Algoritmica Grafurilor - Cursul 7

Noiembrie 2018

1. Cuplaje
   - Formularea analitică a problemei cuplajului maxim
   - Cuplaje perfecte - Teorema lui Tutte
   - Cuplaje de cardinal maxim - Teorema lui Berge
   - Cuplaje de cardinal maxim - Algoritmul Hopcroft-Karp
2. Fluxuri în reţele
   - Reţele de transport
   - Flux, valoarea fluxului, problema fluxului maxim
3. Exerciţii pentru seminarul din săptămâna a 11-a

Fie $G = (V, E)$ un graf şi $\mathcal{M}_G$ familia cuplajelor sale.

Problem cuplajului maximum.

$\mathbf{P_1}$ dat un graf $G = (V, E)$, determinaţi $M^* \in \mathcal{M}_G$ astfel încât

$$|M^*| = \max_{M \in \mathcal{M}_G} |M|.$$

Fie $B = (b_{ij})_{n \times m}$ matricea de incidenţă a lui G (se consideră câte o ordonare fixată a celor n noduri al lui G şi a celor m muchii ale lui G) cu

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă muchia } j \text{ este incidentă cu nodul } i \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

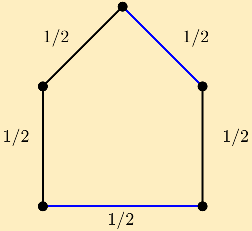
Dacă $\mathbf{1}_p$ este vectorul p-dimensional cu toate componentele 1, atunci problema $\mathbf{P_1}$ poate fi descrisă echivalent astfel:

$$\mathbf{P}'_1 \max\left\{\mathbf{1}_m^T\mathbf{x} \;:\; B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{1}_n, \mathbf{x} \geqslant 0, x_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,m}\right\}.$$

$\mathbf{P}'_1$ este o problemă ILP (Integer Linear Programming), care este în general **NP**-hard. Vom încerca să rezolvăm $\mathbf{P}'_1$, folosind problema (relaxată) asociată LP (Linear Programming)

$$\mathbf{LP}'_1 \max\left\{\mathbf{1}_m^T\mathbf{x} \;:\; B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{1}_n, \mathbf{x} \geqslant 0\right\}.$$

Soluţiile optime ale lui $\mathbf{LP}'_1$ pot avea componente ne-întregi şi de asemeni valorile lor optime pot fi mai mari decât $\nu(G)$. De exemplu, dacă $G = C_{2n+1}$, atunci $\nu(G) = n$, dar soluţia $x_i = 1/2$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant 2n+1$ este optimă pentru problema corespunzătoare $\mathbf{LP}'_1$ cu valoarea optimă $n + 1/2 > n$.



Urmează că dacă graful G are circuite impare, problema $\mathbf{P_1}$ nu poate fi rezolvată folosind $\mathbf{LP'_1}$. Mai precis,

Teorema 1

(Balinski, 1971) Punctele extreme ale politopului $B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{1}_n$, $\mathbf{x} \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, au componentele din $\{0, 1/2, 1\}$. Componentele $1/2$ apar dacă şi numai dacă G are circuite impare.

- Astfel, problema $\mathbf{P_1}$ este uşoară dacă graful este bipartit: se rezolvă problema $\mathbf{LP_1'}$ şi soluţia (întreagă) optimă găsită este o soluţie optimă şi pentru $\mathbf{P_1}$.
- Adaptări combinatoriale ale algoritmului simplex pentru rezolvarea problemei de programare liniară au condus la aşa numita "metodă ungară" pentru rezolvarea $\mathbf{P_1}$ în grafuri bipartite.
- Vom discuta o soluţie mai rapidă găsită de Hopcroft şi Karp (1973).
- Cu toate acestea, teorema de de dualitate din programarea liniară şi integralitatea soluţiei optime pot fi folosite pentru a obţine şi explica rezultatele (deja dovedite) despre cuplaje în grafuri bipartite:

Teorema 2

(Hall, 1935) Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit. Există un cuplaj în G care saturează toate nodurile din S dacă şi numai dacă

$$|N_G(A)| \geqslant |A|, \forall A \subseteq S.$$

Teorema 3

(Konig, 1930) Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit. Cardinalul maxim al unui cuplaj în G este egal cu cardinalul minim al unei acoperiri cu noduri a lui G, $\nu(G) = n - \alpha(G)$.

