Logică pentru Informatică - Săptămâna 4
Deducția Naturală

1 Introducere

În cursul anterior am discutat câteva noțiuni importante care țin de *semantica* logicii propoziționale:

1. valoarea de adevăr a unei formule într-o atribuire;
2. satisfiabilitate;
3. validitate;
4. echivalență;
5. consecință semantică.

Am văzut că pentru a stabili, de exemplu, că două formule sunt echivalente, este necesar un raționament la nivel semantic (adică raționament care folosește noțiunile semantice de valoarea de adevăr, atribuire, etc.).

Una dintre preocupările principale ale logicii în informatică este crearea de metode mecanice (adică metode pretabile implementării pe calculator) pentru raționamentele semantice aferente.

În acest curs, vom discuta despre o metodă pentru mecanizarea noțiunii de consecință semantică. Prin mecanizare a noțiunii de consecință semantică, înțelegem o metodă de a demonstra consecințe cu următoarele proprietăți:

1. să putem convinge pe cineva să accepte că consecința are loc, fără ca acea persoană să fie nevoită să urmeze un raționament semantic;
2. în particular, fiecare pas al demonstrației trebuie să poate fi verificat ușor (mecanic);
3. în principiu, persoana pe care o convingem să nu fie neapărat o persoană, ci un calculator.

2 Secvențe

Definiția 2.1 (Noțiunea de secvență)**.** *O* secvență *este o pereche formată dintr-o mulțime de formule* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *și dintr-o formulă* φ*, pereche notată sub forma*

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi.$$

Câteodată citim notația $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ sub forma φ *este consecință sintactică din* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. De multe ori, vom nota cu $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ mulțimea de ipoteze și în acest caz vom scrie secvența ca $\Gamma \vdash \varphi$. De asemenea, notația uzuală în literatură permite scrierea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ (adică fără acolade) în loc de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$, dar trebuie să ținem cont că în partea stângă a simbolului $\vdash$ este tot timpul o mulțime.

Exemplul 2.1. *Iată câteva exemple de secvențe:*

1. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$;

2. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$;

3. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{r})$.

Mai târziu vom vedea că primele două secvențe de mai sus sunt valide*, iar ultima secvență nu este validă.*

3 Reguli de inferență

Definiția 3.1. *O* regulă de inferență *este un tuplu format din:*

1. *o mulțime de secvențe* $S_1, \ldots, S_n$*, care se numesc* ipotezele *regulii;*

2. *o secvență* S *care se numește* concluzia *regulii;*

3. *o posibilă* condiție *de aplicare a regulii;*

4. *un nume.*

O regulă de inferență se notează în felul următor:

$$\textsc{nume}\ \frac{S_1 \qquad \ldots \qquad S_n}{S}\ \textit{condiție}.$$

Observația 3.1. *Este posibil ca o secvență să aibă* $n = 0$ *ipoteze. Astfel de reguli de inferență, cu* 0 *ipoteze, se numesc* axiome.

Observația 3.2. *De asemenea, este posibil să lipsească condiția de aplicare.*

Exemplul 3.1. *Iată câteva exemple de reguli de inferență:*

$$\wedge i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \wedge e_2\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi'.}$$

Toate cele trei reguli de inferență de mai sus sunt corecte*, într-un sens pe care îl vom defini mai târziu. Niciuna dintre cele trei reguli de mai sus nu are o condiție atașată. Iată și un exemplu de regulă cu $n = 0$ ipoteze, dar cu o condiție:*

$$\text{IPOTEZĂ}\ \frac{}{\Gamma \vdash \varphi}\ \varphi \in \Gamma.$$

Iată un exemplu de o regulă de inferență incorectă (vom vedea mai târziu în ce sens este incorectă):

$$\text{REGULĂ INCORECTĂ}\ \frac{\Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi').}$$

