

Cursul 13

Integrale ale funcțiilor reale scalar-scalare

Necesități practice legate fie de determinarea matematică a stării unui proces dinamic căruia îi este cunoscută viteza de evoluție, fie de calculul unor caracteristici numerice de ordin geometric (precum lungimi, arii și volume), fizic (ca, de exemplu, momente de inerție, valori de potențiale și lucru mecanic), deterministic (coordonate de poziție ori centre de greutate) sau probabilist-stochastic (densități de probabilitate, medii și dispersii pentru variabile aleatoare continue) ale anumitor entități pot fi soluționate, în dese rânduri, prin folosirea adecvată a noțiunii de integrală. Amintind aici despre integrala nedefinită și despre integrala Riemann a unei funcții reale scalar-scalare, avem în vedere încă tipurile de integrale improprii (pe intervale nemărginite sau din integranți nemărginiți), cât și integralele cu parametri, între care funcțiile Γ (gamma) și B (beta) ale lui Euler, sunt prezentate pe scurt în final.

Integrale nedefinite. Primitive

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval cu interior nevid și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiția 13.1 a) O funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **primitivă** (pe intervalul I) a funcției f dacă F este derivabilă pe I și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

b) Dacă f are cel puțin o primitivă pe I , atunci f se numește **funcție primitivabilă** pe I și acest fapt se notează prin $f \in \mathcal{P}(I)$.

c) Dacă $f \in \mathcal{P}(I)$, atunci mulțimea tuturor primitivelor (pe I) ale funcției f poartă denumirea de **integrala nedefinită a lui f pe I** și se notează cu $\int f(x) dx$.

Observații:

- i) Dacă $f \in \mathcal{P}(I)$ și $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f (pe I), atunci toate primitivele funcției f sunt de forma $F + c$, unde c este o constantă reală. Aceasta deoarece, oricare altă primitivă (decât F) a lui f are derivata egală cu a lui F (adică f) pe I și deci diferă de F printr-o constantă (reală) c . Așadar: $\int f(x) dx = F(x) + c$, $\forall x \in I$.
- ii) Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe I , atunci ea este o primitivă (pe I) a funcției f' și deci $\int f'(x) dx = f(x) + c$, $\forall x \in I$, unde c este o constantă reală arbitrară.
- iii) Determinarea unei primitive F , a lui f , pe intervalul I , se numește (operație de) **integrare** a lui f pe I . Integrarea este "inversa" operației de diferențiere a unei funcții $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, cu primitiva $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, deoarece avem:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + c) = (F + c)'(x) dx = F'(x) dx = f(x) dx \text{ și}$$

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + c, \forall x \in I, c \in \mathbb{R}.$$

- iv) Mulțimea $\mathcal{P}(I)$ (a funcțiilor primitivabile pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$) este nevidă, întrucât orice funcție continuă pe I are primitive pe I , adică $\emptyset \neq C(I; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(I)$. În plus, din punct de vedere

algebric, $\mathcal{P}(I)$ este un subspațiu liniar real al spațiului vectorial (peste \mathbb{R}) $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$, deoarece, pentru orice $f, g \in \mathcal{P}(I)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}(I)$ și

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx, \text{ pe } I.$$

v) $\mathcal{P}(I)$ este parte a mulțimii funcțiilor f care au proprietatea lui Darboux pe I ($\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ cuprins strict între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $\exists \tilde{x}$ din intervalul deschis cu extremitățile x_1 și x_2 , astfel încât $f(\tilde{x}) = \lambda$). Aceasta întrucât, fiind derivată a oricăreia dintre primitivele sale, o funcție $f \in \mathcal{P}(I)$ are, în mod necesar, proprietatea menționată. Prin urmare, dacă o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe I , atunci ea nu este primitivabilă pe I .

Ca **metode de calcul pentru primitive**, indicăm folosirea tabelului integralelor nedefinite ale unor funcții elementare, integrarea prin părți, integrarea prin transformări algebrice și trigonometrice, integrarea prin substituții și utilizarea, în anumite cazuri, a unor formule de recurență.

Tabelul specificat cuprinde următoarele **primitive uzuale**:

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln |x|, & \alpha = -1 \end{cases} + c, x \in I \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c; \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c, a \in \mathbb{R}^*;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \in \mathbb{R}^*;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, x \in I \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c; \quad \int \cos x dx = \sin x + c, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \operatorname{ch} x + c; \quad \int \operatorname{ch} x dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \operatorname{sh} x + c, x \in I.$$

Integrarea prin părți, aplicabilă ori de câte ori avem de-a face cu două funcții f și $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile și cu derivatele f' și respectiv g' continue pe I , se face în conformitate cu formula

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx, x \in I,$$

care, în virtutea relațiilor $f'(x)dx = (df)(x)$, $g'(x)dx = (dg)(x)$ și $d(fg) = f(dg) + g(df)$, pe I , poate fi redată și prin:

$$\int g(x)(df)(x) = f(x)g(x) - \int f(x)(dg)(x), x \in I.$$

Aplicarea acestei formule permite, de exemplu, între altele, completarea tabelului de primitive imediate cu următoarele integrale nedefinite:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + c, a \in \mathbb{R}_+^*, |x| < a, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c, a \in \mathbb{R}^*, x \in I, c \in \mathbb{R};$$

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + c, x \in I \subseteq \mathbb{R}_+^*, c \in \mathbb{R}.$$

Tot integrarea prin părți este recomandată, ca metodă de calcul, în cazul integralelor de forma

$$\int P_n(x)f(x) \, dx,$$

unde $P_n \in \mathbb{R}[X]$ și f este una dintre funcțiile elementare e^x , $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccotg} x$, a^x , $\log_a x$ etc. Prin aplicarea acestei metode, se reduce treptat, cu câte o unitate la fiecare utilizare (repetată) a integrării prin părți, gradul polinomului P_n ($n \in \mathbb{N}$).

Metoda transformărilor algebrice se folosește, cu precădere, pentru calculul primitivelor unor funcții raționale, de forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde P și Q sunt din $\mathbb{R}[X]$, definite pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, cu $I \neq \emptyset$ și $Q(x) \neq 0$ pe I . Cum, potrivit unui rezultat cunoscut din algebră, orice funcție rațională se descompune, în mod unic, într-o sumă de fracții raționale "simple", în conformitate cu formula

$$(*) \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{H(x)}{Q(x)} = G(x) + \sum_1 \frac{A_{k,m}}{(x - x_k)^m} + \sum_2 \frac{B_{k,m}x + C_{k,m}}{(x^2 + p_kx + q_k)^m}, \quad x \in I,$$

în care G este un polinom (nul, când $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), H tot un polinom (cu gradul strict mai mic decât gradul lui Q și identic cu P , atunci când $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$), \sum_1 este o sumă relativă la toate rădăcinile reale x_k (simple și multiple) ale lui Q , iar \sum_2 se raportează la toate rădăcinile complexe (simple și multiple) ale lui Q (cu $p_k, q_k \in \mathbb{R}$, așa încât $p_k^2 - 4q_k < 0$), integrarea lui f revine la determinarea primitivelor tuturor componentelor din suma de descompunere (*).

