Notițe Seminar 2

October 4, 2019

Intro:

1. Dacă la seminarul trecut am lucrat cu probabilități într-un mod mai *low-level*, începând cu seminarul acesta vom lucra cu ele mai *high-level*:

   Se aruncă un zar. Care este probabilitatea să cadă un număr par?

   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   Pentru că nu există informații suplimentare, vom presupune că rezultatele sunt echiprobabile.

   $P(\text{iese număr par}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$

   $P(\text{iese număr impar}) = P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{2}$

   Dacă pe noi în continuare nu ne interesează decât P(iese număr par) și P(iese număr impar), putem uita de Ω și de cum am calculat cele 2 probabilități. Totodată, dacă vi s-ar fi furnizat deja P(iese număr par) și P(iese număr impar) nu ar mai fi trebuit să spuneți cât e Ω și să calculați cele 2 probabilități. Astfel, lucrând doar cu P(iese număr par) și P(iese număr impar), putem spune că suntem la un nivel mai *high*.

2. Dacă până acum, ne-a interesat dacă un eveniment **se realizează sau nu** (deci, dacă dorim numeric: 0 - nu s-a realizat și 1 - s-a realizat) - număr par sau nu, nimerește ținta sau nu -, de acum vom putea răspunde și la alte întrebări: **cât** câștigi dacă iese numărul 1 la aruncarea zarului?, **de câte ori** iese cap la aruncarea monedei?

Variabile aleatoare (VA)

Rolul unei variabile aleatoare: exprimă cât/de câte ori ... într-un experiment aleator

Variabilă? Numele de variabilă aleatoare este oarecum ciudat, pentru că o variabilă aleatoare este de fapt o funcție sau, mai intuitiv, o variabilă aleatoare dă o **etichetă numerică** pentru fiecare rezultat al experimentului:

Definiție: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - **variabilă aleatoare**

Val(X) = Im(X) = valorile pe care le ia X/imaginea lui X

Observație: puteți considera că o variabilă aleatoare X este discretă dacă Val(X) este discretă. Asemănător pentru variabila continuă. În acest fișier ne vom referi doar la var. al. discrete.

Exemplu: Se aruncă 3 monede.

$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

Fie variabilele aleatore R și M:

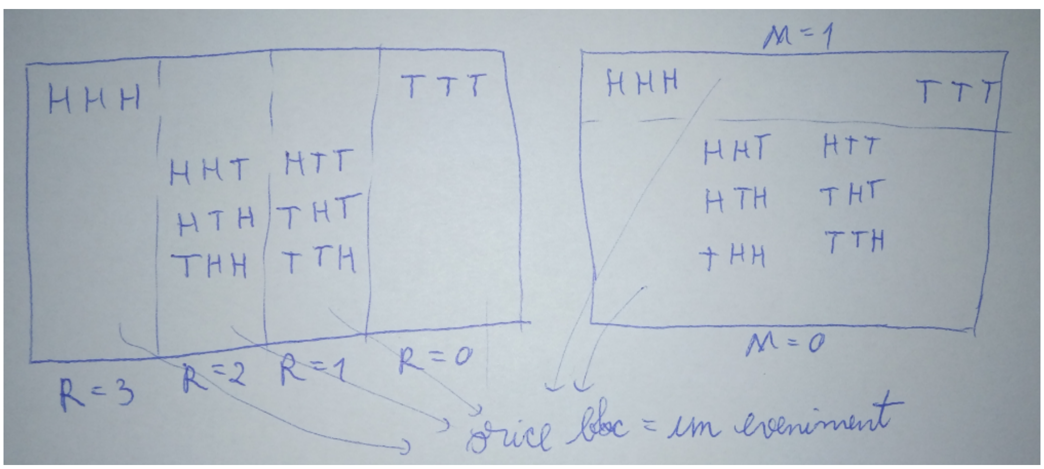
R = de câte ori apare H

$M = \begin{cases} 1 & \text{cele 3 fețe coincid} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$

$R(HTH) = 2$, ...

$M(HHT) = 0$, $M(TTT) = 1$, ...

O variabilă aleatoare definește o partiție a lui Ω:



"R = 1" va fi o notație pentru un eveniment (deci, o mulțime): "R = 1" = $\{a | R(a) = 1\}$

$P(R = 1) = P(\{a|R(a) = 1\}) = P(\{HTT, THT, TTH\}) \overset{\text{adit.num.}}{=} P(\{HTT\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) \overset{\text{pp.echiprob.}}{=} \frac{3}{8}$

Calculând P(R = 0), P(R = 1), P(R = 2), P(R = 3), obținem:

$R : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ - prima linie = valorile posibile ale lui R; a doua linie = probabilitățile asociate valorilor

