Logica cu predicate de ordinul I
Curs 1 - Sintaxa

Ștefan Ciobâcă

28 Noiembrie 2016

Logică pentru Informatică - Partea a II-a

1. Ștefan Ciobâcă
2. `http://profs.info.uaic.ro/~stefan.ciobaca/logica/`
3. `stefan.ciobaca@gmail.com`
4. Consultații - C508, marți de la 18 la 20.

Logica de predicate de ordinul I (LP1)

1. o nouă logică, mai expresivă decât LP
2. în engleză: first-order logic (FOL)

$\mathtt{LP1}$ în loc de $\mathtt{LP}$ - motivație

Vreau să modelez în $\mathtt{LP}$ următorul raționament: “Știu că dacă sunt om atunci sunt muritor și că sunt om. Deci sunt muritor.”
Fie $p, q \in \mathtt{A}$ două variabile propoziționale.

1. p - “sunt om”
2. q - “sunt muritor”

În logica propozițională, $p \to q, p \models q$ corespunde raționamentului de mai sus.

LP1 în loc de LP - motivație

Vreau să modelez următorul raționament: “Știu că dacă cineva este om atunci acea persoană este muritor. Știu că Socrates este om. Deci Socrates este muritor.”
(imposibil de modelat în LP).
Privire fugară în LP1:

1. $P(x)$ - “x este om”
2. $Q(x)$ - “x este muritor”
3. S - “Socrates”

În LP1, avem $\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)), P(S) \models Q(S)$.

LP1

1. variabile, simboluri funcționale, termeni
2. simboluri predicative, formule
3. poziții
4. apariții legate/libere, variabile legate/libere
5. substituții

Noțiunea de *termen* (sau *term*)

1. Fixăm $\mathcal{X}$ - o mulțime infinit numărabilă de simboluri numite *variabile* (a nu se confunda cu variabilele propoziționale din $\texttt{LP}$).
2. Fixăm $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots$, unde:
   2.1 $\mathcal{F}_0$ este mulțimea *simbolurilor funcționale* de *aritate* 0.
   2.2 $\mathcal{F}_1$ este mulțimea *simbolurilor funcționale* de aritate 1.
   2.3 $\mathcal{F}_2$ este mulțimea *simbolurilor funcționale* de aritate 2.
   2.4 $\ldots$

Noțiunea de *termen* (sau *term*)

$\mathcal{F}$ - mulțime *indexată* de simboluri funcționale.

1. $\mathcal{F}_0$ - simboluri constante,
2. $\mathcal{F}_1$ - simboluri funcționale unare,
3. $\mathcal{F}_2$ - simboluri funcționale binare,
4. $\mathcal{F}_3$ - simboluri funcționale ternare,
5. $\mathcal{F}_n$ - simboluri funcționale *n*-are.

Exemplu

Fie $\mathcal{X} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. *Fie* $\mathcal{F}_0 = \{c\}$, $\mathcal{F}_1 = \{h\}$ *și* $\mathcal{F}_2 = \{f, g\}$.

Noțiunea de *termen* (sau *term*)

Alfabetul termenilor este $Alf_{\mathcal{T}} = \{'(', ')'\} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \ldots$.
Termenii sunt șiruri de caractere peste $Alf_{\mathcal{T}}$, definiți astfel:

Definiție

Mulțimea $\mathcal{T}$ (a termenilor) este definită inductiv astfel:

1. *orice variabilă $x \in \mathcal{X}$ este termen: $x \in \mathcal{T}$*
2. *orice simbol constant $c \in \mathcal{F}_0$ este termen: $c \in \mathcal{T}$*
3. *dacă $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $f \in \mathcal{F}_n$ este un simbol funcțional de aritate n și $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.*

Noțiunea de *termen* (sau *term*)

Exemplu

În continuarea exemplului de mai sus: fie $\mathcal{X} = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. *Fie* $\mathcal{F}_0 = \{c\}$, $\mathcal{F}_1 = \{h\}$ *și* $\mathcal{F}_2 = \{f, g\}$, *avem următorii termeni:*

$$x \in \mathcal{T} \qquad y \in \mathcal{T} \qquad x_3 \in \mathcal{T} \qquad c \in \mathcal{T}$$
$$h(x) \in \mathcal{T} \qquad h(y) \in \mathcal{T} \qquad h(c) \in \mathcal{T}$$
$$g(x, y) \in \mathcal{T} \qquad f(c, c) \in \mathcal{T} \qquad f(c, y) \in \mathcal{T}$$
$$f(h(x), y) \in \mathcal{T} \qquad g(h(c), h(c)) \in \mathcal{T} \qquad f(c, y) \in \mathcal{T}$$
$$f\Big(g\Big(f(x, y), h(c)\Big), f(c, c)\Big) \in \mathcal{T}$$