În cazul în care polinomul Q are rădăcini multiple, calculul primitivei funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se mai poate face și prin **metoda lui Gauss-Ostrogradski**, bazată pe formula

$$(**) \quad \int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \, dx, \quad x \in I,$$

unde $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor Q și Q' (derivata lui Q), $Q_2 = \frac{Q}{Q_1}$, iar P_1 și P_2 sunt polinoame care au gradul cu o unitate mai mic decât $\operatorname{grad} Q_1$ și respectiv $\operatorname{grad} Q_2$, determinarea lor realizându-se prin derivarea relației (**), adică pe baza relației

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P'_1(x)Q_1(x) - P_1(x)Q'_1(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \quad x \in I,$$

prin identificare și aflare, în acest mod, a coeficienților (inițial necunoscuți ai) lui P_1 și P_2 .

Metoda transformărilor trigonometrice, adeseori combinată cu **metoda substituțiilor**, se folosește pentru calculul primitivelor unor funcții în ale căror expresii sunt prezente funcții trigonometrice.

În cazul **integralelor trigonometrice** de forma

$$\int E(\sin x, \cos x) \, dx, \quad x \in I = (-\pi, \pi),$$

unde E este o funcție rațională de două variabile, se folosește, în general, substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, care,

pe baza relațiilor $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, conduce la calculul primitivei unei funcții raționale în variabila t . Calculul integralei $\int E(\sin x, \cos x) \, dx$ poate fi simplificat, evitându-se utilizarea substituției standard $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, în următoarele trei cazuri:

1. $E(-\sin x, \cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\sin x$, recomandată fiind folosirea substituției $\cos x = t$.
2. $E(\sin x, -\cos x) = -E(\sin x, \cos x)$, adică E este impară în $\cos x$ și atunci se face substituția $\sin x = t$.
3. $E(-\sin x, -\cos x) = E(\sin x, \cos x)$, adică E este pară (simultan) în $\sin x$ și $\cos x$, făcându-se substituția $\operatorname{tg} x = t$.

Tot substituții se practică și pentru calculul unor **integrale** (așa-numite) **iraționale**, întru reducerea lor la integrale din funcții raționale. Este cazul **substituțiilor lui Euler**, folosite pentru integrale de forma

$$\int E\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad x \in I,$$

cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, așa încât $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in I$ și E o expresie rațională de două variabile reale. Se face trecerea de la variabila x la variabila t , în conformitate cu una din următoarele trei situații și relații corespunzătoare:

- i) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, când $a > 0$;
- ii) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, când $c > 0$;
- iii) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$, când $b^2 - 4ac > 0$,

unde x_0 este o rădăcină (din \mathbb{R}) a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.

Pentru **integrale iraționale de forma**

$$\int E\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right) dx, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

în care E este o funcție rațională de $k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) variabile reale și cu valori în \mathbb{R} , $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, $cx + d \neq 0, \forall x \in I$, $\frac{ax+b}{cx+d} > 0, \forall x \in I$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i = \overline{1, k}$, se utilizează (în scopul calculului) substituția $x \rightarrow t$, dată de relația $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{q_0}$, unde q_0 este cel mai mic multiplu comun al numerelor q_1, q_2, \dots, q_k .

Substituțiile lui Cebîșev se folosesc pentru calculul integralelor care, cunoscute sub denumirea de **integrale binoame**, sunt de forma

$$\int x^p(ax^q + b)^r dx, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ și $p, q, r \in \mathbb{Q}$. Calculul unor asemenea integrale se reduce la calculul primitivelor pentru funcții iraționale, doar în următoarele trei cazuri:

- j) $r \in \mathbb{Z}$, când se face substituția $x = t^m$, cu m cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui p și q ;
- jj) $\frac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$, situație în care se face substituția $ax^q + b = t^l$, unde $l \in \mathbb{N}^*$ este numitorul lui r .
- jjj) $\frac{p+1}{q} + r \in \mathbb{Z}$, caz în care se face substituția $a + bx^{-q} = t^l$, l fiind numitorul lui r .

Calculul integralelor de forma

$$\int E(a^{r_1 x}, a^{r_2 x}, \dots, a^{r_n x}) dx,$$

unde $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$, iar E este o funcție rațională, de n ($n \in \mathbb{N}^*$) variabile reale și cu valori în \mathbb{R} , se poate face pe baza substituției $a^x = t^\nu$, unde $t > 0$, și ν este cel mai mic multiplu comun al numitorilor numerelor r_1, r_2, \dots, r_n .

Atragem atenția asupra faptului că există și o serie de primitive care nu se pot exprima prin combinații liniare finite de funcții elementare. Este cazul **integralelor eliptice**, adică al integralelor de forma

$$\int \sqrt{(1 - a^2 \sin^2 x)^{\pm 1}} dx, \text{ cu } a \in (0, 1) \text{ și } x \in I_a \subseteq \mathbb{R}$$

precum și al următoarelor integrale:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x}{x} dx \text{ (sinusul integral)}, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx \text{ (cosinusul integral)}, \\ & \int \frac{dx}{\ln x} \text{ (logaritmul integral)}, \quad \int \frac{e^x}{x} dx \text{ (exponențialul integral)}, \\ & \int e^{-x^2} dx \text{ (primitiva lui Poisson)}, \quad \int \cos^2 x dx \quad \text{și} \quad \int \sin^2 x dx \text{ (primitivele lui Fresnel)}. \end{aligned}$$

Integrala definită (în sens Riemann)

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiția 13.2 1) Se numește **diviziune (divizare) a intervalului compact** $[a, b]$, notată prin Δ , o mulțime finită și ordonată crescător de elemente $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, cu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Elementele x_i , $i = \overline{0, n}$ se numesc **puncte ale diviziunii** Δ , iar $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n-1}$) se numesc **intervale parțiale ale diviziunii** Δ .

2) Numărul notat cu $\|\Delta\|$ (sau cu $\nu(\Delta)$) și definit prin

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

se numește **norma diviziunii** Δ .

3) O **diviziune** Δ a intervalului $[a, b]$ se numește **echidistantă** dacă $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $\forall i = \overline{1, n}$, caz în care avem $\|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$ și $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $\forall i = \overline{0, n}$.