Cuplaje perfecte - Teorema lui Tutte

Fie G be un graf. Evident, $|M| \leqslant |G|/2$, $\forall M \in \mathcal{M}_G$. Un **cuplaj perfect** (sau **1-factor**) în G este un cuplaj M cu proprietatea $|M| = |G|/2$ (i. e., $S(M) = V(G)$).

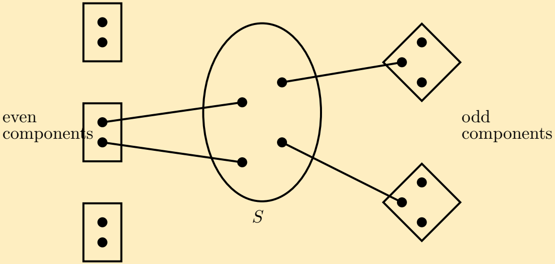
O componentă conexă a grafului G este pară (impară) dacă numărul nodurilor sale este par (impar). Notăm cu $q(G)$ numărul componentelor conexe impare ale lui G.

Remarcă

Fie G un graf care are un cuplaj perfect. Evident, fiecare componentă conexă a lui G este pară. Astfel, $q(G) = 0$. Mai mult, dacă $S \subseteq V(G)$ atunci pentru fiecare componentă conexă impară din graful $G - S$ trebuie să existe o muchie în cuplajul perfect al grafului cu o extremitate în această componentă conexă şi cealaltă în S. Deoarece extremităţile muchiilor diferite sunt distincte, urmează că $|S| \geqslant q(G - S)$.

Pentru $S = \varnothing$ în (T), obţinem $q(G - \varnothing) \leqslant 0$, deci $q(G) = 0$.

Cuplaje perfecte - Teorema lui Tutte



Teorema 4

(Tutte, 1947) Un graf G admite cuplaj perfect dacă şi numai dacă

(T) $$q(G-S) \leqslant |S|, \forall S \subseteq V(G).$$

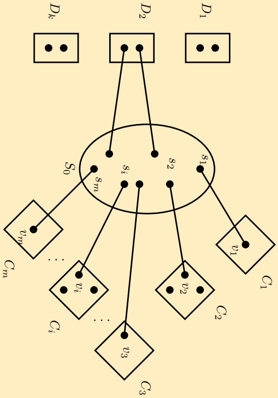
Demonstraţie. Necesitatea condiţiei (T) a fost dovedită în discuţia de mai sus. Demonstrăm prin inducţie după $n = |G|$ că dacă un graf $G = (V, E)$ satisface (T), atunci G are un cuplaj perfect.

Pentru $n = 1, 2$ teorema are loc evident. În pasul inductiv, fie G un graf cu $n \geqslant 3$ noduri care satisface (T) şi să presupunem că orice graf G' cu $|G'| < n$ şi care satisface (T) are un cuplaj perfect.

Fie $S_0 \subseteq V(G)$ astfel încât $q(G - S_0) = |S_0|$ şi maximală cu proprietatea că avem egalitate în (T) (i. e., pentru orice supramulţime S a lui S_0 avem $q(G - S) < |S|$).

Observăm că familia de submulţimi ale lui $V(G)$ pentru care (T) este satisfăcută cu egalitate este nevidă, şi, deci, există un S_0 (pentru fiecare nod v_0 care nu este punct de articulaţie, avem $q(G - v_0) = 1 = |\{v_0\}|$, deoarece fiecare componentă conexă este pară şi în fiecare componentă conexă cu cel puţin un nod, există un astfel de nod v_0).

