Cursul 12

Şiruri şi serii de funcţii reale.
Serii de puteri. Serii Taylor. Serii trigonometrice. Serii Fourier.

Două dintre entităţile de prim plan din domeniul analizei matematice sunt ***şirul de funcţii*** şi ***seria de funcţii***. Prezentăm aici aceste noţiuni, cu referiri la convergenţa punctuală şi la convergenţa uniformă a şirurilor şi seriilor de funcţii reale, la unele criterii de convergenţă uniformă, precum şi la rezultate ce privesc transferul de proprietăţi de la funcţiile ce sunt termeni ai unui şir (sau ai unei serii) la funcţia limită (respectiv sumă). Cazurile particulare ale seriilor de puteri (în rândul cărora intră *seriile Taylor*) şi ale seriilor trigonometrice (cu subsidiarele *serii Fourier-trigonometrice*) sunt expuse la urmă.

Şiruri de funcţii reale

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi spaţiul liniar real al funcţiilor $f : A \to \mathbb{R}^q$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$), notat cu $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$.

Definiţia 12.1 *Se numeşte* ***şir de funcţii*** *definite pe A şi cu valori în $\mathbb{R}^q$ o aplicaţie de la $\mathbb{N}^*$ la $\mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$.*

Un asemenea şir se notează cu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $(\subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q))$, ori $(f_n)_{n\geq 1}$ sau $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$.

Definiţia 12.2 *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ un şir de funcţii reale. Elementul $\mathrm{x}_0 \in A$ se numeşte* ***punct de convergenţă*** *al şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dacă şi numai dacă şirul numeric $(f_n(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^q$ este convergent.*

Mulţimea punctelor de convergenţă ale unui şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ poartă denumirea de ***mulţime de convergenţă*** *pentru $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi, notată cu A_c, este submulţime a lui A.*

Exemplu: Când $p = q = 1$, $A = [-3, 5]$ şi $f_n(x) = x^n$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$, punctul $x = -1$ nu este unul de convergenţă pentru $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ întrucât şirul numeric $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este unul divergent. Totodată, punctul $x = \dfrac{1}{2}$ este unul de convergenţă pentru şirul de funcţii considerat aici, deoarece şirul numeric $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent (la 0). Mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii în cauză este, uşor de constatat, $(-1, 1]$.

Observaţie: În cazul în care $q > 1$, şirul numeric real $(f_n(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$, pe baza căruia se decide dacă $\mathrm{x}_0 \in A$ este sau nu punct de convergenţă pentru $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, se poate investiga prin intermediul şirurilor sale componente $(f_n^j(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$, $j = \overline{1, q}$.

Dacă un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ are mulţimea de convergenţă $A_c \subseteq A$ nevidă, atunci se poate defini pe A_c o funcţie f, prin $\mathrm{x} \in A_c \longmapsto f(\mathrm{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x})$, numită ***funcţia limită a şirului de funcţii*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ***pe mulţimea*** A_c.

De pildă, în exemplul de mai sus, în care $p = q = 1$, $A = [-3, 5]$, $f_n(x) = x^n$, $\forall\, x \in A$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, iar $A_c = (-1, 1]$, funcţia limită în cauză este $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$, dată prin: $f(x) = 0$, $\forall\, x \in (-1, 1)$ şi $f(1) = 1$.

Definiţia 12.3 *a) Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$. Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numeşte* ***punctual*** *(sau* ***simplu****)* ***convergent la*** *f, pe $\widetilde{A} \subseteq A$, $\widetilde{A} \neq \varnothing$, dacă şi numai dacă $\widetilde{A} \subseteq A_c$ şi $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_{\varepsilon,\mathrm{x}} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_{\varepsilon,\mathrm{x}}$, are loc: $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\| < \varepsilon$.*

b) Un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ se numeşte ***punctual*** *(simplu)* ***convergent pe o mulţime nevidă*** *$\widehat{A} \subseteq A$ dacă există $f \in \mathcal{F}(\widehat{A};\mathbb{R}^q)$ astfel încât $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ să conveargă punctual la (similar spus, să aibă limita punctuală) f.*

Faptul că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge punctual, pe $\widetilde{A} \subseteq A$, la f se notează prin $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} f$. Altminteri, când $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ nu este convergent punctual la o funcţie f (din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$), pe o submulţime $\widetilde{A} \subseteq A$, se foloseşte notaţia $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{p/\widetilde{A}}{\not\to}} f$.

Observaţie: Dacă se doreşte ca o anumită proprietate a funcţiilor termeni - f_n - din cadrul şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ să se regăsească la funcţia limită f, convergenţa punctuală a lui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la f este, mai întotdeauna, neasigurătoare pentru "transferul" proprietăţii vizate. Nu mai departe decât şirul din exemplul precedent are funcţiile termeni - $f_n(x) = x^n$ - continue la stânga în $x = 1$, dar funcţia sa limită punctuală - $f(x) = 0$, $\forall\ x \in (-1,1)$ şi $f(1) = 1$ - nu este continuă la stânga în punctul respectiv.

Un alt tip de convergenţă, adecvat "transferului de proprietăţi" mai mult decât convergenţa punctuală, este cel relativ la ***convergenţa uniformă*** a unui şir de funcţii, introdus după cum urmează.

Definiţia 12.4 *a) Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ se numeşte* ***convergent uniform*** *pe $\widetilde{A} \subseteq A$,* ***la*** *$f \in \mathcal{F}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$, dacă şi numai dacă $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi pentru orice $\mathrm{x} \in \widetilde{A}$, are loc relaţia: $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\| < \varepsilon$. Notăm acest fapt prin $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.*

b) Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ se numeşte ***convergent uniform pe*** *$\varnothing \neq \widetilde{A} \subseteq A$ dacă şi numai dacă există $f \in \mathcal{F}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$ aşa încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.*

Observaţii:

1) Din definiţiile 12.3 şi 12.4, se deduce că dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} f$.

2) Pe baza Definiţiei 12.4, se vede că dacă şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, converge uniform pe $\widetilde{A} \subseteq A$ ($\widetilde{A} \neq \varnothing$) şi există $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} f$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

3) Un şir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ nu converge uniform, pe $\widetilde{A} \subseteq A$, către $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, adică $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{u/\widetilde{A}}{\not\to}} f$, dacă şi numai dacă există $\varepsilon_0 > 0$ aşa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se pot găsi $k_n \in \mathbb{N}^*$, cu $k_n \geq n$ şi $\mathrm{x}_n \in \widetilde{A}$, pentru care să avem $\|f_{k_n}(\mathrm{x}_n) - f(\mathrm{x}_n)\| \geq \varepsilon_0$.

4) Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ este un şir de funcţii convergent punctual la un element $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, pe mulţimea $\widetilde{A} \subseteq A$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$, ori de câte ori, pentru orice $\varepsilon > 0$, mulţimea $\{n_{\varepsilon,\mathrm{x}} \mid \mathrm{x} \in \widetilde{A}\}$ (în care $n_{\varepsilon,\mathrm{x}}$ este rangul - din $\mathbb{N}^*$ - implicat în Definiţia 12.3) este mărginită.