De regulă, **mulțimea tuturor diviziunilor unui interval compact** $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{D}[a, b]$ și, pe ea, se poate defini o **relație** binară (**de "finețe"**), ce se dovedește a fi una de ordine parțială, în modul următor: $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}[a, b]$ spunem că Δ_2 **este mai fină decât** Δ_1 , și notăm $\Delta_1 \subset \Delta_2$, dacă Δ_2 conține cel puțin un element în plus față de Δ_1 . Este lesne de văzut atunci că, $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}[a, b]$, $\exists \Delta (= \Delta_1 \cup \Delta_2)$ astfel încât $\Delta_1 \subset \Delta$ și $\Delta_2 \subset \Delta$.

Definiția 13.3 a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ din $\mathcal{D}[a, b]$. Mulțimea $\xi_\Delta = \{\xi_i \mid \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}\}$, adică mulțimea n -uplelor $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, unde ξ_i este arbitrar ales din intervalul parțial $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = \overline{1, n}$ se numește **mulțime a punctelor intermediare asociate diviziunii** Δ .

b) Numim **sumă Riemann** a funcției $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, în raport cu o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ și cu $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \xi_\Delta$, numărul

$$\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

unde x_i sunt punctele diviziunii $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

Definiția 13.4 Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **integrabilă, în sens Riemann, pe intervalul compact** $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), dacă există un număr real I , astfel încât, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există δ_ε , în raport cu care, $\forall \Delta \in \mathcal{D}[a, b]$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, să avem $|\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta) - I| < \varepsilon$, pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_Δ . Se mai spune că f este **\mathcal{R} -integrabilă pe** $[a, b]$.

Numărul I se numește, atunci, **integrala Riemann a lui f pe** $[a, b]$ și se poate vedea că este unic determinat. El se notează cu $\int_a^b f(x) dx$ (sau cu $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx$ ori prin $\int_{[a, b]} f(x) dx$).

Mulțimea tuturor funcțiilor \mathcal{R} -integrabile (Riemann-integrabile) pe un interval compact $[a, b]$ din \mathbb{R} se notează cu $\mathcal{R}[a, b]$.

Propoziția 13.1 Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{B}[a, b]$, unde $\mathcal{B}[a, b]$ înseamnă mulțimea tuturor funcțiilor $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt mărginite pe $[a, b]$.

(Cu alte cuvinte, orice funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, integrabilă în sens Riemann pe un interval compact $[a, b]$ din \mathbb{R} este, în mod necesar, mărginită pe $[a, b]$).

Demonstrație: Cum $f \in \mathcal{R}[a, b]$, există $I \in \mathbb{R}$, astfel încât, în conformitate cu Definiția 13.4, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, așa încât, $\forall \Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \xi_\Delta$, avem $|\sigma_f(\Delta, \xi) - I| < \varepsilon$, adică

$$(!) \quad I - \varepsilon < \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + \varepsilon.$$

Fixând $\varepsilon = 1$ și $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ (cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$), lăsăm ξ_1 să varieze în $[x_0, x_1]$, iar pe $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ le menținem, pe moment, constante. Atunci, din (!), deducem că avem

$$\frac{1}{x_1 - x_0} \left[I - 1 - \sum_{i=2}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right] < f(\xi_1) < \frac{1}{x_1 - x_0} \left[I + 1 - \sum_{i=2}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right],$$

$\forall \xi_1 \in [x_0, x_1]$. Deci funcția f este mărginită pe intervalul parțial al lui Δ $[x_0, x_1]$.

În mod analog, se arată că f este mărginită și pe celelalte intervale $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = \overline{1, n}$. Astfel, reiese că $f \in \mathcal{B}[a, b]$. ◀

Observație: O consecință directă a Propoziției 13.1 este aceea potrivit căreia, dacă o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) nu este mărginită pe intervalul (compact) $[a, b]$, atunci ea nu este \mathcal{R} -integrabilă pe $[a, b]$.

Există însă și funcții mărginite pe un interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, care nu sunt din $\mathcal{R}[a, b]$. De exemplu, funcția lui Dirichlet, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

O condiție necesară și suficientă de Riemann-integrabilitate pentru funcții $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se obține caracterizând limita I , prin sume Riemann $\sigma_f(\Delta, \xi_\Delta)$, pe baza condiției Cauchy (de existență a unei limite). Astfel, are loc următorul rezultat:

Teorema 13.1 (de caracterizare Cauchy a integrabilității Riemann)

Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, așa încât, $\forall \Delta \in \mathcal{D}[a, b]$, cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $\xi', \xi'' \in \xi_\Delta$, avem $|\sigma_f(\Delta, \xi') - \sigma_f(\Delta, \xi'')| < \varepsilon$.

Prin folosirea Teoremei 13.1, se pot pune în evidență următoarele **proprietăți ale funcțiilor \mathcal{R} -integrabile pe intervale compacte din \mathbb{R}** , reunite în cadrul propoziției imediat enunțate aici:

Propoziția 13.2 i) Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[c, d]$, oricare ar fi subintervalul $[c, d]$ al lui $[a, b]$.

ii) Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$. Dacă $f \in \mathcal{R}[a, c]$ și $f \in \mathcal{R}[c, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$ și are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

iii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ și are loc relația:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

iv) Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f^2 \in \mathcal{R}[a, b]$.

v) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ și are loc inegalitatea ("Cauchy-Schwarz-Buniakowski" pentru funcții \mathcal{R} -integrabile):

$$(\text{!!}) \quad \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right).$$

vi) Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$ și $|f(x)| \geq \mu > 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$.

vii) Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$ și

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(Așadar, $\mathcal{R}[a, b]$ este, în raport cu adunarea funcțiilor reale scalar-scalar și cu înmulțirea acestora cu scalari reali, un spațiu liniar).

viii) Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$ și $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Observații:

a) Similar situației de la sisteme finite de numere reale, inegalitatea (!!) are, drept generalizare, inegalitatea lui Hölder pentru funcții \mathcal{R} -integrabile și anume:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

$\forall f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $p, q \in (1, +\infty)$, cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ și $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{R}[a, b]$.

b) Ținând seama de viii) din Propoziția 13.2, se deduce monotonia integralei Riemann, în sensul că, $\forall f, g \in \mathbb{R}[a, b]$, cu proprietatea că $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, avem:

$$(\bullet) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

c) Convenind ca, pentru $f \in \mathcal{R}[a, b]$, să definim $\int_a^b f(x) dx$ ca fiind $-\int_b^a f(x) dx$, rezultă:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

d) Având în atenție relația (\bullet) , se poate vedea că, dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, unde $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$ și $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$.

