Probabilităţi şi statistică - Curs 2

februarie, 2018

- În acest capitol vom studia felul în care un eveniment aleator, despre care ştim deja că s-a realizat, influenţează sau nu şansele de realizare ale unor alte evenimente.
- Noţiunile de condiţionare şi independenţă permit calcularea probabilităţilor unor evenimente aleatoare prin intermediul altor evenimente.
- Aceste noţiuni sunt sunt printre cele mai importante concepte ale teoriei probabilităţilor.
- În lipsa acestor două noţiuni teoria probabilităţilor ar fi doar o teorie despre măsură a submulţimilor unei mulţimi Ω.

Exemplu:

- Să presupunem că se aruncă două zaruri şi că putem observa valoarea primului dintre zaruri: 5. Având la îndemână această informaţie, care este probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie cel mult 7?
- Raţionamentul este următorul: ştiind ca primul dintre zaruri este 5, rezultatele posibile a experimentului sunt $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$ şi $(5, 6)$.
- În continuare, cunoscând că valoarea primului zar este 5, fiecare dintre aceste evenimente elementare are aceeaşi probabilitate: $1/6$; probabilitatea căutată este $2/6$. ♣

Definition 1

Fie A şi B două evenimente aleatoare, **probabilitatea condiţionată** *de a se realiza A ştiind că s-a realizat B este*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, (B \neq \varnothing).$$

$P(A|B)$ se mai numeşte probabilitatea lui A condiţionat de evenimentul B. A este evenimentul condiţionat, iar B este evenimentul care condiţionează.

Exemplu. Două cifre sunt alese la întâmplare dintre cele nouă cifre de la 1 la 9. Dacă suma este pară, care este probabilitatea ca unul dintre cele două numere să fie par?

Soluţie: Numerele pare sunt $\{2, 4, 6, 8\}$; dacă suma este pară şi unul dintre numere este par, atunci amândouă sunt pare.

Există $\binom{4}{2} = 6$ moduri de a alege două numere pare diferite şi $\binom{5}{2} = 10$ moduri de a alege două numere impare diferite (numerele impare sunt $\{1, 3, 5, 7, 9\}$). Probabilitatea este

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}} = \frac{6}{6 + 10} = 0.375. \clubsuit$$

Exemplu. Într-o urnă sunt 4 bile albe (două numerotate cu 1, două cu 2), 5 galbene (trei numerotate cu 1, două cu 2) şi 6 negre (două numerotate cu 1, patru cu 2). O bilă este extrasă la întâmplare din urnă.

(a) Dacă bila extrasă nu este neagră, care este probabilitatea ca ea să fie albă?

(b) Dacă bila extrasă are numărul 2, care este probabilitatea ca ea să nu fie albă?

Soluţie:

(a) Dacă bila extrasă nu este neagră, rămân nouă bile posibile, iar dintre acestea patru sunt albe. Probabilitatea este $4/9$.

(b) Dacă bila extrasă are numărul 2, spaţiul posibilităţilor (putem presupune ca urna are acest conţinut) se restrânge la două bile albe, două bile galbene şi patru bile negre. Probabilitatea de a extrage o bilă galbenă sau neagră este $6/8 = 0.75$. $\clubsuit$

Example. O monedă se aruncă de trei ori. Vrem să determinăm probabilitatea condiţionată $P(A|B)$, unde $A =$"banul apare de mai multe ori decât stema", $B =$"la prima aruncare se obţine banul".

Solution: Spaţiul de selecţie este

$$\Omega = \{hhh, hht, hth, htt, thh, tht, tth, ttt\}.$$

Astfel, $B = \{hhh, hht, hth, htt\}$, $A = \{hhh, hht, hth, thh\}$, $A \cap B = \{hhh, hht, hth\}$.

$$P(B) = \frac{4}{8}, P(A \cap B) = \frac{3}{8}, P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4}.$$

Deoarece toate rezultatele sunt echiprobabile putem calcula $P(A|B)$ mai rapid. Putem evita să calculăm $P(B)$ şi $P(A \cap B)$ împărţind numărul de rezultate elementare din $A \cap B$ (care este 3) la numărul de rezultate elementare ale lui B (care este 4).

- În multe cazuri probabilitatea $P(A|B)$ este diferită de $P(A)$ - care este probabilitatea necondiţionată a evenimentului A. Asta înseamnă că realizarea evenimentului B influenţează într-adevăr şansele de producere a evenimentului A.
- Atunci când $P(A) = P(A|B)$ putem spune că evenimentul A este independent de B (vom vedea că relaţia aceasta este simetrică). Altfel spus, A este independent de B dacă realizarea evenimentului B nu schimbă probabilitatea realizării evenimentului A.