Observația 3.3. *Pentru a fi preciși, ipotezele regulii de inferență, precum și concluzia, sunt de fapt* scheme *de secvențe și nu secvențe. Acest lucru înseamnă că o regulă de inferență are mai multe* instanțe*, obținute prin înlocuirea variabilelor matematice $\varphi, \varphi', \Gamma$ cu formele concrete. De exemplu, iată două instanțe ale regulii $\wedge i$ de mai sus:*

$$\wedge i\ \frac{\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{p} \qquad \{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{q}}{\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q});} \qquad \wedge i\ \frac{\{\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \qquad \{\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}\} \vdash \mathtt{p}}{\{\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}\} \vdash ((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \wedge \mathtt{p}).}$$

În prima instanță, am înlocuit variabila matematică Γ cu mulțimea de formule $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\}$, variabila matematică φ cu formula $\mathtt{p}$ și variabila matematică φ' cu formula $\mathtt{q}$. Exercițiu: stabiliți în cea de-a doua instanță cu ce am înlocuit fiecare variabilă.

Iată un exemplu de regulă care nu este instanță a regulii $\wedge i$ (exercițiu: explicați de ce nu):

$$\wedge i\ \frac{\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{p} \qquad \{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{q}}{\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{p}).}$$

4 Mai multe logici propoziționale

Până în acest moment am studiat logica propozițională a conectorilor $\neg, \wedge, \vee$, pe care am notat-o *LP*. De fapt, în funcție de mulțimea conectorilor logici de care avem nevoie, există mai multe logici propoziționale. Logica pe care am studiat-o până în acest moment o vom nota cu $LP_{\neg,\wedge,\vee} = LP$.

În funcție de conectorii logici permiși, putem obține și alte logici interesante:

1. $LP_{\neg,\vee}$ este logica propozițională în care singurii conectori permiși sunt $\neg$ și $\vee$.

2. $LP_{\perp,\rightarrow}$ este logica propozițională în care singurii conectori permiși sunt $\perp$ (conector de aritate 0) și $\rightarrow$.

   Formula $\perp$ este falsă în orice atribuire.

3. $LP_{\vee,\wedge}$ este o logică în care singurii conectori permiși sunt $\vee$ și $\wedge$.

Exercițiu: scrieți definiția formală pentru sintaxa fiecăreia dintre logicile de mai sus.

Ce au în comun $LP, LP_{\neg,\vee}, LP_{\perp,\rightarrow}$? Sunt *echiexpresive*. Adică pentru orice formulă $\varphi \in LP$ există o formulă $\varphi' \in LP_{\neg,\vee}$ astfel încât $\varphi \equiv \varphi'$ (și invers, pentru orice formulă $\varphi' \in LP_{\neg,\vee}$ există o formulă echivalentă în LP).

Cum putem arăta că LP și $LP_{\neg,\vee}$ sunt la fel de expresive? Pentru una dintre direcții, este suficient să traducem toate conjuncțiile posibile din LP în felul următor:

$$(\varphi \wedge \varphi') \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\varphi').$$

La sfârșit vom obține o formulă echivalentă care nu conține conjuncții (și deci este în $LP_{\neg,\vee}$). Invers, orice formulă din $LP_{\neg,\vee}$ este deja și formulă din LP.

Cum putem arăta că $LP_{\neg,\vee}$ și $LP_{\perp,\rightarrow}$ sunt la fel de expresive?

Transformăm toate disjuncțiile și negațiile folosind următoarele echivalențe:

1. $(\varphi \vee \varphi') \equiv (\neg\varphi \rightarrow \varphi')$;

2. $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$.

Operația de transformare se oprește după un număr finit de pași și rezultatul este o formulă echivalentă cu formula de la care am plecat, dar care nu conține decât conectorii $\perp$ și $\rightarrow$.

Logica $LP_{\vee,\wedge}$ este strict mai puțin expresivă. De exemplu, în această logică nu există formule nesatisfiabile (exercițiu: explicați de ce).

