Cursul 5

Spaţiul liniar real $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Aspecte algebrice şi topologice
(prima parte)

În perspectiva abordării unor elemente privitoare la funcţii de mai multe variabile reale, prezentăm aici câteva ***aspecte algebrice*** şi ***topologice*** care, în particular, sunt de interes ***pentru mulţimea*** $\mathbb{R}^n$ $(= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*)$, $\mathbb{R}$ fiind corpul numerelor reale. Circumstanţial, respectivele aspecte se raportează la ***dreapta reală*** când $n = 1$, la ***planul real*** când $n = 2$, la ***spaţiul real*** când $n = 3$ sau, în general, la ***hiperspaţiul real*** când $n \geq 4$.

Cadru algebric pentru $\mathbb{R}^n$

Definiţia 5.1 *Fie V o mulţime nevidă şi K un corp comutativ. Se spune că, pe V, este definită o* ***structură algebrică de spaţiu liniar peste corpul*** *K dacă şi numai dacă există o lege internă (dată, de regulă, în notaţie aditivă) "+" : $V \times V \to V$ şi o lege de compoziţie (operaţie) externă (notată, de obicei, multiplicativ) " $\cdot$ "$K \times V \to V$, aşa încât sunt îndeplinite următoarele cerinţe (axiome):*

SL1) $(V, +)$ *este un grup comutativ;*

SL2) $\alpha \cdot (\mathrm{x} + \mathrm{y}) = \alpha \cdot \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{y}, \forall \alpha \in K, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V;$

SL3) $(\alpha + \beta) \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{x}, \forall \alpha, \beta \in K, \mathrm{x} \in V;$

SL4) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathrm{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathrm{x}, \forall \alpha, \beta \in K, \mathrm{x} \in V;$

SL5) $\mathbf{1} \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}, \forall \mathrm{x} \in V$ *(unde* $\mathbf{1}$ *este elementul unitate din* K*).*

Ansamblul $(V, K, +, \cdot)$ se numeşte ***spaţiu liniar*** (sau ***vectorial***) peste K (sau K***-spaţiu liniar***). Elementele K-spaţiului liniar V se numesc ***vectori***, iar elementele lui K se numesc, într-un astfel de context, ***scalari***. Legea de compoziţie internă " + " poartă denumirea de ***adunare a vectorilor***, iar legea de compoziţie externă " $\cdot$ " se numeşte ***înmulţire cu scalari***. Când K este corpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale, atunci ***spaţiul liniar*** în cauză se numeşte ***real***. Elementul neutru (din V) în raport cu operaţia internă " + " se numeşte ***vector nul*** şi se notează, uzual, cu $\mathbf{0}$. Simetricul unui element $u \in V$, relativ la " + ", se numeşte ***vectorul opus*** lui u şi se notează cu $-u$.

Propoziţia 5.1 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar. Atunci:*

i) $0 \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall x \in V, \alpha \in K;$

ii) $(-\alpha) \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot (-\mathrm{x}) = -\alpha \cdot \mathrm{x}, \forall \alpha \in K, \mathrm{x} \in V;$

iii) $(-\alpha) \cdot (-\mathrm{x}) = \alpha \cdot \mathrm{x}, \forall \alpha \in K, \mathrm{x} \in V;$

iv) $\alpha \cdot \mathrm{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$ *sau/şi* $\mathrm{x} = \mathbf{0}$.

Demonstraţie: i) $0\cdot \mathrm{x} = (0+0)\cdot \mathrm{x} = 0\cdot \mathrm{x}+0\cdot \mathrm{x}, \forall\, \mathrm{x}\in V \Rightarrow 0\cdot \mathrm{x}+(-0\cdot \mathrm{x}) = (0\cdot \mathrm{x}+0\cdot \mathrm{x})+(-0\cdot \mathrm{x}) \Rightarrow$ $\mathbf{0} = 0\cdot \mathrm{x}+((0\cdot \mathrm{x}+(-0\cdot \mathrm{x}))) \Rightarrow \mathbf{0} = 0\cdot \mathrm{x}+\mathbf{0} = 0\cdot \mathrm{x}$. Totodată, avem: $\alpha\cdot\mathbf{0} = \alpha\cdot(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \alpha\cdot\mathbf{0}+\alpha\cdot\mathbf{0}$ $\Rightarrow \alpha\cdot\mathbf{0}+(-\alpha\cdot\mathbf{0}) = (\alpha\cdot\mathbf{0}+\alpha\cdot\mathbf{0})+(-\alpha\cdot\mathbf{0}) = \alpha\cdot\mathbf{0}+(\alpha\cdot\mathbf{0}+(-\alpha\cdot\mathbf{0})) = \alpha\cdot\mathbf{0}+\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} = \alpha\cdot\mathbf{0}$, $\forall\,\alpha\in K$.

ii) $\mathbf{0} = 0\cdot \mathrm{x} = (\alpha-\alpha)\cdot \mathrm{x} = \alpha\cdot \mathrm{x}+(-\alpha)\cdot \mathrm{x} \Rightarrow (-\alpha)\cdot \mathrm{x} = -\alpha\cdot \mathrm{x}$ şi $\mathbf{0} = \alpha\cdot\mathbf{0} = \alpha\cdot(-\mathrm{x}+\mathrm{x}) = \alpha\cdot(-\mathrm{x})+\alpha\cdot \mathrm{x}$ $\Rightarrow \alpha\cdot(-\mathrm{x}) = -\alpha\cdot \mathrm{x}, \forall\,\alpha\in K, \mathrm{x}\in V$.