Definition 2

Două evenimente A şi B se numesc **independente** *dacă*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1}$$

- Dacă B este un eveniment posibil (adică $P(B) > 0$) şi $P(A|B) = P(A)$, atunci A şi B sunt independente conform definiţiei (care include şi posibilitatea ca unul dintre cele două evenimente să fie imposibile).
- În fapt, evenimentul imposibil, $\varnothing$, este independent de orice alt eveniment; la fel, evenimentul sigur, Ω, este independent de orice alt eveniment.
- Independenţa se poate verifica folosind ecuaţia (1), dar există şi situaţii în care aceasta rezultă direct din enunţul problemei pe baza independenţei "fizice" a celor două evenimente aleatoare, aşa cum arată următorul exerciţiu.

Exemplu. Se aruncă două zaruri; fie $A =$" primul zar are un număr par" şi $B =$"al doilea zar este cel puţin trei". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

Soluţie: Intuitiv, cele două evenimente sunt independente deoarece rezultatul obţinut pe un zar nu are vreo legătură cu cel de-al doilea (aruncarea primului zar poate fi făcută înaintea celui de-al doilea!). Chiar fără a calcula probabilităţile implicate in ecuaţia (1) putem spune că A şi B sunt independente. ♣

- În anumite situaţii însă această independenţă fizică nu există şi intuiţia nu funcţionează - nu putem afirma independenţa înainte de a a calcula probabilităţile implicate.
- Următoarele exemple subliniază acest lucru.

Exemplu. Considerăm un pachet de (52 de) cărţi de joc din care se extrage la întâmplare o carte. Fie $A =$"cartea extrasă este un zece" şi $B =$" cartea extrasă este caro". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

Soluţie: $P(A) = \dfrac{4}{52}$, $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$, iar $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$ şi $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{52}{52 \cdot 52} = \dfrac{1}{52}$. ♣

Exemplu. într-o urnă sunt puse următoarele cărţi: un valet de treflă, o damă de caro, un trei de pică şi un opt de inimă. O carte este extrasă la întâmplare din această urnă; fie $A =$"cartea extrasă are culoare roşie" şi $B =$"cartea extrasă este o figură". Să se analizeze independenţa evenimentelor A şi B.

Soluţie: Nici în acest caz independenţa nu se poate afirma direct; $P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$, de aici rezultă independenţa. ♣

Proposition 1

Dacă evenimentele A şi B sunt independente, atunci la fel sunt şi perechile de evenimente $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ şi $\overline{A}, \overline{B})$.

proof: Ştim că $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$;considerăm doar prima pereche (e similar pentru celelalte): $P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) - P(A \cap B) = P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B})$ ■

Definition 3

Evenimentele aleatoare $(A_i)_{i \in I}$ se numesc **independente în ansamblu** *dacă*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}),$$

pentru orice $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$.

Proposition 2

Dacă evenimentele $(A_i)_{i\in I}$ *sunt independente în ansamblu şi* (I_1, I_2) *este o partiţie a lui* I*, atunci evenimentele* $(A_i)_{i\in I_1} \cup (\overline{A}_i)_{i\in I_2}$ *sunt de asemeni independente în ansamblu.*

proof: (Schiţă)

Se observă mai întâi că este suficient să demonstrăm propoziţia pentru mulţimi I finite. Utilizăm propoziţia 1 şi proprietatea: dacă $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ sunt independente în ansamblu, atunci şi $A_1, A_2, \ldots, A_k \cap A_{k+1}$ sunt independente în ansamblu. Demonstraţia decurge apoi prin inducţie după $|I|$. ■

- Independenţa în ansamblu este o condiţie foarte tare şi ea se verifică destul de rar în practică.
- De cele mai multe ori independenţa în ansamblu este validată cel mai uşor sesizând independenţa "fizică" (datorată eventual unui experiment aleator secvenţial).

Proposition 3

Probabilităţile condiţionate de un eveniment aleator particular, A, definesc o funcţie de probabilitate pe un nou spaţiu, A.

proof: (Schiţă) Fie A un eveniment aleator particular, definim $Q : \mathcal{P}(A) \to [0, 1]$ prin $Q(B) = P(B|A)$, pentru orice $B \subseteq A$. Verificarea faptului că Q satisface cele trei axiome ale probabilităţii este lăsată ca exerciţiu. ∎

Definition 4

Fie $C \neq \emptyset$, evenimentele aleatoare A şi B sunt **independente condiţionat** *de C dacă $P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$.*

Proposition 4

Fie $C \neq \varnothing$, evenimentele aleatoare A şi B sunt independente condiţionat de C dacă şi numai dacă $P(A|C \cap B) = P(A|C)$.

proof: Putem presupune fără a restrânge generalitatea (de ce?) că $B \cap C \neq \varnothing$.

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B \cap C) \cdot P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C) \cdot P(C)} =$$

$$= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(B|C) \cdot P(A|C \cap B).$$

Acum, A şi B sunt independente condiţionat de C dacă şi numai dacă $P(B|C) \cdot P(A|C \cap B) = P(A|C) \cdot P(B|C)$, i. e., $P(A|C \cap B) = P(A|C)$. ∎

- Relaţia $P(A|C \cap B) = P(A|C)$ spune că, dacă se ştie că C s-a produs deja, atunci informaţia suplimentară că şi B s-a produs nu schimbă probabilitatea evenimentului A.
- Independenţa necondiţionată a două evenimente aleatoare A şi B nu are neapărat drept consecinţă independenţa condiţionată şi nici invers (vezi exerciţiile propuse).

