

Limbaje Formale, Automate și Compilatoare

Curs 2

2018-19

Curs 2

- 1 Proprietăți de închidere pentru \mathcal{L}_3
- 2 Automate finite deterministe
- 3 Automate finite nedeterministe

Fie L, L_1, L_2 limbaje regulate: există gramaticile G, G_1, G_2 de tip 3 astfel ca $L = L(G), L_1 = L(G_1)$ și $L_2 = L(G_2)$.

Atunci, următoarele limbaje sunt de asemenea regulate:

1 $L_1 \cup L_2$

2 $L_1 \cdot L_2$

3 L^*

4 $L_1 \cap L_2$

5 $L_1 \setminus L_2$

Închiderea la reuniune

Fie L, L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ și $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3 cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Presupunem $N_1 \cap N_2 = \emptyset$

Închiderea la reuniune: se arată ca $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$:

Gramatica $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\})$ este de tip 3 și generează limbajul $L_1 \cup L_2$

Închiderea la operația de produs

Fie L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ și $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3 cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Presupunem $N_1 \cap N_2 = \emptyset$

Gramatica $G = (N_1 \cup N_2, T_1 \cup T_2, S_1, P)$ unde P consta din:

- regulile de forma $A \rightarrow uB$ din P_1 ($B \in N_1$)
- reguli $A \rightarrow uS_2$ pentru orice regula de forma $A \rightarrow u$ ($u \in T_1^*$) din P_1
- toate regulile din P_2

este de tip 3 și generează limbajul $L_1 L_2$.

Exemplu

$$L = \{uc^n, u \in \{a, b\}^+, n \geq 2\}$$

$$L = L_1 \cdot L_2, \text{ unde: } L_1 = \{a, b\}^+, L_2 = \{c^n, n \geq 2\}$$

$G1 :$	$G2 :$	G	$=$
$\textcircled{1} S_1 \rightarrow aS_1$ $\textcircled{2} S_1 \rightarrow bS_1$ $\textcircled{3} S_1 \rightarrow a$ $\textcircled{4} S_1 \rightarrow b$	$\textcircled{1} S_2 \rightarrow cS_2$ $\textcircled{2} S_2 \rightarrow cc$	$(\{S_1, S_2\}, \{a, b, c\}, S_1, P),$ $P :$ $\textcircled{1} S_1 \rightarrow aS_1$ $\textcircled{2} S_1 \rightarrow bS_1$ $\textcircled{3} S_1 \rightarrow aS_2$ $\textcircled{4} S_1 \rightarrow bS_2$ $\textcircled{5} S_2 \rightarrow cS_2$ $\textcircled{6} S_2 \rightarrow cc$	

Închiderea la operația de iterație

Fie L limbaj de tip 3 (regulat).

Fie $G = (N, T, S, P)$ de tip 3 care generează L ($L = L(G)$).

Presupunem ca simbolul de start S nu apare în partea dreaptă a vreunei reguli.

Gramatica $G' = (N, T, S, P')$ unde P' constă din

- reguli $A \rightarrow uB$ din P ($B \in N$)
- reguli $A \rightarrow uS$, pentru orice regula $A \rightarrow u$ din P ($u \in T^*$), diferită de $S \rightarrow \epsilon$
- regula $S \rightarrow \epsilon$

este de tip 3 și generează L^*

Exemplu

$$L = \{a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \dots a^{n_k} b^{m_k}, n_i, m_i \geq 1 \forall i \in \{1, k\}, k \geq 0\}$$

$$L = \{a^n b^m, n \geq 1, m \geq 1\}^*$$

$G :$

$$\textcircled{1} S \rightarrow x$$

$$\textcircled{2} x \rightarrow ax$$

$$\textcircled{3} x \rightarrow ay$$

$$\textcircled{4} y \rightarrow by$$

$$\textcircled{5} y \rightarrow b$$

$G' :$

$$\textcircled{1} S \rightarrow x$$

$$\textcircled{2} x \rightarrow ax$$

$$\textcircled{3} x \rightarrow ay$$

$$\textcircled{4} y \rightarrow by$$

$$\textcircled{5} y \rightarrow bS$$

$$\textcircled{6} S \rightarrow \epsilon$$

Închiderea la intersecție

Fie L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ și $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3, în **formă normală**, cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Gramatica $G = (N_1 \times N_2, T_1 \cap T_2, (S_1, S_2), P)$, unde P constă din:

- $(S_1, S_2) \rightarrow \epsilon$, dacă $S_1 \rightarrow \epsilon \in P_1$ și $S_2 \rightarrow \epsilon \in P_2$
- $(A_1, B_1) \rightarrow a(A_2, B_2)$, dacă $A_1 \rightarrow aA_2 \in P_1$ și $B_1 \rightarrow aB_2 \in P_2$
- $(A_1, A_2) \rightarrow a$, dacă $A_1 \rightarrow a \in P_1$ și $A_2 \rightarrow a \in P_2$

este de tip 3 și generează limbajul $L_1 \cap L_2$

Exemplu

$$L(G1) = \{a^n b^k, n \geq 0, k \geq 2\}, L(G2) = \{b^n v^k, n \geq 1, k \geq 0\}$$

$$L(G) = \{b^n, n \geq 2\}$$

G1 :	G2 :	G
1 $S_1 \rightarrow aS_1$	1 $S_2 \rightarrow bS_2$	1 $(S_1, S2) \rightarrow b(A, S2)$
2 $S_1 \rightarrow bA$	2 $S_2 \rightarrow bB$	2 $(S_1, S2) \rightarrow b(A, B)$
3 $A \rightarrow bA$	3 $S_2 \rightarrow b$	3 $(A, S2) \rightarrow b(A, S2)$
4 $A \rightarrow b$	4 $B \rightarrow cB$	4 $(A, S2) \rightarrow b(A, B)$
	5 $B \rightarrow c$	5 $(A, S2) \rightarrow b$

Exemplu

$$L(G1) = \{a^n b^k, n \geq 0, k \geq 2\}, L(G2) = \{b^n v^k, n \geq 1, k \geq 0\}$$

$$L(G) = \{b^n, n \geq 2\}$$

G1 :

$$\textcircled{1} S_1 \rightarrow aS_1$$

$$\textcircled{2} S_1 \rightarrow bA$$

$$\textcircled{3} A \rightarrow bA$$

$$\textcircled{4} A \rightarrow b$$

G2 :

$$\textcircled{1} S_2 \rightarrow bS_2$$

$$\textcircled{2} S_2 \rightarrow bB$$

$$\textcircled{3} S_2 \rightarrow b$$

$$\textcircled{4} B \rightarrow cB$$

$$\textcircled{5} B \rightarrow c$$

G

$$\textcircled{1} S \rightarrow bX$$

$$\textcircled{2} S \rightarrow bY$$

$$\textcircled{3} X \rightarrow bX$$

$$\textcircled{4} X \rightarrow bY$$

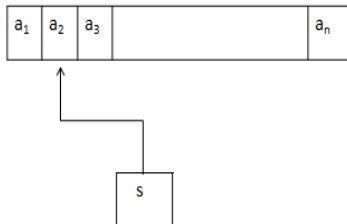
$$\textcircled{5} X \rightarrow b$$

Curs 2

- 1 Proprietăți de închidere pentru \mathcal{L}_3
- 2 **Automate finite deterministe**
- 3 Automate finite nedeterministe

Automate finite

- Mecanism de recunoaștere (acceptare) pentru limbaje
- Limbaje de tip 3
- Mulțime finită de stări



Automate finite

Definiție 1

Un automat finit determinist este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, unde:

- Q și Σ sunt mulțimi finite, nevide, numite mulțimea stărilor respectiv alfabetul de intrare*
- $q_0 \in Q$ este starea inițială*
- $F \subseteq Q$ este mulțimea stărilor finale*
- δ este o funcție, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$, numită funcția de tranziție*

Reprezentare prin diagrame(grafuri) de tranziție

Stări:



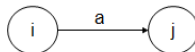
Stare inițială:



Stări finale:

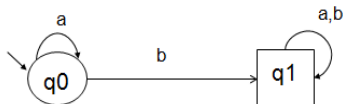


Funcția de tranziție:



Reprezentare prin matricea de tranziție

$$A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$



Intrare		a	b
Stare	δ		
q0		q0	q1
q1		q1	q1

Limbajul acceptat

- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$
 - 1 $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q, \forall q \in Q;$
 - 2 $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$
- **Observații:**
 - $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$
 - $\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v), \forall q \in Q, \forall u, v \in \Sigma^*$