Dacă, în plus, $f \in C[a, b]$, atunci, deoarece $m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$ și f , ca funcție continuă pe $[a, b]$, își atinge marginile (m și M), având proprietatea lui Darboux, există $c \in [a, b]$, astfel încât

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}, \text{ adică are loc formula de medie:}$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție mărginită pe $[a, b]$, se pot defini **sumele Darboux** (*corespunzătoare lui f și unei diviziuni $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$ arbitrare*), **inferioară** și respectiv **superioară**, prin

$$s_f(\Delta) = \sum_{i=1}^m m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ și } S_f(\Delta) = \sum_{i=1}^m M_i(x_i - x_{i-1}),$$

unde $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ și $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Notând elementul $\sup_{\Delta \in \mathcal{D}[a, b]} s_f(\Delta)$ cu \underline{I} și $\inf_{\Delta \in \mathcal{D}[a, b]} S_f(\Delta)$ cu \overline{I} , numim \underline{I} **integrala Darboux inferioară a lui f pe $[a, b]$** , iar \overline{I} **integrala Darboux superioară a lui f pe $[a, b]$** . Folosind aceste elemente, se poate pune în evidență următorul **criteriu (al lui Darboux) pentru stabilirea \mathcal{R} -integrabilității lui f pe $[a, b]$** .

Teorema 13.2 *O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mărginită pe $[a, b]$, este integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$ dacă și numai dacă $\underline{I} = \overline{I} \in \mathbb{R}$, ceea ce echivalează cu:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}[a, b] \text{ astfel încât } S_f(\Delta_\varepsilon) - s_f(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Valoarea comună a elementelor \underline{I} și \bar{I} este, atunci când are loc relația $\underline{I} = \bar{I} \in \mathbb{R}$, tocmai $\int_a^b f(x) dx$.

Pe baza oricăruia dintre criteriile de \mathcal{R} -integrabilitate formulate de Teoremele 13.1 (*criteriul lui Cauchy*) și 13.2 (*criteriul lui Darboux*), se pun în relief **categoriile de funcții ce sunt integrabile Riemann pe intervale compacte din \mathbb{R}** . Are loc, astfel, rezultatul ce urmează.

Teorema 13.3 Fie funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Dacă $f \in \mathcal{C}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
- b) Dacă f este monotonă pe $[a, b]$ (sau pe porțiuni, pe $[a, b]$, intervalul $[a, b]$ putându-se scrie ca o reuniune finită de intervale $[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_k, b]$, astfel încât, pe fiecare dintre ele, f este monotonă, nu neapărat de același fel), atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
- c) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dacă și numai dacă $f \in \mathcal{B}[a, b]$ și f este continuă "aproape peste tot" pe $[a, b]$, adică $f \in \mathcal{C}([a, b]; E)$, unde $E \subseteq [a, b]$ este o mulțime "neglijabilă" (de măsură Lebesgue nulă) (criteriul lui Lebesgue de \mathcal{R} -integrabilitate).

(O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește *neglijabilă* sau *de măsură Lebesgue nulă* dacă, $\forall \varepsilon > 0$, există un șir de intervale $(J_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$, așa încât $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n^\varepsilon$ și $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} l(J_n^\varepsilon) < \varepsilon$, unde $l(J_n^\varepsilon)$ înseamnă lungimea intervalului J_n^ε , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.)

Propoziția 13.3 Fie $f \in \mathcal{R}[a, b]$ și, $\forall x \in [a, b]$, în virtutea afirmației i) din Propoziția 13.2, fie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de relația: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $\forall x \in [a, b]$. Au loc următoarele concluzii:

- a) $F \in \mathcal{C}[a, b]$. Mai mult, $\exists L > 0$, așa încât

$$|F(x) - F(\tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|, \forall x, \tilde{x} \in [a, b].$$

- b) Dacă f este continuă într-un punct $x_0 \in [a, b]$, atunci F este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$.
Dacă $f \in \mathcal{C}[a, b]$, atunci F este o primitivă a lui f și deci $f \in \mathcal{P}[a, b]$.

Demonstrație: a) Cum $f \in \mathcal{R}[a, b]$, avem: $f \in \mathcal{B}[a, b]$ (în virtutea Propoziției 13.1). Există deci $L \in \mathbb{R}_+$, astfel încât $|f(t)| \leq L$, $\forall t \in [a, b]$. Atunci:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\tilde{x})| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{\tilde{x}} f(t) dt \right| = \left| \int_{\tilde{x}}^x f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{\tilde{x}}^x |f(t)| dt \leq \int_{\tilde{x}}^x L dt = L \cdot |x - \tilde{x}|, \forall x, \tilde{x} \in [a, b]. \end{aligned}$$

Deci F este lipschitziană pe $[a, b]$ și, în consecință, $F \in \mathcal{C}[a, b]$.

b) Avem:

$$(\bullet\bullet) \quad \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_a^x |f(t) - f(x_0)| dt, \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}.$$

Cum f este continuă în x_0 , putem conta pe faptul că, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$, așa încât, $\forall t \in [a, b]$, cu $|t - x_0| < \delta_\varepsilon$, avem: $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Folosind acest lucru în $(\bullet\bullet)$, obținem că

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \text{ astfel încât, } \forall x \in [a, b], \text{ cu } |x - x_0| < \varepsilon,$$

rezultă:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Ca atare, există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, adică F este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$.

Când $f \in \mathcal{C}[a, b]$, înseamnă că $F'(x_0) = f(x_0), \forall x_0 \in [a, b]$. Deci F este derivabilă pe $[a, b]$ și $F' = f$, pe $[a, b]$. Altfel spus, F este o primitivă a lui f și, astfel, $f \in \mathcal{P}[a, b]$. ◀

Calculul integralelor definite pentru funcții $f \in \mathcal{R}[a, b]$ se face, atunci când $f \in \mathcal{P}[a, b]$, pe baza **formulei lui Leibnitz-Newton**

$$(\#) \quad \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f pe $[a, b]$.

Conform Propoziției 13.3, b), formula $(\#)$ are sens când $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

Tot pentru calculul unei integrale definite (în sens Riemann) dintr-o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care există $\int_a^b f(x) dx$, se mai poate folosi metoda **schimbării de variabilă**, potrivit formulei

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx,$$

când $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$, iar $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]; [a, b])$ sau în conformitate cu formula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} (f \circ \psi)(t) \psi'(t) dt,$$

când $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ și $\psi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]; [a, b])$, ψ fiind bijectivă.

La fel de bine, atunci când este posibil, se folosește și formula de integrare prin părți pentru calcule de integrale definite. Aceasta se exprimă prin relația

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx,$$

ori de câte ori f și $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $[a, b]$ și cu $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$ (în particular, când $f, g \in \mathcal{C}^1[a, b]$).

