

Teoria probabilităților discrete - Curs 2

Olariu E. Florentin

Februarie, 2016

Table of contents

- 1 Probabilitatea condiționată și evenimente independente
 - Introducere
 - Probabilitate condiționată
 - Evenimente independente
- 2 Formule probabilistice
 - Formula probabilității totale
 - Formula lui Bayes
- 3 Exerciții
 - Probabilitate condiționată și independență
 - Formule probabilistice
- 4 Bibliography

Introducere

- În acest capitol vom studia felul în care un eveniment aleator, despre care știm deja că s-a realizat, influențează sau nu șansele de realizare ale unor alte evenimente.
- Noțiunile de condiționare și independență permit calcularea probabilităților unor evenimente aleatoare prin intermediul altor evenimente.
- Aceste noțiuni sunt printre cele mai importante concepte ale teoriei probabilităților.

Introducere

Exemplu:

- Să presupunem că se aruncă două zaruri și că putem observa valoarea primului dintre zaruri: 5. Având la îndemână această informație, care este probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie cel mult 7?
- Raționamentul este următorul: știind ca primul dintre zaruri este 5, rezultatele posibile a experimentului sunt $(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$ și $(5, 6)$.
- În continuare, cunoscând că valoarea primului zar este 5, fiecare dintre aceste evenimente elementare are aceeași probabilitate: $1/6$; probabilitatea căutată este $2/6$. ♣

Probabilitate condiționată

Definition 2.1

Fie A și B două evenimente aleatoare, probabilitatea condiționată de a se realiza A știind că s-a realizat B este

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, (B \neq \emptyset).$$

$P(A|B)$ se mai numește probabilitatea lui A condiționat de B .

Exemplu. Două cifre sunt alese la întâmplare dintre cele nouă cifre de la 1 la 9. Dacă suma este pară, care este probabilitatea ca unul dintre cele două numere să fie par? Dar probabilitatea ca unul dintre numere să fie cel mult 5?

Probabilitate condiționată

Soluție (continuare): Numerele pare sunt $\{2, 4, 6, 8\}$; dacă suma este pară și unul dintre numere este par, atunci amândouă sunt pare. Există $\binom{4}{2} = 6$ moduri de a alege două numere pare diferite și $\binom{5}{2} = 10$ moduri de a alege două numere impare diferite (numerele impare sunt $\{1, 3, 5, 7, 9\}$). Probabilitatea este

$$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}} = \frac{6}{6 + 10} = 0.375. \clubsuit$$

Exemplu. Într-o urnă sunt 4 bile albe (două numerotate cu 1, două cu 2), 5 galbene (trei numerotate cu 1, două cu 2) și 6 negre (două numerotate cu 1, patru cu 2). O bilă este extrasă la întâmplare din

Probabilitate condiționată

urnă.

- (a) Dacă bila extrasă nu este neagră, care este probabilitatea ca ea să fie albă?
- (b) Dacă bila extrasă are numărul 2, care este probabilitatea ca ea să nu fie albă?

Soluție:

- (a) Dacă bila extrasă nu este neagră, rămân nouă bile posibile, iar dintre acestea patru sunt albe. Probabilitatea este $4/9$.
- (b) Dacă bila extrasă are numărul 2, spațiul posibilităților (putem presupune ca urna are acest conținut) se restrânge la două bile albe, două bile galbene și patru bile negre. Probabilitatea de a extrage o bilă galbenă sau neagră este $6/8 = 0.75$. ♣

Evenimente independente

- În multe cazuri probabilitatea $P(A|B)$ este diferită de $P(A)$ care este probabilitatea necondiționată a evenimentului A . Asta înseamnă că realizarea evenimentului B influențează într-adevăr șansele de producere a evenimentului A .
- Atunci când $P(A) = P(A|B)$ putem spune că evenimentul A este independent de B (vom vedea că relația aceasta este simetrică). Altfel spus, A este independent de B dacă realizarea evenimentului B nu schimbă probabilitatea realizării evenimentului A .

