Probabilităţi şi statistică - Curs 6

Martie 2018

Acest capitol este dedicat introducerii unei noţiuni larg utilizate în diverse ramuri ale ştiiinţei (de la fizica statistică până la ştiinţele economice): *procesele aleatoare* sau *stochastice* (i.e., care variază la întâmplare). Informal un proces stochastic este un model matematic al unui experiment probabilistic care evoluează în timp şi produce o secvenţă de valori numerice.

Spre exemplu un proces stochastic poate fi folosit pentru a modela:

- variaţia preţurilor unei acţiuni la bursă;
- poziţiile succesive pe radar ale unui avion comercial;
- variaţia nivelului de încărcare a traficului într-un nod de comunicaţii etc.

Definition 1

Un **proces stochastic** *este o familie de variabile aleatoare* $(X(i))_{i \in I}$, *definite peste un spaţiu cu probabilitate.*

- Fiecare variabilă $X_i = X(i) : \Omega \to \mathbb{R}$ reprezintă o stare sau un pas al procesului; dacă mulţimea care le indexează, I, este discretă atunci avem de-a face cu un *proces stochastic discret*. În cele ce urmează vom presupune că $|I| \leqslant |\mathbb{N}^*|$.
- Exemple de procese aleatoare:

1. *Procese de tip sosire:* mesaje recepţionate, clienţi care ajung la un server etc. Acestea sunt *procese Bernoulli* sau *procese Poisson* (o variantă continuă a celor Bernoulli).
2. *Procese* sau *lanţuri Markov:* sunt experimente probabilistice care evoluează în timp şi în care o stare viitoare depinde într-o anumită măsură (probabilistic) de ceea ce s-a întâmplat în trecut.

- Un lanţ Markov este un proces al cărui viitor depinde de trecut într-o anumită măsură.
- Efectul acesta al trecutului asupra viitorului este modelat prin intermediul stărilor procesului; aceste stări se schimbă conform unor probabilităţi date. În plus, ne vom limita la procese ale căror stări pot lua un număr finit de valori.

Definition 2

(i) *Un* **lanţ Markov discret** *cu o mulţime finită de stări este un proces stochastic* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *format din variabile aleatoare* $X_n : \Omega \to S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ *care au proprietatea numită a lui Markov:*

$$P\{X_{n+1} = s | X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \dots, X_n = s_{i_n}\} =$$

$$= P\{X_{n+1} = s | X_n = s_{i_n}\}$$

(ii) *Un* **lanţ Markov** *se numeşte* **omogen** *(sau* **staţionar***) dacă*

$$P\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_i\} = P\{X_n = s_j | X_{n-1} = s_i\} = p_{ij},$$

$$\forall\, n \geqslant 2, s_i, s_j \in S.$$

- În cele ce urmează vom considera doar lanţuri Markov omogene, discrete şi cu un număr finit de stări.
- S este spaţiul stărilor, iar p_{ij} *probabilităţile de tranziţie*, matricea formată cu aceste probabilităţi $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ se numeşte *matricea de tranziţie probabilistă* a lanţului.

Un astfel de lanţ Markov se identifică prin:

- spaţiul stărilor $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$
- şi probabilităţile p_{ij} de trecere dintr-o stare în alta.

- Un lanţ Markov poate fi reprezentat printr-un *digraf al tranziţiilor probabiliste*: nodurile sunt stări posibile, iar între acestea avem arce cu probabilităţile corespunzătoare de tranziţie.

Exemplu. Alice urmează un curs de săptămânal de "Teoria probabilităţilor", în fiecare săptămână ea fie rămâne în urmă, fie ajunge la zi cu materia corespunzătoare. Dacă într-o săptămână este în urmă cu materia, atunci probabilitatea ca ea să rămână în urmă şi în săptămâna următoare este 0.4, iar probabilitatea ca ea să ajungă la zi cu materia este 0.6. Dacă într-o săptămână Alice este la zi cu materia, atunci probabilitatea ca ea să rămână în urmă în săptămâna următoare este 0.2, iar cea ca să fie la zi şi în săptămâna următoare este 0.8.

Avem un lanţ omogen Markov şi discret cu două stări posibile: s_1 - Alice e la zi cu materia şi s_2 - ea a rămas în urmă. Probabilităţile de tranziţie sunt

$$p_{11} = 0.8, p_{12} = 0.2, p_{21} = 0.6, p_{22} = 0.4 \clubsuit$$

Exemplu. O albină se mişcă pe o linie dreaptă câte o unitate în fiecare interval de timp astfel: la stânga cu probabilitate 0.3, la dreapta cu probabilitate 0.3 şi rămâne pe loc cu probabilitate 0.4 independent de mişcările făcute anterior. Doi paianjeni se află pe această dreaptă în poziţiile 1 şi m. Dacă albina ajunge într-unul din aceste puncte procesul se încheie.
Construim un lanţ Markov presupunând că albina se găseşte iniţial într-un punct între 1 şi m (pe o coordonată întreagă).
Stările lanţului sunt $1, 2, \ldots, m$ - poziţiile albinei. Probabilităţile de tranziţie nenule sunt:

$$p_{11} = p_{mm} = 1,$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 0.3, & \text{dacă } j \in \{i-1, i+1\}, \\ 0.4, & j = i \end{cases}, \text{ pentru } i = \overline{2, m-1} \;\clubsuit$$

- Dat un lanţ Markov putem determina probabilitatea unei secvenţe de stări viitoare ale lanţului folosind *formula de înmulţire*.