Observația 4.1. *Prin* logică propozițională *se înțelege orice logică care este la fel de expresivă ca LP. De exemplu, $LP_{\neg,\wedge}$, $LP_{\neg,\vee}$, $LP_{\neg,\rightarrow}$ sunt toate logici propoziționale, dar $LP_{\neg}$ și $LP_{\wedge,\vee}$ nu sunt logici propoziționale (sunt mai puțin expresive).*

5 Sistem deductiv

Definiția 5.1. *Un* sistem deductiv *este o mulțime de reguli de inferență.*

Exemplul 5.1. *Fie sistemul deductiv D_1, format din următoarele patru reguli de inferență:*

$$\text{IPOTEZĂ}\ \frac{}{\Gamma \vdash \varphi,}\ \varphi \in \Gamma \qquad \wedge i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,}$$

$$\wedge e_2\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi'.}$$

6 Demonstrație formală

Definiția 6.1 (Demonstrație formală)**.** *O* demonstrație formală *într-un sistem deductiv este o listă de secvențe*

1. S_1*;*

2. S_2*;*

$\dots$

n. S_n*,*

cu proprietatea că fiecare secvență S_i este justificată de o regulă de inferență a sistemului deductiv din secvențele anterioare ($S_1, \dots, S_{i-1}$), în sensul în care S_i este concluzia unei instanțe a unei reguli de inferență din sistemul deductiv care folosește ca ipoteze doar secvențe dintre $S_1, \dots, S_{i-1}$ și condiția regulii este adevărată (dacă regula de inferență are condiție).

Exemplul 6.1. *Iată un exemplu de demonstrație formală în sistemul D_1 definit mai sus:*

1. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{p}$; *(*IPOTEZĂ*)*

2. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{q}$; *(*IPOTEZĂ*)*

3. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$; *($\wedge i$, 1, 2)*

4. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{q} \wedge (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}))$. *($\wedge i$, 2, 3)*

Observați că fiecare linie este adnotată cu numele regulii de inferență aplicate, plus liniile la care se găsesc ipotezele necesare aplicării.

Definiția 6.2 (Secvență validă)**.** *O secvență $\Gamma \vdash \varphi$ este* validă într-un sistem deductiv *D dacă există o demonstrație formală $S_1, \dots, S_n$ în D astfel încât $S_n = \Gamma \vdash \varphi$.*

Exemplul 6.2. *Secvența* $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$ *este validă în sistemul deductiv* D_1 *de mai sus, deoarece este ultima secvență din următoarea demonstrație formală:*

1. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{p}$; *(*Ipoteză*)*
2. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{q}$; *(*Ipoteză*)*
3. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$. *(*$\wedge i$, 1, 2*)*

Observația 6.1. *Atenție! Nu confundați noțiunea de* secvență validă într-un sistem deductiv *cu noțiunea de* formulă validă.

7 Deducția naturală

Deducția naturală este un sistem deductiv pentru $LP_{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\perp}$. În acest sistem deductiv, fiecare conector logic are una sau mai multe reguli de introducere și una sau mai multe reguli de eliminare.

7.1 Regulile pentru conjuncții

Am văzut deja regulile de introducere și de eliminare pentru conectorul "și":

$$\wedge i \, \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1 \, \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \wedge e_2 \, \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi'.}$$

Acest sistem deductiv se numește deducție *naturală* deoarece regulile de inferență mimează raționamentul uman:

1. Regula de introducere a conectorului "și" ne indică că putem demonstra o conjuncție $\varphi \wedge \varphi'$ din ipotezele Γ dacă știm deja că fiecare parte a conjuncției, φ și respectiv φ', sunt consecințe ale ipotezelor Γ.

   Cu alte cuvinte, pentru a arăta o conjuncție dintr-un set de ipoteze, este suficent să stabilim individual că fiecare parte a conjuncției este o consecință a ipotezelor.

