Tema 1 - 16 noiembrie 2018

Termen de predare: 23 noiembrie 2018, 10:00-12:00 în C403

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte doi studenţi.**
- **Pentru soluţii redactate în LaTeX se oferă un bonus de 1 punct.**
- **Soluţiile identice sau copiate conduc la anularea punctajelor.**
- **Soluţiile trebuie să conţină numele celui/celor care au redactat-o şi vor fi transmise pe hârtie, nu prin e-mail.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de $1-2$ pagini pentru fiecare dintre probleme.**

1. Fie $G = (V, E)$ un graf conex care are un cuplaj perfect. Descrieţi (şi demonstraţi corectitudinea) unui algoritm de complexitate timp $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ care să construiască un arbore parţial T al lui G astfel ca $V(T)$ să admită o bipartiţie în două mulţimi stabile de cardinal maxim ale lui T. **(2 puncte)**

2. Arătaţi că un graf G conţine un cuplaj de cardinal p dacă şi numai dacă $q(G-S) \leqslant |S|+|G|-2p$, $\forall S \subseteq V(G)$. **(1 + 1 = 2 puncte)**

3. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $c : E \to \mathbb{R}$ o funcţie de cost injectivă pe muchiile sale. Considerăm următorul algoritm

for $(e \in E)$ **do**
  $\gamma(e) \leftarrow r$; // toate muchiile sunt colorate cu roşu; în timpul execuţiei vor fi roşii, albastre sau verzi
while $((\exists A \subseteq E$, o tăietură, s. t. $\gamma(e') \neq v$, unde $c(e') = \min\limits_{e \in A} c(e))$ sau
    $(\exists C$, un circuit, a. î. $\gamma(e') \neq a$, unde $c(e') = \max\limits_{e \in C} c(e)))$ **do**
  pentru o tăietură, A, $\gamma(e') \leftarrow v$;
  pentru un circuit, C, $\gamma(e') \leftarrow a$;
return $H = (V, \{e \in E \,:\, \gamma(e) = v\})$;

Arătaţi că

(a) o muchie aparţine unui arbore parţial de cost minim dacă şi numai dacă este de cost minim într-o tăietură;

(b) o muchie nu aparţine nici unui arbore parţial de cost minim dacă şi numai dacă este de cost maxim într-un circuit;

(c) algoritmul nu se opreşte câtă vreme mai există muchii roşii în graf;

(d) algoritmul se opreşte pentru orice alegere a muchiilor e', iar H este singurul arbore parţial de cost minim din G.

(2 + 2 + 1 + 1 = 6 puncte)

4. Fie $T = (V, E)$ un arbore cu $V = \{1, 2, \ldots, p\}$, $p \geqslant 2$. **Emblema** lui T este vectorul $x \in \mathbb{N}^{p-1}$ definit astfel: la fiecare pas $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ frunză minimă din T, k, actualizăm T ca fiind $T - k$ şi asignăm lui x_i vecinul frunzei şterse.

(a) Demonstraţi că ultima componentă a emblemei unui arbore de ordin p este $x_{p-1} = p$.

(b) Fie $x \in \{1, 2, \ldots, p\}^{p-1}$ cu $x_{p-1} = p$. Considerăm următorul algoritm:

$i_1 \leftarrow \min\left(V \setminus \{x_1, \ldots, x_{p-1}\}\right)$; $E' \leftarrow \{x_1 i_1\}$;
for $(k = \overline{2, p-1})$ **do**
  $i_k \leftarrow \min\left(V \setminus \{i_1, \ldots, i_{k-1}, x_k, \ldots, x_{p-1}\}\right)$;
for $(k = \overline{1, p-1})$ **do**
  $E' \leftarrow E' \cup \{x_k i_k\}$;
return $T = (V, E')$;

Fie $T_k = T \setminus \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant p-1$. Arătaţi că

(b1) i_k este o frunză în T_k;

(b2) i_k este cea mai mică frunză din T_k;

(b3) T este un arbore a cărei emblemă este x.

(1 + 1 + 1 + 1 = 4 puncte)