Pentru stabilirea situaţiei în care are loc convergenţa uniformă a unui şir de funcţii, pe o anume mulţime, se poate utiliza unul dintre următoarele criterii.

Propoziţia 12.1 *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, *unde* $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$. *Şirul* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniform pe* $\widetilde{A} \subseteq A$ $(\widetilde{A} \neq \varnothing)$ *dacă şi numai dacă este* ***uniform fundamental (Cauchy) pe*** $\widetilde{A}$, *adică*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ aşa încât }, \forall\, m,n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } m,n \geq n_\varepsilon, \text{ are loc relaţia}$$

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$$

sau, echivalent,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ aşa încât }, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall\, p \in \mathbb{N}^* \text{ are loc}$$

$$\|f_{n+p}(\mathrm{x}) - f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}.$$

Demonstraţie: Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform convergent pe $\widetilde{A}$, atunci, în conformitate cu Definiţia 12.4 b), există $f \in \mathcal{F}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$, astfel încât: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$. Potrivit primei părţi a aceleiaşi definiţii, aceasta înseamnă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$. De aici, rezultă că, $\forall\, m,n \in \mathbb{N}^*$, cu $m,n \geq n_\varepsilon$, este adevărată relaţia:

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} + \|f(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}.$$

Aşadar, are loc relaţia din enunţ, în conformitate cu care $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir uniform fundamental de funcţii din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$.

Reciproc, dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir uniform fundamental (Cauchy) pe $\widetilde{A}$, atunci $(f_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}^q$ este, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, un şir numeric Cauchy. Cum, în $\mathbb{R}^q$, orice şir Cauchy este convergent, rezultă că, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, $(f_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ are o limită (unică) $l_{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^q$. Se obţine astfel o funcţie $f : \widetilde{A} \to \mathbb{R}^q$, definită prin $f(\mathrm{x}) = l_{\mathrm{x}}$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, în raport cu care avem: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} f$. Ţinând acum seama de faptul că, $\forall\, \varepsilon > 0$ şi $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, m,n \in \mathbb{N}^*$, cu $m,n \geq n_\varepsilon$, avem $\|f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$ şi, pentru $m \longrightarrow \infty$, găsim că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$. Ca atare, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$, potrivit cu Definiţia 12.4 a). ◀

Propoziţia 12.2 *Un şir* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *converge, uniform pe* $\varnothing \neq \widetilde{A} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^q$, *la* $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, *dacă şi numai dacă:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\mathrm{x}\in\widetilde{A}} \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\right) = 0.$$

Demonstraţie: Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$, atunci, conform Definiţiei 12.4 a), $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}.$$

Prin urmare, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}^*$, are loc relaţia

$$\sup_{\mathrm{x}\in\widetilde{A}} \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

de unde deducem că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\mathrm{x}\in\widetilde{A}} \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\right) = 0.$

Reciproc, dacă are loc condiţia din enunţ, atunci:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \text{ încât, } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ cu } n \geq n_\varepsilon, \text{ avem } \sup_{\mathrm{x}\in\widetilde{A}} \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$$

şi astfel, cu atât mai mult, $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$. Aşadar, putem considera că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$. ◄

Revenind la exemplul şirului de funcţii $f_n : [-3, 5] \to \mathbb{R}$, cu $f_n(x) = x^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [-3, 5]$, constatăm că $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{u/\widetilde{A}}{\nrightarrow}} f$, unde $\widetilde{A} = (-1, 1]$ şi $f : \widetilde{A} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = 0$, $\forall\, x \in (-1, 1)$ şi $f(1) = 1$. Aceasta întrucât $\sup\limits_{\mathrm{x}\in(-1,1]} |f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})| = \sup\limits_{\mathrm{x}\in(-1,1]} x^n = 1 \nrightarrow 0$, când $n \longrightarrow \infty$. În acelaşi timp, deducem că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\hat{A}} f|_{\hat{A}}$, unde $\hat{A} = [\alpha, \beta] \subseteq (-1, 1)$. Asta deoarece $\sup\limits_{\mathrm{x}\in\hat{A}} \left| f_n(\mathrm{x}) - f|_{\hat{A}}(\mathrm{x}) \right| = \sup\limits_{\mathrm{x}\in\hat{A}} x^n = \max\{|\alpha|^n, |\beta|^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Propoziţia 12.3 ***(criteriul majorării pentru convergenţa uniformă a unui şir de funcţii reale)***

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $A \neq \varnothing$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$.

a) Dacă există $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$, astfel încât $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} g \equiv \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|g_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall \mathrm{x} \in \widetilde{A} \subseteq A$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

b) Dacă există $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}_+$, astfel încât $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \gamma_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A} \subseteq A$, atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

Demonstraţie: a) $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem $\|g_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$. Atunci, ţinând seama că $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|g_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, rezultă: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$. Deci: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$.

b) Cum $\gamma_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ şi $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \gamma_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$, rezultă că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$,avem: $\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \gamma_n < \varepsilon$. Atunci, în conformitate cu Definiţia 12.4 a), deducem că $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} f$. ◄

Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii reale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ asigură păstrarea, pentru funcţia limită, a unor proprietăţi ale funcţiilor ce sunt termeni ai şirului, proprietăţi între care menţionăm: mărginirea, existenţa limitei într-un punct, continuitatea, diferenţiabilitatea (derivabilitatea) şi integrabilitatea. O asemenea calitate este evidenţiată de teoremele care urmează.

Teorema 12.1 ***(pentru transfer de mărginire)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$ un şir de funcţii mărginite pe A. Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, unde $f \in \mathcal{F}(A; \mathbb{R}^q)$, atunci f este mărginită pe A.

Demonstraţie: Cum $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, rezultă că, pentru $\varepsilon = 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_1$, avem:

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < 1, \forall\, \mathrm{x} \in A.$$

În acelaşi timp, deoarece f_{n_1} este mărginită pe A, există $\mu > 0$, aşa încât: $\|f_{n_1}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \mu$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$. Combinând cele două relaţii şi luând $n = n_1$ în prima dintre ele, obţinem:

$$\|f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f(\mathrm{x}) - f_{n_1}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n_1}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq 1 + \mu, \forall\, \mathrm{x} \in A.$$

Deci f este mărginită pe A. ◀

Teorema 12.2 ***(pentru transferul existenţei limitei într-un punct)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *şi* $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, *astfel încât* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$. *Dacă* $\mathrm{x}_0 \in A'$ *şi există* $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *atunci există* $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$ *şi, în plus, are loc egalitatea:*

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x})\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})\right).$$

Demonstraţie: Cum $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, reiese că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$(*) \quad \|f_n(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3}, \forall\, x \in A.$$

Totodată, pentru că există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, considerând $n = n_\varepsilon$, avem: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, \mathrm{x}', \mathrm{x}'' \in A$, cu $\mathrm{x}' \neq \mathrm{x}_0$, $\mathrm{x}'' \neq \mathrm{x}_0$ şi $\|\mathrm{x}' - \mathrm{x}''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}') - f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Combinând aceste relaţii, deducem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, aşa încât, $\forall\, \mathrm{x}', \mathrm{x}'' \in A$, cu $\mathrm{x}' \neq \mathrm{x}_0$, $\mathrm{x}'' \neq \mathrm{x}_0$ şi $\|\mathrm{x}' - \mathrm{x}''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon$, avem:

$$\begin{aligned}\|f(\mathrm{x}') - f(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} &\leq \|f(\mathrm{x}') - f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}')\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}') - f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} + \\ &+ \quad \|f_{n_\varepsilon}(\mathrm{x}'') - f(\mathrm{x}'')\|_{\mathbb{R}^q} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

În consecinţă, potrivit Teoremei 9.3, există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$.

