Cursul 8

Forme liniare, biliniare şi pătratice
(Aspecte algebrice şi geometrice)

Forme (funcţionale) liniare

Aplicaţiile liniare de la un spaţiu vectorial oarecare la un spaţiu vectorial unidimensional merită o atenţie specială, deoarece spaţiul din urmă s-ar putea identifica, la nevoie, cu corpul K, al scalarilor, peste care sunt considerate cele două spaţii liniare în cauză. Iată de ce, aici, facem acum o succintă prezentare a câtorva chestiuni privitoare la asemenea gen de aplicaţii liniare.

Fie $(V, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste un corp comutativ (de scalari) K.

Definiţia 8.1 *a) O aplicaţie liniară $f : V \to K$, adică un element al mulţimii $\mathcal{L}(V; K)$, se numeşte **formă liniară** (sau **funcţională liniară**) pe V. Când $K = \mathbb{R}$, elementul $f \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ se numeşte **formă (funcţională) liniară reală**.*

*b) Mulţimea $\mathcal{L}(V; K)$, a tuturor formelor liniare pe V, privită ca spaţiu liniar peste K - în raport cu operaţia de adunare uzuală a două funcţii şi operaţia de înmulţire a unei funcţii cu un element din K - se numeşte **spaţiu dual** (sau **conjugat**) (ori, pur şi simplu, **dualul** sau **conjugatul**) lui V şi se notează, îndeobşte, cu V^*.*

Propoziţia 8.1 *Dacă spaţiul vectorial V este finit dimensional, atunci la fel este şi dualul său V^*. În acest caz, avem $dim(V^*) = dim(V) \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstraţie: Fie $n = dim(V) \in \mathbb{N}^*$ şi $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui V. Pentru un element oarecare v din V, fie $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ coordonatele lui v în baza B. Se pot defini atunci funcţionalele $v_j^* : V \to K$, prin $v_j^*(\mathrm{v}) = v_j$, $\forall\, j = \overline{1,n}$. Acestea sunt, desigur, elemente ale lui V^*, întrucât: $v_j^*(\alpha\mathrm{v} + \beta\mathrm{u}) = (\alpha\mathrm{v} + \beta\mathrm{u})_j = \alpha v_j + \beta u_j = \alpha v_j^*(\mathrm{v}) + \beta v_j^*(\mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V, \alpha, \beta \in K, j = \overline{1,n}$. În plus, $v_j^*(\mathrm{b}_i) = 0$, când $i \neq j$ şi $v_j^*(\mathrm{b}_j) = 1$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Mulţimea $B^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ este o bază a spaţiului V^*. Într-adevăr, B^* este liniar independentă, deoarece relaţia $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j^* = \mathbf{0}_{V^*}$ (cu $\gamma_j \in K$, $\forall\, j = \overline{1,n}$), care implică faptul că $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_{V^*}(\mathrm{v}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j^*\right)(\mathrm{v}) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j^*(\mathrm{v}) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$, adică şi $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_{V^*}(\mathrm{b}_i) = \gamma_i$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, are loc, deci, doar când $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$. Totodată, B^* este şi un sistem de generatori pentru V^*, căci, pentru orice $f \in V^*$ şi $\mathrm{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathrm{b}_j \in V$, avem: $f(\mathrm{v}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \mathrm{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j f(\mathrm{b}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j^*(\mathrm{v}) f(\mathrm{b}_j) = \left(\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{b}_j) \cdot v_j^*\right)(\mathrm{v})$. ◄

Definiţia 8.2 *Sistemul B^* se numeşte **baza duală** a bazei B, iar $\{f(\mathrm{b}_j)\}_{1 \leq j \leq n} \subset K$ se numesc **coeficienţi ai formei liniare f în baza B^***.*

Observaţie: Se poate simplu vedea că, dacă $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\} \subset K$ este o mulţime indicată de scalari, iar $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a spaţiului liniar n-dimensional V, atunci există şi este unică o formă liniară $f \in V^*$, ai cărei coeficienţi, în baza duală B^*, sunt tocmai scalarii $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Aceasta este: $f = \sum_{j=1}^{n} \omega_j v_j^*$.

În virtutea unei atare remarci, se evidenţiază următorul rezultat:

Propoziţia 8.2 *Dacă $v \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ şi V este spaţiu liniar finit dimensional peste un corp comutativ K, atunci există $f \in V^*$, astfel încât $f(\mathrm{v}) \neq 0 \in K$.*

Demonstraţie: Cum $v \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ şi V are o bază finită B, există cel puţin o coordonată nenulă a lui v, în baza B. Drept urmare, putem lua $f : V \to K$, $f = v_j^*$, unde $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ este indicele ce corespunde acelei coordonate nenule a lui v. Astfel, am avea: $f(\mathrm{v}) = v_j^*(\mathrm{v}) = v_j \neq 0$. ◀

Observaţie: Enunţul Propoziţiei 8.2 are următoarea variantă echivalentă: *"Dacă V este un K-spaţiu liniar finit dimensional şi u, v sunt două elemente arbitrare şi distincte din V, atunci există $f \in V^*$, astfel încât $f(u) \neq f(v)$".*

Cum un element $f \in V^*$ este o aplicaţie liniară de la V la K, se poate afirma că, în cazul în care V este finit dimensional, lui f i se asociază, prin intermediul bazelor B, din V şi $\{1\}$, din K, potrivit relaţiei de tipul aceleia din finalul Propoziţiei 8.1, matricea linie

$$A_f^B = [f(\mathrm{b}_1), f(\mathrm{b}_2), \ldots, f(\mathrm{b}_n)],$$

unde $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$ sunt vectorii din B. În conformitate cu aceeaşi relaţie, raportându-ne la baza duală B^*, vedem că

$$f_{B^*} = \begin{bmatrix} f(\mathrm{b}_1) \\ f(\mathrm{b}_2) \\ \vdots \\ f(\mathrm{b}_n) \end{bmatrix} \text{(adică } f = \sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{b}_j) v_j^*\text{)}.$$

Aşadar, matricea asociată lui f , în raport cu B^*, este $\left(A_f^B\right)^T$, adică transpusa matricii A_f^B. Cu alte cuvinte, lui f, privit ca o funcţională liniară pe K-spaţiul liniar, finit dimensional, V, îi corespunde o matrice formată dintr-o linie, iar dacă f este privit ca element din spaţiul dual V^*, atunci lui f îi corespunde o matrice coloană (faţă de baza duală), iar cele două matrice implicate în consideraţie sunt transpuse una alteia.