iii) $(-\alpha)\cdot(-\mathrm{x}) = -\alpha\cdot(-\mathrm{x}) = -(-(\alpha\cdot \mathrm{x})) = \alpha\cdot \mathrm{x}, \forall\,\alpha\in K, \mathrm{x}\in V$.

iv) Dacă $\alpha\neq 0$ şi $\alpha\cdot \mathrm{x} = \mathbf{0}$, atunci: $\mathrm{x} = \mathbf{1}\cdot \mathrm{x} = \left(\alpha^{-1}\cdot\alpha\right)\cdot \mathrm{x} = \alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot \mathrm{x}) = \alpha^{-1}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Altfel, $\alpha = 0$ şi x este arbitrar în V. ◀

Propoziţia 5.2 *Mulţimea $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$) are structură de spaţiu liniar real în raport cu operaţia algebrică internă de adunare a n-uplelor, definită prin*

$$(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{x}+\mathrm{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\forall\,\mathrm{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n), \mathrm{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$$

şi legea de înmulţire a unui n-uplu oarecare cu un scalar real arbitrar, definită prin

$$(\alpha,\mathrm{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \alpha\cdot \mathrm{x} = (\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n),$$

$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}, \mathrm{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie: Asociativitatea şi comutativitatea adunării pe $\mathbb{R}$ implică, evident, asociativitatea şi respectiv comutativitatea adunării pe $\mathbb{R}^n$. Totodată, se vede că $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ este vectorul nul, adică elementul neutru al adunării pe $\mathbb{R}^n$ şi, pentru orice $\mathrm{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, există opusul $-\mathrm{x} = (-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)\in\mathbb{R}^n$. Prin urmare, în raport cu adunarea n-uplelor reale, $(\mathbb{R}^n,+)$ este grup (aditiv) comutativ, fiind satisfăcută astfel axioma *SL1)* din Definiţia 5.1. În ceea ce priveşte îndeplinirea axiomelor *SL2)-SL5)* constatăm, pe rând, că avem:

$$\alpha\cdot(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \alpha\cdot(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) = (\alpha(x_1+y_1),\alpha(x_2+y_2),\ldots,\alpha(x_n+y_n)) =$$

$$= (\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2,\ldots,\alpha x_n+\alpha y_n) = (\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n)+(\alpha y_1,\alpha y_2,\ldots,\alpha y_n) = \alpha\cdot \mathrm{x}+\alpha\cdot \mathrm{y},$$
$$\forall\,\alpha\in\mathbb{R}, \mathrm{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n), \mathrm{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{x} = (\alpha+\beta)\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n) = ((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)x_2,\ldots,(\alpha+\beta)x_n) =$$

$$= (\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2,\ldots,\alpha x_n+\beta x_n) = (\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n)+(\beta x_1,\beta x_2,\ldots,\beta x_n) =$$

$$= \alpha\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\beta\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \alpha\cdot \mathrm{x}+\beta\cdot \mathrm{x}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \mathrm{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot \mathrm{x}) = \alpha\cdot(\beta\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)) = \alpha\cdot(\beta x_1,\beta x_2,\ldots,\beta x_n) =$$

$$= ((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)x_2,\ldots,(\alpha\beta)x_n) = (\alpha\beta)\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (\alpha\beta)\cdot \mathrm{x},$$

$$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \mathrm{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ şi}$$

$$\mathbf{1}\cdot \mathrm{x} = \mathbf{1}\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (1\cdot x_1,1\cdot x_2,\ldots,1\cdot x_n) =$$

$$= (x_1,x_2,\ldots,x_n) = \mathrm{x}, \forall\,\mathrm{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}.$$

În concluzie, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ este un spaţiu liniar real. ◀

Alte exemple de spaţii liniare: Fie X o mulţime nevidă, K un corp comutativ, $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste K şi $\mathcal{F}(X, V) = \{f : X \to V\}$. Se poate vedea că $\mathcal{F}(X, V)$ are o structură algebrică de spaţiu liniar în raport cu adunarea funcţiilor, definită în mod obişnuit prin

$$(*) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall\, x \in V, \forall\, f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

şi înmulţirea funcţiilor cu scalari din K, definită prin

$$(**) \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall\, \alpha \in K, \forall\, x \in V, \forall\, f \in \mathcal{F}(X, V).$$

Aceasta deoarece, în virtutea faptului că V este un K-spaţiu liniar, $\mathcal{F}(X, V)$ satisface, în raport cu operaţiile algebrice menţionate, axiomele *SL1)-SL5)* din Definiţia 5.1.

Particularizând X, K, şi V, obţinem diverse exemple de spaţii vectoriale. Astfel, dacă m şi n sunt numere naturale proprii, iar $X = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F}(X, V)$ se identifică cu mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a tuturor matricilor de tip $m \times n$ şi cu elemente din $\mathbb{R}$, mulţime care, în raport cu adunarea matricilor şi cu înmulţirea cu scalari din $\mathbb{R}$ este, aşadar, un spaţiu liniar real.

În situaţia în care $X \subseteq \mathbb{R}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, se obţine $\mathbb{R}$-spaţiul liniar $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ al funcţiilor reale, de o singură variabilă reală, definite pe X.