După cum am menționat, fără demonstrație, în Cursul 12, pentru un șir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ care este uniform convergent, pe $[a, b]$, la o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, are loc un transfer de integrabilitate (Riemann), de la f_n la f , în conformitate cu următorul enunț.

Propoziția 13.4 Dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ este un șir de funcții uniform convergent, pe $[a, b]$, la $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$ și

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Demonstrație: Aplicarea Teoremei 12.3, de transfer de continuitate, ne conduce la o primă concluzie: $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$. Atunci, prin Teorema 13.3, a), rezultă: $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Cum f_n și f sunt continue pe

$[a, b]$, există $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}$. Și, pentru că $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/[a, b]} f$, avem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$. Deci, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, așa încât, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, are loc relația: $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

În acest fel, constatăm că, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$, avem:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Așadar, există $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ și este egală cu $\int_a^b f(x) dx$. ◀

De fapt, ținând seama de aproximarea funcțiilor din $\mathcal{R}[a, b]$ prin funcții din $\mathcal{C}[a, b]$, se poate afirma că transferul de integrabilitate (în sens Riemann) are loc și într-un caz mai general, în care șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{R}[a, b]$ converge uniform pe $[a, b]$ la $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se justifică astfel, acum, Teorema 12.5. În mod firesc, pe baza șirului sumelor parțiale, acest rezultat se manifestă și la nivelul seriilor de funcții, uniform convergente pe $[a, b]$. Este justificat deci și rezultatul din Teorema 12.9, a).

Integrale improprii

O extindere naturală a integralei Riemann, integrală în legătură cu care, atât intervalul de integrare, cât și funcția de integrat, adică integrandul, au fost considerate mărginite, este aceea constituită de **integralele improprii** (fie din pricina nemărginirii domeniului de integrare, fie din cauza faptului că funcția de integrat este nemărginită). **Integralele pe intervale nemărginite** sunt acelea în care cel puțin una dintre limitele de integrare este infinită, adică de forma

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ sau } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Integralele din funcții nemărginite sunt acelea de forma $\int_a^b f(x) dx$, unde $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este nemărginită cel puțin în vecinătatea unui punct din (a, b) . Atât integralele pe intervale nemărginite, cât și integralele din funcții nemărginite pot fi privite ca **integrale pe intervale necompacte**.

Definiția 13.5 Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție definită pe mulțimea $A = (\alpha, \beta) \setminus \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}\}$, unde $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1} \in (\alpha, \beta)$ și $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{n-1}$. De asemenea, prin notație, fie $\gamma_0 = \alpha$ și $\gamma_n = \beta$.

Dacă f este **integrabilă local** (în sens Riemann) pe A , adică f este integrabilă pe orice interval compact inclus în A , iar funcția $F : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$F(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{u_i}^{v_i} f(x) dx, \forall u_i, v_i \in (\gamma_i, \gamma_{i+1}), \forall i = \overline{0, n-1},$$

are o limită finită când $(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1}) \longrightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$, atunci valoarea acestei limite se ia ca definiție a integralei lui f pe intervalul (α, β) . Se spune, în acest caz, că **funcția f este integrabilă impropriu (generalizat) pe (α, β) ori, prin analogie cu termenul corespunzător din teoria seriilor, se spune că integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ este convergentă.**

Dacă F nu are limită sau limita sa nu este finită când $(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots, u_{n-1}, v_{n-1})$ tinde la $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-1}, \gamma_n)$, spunem că f nu este integrabilă, impropriu, pe (α, β) sau, echivalent, că **integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ nu este convergentă (adică este divergentă).**

Observații: Cum existența limitei finite a lui F este legată de faptul că fiecare funcție $F_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$F_i(u_i, v_i) = \int_{u_i}^{v_i} f(x) dx, u_i, v_i \in (\gamma_i, \gamma_{i+1}), i = \overline{0, n-1},$$

trebuie să aibă limită finită când $(u_i, v_i) \rightarrow (\gamma_i, \gamma_{i+1}) \in \mathbb{R}^2$, adică integrala $\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x) dx$ trebuie să fie convergentă pentru orice $i = \overline{0, n-1}$, se poate spune că stabilirea convergenței (sau divergenței) integralei $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ revine la stabilirea naturii fiecăreia dintre integralele $\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x) dx, i = \overline{0, n-1}$.

Întrucât, în cazul acestora, intervalele (γ_i, γ_{i+1}) nu conțin alte puncte în care integrandul f este nemărginit, stabilirea convergenței sau divergenței integralelor $\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x) dx, i = \overline{0, n-1}$, va consta, conform Definiției 13.5, în stabilirea existenței și finitudinii, respectiv nonexistenței ori existenței și nefinitudinii limitelor

$$\lim_{\lambda \searrow \gamma_i} \int_{\lambda}^{\omega_i} f(x) dx \text{ și } \lim_{\mu \nearrow \gamma_{i+1}} \int_{\omega_i}^{\mu} f(x) dx, \text{ unde } \gamma_i < \lambda < \omega_i < \mu < \gamma_{i+1}, i = \overline{0, n-1}.$$

Când aceste limite există și sunt finite, atunci ele definesc integralele funcției f pe intervalele necompacte $(\gamma_i, \omega_i]$ și respectiv $[\omega_i, \gamma_{i+1})$, integrale notate, îndeobște, cu

$$\int_{\gamma_i+0}^{\omega_i} f(x) dx \text{ și respectiv } \int_{\omega_i}^{\gamma_{i+1}-0} f(x) dx.$$

Prin analogie, pentru integrala impropriu a funcției f pe intervalul (γ_i, γ_{i+1}) se folosește notația $\int_{\gamma_i+0}^{\gamma_{i+1}-0} f(x) dx$.

Deoarece $\int_{\gamma_i+0}^{\gamma_{i+1}-0} f(x) dx = \int_{\gamma_i+0}^{\omega_i} f(x) dx + \int_{\omega_i}^{\gamma_{i+1}-0} f(x) dx, \forall i = \overline{0, n-1}$, este suficient ca, în studiul convergenței integralelor pe interval necompact, să ne ocupăm de convergența unor integrale de tipul

$$(\omega) \int_{a+0}^b f(x) dx \text{ și } \int_a^{b-0} f(x) dx,$$

unde funcția f este \mathbb{R} -integrabilă pe orice interval compact conținut în intervalele $(a, b]$ și respectiv $[a, b)$.

Când a și/sau b sunt infinite ($\pm\infty$), integralele în cauză (din (ω)) sunt *improprii, pe intervale nemărginite*, iar când a și b sunt din \mathbb{R} , atunci integralele (ω) sunt *improprii, din funcții nemărginite*.