Definition 3.1

Două evenimente A și B se numesc independente dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1)$$

Evenimente independente

- Dacă B este un eveniment posibil (adică $P(B) > 0$) și $P(A|B) = P(A)$, atunci A și B sunt independente conform definiției (care include și posibilitatea ca unul dintre cele două evenimente să fie imposibile).
- În fapt, evenimentul imposibil, \emptyset , este independent de orice alt eveniment; la fel, evenimentul sigur, Ω , este independent de orice alt eveniment.
- Independența se poate verifica folosind ecuația (1), dar există și situații în care aceasta rezultă direct din enunțul problemei pe baza independenței "fizice" a celor două evenimente aleatoare, așa cum arată următorul exercițiu.

Evenimente independente - exemple

Exemplu. Se aruncă două zaruri; fie $A =$ "primul zar are un număr par" și $B =$ "al doilea zar este cel puțin trei". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

Soluție: Intuitiv, cele două evenimente sunt independente deoarece rezultatul obținut pe un zar nu are vreo legătură cu cel de-al doilea (aruncarea primului zar poate fi făcută înaintea celui de-al doilea!). Chiar fără a calcula probabilitățile implicate în ecuația (1) putem spune că A și B sunt independente. ♣

- În anumite situații însă această independență fizică nu există și intuiția nu funcționează - nu putem afirma independența înainte de a calcula probabilitățile implicate.
- Următoarele exemple subliniază acest lucru.

Evenimente independente - exemple

Exemplu. Considerăm un pachet de (52 de) cărți de joc din care se extrage la întâmplare o carte. Fie A = "cartea extrasă este un zece" și B = "cartea extrasă este caro". Să se arate că cele două evenimente sunt independente.

Soluție: $P(A) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, iar $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ și $P(A) \cdot P(B) = \frac{52}{52 \cdot 52} = \frac{1}{52} \cdot \clubsuit$

Exemplu. într-o urnă sunt puse următoarele cărți: un valet de treflă, o damă de caro, un trei de pică și un opt de inimă. O carte este extrasă la întâmplare din această urnă; fie A = "cartea extrasă are culoare roșie" și B = "cartea extrasă este o figură". Să se analizeze independența evenimentelor A și B .

Soluție: Nici în acest caz independența nu se poate afirma direct; $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, de aici rezultă independența. \clubsuit

Evenimente independente - exemple

Exemplu. Un om care se recomandă N. H. vrea să facă un pariu și descrie astfel condițiile acestui pariu: alege câteva cărți dintr-un pachet și formează următoarele trei pachete mai mici:

- ① - pachetul P_1 conține: 4 de opt și 2 de doi;
- ② - pachetul P_2 : 1 nouă, 3 de șapte, 3 de șase și 3 de cinci;
- ③ - pachetul P_3 : 2 de zece și 3 de trei;

N. H. oferă partenerului său de pariu posibilitatea de a alege primul unul dintre pachete și apoi alege el însuși celălalt pachet. Fiecare alege o carte din propriul pachet, iar cel care are cartea mai mare câștigă. N. H. este gata să pună ca pariu 10\$ că va câștiga (așteptând ca oponentul său să ofere aceeași sumă), deși el face a doua alegere a unuia dintre pachetele rămase. Este acest pariu în avantajul celui care face prima alegere?

Evenimente independente - exemple

Soluție: Să presupunem mai întâi că partenerul alege pachetul P_1 - în cazul acesta N. H. alege P_3 ; oponentul lui N. H. câștigă numai dacă extrage un opt, iar N. H. un trei. Probabilitățile celor două evenimente sunt $4/6$ și $3/5$; cu probabilitate $2/3 \cdot 3/5 = 2/5$ oponentul câștigă. Astfel, în acest caz N. H. este avantajat.

Să presupunem acum că primul pachet ales este P_2 - în cazul acesta N. H. alege P_1 ; N. H. pierde dacă extrage un doi sau dacă extrage un opt iar oponentul său un nouă.

