Tema nr. 4

În fișierele (a_i.txt, b_i.txt, $i=1,\ldots,5$) postate pe pagina laboratorului, sunt memorate pentru 5 sisteme liniare cu matrice rară (cu ‘*puține*’ elemente $\boldsymbol{a_{ij}} \neq \boldsymbol{0}$), $\boldsymbol{Ax = b}$, următoarele elemente:

- $\boldsymbol{n}$ dimensiunea sistemului,
- $\boldsymbol{a_{ij} \neq 0,\ i,\ j}$ - elementele nenule din matricea rară $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, indicii de linie și de coloană ai respectivului element,
- $\boldsymbol{b_i\ ,\ i=1,2,\ \ldots\ ,\ n}$ elementele vectorului termenilor liberi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$.

1. Folosind fișierele atașate, să se citească dimensiunea sistemului, vectorul termenilor liberi și să se genereze vectorii necesari pentru memorarea economică a matricei rare (se va folosi schema de memorare rară descrisă în Tema 3). Se presupune că elementele nenule ale matricei sunt plasate aleator în fișier (nu sunt ordonate după indicii de linie sau de coloană, sau altfel). Să se verifice că elementele de pe diagonală ale matricei sunt nenule.
   Se consideră dată precizia calculelor $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-p}}$.

2. Cu această memorare rară a matricei $\boldsymbol{A}$ să se aproximeze soluția sistemului liniar:

$$\boldsymbol{Ax=b} \qquad \textbf{(1)}$$

   folosind metoda Gauss-Seidel.

3. Să se verifice soluția calculată afișând norma:

$$\left\| \boldsymbol{Ax_{GS} - b} \right\|_{\infty}$$

unde x_{GS} este aproximarea soluției exacte obținută cu algoritmul Gauss-Seidel.

4. În toate calculele care includ matricea A, se cere să se utilizeze memorarea rară a matricei (să nu se aloce în program nici o matrice clasică).

5. La implementarea metodei relaxării să se folosească un singur vector x_{GS}.

Bonus 40 pt. : calculul soluţiei unui sistem liniar rar folosind metoda Gauss-Seidel cu altă schemă de memorare rară.

Metode iterative de rezolvare a sistemelor liniare

Pp. că **det** $A \neq 0$, vom nota soluția exactă a sistemului (1) cu x^*:

$$x^* := A^{-1}b.$$

Metodele iterative de rezolvare a sistemelor liniare au fost deduse pentru sistemele de dimensiune '*mare*' (n '*mare*'), cu matricea sistemului A, matrice rară (cu '*puține*' elemente a_{ij} nenule). În cazul metodelor iterative matricea A nu se transformă (ca în cazul algoritmului de eliminare Gauss sau a descompunerilor LU sau a factorizărilor QR) ci sunt folosite doar elementele nenule ale matricei pentru aproximarea soluției exacte x^*. Pentru matricele rare se folosesc scheme de memorare economice specifice.

Pentru a aproxima soluția x^* se construiește un șir de vectori $\left\{x^{(k)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ care, în anumite condiții, converge la soluția exactă x^* a sistemului (1):

$$x^{(k)} \to x^* \ , \ \textbf{pentru } k \to \infty$$

Vectorul $\boldsymbol{x}^{(0)}$ se inițializează, de obicei, cu 0:

$$x_i^{(0)} = 0 \ , \ i = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

Atunci când converge, limita șirului este chiar $\boldsymbol{x}^*$ soluția sistemului (1).

Metoda Gauss-Seidel

Vom presupune că toate elementele diagonale ale matricei $\boldsymbol{A}$ sunt nenule:

$$a_{ii} \neq 0 \ , \ i=1,\ldots,n$$

Când se citește matricea din fișier, se cere să se verifice dacă elementele diagonale ale matricei sunt nenule ($|a_{ii}| > \varepsilon, \ \forall i$). Dacă există un element diagonal nul, nu se poate rezolva sistemul liniar folosind metoda iterativă Gauss-Seidel.

Șirul de vectori generat de metoda Gauss-Seidel este următorul:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}} \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Formula de calcul de mai sus trebuie adaptată noului tip de memorare a matricei $\boldsymbol{A}$. În sumele de mai sus sunt necesare doar elementele a_{ij} nenule. Pentru un calcul rapid al componentei $\boldsymbol{i}$ a vectorului de aproximare $x_i^{(k+1)}$ avem nevoie să accesăm ușor elementele liniei $\boldsymbol{i}$ ale matricei $\boldsymbol{A}$, din acest motiv în schema economică de memorare vom tine cont de acest lucru.

Se știe că dacă matricea $\boldsymbol{A}$ are diagonala dominantă în raport cu liniile (sau coloanele) matricei, adică:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \textbf{pentru toţi } i = 1,...,n$$

șirul $\{x^{(k)}\}$ construit cu metoda Gauss-Seidel converge la soluția x^{*}. Pentru metodele iterative de rezolvare a sistemelor liniare convergența sau divergența șirului $\{x^{(k)}\}$ nu depinde de alegerea iterației inițiale $x^{(0)}$.