Definiția 13.6 i) Dacă funcția f este integrabilă Riemann pe orice interval compact inclus în

intervalul $(a, b]$ sau $[a, b)$, iar integrala $\int_{a+0}^b |f(x)| dx$, respectiv $\int_a^{b-0} |f(x)| dx$, este convergentă,

atunci se spune că integrala $\int_{a+0}^b f(x) dx$, respectiv $\int_a^{b-0} f(x) dx$, este **absolut convergentă**.

ii) dacă integrala $\int_{a+0}^b f(x) dx$, respectiv $\int_a^{b-0} f(x) dx$, este convergentă, dar nu și absolut convergentă, atunci ea se numește **semiconvergentă** (sau **simplu convergentă**).

Integrale improprii pe intervale infinite

Relativ la integralele $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ și $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, observăm că ne putem limita la a investiga doar prima dintre ele, deoarece celelalte două pot fi redate pe baza unor integrale de tipul primei. Într-adevăr, prin substituția $x = -t$, avem $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) dt$, iar $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ se poate

scrie sub forma $\int_{-a}^{+\infty} f(-t) dt + \int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Definiția 13.7 i) Fie $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $a \in \mathbb{R}$, o funcție \mathcal{R} -integrabilă pe orice interval compact $[a, b]$, cu $b \in \mathbb{R}$, $b > a$. Numim **integrală improprie, de la a la $+\infty$, din funcția f** ,

limita $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, dacă aceasta există. În caz de existență, respectiva integrală se notează

cu $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

ii) Integrala improprie $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ se numește **convergentă** dacă limita $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ există și

este finită. Acest fapt se marchează prin: $\int_a^{+\infty} f(x) dx (C)$.

iii) Integrala $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ se numește **improprie divergentă** dacă limita $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ nu există

sau, dacă există, este infinită. Atunci, se folosește notația: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (D).

De exemplu, integrala improprie $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, unde $a > 0$, este convergentă când $p > 1$ și divergentă când $p \leq 1$, deoarece, pentru $p > 1$, obținem $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_a^b \right) = \frac{a^{1-p}}{p-1} \in \mathbb{R}$, iar pentru $p \leq 1$, avem: $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{x^p} dx = +\infty$.

Propoziția 13.5 (*criteriul lui Cauchy de convergență pentru integrale improprii*)

Integrala $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ este convergentă dacă și numai dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $a_\varepsilon > a$, astfel încât, $\forall a', a'' > a_\varepsilon$, avem:

$$(\square) \quad \left| \int_{a'}^{a''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Acest rezultat se obține prin interpretarea în sens Cauchy a existenței limitei finite $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$.

Considerând $a'' = a' + 1$, pe baza Propoziției 13.5 deducem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $a_\varepsilon > a$, așa încât, $\forall a' > a_\varepsilon$, avem: $M_{a'} = \sup_{t \in [a', a'+1]} |f(t)| < \varepsilon$. Obținem astfel faptul că o **condiție necesară**

de convergență a integralei $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ este: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Tot pe baza Propoziției 13.5, se poate vedea că, dacă integrala $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ este convergentă, altfel spus dacă integrala $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ este (AC), adică absolut convergentă, atunci integrala $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ este convergentă.

Un alt criteriu de convergență pentru integrala $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ este **criteriul general de comparație**, cu următorul enunț:

Propoziția 13.6 Dacă $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$, cu $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$ și $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ (C), atunci $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (C).

Demonstrație: Cum $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in [a, +\infty)$, rezultă: $0 \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b g(x) dx$,

$\forall b \geq a$. În același timp, deoarece integrala $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ este convergentă, există și este finită limita

$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) dx$. Deducem atunci că există și este finită și limita $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x)| dx$. Deci $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

este absolut convergentă și, drept urmare, avem: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (C). ◀

Teorema 13.4 (Criteriul în β)

Fie β un număr real fixat. Dacă există $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta |f(x)|$, atunci:

i) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (AC) , când $\beta > 1$ și $l < +\infty$;

ii) $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ (D) , când $\beta \leq 1$ și $0 < l$.

Demonstrație: i) Când $\beta > 1$ și $l < +\infty$, avem: $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon > 0$, așa încât, $\forall x > x_\varepsilon$, are loc relația

$$l - \varepsilon < x^\beta |f(x)| < l + \varepsilon,$$

adică

$$\frac{l - \varepsilon}{x^\beta} < |f(x)| < \frac{l + \varepsilon}{x^\beta}.$$

De aici, rezultă că avem:

$$0 \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx = \int_a^{x_\varepsilon} |f(x)| dx + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)| dx \leq \int_a^{x_\varepsilon} |f(x)| dx + (l + \varepsilon) \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty.$$

Așadar, reiese că $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (AC) , ceea ce implică faptul că $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ este convergentă.

ii) În acest caz, se constată că $(l - \varepsilon) \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx \leq \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)| dx$, cu $\varepsilon \in (0, l)$ și, întrucât $\int_{x_\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx =$

$+\infty$, se obține concluzia: $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ (D). ◀

Observație: În cazul în care $f(x) \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq x_\varepsilon$, ii) implică: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (D).

Propoziția 13.7 (Criteriul integral al lui Cauchy)

Dacă funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ este monoton descrescătoare, atunci integrala improprie $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Demonstrație: Scriind $\int_1^{n+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx$ și folosind faptul că, din monotonia lui f , avem $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \forall x \in [k, k+1], \forall k = \overline{1, n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, obținem:

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pe baza acestei relații, are loc concluzia din enunț. ◀

Pot fi formulate și alte criterii de convergență pentru integrale de tipul $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, pornind de la criteriile corespunzătoare pentru serii numerice.

Integrale din funcții nemărginite

Definiția 13.8 Fie funcția $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $\lim_{x \nearrow b} |f(x)| = +\infty$ și $f \in \mathcal{R}[a, b - \varepsilon], \forall \varepsilon \in (0, b - a)$. Dacă există și este finită limita

$$(\diamond) \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

atunci spunem că f este **integrabilă (impropriu) pe $[a, b)$** sau că **integrala de la a la b din f este convergentă**. Valoarea limitei se notează cu $\int_a^{b-0} f(x) dx$ și scriem: $\int_a^b f(x) dx$ (C).

În caz contrar, dacă limita (\diamond) nu există sau este infinită, spunem că $\int_a^b f(x) dx$ este **divergentă**

și scriem: $\int_a^b f(x) dx$ (D).