Proposition 5

(Formula probabilităţii totale) Fie $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *evenimente aleatoare care realizează o partiţie a evenimentului sigur* ($\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ *şi* $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall\, i \neq j$). *Dacă* B *este un eveniment oarecare, atunci*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

dem: $P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right]$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Exemplu. Urna U_1 conţine trei bile albe şi cinci bile negre, iar urna U_2 patru bile albe şi şase bile negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Care este probabilitatea ca bila să fie albă?

Soluţie: Notăm $A_i =$"extragerea se face din urna U_i" $(i = \overline{1,2})$ şi $B =$"bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ şi putem presupune că $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Atunci

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2), \text{ dar}$$

$$P(B|A_1) = \frac{3}{8},\ P(B|A_2) = \frac{4}{10}, \text{ deci}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{31}{80}. \clubsuit$$

Example. Se aruncă un zar. Dacă rezultatul este 1 sau 2, zarul mai este aruncat o dată. Care este probabilitatea ca suma totală aruncărilor (sau aruncării) să fie cel puţin 4?

Soluţie: Fie A_i ="rezultatul primei aruncări este i" ($i = \overline{1,6}$) şi B ="suma totală este cel puţin 4". $\bigcup\limits_{i=1}^{6} A_i = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ şi $P(A_i) = 1/6$. Avem $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{6} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$.

Dat evenimentul A_1, suma totală va fi cel puţin 4 dacă la a doua aruncare obţinem cel puţin 3; dat evenimentul A_2, suma totală va fi cel puţin 4 dacă la a doua aruncare obţinem cel puţin 2:

$$P(B|A_1) = \frac{4}{6},\ P(B|A_2) = \frac{5}{6}, P(B|A_3) = 0, P(B|A_i) = 1, i = \overline{4,6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4}{6} + \frac{5}{6} + 1 + 1 + 1\right) = \frac{27}{36}. \clubsuit$$

Exemplu. X vrea să facă un pariu pe care-l descrie astfel: alege câteva cărţi dintr-un pachet şi formează următoarele trei pachete mai mici:

1. - pachetul P_1 conţine: 4 de opt şi 2 de doi;
2. - pachetul P_2: 1 nouă, 3 de şapte, 3 de şase şi 3 de cinci;
3. - pachetul P_3: 2 de zece şi 3 de trei;

X oferă partenerului său de pariu posibilitatea de a alege primul unul dintre pachete şi apoi alege el însuşi celălalt pachet. Fiecare alege o carte din propriul pachet, iar cel care are cartea mai mare câştigă. X este gata să pună ca pariu 10$ că va câştiga (aşteptând ca oponentul său să ofere aceeaşi sumă), deşi el face a doua alegere a unuia dintre pachetele rămase. Este acest pariu în avantajul celui care face prima alegere?

Soluţie: Să presupunem mai întâi că partenerul alege pachetul P_1 - în cazul acesta X alege P_3; oponentul lui X câştigă numai dacă extrage un opt, iar X un trei. Probabilităţile celor două evenimente sunt $4/6$ şi $3/5$; cu probabilitate $2/3 \cdot 3/5 = 2/5$ oponentul câştigă. Astfel, în acest caz X este avantajat.

Să presupunem acum că primul pachet ales este P_2 - în cazul acesta X alege P_1; X pierde dacă extrage un doi sau dacă extrage un opt iar oponentul său un nouă.

Similar, se poate arăta că, dacă oponentul său alege pachetul P_3, atunci N.H. poate alege unul dintre pachetele rămase şi are o probabilitate mai mare ca $1/2$ de a câştiga (exerciţiu). ♣

Proposition 6

(Formula lui Bayes) Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente aleatoare care realizează o partiţie a evenimentului sigur şi B un eveniment oarecare, atunci

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

($P(B|A_k)$ se numesc probabilităţi a priori, iar $P(A_k|B)$ sunt numite probabilităţi a posteriori.)

dem: $$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Exemplu. Se dau două urne, una conţinând trei bile albe şi patru bile negre, iar cealaltă patru bile albe şi cinci negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

Soluţie: Notăm $A_i =$"extragerea se face din urna U_i" $(i = \overline{1,2})$ şi $B =$"bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ şi $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Probabilităţile a priori sunt

$$P(B|A_1) = \frac{3}{7},\ P(B|A_2) = \frac{4}{9}.$$

Probabilitatea a posteriori cerută este

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2)} = \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Exemplu. Se dau două urne; prima conţine 3 bile roşii, 2 albastre şi 3 negre, iar a doua conţine 2 bile albe, 2 albastre şi 3 negre. Din prima urnă se extrage o bilă şi se pune în cea de-a doua urnă, apoi se extrage o bilă din cea de-a doua urnă.