Dacă X este o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $K = \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, atunci $\mathcal{F}(X, V)$ reprezintă, în raport cu adunarea $(*)$ şi înmulţirea $(**)$, spaţiul liniar real al funcţiilor de n-variabile reale, definite pe X şi cu valori vectoriale, de câte m componente reale.

Atunci când $X = \mathbb{N}$ şi $V = K = \mathbb{R}$, mulţimea $\mathcal{F}(X, V)$ este, în raport cu operaţiile $(*)$ şi $(**)$, spaţiul liniar real al şirurilor de numere reale.

Definiţia 5.2 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste un corp comutativ K şi W o submulţime nevidă a lui V. Dacă, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W$, rezultă că $\mathrm{x} + \mathrm{y} \in W$ şi, $\forall\, \alpha \in K, \mathrm{x} \in W$, reiese că $\alpha \cdot \mathrm{x} \in W$, atunci $(W, K, +, \cdot)$ este numit **subspaţiu liniar** al lui $(V, K, +, \cdot)$.*

Exemple:

1) Mulţimea $\{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ este, în raport cu adunarea n-uplelor din $\mathbb{R}^n$ şi înmulţirea acestora cu scalari din $\mathbb{R}$, un subspaţiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +\cdot)$.

2) Mulţimea $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x), \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ a funcţiilor reale, scalare şi pare este, după cum lesne se poate vedea, un subspaţiu liniar al spaţiului liniar real $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

3) Mulţimea $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ a şirurilor Cauchy de numere raţionale este un subspaţiu liniar al spaţiului vectorial $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Definiţia 5.3 *Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ sunt elemente ale unui spaţiu liniar V peste un corp comutativ K, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt scalari din K, atunci elementul*

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k$$

*se numeşte **combinaţie liniară** a elementelor $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$.*

Observaţie: Ţinând seama de Definiţia 5.3, un enunţ echivalent al Definiţiei 5.2 este următorul: "*O submulţime nevidă W a unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$ se numeşte subspaţiu liniar al lui V dacă şi numai dacă orice combinaţie liniară de oricare două elemente ale lui W aparţine lui W, adică*

$$\forall \alpha, \beta \in K,\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W \Rightarrow \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W.$$

Definiţia 5.4 *Fie U o submulţime nevidă a unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare (cu scalari din K) de elemente din U se numeşte* ***acoperire liniară*** *a lui U şi se notează cu $Lin(U)$.*

Se poate constata uşor că $Lin(U)$ este un subspaţiu liniar al lui $(V, K, +, \cdot)$ care o include pe U.

Propoziţia 5.3 *Intersecţia oricăror două subspaţii, W_1 şi W_2, ale unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$ este un subspaţiu liniar al lui V. Reuniunea a două subspaţii liniare ale lui V nu este întotdeauna un subspaţiu liniar al lui V.*

Demonstraţie: Ţinând seama de Propoziţia 5.1 şi de Definiţia 5.2, putem afirma că orice subspaţiu liniar al lui V conţine vectorul nul $\mathbf{0}$. Aşadar $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$. Prin prisma observaţiei de mai sus, luăm două elemente arbitrare din $W_1 \cap W_2$, fie acestea x şi y. Ca atare, x şi y aparţin atât lui W_1 , cât şi lui W_2. Cum W_1 şi W_2 sunt subspaţii liniare ale lui $(V, K, +, \cdot)$, reiese că, pentru oricare scalari α şi β din K, avem $\alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_1$ şi, totodată, $\alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_2$. Deci $\alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y} \in W_1 \cap W_2$, $\forall\, \alpha, \beta \in K$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in W_1 \cap W_2$, adică $W_1 \cap W_2$ este un subspaţiu liniar al lui V.

În ceea ce priveşte partea secundă a concluziei din enunţul prezentei propoziţii, vedem că, de exemplu, deşi mulţimile $V_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ şi $V_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ sunt subspaţii liniare ale lui $\mathbb{R}^n$, iar vectorii $(1, 0, \ldots, 0)$, din V_1 şi $(0, 0, \ldots, 1)$, din V_2, aparţin reuniunii $V_1 \cup V_2$, suma lor, adică vectorul $(1, 0, \ldots, 0, 1)$, nu mai aparţine acestei reuniuni. Deci, în acest caz, reuniunea subspaţiilor liniare V_1 şi V_2 nu este un subspaţiu liniar al lui $V = \mathbb{R}^n$. ◀

Observaţie: Procedând ca în demonstraţia primei părţi a Propoziţiei 5.3, se poate arăta că, de fapt, intersecţia oricâtor subspaţii liniare ale unui spaţiu liniar este, de asemenea, un subspaţiu liniar al aceluiaşi spaţiu liniar, ceea ce ne îngăduie să validăm următoarea definiţie.