Proposition 1

Dat un lanţ Markov $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$*, avem*

$$P\{X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \dots, X_n = s_{i_n}\} = P(X_1 = s_{i_1})\cdot p_{i_1 i_2}\cdot p_{i_2 i_3}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1} i_n}$$

proof:

$$P\{X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \dots, X_n = s_{i_n}\} = P(X_1 = s_{i_1})\cdot P(X_2 = s_{i_2} | X_1 = s$$

$$\ldots\cdot P\{X_n = s_{i_n} | X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \dots, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}\} =$$

$$= P(X_1 = s_{i_1})\cdot p_{i_1 i_2}\cdot p_{i_2 i_3}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1} i_n},$$

utilizând formula de înmulţire şi cea a lui Markov. Pentru a calcula această probabilitate trebuie cunoscută distribuţia pasului iniţial, X_1.

- În multe probleme asociate lanţurilor Markov este necesar să cunoaştem distribuţia unei stări viitoare în funcţie de starea curentă.

Definition 3

Probabilităţile tranziţiilor în n paşi *sunt*

$$r_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+1} = s_j | X_1 = s_i\}.$$

- Datorită omogenităţii $r_{ij}^{(n)}$ este probabilitatea ca după n paşi starea să devină s_j, dacă starea iniţială este s_i (indiferent care este momentul iniţial: $r_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+k} = s_j | X_k = s_i\}$). Aceste probabilităţi se pot calcula folosind ecuaţia recursivă de mai jos.

Proposition 2

(Ecuaţia Chapman-Kolmogorov) Probabilităţile tranziţiilor în n paşi pot fi calculate folosind următoarea formulă recursivă

$$r_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj}, \ \ \textit{pentru } n \geqslant 2, 1 \leqslant i, j \leqslant m, \ \ \textit{unde } r_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

proof: Aplicăm varianta condiţionată a probabilităţii totale:

$$P\{X_{n+1} = s_j | X_1 = s_i\} = \sum_{k=1}^{m} P\{X_n = s_k | X_1 = s_i\} \cdot$$

$$\cdot P\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_k, X_1 = s_i\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P\{X_n = s_k | X_1 = s_i\} \cdot P\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_k\} = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj}.$$

$\blacksquare$

- Matricea pătratică de ordin m formată cu probabilităţile $r_{ij}^{(n)}$ (pentru un n fixat) se numeşte *matricea probabilităţilor de tranziţie în n paşi*.
- Din ecuaţia Chapman-Kolmogorov se poate obţine următorul rezultat (a cărui demonstraţie este lăsată ca exerciţiu).

Proposition 3

Matricea probabilităţilor de tranziţie în n paşi este P^n, unde P este matricea probabilităţilor de tranziţie.

Aceste matrici de tranziţie sunt *matrici stochastice*: au elemente care reprezintă probabilităţi şi suma elementelor de pe fiecare linie este 1.

- Sunt anumite situaţii în care probabilităţile $r_{ij}^{(n)}$ converg pentru $n \to +\infty$, idiferent de starea iniţială i.

Exemplu (continuare) Reluăm exemplul cu lanţul Markov de mai sus care are matricea probabilităţilor de tranziţie

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, P^2 = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{bmatrix}, P^3 = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix},$$

$$\cdots, P^{10} = \begin{bmatrix} 0.7500 & 0.2502 \\ 0.7508 & 0.2505 \end{bmatrix}.$$

Se observă că matricea de tranziţie în n paşi tinde la o matrice constantă, fără ca starea iniţială i să conteze (coloane constante). ♣

Exemplu (continuare) Reluăm exemplul cu albina şi cei doi paianjeni.

$$P = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}, P^{20} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.669 & 0.0004 & 0.0004 & 0.329 \\ 0.329 & 0.0004 & 0.0004 & 0.669 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Observăm şi în acest caz că (aparent) există limite ale anumitor probabilităţi de tranziţie în n paşi care depind de starea iniţială:

$$\lim_{n\to+\infty} r_{11}^{(n)} = 1, \lim_{n\to+\infty} r_{21}^{(n)} = 2/3,$$

$$\lim_{n\to+\infty} r_{31}^{(n)} = 1/3, \lim_{n\to+\infty} r_{41}^{(n)} = 0.$$

- Clasificarea pe care o vom da stărilor priveşte frecvenţa pe temen lung cu care ele sunt vizitate.

Definition 4

(i) *O* **stare** s_j *este* **accesibilă** *din starea* s_i *dacă există un număr de paşi,* $n \geqslant 1$, *astfel ca* $r_{ij}^{(n)} > 0$; *fie* $A(s_i)$ *mulţimea stărilor care sunt accesibile din starea* s_i.

(ii) *O* **stare** s_i *este numită* **recurentă** *dacă pentru orice stare* s_j *care este accesibilă din* s_i, s_i *este de asemenea accesibilă din* s_j.

(iii) *O* **stare** *se numeşte* **tranzitorie** *dacă nu este recurentă.*

- Să observăm că starea s_j este accesibilă din s_i dacă există un şir de stări $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_{n-1}}$ astfel încât

$$p_{ii_1}, p_{i_1 i_2}, \ldots, p_{i_{n-1}j} > 0,$$

altfel spus un drum din starea s_i în starea s_j este posibil.