Trecând acum la limită (cu $\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0$) în $(*)$, obţinem că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$$\|\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x}) - \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

De aici, rezultă că egalitatea $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x})\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})\right)$ are într-adevăr loc. ◀

Teorema 12.3 ***(pentru transfer de continuitate)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ *şi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *un şir de funcţii uniform convergent, pe* A, *la o funcţie* $f : A \to \mathbb{R}^q$.

a) Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *este continuă în* $\mathrm{x}_0 \in A$, *atunci şi* f *este continuă în* x_0.

b) Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *este continuă pe o mulţime* $\widetilde{A} \subseteq A$, *atunci la fel este şi* f, *adică* $f \in \mathcal{C}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$.

Demonstraţie: a) Cum, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n este continuă în $\mathrm{x}_0 \in A$, rezultă că există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x}) = f_n(\mathrm{x}_0)$. Astfel, deoarece $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, prin aplicarea Teoremei 12.2, deducem că există $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$ şi

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x}) = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x})\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f_n(\mathrm{x})\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathrm{x}_0) = f(\mathrm{x}_0).$$

Deci f este continuă în x_0.

b) Faptul că, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, f_n este continuă pe $\widetilde{A}$, înseamnă că f_n este continuă în orice punct din $\widetilde{A}$. Atunci, pe baza rezultatului de la a), rezultă că f, limita uniformă a şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pe $\widetilde{A}$, este de asemenea continuă în orice punct al lui $\widetilde{A}$. Prin urmare, f este continuă pe $\widetilde{A}$. ◀

Observaţie: Convergenţa uniformă a unui şir de funcţii constituie o condiţie suficientă, nu şi necesară, pentru transferul proprietăţilor de mărginire, existenţă a limitei într-un punct sau continuitate. Există şiruri de funcţii mărginite sau continue care, deşi converg numai punctual, au funcţia limită cu aceeaşi proprietate.

Cât priveşte diferenţiabilitatea (derivabilitatea) funcţiei limită, are loc următorul rezultat.

Teorema 12.4 ***(pentru transfer de diferenţiabilitate)***

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime mărginită, deschisă şi convexă, iar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ un şir de funcţii diferenţiabile Fréchet pe A. Dacă există un punct $\mathrm{x}_0 \in A$ aşa încât şirul $(f_n(\mathrm{x}_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ să fie convergent în $\mathbb{R}^q$ şi există $L : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât $(df_n)(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} L(\cdot)$, atunci există $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ aşa încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$, f este diferenţiabilă Fréchet pe A şi $df = L$.

Demonstraţie: Cum, pentru orice m şi n din $\mathbb{N}^*$, funcţia $(f_n - f_m)$ este diferenţiabilă pe mulţimea nevidă, deschisă şi convexă A, se poate vedea că, $\forall\, \mathrm{x} \in A$, există $\xi \in \{t\mathrm{x} + (1-t)\mathrm{x}_0 \mid t \in (0,1)\} \subseteq A$, astfel încât:

$$(**) \quad \|\,(f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})) - (f_n(\mathrm{x}_0) - f_m(\mathrm{x}_0))\,\|_{\mathbb{R}^q} \le \|\,(df_n)(\xi) - (df_m)(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)} \cdot \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}.$$

Într-adevăr, considerând funcţia $g_{n,m} : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$(!) \quad g_{n,m}(\mathrm{z}) = \sum_{k=1}^{q} \left[(f_{n,k}(\mathrm{x}) - f_{m,k}(\mathrm{x})) - (f_{n,k}(\mathrm{x}_0) - f_{m,k}(\mathrm{x}_0))\right](f_{n,k}(\mathrm{z}) - f_{m,k}(\mathrm{z}))\,, \forall\, \mathrm{z} \in A,$$

unde $f_n = (f_{n,1}, f_{n,2}, \ldots, f_{n,q})$ şi $f_m = (f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots, f_{m,q})$, se poate constata faptul că există $\xi \in \{t\mathrm{x} + (1-t)\mathrm{x}_0 \mid t \in (0,1)\}$ aşa încât:

$$(!!) \quad g_{n,m}(\mathrm{x}) - g_{n,m}(\mathrm{x}_0) = (dg_{n,m}(\xi))\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0).$$

Această relaţie (formulă de medie) rezultă prin aplicarea formulei lui Lagrange asupra funcţiei $h_{n,m} : (-\omega, \omega+1) \to \mathbb{R}$, definită prin $h_{n,m}(s) = g_{n,m}(\mathrm{x}_0 + s(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0))$, $\forall\, s \in (-\omega, \omega+1)$, unde $\omega > 0$ este astfel încât $\{\mathrm{x}_0 + s(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \mid s \in (-\omega, \omega+1)\} \subseteq A$. Întrucât $h_{n,m}$ este continuă pe $[0,1]$ şi derivabilă pe $(0,1)$, există, potrivit teoremei de medie a lui Lagrange, un punct $\sigma \in (0,1)$ aşa încât $h_{n,m}(1) - h_{n,m}(0) = h'_{n,m}(\sigma)$, adică:

$$g_{n,m}(\mathrm{x}) - g_{n,m}(\mathrm{x}_0) = h_{n,m}(1) - h_{n,m}(0) = h'_{n,m}(\sigma) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_{n,m}}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0 + \sigma(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0))(x_k - x_k^0) =$$

$$= \langle \nabla g_{n,m}(\mathrm{x}_0 + \sigma(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)), \mathrm{x} - \mathrm{x}_0 \rangle = \left(dg_{n,m}(\xi)\right)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0), \text{ unde } \xi = \mathrm{x}_0 + \sigma(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0).$$

Acum, folosind (!) în (!!) şi apelând la inegalitatea lui Cauchy, obţinem:

$$\|\left(f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\right) - \left(f_n(\mathrm{x}_0) - f_m(\mathrm{x}_0)\right)\|^2_{\mathbb{R}^q} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{q} \left[\left(f_{n,k}(\mathrm{x}) - f_{m,k}(\mathrm{x})\right) - \left(f_{n,k}(\mathrm{x}_0) - f_{m,k}(\mathrm{x}_0)\right)\right]^2 = \\
&= g_{n,m}(\mathrm{x}) - g_{n,m}(\mathrm{x}_0) = \left(dg_{n,m}(\xi)\right)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = \\
&= \sum_{k=1}^{q} \left[\left(f_{n,k}(\mathrm{x}) - f_{m,k}(\mathrm{x})\right) - \left(f_{n,k}(\mathrm{x}_0) - f_{m,k}(\mathrm{x}_0)\right)\right] \cdot d\left(f_{n,k} - f_{m,k}\right)(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = \\
&= \langle \left(f_n - f_m\right)(\mathrm{x}) - \left(f_n - f_m\right)(\mathrm{x}_0), d\left(f_n - f_m\right)(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)\rangle_e \leq \\
&\leq \|\left(f_n - f_m\right)(\mathrm{x}) - \left(f_n - f_m\right)(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \cdot \|d\left(f_n - f_m\right)(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
&\leq \|\left(f_n - f_m\right)(\mathrm{x}) - \left(f_n - f_m\right)(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \cdot \|d\left(f_n - f_m\right)(\xi)\|_{\mathbb{R}^q} \cdot \|(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^p}.
\end{aligned}$$

De aici, prin simplificare, rezultă relaţia $(**)$.

