

## Cursul 9

### Limite de funcții. Continuitatea funcțiilor

Asemenea conceptului de convergență/divergență la șiruri sau serii numerice, noțiunile de limită și continuitate pentru funcții sunt intrinsec legate de structura topologică a spațiului din care provin mulțimile de definiție și în care iau valori respectivele funcții. Pe mulțimi amorfe, netopologizate, aplicațiilor definite nu li se poate introduce noțiunea de limită într-un punct și, în absența acesteia, nici noțiunea de continuitate într-un punct sau/și pe o mulțime. Aceasta deoarece punctul și, implicit, mulțimea de puncte în cauză, trebuind să fie "de acumulare" (în cazul punctului) și, respectiv, "derivată" (în cazul mulțimii), necesită prezența unei structuri topologice atât pentru mulțimea de definiție, cât și pentru mulțimea în care ia valori aplicația (funcția) vizată. Cum, în situația funcțiilor reale, fie ele scalar-scalar, scalar-vectoriale, vectorial-scalar sau vectorial-vectoriale (v. Cursul 7), impedimentul inexistenței unei topologii pe oricare dintre mulțimile implicate nu are loc, se poate vorbi despre limita unor astfel de funcții într-un punct de acumulare al mulțimii lor de definiție, precum și despre continuitatea lor într-un punct sau pe o mulțime de puncte din mulțimea lor de definiție. Este exact ceea ce ne propunem aici, în cele ce urmează.

#### Limite de funcții (în cadru general și în spațiul $\mathbb{R}^n$ )

Fie  $(X, \tau_1)$  și  $(Y, \tau_2)$  două spații topologice,  $f : A \subseteq X \rightarrow Y$  o funcție și  $x_0$  un punct de acumulare al mulțimii  $A$  (în raport, evident, cu topologia  $\tau_1$ ). Așadar  $x_0 \in A'$ , unde  $A'$  este mulțimea derivată corespunzătoare lui  $A$ , adică mulțimea tuturor punctelor sale de acumulare (în raport cu  $\tau_1$ ).

**Definiția 9.1** *Spunem că **funcția  $f$  are limită în  $x_0$** , fie ea  $l \in Y$ , dacă, pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $l$  ( $V \in \mathcal{V}(l)$ ), există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$  ( $U \in \mathcal{V}(x_0)$ ), astfel încât:*

$$\forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A \implies f(x) \in V.$$

Îndeobște, acest fapt se notează prin  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{\tau_2}{=} l$  sau, echivalent, prin  $f(x) \xrightarrow{\tau_2} l$ , când  $x \xrightarrow{\tau_1} x_0$ .

Ori de câte ori se subînțelege în ce topologie are loc una sau / și cealaltă dintre convergențele ce definesc faptul că  $l \in Y$  este limita funcției  $f : A \subseteq X \rightarrow Y$  în punctul  $x_0 \in A$ , se va folosi notația mai simplă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  sau echivalența ei:  $f(x) \rightarrow l$ , când  $x \rightarrow x_0$ .

Definiția 9.1 nu-și modifică semnificația dacă, atât pentru  $x_0$ , cât și pentru  $l$ , în locul sistemelor generale de vecinătăți  $\mathcal{V}(x_0)$  și respectiv  $\mathcal{V}(l)$ , se consideră sisteme fundamentale de vecinătăți (v. Definiția 6.7, a)). Astfel, avem:

**Definiția 9.2** *Funcția  $f : A \subseteq (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  are limita  $l \in Y$  în punctul  $x_0 \in A'$  dacă*

$$\forall \tilde{V} \in \mathcal{U}(l), \exists \tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0) \text{ astfel încât, } \forall x \in (\tilde{U} \setminus \{x_0\}) \cap A, f(x) \in \tilde{V},$$

*unde  $\mathcal{U}(l)$  și  $\mathcal{U}(x_0)$  sunt sisteme fundamentale de vecinătăți pentru  $l$  și respectiv  $x_0$ .*

**Propoziția 9.1** *Definițiile 9.1 și 9.2 sunt echivalente.*

**Demonstrație:** Să admitem, pentru început, că are loc Definiția 9.1. Considerând o vecinătate oarecare  $\tilde{V}$ , din sistemul fundamental  $\mathcal{U}(l)$ , avem  $\tilde{V} \in \mathcal{V}(l)$ , deoarece  $\mathcal{U}(l) \subseteq \mathcal{V}(l)$ . Atunci, în conformitate cu Definiția 9.1, pentru  $\tilde{V}$ , există  $U \in \mathcal{V}(x_0)$ , așa încât,  $\forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$ , avem  $f(x) \in \tilde{V}$ . În același timp, întrucât  $\mathcal{U}(x_0)$  este un sistem fundamental de vecinătăți pentru  $x_0$ , se poate conta pe faptul că, pentru  $U \in \mathcal{V}(x_0)$ , există  $\tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0)$  așa încât  $\tilde{U} \subseteq U$ .

Atunci,  $\forall \tilde{V} \in \mathcal{U}(l)$  avem  $x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$  și deci  $f(x) \in \tilde{V}$ . Așadar,  $\forall \tilde{V} \in \mathcal{U}(l)$ ,  $\exists \tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0)$  astfel încât  $\forall x \in (\tilde{U} \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in \tilde{V}$ . Adică are loc Definiția 9.2.