- Starea s_i este recurentă dacă şi numai dacă $\forall\ s_j \in A(s_i)$ $\Rightarrow\ s_i \in A(s_j)$. Dacă începem în starea recurentă s_i, atunci probabilitatea de a reveni în starea s_i în viitor este strict pozitivă (la fel ca şi probabilitatea ca starea s_i să fie vizitată în viitor de o infinitate de ori).

- Mai mult, dacă s_i este recurentă, atunci $A(s_i) = A(s_j)$, pentru orice $s_j \in A(s_i)$: plecând din s_i rămânem în $A(s_i)$.

Definition 5

Dacă s_i este o stare recurentă, atunci toate stările accesibile din s_i formează o **clasă recurentă**.

- Se poate demonstra cu uşurinţă (exerciţiu): clasele recurente sunt clasele de echivalenţă relativ la următoarea relaţie (care este una de echivalenţă pe mulţimea stărilor recurente): $s_i \sim s_j$ dacă $A(s_i) = A(s_j)$.

Theorem 3.1

Un lanţ Markov poate fi descompus într-una sau mai multe clase recurente şi un număr ($\geqslant 0$) de stări tranzitorii.

- Următoarele proprietăţi ale stărilor sunt lăsate ca exerciţiu.

Proposition 4

Considerăm un lanţ Markov omogen, discret şi cu o mulţime finită de stări. Atunci

(i) *O stare recurentă este accesibilă din toate stările din clasa sa şi, posibil, din alte stări tranzitorii, dar nu şi din stări aflate într-o altă clasă recurentă.*

(ii) *O stare tranzitorie nu este accesibilă din nici o stare recurentă.*

(iii) *Dintr-o stare tranzitorie este accesibilă cel puţin o stare recurentă.*

- Definiţia dată clasei recurente nu exclude existenţa unei clase formate dintr-o singură stare în care intră o buclă şi din care nu mai iese nici un arc.

- Rezultatele anterioare ne permit argumentarea unor proprietăţi ale acestor procese şi vizualizarea evoluţiei acestora:

(i) dacă am intrat (sau chiar am început) într-o stare recurentă, atunci nu mai părăsim clasa acesteia şi toate stările din această clasă vor fi vizitate de o infinitate de ori.

(ii) dacă starea iniţială este una tranzitorie atunci vom merge printr-un număr finit de stări tranzitorii şi apoi vom intra, într-o clasă recurentă, fără să o mai părăsim.

Definition 6

O clasă recurentă se numeşte **periodică** *dacă stările care o compun pot fi partiţionate în $k \geqslant 2$ submulţimi $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_k$, astfel încât tranziţiile nu pot avea loc decât de la o submulţime la alta, în ordinea dată şi circular:*

$$\forall\, s_i \in \mathbf{S}_h, p_{ij} > 0 \Rightarrow s_j \in \begin{cases} \mathbf{S}_1, & \text{dacă } h = k \\ \mathbf{S}_{h+1}, & \text{altfel} \end{cases}.$$

- Se observă că dacă s_i face parte dintr-o clasă periodică, pentru orice $n \geqslant 1$ trebuie să existe cel puţin o stare s_j, astfel încât $r_{ij}^{(n)} = 0$. În felul acesta avem un criteriu după care o clasă recurentă este neperiodică:
- R este neperiodică dacă există un $n \geqslant 1$ şi $s_i \in R$, astfel ca $r_{ij}^{(n)} > 0$, pentru orice $s_j \in R$.
- Pentru modelele bazate pe lanţuri Markov ne interesează cel mai adesea comportamentul pe termen lung, adică probabilităţile de tranziţie $r_{ij}^{(n)}$, pentru n foarte mare.
- Vom defini în această secţiune condiţii în care $r_{ij}^{(n)}$ converge independent de starea iniţială s_i.
- Dacă există două clase recurente, atunci limitele acestor probabilităţi, dacă există, pot depinde de starea iniţială (o clasă recurentă nu poate fi părăsită). Vom presupunem că lanţul are o singură clasă recurentă plus, eventual, alte câteva stări tranzitorii.

Notăm cu q_{ij}^t probabilitatea ca, plecând din starea s_i, prima tranziţie în starea s_j să apară după t paşi:

$$q_{ij}^t = P(X_t = s_j \text{ and, for } s = \overline{1, t-1}, X_t \neq s_j | X_0 = s_i).$$

Definition 7

Fie Z_{ij} timpul de ajungere în starea s_j plecând din s_i; media acestei variabile aleatoare, $h_{ij} = \mathbb{E}[Z_{ij}] = \sum_{t \geqslant 1} t q_{ij}^t$, este numită timpul mediu de ajungere în starea s_j plecând din s_i. (Z_{ii} este timpul de întoarcere în starea s_i, iar h_{ii} este timpul mediu de întoarcere în s_i.)

- Se poate observa că pentru un lanţ Markov cu un număr finit de stări mediile de mai sus sunt finite.
- Proprietăţi privind aceste noţiuni apar in exerciţiile **9** şi **10**.