Fie $m = |S_0| > 0$, $C_1, C_2, \ldots, C_m$ componentele impare ale lui $G - S_0$ şi $D_1, D_2, \ldots, D_k$ componentele pare ale lui $G - S_0$ ($k \geqslant 0$):



Vom construi un cuplaj perfect compus din

a) câte un cuplaj perfect în fiecare componentă conexă pară D_i;

b) un cuplaj cu m muchii, $\{e_1, \ldots, e_m\}$, muchia e_i având un capăt $s_i \in S$ şi celălalt $v_i \in C_i$ $(i = 1, \overline{1, m})$;

c) cuplaj perfect in fiecare subgraph $C_i - v_i$ $(i = 1, \overline{1, m})$.

a) Pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$ graful $[D_i]_G$ admite cuplaj perfect. Într-adevăr, deoarece $m > 0$, urmează că $|D_i| < n$ şi din ipoteza inductivă este suficient să arătăm că $G' = [D_i]_G$ satisface (T).

Fie $S' \subseteq D_i$. Dacă $q(G' - S') > |S'|$, atunci obţinem următoarea contradicţie:

$$q(G-(S_0 \cup S')) = q(G - S_0) + q(G' - S') = |S_0| + q(G' - S') > |S_0 \cup S'|.$$

Astfel, $q(G' - S') \leqslant |S'|, \forall S' \subseteq D_i$, i. e., G' satisface (T).

b) Fie $H = (S_0, \{C_1, \dots, C_m\}; E')$ graful bipartit cu o clasă a bipartiţiei S_0, cealaltă clasă mulţimea componentelor conexe impare ale lui $G - S_0$, şi cu muchiile de forma $\{s, C_i\}$, unde $s \in S_0$ astfel că există $v \in C_i$ cu $sv \in E(G)$.

H are un cuplaj perfect. Într-adevăr, arătăm că H satisface condiţia din teorema lui Hall pentru existenţa unui cuplaj M_0 care saturează $\{C_1, \dots, C_m\}$.

Fie $A \subseteq \{C_1, \dots, C_m\}$. Atunci $B = N_H(A) \subseteq S_0$, şi din construcţia lui H, în graful G nu avem nicio muchie de la un nod $v \in S_0 - B$ la un nod $w \in C_i \in A$. Astfel componentele conexe impare din A rămân componente conexe impare şi în $G - B$; astfel $q(G - B) \geqslant |A|$. Deoarece G satisface condiţia lui Tutte (T), avem $|B| \geqslant q(G - B)$. Am obţinut că $|N_H(A)| = |B| \geqslant |A|$.

Din teorema lui Hall H are un cuplaj M_0, care saturează $\{C_1, \ldots, C_m\}$; deoarece $|S_0| = m$, M_0 este perfect.

$$M_0 = \{s_1v_1, s_2v_2, \ldots, s_mv_m\}, S_0 = \{s_1, \ldots, s_m\}, v_i \in C_i, \forall i = \overline{1, m}.$$

c) $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ graful $G' = [C_i - v_i]_G$ admite cuplaj perfect. Folosind ipoteza inductivă, este suficient să dovedim că G' satisface (T).

Fie $S' \subseteq C_i - v_i$. Dacă $q(G' - S') > |S'|$, atunci, deoarece $q(G' - S') + |S'| \equiv 0 \ (mod\ 2)$ (pentru că $|G'|$ este par), urmează că $q(G' - S') \geqslant |S'| + 2$.

Dacă $S'' = S_0 \cup \{v_i\} \cup S'$, avem

$$|S''| \geqslant q(G - S'') = q(G - S_0) - 1 + q(G' - S') = |S_0| - 1 + q(G' - S') \geqslant$$

$$\geqslant |S_0| - 1 + |S'| + 2 = |S''|,$$

i. e., $q(G - S'') = |S''|$, în contradicţie cu alegerea lui S_0 (deoarece $S_0 \subsetneq S''$).

Astfel $\forall S' \subseteq C_i - v_i$, $q(G' - S') \leqslant |S'|$ şi G' are cuplaj perfect (din ipoteza inductivă).

Evident cuplajul lui G obţinut reunind cuplajele de la a), b), şi c) de mai sus saturează toate nodurile lui G, şi demonstraţia prin inducţie a teoremei se încheie

Cuplaje de cardinal maxim - Teorema lui Berge

Fie $G = (V, E)$ un graf şi $M \in \mathcal{M}_G$ un cuplaj al lui G.