Pe baza acestei relaţii, în virtutea ipotezelor de mărginire a mulţimii A şi de uniformă convergenţă a şirului $\left(\left(df_n\right)(\xi)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ în $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, dacă ţinem seama de Propoziţia 12.1, deducem faptul că şirul $\left(f_n(\cdot) - f_m(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform convergent pe A. Aceasta, întrucât, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}^*$, cu $n, m \geq n_\varepsilon$, avem:

$$\|f_n(\mathrm{x}) - f_n(\mathrm{x}_0) - \left(f_m(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x}_0)\right)\|_{\mathbb{R}^q} =$$

$$\begin{aligned}
&= \|\left(f_n(\mathrm{x}) - f_m(\mathrm{x})\right) - \left(f_n(\mathrm{x}_0) - f_m(\mathrm{x}_0)\right)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
&\leq \|\left(df_n\right)(\xi) - \left(df_m\right)(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)} \cdot \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in A.
\end{aligned}$$

Drept urmare, deoarece $f_n(\mathrm{x}) = f_n(\mathrm{x}) - f_n(\mathrm{x}_0) + f_n(\mathrm{x}_0)$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$, iar $\left(f_n(\mathrm{x}_0)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este, prin ipoteză, un şir uniform convergent pe A. Există deci $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ aşa încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f$.

Astfel ţinând seama iarăşi de ipoteza convergenţei uniforme, la L, a şirului $\left(df_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}\left(A;\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)\right)$, se poate spune că avem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f_n(\mathrm{x}) - f_n(\widetilde{\mathrm{x}}) - \left(df_n\right)(\widetilde{\mathrm{x}})(\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}})}{\|\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}}\|_{\mathbb{R}^p}} - \frac{f(\mathrm{x}) - f(\widetilde{\mathrm{x}}) - L(\widetilde{\mathrm{x}})(\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}})}{\|\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q},$$

$\forall\, \mathrm{x}, \widetilde{\mathrm{x}} \in A$, $\mathrm{x} \neq \widetilde{\mathrm{x}}$. De aici, întrucât

$$\lim_{\mathrm{x}\longrightarrow\widetilde{\mathrm{x}}} \frac{f_n(\mathrm{x}) - f_n(\widetilde{\mathrm{x}}) - \left(df_n\right)(\widetilde{\mathrm{x}})(\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}})}{\|\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}}\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

rezultă că există

$$\lim_{\mathrm{x}\longrightarrow\widetilde{\mathrm{x}}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\widetilde{\mathrm{x}}) - L(\widetilde{\mathrm{x}})(\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}})}{\|\mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{x}}\|_{\mathbb{R}^p}}$$

şi această limită este egală cu $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$.

Ca atare, ţinând seama de Definiţia 10.6 şi de observaţiile de imediat după ea, conchidem că f este diferenţiabilă Fréchet în punctul arbitrar $\widetilde{\mathrm{x}}$ din A şi, în plus, $(df)(\widetilde{\mathrm{x}}) = L(\widetilde{\mathrm{x}})$, $\forall\, \widetilde{\mathrm{x}} \in A$. ◀

Cât priveşte transferul proprietăţii de integrabilitate (în sens Riemann), are loc următorul rezultat, a cărui demomstraţie o vom lămuri în următoarele două secţiuni (v. Cursurile 13 şi 14).

Teorema 12.5 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime nevidă, închisă şi mărginită, iar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ un şir de funcţii integrabile, în sens Riemann, pe A, astfel încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/A} f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, atunci f este Riemann-integrabilă pe A şi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \int_A f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}.$$

În particular, când $p = q = 1$ şi $A = [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ ($\alpha < \beta$), iar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}([\alpha,\beta];\mathbb{R}^q)$ este un şir pentru care există $\int\limits_\alpha^\beta f_n(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/[\alpha,\beta]} f \in \mathcal{F}([\alpha,\beta];\ \mathbb{R}^q)$, atunci putem afirma că există şi $\int\limits_\alpha^\beta f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$, fiind adevărată relaţia: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\alpha^\beta f_n(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \int\limits_\alpha^\beta f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}$.

Serii de funcţii

Definiţia 12.5 *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$. De asemenea, fie şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Perechea $((f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ se numeşte **serie de funcţii** din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ şi se notează prin $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sau $f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$.*

Definiţia 12.6 *O serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, cu $f_n \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ se numeşte **punctual (simplu) convergentă pe** $\widetilde{A} \subseteq A$ dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este punctual (simplu) convergent pe $\widetilde{A}$. Funcţia $S : \widetilde{A} \to \mathbb{R}^q$, pentru care $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{p/\widetilde{A}} S$, se numeşte **suma punctuală a seriei de funcţii** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ şi $S(\mathrm{x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\mathrm{x}), \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}$.*

Definiţia 12.7 *Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ se numeşte **uniform convergentă** pe $\widetilde{A} \subseteq A$ dacă şi numai dacă şirul asociat (al sumelor-funcţii parţiale) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent uniform pe $\widetilde{A}$. În acest caz, elementul $S \in \mathcal{F}(\widetilde{A};\mathbb{R}^q)$, pentru care $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{u/\widetilde{A}} S$, se numeşte **suma uniformă a seriei de funcţii** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ şi $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, uniform pe $\widetilde{A}$.*

Definiţia 12.8 *O serie de funcţii $\sum\limits_{n\ \in\mathbb{N}^*} f_n$, cu $f_n \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, se numeşte **absolut convergentă într-un punct** $x_0 \in A$ (respectiv **pe o mulţime** $\widetilde{A} \subseteq A$) dacă seria numerică $\sum\limits_{n\ \in\mathbb{N}^*} \|f_n(x_0)\|_{\mathbb{R}^q}$ (respectiv $\sum\limits_{n\ \in\mathbb{N}^*} \|f_n(x)\|_{\mathbb{R}^q}$) este convergentă (respectiv convergentă pentru orice $x \in \widetilde{A}$).*