(a) Dacă a doua bilă extrasă este neagră care este probabilitatea ca prima să fi fost albastră?

(b) Dacă a doua bilă extrasă este roşie care este probabilitatea ca prima să fi fost albastră?

(b) Dacă a doua bilă extrasă este albă care este probabilitatea ca prima să fi fost roşie?

Proposition 7

$$P(A|B) = P(C|B) \cdot P(A|B \cap C) + P(\overline{C}|B)P(A|B \cap \overline{C}),$$

dacă toate evenimentele care condiţionează sunt posibile.

proof:

$$P(C|B) \cdot P(A|B \cap C) + P(\overline{C}|B)P(A|B \cap \overline{C}) =$$

$$= \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} + \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(B)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B \cap \overline{C})} =$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).$$

■

Formula probabilităţii totale - versiunea condiţionată

Proposition 8

Fie $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ *o partiţie a evenimentului sigur*$(\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \Omega$ *and* $C_i \cap C_j = \varnothing,\ \forall\, i \neq j)$. *Pentru evenimentele* A *şi* B

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i|B) \cdot P(A|B \cap C_i),$$

dacă toate evenimentele care condiţionează sunt posibile.

proof:

$$\sum_{i=1}^{n} P(C_i|B) \cdot P(A|B \cap C_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(B \cap C_i)}{P(B)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C_i)}{P(B \cap C_i)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A \cap B \cap C_i)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).$$

$\blacksquare$

Exemplu. O urnă conţine două zaruri: unul, (D_1), are numărul 4 pe două dintre feţe, iar celălalt, (D_2), este un zar normal. Se extrage la întâmplare un zar din urnă şi acest zar este aruncat o dată. Dacă se obţine numărul 4, acelaşi zar se mai aruncă încă o dată, altfel se aruncă celălalt zar.

a) Care este probabilitatea ca la acea de-a doua aruncare să obţinem un 4?

b) Dacă la aruncarea a doua se obţine un 4, care este probabilitatea ca zarul extras din urnă să fi fost D_1?

Soluţia 1. Notăm cu A ="la a două aruncare se obţine un 4", B = "primul zar extras din urnă este D_1" şi C ="la prima aruncare se obţine un 4". a) Pentru $P(A)$ folosim formula probabilităţii totale

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B}).$$

Evident, $P(B) = 1/2$.

Pentru $P(A|B)$ şi $P(A|\overline{B})$ folosim versiunea condiţionată a formulei probabilităţii totale

$$P(A|B) = P(C|B)\cdot P(A|B\cap C) + P(\overline{C}|B)P(A|B\cap \overline{C}),$$

$$P(A|\overline{B}) = P(C|\overline{B})\cdot P(A|\overline{B}\cap C) + P(\overline{C}|\overline{B})P(A|\overline{B}\cap \overline{C}),$$

$P(C|B) = 1/3, P(\overline{C}|B) = 2/3, P(A|B\cap C) = 1/3, P(A|B\cap\overline{C}) = 1/6,$

$P(C|\overline{B}) = 1/6, P(\overline{C}|\overline{B}) = 5/6, P(A|\overline{B}\cap C) = 1/6, P(A|\overline{B}\cap\overline{C}) = 1/3.$

Astfel, $P(A|B) = 8/36, P(A|\overline{B}) = 11/36, P(A) = 19/72.$

b) Pentru a doua cerinţă folosim formula lui Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{8}{19}.$$

Versiunea condiţionată a formulei probabilităţii totale - exemplu

Soluţie alternativă pentru a). Punctul a) poate fi rezolvat aplicând de două ori formula probabilităţii totale; notăm cu $E =$"al doilea zar care se aruncă este D_1".

$$P(A) = P(E) \cdot P(A|E) + P(\overline{E}) \cdot P(A|\overline{E}),$$

$$P(E) = P(B) \cdot P(E|B) + P(\overline{B}) \cdot P(E|\overline{B}),$$

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

$$P(A|E) = 2/6, P(A|\overline{E}) = 1/6, P(E|B) = 2/6, P(E|\overline{B}) = 5/6.$$

Astfel, $P(E) = 7/12$, $P(\overline{E}) = 5/12$ şi $P(A) = 19/72$.

Exerciţii propuse spre rezolvare pentru seminar

- **Probabilitate condiţionată şi evenimente independente:** I.1, I.3, I.4, I.8, I.13, I.14 (b), I.17
- **Formula probabilităţii totale şi cea a lui Bayes:** II.2, II.4, II.8, II.9, II.10
- **Rezervă:** I.6, I.9, I.13, I.18, I.20, II.7, II.13, II.14

Sfârşit

I.1. Se aruncă un zar şi se consideră evenimentele A: apariţia uneia din feţele $1, 2$ sau 3 şi B: apariţia uneia din feţele $2, 3, 4$ sau 6. Evenimentele A şi B sunt independente?