Definiţia 5.5 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi U o submulţime nevidă a sa. Cum mulţimea subspaţiilor liniare ale lui V care includ submulţimea U este nevidă, cel puţin V făcând parte din ea, numim* ***subspaţiu generat de submulţimea*** *U tocmai intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui V care conţin elementele lui U. Notăm acest subspaţiu liniar al lui V cu $Sp(U)$.*

Propoziţia 5.4 *Oricare ar fi submulţimea nevidă U a unui subspaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$, avem:*

$$Lin(U) = Sp(U) = \{\mathrm{x} \in V \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in K, \mathrm{x}_i \in U, 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ aşa încât } \mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{x}_i\}.$$

Demonstraţie: Întrucât $Lin(U)$ este un subspaţiu liniar al lui V care include pe U, intersecţia tuturor subspaţiilor liniare ale lui V cu proprietatea că o includ pe U, cu alte cuvinte $Sp(U)$, este inclusă în $Lin(U)$, adică $Sp(U) \subseteq Lin(U)$. Reciproc, orice subspaţiu liniar al lui V, care conţine pe U, conţine şi orice combinaţie liniară de elemente din U (cu scalari din K), adică include subspaţiul liniar $Lin(U)$. Prin considerarea intersecţiei tuturor acestor subspaţii, găsim că avem şi incluziunea $Lin(U) \subseteq Sp(U)$. Aşadar, obţinem $Lin(U) = Sp(U)$, ultima mulţime specificată în egalitatea din enunţ fiind de fapt exprimarea relaţională a subspaţiului $Lin(U)$. ◀

Definiţia 5.6 *a) Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar şi $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ din V. Elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ se numesc* ***liniar dependente*** *dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, dintre care cel puţin unul nenul, astfel încât combinaţia liniară $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k$ să fie vectorul nul $\mathbf{0}$ ($\in V$).*

În caz contrar, dacă nu există astfel de scalari, nu toţi nuli, aşa încât $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$*, altfel spus, dacă relaţia* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$ *are loc necesarmente numai când* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$*, atunci elementele* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ *se numesc* ***liniar independente****.*

b) *O* ***submulţime*** *nevidă* U *a unui subspaţiu liniar* V *se numeşte* ***liniar independentă*** *dacă oricare* n *(*$n \in \mathbb{N}^*$*) elemente distincte* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ *ale lui* U *sunt liniar independente, în sensul de la a). Altminteri, dacă există* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi nişte elemente* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ *din* U *ce sunt liniar dependente, atunci* ***mulţimea*** U *se numeşte* ***liniar dependentă****.*

Observaţii:

1. O submulţime liniar independentă a unui spaţiu liniar nu conţine vectorul nul $\mathbf{0}$.

2. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca n elemente $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ ale unui spaţiu liniar să fie liniar dependente este aceea ca măcar unul dintre elementele în cauză să fie o combinaţie liniară de celelalte. Într-adevăr, dacă $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ sunt liniar dependente, atunci, în conformitate cu Definiţia 5.6, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toţi nuli, astfel încât $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$. Admiţând, de exemplu, că $\alpha_1 \neq 0$, ar reieşi atunci că avem: $\mathrm{x}_1 = -\sum_{k=2}^{n} \left(\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_k\right) x_k$. Deci, unul dintre elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$, aici x_1, ar fi o combinaţie liniară de celelalte. Reciproc, dacă $\mathrm{x}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \beta_k \mathrm{x}_k$, atunci $\mathrm{x}_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \beta_k \mathrm{x}_k = \mathbf{0}$, ceea ce înseamnă că, pentru elementele $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$, există scalarii $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, 1, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_n$, evident nu toţi nuli, aşa încât se poate vorbi despre o combinaţie liniară a respectivelor elemente egală cu vectorul nul.

Definiţia 5.7 *Fie* $(V, K, +, \cdot)$ *un spaţiu liniar. Se numeşte* ***dimensiune (algebrică)*** *a spaţiului liniar* V *(şi se notează cu* $dim(V)$*) numărul maxim de elemente liniar independente din* V*.*

Spaţiul liniar V *este numit* ***infinit-dimensional*** *dacă există cel puţin o submulţime infinită şi liniar independentă a lui* V*. În caz contrar,* V *este numit* ***spaţiu liniar finit-dimensional****.*

Dacă, într-un spaţiu liniar finit-dimensional există n *(*$n \in \mathbb{N}$*) elemente liniar independente şi oricare* $n+1$ *elemente din acel spaţiu sunt liniar dependente, atunci spunem că respectivul spaţiu este* n***-dimensional*** *(sau, echivalent,* ***de dimensiune*** n*).*

Definiţia 5.8 *O mulţime* $B \neq \varnothing$*, dintr-un spaţiu liniar* $(V, K, +, \cdot)$*, se numeşte* ***bază algebrică*** *(sau* ***bază Hamel****) a lui* V *dacă* B *este liniar independentă (în sensul Definiţiei 5.6 b)) şi* $Sp(B) = V$*, adică subspaţiul liniar generat de* B *este* V*.*

În cazul unui spaţiu liniar n-dimensional V, o bază a lui V este o mulţime B alcătuită din n elemente, $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n$, liniar independente, din V. Fiecare element $\mathrm{x} \in V$ se reprezintă atunci, în mod unic, sub forma

$$\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathrm{b}_k,$$

K-scalarii $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ numindu-se ***coordonatele lui*** x ***în baza*** B .

Orice bază a unui spaţiu liniar V are un număr de vectori egal cu dimensiunea lui V. Altfel spus, $dim(V)$ nu depinde de baza lui V.