Formula de shimbare a lui A_f^B, la o transformare de bază în V (şi, implicit, în V^*), se deduce a fi următoarea

$$A_f^{B'} = A_f^B S,$$

pentru trecerea de la baza B la baza B', în V, cu matricea de schimbare S, precum şi, corespunzător, următoarea

$$f_{B'^*} = S^T f_{B^*},$$

pentru trecerea de la baza duală B^* la baza duală B'^*, în spaţiul V^*. Prin urmare, dacă matricea de trecere de la baza B la baza B', în V, este S, atunci matricea de trecere de la duala lui B' la duala lui B este egală cu transpusa lui S.

Definiţia 8.3 ***(Bidualul unui spaţiu vectorial)*** *Fie V un K-spaţiu vectorial şi V^* dualul său. Dualul lui V^*, notat cu V^{**} (fiind tot un K-spaţiu vectorial), se numeşte **bidualul** lui V.*

Când V este finit dimensional, avem $dim(V^{**}) = dim(V^*) = dim(V)$ şi, în virtutea acestei relaţii, bidualul lui V, adică spaţiul V^{**} - care, în general, este un "supraspaţiu" al lui V (sau, mai exact spus, este izomorf cu un supraspaţiu liniar al lui V) - se poate arăta că este izomorf cu V. În acest sens, se foloseşte aplicaţia $\psi : V \longrightarrow V^{**}$, definită prin $\psi(\mathrm{v}) = \mathrm{v}^{**}$, $\forall \mathrm{v} \in V$, unde $\mathrm{v}^{**} \in V^{**}$ se introduce pe baza relaţiei: $\mathrm{v}^{**}(f) = f(\mathrm{v})$, $\forall\, f \in V^*$.

Despre ψ, se deduce că este liniară, deoarece $(\psi(\alpha \cdot \mathrm{v} + \beta \cdot u))(f) = f(\alpha \cdot \mathrm{v} + \beta \cdot u) = \alpha \cdot f(\mathrm{v}) + \beta \cdot f(u) = \alpha \cdot (\psi(\mathrm{v}))(f) + \beta \cdot (\psi(u))(f)$, $\forall \alpha, \beta \in K$, u,v $\in$ V, $f \in V^*$ şi, de asemenea, surjectivă, pe baza relaţiei $dim(V^{**}) = dim(V)$. Cât priveşte injectivitatea lui ψ, ea are loc, întrucât $\psi(\mathrm{v}) = \mathbf{0}_{V^{**}}$ implică $(\psi(\mathrm{v}))(f) = \mathbf{0}_{V^{**}}(f)$, adică $f(\mathrm{v}) = 0$, cu v $\in$ V şi $\forall f \in V^*$. Dacă, de aici, n-ar rezulta $\mathrm{v} = \mathbf{0}_V$, atunci, presupunând că $\mathrm{v} \neq \mathbf{0}_V$, ar exista un element $\widetilde{f} \in V^*$, astfel încât, în conformitate cu Propoziţia 8.2, am avea $\widetilde{f}(\mathrm{v}) \neq 0$, în contradicţie cu faptul că $f(\mathrm{v}) = 0$, $\forall f \in V^*$. Astfel, cu necesitate, reiese că nucleul lui ψ este $\{\mathbf{0}_V\}$, ceea ce înseamnă că ψ este într-adevăr injectivă. În plus, potrivit teoremei dimensiunilor, chiar avem $dim(V) = dim(Im(\psi)) + dim(Ker(\psi)) = dim(Im(\psi)) = dim(V^{**})$, deoarece $dim(Ker(\psi)) = 0$, ceea ce înseamnă că ψ este, într-adevăr, şi surjectivă. Deci ψ este un izomorfism de la V la V^{**}, care, nemijlocit fiind de vreun sistem de coordonate din V, se numeşte ***izomorfismul canonic*** de la spaţiul liniar V la bidualul său V^{**}. În virtutea acestui izomorfism, de cele mai multe ori, V şi V^{**} se identifică, luându-se $\mathrm{v}^{**} \equiv \mathrm{v}$, $\forall \mathrm{v} \in V$. Pe baza unei asemenea identificări, putem privi, după caz, orice element v din V fie ca pe un vector în V, fie ca pe o funcţională liniară definită pe V^*, în concordanţă cu starea elementelor din V^* care, prin definiţie, sunt funcţionale liniare definite pe V. Fiecare dintre spaţiile V şi V^* apare ca dualul celuilalt, iar în virtutea identificării menţionate avem $\mathrm{v}(f) = f(\mathrm{v})$, $\forall \mathrm{v} \in V$, $f \in V^*$, relaţie pe baza căreia se poate spune că legătura dintre V şi V^* este simetrică (numită ***relaţie de dualitate*** între V şi V^*).

Din punct de vedere geometric, nucleul unei funcţionale nenule şi liniare pe un spaţiu vectorial V este un aşa-numit ***hiperplan***, adică un subspaţiu propriu, maximal al lui V. Când $dim(V) = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, deoarece $dim(Im(f))) = 1$, $\forall f \in V^*$, avem: $dim(Ker(f)) = dim(V) - dim\,(Im(f)) = n-1$. În acest caz, în raport cu o bază $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ din V, mulţimea $Ker(f)$, adică hiperplanul în cauză, este

$$\{\mathrm{x} \in V \mid f(\mathrm{x}) = 0\},$$

adică $\{\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i \mid \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathrm{b}_i) = 0\}$. Notând $f(\mathrm{b}_i)$ cu a_i, $\forall i = \overline{1,n}$, se poate spune că acest hiperplan este caracterizat de ***ecuaţia***

$$(*) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Reciproc, pentru orice set de scalari $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq K$, existenţa unei funcţionale liniare $f \in V^*$, ai cărei coeficienţi de reprezentare în baza duală lui B sunt $a_1, a_2, \ldots, a_n$, implică faptul că, plecând de la o ecuaţie de forma $(*)$, hiperplanului în speţă i se poate asocia chiar funcţionala f, aşa încât $Ker(f)$ să fie respectivul hiperplan.

Când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^3$, ecuaţia $(*)$ caracterizează un ***plan ce trece prin punctul*** $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ (originea lui $\mathbb{R}^3$). În cazul în care $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^2$, "hiperplanul" de ecuaţie $(*)$ este o ***dreaptă ce trece prin originea planului real*** $\mathbb{R}^2$.