I.2. Se aruncă două zaruri şi se notează cu a_1 valoarea primului zar şi cu a_2 valoarea celui de-al doilea. Să se arate că evenimentele "$a_1 \geqslant 4$" şi "$a_2 \leqslant 3$" sunt independente.

I.3. Un absolvent de liceu trimite cereri de admitere la Oxford şi la Cambridge. El ştie că Oxford îl va accepta cu probabilitate 0.4, iar Cambridge cu probabilitate 0.3. Ştie de asemenea că va fi acceptat de ambele universităţi cu probabilitate 0.2.

(a) Care este probabilitatea să fie aceptat de Cambridge dacă se ştie că a fost acceptat de Oxford?

(b) Evenimentele "este acceptat de Oxford" şi "este acceptat de Cambridge" sunt compatibile? Dar independente?

I.4. Se aruncă trei monede identice.

(a) Evenimentele "stema pe prima monedă" şi "valoarea pe ultimele două" sunt independente?

(b) Dar evenimentele "valoarea pe exact două monede" şi "valoarea pe toate monedele"?

I.5. Trei sportivi trag asupra unei ţinte; primul nimereşte ţinta cu probabilitatea $\frac{2}{3}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{3}{4}$, iar al treilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$. Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă

(a) de exact trei ori,

(b) de exact două ori,

(c) respectiv, măcar o dată?

I.6. Probabilitatea ca un student să promoveze examenul este 2/5, ca studentul aflat la dreapta lui să promoveze este 3/5, iar ca studentul aflat la stânga să promoveze este 1/5. Presupunem că studenţii nu se influenţează reciproc în timpul examenului. Care este probabilitatea ca exact doi studenţi să promoveze? Dar ca studentul din mijloc să promoveze ştiind că cel din stânga a promovat?

I.7. Patru persoane urcă împreună într-un lift al unei cladiri cu patru etaje. Locurile unde persoanele coboară din lift nu depind unele de celelalte; de asemenea fiecare coboară la unul dintre etaje cu probabilitate egală. Care este probabilitatea ca

(a) toate cele patru persoane să coboare la acelaşi etaj?

(b) cele patru persoane să coboare toate la etaje diferite?

(c) două persoane să coboare la acelaşi etaj şi celelalte două la un alt etaj (diferit de cel anterior)?

I.8. O urnă conţine 3 bile albe (două numerotate cu 1 şi una numerotată cu 2) şi 5 bile negre (două numerotate cu 1 şi trei numerotate cu 2). Se extrage din urnă o bilă.

(a) Dacă bila este albă care este probabilitatea ca ea să fie numerotată cu 1?

(b) Dacă bila este numerotată cu 2 care este probabilitatea ca ea să fie albă?

I.9. O urnă conţine 16 bile numerotate de 1 la 16 colorate astfel: $\underbrace{1, 2, 4, 5, 16}_{albe}, \underbrace{3, 6, 7, \ldots 13}_{negre}, \underbrace{14, 15}_{verzi}$. Se extrage o bilă din urnă. Se consideră evenimentele $A =$"bila extrasă este neagră" şi $B =$"bila extrasă are un număr mai mare sau egal cu 10".
Să se calculeze probabilităţile evenimentelor $A|B$, $A|\overline{B}$, $\overline{A}|B$, $\overline{A}|\overline{B}$.

I.10. Arătaţi că evenimentele A şi B sunt independente dacă

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(A \cap B)} + \frac{P(B)}{P(A \cap B)}.$$

I.11. Fie A şi B evenimente aleatoare posibile (i.e., cu probabilitate nenulă). Arătaţi că

(a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(B)P(A|B)$;

(b) $P(A \cup B | A \cap \overline{B}) = P(A | A \cap \overline{B}) P(B | \overline{A} \cap B)$;

(c) $\dfrac{P(A|A \cup B)}{P(B|A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$;

(d) $\dfrac{P(\overline{B}|A)}{P(B)} + \dfrac{P(\overline{A})}{P(A)} = \dfrac{P(\overline{A}|B)}{P(A)} + \dfrac{P(\overline{B})}{P(B)}$.

(e) $\dfrac{P(A \cap C|B)}{P(\overline{A} \cup \overline{C}|B)} = \dfrac{P(A \cap C)}{P(\overline{A} \cup \overline{C})} \dfrac{P(B|A \cap C)}{P(B|\overline{A} \cup \overline{C})}$.

I.12. Se dau trei evenimente aleatoare A_i, $i = \overline{1,3}$, astfel încât

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A3) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3).$$

Arătaţi că cele trei evenimente sunt independente în ansamblu.

I.13. Dacă evenimentele aleatoare A, B şi C sunt independente în ansamblu, atunci la fel sunt şi evenimentele A, B şi $\overline{C}$.

I.14. Fie A_1, A_2 şi A_3 ($P(A_3) > 0$) trei evenimente aleatoare independente în ansamblu. Demonstraţi că

(a) $P(A_1 \cap A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) P(A_2 | A_3)$ şi

(b) $P(A_1 \cup A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) + P(A_2 | A_3) - P(A_1 \cap A_2 | A_3)$.