Propoziţia 5.5 *Spaţiul liniar $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ este n-dimensional. O mulţime de m ($m \leqslant n$) elemente din $\mathbb{R}^n$ este liniar independentă dacă şi numai dacă matricea având drept coloane cele m n-uple reale corespunzătoare elementelor în cauză are rangul egal cu m.*

Demonstraţie: În $\mathbb{R}^n$ există elementele $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, $\dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ care alcătuiesc o bază, numită ***baza canonică a lui*** $\mathbb{R}^n$. Într-adevăr, mulţimea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ este liniar independentă în $\mathbb{R}$, întrucât avem $\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. În plus, $Sp(B) = \mathbb{R}^n$, deoarece orice element $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se exprimă (în mod unic) prin $\mathrm{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n$. Aşadar, $dim(\mathbb{R}^n) = n$.

În al doilea rând, dacă $\mathrm{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$, $\mathrm{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$, $\dots$ şi $\mathrm{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ (cu $m \leqslant n$) sunt m elemente din $\mathbb{R}^n$, atunci acestea sunt liniar independente dacă şi numai dacă relaţia $\alpha_1 \cdot \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathrm{x}_2 + \dots + \alpha_m \cdot \mathrm{x}_m = \mathbf{0}$ este posibilă doar când $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. Altfel spus, dacă şi numai dacă sistemul liniar algebric (de n ecuaţii, cu m necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$) şi omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \dots + \alpha_m x_{m1} & = & 0 \\ \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \dots + \alpha_m x_{m2} & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \alpha_1 x_{1n} + \alpha_2 x_{2n} + \dots + \alpha_m x_{mn} & = & 0 \end{cases}$$

are numai soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, lucru care se petrece dacă şi numai dacă rangul matricii sistemului, ale cărei coloane sunt tocmai n-uplele celor m elemente $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_m$ din $\mathbb{R}^n$, este exact m. ◀

Observaţie: O mulţime $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n\}$, parte nevidă a unui spaţiu liniar finit dimensional $(V, K, +, \cdot)$, este o bază a lui V dacă şi numai dacă orice vector $\mathrm{x} \in V$ se exprimă, în mod unic, sub forma $\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{b}_k$, scalarii $x_1, x_2, \dots, x_n$ din K fiind coordonatele lui x în baza B.

Notând cu X_B matricea coloană

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a coordonatelor vectorului x în baza B şi cu $\tilde{B} = [\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n]$ matricea linie a vectorilor bazei B, relaţia $\mathrm{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{b}_k$ se poate reda, matriceal, sub forma:

$$\mathrm{x} = \tilde{B} \cdot X_B.$$

Definiţia 5.9 *Se numeşte **rang al unei mulţimi** U de vectori din spaţiul vectorial $(V, K, +, \cdot)$ dimensiunea subspaţiului generat de U, adică $dim\,(Sp(U))$ şi se notează cu $rang(U)$.*

Observaţie: Dacă V este un K-spaţiu liniar n-dimensional, atunci orice mulţime de n vectori liniar independenţi din V este o bază a lui V şi, de asemenea, orice sistem de n vectori din V care generează spaţiul liniar V alcătuieşte o bază a lui V.

Definiţia 5.10 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar cu $dim(V) = n$, $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a sa şi $B' = \{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \dots, \mathrm{b}'_m\}$ o mulţime de m elemente ale lui V. Se numeşte **matrice de trecere (schimbare) de la baza** B **la sistemul de vectori** B' matricea $S = (s_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$*

care are, pe coloane, coordonatele vectorilor din B' în baza B, adică

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{m1} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix},$$

unde $s_{ij} \in K$ sunt aşa încât

$$\begin{cases} \mathrm{b}'_1 & = & s_{11}\mathrm{b}_1 + s_{12}\mathrm{b}_2 + \dots + s_{1n}\mathrm{b}_n \\ \mathrm{b}'_2 & = & s_{21}\mathrm{b}_1 + s_{22}\mathrm{b}_2 + \dots + s_{2n}\mathrm{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{b}'_m & = & s_{m1}\mathrm{b}_1 + s_{m2}\mathrm{b}_2 + \dots + s_{mn}\mathrm{b}_n \end{cases}.$$

Altfel spus, matricial, avem $\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S$, unde $\tilde{B}' = [\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \dots, \mathrm{b}'_m]$ şi $\tilde{B} = [\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_n]$.

Observaţie: Când $m = n$, sistemul de vectori B' este o bază pentru V dacă şi numai dacă matricea S, adică matricea $\tilde{B}^{-1}\tilde{B}'$, de trecere de la B la B', este nesingulară (adică cu determinantul diferit de 0).

Propoziţia 5.6 *Fie B şi B' două baze distincte ale unui spaţiu liniar $(V, K, +, \cdot)$, finit-dimensional şi* x *un element oarecare din V. Dacă X_B şi $X_{B'}$ sunt matricile coloane ale coordonatelor lui* x *în baza B şi respectiv în baza B', iar S este matricea de trecere de la B la B', atunci formula de transformare a coordonatelor lui* x *la schimbarea bazei de la B la B' este următoarea:*

$$X_{B'} = S^{-1}X_B.$$

Demonstraţie: Întrucât $\mathrm{x} = \tilde{B}X_B = \tilde{B}'X_{B'}$ şi $\tilde{B}' = \tilde{B} \cdot S$, avem: $\tilde{B}X_B = \tilde{B}SX_{B'}$. De aici, cum $\tilde{B}$ este nesingulară, prin înmulţirea la stânga cu $\tilde{B}^{-1}$, rezultă: $X_B = SX_{B'}$. În fine, deoarece S este nesingulară, reiese că are loc formula $X_{B'} = S^{-1}X_B$. ◀

Definiţia 5.11 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar, finit-dimensional şi două baze ale sale, B şi B'. Spunem că* ***bazele*** *B şi B' sunt* ***la fel orientate*** *dacă determinantul matricii S de trecere de la B la B' este pozitiv. Bazele B şi B' se numesc* ***contrar orientate*** *dacă $\det(S) < 0$.*

Spaţiul $\mathbb{R}^n$ poate fi privit, în urma înzestrării sale cu o a doua operaţie algebrică internă, şi ca o algebră (reală), asociativă şi cu unitate, în conformitate cu următoarea definiţie.