$P(R \in \{0,1\}) = P(R = 0 \cup R = 1) = P(\{a|R(a) = 0\} \cup \{b|R(b) = 1\}) = P(\{TTT\} \cup \{THH, THT, TTH\}) \overset{\text{adit.num.}}{=} P(\{TTT\}) + P(\{THH, THT, TTH\}) = P(R = 0) + P(R = 1)$

$P(R = 2|M = 1) = \frac{P(R=2, M=1)}{P(M=1)} = 0$

Exemplu:

Dacă $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, atunci:

$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P(X^2 = 0) & P(X^2 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P(X = 0) & P(X = -1 \cup X = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P(X = 0) & P(X = -1) + P(X = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

și

$2X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ P(2X = -2) & P(2X = 0) & P(2X = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ P(X = -1) & P(X = 0) & P(X = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Regula pentru exemplul de mai sus: aplicați ridicarea la pătrat, înmulțirea cu 2 etc. DOAR valorilor lui X, nu și probabilităților!!!

Exemplu:

Dacă $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ și $Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, atunci:

$X + Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & \dots & \dots \end{pmatrix}$? NU!!! În acest caz, nu putem calcula probabilitățile asociate lui $X + Y$, pentru că nu avem destule informații: $X + Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ P(X = 0, Y = 1) & P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) & P(X = 1, Y = 2) \end{pmatrix}$.

Definiții:

Funcție masă de probabilitate (*probability mass function* - **pmf**) pentru variabila X:

$p : \mathbb{R} \to [0,1]$, $p(x) = P(X = x)$

Funcție cumulativă de distribuție (*cumulative distribution function* - **cdf**) pentru variabila X:

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) = P(X \le x)$

Exemplu:

Scrieți pmf și cdf pentru $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

pmf:
$p(1) = \frac{1}{4}$
$p(2) = \frac{1}{4}$
$p(3) = \frac{1}{2}$
cdf:
$F(1) = \frac{1}{4}$
$F(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$F(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$

Cum verificăm dacă o funcție este pmf pentru o var. al. X?

- $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{Val}(X)$
- $\sum_{x \in \mathrm{Val}(X)} p(x) = 1$

Medie, varianță, covarianță

Există două funcții uzuale care, aplicate unei variabile aleatoare, furnizează câte un număr: **media**/valoarea așteptată (E = media ponderată a valorilor lui X cu ponderile date de probabilități) și **varianța** (Var = *depărtarea* la pătrat, în medie, a valorilor lui X față de medie).

Exemplu:

Dacă $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, atunci:

$E[X] = (-1) \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$X - E[X] = X - 1 : \begin{pmatrix} -1-1 & 0-1 & 1-1 & 2-1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$(X - E[X])^2 = (X-1)^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} + \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$E[(X - E[X])^2] = E[(X-1)^2] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{4}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \frac{4}{3}$

Observație: media nu trebuie neapărat să fie în intervalul [0,1] și nu trebuie neapărat să aparțină lui Val(X). *Exemplu*:

$X : \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$E[X] = 10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2} = 25$

Observație: De ce calculăm Var cu *la pătrat*? Pentru că:

- $E[X - E[X]] = 0$
- Matematica pentru $E[|X - E[X]|]$ este mai grea decât pentru $E[(X - E[X])^2]$

Observație: Din cauza pătratului, unitățile de măsură vor fi la pătrat (dolari^2, lei^2 etc.). Pentru a reveni la unitatea de măsură inițială, folosim **deviația standard**: $\sqrt{Var(X)}$.

Observație: Dacă vă întrebați la ce poate fi bună varianța, un exemplu este următorul. Să zicem că vreți să jucați un joc. Vă dau două jocuri la dispoziție:

1. Arunci o monedă. Dacă iese *heads*, câștigi x dolari, altfel, pierzi x dolari.
2. Arunci o monedă. Dacă iese *heads*, câștigi y dolari, altfel, pierzi y dolari.

Fie X = câștigul (posibil negativ) de la 1

Y = câștigul (posibil negativ) de la 2.

Vă zic că E[X] = E[Y] = 0. Alege jocul SAU întreabă-mă o altă caracteristică pentru X și Y ca să te lămurești. Dacă nu prea-ți pasă, ai să alegi unul din cele două jocuri fără să mă întrebi. Dacă totuși îți pasă, poți să mă întrebi de varianță și îți zic: Var(X) = 1.000.000 și Var(Y) = 1. Acest lucru înseamnă că la primul joc riști mai mult decât la al doilea (la primul caștigi/pierzi mai mult decât la al doilea) pentru că depărtarea față de medie (care este 0 în ambele cazuri) este mai mare în primul caz. Hai să vedem ce stătea în spatele lui X și Y:

$X : \begin{pmatrix} -1000 & 1000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Într-adevăr, la primul câștigăm/pierdem mai mult (1000 de dolari)!