Ţinând seama de aceste definiţii, precum şi de criteriul lui Cauchy de convergenţă uniformă a unui şir de funcţii (vezi Propoziţia 12.1), putem spune că studiul convergenţei punctuale a unei serii de funcţii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$, cu $f_n \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, se face pe baza studiului seriei numerice $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(\mathrm{x})$, cu $\mathrm{x} \in A$, folosind criterii specifice pentru convergenţa unei astfel de serii, pe când convergenţa uniformă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ se poate aprecia potrivit următorului criteriu:

Propoziţia 12.4 *Fie şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$. Seria de funcţii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă pe $\widetilde{A} \subseteq A$, dacă şi numai dacă şirul asociat $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (cu $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$) este uniform fundamental pe $\widetilde{A}$, adică dacă:*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \textit{ astfel încât, } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \textit{ cu } n \geq n_\varepsilon \textit{ şi } \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \textit{ avem}$$

$$\|f_{n+1}(\mathrm{x}) + f_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots + f_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{A}.$$

Caracterizarea situaţiei în care seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ nu este uniform convergentă pe $\widetilde{A}$ se obţine negând relaţia de mai sus. Astfel, se poate zice că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ nu converge uniform pe $\widetilde{A}$ dacă şi numai dacă există $\varepsilon_0 > 0$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, se găsesc $k_n \in \mathbb{N}^*$şi $p_n \in \mathbb{N}^*$, cu $k_n \geq n$, precum şi $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$, pentru care avem:

$$\|f_{k_n+1}(\widetilde{\mathrm{x}}) + f_{k_n+2}(\widetilde{\mathrm{x}}) + \cdots + f_{k_n+p_n}(\widetilde{\mathrm{x}})\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0.$$

Propoziţia 12.5 *Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ este absolut convergentă într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A$, atunci ea este convergentă în respectivul punct.*

Demonstraţie: Deoarece seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este absolut convergentă în x_0, rezultă că seria numerică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}$ este convergentă, ceea ce, potrivit criteriului general al lui Cauchy, înseamnă că $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\|f_{n+1}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \cdots + \|f_{n+p}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Dar, cum

$$\|f_{n+1}(\mathrm{x}_0) + f_{n+2}(\mathrm{x}_0) + \cdots + f_{n+p}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|f_{n+1}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} + \cdots + \|f_{n+p}(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q},$$

se poate spune că, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, are loc relaţia din enunţul Propoziţiei 12.4 pentru $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$. Drept urmare, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este convergentă în punctul x_0. ◄

Unul dintre criteriile de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii, deosebit de util în practică, este cel din teorema care urmează.

Teorema 12.6 ***(Criteriul lui Weierstrass)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ *şi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$. *Dacă există o serie numerică cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *aşa încât* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă şi*

$$(\#) \quad \|f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq u_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^* \text{ şi } \forall\, \mathrm{x} \in A,$$

atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *este absolut şi uniform convergentă pe* A.

Demonstraţie: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ fiind convergentă, înseamnă că, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem: $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} < \varepsilon$. Atunci, în virtutea relaţiei (#), rezultă că, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\begin{aligned}
&\|f_{n+1}(\mathrm{x}) + f_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots + f_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
\leq\ &\|f_{n+1}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} + \|f_{n+2}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} + \cdots + \|f_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
\leq\ &u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} < \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in A.
\end{aligned}$$

În conformitate cu Propoziţia 12.4 şi cu criteriul lui Cauchy de absolută convergenţă, deducem de aici că seria de funcţii $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este absolut şi uniform convergentă pe A. ◀

Observaţie: De regulă, dacă $\sup\limits_{\mathrm{x}\in A}\{\|f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\} < +\infty$, se foloseşte criteriul lui Weierstrass (din Teorema 12.6), luând $u_n = \sup\limits_{\mathrm{x}\in A}\{\|f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q}\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci când $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ este convergentă.

Un alt criteriu de convergenţă uniformă (nu şi absolută), pentru serii de funcţii de forma $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$, este următorul:

Teorema 12.7 ***(Criteriul lui Dirichlet)***

Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$,$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *şi* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. *Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ *are şirul sumelor parţiale mărginit uniform, iar şirul* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este monoton descrescător şi uniform convergent la* 0, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ *este uniform convergentă.*

Demonstraţie: Cum şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, unde $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este uniform mărginit, există $M > 0$, aşa încât

$$(\bullet) \quad \|f_1(\mathrm{x}) + f_2(\mathrm{x}) + \cdots + f_n(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq M, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, \mathrm{x} \in A.$$

În acelaşi timp, deoarece $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform convergent la 0 pe A, rezultă că, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem: $|g_n(\mathrm{x})| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$.

Ţinând seama ce aceasta, de ($\bullet$) şi de faptul că $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător pe A, obţinem:

$$\begin{aligned}
& \|f_{n+1}(\mathrm{x})g_{n+1}(\mathrm{x}) + f_{n+2}(\mathrm{x})g_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots + f_{n+p}(\mathrm{x})g_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} = \\
= \;& \|\left(S_{n+1}(\mathrm{x}) - S_n(\mathrm{x})\right) g_{n+1}(\mathrm{x}) + \left(S_{n+2}(\mathrm{x}) - S_{n+1}(\mathrm{x})\right) g_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots \\
& \cdots + \left(S_{n+p}(\mathrm{x}) - S_{n+p-1}(\mathrm{x})\right) g_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} = \\
= \;& \| - S_n(\mathrm{x})g_{n+1}(\mathrm{x}) + S_{n+1}(\mathrm{x})\left(g_{n+1}(\mathrm{x}) - g_{n+2}(\mathrm{x})\right) + \cdots \\
& \cdots + S_{n+p-1}(\mathrm{x})\left(g_{n+p-1}(\mathrm{x}) - g_{n+p}(\mathrm{x})\right) + S_{n+p}(\mathrm{x})g_{n+p}(\mathrm{x})\|_{\mathbb{R}^q} \leq \\
\leq \;& M\left[g_{n+1}(\mathrm{x}) + g_{n+1}(\mathrm{x}) - g_{n+2}(\mathrm{x}) + \cdots + (g_{n+p-1}(\mathrm{x}) - g_{n+p}(\mathrm{x}) + g_{n+p}(\mathrm{x})\right] < \\
< \;& 2M \cdot g_{n+1}(\mathrm{x}) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \forall\, \mathrm{x} \in A, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, p \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Potrivit Propoziţie 12.4, conchidem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ este uniform convergentă pe A. ◀

Tot pentru serii de forma $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ există şi criteriul lui Abel, în conformitate cu următorul rezultat.

Teorema 12.8 ***(Criteriul lui Abel)***
Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi şirurile de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă pe A, iar şirul $(g_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform mărginit şi monoton pentru orice $\mathrm{x} \in A$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$ este uniform convergentă pe A.