Mai general, se poate arăta că orice subspaţiu liniar al unui spaţiu vectorial finit dimensional, nu numai un subspaţiu liniar maximal, se caracterizează prin sistemne de ecuaţii de forma $(*)$. În acceaşi notă de generalitate, când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^2$ sau $V = \mathbb{R}^3$, o dreaptă şi, respectiv, un plan care nu trece numaidecât prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ şi respectiv prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ sunt, din punct de vedere algebric, nuclee ale unor aşa-numite ***funcţionale afine***, generic introduse prin definiţia ce urmează.

Definiţia 8.4 *Fie V un spaţiu vectorial peste un corp comutativ K şi $c_0 \in K$. De asemenea, fie $f \in V^*$ şi $f_0 : V \to K$, definită prin $f_0(\mathrm{v}) = c_0$, $\forall \mathrm{v} \in V$. Suma $f + f_0$ se numeşte* ***funcţională afină*** *pe V.*

Altfel spus, o funcţională afină pe un spaţiu liniar V este suma dintre o funcţională liniară pe V (anume f) şi o funcţională constantă pe V (adică f_0).

Dacă V este n-dimensional $(n \in \mathbb{N}^*)$, cu o bază $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$, atunci: $Ker(f + f_0) = \{\mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{b}_i \in V \mid (f + f_0)(\mathrm{v}) = 0\} = \{\mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{b}_i \in V \mid \sum_{i=1}^{n} v_i f(\mathrm{b}_i) + c_0 = 0\}$.

Cu notaţia $f(\mathrm{b}_i) = a_i$, $\forall\, i = \overline{1, n}$, mulţimea $Ker(f + f_0)$ este caracterizată de ecuaţia:

$$(**) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + c_0 = 0.$$

Aceasta corespunde unei ***drepte reale*** când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^2$, ori unui ***plan*** (care nu trece numaidecât prin $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$) când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^3$, ori, în general, când $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^n$, unui ***hiperplan real***.

Noţiunea de funcţională afină reprezintă un caz particular al aceleia de aplicaţie (transformare) afină, a cărei definiţie este următoarea:

Definiţia 8.5 *a) Un triplet (X, V, φ), în care X este o mulţime nevidă, V este un spaţiu vectorial, iar φ este o funcţie de la $X \times X$ la V astfel încât*

(i) $\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = \varphi(x, z)$, $\forall\, x, y, z \in X$ *şi*

(ii) $\forall\, x \in X, \mathrm{v} \in V$, $\exists\, y \in X$, *unic, aşa ca* $\varphi(x, y) = \mathrm{v}$,

se numeşte ***spaţiu afin****.*

b) Un spaţiu afin aflat în situaţia în care $X = V$ şi $\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \mathrm{u} - \mathrm{v}$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ poartă denumirea de ***spaţiu afin ataşat spaţiului vectorial*** *V.*

Când $X = V = \mathbb{R}^n$, iar V este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$, atunci este vorba despre ***spaţiul afin real*** *$\mathbb{R}^n$.*

c) Se numeşte ***endomorfism de spaţii afine*** *un morfism (aplicaţie liniară) de la unul dintre spaţii la celălalt.*

d) O aplicaţie f de la spaţiul afin (X, V, φ) la spaţiul afin (Y, W, φ) se numeşte ***morfism afin*** *(sau* ***aplicaţie/funcţie/transformare afină****) dacă, pentru orice subspaţiu afin al lui (X, V, φ), imaginea sa prin f este un subspaţiu afin al lui (Y, W, φ).*

În cazul în care spaţiile afine din Definiţia 8.5-d) sunt finit dimensionale, funcţia afină f este dată printr-o relaţie de tipul

$$f(\mathrm{v}) = A\mathrm{v} + \mathrm{w}_0, \forall\, \mathrm{v} \in V$$

unde A este o matrice ($\in \mathcal{L}(V, W)$), iar $\mathrm{w}_0 \in W$.

În cazul particular în care $W = V$ şi A este matricea unitate, transformarea (punctuală) afină $f : V \to V$, definită prin $f(\mathrm{v}) = \mathrm{v} + \mathrm{w}_0$ se numeşte ***translaţie*** (sau ***deplasare paralelă cu direcţia dată de*** w_0).

Dacă $W \equiv V$, $\mu_0 \in K$, $\mathrm{v}_0 \in V$, $\mathrm{w}_1 \in W$, $A = \mu_0 I$ şi $\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_1 - \mu_0 \mathrm{v}_0$, atunci transformarea afină în cauză, $f : V \to V$, definită prin $f(\mathrm{v}) = w_0 + \mu_0(\mathrm{v} - \mathrm{v}_0)$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$ se numeşte ***omotetie***.

Un morfism de spaţii afine, $f : V \to W$ este denumit ***simetrie***, în cazul când $W = V$ şi $f \circ f = \mathbf{1}_V$.

Forme biliniare

Definiţia 8.6 *Fie V şi W două spaţii vectoriale peste un acelaşi corp comutativ K. O aplicaţie $g : V \times W \to K$ care satisface relaţiile*

(j) $g(\alpha \mathrm{v} + \beta \mathrm{u}, \mathrm{w}) = \alpha g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) + \beta g(\mathrm{u}, \mathrm{w})$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$, $\mathrm{w} \in W$ *şi*

(jj) $g(\mathrm{v}, \lambda \mathrm{w} + \mu \mathrm{z}) = \lambda g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) + \mu g(\mathrm{v}, \mathrm{z})$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$, $\mathrm{v} \in V$, $\mathrm{w}, \mathrm{z} \in W$

se numeşte ***formă*** *(sau* ***funcţională****)* ***biliniară*** *pe $V \times W$.*

Când $W \equiv V$, aplicaţia $g : V \times V \to K$ care satisface (j) şi (jj) se numeşte ***formă*** (***funcţională***) ***biliniară*** pe V.

Dacă V şi W sunt finit dimensionale, cu bazele $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ şi respectiv $\widehat{B} = \{\widehat{\mathrm{b}}_1, \widehat{\mathrm{b}}_2, \ldots, \widehat{\mathrm{b}}_m\}$, atunci:

$$g(\mathrm{v}, \mathrm{w}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathrm{b}_i, \sum_{j=1}^{m} w_j \widehat{\mathrm{b}}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} v_i w_j g(\mathrm{b}_i, \widehat{\mathrm{b}}_j), \forall\, \mathrm{v} \in V, \mathrm{w} \in W,$$

unde $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K$ sunt coordonatele lui v în baza B, iar $w_1, w_2, \ldots, w_m \in K$ sunt coordonatele lui w în baza $\widehat{B}$ (din W). Scalarii $a_{ij} = g(\widehat{\mathrm{b}}_i, \widehat{\mathrm{b}}_j)$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ se numesc ***coeficienţi ai formei biliniare*** g în raport cu perechea de baze $(B, \widehat{B})$, iar matricea acestor coeficienţi este numită ***matricea formei biliniare*** g în cuplul de baze $(B, \widehat{B})$.