Definiţia 5.12 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu liniar peste un corp comutativ K şi $" \times " : V \times V \to V$ o operaţie algebrică internă pe V, cu următoarele proprietăţi:*

$$(\alpha \cdot \mathrm{u} + \beta \cdot \mathrm{v}) \times \mathrm{w} = \alpha \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{w}) + \beta \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) \text{ şi}$$

$$\mathrm{u} \times (\alpha \cdot \mathrm{v} + \beta \cdot \mathrm{w}) = \alpha \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) + \beta \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{w}),$$

$\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in V$. Atunci ansamblul $(V, K, +, \cdot, \times)$ se numeşte ***algebră*** *peste K. Când operaţia $" \times "$ este asociativă,* ***algebra*** *$(V, K, +, \cdot, \times)$ este* ***asociativă****, iar când $" \times "$ are element neutru,* ***algebra*** *se numeşte* ***cu unitate****.*

Într-adevăr, spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, înzestrat cu o a doua operaţie internă, " $\times$ ", definită prin

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{x} \times \mathrm{y} = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n),$$

$$\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este, după cum am spus deja, o algebră asociativă şi cu unitate, peste $\mathbb{R}$, deoarece avem:

$$(\alpha \cdot \mathrm{u} + \beta \cdot \mathrm{v}) \times \mathrm{w} = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \ldots, \alpha u_n + \beta v_n) \times (w_1, w_2, \ldots, w_n) =$$

$$= ((\alpha u_1 + \beta v_1)w_1, (\alpha u_2 + \beta v_2)w_2, \ldots, (\alpha u_n + \beta v_n)w_n) =$$

$$= \alpha \cdot (u_1w_1, u_2w_2, \ldots, u_nw_n) + \beta \cdot (v_1w_1, v_2w_2, \ldots, v_nw_n) = \alpha \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{w}) + \beta \cdot (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) \text{ şi}$$

$$\mathrm{u} \times (\alpha \cdot \mathrm{v} + \beta \cdot \mathrm{w}) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \times (\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2, \ldots, \alpha v_n + \beta w_n) =$$

$$= (u_1(\alpha v_1 + \beta w_1), u_2(\alpha v_2 + \beta w_2), \ldots, u_n(\alpha v_n + \beta w_n)) =$$

$$= \alpha \cdot (u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n) + \beta \cdot (u_1w_1, u_2w_2, \ldots, u_nw_n) = \alpha \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) + \beta \cdot (\mathrm{u} \times \mathrm{w}),$$

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \mathrm{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Totodată, vedem că, în $\mathbb{R}^n$, avem $\mathrm{u} \times (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = (\mathrm{u} \times \mathrm{v}) \times \mathrm{w}$, $\forall\, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$ şi că $(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ este elementul neutru în raport cu operaţia " $\times$ ". Mai mult, ***algebra*** $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot, \times)$ este şi ***comutativă***, deoarece, în $\mathbb{R}^n$, operaţia multiplicativă " $\times$ " este, evident, comutativă.

Definiţia 5.13 *a) Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial peste un corp comutativ şi ordonat K. Se numeşte* ***produs scalar*** *pe V o aplicaţie de la $V \times V$ la K, notată prin $\langle \cdot, \cdot \rangle$, care satisface următoarele proprietăţi (axiome):*

PS1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este ***pozitiv definită****, adică*

i. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ şi

ii. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle = 0$, dacă şi numai dacă $\mathrm{x} = \mathbf{0} \in V$;

PS2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este ***simetrică****, adică*

i. $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \langle \mathrm{y}, \mathrm{x} \rangle$, $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$;

PS3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este ***biliniară****, adică*

i. $\langle \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle = \alpha \langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle + \beta \langle \mathrm{y}, \mathrm{z} \rangle$, şi

ii. $\langle \mathrm{x}, \alpha \cdot \mathrm{y} + \beta \cdot \mathrm{z} \rangle = \alpha \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle + \beta \langle \mathrm{x}, \mathrm{z} \rangle$, $\forall\, \alpha, \beta \in K, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in V$.

b) Perechea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, în care V este un spaţiu liniar peste un corp comutativ şi ordonat, iar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar pe V se numeşte ***spaţiu prehilbertian****.*

c) Un spaţiu prehilbertian pentru care $K = \mathbb{R}$ se numeşte ***spaţiu euclidian****.*

Propoziţia 5.7 *Spaţiul liniar real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, dotat cu produsul scalar canonic, definit prin*

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este un spaţiu euclidian.