Limbajul acceptat

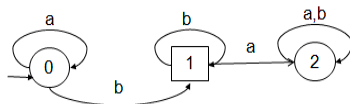
Definiție 2

Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul $A = (Q, \delta, \Sigma, q_0, F)$ este mulțimea :

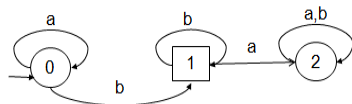
$$L(A) = \{w | w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w , automatul (pornind din starea inițială q_0) ajunge într-o stare finală.
- $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$. Din acest motiv, $\hat{\delta}$ va fi notată de asemenea cu δ .
- Două automate A și A' sunt **echivalente**, dacă $L(A) = L(A')$

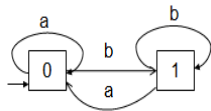
Exemple



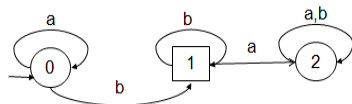
Exemple



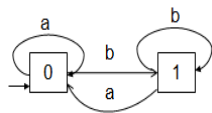
$$L(A) = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 1\}$$



Exemple



$$L(A) = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 1\}$$



$$L(A) = \{a, b\}^*$$

Exemple

Automate deterministe pentru:

- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ conține un număr par de } 0\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ se termina cu } 11\}$

Curs 2

- 1 Proprietăți de închidere pentru \mathcal{L}_3
- 2 Automate finite deterministe
- 3 Automate finite nedeterministe

Automate finite nedeterministe

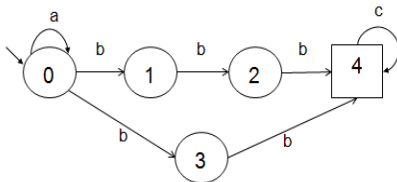
Definiție 3

Un *automat finit nedeterminist* este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, unde:

- Q, Σ, q_0 și F sunt definite ca în cazul automatelor finite deterministe
- δ este o funcție, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$, numită funcția de tranziție
- **Observație:**
A este *automat determinist*, dacă

$$|\delta(q, a)| = 1, \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$$

Exemple



Intrare Stare	a	b	c
0	{0}	{1,3}	Φ
1	Φ	{2}	Φ
2	Φ	{4}	Φ
3	Φ	{4}	Φ
4	Φ	Φ	{4}

Extensia lui δ la cuvinte

- Fie S mulțime de stări. Notăm $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$.
- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$
 - 1 $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}, \forall q \in Q;$
 - 2 $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$

Extensia lui δ la cuvinte

- Fie S mulțime de stări. Notăm $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$.
- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$
 - 1 $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}, \forall q \in Q;$
 - 2 $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma.$
- **Observații:**
 - $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$
 - $\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v), \forall q \in Q, \forall u, v \in \Sigma^*.$

Limbajul acceptat

Definiție 4

Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul finit nedeterminist

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ este mulțimea :

$$L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w , automatul (pornind din starea inițială q_0) poate să ajungă într-o stare finală.

Determinism = Nedeterminism

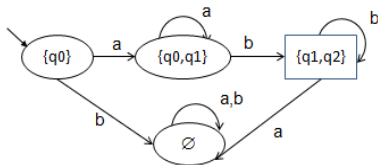
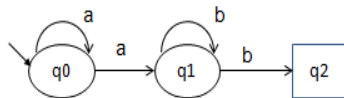
Teorema 1

Pentru orice automat nedeterminist A , există unul determinist A' echivalent.

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$
- Pentru aplicații se construiesc doar stările accesibile din starea inițială

Exemplu



Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

Au loc:

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w), \forall w \in \Sigma^*$

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w), \forall w \in \Sigma^*$
- $\delta'(Q_0, w) = \delta'(\{q_0\}, w) = \bigcup_{s \in \{q_0\}} \delta(s, w) = \delta(q_0, w)$

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S \mid S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w), \forall w \in \Sigma^*$
- $\delta'(Q_0, w) = \delta'(\{q_0\}, w) = \bigcup_{s \in \{q_0\}} \delta(s, w) = \delta(q_0, w)$
- $w \in L(A') \Leftrightarrow$
 $\delta'(Q_0, w) \in F' \Leftrightarrow \delta'(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$
 $\Leftrightarrow w \in L(A)$