Dacă B' şi $\widehat{B}'$ sunt alte baze în V şi respectiv W, iar S şi respectiv $\widehat{S}$ sunt matricile de trecere de la B la B' şi respectiv de la $\widehat{B}$ la $\widehat{B}'$, atunci matricea $A_{B', \widehat{B}'}$, corespunzătoare formei biliniare g în raport cu perechea de baze $(B', \widehat{B}')$ este dată de formula

$$(\#) \quad A_{B', \widehat{B}'} = S^T A_{B, \widehat{B}} \widehat{S}$$

în care $A_{B, \widehat{B}}$ este matricea formei biliniare g în perechea de baze $(B, \widehat{B})$, iar S^T transpusa matricii S. Prin urmare, matricea formei g faţă de noile baze B' şi $\widehat{B}'$ se obţine din matricea lui g relativă la vechile baze B şi $\widehat{B}$, prin înmulţirea, la stânga, cu transpusa matricii schimbării de baze în V şi, la dreapta, cu matricea schimbării de baze în W.

Aplicaţia biliniară $g : V \times W \to K$ defineşte, în raport cu parametrul $\mathrm{w} \in W$, o familie de funcţii liniare $f_{\mathrm{w}} : V \to K$, date prin $f_{\mathrm{w}}(\mathrm{v}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{w})$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$, precum şi o familie de funcţii liniare $h_{\mathrm{v}} : W \to K$, depinzând de parametrul $\mathrm{v} \in V$, introduse prin formula $h_{\mathrm{v}}(\mathrm{w}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{w})$, $\forall\, \mathrm{w} \in W$. Atunci, aplicaţia $\mathrm{w} \to f_{\mathrm{w}}$ este un morfism g' de la spaţiul liniar W la dualul V^* al lui V. Prin acest morfism, fiecărui element $w \in W$ îi corespunde forma liniară $g'(\mathrm{w}) = f_{\mathrm{w}} \in \mathcal{L}(V, K) = V^*$. De asemenea, aplicaţia $g'' : V \to W^* = \mathcal{L}(W, K)$, definită prin $g''(\mathrm{v}) = h_{\mathrm{v}}$, $\forall\, \mathrm{v} \in V$ este un morfism de spaţii liniare.

Definiţia 8.7 *Fie $g : V \times W \to K$ o aplicaţie biliniară pe $V \times W$ şi morfismele liniare derivate g' şi g''. Subspaţiul liniar $Ker(g')$ (al lui W) se numeşte* **nucleul** *lui g* **la dreapta***, iar subspaţiul lui V, $Ker(g'')$ se numeşte* **nucleul la stânga** *al lui g. Dacă $Ker(g') = \{\mathbf{0}_W\}$ şi $Ker(g'') = \{\mathbf{0}_V\}$, atunci forma biliniară g se numeşte* **nedegenerată***.*

Definiţia 8.8 *O formă biliniară $g : V \times V \to K$ se numeşte* **simetrică** *dacă $g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = g(\mathrm{v}, \mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$ şi* **antisimetrică** *dacă $g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = -g(\mathrm{v}, \mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V$.*

Propoziţia 8.3 *Dacă $g : V \times V \to K$ este o formă biliniară simetrică (sau antisimetrică) pe V, atunci nucleul său la stânga coincide cu nucleul său la dreapta.*

În acest caz, oricare dintre nucleele coincidente (fie cel la stânga, fie cel la dreapta) se numeşte, pur şi simplu, **nucleul lui** *g şi se notează cu simbolul $Ker(g)$.*

Demonstraţie: Pentru orice $\mathrm{v} \in Ker(g') = \{\mathrm{y} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{x} \in V\}$, avem $g(\mathrm{x}, \mathrm{v}) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$. Dar cum g este simetrică (sau antisimetrică), rezultă că avem $g(\mathrm{v}, \mathrm{x}) = 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$, ceea ce înseamnă că $\mathrm{v} \in Ker(g'') = \{\mathrm{x} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{y} \in V\}$. Prin urmare, $Ker(g') \subseteq Ker(g'')$. Incluziunea contrară se demonstrează la fel. Astfel, conchidem că avem: $Ker(g') = Ker(g'')$. ◀

Propoziţia 8.4 *Dacă $g : V \times V \to K$ este o formă biliniară şi simetrică pe spaţiul vectorial V, finit dimensional, peste K, atunci*

$$rang(g) + dim\,(Ker(g)) = dim(V),$$

unde $rang(g)$ este rangul matricii asociate lui g în raport cu o bază B din V.

Demonstraţie: Fie $n = dim(V)$ şi $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ o bază a lui V, în care matricea lui g este $A = (g(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$. Atunci, pentru orice $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{v}_i, \mathrm{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathrm{v}_i \in V$, avem:

$$g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} x_i y_j, \text{ cu } a_{ij} = g(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j), \forall\, 1 \le i, j \le n$$

Cum $Ker(g) = \{\mathrm{x} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{y} \in V\}$ şi $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right) y_j$, putem spune că $\mathrm{x} \in Ker(g)$ dacă şi numai dacă $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0,\ \forall\, j = \overline{1, n}$, adică dacă x este o soluţie a cestui sistem de ecuaţii omogene. Ca atare, $Ker(g)$ coincide cu mulţimea soluţiilor unui astfel de sistem, relativ la care se ştie că rangul matricii sale, adică $rang(g)$, este egal cu numărul necunoscutelor minus dimensiunea spaţiului soluţiilor. Aşadar, avem: $rang(g) + dim\,(Ker(g)) = dim(V)$. ◀

Observaţie: Ţinând seama de Propoziţia 8.4, se poate afirma că o condiţie necesară şi suficientă ca o formă biliniară şi simetrică $g : V \times V \to K$ să fie nedegenerată este ca rangul ei să fie maxim, adică egal cu $dim(V)$.

Definiţia 8.9 *a) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $g : V \times V \to K$ o formă biliniară şi simetrică pe V. Doi vectori* u *şi* v *din V se numesc **ortogonali** (sau **conjugaţi**) în raport cu g dacă $g(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = 0$.*

*b) Dacă U este un subspaţiu liniar al lui V, atunci mulţimea $\{\mathrm{y} \in V \mid g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \forall\, \mathrm{x} \in U\}$, care se dovedeşte a fi un subspaţiu vectorial al lui V, se numeşte **complementul ortogonal al lui U faţă de** g şi se notează cu $U^{\perp_g}$.*

Observaţie: Când V este finit dimensional şi $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_p\}$ este o bază a subspaţiului liniar $U \subseteq V$, atunci $\mathrm{y} \in U^{\perp_g}$ dacă şi numai dacă $g(\mathrm{u}_l, \mathrm{y}) = 0,\ \forall\, l = \overline{1, p}$.