I.15. Evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4 sunt independente în ansamblu şi $P(A_3 \cap A_4) > 0$. Arătaţi că $P(A_1 \cup A_2 | A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cup A_2)$.

I.16*. Se aruncă pe rând două monede. Probabilitatea de a obţine stema la amândouă aruncările este $1/8$, iar cea de de a obţine stema la amândouă aruncările ştiind că la cel puţin una dintre aruncări s-a obţinut stema este $3/14$. Care este probabilitatea de a obţine stema pentru prima şi a doua monedă.

I.17. O monedă se aruncă de două ori. Se definesc evenimentele $A =$"apare stema la prima aruncare", $B =$"apare stema la cea de-a doua aruncare" şi $C =$"la cele două aruncări avem rezultate diferite". Arătaţi că cele trei evenimente aleatoare sunt mutual independente fără a fi independente în ansamblu.

I.18. Un zar se aruncă de două ori; definim $A =$"la prima aruncare se obţine 1, 3 sau 5", $B =$"la prima aruncare se obţine 3, 4 sau 5", $C =$"suma este 3 sau 7". Arătaţi că $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ dar A, B şi C nu sunt independente în ansamblu.

I.19. Să ne întoarcem la exerciţiul I.17. Arătaţi că evenimentele A şi B nu sunt independente condiţionat de C.

I.20. Ne întoarcem acum la exerciţiul I.17. Evenimentele A şi C sunt independente condiţionat de B?

I.21*. Daţi exemplu de trei evenimente aleatoare A, B şi C astfel încât $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ şi $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \neq P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$.

I.22. Fie $C \neq \varnothing, \Omega$; dacă evenimentele A şi B sunt independente condiţionat de C, atunci sunt indepedente condiţionat şi de $\overline{C}$?

I.23. Fie A, B şi C evenimente independente, cu $P(C) > 0$. Arătaţi că A şi B sunt independente condiţionat de C.

I.24*. Dintr-un grup de trei prizonieri doi urmează să fie eliberaţi. Unul dintre prizonieri (John) îşi întreabă gardianul care dintre ceilalţi doi prizonieri (în afară de el) va fi eliberat. Gardianul raţionează astfel: probabilitatea ca John să fie eliberat este 2/3, dar dacă i-ar răspunde la întrebare probabilitatea ar scădea la 1/2 - şi refuză să răspundă acestei întrebări. Este corect acest raţionament?

II.1. Se dau patru urne identice la exterior, conţinând: U_1 - 4 bile albe şi 5 bile negre; U_2 - 3 bile albe şi 7 bile negre; U_3 - 2 bile albe şi 4 bile negre; U_4 - 3 bile albe şi 5 bile negre. Dintr-una dintre cele patru urne, la întâmplare, se extrage o bilă.

(a) Să se calculeze probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.

(b) Dacă bila extrasă este neagră să se calculeze probabilitatea ca ea să provină din urna U_2.

II.2. Probabilitatea ca o uşă să fie încuiată este $1/2$. Cheia de la această uşă se găseşte pe un panou unde sunt 12 chei. Alegem două chei de pe panou,

(a) Care este probabilitatea ca uşa să poată fi deschisă (fără a ne întoarce după o altă cheie)?

(b) Dacă am deschis uşa, care este probabilitatea ca ea să fi fost încuiată?

II.3. Într-o urnă sunt trei monede: una dintre ele (M_1) are probabilitatea de apărea stema la o aruncare egală cu 1/4, o a doua (M_2) are această probabilitate egală cu 3/4, iar cea de-a treia (M_3) este o monedă normală. Din urnă se extrage la întâmplare o monedă care se aruncă o dată.

a) Care este probabilitatea ca în urma aruncării să apară stema?

b) Dacă se obţine doar stema, care este probabilitatea ca moneda extrasă din urnă să fie M_1?

II.4. Într-o urnă sunt patru zaruri: unul dintre ele (Z_1) are numărul 6 pe toate feţele, un al doilea (Z_2) are numărul 6 pe trei dintre feţe şi numărul 3 pe celelalte trei feţe, iar celelalte două zaruri (Z_3, Z_4) sunt normale. Din urnă se extrage la întâmplare un zar care se aruncă de două ori.

a) Care este probabilitatea ca la cele două aruncări să apară numai faţa cu numărul 6?

b) Dacă la cele două aruncări se obţine numai faţa cu numărul

II.5. Într-o urnă sunt trei monede: una dintre ele (M_1) are stema pe ambele feţe, a doua (M_2) are banul pe ambele feţe, iar cea de-a treia (M_3) este o monedă normală. Din urnă se extrage la întâmplare o monedă care se aruncă de două ori.

a) Care este probabilitatea ca din cele două aruncări să apară stema numai o dată?

b) Dacă la cele două aruncări se obţine stema doar o dată, care este probabilitatea ca moneda extrasă din urnă să fie M_3? Aceeaşi întrebare pentru M_2.