Similar, se poate arăta că, dacă oponentul său alege pachetul P_3 , atunci N.H. poate alege unul dintre pachetele rămase și are o probabilitate mai mare ca $1/2$ de a câștiga ([exercițiu](#)). ♣

Evenimente independente

discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria

Property 3.1

Dacă evenimentele A și B sunt independente, atunci la fel sunt și perechile de evenimente (A, \overline{B}) , (\overline{A}, B) și $\overline{A}, \overline{B}$.

proof: Știm că $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; luăm în considerare doar prima pereche (pentru celelalte se procedează similar): $P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) - P(A \cap B) = P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B})$ ■

Definition 3.2

Evenimentele aleatoare $(A_i)_{i \in I}$ se numesc independente în ansamblu dacă

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}),$$

pentru orice mulțime de indici distincți i_1, i_2, \dots, i_k din I .

Formula probabilității totale

Proposition 1.1

Fie $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ evenimente aleatoare care realizează o partiție a evenimentului sigur ($\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ și $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$). Dacă B este un eveniment oarecare, atunci

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

$$\begin{aligned} \text{dem: } P(B) &= P(B \cap \Omega) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i). \end{aligned}$$

Formula probabilității totale

Exemplu. Urna U_1 conține trei bile albe și cinci bile negre, iar urna U_2 patru bile albe și șase bile negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Care este probabilitatea ca bila să fie albă?

Soluție: Notăm A_i = "extragerea se face din urna U_i " ($i = \overline{1, 2}$) și B = "bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ și putem presupune că $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Atunci

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2), \text{ dar}$$

$$P(B|A_1) = \frac{3}{8}, \quad P(B|A_2) = \frac{4}{10}, \text{ deci}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} = \frac{31}{80} \spadesuit$$

Formula lui Bayes

Proposition 2.1

Fie A_1, A_2, \dots, A_n evenimente aleatoare care realizează o partiție a evenimentului sigur și B un eveniment oarecare, atunci

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

($P(B|A_k)$ se numesc probabilități a priori, iar $P(A_k|B)$ sunt numite probabilități a posteriori.)

$$\text{dem: } P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Formula lui Bayes

Exemplu. Se doau două urne, una conținând trei bile albe și patru bile negre, iar cealaltă patru bile albe și cinci negre. Se extrage o bilă dintr-una din urne aleasă la întâmplare (urnele sunt identice la exterior). Dacă bila extrasă este albă, care este probabilitatea ca ea să provină din prima urnă?

Soluție: Notăm A_i = "extragerea se face din urna U_i " ($i = \overline{1, 2}$) și B = "bila extrasă este albă". $A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ și $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$. Probabilitățile a priori sunt

$$P(B|A_1) = \frac{3}{7}, \quad P(B|A_2) = \frac{4}{9}.$$

Probabilitatea a posteriori cerută este

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{27}{55} \cdot \clubsuit$$

Formula lui Bayes

Exemplu. Se dau două urne; prima conține 3 bile roșii, 2 albastre și 3 negre, iar a doua conține 2 bile albe, 2 albastre și 3 negre. Din prima urnă se extrage o bilă și se pune în cea de-a doua urnă, apoi se extrage o bilă din cea de-a doua urnă.

- (a) Dacă a doua bilă extrasă este neagră care este probabilitatea ca prima să fi fost albastră?
- (b) Dacă a doua bilă extrasă este roșie care este probabilitatea ca prima să fi fost albastră?
- (b) Dacă a doua bilă extrasă este albă care este probabilitatea ca prima să fi fost roșie?

Exerciții pentru seminar

- **Probabilitate condiționată și evenimente independente:** I.1., I.2., I.3., I.4., I.6., I.8., I.9, I.11. (b, c)
- **Formula probabilității totale și cea a lui Bayes:** II.1., II.2., II.3., II.7., II.9.
- **Rezervă:** I.10., I.12, I.13., II.6., II.9., II.10.

Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.1. Se aruncă un zar și se consideră evenimentele A : apariția uneia din fețele 1, 2 sau 3 și B : apariția uneia din fețele 2, 3, 4 sau 6. Evenimentele A și B sunt independente?

I.2. Se aruncă două zaruri și se notează cu a_1 valoarea primului zar și cu a_2 valoarea celui de-al doilea. Să se arate că evenimentele " $a_1 \geq 4$ " și " $a_2 \leq 3$ " sunt independente.

I.3. Un absolvent de liceu trimite cereri de admitere la Oxford și la Cambridge. El știe că Oxford îl va accepta cu probabilitate 0.4, iar Cambridge cu probabilitate 0.3. Știe de asemenea că va fi acceptat de ambele universități cu probabilitate 0.2.

- (a) Care este probabilitatea să fie acceptat de Cambridge dacă se știe că a fost acceptat de Oxford?
- (b) Evenimentele "este acceptat de Oxford" și "este acceptat de Cambridge" sunt compatibile? Dar independente?

Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.4. Se aruncă trei monede identice.

- (a) Evenimentele "stema pe prima monedă" și "valoarea pe ultimele două" sunt independente?
- (b) Dar evenimentele "valoarea pe exact două monede" și "valoarea pe toate monedele"?

I.5. Trei sportivi trag asupra unei ținte; primul nimereste ținta cu probabilitatea $\frac{2}{3}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{3}{4}$, iar al treilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă

- (a) de exact trei ori,
- (b) de exact două ori,
- (c) respectiv, măcar o dată?

Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.6. Probabilitatea ca un student să promoveze examenul este $2/5$, ca studentul aflat la dreapta lui să promoveze este $3/5$, iar ca studentul aflat la stânga să promoveze este $1/5$. Presupunem că studenții nu se influențează reciproc în timpul examenului. Care este probabilitatea ca exact doi studenți să promoveze? Dar ca studentul din mijloc să promoveze știind că cel din stânga a promovat?

I.7. Patru persoane urcă împreună într-un lift al unei cladiri cu patru etaje. Locurile unde persoanele coboară din lift nu depind unele de celelalte; de asemenea fiecare coboară la unul dintre etaje cu probabilitate egală. Care este probabilitatea ca

- (a) toate cele patru persoane să coboare la același etaj?
- (b) cele patru persoane să coboare toate la etaje diferite?
- (c) două persoane să coboare la același etaj și celelalte două la un alt etaj (diferit de cel anterior)?

Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.8. O urnă conține 3 bile albe (două numerotate cu 1 și una numerotată cu 2) și 5 bile negre (două numerotate cu 1 și trei numerotate cu 2). Se extrage din urnă o bilă.

- (a) Dacă bila este albă care este probabilitatea ca ea să fie numerotată cu 1?
- (b) Dacă bila este numerotată cu 2 care este probabilitatea ca ea să fie albă?

I.9. O urnă conține 16 bile numerotate de 1 la 16 colorate astfel:
 $\underbrace{1, 2, 4, 5, 16}_{\text{albe}}, \underbrace{3, 6, 7, \dots, 13}_{\text{negre}}, \underbrace{14, 15}_{\text{verzi}}$. Se extrage o bilă din urnă. Se consideră evenimentele $A = \text{"bila extrasă este neagră"}$ și $B = \text{"bila extrasă are un număr mai mare sau egal cu 10"}$.

Să se calculeze probabilitățile evenimentelor $A|B, A|\overline{B}, \overline{A}|B, \overline{A}|\overline{B}$.

Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.10. Arătați că evenimentele A și B sunt independente dacă

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(A \cap B)} + \frac{P(B)}{P(A \cap B)}.$$

I.11. Fie A și B evenimente aleatoare posibile (i.e., cu probabilitate nenulă). Arătați că

(a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(B)P(A|B);$

(b) $\frac{P(A|A \cup B)}{P(B|A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(B)};$

(c) $\frac{P(\overline{B}|A)}{P(B)} + \frac{P(\overline{A})}{P(A)} = \frac{P(\overline{A}|B)}{P(A)} + \frac{P(\overline{B})}{P(B)}.$

Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.12. Se dau trei evenimente aleatoare A_i , $i = \overline{1, 3}$, astfel încât

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}).$$

Arătați că cele trei evenimente sunt independente în ansamblu.

I.13. Dacă evenimentele aleatoare A , B și C sunt independente în ansamblu, atunci la fel sunt și evenimentele A , B și \overline{C} .

I.14. Fie A_1 , A_2 și A_3 ($P(A_3) > 0$) trei evenimente aleatoare independente în ansamblu. Demonstrați că

(a) $P(A_1 \cap A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) P(A_2 | A_3)$ și

(b) $P(A_1 \cup A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) + P(A_2 | A_3) - P(A_1 \cap A_2 | A_3).$

Exerciții - Probabilitate condiționată și independență

I.15*. Se aruncă pe rând două monede falsificate. Se știe că probabilitatea de a obține stema la amândouă aruncările este $1/8$, iar probabilitatea de a obține stema la amândouă aruncările știind că la cel puțin una dintre cele două aruncări s-a obținut stema este $3/14$. Să se determine probabilitatea de a obține stema pentru prima monedă respectiv pentru cea de-a doua.

I.16*. Dați exemplu de trei evenimente aleatoare A , B și C astfel încât

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \text{ și } P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \neq P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}).$$

Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.1. Se dau patru urne identice la exterior, conținând: U_1 - 4 bile albe și 5 bile negre; U_2 - 3 bile albe și 7 bile negre; U_3 - 2 bile albe și 4 bile negre; U_4 - 3 bile albe și 5 bile negre. Dintr-una dintre cele patru urne, la întâmplare, se extrage o bilă.

- (a) Să se calculeze probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.
- (b) Dacă bila extrasă este neagră să se calculeze probabilitatea ca ea să provină din urna U_2 .

II.2. Probabilitatea ca o ușă să fie încuiată este $1/2$. Cheia de la această ușă se găsește pe un panou unde sunt 12 chei. Alegem două chei de pe panou,

- (a) Care este probabilitatea ca ușa să poată fi deschisă (fără a ne întoarce după o altă cheie)?
- (b) Dacă am deschis ușa, care este probabilitatea ca ea să fi fost încuiată?

Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.3. Într-o urnă sunt trei monede: una are stema pe ambele fețe, una are banul pe ambele fețe, iar ultima este obișnuită. Se extrage din urnă o monedă, care apoi se aruncă și se reține fața obținută.

- (a) Care este probabilitatea de a obține banul?
- (b) Dacă s-a obținut stema, care este probabilitatea ca moneda extrasă să fi fost cea normală.

II.4*. k urne conțin fiecare câte p bile roșii și q bile albastre. O bilă este extrasă la întâmplare din prima urnă și introdusă în cea de-a doua, apoi o bilă este extrasă la întâmplare din urna a doua și introdusă în cea de-a treia etc. La final o bilă se extrage din ultima urnă. Care este probabilitatea ca ultima bilă extrasă să fie albastră?

Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.5. Două urne conțin: una p bile albe și una p bile negre ($p \geq 3$). Se fac două schimburi succesive; un schimb constă din extragerea simultană a câte unei bile din fiecare urnă și introducerea ei în cealaltă urnă. Care este probabilitatea ca după cele două schimburi, urnele să aibă același conținut. Dar după patru schimburi succesive?

II.6. Fie A și B două evenimente posibile. Se spune ca A sugerează B , dacă $P(A|B) > P(A)$ și că *nu sugerează* B dacă $P(A|B) < P(A)$.