2. Pentru conectorul "și" avem două reguli de eliminare. Prima regulă de eliminare a conectorului "și" ne indică că dacă am stabilit deja că o conjuncție $(\varphi \wedge \varphi')$ este consecința unei mulțimi Γ de ipoteze, atunci și partea stângă a conjuncției, φ, este consecință a mulțimii Γ.

   A doua regulă este simetrică față de prima și ne permite să concluzionăm că a doua parte a unei conjuncții este consecința unei mulțimi de ipoteze dacă și cojuncția este consecința a aceleiași mulțimi de formule.

Iată un exemplu de demonstrație formală care utilizează regulile de inferență pentru conectorul "și".

1. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}), \mathtt{r}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$; (Ipoteză)
2. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}), \mathtt{r}\} \vdash \mathtt{r}$; (Ipoteză)
3. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}), \mathtt{r}\} \vdash \mathtt{p}$; $(\wedge e_1,\ 1)$
4. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}), \mathtt{r}\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{r})$. $(\wedge i,\ 3,\ 2)$

Exerciții:

1. $\{((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r})\} \vdash (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})$;
2. $\{((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r}), \mathtt{r}'\} \vdash (\mathtt{r}' \wedge \mathtt{q})$;
3. $\{((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r})\} \vdash (\mathtt{r} \wedge (\mathtt{q} \wedge \mathtt{p}))$.

7.2 Regulile pentru implicații

Regula de eliminare a implicației, numită și *modus ponens* în latină, este una dintre cele mai importante reguli de inferență pe care le aplicăm.

$$\rightarrow e \ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi') \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi'}$$

Regula ne indică că, presupunând că știm $\varphi \rightarrow \varphi'$ (din Γ) și în plus știm și φ (tot din Γ), atunci știm și φ' (din Γ).

Iată un exemplu de demonstrație formală care folosește regula de eliminare a implicației:

1. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r}), (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$; (Ipoteză)
2. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r}), (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash \mathtt{p}$; $(\wedge e_1,\ 1)$
3. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r}), (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r})$; (Ipoteză)
4. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r}), (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash \mathtt{r}$. $(\rightarrow e,\ 3,\ 1)$

Această demonstrație formală arată că secvența $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r}), (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash \mathtt{r}$ este validă, adică faptul că formula $\mathtt{r}$ este o consecință a formulelor $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r}), (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\}$. De observat ordinea în care apar liniile 3 și 1 în explicația liniei 4 (urmează aceeași ordine cu regula de inferență).

Exerciții:

1. $\{((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r}), \mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{r}$;
2. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r}), \mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})$.

Regula de introducere a implicației este mai subtilă. Pentru a arăta că o implicație $(\varphi \rightarrow \varphi')$ decurge din Γ, *presupunem* φ (în plus față de Γ) și arătăm φ'. Cu alte cuvinte, în ipoteza regulii, adăugăm formula φ la formulele din Γ. Regula poate fi scrisă în două moduri echivalente, care se deosebesc doar prin faptul că prima regulă folosește convenția de notație referitoare la acoladele din jurul premiselor unei secvențe, în timp ce în a doua regulă acoladele care marchează mulțimea apar explicit:

$$\rightarrow i \; \frac{\Gamma, \varphi \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi'),} \qquad\qquad \rightarrow i \; \frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi').}$$

Ce este important de observat și de înțeles la regula de introducere a implicației este că premisele secvenței se schimbă de la concluzia regulii la ipoteza regulii. Dacă în concluzie avem că formula $(\varphi \rightarrow \varphi')$ decurge din Γ, în ipoteză trebuie să arătăm că φ' decurge din premisele $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Cu alte cuvinte, la modul intuitiv, pentru a demonstra o implicație $(\varphi \rightarrow \varphi')$, presupunem antecedentul φ și arătăm consecventul φ'.