Definiţie

Un **drum alternat** *în G* relativ la cuplajul M *este un drum*

$$P : v_0, v_0v_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k-1}v_k, v_k$$

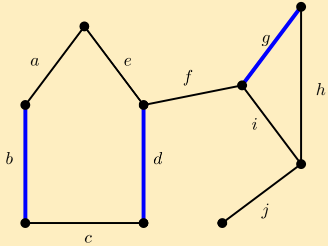
astfel încât $\{v_{i-1}v_i, v_iv_{i+1}\} \cap M \neq \varnothing, \forall i = \overline{1, k-1}$.

Observăm că, deoarece M este un cuplaj, dacă P este un drum alternat relativ la M, atunci dintre orice două muchii consecutive ale lui P exact una aparţine lui M (muchiile aparţin alternativ lui M şi $E \setminus M$).
În cele ce urmează, când ne vom referi la un drum P vom înţelege mulţimea muchiilor sale.

Definiţie

Un **drum de creştere** *al lui G* relativ la cuplajul M *este un drum alternat care uneşte două noduri distincte expuse relativ la M.*

Observăm că, din definiţia de mai sus, urmează că dacă P este un drum de creştere relativ la M, atunci $|P \setminus M| = |P \cap M| + 1$.



a, b, c, d - alternating even path

f - alternating odd path

j - augmenting path

g, f, d - alternating odd path

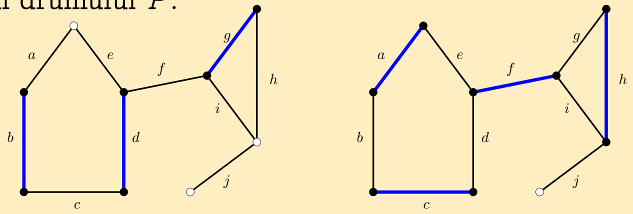
a, b, c, d, e - closed alternating path

a, b, c, d, f, g, h - augmenting path

Teorema 5

(Berge, 1959) M este un cuplaj de cardinal maxim in graful G dacă şi numai dacă nu există drum de creştere în G relativ la M.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Fie M un cuplaj de cardinal maxim în G. Să presupunem că P este un drum de creştere în G relativ la M.
Atunci, $M' = M \Delta P = (P \setminus M) \cup (M \setminus P) \in \mathcal{M}_G$. Într-adevăr, M' poate fi obţinut prin interschimbarea muchiilor din M cu cele din afara lui M de-a lungul drumului P:



$P = a, b, c, d, f, g, h$ - augmenting path $\qquad M \Delta P$

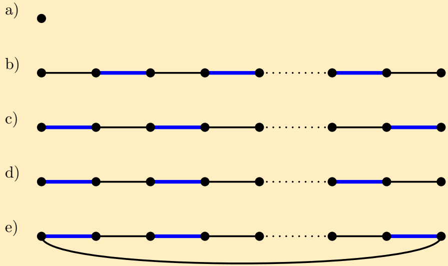
Mai mult, $|M'| = |P \cap M| + 1 + |M \setminus P| = |M| + 1$, în contradicţie cu alegerea lui M.

"$\Leftarrow$" Fie M un cuplaj în G cu proprietatea că nu există drumuri de creştere în G relativ la M.

Dacă M^* este un cuplaj de cardinal maxim în G, vom arăta că$|M^*| = |M|$. Fie G' subgraful generat de $M \Delta M^*$ în G ($G' = (V, M \Delta M^*)$).

Să observăm că $d_{G'}(v) \leqslant 2$, $\forall v \in V$ şi deci componentele conexe ale lui G' pot fi noduri izolate, drumuri de lungime cel puţin unu, sau circuite. Avem cinci posibilităţi (se văd mai jos; muchiile albastre sunt din M^*, muchiile negre sunt din M).

Cazul b) nu apare deoarece este un drum de creştere relativ la M^*, care este un cuplaj de cardinal maxim. Cazul c) nu apare deoarece este un drum de creştere relativ la M.