1. orice variabilă $x \in \mathcal{X}$ este termen: $x \in \mathcal{T}$
2. orice simbol constant $c \in \mathcal{F}_0$ este termen: $c \in \mathcal{T}$
3. dacă $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $f \in \mathcal{F}_n$ este un simbol funcțional de aritate n și $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

Formule atomice

Vom fixa în continuare o mulțime indexată de *simboluri predicative*:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \ldots.$$

1. $\mathcal{P}_0$ este mulțimea simbolurilor predicative constante,
2. $\mathcal{P}_1$ este mulțimea simbolurilor predicative unare,
3. $\mathcal{P}_2$ este mulțimea simbolurilor predicative binare iar
4. $\mathcal{P}_n$ este mulțimea simbolurilor predicative n-are.

Definiție

Mulțimea $\mathtt{At}$*, a formulelor atomice, este definită astfel:*

1. $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathtt{At}$,
2. *dacă* $P \in \mathcal{P}_n$ *(cu* $n \geq 1$*) și* $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$*, atunci* $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathtt{At}$.

Formule atomice

Exemplu

Fie $\mathcal{P}_0 = \{P\}$, $\mathcal{P}_1 = \{Q\}$ *și* $\mathcal{P}_2 = \{R\}$ *(*$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_4 = \ldots = \emptyset$*).*
Câteva exemple de formule atomice sunt:

$$P \in \mathtt{At}$$
$$Q(x) \in \mathtt{At} \qquad Q(c) \in \mathtt{At} \qquad Q(f(f(x,y),c)) \in \mathtt{At}$$
$$R\Big(c,x\Big) \in \mathtt{At} \qquad R\Big(h(x), f(x,y)\Big) \in \mathtt{At}$$
$$R\Bigg(f\Big(f(x,y), f(x,y)\Big), h(c)\Bigg) \in \mathtt{At}$$

Formulele atomice sunt șiruri de caractere peste alfabetul
$Alf_{\mathtt{At}} = Alf_{\mathcal{T}} \cup P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots$.

Formule $\mathtt{LP1}$

Definiție

Mulțimea $\mathtt{LP1}$ (formule din logica de ordinul I) este definită inductiv astfel:

1. $\mathtt{At} \subseteq \mathtt{LP1}$;
2. *Dacă* $F \in \mathtt{LP1}$, *atunci* $(\neg F) \in \mathtt{LP1}$ *și* $(F) \in \mathtt{LP1}$;
3. *Dacă* $F_1, F_2 \in \mathtt{LP1}$, *atunci* $(F_1 \wedge F_2) \in \mathtt{LP1}$, $(F_1 \vee F_2) \in \mathtt{LP1}$;
4. *Dacă* $F \in \mathtt{LP1}$ *și* $x \in \mathcal{X}$, *atunci* $(\forall x.F) \in \mathtt{LP1}$ *(și* $(\exists x.F) \in \mathtt{LP1}$*).*

N.B. Vom considera următoarele notații: $F_1 \rightarrow F_2 \overset{notație}{=} \neg F_1 \vee F_2$, $F_1 \leftarrow F_2 \overset{notație}{=} F_2 \rightarrow F_1$, $F_1 \leftrightarrow F_2 \overset{notație}{=} (F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1)$.

Exemplu

$$P \in LP1$$

$$Q(x) \in LP1 \qquad R\Big(h(x), f(x,y)\Big) \in LP1 \qquad (\neg Q(f(x,y))) \in LP1$$

$$(P \wedge Q(x)) \in LP1 \qquad \Bigg(Q(x) \vee R\Big(h(x), f(x,y)\Big)\Bigg) \in LP1$$

$$(Q(x) \rightarrow R(x,y)) \in LP1 \qquad ((Q(x) \wedge P) \vee Q(y)) \in LP1$$

$$(\forall x.(Q(x) \vee P)) \in LP1 \qquad ((\exists x.Q(x)) \vee (\neg P)) \in LP1$$