Exemplul 7.1. *Să arătăm că secvența* $\{\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p})$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; *(*IPOTEZĂ*)*
2. $\{\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{p})$. *(*$\rightarrow i$, 1*)*

Exemplul 7.2. *Să arătăm că secvența* $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$ *este validă. O demonstrație simplă este:*

1. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$. *(*IPOTEZĂ*)*

O altă demonstrație formală pentru aceeași secvență, demonstrație puțin mai lungă, este:

1. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$; *(*IPOTEZĂ*)*
2. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; *(*IPOTEZĂ*)*
3. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{q}$; *(*$\rightarrow e$, 1, 2*)*
4. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$. *(*$\rightarrow i$, 3*)*

Exemplul 7.3. *Să arătăm că secvența* $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r})\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r})$ *este validă:*

1. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}), \mathtt{p}\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$; *(*IPOTEZĂ*)*
2. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; *(*IPOTEZĂ*)*
3. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{q}$; *(*$\rightarrow e$, 1, 2*)*
4. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}), \mathtt{p}\} \vdash (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r})$; *(*IPOTEZĂ*)*

5. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{r}$; *($\rightarrow e$, 4, 3)*

6. $\{(\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r})\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{r})$. *($\rightarrow i$, 5)*

Exercițiul 7.1. *Arătați că următoarele secvențe sunt valide:*

1. $\{((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r}), \mathtt{p}, \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{r}$;
2. $\{((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r})\} \vdash (\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}))$;
3. $\{(\mathtt{p} \rightarrow (\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{r}))\} \vdash ((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \rightarrow \mathtt{r})$.

7.3 Regulile pentru disjuncții

Conectorul “sau” are două reguli de introducere:

$$\vee i_1 \frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),} \qquad \vee i_2 \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2).}$$

Prima regulă ne indică că dacă știm φ_1 (din Γ), atunci știm și $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ (din Γ), indiferent de φ_2. Cu alte cuvinte, intuitiv, dacă știm φ_1, știm și ($\varphi_1 \vee$ *orice altceva*). A doua regulă de eliminare este simetrică, pentru partea dreapta a disjuncției.

Exemplul 7.4. *Să arătăm că secvența* $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$ *este validă:*

1. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$; *(Ipoteză)*
2. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash \mathtt{p}$; *($\wedge e_1$, 1)*
3. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$. *($\vee i_1$, 2)*

O altă demonstrație formală pentru aceeași secvența este:

1. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$; *(Ipoteză)*
2. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash \mathtt{q}$; *($\wedge e_2$, 1)*
3. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$. *($\vee 2_1$, 2)*

Exercițiul 7.2. *Arătați că secvența* $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{r} \vee \mathtt{p})$ *este validă.*

Regula de eliminare a disjuncției este ușor mai complicată, fiind o altă regulă în care mulțimea de premise ale secvențelor variază de la ipoteză la concluzie:

$$\vee e \frac{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi' \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash \varphi'}$$

Prima ipoteză a regulii, $\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, este ușor de înțeles: pentru a “elimina” o disjuncție, trebuie să avem o disjuncție printre ipoteze (disjuncție pe care să o "eliminăm"). Ultimele două ipoteze ale regulii de eliminare a disjuncției trebuie înțelese intuitiv după cum urmează. Din prima ipoteză știm $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ (din Γ); cu alte cuvinte, măcar una dintre formulele φ_1 și respectiv φ_2 decurge din Γ. Ipotezele 2 și 3 ne indică faptul că, indiferent care dintre formulele φ_1 și respectiv φ_2 ar avea loc, în orice caz φ' are loc. Adică dacă presupunem φ_1 (în plus față de Γ), φ' are loc, iar dacă presupunem φ_2 (în plus față de Γ), φ' tot are loc. Și atunci concluzia ne indică că φ' are loc indiferent care dintre φ_1 și respectiv φ_2 ar avea loc.