Media și varianța erau funcții care, aplicate unei variabile aleatoare, furnizau un număr real. Dacă ele erau aplicate unei singure variable aleatoare, **covarianța** se aplică pe două:

Definiție:

Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]

Informație++: o valoare mare pentru covarianță indică faptul că există oarecum o dependență liniară între cele 2 variabile ($X \approx aY + b$).

Altele

Probabilități:

- **corelate**: de exemplu, $P(X = 1, Y = 2)$
- **marginale**: de exemplu, $P(X = 1) = \sum_{y \in \text{Val}(Y)} P(X = 1, Y = y)$

  Observație: De ce se cheamă așa? Pentru că, având un tabel cu probabilitățile corelate ale lui X și Y, pentru a afla P(X=x) sau P(Y=y) se calculează suma pe o linie sau o coloană și rezultatul se trece la *marginea* tabelului. *Exemplu* pentru $P(X = 0)$:

  $P(X = 0) \overset{\text{pb.marg.}}{=} P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1)$

	X=0	X=1
Y=0	0.1	0.2
Y=1	0.3	0.4
	0.4	

  $P(X = 0) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

- **condiționale**: de exemplu, $P(X = 1|Y = 2)$

Definiție (slabă, dar intuitivă): X, Y - variabile aleatoare **independente** ($P(Y = y) \neq 0, \forall y \in \text{Val}(Y)$):

$P(X = x|Y = y) = P(X = x), \forall x \in \text{Val}(X), \forall y \in \text{Val}(Y)$

Definiție (tare): X, Y - variabile aleatoare **independente**:

$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \forall x \in \text{Val}(X), \forall y \in \text{Val}(Y)$

Atenție! La evenimente aleatoare trebuie să verificați doar o singură relație pentru a verifica independența, dar aici, la variabile aleatoare, aveți mai multe relații de verificat (cele din definiție).

Varianta condițională a ultimei definiții: X, Y - variabile aleatoare **independente condițional** față de variabila aleatoare Z ($P(Z = z) \neq 0, \forall z \in \text{Val}(Z)$):

$P(X=x, Y=y|Z=z) = P(X=x|Z=z)P(Y=y|Z=z)$,
$\forall x \in \text{Val}(X), \forall y \in \text{Val}(Y), \forall z \in \text{Val}(Z)$

Formule

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c \text{ - } \textbf{liniaritatea mediei}$$

$$\text{Var}[aX + bY + c] = a^2\text{Var}[X] + b^2\text{Var}[Y] + 2ab\text{Cov}[X, Y]$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$X, Y \text{ - independente } \Rightarrow Cov[X, Y] = 0$$

$$X, Y \text{ - independente } \not\Leftarrow Cov[X, Y] = 0$$

$$\text{Cov}[X, Y] = 0 \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$\text{Cov}[X, Y] = 0 \Rightarrow \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

Distribuție de probabiitate

- se referă la probabilitățile asociate

- fie rezultatelor unui experiment aleator
- fie unei variabile aleatoare

- sunt unele care apar în mai multe situații, așa că oamenii le-au analizat și le-au dat nume

Exemple:

- distribuția **uniformă** $X : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

  Exemplu: $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- distribuția **Bernoulli**

  Experimentul din spate: aruncarea monedei

  X = a căzut *heads*? = de căte ori a căzut *heads*? (0 sau 1)

  $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $p \in [0, 1]$

  Exemplu: $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

- distribuția **categorială** $X : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n = 1 - (p_1 + \dots + p_{n-1}) \end{pmatrix}$

  Exemplu: $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$

- distribuția **binomială**

  Experimentul din spate: n aruncări *independente* ale monedei

  X = de câte ori a căzut *heads*?

  $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ C_n^0 p^0 (1-p)^n & C_n^1 p^1 (1-p)^{(n-1)} & \dots & C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)} & \dots & C_n^n p^n (1-p)^0 \end{pmatrix}$

  Observații:

  - Dacă $n = 1$, atunci suntem în cazul distribuției Bernoulli.
  - X = de câte ori a căzut *heads* = (de câte ori a căzut *heads* la prima aruncare) + (de câte ori a căzut *heads* la a doua aruncare) + ... + (de câte ori a căzut *heads* la a n-a aruncare), unde fiecare termen este o variabilă aleatoare de tip Bernoulli.

Schemă de final

1. Variabile aleatoare
   (a) definiție
   (b) pmf
   (c) cdf
   (d) operații cu variabile aleatoare (X^2, $2X$, $X + Y$ etc.)
   (e) E, Var, deviația standard, Cov
   (f) probabilități
      i. corelate
      ii. marginale
      iii. condiționale
   (g) i. independență
      ii. independență condițională
   (h) Formule
2. Distribuții de probabilitate
   (a) uniformă
   (b) Bernoulli
   (c) categorială
   (d) binomială