Dacă notăm cu $m_M(C)$ numărul de muchii din M din componenta conexă C a lui G' şi cu $m_{M^*}(C)$ numărul de muchii din M^* din aceeaşi componentă conexă a lui G', obţinem că $m_M(C) = m_{M^*}(C)$. Astfel,

$$|M \setminus M^*| = \sum_{C \text{ comp. a lui } G'} m_M(C) =$$

$$= \sum_{C \text{ comp. a lui } G'} m_{M^*}(C) = |M^* \setminus M|$$

Deci $|M| = |M^*|$. $\square$

Obţinem o strategie pentru a determina un cuplaj de cardinal maxim:

fie M un cuplaj în G (e. g., $M = \varnothing$);
while ($\exists P$ drum de creştere relativ la M) **do**
  $M \leftarrow M \Delta P$;
end while

La fiecare iteraţie while cardinalul lui M creşte cu 1, astfel, în cel mult $n/2$ iteraţii obţinem un cuplaj fără drumuri de creştere, adică de cardinal maxim. Neajunsul acestui algoritm este următorul: condiţia din while trebuie implementată în timp polinomial. Acest lucru a fost făcut pentru prima oară de către Edmonds (1965).

Lema 1

Fie $M, N \in \mathcal{M}_G$, $|M| = r$, $|N| = s$ şi $s > r$. Atunci în $M \Delta N$ există cel puţin $s - r$ drumuri de creştere relativ la M disjuncte pe noduri.

Demonstraţie. Fie $G' = (V, M \Delta N)$ şi C_i $(i = \overline{1,p})$ componentele conexe ale lui G'. Pentru fiecare $1 \leqslant i \leqslant p$, notăm cu $\delta(C_i)$ diferenţa dintre numărul de muchii ale lui N din C_i şi numărul de muchii ale lui M din C_i:

$$\delta(C_i) = |E(C_i) \cap N| - |E(C_i) \cap M|.$$

Se observă că, deoarece M şi N sunt cuplaje, C_i sunt drumuri sau circuite. Astfel $\delta(C_i) \in \{-1, 0, 1\}$. $\delta(C_i) = 1$ dacă şi numai dacă C_i este un drum de creştere relativ la M.

Demonstraţie (continuare). Deoarece

$$\sum_{i=1}^{p} \delta(C_i) = |N \setminus M| - |M \setminus N| = s - r,$$

urmează că există cel puţin $s - r$ componente conexe ale lui G' cu $\delta(C_i) = 1$, adică, există cel puţin $s - r$ drumuri de creştere disjuncte pe noduri conţinute în $M \Delta N$. $\square$

Lema 2

Dacă $\nu(G) = s$ şi $M \in \mathcal{M}_G$ cu $|M| = r < s$, atunci există în G un drum de creştere relativ la M de lungime cel mult $2\lceil r/(s-r) \rceil + 1$.

Demonstraţie. Fie $N \in \mathcal{M}_G$ cu $|N| = s = \nu(G)$.

Demonstraţie (continuare). Din Lema 1, există $s-r$ drumuri de creştere disjuncte pe muchii (drumurile disjuncte pe noduri sunt şi disjuncte pe muchii) conţinute în $M \Delta N$. Urmează că cel puţin unul dintre ele are cel mult $\lceil r/(s-r) \rceil$ muchii din M. Lungimea acestui drum de creştere este cel mult $2\lceil r/(s-r) \rceil + 1$. $\square$

Definiţie

Fie $M \in \mathcal{M}_G$. Un drum de creştere minim *relativ la M în G este un drum de creştere de lungime minimă printre toate drumurile de creştere relativ la M din G.*

Lema 3

Fie $M \in \mathcal{M}_G$, P un drum de creştere minim relativ la M, şi P' un drum de creştere relativ la $M \Delta P$. Atunci $|P'| \geqslant |P| + 2|P \cap P'|$.