Demonstraţie: Şirul $(g_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ fiind uniform mărginit şi monoton pentru fiecare $\mathrm{x} \in A$, există $l_{\mathrm{x}} = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(\mathrm{x})$, cu $l_{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$. Dacă $(g_n(\mathrm{x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător, şirul $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $g : A \to \mathbb{R}$ este definită prin $g(\mathrm{x}) = l_{\mathrm{x}}$, $\forall\, \mathrm{x} \in A$, este convergent la 0, uniform (în ipotezele din enunţ) pe A. În plus, $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ar fi şi monoton descrescător. Scriind $f_n g_n = f_n(g_n - g) + f_n g, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ne dăm seama că, prin aplicarea Teoremei 12.7 şi a faptului că $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă pe A (ceea ce implică că şirul corespunzător al sumelor parţiale, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, este uniform mărginit), rezultă uniforma convergenţă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n g_n$. ◀

Ca şi în cazul şirurilor de funcţii, convergenţa uniformă a seriilor oferă posibilitatea transferului de proprietăţi (precum continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea) de la termenii seriilor în cauză la funcţiile-sumă ale lor. În acest caz, prin interpretarea adecvată a Teoremelor 12.1 - 12.5, are loc următorul rezultat, a cărui demonstraţie se poate face pe baza proprietăţilor adecvate de transfer ale şirului sumelor parţiale în cauză.

Teorema 12.9 *1) Fie $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$, astfel încât seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este uniform convergentă pe A. Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, f_n este mărginită pe A sau are limită într-un punct $\mathrm{x}_0 \in A$ sau este continuă într-un punct $\widetilde{\mathrm{x}} \in A$ ori pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$ sau este integrabilă Riemann pe A, atunci şi suma uniformă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ este respectiv mărginită pe A, are limită* *în* x_0*, este continuă în* $\widetilde{\mathrm{x}}$ *ori pe* $\widetilde{A}$ *sau este integrabilă Riemann pe* A*, iar în acest din urmă caz integrala pe* A *din funcţia sumă este egală cu suma seriei integralelor pe* A *din termenii* f_n*.*

2) *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^p$ *o mulţime mrginită, deschisă şi convexă, iar* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q)$ *un şir de funcţii diferenţiabile Fréchet pe* A*. Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} df_n$*, de elemente din* $\mathcal{F}(A;\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q))$*, este uniform convergentă la* $\widetilde{f} \in \mathcal{F}(A;\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q))$ *şi există* $\mathrm{x}_0 \in A$ *încât seria numerică* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(\mathrm{x}_0)$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ *este uniform convergentă, pe* A*, la o funcţie* f $(\in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^q))$ *care este diferenţiabilă Fréchet pe* A *şi* $df = \widetilde{f}$*.*

Cazuri particulare ale seriilor de funcţii reale sunt acelea ale seriilor de puteri şi seriilor trigonometrice în $\mathbb{R}$, pe care le prezentăm în continuare.

Serii de puteri în $\mathbb{R}$

Definiţia 12.9 *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale şi* $x_0 \in \mathbb{R}$*, fixat arbitrar. Seria de funcţii* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$*, în care* $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$*,* $\forall\, x \in A \subseteq \mathbb{R}$ *,*$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*, se numeşte* ***serie de puteri*** *(sau* ***serie întreagă****),* ***în variabila*** x*,* ***centrată în*** x_0 ***şi cu coeficienţii*** a_n*.*

Numărul real a_n *se numeşte* ***coeficientul termenului de rang*** n *din seria de puteri*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

Observaţii:

a) Toate rezultatele stabilite pentru serii de funcţii oarecari sunt aplicabile, desigur, şi în cazul particular al seriilor de puteri.

b) O chestiune de bază din studiul seriilor de puteri este determinarea mulţimilor de convergenţă punctuală, absolută şi uniformă.

c) Mulţimea de convergenţă punctuală a oricărei serii de puteri este nevidă, întrucât măcar x_0 aparţine respectivei mulţimi. Convenim să notăm cu A_{cp} mulţimea de convergenţă punctuală a unei serii de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$.

d) Prin schimbarea de variabilă $x \longrightarrow y = x - x_0$, se poate considera seria de puteri mai simplă (centrată în $y_0 = 0$) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y^n$. Orice rezultat stabilit pentru această serie este adevărat, în mod corespunzător, şi pentru seria iniţială, aşa încât, în continuare, ne concentrăm atenţia asupra cazului în care $x_0 = 0$, adică asupra seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

Teorema 12.10 ***(Abel)***

Pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *există un element* $r \in [0,+\infty]$*, numit* ***rază de convergenţă*** *a seriei în cauză, astfel încât:*

i) dacă $r = 0$*, seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este convergentă numai pentru* $x = 0$*, adică* $A_{cp} = \{0\}$*;*

ii) dacă $r > 0$*, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este absolut convergentă pe intervalul* $(-r, r)$*;*

iii) dacă $0 < r < +\infty$*, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este divergentă pe* $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$*;*

iv) dacă $r = +\infty$*, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este convergentă pe* $\mathbb{R}$*;*

v) dacă $r > 0$ *şi* $\rho \in (0, r)$*, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe orice interval* $[\alpha, \beta] \subseteq [-\rho, \rho]$*.*

Demonstraţie: Cum $0 \in A_{cp}$ pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, reiese că $A_{cp} \neq \varnothing$. Considerăm:

$$r = \sup\{|x| \mid x \in A_{cp}\}.$$

Este evident că $r \in [0, +\infty]$. Dacă $r = 0$, atunci $A_{cp} = \{0\}$şi deci are loc i). Dacă $r > 0$, atunci, pentru orice $|x_0| < r$, există $x_1 \in A_{cp}\backslash\{0\}$, aşa încât $|x_0| < |x_1| < r$. Cum $x_1 \in A_{cp}$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_1^n$ este convergentă şi, ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. În consecinţă, există $M > 0$, astfel ca $|a_n x_1^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$|a_n x_0^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Întrucât $\left|\frac{x_0}{x_1}\right| < 1$, seria geometrică cu termenul general $\left|\frac{x_0}{x_1}\right|^n$ este convergentă şi, pe baza acestui fapt, prin criteriul întâi de comparaţie, rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n x_0^n|$ este convergentă, ceea ce înseamnă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_0^n$ este absolut convergentă, oricare ar fi $x_0 \in (-r, r)$. Aşadar, are loc ii). Dacă $r = +\infty$, raţionamentul de mai înainte se poate relua, aplicându-se pentru orice $x_1 \in \mathbb{R}$ şi orice $x_0 \in \mathbb{R}$, cu $|x_0| < |x_1|$. Rezultă atunci faptul că seria de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este convergentă pe $\mathbb{R}$ (deci $A_{cp} = \mathbb{R}$). Astfel, are loc şi iv). Dacă $r < \infty$ şi seria nu ar fi divergentă pe $(-\infty, -r) \cup (r, +\infty)$, ar exista un punct $x_2 \in R$, cu $|x_2| > r$, în care $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x_2^n$ ar fi convergentă. De aici ar rezulta că $r < \sup\{|x| \mid x \in A_{cp}\}$, în contradicţie cu definiţia lui r. Aşadar, şi iii) are loc. În fine, în cazul v), cum $0 < \rho < r$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \rho^n$ este absolut convergentă, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \rho^n$ este convergentă. Ca atare, pe baza Teoremei 12.6, deducem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-\rho, \rho] \subseteq (-r, r)$şi, cu atât mai mult, pe orice subinterval $[\alpha, \beta]$al lui $[-\rho, \rho]$. ◀

Observaţii: Potrivit Teoremei 12.10, se poate spune că, pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, avem:

$$(-r, r) \subseteq A_{cp} \subseteq [-r, r].$$

Dacă $r = 0$, atunci $A_{cp} = \{0\}$, iar dacă $r = +\infty$, atunci $A_{cp} = \mathbb{R}$.