Teorema 8.1 *Fie V un K-spaţiu vectorial finit dimensional şi $g : V \times V \to K$ o formă biliniară şi simetrică pe V. Atunci, oricare ar fi baza $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, ortogonală faţă de g (adică aşa încât $g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_j) = 0$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \ne j$), exact un număr egal cu $rang(g)$ dintre scalarii $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2), ..., g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$ sunt diferiţi de zero.*

Demonstraţie: Fie $r = rang(g)$ şi s numărul scalarilor $g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_i)$ diferiţi de 0. Astfel, $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1) \ne 0, g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2) \ne 0, \ldots, g(\mathrm{b}_s, \mathrm{b}_s) \ne 0$ şi $g(\mathrm{b}_j, \mathrm{b}_j) = 0,\ \forall\, j = \overline{s+1, n}$. Atunci:

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{b}_i \in Ker(g) \Longleftrightarrow g(\mathrm{b}_i, \mathrm{x}) = x_i g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_i) = 0, \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Deci $Ker(g) = \{\mathrm{x} = \sum_{i=1} x_i \mathrm{b}_i \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0\}$ şi, în consecinţă, $dim(Ker(g)) = dim(V) - rang(g) = n - r$. Aşadar, rezultă că avem: $n - s = n - r$. De aici, găsim: $s = r$. ◀

Când $K = \mathbb{R}$, se poate spune chiar mai mult despre g decât în Teorema 8.1 şi anume:

Teorema 8.2 ***(Teorema inerţiei; a lui Sylvester)***

Fie V un spaţiu vectorial real şi $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară şi simetrică pe V, nedegenerată. Există atunci un număr natural p astfel încât, dacă $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a spaţiului finit dimensional V, ortogonală faţă de g, exact p dintre numerele $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$ sunt mai mari decât 0 (adică pozitive) şi $q = n - p$ dintre ele sunt negative.

Demonstraţie: Fie $c_i = g(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_i)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$. După o eventuală renumerotare a elementelor bazei, putem zice că avem $c_1, c_2, \ldots, c_p > 0$ şi $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n < 0$. Considerăm o altă bază $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, tot ortogonală faţă de g, în raport cu care avem $d_i = g(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_i)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ astfel încât $d_1, d_2, \ldots, d_l > 0$ şi $d_{l+1}, d_{l+2}, \ldots, d_n < 0$. Arătăm că vectorii $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_p, \mathrm{v}_{l+1}, \ldots, \mathrm{v}_n$ sunt liniar independenţi în V. Astfel, presupunând că avem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_{l+1}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ aşa ca

$$\alpha_1 \mathrm{b}_1 + \cdots \alpha_p \mathrm{b}_p + \beta_{l+1} \mathrm{v}_{l+1} + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n = \mathbf{0}_V,$$

putem scrie: $\mathrm{w} = \alpha_1 \mathrm{b}_1 + \cdots + \alpha_p \mathrm{b}_p = -(\beta_{l+1} \mathrm{v}_{l+1} + \cdots + \beta_n \mathrm{v}_n)$. Calculând $g(\mathrm{w}, \mathrm{w})$, obţinem, pe de o parte, $c_1 \alpha_1^2 + c_2 \alpha_2^2 + \cdots + c_p \alpha_p^2$ şi, pe de alta, $d_{l+1} \beta_{l+1}^2 + \cdots + d_n \beta_n^2$, adică

$$0 \le c_1 \alpha_1^2 + \cdots + c_p \alpha_p^2 = d_{l+1} \beta_{l+1}^2 + \cdots + d_n \beta_n^2 \le 0,$$

ceea ce nu este posibil decât dacă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \beta_{l+1} = \ldots = \beta_n = 0$. Prin urmare, vectorii $\mathrm{b}_1, \ldots, \mathrm{b}_p, \mathrm{v}_{l+1}, \ldots, \mathrm{v}_n$ sunt într-adevăr liniar independenţi. În consecinţă, avem $p + n - l \le n$, adică $p \le l$. Similar, avem şi relaţia reciprocă, aşa încât, de fapt, $p = l$. Deci p este un invariant al lui g (indiferent de baza lui V). ◀

Observaţie: Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este o formă biliniară şi simetrică pe spaţiul liniar real, finit dimensional, V, atunci, pentru orice bază $\{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, ortogonală faţă de g, numărul elementelor pozitive, numărul elementelor nule şi cel al elementelor negative din şirul $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2)$, $g(\mathrm{b}_3, \mathrm{b}_3), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$ sunt mereu aceleaşi, invariabile în raport cu baza considerată. Aceasta, în virtutea Teoremei 8.1 şi a Teoremei 8.2, ultima dintre ele aplicată restricţiei lui g la $Ker(g)$.

Definiţia 8.10 *Tripletul (p, q, r), în care numărul natural p este egal cu numărul elementelor pozitive din suita $g(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_1), g(\mathrm{b}_2, \mathrm{b}_2), \ldots, g(\mathrm{b}_n, \mathrm{b}_n)$, q este numărul elementelor negative din aceeaşi suită, iar r (adică $n - p - q$) este numărul elementelor egale cu zero din respectivul şir, se numeşte **signatura lui** g.*

Forme şi funcţii pătratice

Definiţia 8.11 *Fie $g : V \times V \to K$ o funcţie biliniară şi simetrică pe spaţiul vectorial V, peste corpul comutativ K. Funcţia $h : V \to K$, definită prin $h(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}, \mathrm{x})$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ (adică restricţia lui g la $\{(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in V\} \subseteq V \times V$) se numeşte **formă (funcţională) pătratică** pe V, asociată formei biliniare g.*

Observaţie: Deoarece $h(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = g(\mathrm{x} + \mathrm{y}, \mathrm{x} + \mathrm{y}) = g(\mathrm{x}, \mathrm{x}) + g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + g(\mathrm{y}, \mathrm{x}) + g(\mathrm{y}, \mathrm{y})$ şi $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = g(\mathrm{y}, \mathrm{x})$, avem

$$h(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = h(\mathrm{x}) + 2g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + h(\mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V,$$

de unde deducem formula:

$$g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{1}{2} \left[h(\mathrm{x} + \mathrm{y}) - h(\mathrm{x}) - h(\mathrm{y}) \right], \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V.$$

În virtutea acesteia, cunoaşterea formei pătratice h pe V conduce la determinarea formei biliniare şi simetrice g, asociată lui h, pe V.