Exemplu. Considerăm un lanţ Markov cu două stări $\{s_1, s_2\}$, astfel că din s_1 trecem în s_2 ($p_{12} = 1$) şi din s_2 în s_1 ($p_{21} = 1$). Deci, după un număr par de paşi revenim în starea din care am plecat:

$$r_{ii}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} \quad \clubsuit$$

- Acesta este un exemplu în care şirul $r_{ii}^{(n)}$ nu converge (oscilează) şi sigura clasă a lanţului este periodică. Pentru convergenţă ar trebui ca lanţul să nu conţină clase periodice.
- Următorul rezultat (central al cursului) precizează condiţiile în care convergenţa are loc şi limita nu depinde de starea iniţială.

Theorem 4.1

Considerăm un lanţ Markov omogen, discret şi cu o mulţime finită de stări. Dacă lanţul conţine o singură clasă recurentă care este neperiodică (şi, eventual, stări tranzitorii), atunci fiecărei stări s_j îi putem asocia o probabilitate de echilibru (staţionară) π_j cu următoarele proprietăţi:

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{ij}^{(n)} = \pi_j$, *pentru orice i şi j.*

(ii) $(\pi_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ *sunt soluţiile sistemului*

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj} = \pi_j, \quad j = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \pi_k = 1 \end{cases}$$

(iii) $\pi_j = 0$, *dacă s_j este tranzitorie şi* $\pi_j = \dfrac{1}{h_{jj}} > 0$, *dacă s_j este recurentă.*

- Probabilităţile π_j formează o distribuţie de probabilitate pe spaţiul stărilor: **distribuţia staţionară** - numită astfel deoarece, dacă X_1 are această distribuţie

$$P\{X_1 = s_j\} = \pi_j, \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m, \text{ atunci}$$

$$P\{X_2 = s_j\} = \sum_{k=1}^{m} P\{X_1 = k\} p_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj} = \pi_j, \forall 1 \leqslant j \leqslant m$$

şi, în mod similar, se arată că $P\{X_n = s_j\} = \pi_j, \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m$.

$$\sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj} = \pi_j, j = \overline{1, m}$$

se numesc **ecuaţiile de echilibru** (consecinţă a ecuaţiei Chapman-Kolmogorov şi a existenţei limitelor din teorema de mai sus).

$$\sum_{k=1}^{m} \pi_k = 1 \text{ este } \textbf{ecuaţia de normalizare}.$$

Exemplu Considerăm un lanţ Markov finit şi omogen, cu două stări şi probabilităţile de tranziţie

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Soluţie: Ecuaţiile de echilibru sunt

$$\pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} \text{ şi } \pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22},$$

adică

$$\pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.6\pi_2 \text{ şi } \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2.$$

Aceste două ecuaţii sunt echivalente amândouă cu ecuaţia

$$\pi_1 = 3\pi_2.$$

Folosind şi ecuaţia de normalizare $\pi_1 + \pi_2 = 1$, obţinem

$$\pi_1 = 0.75, \pi_2 = 0.25 \clubsuit$$

Exemplu. Un profesor "absent" are două umbrele pe care le foloseşte atunci când merge de acasă la birou sau invers. Dacă plouă şi dacă o umbrelă este la dispoziţie, atunci profesorul o ia şi o foloseşte; dacă nu plouă, atunci profesorul uită întotdeauna să ia umbrela. Să presupunem că de fiecare dată când profesorul trebuie să se deplaseze între cele două locaţii plouă cu probabilitate $p \in (0, 1)$, independent de fiecare dată. Care sunt probabilităţile de echilibru?

Soluţie: Starea s_i: în locaţia unde se află profesorul se găsesc i umbrele, $i = \overline{0, 2}$. Matricea probabilităţilor de tranziţie este:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

Se observă că lanţul are o singură clasă recurentă care este nepe-riodică, deci se poate aplica teorema de mai sus şi ecuaţiile de echilibru sunt

$$\pi_0 = (1-p)\pi_2, \pi_1 = (1-p)\pi_1 + p\pi_2 \text{ şi } \pi_2 = \pi_0 + p\pi_1.$$

rezolvând sistemul (împreună cu ecuaţia de normalizare) obţinem

$$\pi_0 = \frac{1-p}{3-p}, \pi_1 = \frac{1}{3-p}, \pi_2 = \frac{1}{3-p} \clubsuit$$

- Un *drum aleator* sau *random walk* într-un graf neorientat este un tip special de lanţ Markov folosit la analiza algoritmilor. Fie $G = (V, E)$ un graf (finit) neorientat şi conex.

Definition 8

Un **random walk în** G *este un lanţ Markov definit printr-o secvenţă de mic scări ale unei particule între nodurile unui graf (acestea sunt stările lanţului). Dacă particula se află în nodul* s_i *care are* $d_i = d_G(s_i)$ *vecini, atunci probabilitatea ca particula sa meargă pe muchia* $s_i s_j$ *şi să se mute în nodul* s_j *este* $1/d_i$.

- G fiind conex drumul aleator (random walk)corespunzător are o singură clasă recurentă (de ce?).
- Digraful tranziţiilor probabiliste se obţine orientând fiecare muchie a lui G în ambele sensuri. Fie $\vec{G}$ digraful corespunzător drumului aleator în G.

Lemma 1.1

Un random walk într-un graf conex neorientat, G, este neperiodic dacă şi numai dacă G nu este bipartit.

proof: Un graf este bipartit dacă şi numai dacă nu conţine circuite impare. Evident că în $\vec{G}$ există un drum de la orice nod la el însuşi de lungime 2. Dacă G este bipartit atunci avem un random walk periodic cu perioada 2. Dacă G nu este bipartit atunci conţine un circuit impar şi există noduri care au drumuri impare până la ele însele. ■

- Un random walk într-un graf conex neorientat care nu este bipartit satisface condiţiile din Teorema 4.1.