- (a) Să se arate că A sugerează B dacă și numai dacă B sugerează A .
- (b) Dacă \bar{A} este eveniment posibil, atunci A sugerează B dacă și numai dacă \bar{A} nu sugerează B .
- (c) O comoară se găsește într-unul din două locuri cunoscute cu probabilități $\beta \in (0, 1)$ respectiv $(1 - \beta)$. Căutăm mai întâi în primul loc și găsim comoara cu probabilitate $p > 0$. Arătați că evenimentul de a nu găsi comoara în primul loc sugerează că ea se găsește în cel de-al doilea loc

Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.7. O urnă conține o bilă albă și două bile roșii. La extragerea unei bile din urnă se procedează astfel: dacă bila este albă, ea se pune înapoi împreună cu o altă bilă albă; dacă bila extrasă este roșie, ea este pusă înapoi împreună cu alte două bile roșii. Din urnă se extrag succesiv (și fără întoarcere) două bile.

- (a) Care este probabilitatea ca a două bilă extrasă să fie roșie?
- (b) Dacă a doua bilă extrasă este roșie, care este probabilitatea ca prima să fi fost roșie?

II.8. În limba engleză “rigoare” se traduce prin “rigour”, iar în americană prin “rigor”. Un anglo-saxon aflat într-un hotel din Paris folosește într-o scrisoare acest cuvânt (40% dintre anglo-saxonii cazați la hotel sunt englezi și 60% americani). Se alege la întâmplare și uniform o literă din acest cuvânt. Care este probabilitatea ca litera să fie o vocală? Dacă litera aleasă este o vocală, care este probabilitatea ca scrisoarea să aparțină unui englez?

Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.9. Un informatician cere angajatorului său o recomandare pentru un nou loc de muncă. El estimează că are 50% șanse de a primi noua slujbă cu o recomandare puternică, 40% cu o recomandare moderată și 20% cu o recomandare slabă. De asemenea consideră că angajatorul său va oferi o recomandare puternică, moderată sau slabă cu probabilitatea 0.4, 0.4 și 0.2, respectiv.

- (a) Care este probabilitatea ca informaticianul să primească o nouă slujbă?
- (b) Dacă primește o nouă slujbă, care este probabilitatea să fi avut o recomandare slabă?

Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.10.

- (a) Arătați că, dacă E și F sunt evenimente aleatoare și $P(F) > 0$, atunci evenimentele $E|F$ și $\overline{E}|F$ sunt contrarii (în acest caz evenimentul sigur se poate restrânge la F).
- (b) (Versiunea condiționată a formulei probabilității totale) Demonstrați relația

$$P(A|B) = P(C|B) \cdot P(A|B \cap C) + P(\overline{C}|B) \cdot P(A|B \cap \overline{C}),$$

în condițiile în care toate evenimentele care condiționează au probabilitate nenulă.

Exerciții - Formula probabilității totale și formula lui Bayes

II.11*. (Dilema prizonierului) Dintr-un grup de trei prizonieri doi urmează să fie eliberați. Unul dintre prizonieri (John) își întreabă gardianul care dintre ceilalți doi prizonieri (în afară de el) va fi eliberat. Gardianul raționează astfel: probabilitatea ca John să fie eliberat este $2/3$, dar dacă i-ar răspunde la întrebare probabilitatea ar scădea la $1/2$ - și refuză să răspundă acestei întrebări. Este corect acest raționament?

II.12*. (Jocul celor două plicuri) Două plicuri conțin câte o sumă de bani (numere întregi distincte, necunoscute). O persoană alege la întâmplare unul dintre cele două plicuri și după ce se uită înăuntru poate alege să schimbe plicul. N. H. susține că următoarea strategie mărește peste 0.5 probabilitatea de a determina plicul mai valoros: se aruncă o monedă în mod repetat, fie $X = 0.5$ plus numărul de aruncări până la apariția stemei prima oară; plicul deja deschis este schimbat numai dacă suma din el este mai mică decât valoarea lui X . Este adevărat ce susține N. H.?

Bibliography



Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.



Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.



Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.



Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.



Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.