Analog, dacă $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă local (adică $f \in \mathcal{R}[a + \varepsilon, b], \forall \varepsilon \in (0, b - a)$) și $\lim_{x \searrow a} |f(x)| = +\infty$, iar $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ există și este finită, fiind notată cu $\int_{a+0}^b f(x) dx$, atunci spunem

că f este **integrabilă (impropriu) pe intervalul necompact $(a, b]$** și scriem: $\int_a^b f(x) dx$ (C). Alt-

minteri, dacă $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ nu există sau este infinită, spunem că f nu este integrabilă pe $(a, b]$ (sau

că integrala $\int_a^b f(x) dx$ este divergentă) și scriem. $\int_{a+0}^b f(x) dx$ (D).

Observație: Pentru cazul în care $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ și $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$, iar integralele improprii $\int_a^c f(x) dx$ și $\int_c^b f(x) dx$ sunt convergente, avem $\int_a^b f(x) dx$ (C) și

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon' \searrow 0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x) dx.$$

Când există

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right),$$

declaram această limită ca fiind **valoarea principală a integralei** $\int_a^b f(x) dx$. Dacă, în plus, limita în cauză este și finită, atunci spunem că f **este integrabilă pe** $[a, b]$, **în sensul valorii principale**.

Pe baza Definiției 13.8, integrala improprie $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă atunci când $\alpha < 1$ și divergentă când $\alpha \geq 1$.

Și pentru asemenea tipuri de integrale improprii există criterii de convergență și de absolută convergență (adică de convergență a integralei $\int_a^b |f(x)| dx$), între care, des folosit în aplicații este așa-numitul criteriu în α).

Teorema 13.5 (Criteriul de convergență în α)

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $f : [a, b)$ (respectiv $(a, b]$) $\rightarrow \mathbb{R}$ o funcție \mathcal{R} -integrabilă pe orice interval compact inclus în $[a, b)$ (respectiv $(a, b]$). În plus, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b)$ (respectiv $(a, b]$).

Dacă există limita $L = \lim_{x \nearrow b} [(b-x)^\alpha f(x)]$ (respectiv $L = \lim_{x \searrow a} [(x-a)^\alpha f(x)]$), atunci:

i) integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă când $\alpha < 1$ și $L < +\infty$;

ii) avem $\int_a^b f(x) dx$ (D) când $\alpha \geq 1$ și $L > 0$.

Demonstrație: Se utilizează interpretarea existenței limitei L în limbajul ε - δ și convergența/divergența

integralei $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ (respectiv $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$), la fel ca în Teorema 13.4. ◀

Teorema 13.6 (Criteriul de convergență de tip Cauchy)

Integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x) dx$ (respectiv $\int_{a+0}^b f(x) dx$) este convergentă dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in (a, b), \text{ așa încât, } \forall b', b'' \in (b_\varepsilon, b), \text{ cu } b' < b'', \text{ avem } \left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

(respectiv, pentru $\int_{a+0}^b f(x) dx$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in (a, b), \text{ așa încât, } \forall a', a'' \in (a, a_\varepsilon), \text{ cu } a' < a'', \text{ avem } \left| \int_{a'}^{a''} f(x) dx \right| < \varepsilon).$$

Acest criteriu rezultă prin interpretarea, în sens Cauchy, a existenței limitei finite, în fiecare caz în parte. Pe baza sa, se pot deduce și alte criterii de convergență pentru asemenea integrale improprii, de interes particular strict.

Integrale cu parametri

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$ o mulțime nevidă, a și $b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, precum și $f : [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că, $\forall y \in A$, arbitrar fixat, funcția $f(\cdot, y)$ este Riemann integrabilă pe $[a, b]$. Se poate considera atunci $F : A \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \forall y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in A$$

și denumită **integrală Riemann**, pe $[a, b]$, **cu parametri** y_1, y_2, \dots, y_k .

Mai general, dacă, în plus, se iau în considerație și funcțiile $p : A \rightarrow [a, b]$, $q : A \rightarrow [a, b]$, atunci este bine definită și funcția $G : A \rightarrow \mathbb{R}$, dată de:

$$G(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx, y \in A.$$

Ea se numește **integrală Riemann cu parametri și cu limitele de integrare dependente de parametri**.

În legătură cu astfel de integrale, interesează îndeosebi condițiile în care proprietăți ale integrandului f , relative la parametrul vectorial (când $k > 1$) sau scalar (când $k = 1$) y , din A , se transmit funcțiilor F și G .

Încercând să vedem, mai întâi, dacă transferul de existență a limitei $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, $\forall x \in [a, b]$, într-un punct de acumulare al mulțimii A ($y_0 \in A'$), se produce sau nu, ne punem, firesc, întrebarea dacă există $\lim_{y \rightarrow y_0} F(y)$ și dacă $\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b g(x) dx$. Răspunsul, negativ în general, este afirmativ doar dacă $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ există uniform în raport cu x . Astfel, cel puțin în cazul în care

$A = \mathbb{N}$, $y = n$ și $f(x, y) = f(x, n) = f_n(x)$, $\forall x \in [a, b]$, vedem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ nu este egală cu $\int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$, decât dacă $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{u/[a, b]} g$.

Definiția 13.9 Pentru $y_0 \in A'$, spunem că **funcția** $f : [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$ **are limita** $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, **când** $y \rightarrow y_0$, adică $g(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, **uniform în raport cu** $x \in [a, b]$, dacă, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V_\varepsilon \in \mathcal{V}(y_0)$, vecinătate a lui y_0 , independentă de x , astfel încât, $\forall x \in [a, b]$ și $\forall y \in V_\varepsilon \setminus \{y_0\}$ să avem: $|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon$.

Folosind acum noțiunea de limită uniformă introdusă prin Definiția 13.9, precum și caracterizarea de tip Cauchy a existenței unei limite într-un punct, putem vedea că rezultatul enunțat de propoziția care urmează este adevărat, pe baza Teoremei 13.1.

Propoziția 13.8 Dacă $f : [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$ (în raport cu $\forall y \in A$) și, pentru un $y_0 \in A$, avem $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = g(x)$, uniform în raport cu $x \in [a, b]$, atunci g este integrabilă pe $[a, b]$ și are loc relația:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

În ceea ce privește transferul de continuitate, în cazul cel mai general, adică cel al funcției G , are loc următorul rezultat.

Propoziția 13.9 Dacă A este o mulțime compactă din \mathbb{R}^k , $f \in \mathcal{C}([a, b] \times A; \mathbb{R})$, iar $p, q \in \mathcal{C}(A; [a, b])$, atunci $G \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$. În particular, când p, q sunt constante, ca de pildă când $p \equiv a$ și $q \equiv b$, obținem: $F \in \mathcal{C}(A; \mathbb{R})$.