Exemplul 7.5. *Să arătăm că secvența* $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{q} \vee \mathtt{p})$ *este validă:*

1. $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; *(*Ipoteză*)*
2. $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash (\mathtt{q} \vee \mathtt{p})$; *(*$\vee i_2$, 1*)*
3. $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}), \mathtt{q}\} \vdash \mathtt{q}$; *(*Ipoteză*)*
4. $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}), \mathtt{q}\} \vdash (\mathtt{q} \vee \mathtt{p})$; *(*$\vee i_1$, 1*)*
5. $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$; *(*Ipoteză*)*
6. $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{q} \vee \mathtt{p})$. *(*$\vee e$, 5, 2, 4*)*

Observați cu atenție modul în care mulțimea de premise variază de la o secvență la alta pe parcursul demonstrației formale, respectând regulile de inferență.

Exercițiul 7.3. *Arătați că secvența* $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}), (\mathtt{p} \to \mathtt{r}), (\mathtt{q} \to \mathtt{r})\} \vdash \mathtt{r}$ *este validă.*

Exercițiul 7.4. *Arătați că secvența* $\{(\mathtt{p} \to \mathtt{r}), (\mathtt{q} \to \mathtt{r})\} \vdash ((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \to \mathtt{r})$ *este validă.*

7.4 Regulile pentru negații

Regulile pentru introducerea și respectiv eliminarea negației vin la pachet cu o regulă pentru eliminarea conectorului $\perp$:

$$\neg i\,\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \qquad \neg e\,\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \perp} \qquad \perp e\,\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Să ne readucem aminte că $\perp$ este un conector logic 0-ar (de aritate 0), adică conectează 0 formule între ele. Cu alte cuvinte, conectorul $\perp$ este de sine stătător o formulă. Semantica formulei $\perp$ este că este falsă în orice atribuire. Cu alte cuvinte, $\perp$ este o contradicție.

Prima regulă dintre cele de mai sus, cea de introducere a negației, este ușor de explicat intuitiv: cum putem arăta că o formulă de forma $\neg\varphi$ decurge din premisele Γ? Presupunem, în plus față de premisele Γ, că avem φ și arătăm că din Γ și φ decurge o contradicție $(\Gamma, \varphi \vdash \perp)$. În acest fel, arătăm că $\neg\varphi$ decurge din Γ.

A doua regulă, pentru eliminarea negației, ne indică faptul că dacă atât o formulă φ, cât și negația sa, $\neg\varphi$, decurg din aceeași mulțime de premise Γ, atunci din Γ decurge și o contradicție, $\bot$. O mulțime Γ din care decurge o contradicție se numește mulțime *inconsistentă* de formule.

A treia regulă indică că, dacă Γ este o mulțime inconsistentă de formule, atunci orice formulă φ decurge din Γ.

Nu există nicio regulă pentru introducerea conectorului $\bot$ (sau, regula de eliminare a negației se poate considera ca fiind și regula de introducere a lui $\bot$).

Exemplul 7.6. *Să arătăm că secvența* $\{\mathtt{p}\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; (Ipoteză)
2. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \neg\mathtt{p}$; (Ipoteză)
3. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 1, 2)
4. $\{\mathtt{p}\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$. ($\neg i$, 3)

Exemplul 7.7. *Să arătăm că secvența* $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \mathtt{r}$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; (Ipoteză)
2. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \neg\mathtt{p}$; (Ipoteză)
3. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 1, 2)
4. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \mathtt{r}$. ($\bot e$, 3)

Exercițiul 7.5. *Arătați că următoarele secvențe sunt valide:*

1. $\{(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})\} \vdash \neg(\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q})$;
2. $\{(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash \neg(\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})$;
3. $\{(\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})\} \vdash \neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$;
4. $\{(\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q})\} \vdash \neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$;
5. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})\} \vdash (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q})$.