II.6. Într-o urnă sunt patru pachete de cărţi: unul dintre ele (P_1) conţine doar 5 de treflă (52 de cărţi identice), al doilea şi al treilea pachet (P_2, P_3) sunt normale, iar ultimul (P_4) conţine doar aşi de treflă (52 de cărţi identice). Din urnă se extrage la întâmplare un pachet, iar din pachet se extrage o carte.

a) Care este probabilitatea de a obţine un număr (între 2 şi 10 inclusiv) de treflă?

II.7. Urna U_1 conţine trei bile roşii şi cinci bile verzi, iar urna U_2 patru bile roşii şi doua verzi. Două zaruri sunt aruncate şi, dacă pe primul zar apare o faţa pară, atunci se extrage o bilă din urna U_1, iar dacă pe al doilea zar apare o faţă pară se extrage o bilă din urna U_2, altfel nu extragem din nici o urnă.

a) Care este probabilitatea să obţinem cel puţin o bilă roşie?

b) Dacă se obţine cel puţin o bilă roşie, care este probabilitatea ca ambele zaruri să fi avut feţe pare?

II.8. Avem două urne: U_1 conţine două zaruri obişnuite şi două care au numărul 4 pe trei dintre feţe, iar U_2 conţine trei zaruri normale şi unul care are numărul 4 pe trei dintre feţe. Din U_1 se extrage un zar care se introduce în U_2. Apoi se extrage un zar din U_2 şi se aruncă o dată. a) Care este probabilitatea ca la aruncarea zarului să apară faţa 4? b) Dacă la aruncare s-a obţinut faţa 4, care este probabilitatea ca primul zar extras să fi fost normal?

II.9. Într-o urnă sunt două zaruri: unul are numărul 3 pe patru dintre feţe, celălalt fiind normal. Un zar este ales la întâmplare şi se aruncă o dată. Dacă se obţine numărul 3, acelaşi zar este aruncat încă o dată, dacă nu, atunci se aruncă celălalt zar.

a) Care este probabilitatea ca la a doua aruncare să apară numărul 3?

b) Dacă la a doua aruncare s-a obţinut numărul 3, care este probabilitatea ca zarul ales la început să fi fost cel normal?

II.10. Se dau trei urne: U_1 conţine 3 bile albe şi 4 bile negre, U_2 conţine 2 bile albe şi 2 negre, iar U_3 3 bile albe şi 2 negre. Din U_1 se extrage o bilă şi se introduce în U_2, apoi se extrage o bilă din U_2 şi se introduce în U_3. Apoi se extrage o bilă din U_3.

a) Care este probabilitatea ca la ultima extragere să obţinem o bilă albă?

b) Dacă la ultima extragere s-a obţinut o bilă albă, care este probabilitatea ca la prima extragere s-a obţinut o bilă albă?

II.11. Într-o urnă sunt două zaruri: unul are pe trei feţe numărul 3 şi pe celelalte numărul 6, iar celălalt zar este normal. Un zar este ales la întâmplare din urnă; zarul ales se aruncă o dată. Dacă se obţine numărul 6, acelaşi zar este aruncat încă o dată, dacă se obţine un număr diferit de 6, atunci se aruncă celălalt zar.

a) Care este probabilitatea ca la a doua aruncare să apară numărul 6?

b) Dacă la a doua aruncare s-a obţinut un 6, care este probabilitatea ca zarul extras să nu fi fost cel normal?

II.12. Avem două zaruri: unul are pe patru feţe numărul 5 şi pe celelalte numărul 2, iar celălalt este normal. Un zar este ales la întâmplare şi se aruncă o dată. Dacă se obţine numărul 5, atunci se aruncă celălalt zar, dacă nu, acelaşi zar se mai aruncă o dată.

a) Care este probabilitatea ca a doua oară să apară un 5?

b) Dacă la a doua aruncare nu s-a obţinut un 5, care este probabilitatea ca zarul extras să fi fost cel normal?

II.13. Într-o urnă sunt trei monede: una are stema pe ambele feţe, una are banul pe ambele feţe, iar ultima este obişnuită. Se extrage din urnă o monedă, care apoi se aruncă şi se reţine faţa obţinută.

(a) Care este probabilitatea de a obţine banul?

(b) Dacă s-a obţinut stema, care este probabilitatea ca moneda extrasă să fi fost cea normală?

II.14*. k urne conţin fiecare câte p bile roşii şi q bile albastre. O bilă este extrasă la întâmplare din prima urnă şi introdusă în cea de-a doua, apoi o bile este extrasă la întâmplare din urna a doua şi introdusă în cea de-a treia etc. La final o bilă se extrage din ultima urnă. Care este probabilitatea ca ultima bilă extrasă să fie albastră?