Demonstrație: Folosim relația

$$\begin{aligned} |G(y) - G(y_0)| &\leq \left| \int_a^{q(y_0)} |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \right| + \left| \int_{q(y_0)}^{q(y)} f(x, y) dx \right| + \\ &+ \left| \int_a^{p(y_0)} |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \right| + \left| \int_{p(y_0)}^{p(y)} f(x, y) dx \right|, \forall y, y_0 \in A, \end{aligned}$$

în virtutea căreia, în ipotezele din enunț, $|G(y) - G(y_0)|$ poate fi oricât de mică dorim, de îndată ce $\|y - y_0\|$ este acceptabil de mică. \blacktriangleleft

În aplicații, cea mai utilă proprietate de transfer este cea relativă la derivabilitatea funcțiilor F și G , realizabilă, în condițiile din Propoziția 13.10, prin **formula lui Leibniz de derivare**.

Propoziția 13.10 Dacă A este un paralelipiped compact în \mathbb{R}^k , $f : [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b] \times A$, care admite $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ continuă pe $[a, b] \times A$, iar p și q sunt două funcții de la A la $[a, b]$,

derivabile în raport cu y_i ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) pe A , atunci G (și implicit F , în situația în care p și q sunt constante) este derivabilă în raport cu y_i pe A și are loc **formula (lui Leibniz)**:

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(y) = f(q(y), y) \frac{\partial q}{\partial y_i}(y) - f(p(y), y) \frac{\partial p}{\partial y_i}(y) + \int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y) dx, \forall y \in A.$$

Cât privește \mathcal{R} -integrabilitatea integralelor cu parametri, menționăm următorul rezultat.

Propoziția 13.11 Dacă $A = [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ (cu $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$) și $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d]; \mathbb{R})$, atunci funcția

$F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $\forall y \in [c, d]$ este integrabilă Riemann pe $[c, d]$ și are loc relația:

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Când, în expresia lui F sau a lui G , fie domeniul de integrare, fie integrandul $f(\cdot, \cdot)$, în raport cu x , nu mai este mărginit, avem de-a face cu integrale improprii (pe interval necompact) și cu parametri. Și în cazul unor asemenea integrale interesează transferul proprietăților integrandului asupra integralei din context. De data aceasta, intervine decisiv noțiunea de convergență uniformă, în raport cu $y \in A$, a integralelor ce definesc pe F și pe G .

Definiția 13.10 (relativă la cazul $\int_a^{b-0} f(x, y) dx$, când improprietatea este pricinuită de nemărginirea lui f , în raport cu x , în b)

j) **Integrala improprie** $\int_a^b f(x, y) dx$, $y \in A$, se numește **convergentă punctual** pe A dacă există

$$F : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ astfel încât } \lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f(x, y) dx = F(y), y \in A.$$

jj) Spunem că integrala $\int_a^b f(x, y) dx$ este **convergentă uniform** pe A , dacă $\lim_{b' \nearrow b} \int_a^{b'} f(x, y) dx = F(y)$ există uniform în raport cu $y \in A$.

Utilizând acum, simultan, conceptele introduse de Definițiile 13.9 și 13.10, se pot formula, în anumite condiții, rezultate de transfer de proprietate și pentru astfel de integrale (improprii și cu parametri). Iată enunțul rezultatului relativ la derivabilitate.

Propoziția 13.12 (asupra transferului de derivabilitate de la integrand la integrala improprie cu parametri)

Fie $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $[c, d] = A \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ și integrala improprie cu parametru $\int_a^{b-0} f(x, y) dx$, unde $y \in A$. De asemenea, fie satisfăcute următoarele ipoteze:

1) Integrala improprie $\int_a^b f(x, y) dx$ converge punctual la o funcție $F(y)$, pentru $y \in A$;

2) Funcția f admite derivată parțială în raport cu y , $\frac{\partial f}{\partial y}$, pe A ;

3) Funcțiile f și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $[a, b] \times [c, d]$;

4) Integrala improprie $\int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ converge uniform în raport cu $y \in A$.

Atunci funcția $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ este derivabilă în orice punct $y \in [c, d]$ și

$$F'(y) = \int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \forall y \in [c, d] = A.$$

Exemple remarcabile de integrale improprii cu parametri.

Funcțiile Γ și B ale lui Euler

Dintre integralele improprii și cu parametri care ar fi demne de menționat, amintim aici **integrala lui Dirichlet** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$, **integrala lui Euler-Poisson** $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$, $a \in \mathbb{R}$ și **integralele (funcțiile) lui Euler**, asupra cărora zăbovim acum puțin.

Funcția Γ (gamma)

Prin definiție, această funcție este următoarea:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ea este bine definită (deci convergentă ca integrală improprie), $\forall p \in (0, +\infty)$, după cum rezultă imediat prin aplicarea criteriilor de convergență în β și în α (v. Teoremele 13.4 și 13.5).

Câteva proprietăți imediate ale funcției Γ sunt prezentate în cadrul următoarelor relații:

$$1. \quad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \forall p > 0;$$

$$2. \quad \Gamma(1) = 1;$$

$$3. \quad \Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$4. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

$$5. \quad \Gamma(p)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \forall p \in (0, 1);$$

6. $\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n)}, \forall p > 0;$
7. $(\Gamma(p))^{-1} = pe^{\gamma p} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right) e^{-p/n}, \forall p > 0$ (Weierstrass), unde $\gamma = 0,5772\dots$ este constanta lui Euler.

Funcția B (beta)

Este definită prin: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, p > 0, q > 0$. Satisface relațiile:

1. $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt, \forall p, q > 0;$
2. $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta, \forall p, q > 0;$
3. $B(p, q) = B(q, p), \forall p, q > 0;$
4. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \forall p, q > 0;$
5. $B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q) = \frac{q}{p} B(p+1, q), \forall p, q > 0;$
6. $B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1), \forall p, q > 0;$
7. $B(p, n+1) = \frac{n!}{p(p+1) \cdots (p+n)}, \forall p > 0, n \in \mathbb{N}.$

Bibliografie recomandată

1. Narcisa Apreutesei Dumitru, Gabriela Apreutesei - *Introducere în teoria integrabilității*, Editura "Performantica", Iași, 2005.
2. Marina Gorunescu, Florin Gorunescu, Augustin Prodan - *Matematici superioare. Biostatistică și Informatică (Cap. 8)*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2002.
3. Gh. Mocică - *Probleme de funcții speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988.
4. Horia Tudor - *Analiză matematică*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2008.
5. M. Postolache, Ariana Pitea, Dragoș Cioroboiu - *Calcul integral*, Editura "Fair Partners", București, 2010.