Pentru a aproxima soluția x^{*} trebuie să calculăm un termen al șirului $x^{(k)}$ pentru k suficient de mare. Se știe că, dacă diferența dintre doi termeni consecutivi ai șirului $\{x^{(k)}\}$ devine suficient de *‚mică'*, atunci ultimul vector calculat este *‚aproape'* de soluția căutată:

$$\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq \varepsilon \Rightarrow \| x^{(k)} - x^{*} \| \leq c\varepsilon \,, \; c \in \mathbb{R}_{+} \rightarrow \; x^{(k)} \approx x^{*} \quad (2)$$

Nu este nevoie să memorăm toți vectorii calculați ai șirului $\{x^{(k)}\}$ ci avem nevoie doar de ultimul vector, cel care satisface prima inegalitate din relația (2) ($\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq \varepsilon$). În program s-ar putea utiliza doar doi vectori:

x^{c} pentru vectorul $x^{(k+1)}$ şi x^{p} pentru vectorul $x^{(k)}$.

În cazul metodei Gauss-Seidel se poate folosi un singur vector pe parcursul calculelor.

$$x_{GS} = x^{c} = x^{p}.$$

În cazul folosirii unui singur vector pentru aproximarea soluției, aplicarea formulei (3) și calculul normei $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|=\|x^{c}-x^{p}\|$ trebuie făcute în același timp (în aceeași buclă *for*).

Schemă de implementare a unei metode iterative

```
x^c = x^p = 0;
k=0;
do
  {
    x^p = x^c;
    calculează noul x^c folosind x^p (cu formula (3));
    calculează Δx = || x^c - x^p||;
    k=k+1;
  }
while (Δx ≥ ε şi k ≤ k_max şi Δx ≤ 10^8) //(k_max = 10000)
if (Δx < ε) x^c ≈ x^*; // x^c este aproximarea căutată a soluției
else ‚divergență';
```

Exemplu:

Matricea:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{102.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{2.5} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{3.5} & \mathbf{104.88} & \mathbf{1.05} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.33} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{100.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.0} & \mathbf{1.3} & \mathbf{0.0} & \mathbf{101.3} & \mathbf{0.0} \\ \mathbf{0.73} & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & \mathbf{1.5} & \mathbf{102.23} \end{pmatrix}$$

Pp. că:

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=\begin{pmatrix} \mathbf{1.0} \\ \mathbf{2.0} \\ \mathbf{3.0} \\ \mathbf{4.0} \\ \mathbf{5.0} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \mathbf{6.0} \\ \mathbf{7.0} \\ \mathbf{8.0} \\ \mathbf{9.0} \\ \mathbf{1.0} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_1^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - a_{14}x_4^{(0)} - a_{15}x_5^{(0)}) / a_{11} =$$

$$= (6.0 - 0.0 * 2.0 - 2.5 * 3.0 - 0.0 * 4.0 - 0.0 * 5.0) / 102.5$$

(varianta economică folosește doar elementele nenule de pe linia 1)

$$= (6.0 - 2.5 * 3.0) / 102.5 = -0.01463414...$$

$x_2^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} - a_{24}x_4^{(0)} - a_{25}x_5^{(0)}) / a_{22} =$$

$$= (7.0 - 3.5 * (-0.01463414...) - 1.05 * 3.0 - 0.0 * 4.0 - 0.33 * 5.0) / 104.88$$

(varianta economică foloseşte elementele nenule de pe linia a 2-a)

$$= (7.0 - 1.05 * 3.0 - 3.5 * (-0.01463414...) - 0.33 * 5.0) / 104.88$$

$x_3^{(1)}$ (varianta clasică)

$$= (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} - a_{34}x_4^{(0)} - a_{35}x_5^{(0)}) / a_{33} =$$

$$= (8.0 - 0.0 * (-0.01463414...) - 0.0 * x_2^{(1)} - 0.0 * 4.0 - 0.0 * 5.0) / 100.0$$

(varianta economică foloseşte elementele nenule de pe linia 3)

$$= (8.0) / 100.00$$

$x^{(k+1)}[i]$ (varianta economică foloseşte doar elementele nenule de pe linia i)

$$= \frac{\left(b[i] - \sum(\text{valoare} \neq 0 \text{ de pe linia } i) * x^{(?)}[\text{indice de coloană corespunzător valorii}]\right)}{\text{valoarea elementului diagonal de pe linia } i}$$

Sistemele memorate în fișierele postate pe pagina cursului au următoarele soluții:

- (a_1.txt, b_1.txt) are soluția $x_i = 1, \forall i = 0,...,n-1$,
- (a_2.txt, b_2.txt) are soluția $x_i = 1.0 / 3.0, \forall i = 0,...,n-1$
- (a_3.txt, b_3.txt) are soluția $x_i = 2.0 * (i+1) / 5.0$, $\forall i = 0,...,n-1$
- (a_4.txt, b_4.txt) are soluția $x_i = n - i - 1, \forall i = 0,...,n-1$
- (a_5.txt, b_5.txt) are soluția $x_i = 2.0$, $\forall i = 0,...,n-1$. (?!?)