II.15. Avem două monede, una roşie şi una albastră. Alegem una dintre ele cu probabilitate 0.5 şi o aruncăm de două ori. Cele două monede nu sunt corect construite: la o aruncare oarecare cea albastră are probabilitatea de a apărea stema de 0.99, pe când cea roşie are această probabilitate egală cu 0.01. Fie C evenimentul că moneda albastră a fost aleasă pentru a fi aruncată şi fie A_i evenimentul că la aruncarea i a apărut banul.

(a) Arătaţi că, ştiind că evenimentul C s-a produs A_1 şi A_2 sunt independente.

(b) Arătaţi că A_1 şi A_2 nu sunt independente (necondiţionat)..

II.16. Două urne conţin: una p bile albe şi una p bile negre ($p \geqslant 3$). Se fac două schimburi succesive; un schimb constă din extragerea simultană a câte unei bile din fiecare urnă şi introducerea ei în cealaltă urnă. Care este probabilitatea ca după cele două schimburi, urnele să aibă acelaşi conţinut. Dar după patru schimburi succesive?

II.17. Fie A şi B două evenimente posibile. Se spune ca A *sugerează* B, dacă $P(A|B) > P(A)$ şi că *nu sugerează* B dacă $P(A|B) < P(A)$.

(a) Să se arate că A sugerează B dacă şi numai dacă B sugerează A.

(b) Dacă $\overline{A}$ este eveniment posibil, atunci A sugerează B dacă şi numai dacă $\overline{A}$ nu sugerează B.

(c) O comoară se găseşte într-unul din două locuri cunoscute cu probabilităţi $\beta \in (0,1)$ respectiv $(1-\beta)$. Căutăm mai întâi în primul loc şi găsim comoara cu probabilitate $p > 0$. Arătaţi că evenimentul de a nu găsi comoara în primul loc sugerează că ea se găseşte în cel de-al doilea loc

II.18. O urnă conţine o bilă albă şi două bile roşii. Se extrage o bilă din urnă şi se procedează astfel: dacă bila este albă, ea se pune înapoi împreună cu o altă bilă albă; dacă bila extrasă este roşie, ea este pusă înapoi împreună cu alte două bile roşii. Apoi se mai extrage o bilă din urnă.

(a) Care este probabilitatea ca a două bilă extrasă să fie roşie?

(b) Dacă a doua bilă extrasă este roşie, care este probabilitatea ca prima să fi fost roşie?

II.19. În limba engleză "rigoare" se traduce prin "rigour", iar în americană prin "rigor". Un anglo-saxon aflat într-un hotel din Paris foloseşte într-o scrisoare acest cuvânt (40% dintre anglo-saxonii cazaţi la hotel sunt englezi şi 60% americani). Se alege la întâmplare şi uniform o literă din acest cuvânt. Care este probabilitatea ca litera să fie o vocală? Dacă se alege o vocală, care este probabilitatea ca scrisoarea să aparţină unui englez?

II.20. Un informatician cere angajatorului său o recomandare pentru un nou loc de muncă. El estimează că are 50% şanse de a primi noua slujbă cu o recomandare puternică, 40% cu o recomandare moderată şi 20% cu o recomandare slabă. De asemenea consideră că angajatorul săâi va oferi o recomandare puternică, moderată sau slabă cu probabilitatea 0.4, 0.4 şi 0.2, respectiv.

(a) Care este probabilitatea ca informaticianul să primească o nouă slujbă?

(b) Dacă primeşte o nouă slujbă, care este probabilitatea să fi avut o recomandare slabă?

II.21. Arătaţi că, dacă evenimentele aleatoare E şi F sunt independente, atunci

$$P(A|E) = P(A|E \cap F)P(F) + P(A|E \cap \overline{F})P(\overline{F}), \forall A \subseteq \Omega.$$

Afirmaţia reciprocă este adevărată?

II.22*. Un anumit curs are o prezenţă scăzută. Profesorul hotărăşte să nu ţină cursul dacă nu sunt prezenţi cel puţin k din cei n studenţi înscrişi la curs. Fiecare student vine la curs independent cu probabilitate p_b dacă vremea este bună şi cu probabilitate p_r dacă vremea este rea. Se cunoaşte probabilitatea, q, ca vremea să fie rea într-o anumită zi.

(a) Calculaţi probabilitatea ca profesorul să îşi ţină cursul într-o anumită zi.

(b) Dacă se ţine cursul într-o anumită zi, care este probabilitatea ca vremea să fi fost rea?

II.23*. (Jocul celor două plicuri) Două plicuri conţin câte o suma de bani (numere întregi distincte, necunoscute). O persoană alege la întâmplare unul dintre cele două plicuri şi după ce se uită înăuntru poate alege sa schimbe plicul. X susţine că următoarea strategie măreşte peste 0.5 probabilitatea de a determina plicul mai valoros: se aruncă o monedă în mod repetat, fie $X = 0.5$ plus numărul de aruncări până la apariţia stemei prima oară; plicul deja deschis este schimbat numai dacă suma din el este mai mică decât valoarea lui X. Este adevărat ce susţine X?

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.