Dacă $dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$ şi $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ este o bază a lui V, atunci matricea asociată lui g în raport cu B este, de fapt, şi matricea asociată lui h, iar funcţia polinomială şi omogenă, de gradul 2, $h(\mathrm{x})$, al cărei aspect este

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \text{ pentru } \mathrm{x} = \sum_{i=1}^{} x_i \mathrm{b}_i,$$

unde $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ este matricea menţionată, se numeşte ***expresie a formei pătratice*** h. Scalarii a_{ij}, verificând relaţia de simetrie $a_{ij}=a_{ji}$, $\forall\, i,j=\overline{1,n}$, se numesc ***coeficienţi ai lui*** h ***în baza*** B. Determinantul matricii $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ se numeşte ***discriminantul*** formei pătratice h.

Ţinând cont de formula (#), putem spune că, şi în cazul formei h, matricea sa asociată într-o bază B' a lui V, alta decât B, matrice notată cu $A_{B'}$, se obţine din cea asociată lui h în baza B, notată cu A_B, în conformitate cu relaţia

$$(\#\#)\quad A_{B'}=S^T A_B S,$$

unde S este matricea de trecere de la B la B', iar S^T este transpusa matricii S.

În virtutea legăturii dintre h şi g, se poate spune că h este o ***formă pătratică nedegenerată*** dacă şi numai dacă g este nedegenerată, adică dacă $det(A)\neq 0$, unde A este matricea asociată lui g şi respectiv lui h. Altfel, h este o ***forma pătratică degenerată***.

Definiţia 8.12 *Se numeşte* ***formă canonică (redusă*** *sau* ***normală)*** *a funcţiei pătratice h acea expresie în care, în raport cu o anumită bază a lui V, matricea asociată are formă diagonală. Mai exact, forma lui h este* ***normală*** *atunci când forma diagonală a matricii asociate lui h conţine (pe respectiva diagonală) numai elementele 0, 1 şi -1 (din K).*

Teorema 8.3 ***(Metoda lui Gauss de aducere a unei forme pătratice la expresia ei redusă)***
Fie V un spaţiu liniar real, n-dimensional şi $h:V\to\mathbb{R}$ o formă pătratică. Există atunci o bază $\{\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\dots,\mathrm{b}_n\}$ a lui V şi scalarii $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\in\mathbb{R}$, aşa încât, pentru orice $\mathrm{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{b}_i\in V$, avem:

$$h(\mathrm{x})=\omega_1x_1^2+\omega_2x_2^2+\dots+\omega_nx_n^2.$$

Demonstraţie: Fie $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\dots,\mathrm{v}_n\}$ o bază oarecare a lui V, faţă de care expresia lui $h(\mathrm{x})$ este $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$, unde $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n$ sunt coordonatele lui x în raport cu această bază, iar a_{ij} sunt coeficienţii din $\mathbb{R}$ ai lui h relativ la baza respectivă. Pentru reducerea formei $h(\mathrm{x})$ la doar o sumă algebrică de pătrate ale coordonatelor lui x într-o altă anumită bază $\{\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\dots,\mathrm{b}_n\}$ a lui V, căutăm dacă cel puţin unul dintre coeficienţii a_{ii}, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, este diferit de zero. Dacă acest lucru nu are loc din start, iar h nu este o formă identic nulă, atunci expresia lui h are cel puţin un termen $2a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$ cu $a_{ij}\neq 0$. Efectuând transformarea de bază ce corespunde schimbării de coordonate următoare $\tilde{x}_1=\hat{x}_1,\tilde{x}_2=\hat{x}_2,\dots,\tilde{x}_{i-1}=\hat{x}_{i-1},\tilde{x}_i=\hat{x}_i+\hat{x}_j,\tilde{x}_{i+1}=\hat{x}_{i+1},\dots,\tilde{x}_{j-1}=\hat{x}_{j-1},\tilde{x}_j=\hat{x}_i-\hat{x}_j,\tilde{x}_{j+1}=\hat{x}_{j+1},\dots,\tilde{x}_n=\hat{x}_n$, termenul $2a_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$ devine $2a_{ij}\left(\hat{x}_i^2-\hat{x}_j^2\right)$ şi, astfel,de exemplu, coeficientul lui $\hat{x}_i^2$ este nenul.

Fără a micşora generalitatea raţionamentului de faţă, admitem că avem, de la început, în expresia lui h, $a_{11}\neq 0$. Luăm atunci în atenţie suma tuturor acelor termeni (din respectiva expresie) care îl conţin pe $\tilde{x}_1$. Completăm această sumă până la un pătrat perfect, aşa încât expresia lui h să se redea sub forma

$$\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\tilde{x}_1+a_{12}\tilde{x}_2+\dots+a_{1n}\tilde{x}_n\right)^2+\cdots,$$

în care termenii din zona "..." conţin numai coordonatele $x_2,\dots,x_n$ ale lui x în baza $\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\dots,\mathrm{v}_n\}$.

Expresia sumei din zona "..." este similară aceleia din start, cu diferenţa că ea nu mai conţine deloc pe $\tilde{x}_1$. Repetând asupra ei raţionamentul de până aici, obţinem:

$$h(\mathrm{x})=\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\tilde{x}_1+\dots+a_{1n}\tilde{x}_n\right)^2+\frac{1}{a_{22}^*}\left(a_{22}^*\tilde{x}_2+\dots+a_{1n}^*\tilde{x}_n\right)^2+\cdots$$

Mai departe, prin continuarea unui asemenea proces de calcul, se ajunge, după un număr finit de paşi, la expresia dorită a lui $h(\mathrm{x})$, adică la $\omega_1x_1^2+\omega_2x_2^2+\dots+\omega_nx_n^2$, unde $x_1,x_2,\dots,x_n$ sunt noile coordonate ale lui x, iar $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sunt noii coeficienţi ai lui h într-o bază ce corespunde schimbării de coordonate guvernată de relaţiile

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n \\ x_2 &= a^*_{22}\tilde{x}_2 + a^*_{23}\tilde{x}_3 + \cdots + a^*_{2n}\tilde{x}_n \\ &\vdots \\ x_m &= \overline{a}_{mm}\tilde{x}_m + \cdots + \overline{a}_{mn}\tilde{x}_n, \end{cases}$$

în care $1 \leq m \leq n$. ◀

Observaţie: Pe baza Teoremei 8.2, se poate spune că, dacă (p, q, r) este signatura formei biliniare g şi, implicit, a formei pătratice h, asociată lui g, exact p dintre coeficienţii formei canonice obţinută prin Teorema 8.3 sunt pozitivi, q sunt negativi şi r sunt egali cu zero. Şi acest lucru se produce în raport cu baza faţă de care h are formă redusă în V.