Theorem 1.1

Fie G un graf neorientat, conex care nu este bipartit. Probabilităţile de echilibru are drumului aleator în G sunt: $\pi_i = \frac{1}{h_{ii}} = \frac{d_i}{2|E|}, \forall s_i \in V$.

proof: Fie $P = (p_{ij})$ matricea probabilităţilor de tranziţie ale lanţului MArkov corespunzător. Distribuţia staţionară există datorită Teoremei 4.1 şi nu există stări tranzitorii. Fie $(\pi_i)_{s_i \in V}$ această distribuţie. Ecuaţiile de echilibru, $\pi = \pi P$, sunt echivalente cu

$$\pi_j = \sum_{s_i \in N_G(s_j)} \frac{d_i}{2|E|} \frac{1}{d_i} = \frac{d_j}{2|E|}.$$

Din teorema citată rezultă că $\pi_j = \dfrac{1}{h_{jj}}$, pentru orice j. (Deoarece $\sum_{s_i \in V} d_i = 2|E|$ urmează că $\sum_{s_i \in V} \pi_i = 1$ care este ecuaţia de normalizare.) ∎

Lemma 1.2

Dacă $s_i s_j \in E$, atunci $h_{ij} < 2|E|$.

proof: Calculăm h_{ii} într-un mod diferit:

$$h_{ii} = \sum_{t \geqslant 1} t q_{ii}^{t} = \sum_{t \geqslant 1} t \sum_{s_j \in N_G(s_i)} p_{ij} q_{ji}^{t-1} = \frac{1}{d_i} \sum_{t \geqslant 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} t q_{ji}^{t-1} =$$

$$= \frac{1}{d_i} \left[\sum_{t \geqslant 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} q_{ji}^{t-1} + \sum_{t \geqslant 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} (t-1) q_{ji}^{t-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{d_i} \left(\sum_{t \geqslant 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} q_{ji}^{t-1} + \sum_{t \geqslant 1} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} t q_{ji}^{t} \right) =$$

$$= \frac{1}{d_i} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} \left(1 + \sum_{t \geqslant 1} t q_{ji}^{t} \right) = \frac{1}{d_i} \sum_{s_j \in N_G(s_i)} (1 + h_{ji}) .$$

Deoarece $h_{ii} = \dfrac{1}{\pi_i} = \dfrac{2|E|}{d_i}$, avem $2|E| = \sum_{s_j \in N_G(s_i)} (1 + h_{ji})$ şi obţinem că $h_{ji} < 2|E|$, pentru orice $s_j \in N_G(s_i)$. ∎

Definition 9

Timpul de acoperire - cover time *al grafului G ($cover(G)$) este cel mai mare timp mediu necesar vizitării tuturor nodurilor grafului de către un random walk care pleacă dintr-un nod s_i.*

Lemma 1.3

Timpul de acoperire al lui $G = (V, E)$ este cel mult $4mn$ ($n = |V|, m = |E|$).

proof: Alegem un arbore parţial T al lui G şi un parcurs eulerian închis al lui $\vec{T}$. Fie $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_{2n}}$ secvenţa de vizitare a nodurilor prin acest parcurs plecând din nodul s_{i_1} (de exemplu secvenţa nodurilor prin care trecem la o parcurgere *dfs*).
Timpul mediu necesar trecerii prin toate nodurile in acest parcurs este un majorant pentru timpul de acoperire:

$$cover(G) \leqslant \sum_{i=1}^{2n-1} h_{i,i+1} < 2m(2n-2) < 4mn.$$

- Să presupunem că avem un graf neorientat $G = (V, E)$ ($|V| = n, |E| = m$) şi două noduri $s, t \in V$.
- Problem este de a determina un drum de la s la t în G, daca un asemenea drum există.
- Soluţii pentru această problemă există: se poate utiliza o parcurgere *bfs* sau *dfs*. Complexitatea timp a acestor parcurgeri este $\mathcal{O}(m + n)$, spaţiul adiţional necesar este $\Omega(n)$ (trebuie ţinute minte nodurile vizitate).
- Prezentăm un *algoritm aleator* (sau *randomizat*) care foloseşte doar $\mathcal{O}(\log n)$ biţi de memorie.
- Algoritmul prezentat va parcurge un random walk în G pentru suficient de mulţi paşi astfel încât un drum de la s la t să aibă şanse mari de a fi găsit.

start *a random walk from s*;
if(*drumul atinge t în* $4n^3$ *paşi*)
  return *"există un drum"*;
return *"nu există un drum"*

- Algoritmul reţine poziţia curentă folosind $\mathcal{O}(\log n)$ biţi şi numărul de paşi făcuţi (cel mult $4n^3$) care de asemenea necesităs $\mathcal{O}(\log n)$ biţi.
- Vom presupune că graful nu conţine componente conexe bipartite pentru a putea aplica rezultatele anterioare.

Theorem 2.1

Algoritmul de mai sus oferă un răspuns corect cu probabilitate cel puţin $1/2$ *şi greşeşte doar când returnează mesajul "nu există un drum" când de fapt un asemenea drum există.*

proof: Dacă nu există drum de la s la t, algoritmul returnează un răspuns corect.