7.5 Alte reguli

O altă regulă utilă, care nu ține de un anumit conector, este regula de extindere:

$$\textsc{Extindere}\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi' \vdash \varphi}$$

Această regulă ne indică faptul că, daca φ este consecință a unei mulțimi de formule Γ, atunci φ este consecință și a mulțimii $\Gamma \cup \{\varphi'\}$ (indiferent de φ'). Cu alte cuvinte, putem extinde oricând mulțimea de premise ale unei secvențe valide și obținem o nouă secvență validă.

Exemplul 7.8. *Să arătăm că secvența* $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{q}, \mathtt{r}, (\mathtt{q_1} \wedge \mathtt{q_2})\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$ *este validă:*

1. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; (IPOTEZĂ)
2. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \neg\mathtt{p}$; (IPOTEZĂ)
3. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 1, 2)
4. $\{\mathtt{p}\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$; ($\neg i$, 3)
5. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{q}\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$; (EXTINDERE, 4)
6. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{q}, \mathtt{r}\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$; (EXTINDERE, 5)
7. $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{q}, \mathtt{r}, (\mathtt{q_1} \wedge \mathtt{q_2})\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$. (EXTINDERE, 6)

Toate regulile de mai sus reprezintă deducția naturală pentru o logică care se numește *logica propozițională intuiționistă*. În acest curs, noi studiem *logica propozițională clasică*. Cele două logici au aceeași sintaxă, dar semantica este diferită. Logica intuiționistă este foarte importantă în informatică, deoarece demonstrațiile formale din această logică sunt într-o corespondență 1-la-1 cu programele de calculator. Adică oricărei demonstrații intuiționiste îi corespunde un program, și oricărui program îi corespunde o demonstrație intuiționistă. Adică, de fapt, orice demonstrație formală *este* un program. Logica intuiționistă este un caz de *logică constructivă*, adică o logică în care orice demonstrație reprezintă un algoritm de calcul.

Pentru a obține un sistem deductiv care să corespundă logicii propoziționale clasice, cea pe care o studiem, mai avem nevoie de o singură regulă:

$$\neg\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Exemplul 7.9. *Să arătăm că secvența* $\{(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}), \neg\mathtt{q}\} \vdash \mathtt{p}$ *este validă:*

1. $\{(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}), \neg\mathtt{q}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \neg\mathtt{p}$; (IPOTEZĂ)
2. $\{(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}), \neg\mathtt{q}, \neg\mathtt{p}\} \vdash (\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$; (IPOTEZĂ)
3. $\{(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}), \neg\mathtt{q}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \mathtt{q}$; ($\to e$, 2, 1)
4. $\{(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}), \neg\mathtt{q}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \neg\mathtt{q}$; (IPOTEZĂ)
5. $\{(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}), \neg\mathtt{q}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \bot$; ($\neg i$, 4, 3)
6. $\{(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}), \neg\mathtt{q}\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$; ($\neg i$, 5)
7. $\{(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q}), \neg\mathtt{q}\} \vdash \mathtt{p}$. ($\neg\neg e$, 6)

Exemplul 7.10. *Să arătăm că secvența* $\{\} \vdash (p \vee \neg p)$ *este validă:*

1. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}), \mathtt{p}\} \vdash \neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$; (IPOTEZĂ)
2. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; (IPOTEZĂ)
3. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}), \mathtt{p}\} \vdash (\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$; ($\vee i_1$, 2)
4. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}), \mathtt{p}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 1, 3)
5. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})\} \vdash \neg\mathtt{p}$; ($\neg i$, 4)
6. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})\} \vdash (\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$; ($\vee i_2$, 5)
7. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})\} \vdash \neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$; (IPOTEZĂ)
8. $\{\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 7, 6)
9. $\{\} \vdash \neg\neg(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$; ($\neg i$, 8)
10. $\{\} \vdash (\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p})$. ($\neg\neg e$, 9)

Exercițiul 7.6. *Arătați că umătoarele secvențe sunt valide:*

1. $\{\neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})\} \vdash (\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})$;
2. $\{\neg(\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$;
3. $\{\neg(\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q})\} \vdash (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$.

