERE, 5)
7. $\{\mathtt{P(a)}, \neg\mathtt{Q(a)}, \mathtt{P(f(a))}, (\mathtt{P(b)} \wedge \mathtt{Q(b)})\} \vdash \neg\neg\mathtt{P(a)}$. (EXTINDERE, 6)

8 Deducția naturală

Deducția naturală pentru logica de ordinul I este sistemul deductiv alcătuit din toate regulile din secțiunile precedente. Iată aici sumarizate toate regulile:

$$\wedge i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \wedge e_2\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi',}$$

$$\to e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi') \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi',} \qquad \to i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi'),} \qquad \vee i_1\ \frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),}$$

$$\vee i_2\ \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),} \qquad \vee e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi' \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash \varphi',}$$

$$\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot,} \qquad \neg i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi,} \qquad \bot e\ \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi,}$$

$$\text{IPOTEZĂ}\ \frac{}{\Gamma \vdash \varphi}\ \varphi \in \Gamma, \qquad \text{EXTINDERE}\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi' \vdash \varphi,} \qquad \neg\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi.}$$

$$\forall e\ \frac{\Gamma \vdash \forall x.\varphi}{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}$$

$$\exists e\ \frac{\Gamma \vdash \exists x.\varphi \qquad \Gamma \cup \{\varphi[x \mapsto x_0]\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ x_0 \notin vars(\Gamma, \varphi, \psi)$$

$$\forall i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto x_0]}{\Gamma \vdash \forall x.\varphi}\ x_0 \notin vars(\Gamma, \varphi) \qquad \exists i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}{\Gamma \vdash \exists x.\varphi}$$

Desigur că putem folosi în demonstrații și regulile derivate (pe care le-am prezentat în cazul logicii propoziționale).

9 Corectitudinea și completitudinea deducției naturale pentru logica de ordinul I

Teorema 9.1 (Corectitudinea deducției naturale)**.** *Pentru orice mulțime de formule* Γ *și orice formulă* φ*, dacă secvența* $\Gamma \vdash \varphi$ *este validă, atunci* $\Gamma \models \varphi$*.*

Exercițiu: de demonstrat la seminar.

Teorema 9.2 (Completitudinea deducției naturale)**.** *Pentru orice mulțime de formule* Γ *și orice formulă* φ*, dacă* $\Gamma \models \varphi$ *atunci secvența* $\Gamma \vdash \varphi$ *este validă.*

Demonstrația teoremei de completitudine depășește nivelul cursului.

Observația 9.1. *De remarcat că, folosind teoremele de corectitudine și respectiv de completitudine, relația* $\vdash$ *coincide cu relația* $\models$*, deși au definiții cu totul diferite.*