1. $\mathtt{At} \subseteq \mathtt{LP1}$;
2. Dacă $F \in \mathtt{LP1}$, atunci $(\neg F) \in \mathtt{LP1}$ și $(F) \in \mathtt{LP1}$;
3. Dacă $F_1, F_2 \in \mathtt{LP1}$, atunci $(F_1 \wedge F_2) \in \mathtt{LP1}$, $(F_1 \vee F_2) \in \mathtt{LP1}$ (și $(F_1 \rightarrow F_2) \in \mathtt{LP1}$);
4. Dacă $F \in \mathtt{LP1}$ și $x \in \mathcal{X}$, atunci $(\forall x.F) \in \mathtt{LP1}$ (și $(\exists x.F) \in \mathtt{LP1}$).

Sumar

Mulțimea termenilor ($\mathcal{T}$):

$$t ::= x \mid c \mid f(\underbrace{t, \ldots, t}_{n}) \qquad x \in \mathcal{X}, c \in \mathcal{F}_0, f \in \mathcal{F}_n$$

Mulțimea formulelor atomice ($\mathtt{At}$):

$$a ::= P \mid Q(\underbrace{t, \ldots, t}_{n}) \qquad P \in \mathcal{P}_0, Q \in \mathcal{P}_n$$

Mulțimea formulelor de ordinul **I** ($\mathtt{LP1}$):

$$\begin{aligned} F ::= \quad & a \mid (\neg F) \mid (F) \mid (F \vee F) \mid (F \wedge F) \mid \\ & (F \to F) \mid (\forall x.F) \mid (\exists x.F) \qquad a \in \mathtt{At}, x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

Exemplu

$$\mathcal{P}_1 = \{P, Q\}, \mathcal{F}_0 = \{s\}$$

1. $P(x)$ - "x este om"
2. $Q(x)$ - "x este muritor"

$$\Big((\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))) \land P(s)\Big) \rightarrow Q(s)$$

Exemplu

$$\mathcal{P}_2 = \{L\}$$

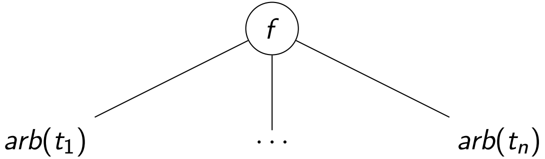
- $L(x, y)$ - "x îl iubește pe y"

1. $(\forall x.(\exists y.L(x, y)))$
   "everybody has somebody whom they love" (Optimist)
2. $(\exists y.(\forall x.L(x, y)))$
   "there is someone who everyone loves" (Popular)
3. $(\forall y.(\exists x.L(x, y)))$
   "everyone is loved by someone" (Hopeless Romantic)
4. `http://ctp200.com/comic/27`

Arborele abstract asociat unui termen

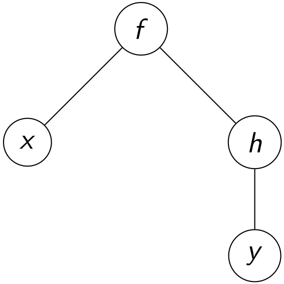
1. dacă $t = c$, $c \in \mathcal{F}_0$, atunci $arb(t) = c$
2. dacă $t = x$, $x \in \mathcal{X}$, atunci $arb(t) = x$
3. dacă $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, $f \in \mathcal{F}_n$ $(n > 0)$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, atunci

$arb(t) =$

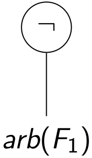


Arborele abstract asociat unui termen - exemplu

$arb(f(x, h(y))) =$



Arborele abstract asociat unei formule - ¬, ()

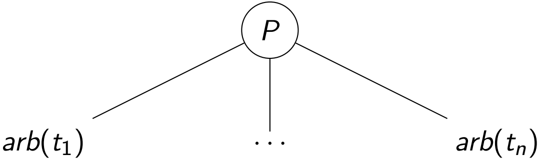
- dacă $F = (\neg F_1)$, atunci $arb(F) =$ 