8 Deducția naturală

Deducția naturală este sistemul deductiv alcătuit din toate regulile din secțiunile precedente. Iată aici toate regulile:

$$\wedge i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \wedge e_2\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi',}$$

$$\to e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi') \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi',} \qquad \to i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \to \varphi'),} \qquad \vee i_1\ \frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),}$$

$$\vee i_2\ \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),} \qquad \vee e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi' \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash \varphi',}$$

$$\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot,} \qquad \neg i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi,} \qquad \bot e\ \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi,}$$

$$\text{IPOTEZĂ}\ \frac{}{\Gamma \vdash \varphi}\ \varphi \in \Gamma, \qquad \text{EXTINDERE}\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi' \vdash \varphi,} \qquad \neg\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi.}$$

9 Reguli derivate

O *regulă derivată* este o regulă de inferență care se poate demonstra cu ajutorul celorlalte reguli din sistem, printr-o demonstrație formală.

O astfel de regulă este regula de introducere a dublei negații:

$$\neg\neg i \ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi.}$$

Iată o demonstrație formală pentru regula de introducere a dublei negații. Pornim cu ipotezele regulii, iar ultima secvență din demonstrație trebuie să fie concluzia regulii.

1. $\Gamma \vdash \varphi$; (ipoteza regulii derivate)
2. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$; (EXTINDERE, 1)
3. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$; (IPOTEZA)
4. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$; ($\neg e$, 2, 3)
5. $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$. ($\neg i$, 4)

După ce a fost demonstrată (ca mai sus), o regulă derivată poate fi folosită pentru a scurta alte demonstrații, similar cu modul în care scurtăm codul prin scrierea de subprograme (funcții) în limbajele de programare. Iată un exemplu de demonstrație formală care folosește regula de introducere a dublei negații:

1. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; (IPOTEZĂ)
2. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$; ($\neg\neg i$, 1)
3. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash (\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$; (IPOTEZĂ)
4. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{q}$. ($\rightarrow e$, 3, 2)

În absența folosirii regulii derivate, ar trebui să construim o demonstrație mai lungă pentru secvența de mai sus:

1. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; (IPOTEZĂ)
2. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \mathtt{p}$; (EXTINDERE, 1)
3. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \neg\mathtt{p}$; (IPOTEZA)
4. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\} \vdash \bot$; ($\neg e$, 2, 3)
5. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \neg\neg\mathtt{p}$. ($\neg i$, 4)
6. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash (\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q})$; (IPOTEZĂ)
7. $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{q}$. ($\rightarrow e$, 6, 5)

Observați că liniile 1–5 din demontrația mai lungă pentru secvența $\{(\neg\neg \mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}), \mathtt{p}\} \vdash \mathtt{q}$ sunt o instanță a demonstrației formale a regulii derivate.

10 Corectitudinea și completitudinea deducției naturale

Teorema 10.1 (Corectitudinea deducției naturale)**.** *Pentru orice mulțime de formule* Γ *și orice formulă* φ*, dacă secvența* $\Gamma \vdash \varphi$ *este validă, atunci* $\Gamma \models \varphi$*.*

Exercițiu: de demonstrat la seminar.

Teorema 10.2 (Completitudinea deducției naturale)**.** *Pentru orice mulțime de formule* Γ *și orice formulă* φ*, dacă* $\Gamma \models \varphi$ *atunci secvența* $\Gamma \vdash \varphi$ *este validă.*

Demonstrația teoremei de completitudine depășește nivelul cursului.

Observația 10.1. *De remarcat că, folosind teoremele de corectitudine și respectiv de completitudine, relația* $\vdash$ *coincide cu relația* $\models$*, deși au definiții cu totul diferite.*