Demonstraţie. Fie $N = (M\Delta P)\Delta P'$. Atunci $M\Delta N = P\Delta P'$ şi $|N| = |M| + 2$. Din Lema 1, există două drumuri de creştere relativ la M disjuncte pe muchii, P_1 şi P_2, conţinute în $M\Delta N$. Deoarece P este un drum de creştere minim relativ la M, avem $|P\Delta P'| \geqslant |P_1| + |P_2| \geqslant 2|P|$ şi, deci, $|P| + |P'| - 2|P \cap P'| \geqslant 2|P|$. $\square$

Considerăm următorul algoritm:

$M_0 \leftarrow \varnothing$; $i = 0$;
while ($\exists$ drumuri de creştere relativ la M) **do**
  let P_i un drum de creştere minim relativ la M_i;
  $M_{i+1} \leftarrow M_i \Delta P_i$;
  $i++$;
end while

Fie $P_0, P_1, \ldots, P_{\nu(G)-1}$ secvenţa de drumuri de creştere minime construite de acest algoritm.

Lema 4

a) $|P_i| \leqslant |P_{i+1}|$ şi $|P_i| = |P_{i+1}|$ dacă şi numai dacă P_i şi P_{i+1} sunt disjuncte pe noduri, $\forall 1 \leqslant i \leqslant \nu(G) - 2$.
b) $\forall i < j < \nu(G) - 1$, dacă $|P_i| = |P_j|$, atunci P_i şi P_j sunt disjuncte pe noduri.

Demonstraţie. a) Luând $P = P_i$ şi $P' = P_{i+1}$ în Lema 3, obţinem $|P_{i+1}| \geqslant |P_i| + 2|P_i \cap P_{i+1}| \geqslant |P_i|$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă P_i şi P_{i+1} sunt disjuncte pe muchii, de unde rezultă că sunt disjuncte şi pe noduri (fiind drumuri alternate).
b) rezultă aplicând succesiv a) $\square$

Teorema 6

(Hopcroft, Karp, 1973) Fie G un graf cu $\nu(G) = s$. Numărul de întregi distincţi din secvenţa $|P_0|, |P_1|, \ldots, |P_{s-1}|$ (P_i sunt drumuri de creştere minime construite de algoritmul de mai sus) nu este mai mare decât $2\lfloor\sqrt{s}\rfloor + 2$.

Demonstraţie. Fie $r = \lceil s - \sqrt{s} \rceil$. Atunci $|M_r| = r$ şi

$$|P_r| \leqslant 2\lceil r/(s-r) \rceil + 1 = 2\lceil \lceil s - \sqrt{s} \rceil / (s - \lceil s - \sqrt{s} \rceil) \rceil + 1 < 2\lfloor\sqrt{s}\rfloor + 1.$$

Astfel, pentru orice $i < r$, $|P_i|$ este unul din cele $\lfloor\sqrt{s}\rfloor + 1$ numere întregi impare nu mai mari decât $2\lfloor\sqrt{s}\rfloor + 1$.
În sub-secvenţa $|P_r|, \ldots, |P_{s-1}|$ există cel mult $s - r \leqslant \lfloor\sqrt{s}\rfloor + 1$ întregi distincţi. Urmează că în secvenţa $|P_0|, |P_1|, \ldots, |P_{s-1}|$ nu există mai mult de $2\lfloor\sqrt{s}\rfloor + 2$ întregi distincţi. $\square$

Dacă algoritmul de mai sus este descompus în faze astfel încât în fiecare fază se determină o familie maximală de drumuri de creştere minime disjuncte pe noduri , atunci - din Lema 4 - lungimea drumurilor de creştere minime din faza următoare va descreşte (altfel, mulţimea drumurilor de creştere minime construite în faza curentă nu este maximală).

Din Teorema 6, obţinem că numărul de faze nu este mai mare de $2\lfloor\sqrt{\nu(G)}\rfloor + 2$.