Teorema 8.4 ***(Metoda lui Jacobi de reducere a unei forme pătratice la forma canonică)***
Fie V un spaţiu liniar real, finit dimensional ($dim(V) = n \in \mathbb{N}^*$) şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică de expresie $h(\mathrm{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, în raport cu o bază a lui V în care x are coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dacă toţi minorii principali ai matricii asociate $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ sunt nenuli, adică dacă $\Delta_i \neq 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$, unde

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix},$$

atunci există o bază $B' = \{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n\}$ a spaţiului V aşa încât

$$h(\mathrm{x}) = \mu_1 \check{x}_1^2 + \mu_2 \check{x}_2^2 + \cdots + \mu_n \check{x}_n^2,$$

unde $\mu_j = \dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, cu $\Delta_0 = 1$ şi $\check{x}_1, \check{x}_2, \ldots, \check{x}_n$ sunt coordonatele lui x în baza B'.

Demonstraţie: Plecând de la baza $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ a lui V, considerăm vectorii $\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n$, unde

$$\begin{cases} \mathrm{b}'_1 &= s_{11}\mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}'_2 &= s_{21}\mathrm{b}_1 + s_{22}\mathrm{b}_2 \\ &\vdots \\ \mathrm{b}'_n &= s_{n1}\mathrm{b}_1 + s_{n2}\mathrm{b}_2 + \cdots + s_{nn}\mathrm{b}_n, \end{cases}$$

cu $s_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\, 1 \leq j \leq i \leq n$, astfel încât

$$(\diamondsuit) \quad \begin{cases} g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_j) = 0 & \text{dacă } 1 \leq j < i \leq n \text{ şi} \\ g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_i) = 1 & \text{dacă } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Condiţiile $(\diamondsuit)$ determină în mod unic elementele matricii $S = (s_{ij})_{1\leq j\leq i\leq n}$, în ipotezele din enunţul prezentei teoreme. Aceasta întrucât, de exemplu, pentru obţinerea lui b'_i, avem de rezolvat sistemul algebric liniar

$$(\bullet) \quad \begin{cases} a_{11}s_{i1} + a_{12}s_{i2} + \cdots + a_{1i}s_{ii} &= 0 \\ a_{21}s_{i1} + a_{22}s_{i2} + \cdots + a_{2i}s_{ii} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{i-1,1}s_{i1} + a_{i-1,2}s_{i2} + \cdots + a_{i-1,i}s_{ii} &= 0 \\ a_{i1}s_{i1} + a_{i2}s_{i2} + \cdots + a_{ii}s_{ii} &= 1 \end{cases}$$

al cărui determinant este chiar $\Delta_i \neq 0$. Deci sistemul ($\bullet$) este compatibil determinat, având o soluţie unică, ce se poate obţine prin regula lui Kramer. După găsirea tuturor vectorilor $\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n$, se poate arăta că ei alcătuiesc o bază în V, bază în raport cu care matricea asociată lui h este una de formă diagonală, cu elementele $\dfrac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$, $\forall j = \overline{1,n}$ şi $\Delta_0 = 1$, pe respectiva diagonală.

Într-adevăr, pe baza condiţiilor ($\diamondsuit$) şi ţinând cont de simetria lui g, avem:

$$g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}'_j) = g(\mathrm{b}'_i, s_{j1}\mathrm{b}_1 + s_{j2}\mathrm{b}_2 + \cdots + s_{jj}\mathrm{b}_j) = s_{j1}g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_1) + s_{j2}g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_2) + \cdots + s_{jj}g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_j) = 0,$$

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ (ţinând cont şi de simetria lui g).}$$

În acelaşi timp, avem:

$$g(\mathrm{b}'_i, \mathrm{b}'_i) = s_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, \forall\, i = \overline{1,n} \text{ (cu } \Delta_0 = 1).$$

◀

Definiţia 8.13 *a) O formă pătratică $h : V \to K$ se numeşte **pozitiv definită** pe V, ori de câte ori, în signatura lui h, indexul pozitiv este egal cu dimensiunea (finită) a lui V. Forma pătratică h se numeşte **pozitiv semidefinită** pe V când, în signatura (p, q, r) a lui h, r este nenul şi $q = 0$.*

*b) Forma h se numeşte **negativ definită** dacă $p = r = 0$ şi $q = dim(V)$. Forma h se numeşte **negativ semidefinită** atunci când $p = 0, r > 0$ şi $q = dim(V) - r > 0$.*

*c) Forma pătratică h se numeşte **nedefinită** când $p > 0$ şi $q > 0$.*

Observaţie: În conformitate cu Teorema 8.4, o formă pătratică $h : V \to \mathbb{R}$, unde V este un spaţiu liniar finit dimensional, este pozitiv definită atunci când toţi determinanţii Δ_j sunt pozitivi. Forma h este negativ definită dacă $(-1)^{j+1}\Delta_j < 0$, $\forall j = \overline{1,n}$ şi nedefinită atunci când nu toţi determinanţii nenuli Δ_j au acelaşi semn.

Teorema 8.5 ***(Metoda valorilor proprii şi a vectorilor proprii pentru reducerea unei forme pătratice la expresia sa canonică)***

Fie $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe spaţiul liniar real, finit dimensional V. Dacă V este un spaţiu euclidian, atunci există o bază ortonormată a lui V faţă de care h are forma canonică

$$h(\mathrm{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricii asociate lui h, în baza iniţială, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt coordonatele lui x în acea bază.

Demonstraţie: Fie $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui V, în raport cu care matricea A_B, corespunzătoare lui h, are vectorii proprii $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$, corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ca şi în cazul diagonalizării lui A_B, putem admite că sistemul $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ este ortonormat faţă de produsul scalar cu care este înzestrat spaţiul V.

Atunci, în baza $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ a lui V, matricea lui h va avea forma diagonală $diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, iar expresia lui h va fi cea a formei canonice indicate în enunţ. ◀

Definiţia 8.14 *Fie V spaţiu vectorial peste un corp comutativ K, h o formă pătratică pe V şi f o funcţională afină pe V. Suma $h + f$ se numeşte **funcţională pătratică de expresie neomogenă** pe V.*

În raport cu o anumită bază a lui V, expresia lui $h+f$ este

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c,$$

unde $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(K)$, $b_i \in K$, $\forall\, i=\overline{1,n}$ şi $c \in K$ sunt coeficienţii respectivei funcţii pătratice în acea bază, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt coordonatele unui vector x din V, în baza considerată.