- dacă $F = (F_1)$, atunci $arb(F) = arb(F_1)$

Arborele abstract asociat unei formule - $P(t_1, \ldots, t_n)$

- dacă $F = P(t_1, \ldots, t_n)$, atunci

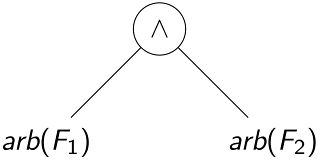
$arb(F) =$



Arborele abstract asociat unei formule - $\wedge$

- dacă $F = (F_1 \wedge F_2)$, atunci

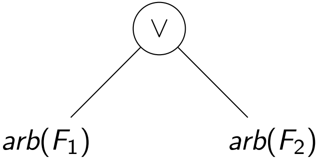
$arb(F) =$



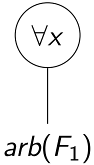
Arborele abstract asociat unei formule - $\vee$

- dacă $F = (F_1 \vee F_2)$, atunci

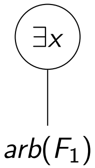
$arb(F) =$



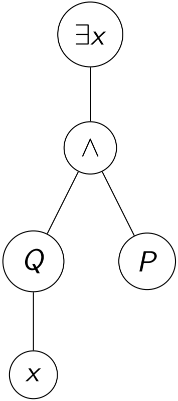
Arborele abstract asociat unei formule - $\forall$

- dacă $F = (\forall x . F_1)$, atunci $arb(F) =$ 

Arborele abstract asociat unei formule - $\exists$

- dacă $F = (\exists x.F_1)$, atunci $arb(F) =$ 

Exemplu

$arb((\exists x.(Q(x) \land P))) =$ 

Despre paranteze

La fel cum scriem $-3 \times 4 + 5$ în loc de $(((-3) \times 4) + 5)$, vom renunța la paranteze după cum urmează:

1. vom scrie $\neg P(x) \land Q(y) \lor R(x, y)$ în loc de $\Big(\big((\neg P(x)) \land Q(y)\big) \lor R(x, y)\Big)$ (la fel ca la logica propozițională).

Ordinea de prioritate: $\neg, \forall, \exists, \land, \lor, \rightarrow$.

Exemplu

$$\forall x.(P(x) \land \neg Q(x) \rightarrow R(x)) \text{ în loc de}$$
$$(\forall x.\Big(\big(P(x) \land (\neg Q(x))\big) \rightarrow R(x)\Big)) \text{ în loc de}$$

When in doubt: use parantheses.

Pozițiile unui termen

Definiție

O poziție p este un șir de numere naturale $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$. *Pentru* $k = 0$, *șirul vid este notat cu* ϵ.

Exemplu

Spre exemplu, o poziție este $p = 0 \cdot 2 \cdot 1$.

Pozițiile unui termen

Definiție

Pozițiile atașate unui termen, notate $pos(t)$, sunt:

1. $pos(c) = \{\epsilon\}$, *dacă* $c \in \mathcal{F}_0$
2. $pos(x) = \{\epsilon\}$, *dacă* $x \in \mathcal{X}$
3. $pos(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} i \cdot pos(t_i)$, *dacă* $f \in \mathcal{F}_n$.

În definitia de mai sus, am notat cu $i \cdot P$ mulțimea de poziții obținută din P prin adăugarea numărului i în față:
$i \cdot P = \{i \cdot p \mid p \in P\}$.

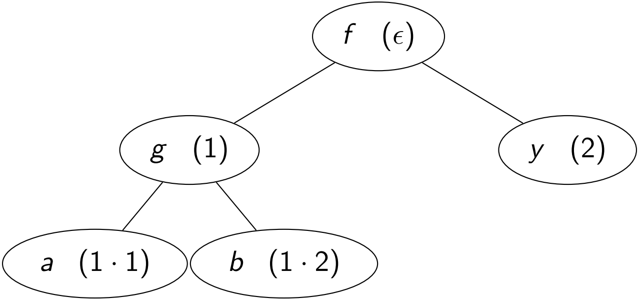
Exemplu

Pentru $t = f(g(a, b), y)$, *avem* $pos(t) = \{\epsilon, 1, 2, 1 \cdot 1, 1 \cdot 2\}$.

Pozițiile unui termen

Exemplu

Pentru $t = f(g(a,b),y)$, *avem* $pos(t) = \{\epsilon, 1, 2, 1\cdot 1, 1\cdot 2\}$.



Pozițiile unui termen

Definiție

Fie t un termen și fie $p \in pos(t)$ o poziție a termenului. Termenul aflat la poziția p în termenul t, notat $t|_p$ este definit astfel:

1. $t|_\epsilon = t$,
2. $f(t_1, \ldots, t_n)|_{i \cdot p} = (t_i)|_p$.