Astfel avem următorul algoritm pentru determinarea unui cuplaj de cardinal maxim într-un graf dat G:

$M \leftarrow \varnothing$;
repeat
  determină $\mathcal{P}$ o familie maximală de drumuri de creştere minime relativ la M disjuncte pe noduri;
  for $(P \in \mathcal{P})$ **do**
    $M \leftarrow M \Delta P$;
  end for
until $(\mathcal{P} = \varnothing)$

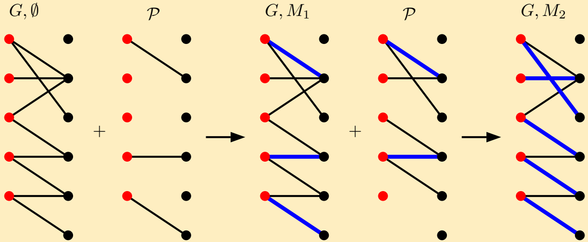
Complexitatea timp a algoritmului de mai sus este $\mathcal{O}(\sqrt{n}A)$, unde A este complexitatea timp a determinării familiei $\mathcal{P}$.

În cazul grafurilor bipartite, **Hopcroft** şi **Karp** au arătat că aceasta poate fi obţinută în $\mathcal{O}(n+m)$ şi, deci, întreg algoritmul are complexitatea timp $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$.

Acest rezultat a fost extins la grafuri arbitrare de către **Micali** şi **Vazirani (1980)** folosind o structură de date elaborată pentru a întreţine etichetele asociate nodurilor pentru construcţia drumurilor de creştere minime.

Să considerăm cazul grafurilor bipartite: $G = (S, T; E)$ şi $M \in \mathcal{M}_G$. Pornind cu una dintre clase, de exemplu S, considerăm mulţimea extremităţilor iniţiale ale unor drumuri de creştere $S \cap E(M)$. Din fiecare astfel de nod pornim, în paralel, construcţia unor drumuri alternate într-o manieră bfs. Primul drum de creştere obţinut opreşte construcţia, oferind lungimea minimă a unui drum de creştere. Familia $\mathcal{P}$ este obţinută folosind etichetele şi listele de adiacenţă în $\mathcal{O}(n + m)$.

Detaliile sunt omise; un exemplu este dat pe slide-ul următor.


$G, \emptyset$
$\mathcal{P}$
G, M_1
$\mathcal{P}$
G, M_2
+
+

O **reţea (de transport)** cu sursa s şi destinaţia t este o tuplă $R = (G, s, t, c)$ unde:

- $G = (V, E)$ este un digraf,
- $s, t \in V$; $s \neq t$; $d_G^+(s) > 0$; $d_G^-(t) > 0$,
- $c : E \to \mathbb{R}_+$; $c(e)$ este capacitatea arcului e.

Vom presupune că $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) şi $|E| = m$. Extindem funcţia c la $c : V \times V \to \mathbb{R}_+$ prin

$$c((i,j)) = \begin{cases} c(ij), & \text{dacă } ij \in E \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

şi notăm $c((i,j)) = c_{ij}$.

Flow

Definiţie

Un flux *in* $R = (G, s, t, c)$ *este o funcţie* $x : V \times V \to \mathbb{R}$ *a. î.*

(i) $0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}, \forall (i, j) \in V \times V$,

(ii) $\sum_{j \in V} x_{ji} - \sum_{j \in V} x_{ij} = 0, \forall i \in V \setminus \{s, t\}$.

Remarci

- Dacă $ij \in E$ atunci x_{ij} este flux (transportat) de-a lungul arcului ij.
- Constrângerile (i) cer ca fluxul pe fiecare arc să fie ne-negativ şi să nu depăşească capacitatea.
- Constrângerile (ii), (legea de conservare), cer ca suma fluxurilor de pe arcele care intră într-un nod i să fie egală cu suma fluxurilor de pe arcele care ies din i (fluxul care intră este egal cu fluxul care iese).

- Să observăm că, din modul în care am extins funcţia c la $V \times V$, constrângerile (i) implică $x_{ij} = 0$ când $ij \notin E$. Astfel, un flux este de fapt o funcţie definită pe E. Preferăm extensia sa pe $V \times V$ pentru a simplifica notaţiile.