Dacă V este spaţiu euclidian, atunci expresia funcţiei pătratice $\rho = h+f$ se poate reda prin

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \langle \mathrm{b}, \mathrm{x}\rangle + c, \forall\, \mathrm{x} \in V,$$

unde $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ şi $\mathrm{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Matricea A se poate considera întotdeauna simetrică, întrucât, prin intermediul egalităţii,

$$\begin{aligned}
\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle &= \frac{1}{2}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{x}, A\mathrm{x}\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle A^T\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \left(A + A^T\right)\mathrm{x}, \mathrm{x}\right\rangle,
\end{aligned}$$

unde $\left(A+A^T\right)^T = A^T + A = A + A^T$, se poate conta mereu pe aportul matricii simetrice $\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$, chiar dacă $A \neq A^T$.

Efectuând o transformare afină de coordonate, de forma

$$\mathrm{x}' = S\mathrm{x} + \mathrm{x}_0,$$

unde S este o matrice nesingulară, iar $\mathrm{x}_0 \in V$ este fixat arbitrar, obţinem:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathrm{x}) &= \left\langle AS^{-1}(\mathrm{x}'-\mathrm{x}_0), S^{-1}(\mathrm{x}'-\mathrm{x}_0)\right\rangle + \left\langle \mathrm{b}, S^{-1}(\mathrm{x}'-\mathrm{x}_0)\right\rangle + c \\
&= \left\langle \left(S^{-1}\right)^T AS^{-1}\mathrm{x}', \mathrm{x}'\right\rangle - \left\langle 2\left(S^{-1}\right)^T AS^{-1}\mathrm{x}_0 + \left(S^{-1}\right)^T \mathrm{b}, \mathrm{x}'\right\rangle + c_0.
\end{aligned}$$

Dacă S este o matrice ortogonală (de exemplu având drept coloane vectorii proprii, ortonormaţi, ai lui A), atunci $S^{-1} = S^T$ şi $SAS^T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = D$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A. În consecinţă, avem:

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle - 2\left\langle S\left(AS^T\mathrm{x}_0 + \frac{\mathrm{b}}{2}\right), \mathrm{x}'\right\rangle + c_0.$$

În cazul în care A este nesingulară, se poate lua $\mathrm{x}_0 = -\frac{1}{2}SA^{-1}\mathrm{b}$ şi atunci:

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle + c_0,$$

unde $c_0 = \langle D\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0\rangle - \langle S\mathrm{b}, \mathrm{x}_0\rangle + c$.

Aşadar, în cazul în care matricea A este nesingulară, prin transformarea afină $\mathrm{x}' = S\mathrm{x} - \frac{1}{2}SA^{-1}\mathrm{b}$, s-ar aduce funcţia pătratică ρ la o formă redusă, sumă dintre o formă pătratică canonică şi o formă constantă.

Când A este singulară, se ia $x_0 = \mathbf{0}_V$ şi se ajunge, prin transformarea liniară $\mathrm{x}' = S\mathrm{x}$, la

$$\rho(\mathrm{x}) = \langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle + \langle S\mathrm{b}, \mathrm{x}'\rangle + c_0,$$

ceea ce ne spune că forma redusă a lui ρ are şi o componentă ce depinde liniar de x', iar partea ei principală $\langle D\mathrm{x}', \mathrm{x}'\rangle$ este o formă pătratică canonică cu $1 \leq r < n$ termeni. Mai departe, efectuând o adecvată transformare liniară de coordonate, de aici, se poate ajunge la o expresie a lui ρ de forma

$$\rho(\mathrm{x}) = \sum_{i=r} \lambda_i \left(x_i''\right)^2 + \gamma_{r+1} x_{r+1}'',$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ şi $\gamma_{r+1} \in \mathbb{R}$, iar $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ sunt coordonatele lui x în noua bază a lui V (r este rangul lui ρ).

Din punct de vedere geometric, nucleul lui ρ este, pentru $V = \mathbb{R}^n$, o ***conică***, atunci când $n = 2$, o ***cuadrică***, când $n = 3$ şi o ***hipercuadrică***, când $n \geq 4$. În cazul în care $n = 1$, expresia redusă (normală) a funcţiei pătratice ρ poate fi x_1^2+1 (şi atunci $Ker(g)$ este mulţimea a două puncte imaginare, conjugate) sau $x_1^2 - 1$ ($Ker(g)$ fiind atunci mulţimea a două puncte distincte) sau x_1^2 (situaţie în care $Ker(g)$ este o mulţime de două puncte confundate).

Când $n = 2$, avem următoarele nouă tipuri de ecuaţii (reduse) de conice:

1. $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ (*elipsă "imaginară"*);
2. $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ (*hiperbolă*);
3. $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ (*elipsă*);
4. $x_1^2 - 2x_2 = 0$ (*parabolă*);
5. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (*un punct*; *două drepte imaginare, conjugate*);
6. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (*două drepte concurente*);
7. $x_1^2 + 1 = 0$ (*două drepte imaginare*);
8. $x_1^2 - 1 = 0$ (*două drepte paralele*);
9. $x_1^2 = 0$ (*două drepte confundate*).

Când $n = 3$, cuadricele în cauză sunt de 17 feluri, caracterizându-se (în principal) prin ecuaţiile reduse următoare:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ (*elipsoid "imaginar"*);
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$ (*elipsoid*);
3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (*hiperboloid cu o pânză*);
4. $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$ (*hiperboloid cu două pânze*);
5. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$ (*paraboloid eliptic*);
6. $x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$ (*paraboloid hiperbolic*);
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (*con imaginar; punct*);
8. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (*con real*).

În completare, sunt cele 9 expresii de ecuaţii reduse din cazul $n = 2$, care, acum, în $\mathbb{R}^3$, reprezintă *cilindri* de diferite tipuri. Primele 6 clase reprezintă *cuadrice nesingulare*, iar celelalte, *cuadrice singulare.*

Bibliografie recomandată

1. D. Drăghici - *Algebră (Cap. VIII)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

2. Gh. Galbură, F. Radó - *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

3. Irinel Radomir - *Matematică. Elemente de algebră vectorială, geometrie şi calcul diferenţial*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.

4. C. Costinescu - *Algebră liniară şi aplicaţii în geometrie*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2005.