Să presupunem că există un s-t drum în G. Fie X timpul necesar ajungerii de la s la t; timpul mediu necesar ajungerii de la s la t, $\mathbb{E}[X]$, este mărginit de timpul de acoperire al componentei conexe care conţine s şi t, G', care este cel mult $4mn < 2n^3$. Din inegalitatea lui Markov probabilitatea ca drumul aleator să aibă mai mult de $4n^3$ paşi este

$$P(X \geqslant 4n^3) < P(X \geqslant 8nm) \leqslant P(X \geqslant 2\mathbb{E}[X]) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{2\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{2}.$$

Astfel, algoritmul greşeşte cu probabilitate de cel mult $1/2$. ■

- **Lanţuri Markov:** 1, 2, 3, 4, 6, 14, 12, 21, 23, 24
- **Rezervă:** 12, 16, 22

Sfârşit

1. O metodă naivă de a prezice starea vremii este următoarea: starea meteo de mâine este aceeaşi cu cea de astăzi. Vom presupune că acest tip de predicţie este adevărat în 75% dintre cazuri. Pentru a simplifica prespunem că există doar două tipuri de vreme: "însorită" şi "ploioasă". Determinaţi lanţul Markov al stărilor meteo, digraful de tranziţie şi probabilităţile de echilibru.

2. Metoda anterioară de prezicere este modificată în cazul unui oraş însorit: probabilitatea de a trece de la o zi ploioasa la una însorită este 0.5, iar probabilitatea de a trece de la o zi însorită la una ploioasă este 0.1. Reluaţi exerciţiul în acest caz.

3. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă mai multe clase recurente şi mai multe stări tranzitorii.

4. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă o clasă recurentă periodică şi două stări tranzitorii.

5. Determinaţi matricea de tranziţie a unui lanţ Markov periodic cu perioada 3.

6. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă două clase recurente neperiodice şi o stare tranzitorie.

7. Pe mulţime stărilor recurente ale unui lanţ Markov omogen şi discret definim următoarea relaţie: s_i *comunică* cu s_j dacă s_j este accesibilă din s_i (şi notăm cu $s_i \leftrightarrow s_j$). Arătaţi că această relaţie este una de echivalenţă, adică este

1. *reflexivă*: pentru orice i, $s_i \leftrightarrow s_i$;
2. *simetrică*: dacă $s_i \leftrightarrow s_j$, atunci $s_j \leftrightarrow s_i$, pentru orice i, j;
3. *tranzitivă*: dacă $s_i \leftrightarrow s_j$ şi $s_j \leftrightarrow s_k$, atunci $s_i \leftrightarrow s_k$ pentru orice i, j, k.

8*. O matrice $n \times n$ se numeşte *dublu stochastică* dacă suma elementelor pe fiecare linie este 1 şi suma elementelor pe fiecare coloană este 1. Arătaţi că distribuţia staţionară a unui lanţ Markov cu matricea de tranziţie dublu stochastică este uniformă.

9*. Fie q_{ij}^t probabilitatea ca, plecând din starea s_i, prima tranziţie în starea s_j să apară după t paşi, i. e.,

$$q_{ij}^t = P(X_t = s_j \text{ şi, pentru } s = \overline{1, t-1}, X_t \neq s_j | X_0 = s_i).$$

Arătaţi că într-un lanţ Markov discret, omogen şi cu un număr finit de stări

(a) O stare s_i este recurentă dacă $\sum_{t \geqslant 1} q_{ii}^t = 1$.

(b) O stare s_i este tranzitorie dacă $\sum_{t \geqslant 1} q_{ii}^t < 1$.

10*. Fie Z_i numărul de paşi necesari întoarcerii în s_i dacă am plecat din s_i; media este $h_{ii} = \mathbb{E}[Z_i] = \sum_{t \geqslant 1} t q_{ii}^t$. O stare recurentă se numeşte *pozitiv recurentă* dacă $\mathbb{E}[Z_i] < +\infty$, altfel este *nul recurentă*. Arătaţi că într-un lanţ Markov discret, omogen şi cu un număr finit de stări toate stările recurente sunt pozitive.

11*. Considerăm următorul lanţ Markov omogen şi infinit: stările sunt $\{s_i : i \in \mathbb{N}^*\}$; din s_i, probabilitatea de a ajunge în s_{i+1} este $i/(i+1)$, iar probabilitatea de a ajunge în s_1 este $1/(i+1)$.

(a) Arătaţi că s_1 este o stare recurentă nulă.

(b) Celelalte stări sunt recurente pozitive sau nule?

12. Se dă un lanţ Markov omogen cu patru stări a cărui matrice de tranziţie este următoarea:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

(a) Desenaţi digraful de tranziţie.

(b) Determinaţi clasele recurente şi stările tranzitorii.

(c) Există vreo clasă periodică?

13. Un profesor dă teste care pot fi dificile, medii sau uşoare. Dacă, la un moment dat, dă un test dificil, următorul test va fi dificil, mediu sau uşor, cu aceaşi probabilitate. Dacă, însă dă un test mediu sau uşor, atunci următorul test va fi dificil cu probabilitate 0.5 şi mediu sau uşor cu aceeaşi probabilitate 0.25. Construiţi un lanţ Markov corespunzător şi determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor. (*Indicaţie: stările vor fi: ultimul test dat a fost dificil, mediu, respectiv uşor.*)

14. Un muzeu are în custodie trei pânze de Renoir, două de Cézanne şi una de Monet, dar are spaţiu pentruy a expune doar una dintre aceste pânze. Astfel că tabloul expus este schimbat în fiecare lună cu unul dintre celelalte cinci aleator şi uniform. Găsiţi matricea de tranziţie a acestul lanţ Markov.