Pentru găsirea mulţimii A_{cp}, se determină raza de convergenţă r şi apoi se stabileşte dacă $x = -r$ şi $x = r$ sunt sau nu puncte de convergenţă ale seriei în cauză.

Propoziţia 12.6 *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *o serie de puteri şi* r *raza ei de convergenţă.*

j) Dacă există $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *atunci:*

$$r = \begin{cases} 0, & \text{când } l_1 = +\infty \\ l_1^{-1}, & \text{când } 0 < l_1 < +\infty \\ \infty, & \text{când } l_1 = 0 \end{cases}.$$

Altminteri, dacă nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *se menţine relaţia de stabilire a lui* r, *în care, de astă dată,* $l_1 = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

jj) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ *aşa încât* $a_n \neq 0$, $\forall\, n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ *şi există (în* $\overline{\mathbb{R}}$*)* $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, *atunci: fie* $r = l_2^{-1}$, *când* $0 < l_2 < \infty$, *fie* $r = 0$, *când* $l_2 = \infty$, *fie* $r = \infty$, *când* $l_2 = 0$.

Demonstraţie: j) Prin aplicarea criteriului rădăcinii asupra seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n||x|^n$, deducem că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n}$şi aceasta este subunitară, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$este absolut (şi, implicit) convergentă. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, se poate spune că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l_1$, atunci absoluta convergenţă a (şi, în consecinţă, convergenţa) seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ are loc pentru $|x| < l_1^{-1}$, atunci când $0 < l_1 < \infty$, sau doar pentru $x = 0$, când $l_1 = +\infty$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}$, când $l_1 = 0$. Altfel, dacă nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci există cu siguranţă $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$şi seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ ar fi să fie absolut convergentă pentru orice $x \in (-r, r)$, unde r este dat de formula din enunţ, în care, de astă dată, rolul lui $l_1$este jucat de $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (*Cauchy-Hadamard*).

jj) În condiţiile prezentei teoreme, seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n x^n|$ i se aplică criteriul raportului (*D' Alembert*). Astfel, se obţine convergenţa seriei de faţă, în situaţia în care $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1$. Cu alte cuvinte, atunci când $|x| < \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Prin urmare, luând în consideraţie $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, reiese că $r = l_2^{-1}$, atunci când $0 < l_2 < \infty$, ori $r = 0$, când $l_2 = \infty$, sau $r = \infty$, când $l_2 = 0$. ◀

Propoziţia 12.7 *Orice serie de puteri* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, *cu raza de convergenţă* $r \in \mathbb{R}_+^*$, *are suma o funcţie care este continuă pe* $(-r, r)$.

Demonstraţie: În virtutea Teoremei 12.10 v), seria din enunţ este uniform convergentă pe orice subinterval compact $[-\rho, \rho]$ al intervalului de convergenţă $(-r, r)$ (cu $0 < \rho < r$). Cum $f_n(x) = a_n x^n$ sunt toate funcţii continue pe $[-\rho, \rho]$, se poate aplica Teorema 12.3 (de transfer de continuitate), rezultând astfel că funcţia f, sumă a seriei la care ne referim, este continuă pe $[-\rho, \rho]$, $\forall \rho \in (0, r)$. Altfel spus, f este continuă pe $(-r, r)$. ◀

Teorema 12.11 *(**Abel**)*

Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*, cu raza de convergenţă* r*. Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *este convergentă în punctul* $x = r$ *(respectiv* $x = -r$*), atunci suma sa, funcţia* f*, este continuă în* $x = r$ *(respectiv* $x = -r$*).*

Demonstraţie: Admitem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$converge în $x = r$. Deci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ este convergentă şi, ca atare aici, uniform convergentă pe $[0, r]$. Cum şirul $\left(\left(\frac{x}{r}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este, $\forall x \in [0, r]$, monoton descrescător şi uniform mărginit pe $[0, r]$ (întrucât $0 \le \left(\frac{x}{r}\right)^n \le 1$, $\forall x \in [0, r]$, $\forall n \in \mathbb{N}$), rezultă, potrivit criteriului lui Abel de convergenţă uniformă (v. Teorema 12.8), că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, în care $a_n x^n$ poate fi rescris, când $x \in [0, r]$, sub forma $a_n r^n \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n$, este uniform convergentă pe $[0, r]$. Atunci, conform Teoremei 12.3, reiese că funcţia sumă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este continuă pe $[0, r]$ (prin transferul de continuitate pe $[0, r]$ a funcţiilor termeni $a_n x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$). La fel se face demonstraţia pentru cazul în care locul lui r este luat de $-r$. ◀

Teorema 12.12 *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*, cu raza de convergenţă* r*. Atunci:*

a) Seriile de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$ *(a derivatelor termenilor* $a_n x^n$*) şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *(a integralelor de la 0 la* x *din termenii* $a_n x^n$*) au tot raza de convergenţă* r*.*

b) Dacă $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*,* $\forall x \in (-r, r)$*, cu* $r > 0$*, atunci* $f'(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1}$*,* $\forall x \in (-r, r)$*, adică seria dată de puteri poate fi derivată, termen cu termen, pe intervalul deschis de converegenţă* $(-r, r)$*, iar*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \forall x \in (-r, r),$$

adică seria de puteri $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*poate fi integrată termen cu termen, pe orice interval* $[0, x]$*, unde* $x \in (-r, r)$*.*

Demonstraţie: a) Prin utilizarea Propoziţiei 12.6, în situaţia în care $0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, găsim:

$$r' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r \text{ şi}$$

$$r'' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r.$$

La fel în celelalte două situaţii, în care este lesne de văzut că $r' = r'' = r = 0$, atunci când $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ şi respectiv că $r' = r'' = r = \infty$, atunci când $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

b) Cum seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} na_n x^{n-1}$este uniform convergentă pe orice subinterval compact al intervalului $(-r', r') = (-r, r)$, iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$este convergentă cel puţin în $x = 0$, rezultă, prin aplicarea Teoremei 12.9 b), că f, funcţia sumă a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ este derivabilă pe $(-r, r)$ şi, în plus, $f'(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} na_n x^{n-1}$, $\forall\, x \in (-r, r)$, în mod uniform. În conformitate cu aceeaşi teoremă (punctul a)), funcţia f este integrabilă de la 0 la x, $\forall\, x \in (-r, r)$ şi, mai mult, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, $\forall\, x \in (-r, r)$. ◄

Observaţii:

1. De fapt, prin Teorema 12.12, rezultă că f, suma seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, este derivabilă de o infinitate de ori pe $(-r, r)$ şi are derivatele de orice ordin continue pe $(-r, r)$. Altfel spus, avem: $f \in \mathcal{C}^\infty(-r, r)$.