Demonstraţie: Se verifică uşor că aplicaţia

$$(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle_c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R},$$

unde $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, satisface axiomele *PS1)-PS3)* din Definiţia 5.13 a), fiind într-adevăr un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$. Astfel, pentru *PS1)*, avem $\langle \mathrm{x},\mathrm{x}\rangle_c = \sum_{k=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $< \mathrm{x},\mathrm{x} >_c = 0$, adică $\sum_{k=1}^{n} x_i^2 = 0$, dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ceea ce înseamnă $\mathrm{x} = (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Pentru *PS2)*, vedem că $\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle_c = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i = \sum_{k=1}^{n} y_i x_i = \langle \mathrm{y},\mathrm{x}\rangle_c$, $\forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$. În fine, pentru *PS3)*, avem: $\langle \alpha \cdot \mathrm{x} + \beta \cdot \mathrm{y}, \mathrm{z}\rangle_c = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_i z_i + \beta y_i z_i) = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum_{k=1}^{n} y_i z_i = \alpha \langle \mathrm{x},\mathrm{z}\rangle_c + \beta \langle \mathrm{y},\mathrm{z}\rangle_c$, $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z} \in \mathbb{R}^n$. Analog şi pentru cea de-a doua relaţie din *PS3)*. Prin urmare, $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot,\cdot\rangle_c)$ este un spaţiu euclidian. ◀

Observaţie: Produsul scalar $\langle \cdot,\cdot\rangle_c$ pe $\mathbb{R}^n$ se mai numeşte şi ***produs scalar euclidian***.

Definiţia 5.14 *Fie $(V, K, +, \cdot)$ un spaţiu prehilbertian, dotat cu produsul scalar $\langle \cdot,\cdot\rangle$.*

a) Două ***elemente*** x *şi* y *din V se numesc* ***ortogonale*** *dacă şi numai dacă $\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle = 0$.*

b) Spunem că un vector $\mathrm{x} \in V$ este ***ortogonal pe o mulţime*** *$U \subset V$ $(U \neq \varnothing)$ dacă $\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle = 0$, $\forall\, \mathrm{y} \in U$.*

c) Un ***sistem*** *de vectori din V se numeşte* ***ortogonal*** *dacă este alcătuit din vectori ortogonali doi câte doi. Mai exact, dacă $\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle = 0$, $\forall\, \mathrm{x},\mathrm{y}$ din respectivul sistem, cu $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$.*

d) Dacă U este o submulţime nevidă a lui V, atunci prin ***suplimentul ortogonal al lui*** *U, notat cu $U^{\perp}$, înţelegem mulţimea tuturor vectorilor ortogonali pe U.*

Observaţie: Notăm prin $\mathrm{x}\perp\mathrm{y}$ faptul că vectorul $\mathrm{x} \in V$ este ortogonal pe vectorul $\mathrm{y} \in V$. De asemenea, ortogonalitatea unui element x pe o submulţime U a lui V o vom marca prin notaţia $\mathrm{x}\perp U$. Se vede că $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, $\forall\, U \subseteq V$, $U \neq \varnothing$.

Definiţia 5.15 *Fie $(V, K, +, \cdot, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu prehilbertian şi $\mathrm{x},\mathrm{y} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$.* ***Unghiul dintre vectorii*** x ***şi*** y, *notat prin $\sphericalangle(\mathrm{x},\mathrm{y})$ sau $\widehat{(\mathrm{x},\mathrm{y})}$, se defineşte prin relaţia:*

$$\widehat{(\mathrm{x},\mathrm{y})} = \arccos \frac{\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle}{\sqrt{\langle \mathrm{x},\mathrm{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathrm{y},\mathrm{y}\rangle}}.$$

Observaţie: Într-un spaţiu euclidian, doi vectori sunt ortogonali dacă şi numai dacă unghiul dintre ei este $\dfrac{\pi}{2}$.

Definiţia 5.16 *a) Fie $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un spaţiu liniar real. Se numeşte* ***normă*** *pe V o aplicaţie de la V la $\mathbb{R}$, notată simbolic prin $\|\cdot\|$, care satisface următoarele axiome:*

AN1) $\|\mathrm{x}\| \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$ *şi* $\|\mathrm{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathbf{0}$*;*

AN2) $\|\alpha \cdot \mathrm{x}\| = |\alpha|\|\mathrm{x}\|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x} \in V$;

AN3) $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\| \leqslant \|\mathrm{x}\| + \|\mathrm{y}\|$, $\forall\, \mathrm{x,y} \in V$.

b) Perechea $(V, \|\cdot\|)$ *se numeşte* ***spaţiu normat***.

Propoziţia 5.8 *Spaţiul liniar real* $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, *înzestrat cu aşa-numita normă euclidiană, definită prin*

$$\|\mathrm{x}\|_e = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

este un spaţiu normat.

Demonstraţie: Se verifică lesne axiomele *AN1)*, *AN2)* şi *AN3)*, din Definiţia 5.16. Astfel, pentru *AN1)*, avem $\|\mathrm{x}\|_e = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \geqslant 0$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\|\mathrm{x}\|_e = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathbf{0}$. Pentru *AN2)*, vedem că $\|\alpha \cdot \mathrm{x}\|_e = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^2 x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha|\|\mathrm{x}\|$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. În fine, ţinând seama de inegalitatea lui Minkowski, cu $p = 2$, are loc şi *AN3)*, cu $\|\cdot\|_e$. ◀

Observaţie: Orice spaţiu euclidian V este şi spaţiu normat. Într-adevăr, prin intermediul produsului scalar din dotarea spaţiului euclidian respectiv, fie el notat cu $\langle\cdot,\cdot\rangle$, se poate defini o normă (numită *norma indusă de produsul scalar* în cauză) prin:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \|\mathrm{x}\| = \sqrt{\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle}, \forall\, \mathrm{x} \in V.$$

Există şi norme neinduse de vreun produs scalar.