15. Refaceţi exerciţiul anterior în următoarele condiţii: următorul tablou expus este ales aleator şi uniform dintre tablourile unui alt pictor (diferit de cel curent).

16. Un hipermarket poate vinde în fiecare zi o cantitate foarte mare de bunuri, o cantitate medie sau o cantitate mică; în anumite zile hipermarketul se inchide pentru reaprovizionare. Dacă o zi are vânzări foarte mari atunci a doua zi va fi de aprovizionare, cu probabilitate 0.8 sau va fi o zi cu vânzări mici, cu probabilitate 0.2. După o zi cu vânzări medii urmează o zi cu vanzări mari (cu probabilitate 0.4) sau una cu vânzări medii (0.6). După o zi cu vânzări mici sau dupa o aprovizionare urmează o zi cu vânzări mici, medii sau mari cu probabilitate 0.3, 0.3, respectiv 0.4.

(a) Construiţi un lanţ Markov, desenaţi digraful de tranziţie şi arătaţi că există o singură clasă recurentă, neperiodică.

(b) Determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

17. (Difuzia Ehrenfest) într-o urnă avem n bile, unele albe şi unele negre. La fiecare pas, fie, cu probabilitate $p \in (0, 1)$, scoatem din urnă o bilă şi o înlocuim în urnă cu o bilă de cealaltă culoare, fie nu facem nimic, cu probabilitate $(1 - p)$. Scrieţi ecuaţiile de echilibru. Care sunt probabilităţile de echilibru pentru $n = 3$? (*Indicaţie: starea s_i va fi: în urnă sunt i bile albe,* $0 \leqslant i \leqslant n$*.*)

18*. Un profesor superstiţios care lucrează într-o clădire circulară cu m uşi (m impar), nu foloseşte niciodată de două ori la rând aceeaşi uşă. El foloseşte cu probabilitate p (respectiv $(1 - p)$) uşa alăturată în sens orar (respectiv antiorar) uşii utilizate ultima oară. Care este probabilitatea ca o anumită uşă să fie utilizată într-un viitor foarte îndepărtat? (*Indicaţie: starea s_i: ultima uşă utilizată a fost uşa i; trebuie găsite probabilităţile de echilibru π_i.*)

19*. Considerăm un lanţ Markov cu două stări s_1 şi s_2, cu probabilităţile de tranziţie $(p, q \in (0,1))$:

$$p_{11} = 1 - p, p_{12} = p, p_{21} = q \text{ şi } p_{22} = 1 - q.$$

(a) Arătaţi că cele două stări formează o clasă recurentă nepe-riodică.

(b) Utilizând ecuaţia lui Chapman-Kolmogorov, demonstraţi prin inducţie că

$$r_{11}(n) = \frac{q}{p+q} + \frac{p(1-p-q)^n}{p+q}, r_{12}(n) = \frac{p}{p+q} - \frac{p(1-p-q)^n}{p+q},$$

$$r_{21}(n) = \frac{q}{p+q} - \frac{q(1-p-q)^n}{p+q}, r_{22}(n) = \frac{p}{p+q} + \frac{q(1-p-q)^n}{p+q}.$$

20. Arătaţi că adunând primele $(m-1)$ ecuaţii de echilibru o obţinem pe a m-a.

21. Un controler tratează cererile de citire scriere (read-write) pe un suport de memorie de la trei procese diferite. Condiţiile sunt de aşa natură că fiecare proces are un număr nelimitat de astfel de cereri. După satisfacerea unei cereri a procesului j controlerul tratează o cerere a procesului j cu probabilitate p_{ij}, unde $P = (p_{ij})$ este următoarea matrice

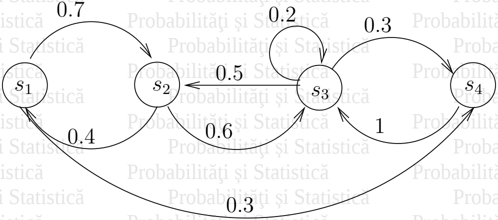
$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Presupunem că o scriere/citire durează un acelaşi timp constant.

(a) Modelaţi această situaţie ca un lanţ Markov cu trei stări şi desenaţi digraful corespunzător.

(b) Determinaţi probabilităţile de echilibru, dacă acestea există.

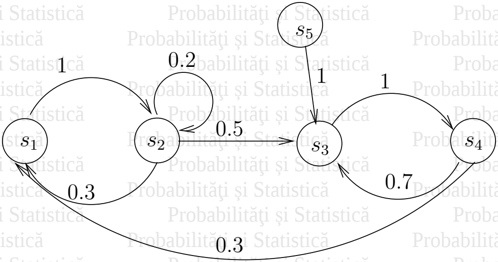
22. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanţ Markov discret şi omogen.