Fie x un flux în $R = (G, s, t, c)$. Dacă adunăm toate constrângerile (ii) (pentru $i \in V \setminus \{s, t\}$) obţinem

$$0 = \sum_{i \neq s,t} \left(\sum_{j \in V} x_{ji} - \sum_{j \in V} x_{ij} \right) = \sum_{i \neq s,t} \sum_{j \neq s,t} x_{ji} - \sum_{i \neq s,t} \sum_{j \neq s,t} x_{ij} +$$

$$+ \sum_{i \neq s,t} x_{si} + \sum_{i \neq s,t} x_{ti} - \sum_{i \neq s,t} x_{is} - \sum_{i \neq s,t} x_{it} =$$

$$= \left(\sum_{i \in V} x_{si} - \sum_{i \in V} x_{is} \right) - \left(\sum_{i \in V} x_{it} - \sum_{i \in V} x_{ti} \right),$$

Definiţie

Valoarea *fluxului x în $R = (G, s, t, c)$ este*

$$v(x) = \sum_{i \in V} x_{it} - \sum_{i \in V} x_{ti}.$$

În cuvinte, $v(x)$ este fluxul net care ajunge în destinaţia reţelei sau, după cum am demonstrat mai sus, fluxul net care părăseşte sursa reţelei.
Să observăm că în orice reţea $R = (G, s, t, c)$ există un flux: x^0, **fluxul nul**, cu $x^0_{ij} = 0$, $\forall ij \in E$ şi $v(x^0) = 0$.

Problema fluxului maxim: Dată $R = (G, s, t, c)$ o reţea, să se determine un flux de valoare maximă.

Problema fluxului maxim poate fi văzută ca o problemă LP:

$$
\begin{array}{ll}
\max & v \\
 & \sum\limits_{j \in V} x_{ji} - \sum\limits_{j \in V} x_{ij} = 0, \forall i \neq s, t \\
 & \sum\limits_{j \in V} x_{js} - \sum\limits_{j \in V} x_{sj} = -v \\
 & \sum\limits_{j \in V} x_{jt} - \sum\limits_{j \in V} x_{tj} = v \\
 & 0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}, \forall ij \in E
\end{array}
$$

Cu toatea acestea, vom considera a abordare combinatorială directă care este importantă când există constrângeri de integralitate a unor variabile (de exemplu fluxul de pe arce).

Exerciţiul 1. Fie X o mulţime finită, $X_1, \ldots, X_n \subseteq X$, şi $d_1, d_2, \ldots d_n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că există n submulţimi disjuncte $Y_i \subseteq X_i$, $|Y_i| = d_i, \forall i = \overline{1,n}$ dacă şi numai dacă

$$\left| \bigcup_{i \in I} X_i \right| \geqslant \sum_{i \in I} d_i,$$

pentru orice $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Exerciţiul 2. Orice graf p-regular bipartit admite cuplaj perfect.

Exerciţiul 3. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit. Folosind teorema lui Hall demonstraţi că, pentru fiecare $0 \leqslant k \leqslant |S|$, G are un cuplaj de cardinal cel puţin $|S| - k$ dacă şi numai dacă $|N_G(A)| \geqslant |A| - k, \forall A \subseteq S$.

Exerciţiul 4. Utilizând teorema lui Tutte arătaţi că un graf 2-muchie conex şi 3-regulat admite cuplaj perfect.

Exerciţiul 5. Fie $G = (V, E)$ un graf. O submulţime $A \subseteq V$ este numită *m-independentă* dacă G are un cuplaj M care saturează toate nodurile din A. Arătaţi că, pentru orice două mulţimi *m-independente* A şi B cu $|A| < |B|$, se poate determina un nod $b \in B \setminus A$ astfel încât $A \cup \{b\}$ este de asemeni *m-independentă* ($\Rightarrow$ toate mulţimile maximal *m-independente* au acelaşi cardinal).

Exerciţiul 6. Fie $T = (V, E)$ un arbore cu rădăcină; îi notăm cu r rădăcina şi cu $parent(v)$ strămoşul direct al oricărui nod $v \neq r$. Un cuplaj M al lui T este numit *propriu* dacă orice nod nesaturat de M, $v \neq r$, are un frate w astfel încât $w\, parent(v) \in M$.

(a) Arătaţi că orice cuplaj *propriu* este un cuplaj de cardinal maxim.

(b) Găsiţi în $\mathcal{O}(n)$ un cuplaj *propriu* pentru un arbore de ordin n.