Exemplu

Pentru $t = f(g(a, b), y)$, și $p = 1$, avem $t|_p = g(a, b)$. Dacă $q = 1 \cdot 2$, atunci $t|_q = b$.

Pozițiile unei formule

Funcția *pos* se extinde si asupra formulelor:

Definiție

1. $pos(P(t_1, \ldots, t_n)) = \{\epsilon\} \cup \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} i \cdot pos(t_i)$,
2. $pos(\neg F) = \{\epsilon\} \cup 1 \cdot pos(F)$,
3. $pos(F_1 \wedge F_2) = pos(F_1 \vee F_2) = \{\epsilon\} \cup 1 \cdot pos(F_1) \cup 2 \cdot pos(F_2)$,
4. $pos(\forall x.F_1) = pos(\exists x.F_1) = \{\epsilon\} \cup 1 \cdot pos(F_1)$.

Pozițiile unei formule

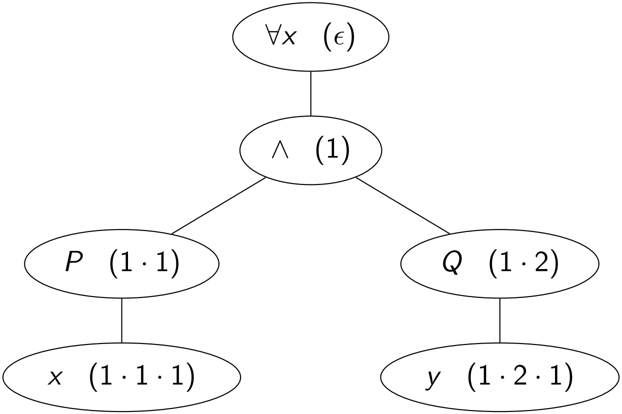
Termenul sau formula aflat/aflată la poziția p în formula F, notat(ă) $F|_p$ este:

Definiție

1. $F|_\epsilon = F$,
2. $P(t_1, \ldots, t_n)|_{i \cdot p} = t_i|_p$
3. $(\neg F)|_{1 \cdot p} = F|_p$,
4. $(F_1 \wedge F_2)|_{i \cdot p} = (F_1 \vee F_2)|_{i \cdot p} = (F_1 \rightarrow F_2)|_{i \cdot p} = (F_i)|_p$ $(i \in \{1, 2\})$,
5. $(\forall x.F_1)|_{1 \cdot p} = (\exists x.F_1)|_{1 \cdot p} = (F_1)|_p$.

Exemplu

$$\Big(\forall x.(P(x) \wedge Q(y))\Big)|_{1\cdot 2} = Q(y)$$



Apariții ale variabilelor

Mulțimea variabilelor unui termen t este notată $var(t)$ și este definită astfel:

Definiție

1. $var(c) = \emptyset$ *(dacă* $c \in \mathcal{F}_0$*)*
2. $var(x) = \{x\}$ *(dacă* $x \in \mathcal{X}$*)*
3. $var(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} var(t_i)$

Similar, se definește $var(F)$ ca fiind mulțimea variabilelor dintr-o formulă F.
În mod alternativ,
$var(t) = \{x \in \mathcal{X} \mid \text{există } p \in pos(t) \text{ a.i. } t|_p = x\}$.

Domeniul de vizibilitate al unei variabile - analogie

```
for (int x = 1; x <= 10; ++x) {
  for (int x = 1; x <= 10; ++x) {
    s++;
  }
}
```

$\forall x.(Q(x) \wedge \exists x.P(x))$
Domeniul de vizibilitate a “primei variabile” x (cea cuantificată universal) este $(Q(x) \wedge \exists x.P(x))$, iar domeniul de vizibilitate a celei de-a “doua variabile” x (cea cuantificată existențial) este $P(x)$.

Apariții ale variabilelor

Definiție

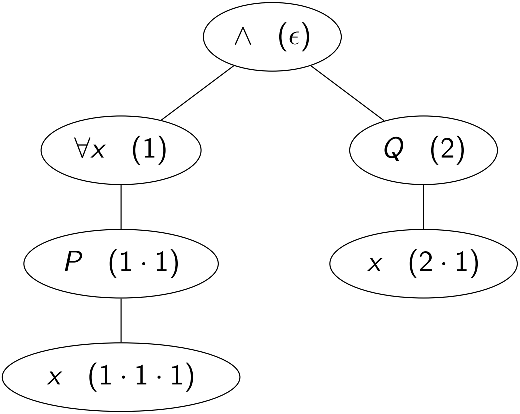
O apariție a unei variabile x într-o formulă F (respectiv intr-un termen t) este o pozitie p a.i. $F|_p = x$ (respectiv $t|_p = x$).