(a) Determinaţi matricea de tranziţie corespunzătoare, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

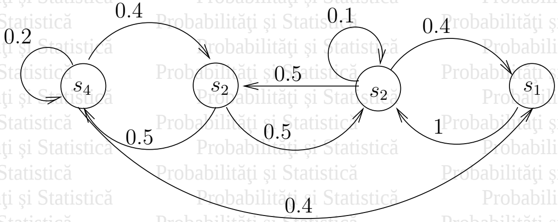
23. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanţ Markov discret şi omogen.



(a) Determinaţi matricea de tranziţie corespunzătoare, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

24. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanţ Markov discret şi omogen.



(a) Determinaţi matricea de tranziţie corespunzătoare, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

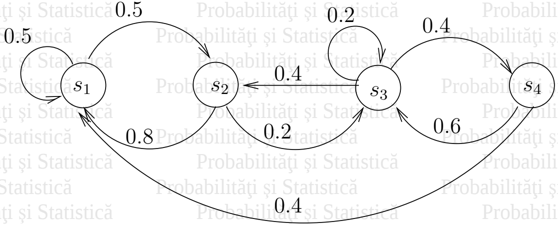
25. Matricea de tranziţie a unui lanţ Markov discret şi omogen este următoarea:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determinaţi digraful crespunzător lanţului, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

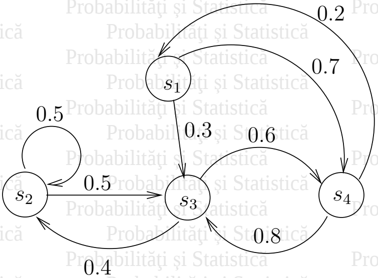
26. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanţ Markov discret şi omogen.



(a) Determinaţi matricea de tranziţie corespunzătoare, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, scrieţi sistemul de ecuaţii care conduc la determinarea probabilităţilor de echilibru ale stărilor.

27. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanţ Markov discret şi omogen.



(a) Determinaţi matricea de tranziţie corespunzătoare, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, scrieţi sistemul de ecuaţii care conduc la determinarea probabilităţilor de echilibru ale stărilor.

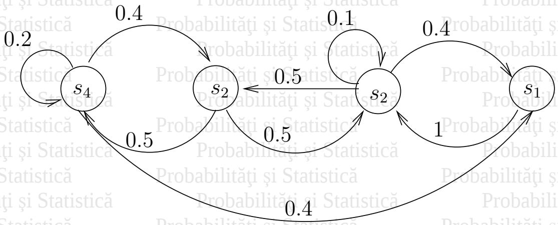
28. Matricea de tranziţie a unui lanţ Markov discret şi omogen este următoarea:

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(a) Determinaţi digraful crespunzător lanţului, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

29. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanţ Markov discret şi omogen.



(a) Determinaţi matricea de tranziţie corespunzătoare, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

30. Un student învaţă în fiecare zi una, două ore sau deloc. Dacă studiază doua ore într-o zi, atunci în ziua următoare, cu probabilitate 0.75 nu va studia deloc şi cu probabilitate 0.25 va studia doar o oră. Dacă într-o zi studiază o oră, în ziua următoare, cu probabilitate 0.3 nu va studia deloc şi cu probabilitate 0.3 va studia doar o oră. Dacă nu învaţă deloc într-o anumită zi, în următoarea va învăţa o oră cu probabilitate 0.75 sau nu va învăţa deloc. Un lanţ Markov se poate defini identificând o stare cu numărul de ore de studiu dintr-o anumită zi.

(a) Desenaţi digraful de tranziţie, determinaţi matricea de tranziţie şi indicaţi clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există distribuţia staţionară scrieţi sistemul de ecuaţii care conduce la determinarea probabilităţilor de echilibru ale stărilor.

31. O galerie de artă modernă are în fiecare lună un alt tip de expoziţie: de pictură, de sculptură sau de fotografie. După o expunere de tablouri urmează cu şanse egale una de fotografii sau de sculpturi. După o expoziţie fotografică probabilitatea de a avea o expoziţie de sculptură este de două ori mai mare decât aceea de a avea una de pictură. După o expoziţie de sculptură urmează întotdeauna una de pictură. Se poate defini un lanţ Markov identificând o stare cu tipul expoziţiei dintr-o anumită lună.

(a) Determinaţi digraful de tranziţie, matricea de tranziţie şi indicaţi clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există distribuţia staţionară (justificaţi) scrieţi sistemul de ecuaţii care conduce la determinarea probabilităţilor de echilibru ale stărilor.

32. O expoziţie numismatică itinerează între patru oraşe: C_1, C_2, C_3 şi C_4. Expoziţia nu stă două luni consecutive în acelaşi oraş. Din C_1 se mută în $C2$ sau C_4 cu aceeaşi probabilitate; din C_2 pleacă doar în C_4; din C_3 pleacă în C_1 cu probabilitate 0.25 sau în C_2, iar din C_4 se mută echiprobabil în oricare alt oraş. Se poate defini un lanţ Markov identificând o stare cu oraşul în care se află expoziţia într-o anumită lună.

(a) Desenaţi digraful de tranziţie, determinaţi matricea de tranziţie şi indicaţi clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există distribuţia staţionară (justificaţi) scrieţi sistemul de ecuaţii care conduce la determinarea probabilităţilor de echilibru ale stărilor.

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
- Johnosn, J. L., *Probability and Statistics for Computer Science*, Wiley Interscience, 2008.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Mitzenmacher, M., E. Upfal, *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*, Cambridge University Press, 2005.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.

Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.