2. Cum $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n x^{n-k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in (-r, r)$, deducem că are loc formula: $f^{(k)}(0) = k! a_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

   În virtutea acesteia, rezultă că dacă două serii de puteri, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$, au aceeaşi rază de convergenţă r şi aceeaşi sumă f pe intervalul $(-r, r)$, atunci ele coincid, întrucât $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0) = b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. Operaţiile care se pot face cu serii de puteri respectă regulile din cazul general al seriilor de funcţii şi al seriilor numerice.

4. Un caz particular important este cel al ***seriei binomiale***, de expresie

$$1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} x^n, \text{ unde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Pentru $\alpha \in \mathbb{N}$, seria binomială se reduce la un polinom.

   Când $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, se constată că raza de convergenţă a seriei binomiale este $r = 1$, deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = 1.$$

   Dacă notăm cu f suma acestei serii şi aplicăm Teorema 12.12, deducem, prin calcul direct, că:

$$(1 + x) f'(x) = \alpha f(x), \forall\, x \in (-1, 1).$$

De aici, întrucât $f(x) \neq 0$ pe $(-1,1)$ (căci, altfel, dacă ar exista $x_0 \in (-1,1)$ aşa încât $f(x_0) = 0$, ar reieşi faptul că $f^{(k)}(x_0) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, adică $f(x) = 0$, $\forall\, x \in (-1,1)$, ceea ce ar fi imposibil, atâta timp cât $f(0) = 1$), deducem că:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x+1}, \forall\, x \in (-1,1).$$

Pe baza acestei relaţii, prin integrare, găsim:

$$\ln\left(f(x)\right) = \alpha \ln(x+1) + \ln c, \forall\, x \in (-1,1),\ \ c > 0.$$

Prin urmare, avem $f(x) = c(1+x)^\alpha$, $\forall\, x \in (-1,1)$, cu $c = 1$, deoarece $f(0) = 1$. În concluzie, are loc formula

$$(\triangle) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \forall\, x \in (-1,1),$$

care generalizează, cu evidenţă, formula binomului lui Newton, adevărată pentru $\alpha \in \mathbb{N}$. Astfel, denumirea de *serie binomială* se justifică.

Pentru diverse valori ale lui α şi diferite operaţii aplicate asupra formulei $(\triangle)$, se deduc sumele unor importante serii de puteri.

Un alt caz particular este cel al ***seriilor MacLaurin*** şi al ***seriilor Taylor***.

Definiţia 12.10 *i) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă în $0 \in \mathring{A}$. Numim* ***serie MacLaurin ataşată funcţiei*** *f,* ***în punctul*** *0, seria de puteri*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in A.$$

ii) Pentru $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţie derivabilă de orice ordin în $x_0 \in \mathring{A}$, numim ***serie Taylor asociată funcţiei*** *f,* ***în punctul*** *x_0, seria de puteri:*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, x \in A.$$

Firesc, în legătură cu asemenea serii particulare de puteri, interesează care este mulţimea de convergenţă (punctuală, absolută şi uniformă) şi care le este suma. Nu, cumva, tot f ?. În acest sens, are loc următorul rezultat:

Propoziţia 12.8 *Fie A un interval simetric faţă de $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$. Dacă există $M > 0$ aşa încât $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci:*

$$(\triangledown) \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,\ \ \forall x \in A = (x_0 - a, x_0 + a).$$

Demonstraţie: Folosind formula lui Taylor (cu rest de tip Lagrange), vedem că

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} a^{n+1},$$

$\forall\, x \in A = (x_0 - a, x_0 + a)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, cu $a > 0$ şi $\xi = x_0 + \lambda(x - x_0)$, $\lambda \in (0,1)$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, rezultă că formula $(\bigtriangledown)$ are loc într-adevăr. Când $x_0 = 0$, în ipotezele din enunţul acestei propoziţii, se ajunge la concluzia că are loc formula lui MacLaurin:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall\, x \in (-a,a), a > 0.$$

◀

Serii trigonometrice. Serii Fourier trigonometrice

Definiţia 12.11 *j) O serie de forma*

$$(\&) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right), \ x \in A \subseteq \mathbb{R},$$

unde $l \in \mathbb{R}_+^*$, iar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$, se numeşte ***serie trigonometrică****.*

jj) Seria trigonometrică pentru care $A = [-l, l]$, iar, în raport cu o funcţie dată $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$, coeficienţii $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt daţi de formulele

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx, \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ şi}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

se numeşte ***serie Fourier trigonometrică****. Coeficienţii în cauză se numesc* ***coeficienţi Fourier****.*

În general, studiul seriilor trigonometrice se face cu ajutorul criteriilor de la seriile de funcţii oarecare. Toate proprietăţile de la serii de funcţii sunt adevărate şi pentru seriile trigonometrice. În plus, seriile trigonometrice au următoarele proprietăţi specifice importante:

1) Dacă seria (&) este convergentă (uniform convergentă sau absolut convergentă) pe un interval compact oarecare, de lungime $2l$, (de exemplu $[-l, l]$), atunci ea este convergentă (respectiv uniform convergentă sau absolut convergentă) pe $\mathbb{R}$, iar suma ei este o funcţie periodică de perioadă $2l$.

2) Dacă şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$ sunt monotone şi converg la 0, atunci seria (&) este convergentă pe $\mathbb{R} \setminus \{2kl, k \in \mathbb{Z}\}$ şi uniform convergentă pe orice interval compact ce nu conţine puncte de forma $2kl$, cu $k \in \mathbb{Z}$.

3) (**Criteriul lui Dirichlet**) Dacă funcţia $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ este monotonă pe porţiuni, pe $[-l, l]$ şi are, în acest interval, cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate care sunt de prima speţă, atunci seria Fourier trigonometrică asociată lui f converge, în fiecare punct $x_0 \in [-l, l]$, către $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$. În particular, dacă f este continuă pe $[-l, l]$, atunci suma seriei Fourier în cauză este chiar f.

4) Dacă f este o funcţie pară, adică $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in [-l, l]$, atunci $b_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$şi $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

5) Dacă f este impară pe $[-l, l]$, adică $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in [-l, l]$, atunci $a_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

De exemplu, pentru $l = \pi$ şi $f(x) = x^2$, avem $b_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$şi

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{3}, & \text{când } n = 0 \\ \\ \dfrac{4}{n^2}(-1)^n, & \text{când } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Folosind criteriul lui Dirichlet de mai sus, deducem că:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx), \forall\, x \in [-\pi, \pi].$$

De aici, în particular, pentru $x = \pi$, găsim relaţia

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2},$$

pe baza căreia obţinem faptul că seria numerică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ are suma $\frac{\pi^2}{6}$.

Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 10)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

2. V. Postolică - *Eficienţă prin matematică aplicată. Analiză matematică (Cap. 10, 11 şi 12)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

3. Emil Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 3)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. E. Macovei, F. Iacob - *Matematică pentru anul I - ID (Tema 6)*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2005.

5. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.