Definiție

O apariție p a unei variabile x într-o formulă F este legată dacă există un prefix q a lui p astfel incât $F|_q = \forall x.G$ sau $F|_q = \exists x.G$ (dacă pe drumul de la apariția respectivă spre rădăcina arborelui formulei găsim un nod $\forall x$ sau $\exists x$).
O aparitie p a unei variabile x într-o formulă F este liberă dacă nu este legată.

Exemplu

$$F = (\forall x.P(x)) \land Q(x)$$



Apariții ale variabilelor

Definiție

Mulțimea variabilelor unei formule care au cel puțin o apariție legată se notează $bound(F)$*:*

1. $bound(P(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$,
2. $bound(\neg F_1) = bound(F_1)$,
3. $bound(F_1 \wedge F_2) = bound(F_1 \vee F_2) = bound(F_1 \rightarrow F_2) = bound(F_1) \cup bound(F_2)$,
4. $bound(\forall x.F_1) = bound(\exists x.F_1) = bound(F_1) \cup \{x\}$.

Exemplu

$$bound\Bigg(\bigg(\forall x.\Big(P(x)\Big)\bigg) \vee R(x, y)\Bigg) = \{x\}$$

Apariții ale variabilelor

Definiție

Mulțimea variabilelor unei formule care au cel puțin o apariție liberă se notează free(F):

1. $free(P(t_1, \ldots, t_n)) = var(t_1) \cup \ldots \cup var(t_n)$,
2. $free(\neg F_1) = free(F_1)$,
3. $free(F_1 \wedge F_2) = free(F_1 \vee F_2) = free(F_1 \rightarrow F_2) = free(F_1) \cup free(F_2)$,
4. $free(\forall x.F_1) = free(\exists x.F_1) = free(F_1) \setminus \{x\}$.

Atenție! $free(F)$ și $bound(F)$ pot avea elemente în comun.

Exemplu

$$free\Bigg(\bigg(\forall x.\Big(P(x)\Big)\bigg) \vee R(x, y)\Bigg) = \{x, y\}$$

Apariții ale variabilelor

Exemplu

Fie $F = P(x) \land \forall x.Q(x, y)$*. Prima apariție a lui* x *este liberă. Singura apariție a lui* y *este liberă. A doua apariție a lui* x *este legată. Avem* $var(F) = \{x, y\}$, $bound(F) = \{x\}$ *și* $free(F) = \{x, y\}$.

Substituții

Definiție

O substituție este o funcție $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, *cu proprietatea că* $\sigma(x) \neq x$ *pentru un număr finit de variabile* $x \in \mathcal{X}$.

Definiție

Dacă $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ *este o substituție, atunci mulțimea* $dom(\sigma) = \{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ *se numește domeniul substituției* σ.

Substituții - exemplu

Fie funcția $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, astfel încât:

1. $\sigma(x) = h(x)$;
2. $\sigma(y) = f(h(x), a)$;
3. $\sigma(z) = z$, pentru orice variabilă $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$.

Conform definiției de mai sus, σ este o substituție de domeniu $dom(\sigma) = \{x, y\}$.

Substituții - extensia homomorfică

Definiție

Dacă $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ este o substituție, atunci extensia homomorfică a lui σ la mulțimea termenilor este funcția $\sigma^\sharp : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, definită astfel:

1. $\sigma^\sharp(x) = \sigma(x)$, *pentru orice* $x \in \mathcal{X}$;
2. $\sigma^\sharp(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma^\sharp(t_1), \ldots, \sigma^\sharp(t_n))$, *pentru orice simbol funcțional* $f \in \mathcal{F}_n$ *de aritate* $n \in \mathbb{N}$ *și orice termeni* $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$.

Substituții - extensia homomorfică - exemplu

Fie substituția $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, astfel încât:

1. $\sigma(x) = h(x)$;
2. $\sigma(y) = f(h(x), a)$;
3. $\sigma(z) = z$, pentru orice variabilă $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$.