Definiţia 5.17 *a) Fie* $(V, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat şi* $\mathrm{x} \in V$. *Elementul* x *se numeşte* ***versor*** *dacă* $\|\mathrm{x}\| = 1$.

b) Fie V *un spaţiu euclidian şi* U *un sistem nevid de vectori din* V. U *se numeşte* ***ortonormat*** *dacă, în raport cu produsul scalar de pe* V, *avem:*

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \begin{cases} 0, & \text{când } \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \\ 1, & \text{când } \mathrm{x} = \mathrm{y} \end{cases}, \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in U.$$

Fie $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots \mathrm{b}_n\}$ o bază a unui spaţiu euclidian, finit-dimensional, V (cu $dim(V) = n$). În raport cu produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definit pe V, matricea $G = (g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu elementele $g_{ij} = \langle \mathrm{b}_i, \mathrm{b}_j\rangle$, al cărei determinant se numeşte ***determinant Gram***, este, desigur, nesingulară, căci, altfel, vectorii din B nu ar mai fi liniar independenţi. Dat fiind faptul că, pentru doi vectori arbitrari din V, x şi y , avem reprezentările (în baza B) $\mathrm{x} = BX_B$ şi $\mathrm{y} = BY_B$, unde X_B şi respectiv Y_B sunt matricile unicolonare ale coordonatelor lui x şi respectiv y în baza B, găsim ***expresia analitică a produsului scalar*** $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ***în baza*** B, şi anume

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = X_B^T G Y_B,$$

în care $X_B^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este transpusa matricei unicolonare de coordonate ale lui x în baza B.

Baza B este numită ***ortogonală*** ori de câte ori matricea G este diagonală, adică $g_{ij} = 0$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Spunem că baza B este ***ortonormată*** dacă şi numai dacă G este matricea unitate I_n.

Teorema 5.1 ***(Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt)***

În orice spaţiu euclidian finit-dimensional există baze ortonormate.

Demonstraţie: Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian n-dimensional şi $B = \{\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n\}$ o bază a lui. Plecând de la B, se poate construi o bază $B' = \{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2, \ldots, \mathrm{b}'_n\}$, ortogonală, a aceluiaşi spaţiu V, procedând prin aşa-zisul algoritm al lui Gram-Schmidt, după cum urmează:

1. Pasul 1: $\mathrm{b}'_1 = \mathrm{b}_1$.
2. Pasul 2: Se determină scalarul $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, aşa încât vectorul $\mathrm{b}'_2 = \mathrm{b}_2 + \lambda_1 \mathrm{b}'_1$ să fie ortogonal pe b'_1, adică să avem $0 = \langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2\rangle + \lambda_1 \langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle$. Rezultă $\lambda_1 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}$. Astfel, $\mathrm{b}'_2 = \mathrm{b}_2 - \dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_2\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}\mathrm{b}'_1$.
3. Pasul 3: Se caută scalarii μ_1 şi μ_2 din $\mathbb{R}$, aşa încât $\mathrm{b}'_3 = \mathrm{b}_3 + \mu_1 \mathrm{b}'_1 + \mu_2 \mathrm{b}'_2$ să fie ortogonal pe sistemul $\{\mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_2\}$, adică să avem $\langle \mathrm{b}'_3, \mathrm{b}'_1\rangle = 0$ şi $\langle \mathrm{b}'_3, \mathrm{b}'_2\rangle = 0$.
   Găsim $\mu_1 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_3\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}$ şi $\mu_2 = -\dfrac{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}_3\rangle}{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}'_2\rangle}$. Prin urmare, avem: $\mathrm{b}'_3 = \mathrm{b}_3 - \dfrac{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}_3\rangle}{\langle \mathrm{b}'_1, \mathrm{b}'_1\rangle}\mathrm{b}'_1 - \dfrac{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}_3\rangle}{\langle \mathrm{b}'_2, \mathrm{b}'_2\rangle}\mathrm{b}'_2$.
4. Pasul k: Continuând procedeul, obţinem formula generală:

$$\mathrm{b}'_k = \mathrm{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathrm{b}'_i, \mathrm{b}_k\rangle}{\langle \mathrm{b}'_i, \mathrm{b}'_i\rangle}\mathrm{b}'_i, k = \overline{2, n}.$$

În cele din urmă, plecând de la baza B', putem obţine baza ortonormată $B'' = \{\mathrm{b}''_1, \mathrm{b}''_2, \ldots, \mathrm{b}''_n\}$, dacă luăm $\mathrm{b}''_k = \dfrac{\mathrm{b}'_k}{\|\mathrm{b}'_k\|}$, $k = \overline{1, n}$, unde $\|\cdot\|$ este norma indusă de produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, considerat pe V. ◀

Bibliografie

1. Ion D. Ion, R. Nicolae - *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

2. Marina Gorunescu, Florin Gorunescu, Augustin Prodan - *Matematici superioare, Biostatistică şi Informatică*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.

3. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

4. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. S. Corbu - *Algebră liniară.Geometrie analitică (elemente de teorie şi aplicaţii)*, Editura ”Fair Partners”, Bucureşti, 2011.