Avem că $\sigma^\sharp(g(x)) = g(\sigma^\sharp(x)) = g(\sigma(x)) = g(h(x))$.
Practic, pentru a obține $t\sigma$ din t, fiecare apariție a unei variabile x din t este înlocuită cu termenul $\sigma(x)$.
Notăm $\sigma^\sharp(t) = \sigma(t) = t\sigma$.

Substituții - operația de actualizare

Definiție

Dacă $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ *este o substituție,* $x \in \mathcal{X}$ *este o variabilă și* $t \in \mathcal{T}$ *este un termen, atunci* $\sigma[x \mapsto t]$ *este o (nouă) substituție* $\sigma' : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$*, notată* $\sigma' = \sigma[x \mapsto t]$*, definită astfel:*

1. $\sigma'(y) = \sigma(y)$ *pentru orice* $y \in \mathcal{X} \setminus \{x\}$*;*
2. $\sigma'(x) = t$*.*

Operația de actualizare - exemplu

Fie substituția $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, astfel încât:

1. $\sigma(x) = h(x)$;
2. $\sigma(y) = f(h(x), a)$;
3. $\sigma(z) = z$, pentru orice variabilă $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$.

Substituția $\sigma' = \sigma[x \mapsto x]$ este definită astfel:

1. $\sigma'(x) = x$;
2. $\sigma'(y) = f(h(x), a)$;
3. $\sigma'(z) = z$, pentru orice variabilă $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$.

Substituții - extensia homomorfică la mulțimea formulelor

Definiție

Pentru orice substituție $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, extensia homomorfică a lui σ la mulțimea formulelor este funcția $\sigma^\flat : \mathtt{LP1} \to \mathtt{LP1}$, definită astfel:

1. $\sigma^\flat(P(t_1, \ldots, t_n)) = P(\sigma^\sharp(t_1), \ldots, \sigma^\sharp(t_n))$;
2. $\sigma^\flat(\neg F) = \neg(\sigma^\flat(F))$;
3. $\sigma^\flat(F_1 \, \mathtt{op} F_2) = (\sigma^\flat(F_1)) \mathtt{op} (\sigma^\flat(F_2))$ *(pentru orice operator logic* $\mathtt{op} \in \{\wedge, \vee\}$*);*
4. $\sigma^\flat(\forall y.F) = \forall y.((\sigma')^\flat(F))$, *unde* $\sigma' = \sigma[y \mapsto y]$,
5. $\sigma^\flat(\exists y.F) = \exists y.((\sigma')^\flat(F))$, *unde* $\sigma' = \sigma[y \mapsto y]$,

Substituții - extensia homomorfică la mulțimea formulelor

Fie substituția $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, astfel încât:

1. $\sigma(x) = h(x)$;
2. $\sigma(y) = f(h(x), a)$;
3. $\sigma(z) = z$, pentru orice variabilă $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$.

Avem că $\sigma^\flat(\forall x.(P(x) \land Q(h(y)))) = \forall x.(P(x) \land Q(h(f(h(x), a))))$.

Substituții - extensia homomorfică la mulțimea formulelor

Practic, pentru a obține formula $\sigma^\flat(F)$ din formula F, fiecare apariție **liberă** a variabilei x din formula F este înlocuită cu termenul $\sigma(x)$.

Atenție! Aparițiile legate ale variabilelor nu sunt înlocuite prin aplicarea substituției.

Ca și în cazul termenilor, vom folosi notația
$\sigma^\flat(F) \stackrel{notație}{=} \sigma(F) \stackrel{notație}{=} F\sigma$.

Substituții acceptate

Definiție

Prin range(σ) notăm mulțimea de termeni

$$range(\sigma) = \{\sigma(x) \mid x \in dom(\sigma)\}.$$

Definiție

O formulă F acceptă o substituție $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$ (sau, σ este permisă pentru F) dacă

$$bound(F) \cap var(range(\sigma)) = \emptyset.$$

N.B. Avem voie să calculăm formula $F\sigma$ chiar dacă F nu acceptă σ. Noțiunea de *acceptare* va fi folosită în câteva teoreme a căror concluzie va fi adevărată doar dacă o anumită formulă acceptă o anumită substituție.

Substituții acceptate - exemplu

Fie substituția $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}$, astfel încât:

1. $\sigma(x) = h(x)$;
2. $\sigma(y) = f(h(x), a)$;
3. $\sigma(z) = z$, pentru orice variabilă $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$.

Substituția σ este permisă pentru $\forall y.P(x)$, dar nu este permisă pentru $\forall x.P(x)$.