Reciproc, presupunând că are loc Definiția 9.2 și considerând o vecinătate arbitrară  $V$  a lui  $l$  ( $V \in \mathcal{V}(l)$ ), se poate deduce că, întrucât  $\mathcal{U}(l)$  este un sistem fundamental de vecinătăți pentru  $l$ , există  $\tilde{V} \subseteq V$ , cu  $\tilde{V} \in \mathcal{V}(x_0)$  (deci, la urma urmelor,  $\tilde{U}$  din  $\mathcal{V}(x_0)$ ) așa încât, pentru orice  $x \in (\tilde{U} \setminus \{x_0\}) \cap A$ , avem  $f(x) \in \tilde{V}$ . Deci are loc Definiția 9.1. ◀

**Observație:** Prin negarea oricăreia dintre definițiile echivalente 9.1 și 9.2, se obține o caracterizare a situației în care elementul  $l$  din  $Y$  nu este limita funcției  $f : A \subseteq (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  în punctul  $x_0 \in A'$ . Astfel, de exemplu, pe baza negației relative la Definiția 9.1, deducem că  $l \in Y$  nu este  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  dacă și numai dacă există  $V_0 \in \mathcal{V}(l)$  astfel încât, pentru orice  $U \in \mathcal{V}(x_0)$ , există  $x_U \in (\tilde{U} \setminus \{x_0\}) \cap A$ , cu proprietatea că  $f(x_U) \notin V_0$ . Notăm acest lucru prin:  $f(x) \nrightarrow l$ , când  $x \rightarrow x_0$ .

**Definiția 9.3** Se spune că **funcția**  $f : A \subseteq (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  **are limită** într-un punct  $x_0 \in A'$  dacă există  $l \in Y$  astfel încât, în conformitate cu Definiția 9.1 (sau echivalent, Definiția 9.2), avem  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

În cazul în care topologiile  $\tau_1$  și  $\tau_2$  sunt induse de niște metrici,  $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  și respectiv  $d_2 : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  (adică  $(X, d_1)$  și  $(Y, d_2)$  sunt spații metrice), am putea considera mulțimile sferelor (deschise) din  $X$  și, corespunzător,  $Y$  în rolul sistemelor fundamentale de vecinătăți din Definiția 9.2. Atunci am avea următoarea formulare în postura Definiției 9.2.

**Definiția 9.4** Fie  $f : A \subseteq (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ ,  $x_0 \in A'$  și  $l \in Y$ , unde  $d_1$  este o metrică pe  $X$ , iar  $d_2$  o metrică pe  $Y$ . Elementul  $l$  este **limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  dacă  $\forall S_{d_2}(l; \varepsilon)$ ,  $\exists S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$  astfel încât  $\forall x \in (S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \cap A$  are loc:  $f(x) \in S_{d_2}(l, \varepsilon)$ .

Altfel spus, ținând seama de semnificația mulțimilor  $S_{d_2}(l; \varepsilon)$  și  $S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$ , elementul  $l$  este limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  dacă și numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ așa încât, } \forall x \in A \text{ pentru care } 0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon), \text{ rezultă } d_2(f(x), l) < \varepsilon.$$

Pentru situația în care  $X$  și  $Y$  ar fi înzestrate cu norme,  $\|\cdot\|_X$  pe  $X$  și  $\|\cdot\|_Y$  pe  $Y$ , adică pentru cazul în care  $(X, \|\cdot\|_X)$  și  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  ar fi spații normate, distanțele  $d_1$  și  $d_2$  ar fi definite prin intermediul normelor  $\|\cdot\|_X$  și  $\|\cdot\|_Y$ , iar Definiția 9.4 ar avea următorul enunț:

**Definiția 9.5** Fie  $f : A \subseteq (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ ,  $x_0 \in A'$  și  $l \in Y$ . Avem  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ așa încât, } \forall x \in A \text{ pentru care } 0 < \|x - x_0\|_X < \delta(\varepsilon), \text{ rezultă } \|f(x) - l\|_Y < \varepsilon.$$

**Observație:** Când  $X = \mathbb{R}^n$  și  $Y = \mathbb{R}^m$  (cu  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ), oricare dintre definițiile 9.1 - 9.5 funcționează în raport cu diverse topologii,  $\tau_1$  pe  $\mathbb{R}^n$  și  $\tau_2$  pe  $\mathbb{R}^m$  (cum ar fi, de pildă, topologiile uzuale), ori în raport cu diverse metrici,  $d_1$  pe  $\mathbb{R}^n$  și  $d_2$  pe  $\mathbb{R}^m$  (cum sunt, de exemplu, metricile euclidiană și minkowskiană, de ordin  $p \in (0, +\infty)$ ) sau în raport cu diferite norme,  $\|\cdot\|_{\#}$  pe  $\mathbb{R}^n$  și  $\|\cdot\|_{\circ}$  pe  $\mathbb{R}^m$ .

În cazul în care  $X$  și  $Y$  sunt spații metrice, limita  $l$  este, după cum se poate arăta, unică. Astfel, are loc următorul rezultat:

**Teorema 9.1** Fie  $(X, d_1)$  și  $(Y, d_2)$  două spații metrice,  $A \subseteq X$  ( $A \neq \emptyset$ ),  $x_0 \in A'$  și  $f : A \rightarrow Y$ . Dacă există, atunci limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este unică.

**Demonstrație:** Admitem că există  $l_1$  și  $l_2$  în  $Y$ ,  $l_1 \neq l_2$ , așa încât  $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Cum  $l_1 \neq l_2$ , avem  $d_2(l_1, l_2) > 0$ . Atunci, luând  $\epsilon = \frac{d_2(l_1, l_2)}{3}$  în Definiția 9.4, rezultă că există  $\delta(\epsilon) > 0$ , astfel încât, pentru orice  $x \in A$ , cu  $d_1(x, x_0) < \delta(\epsilon)$ , are loc relația:  $d_2(f(x), l_1) < \frac{d_2(l_1, l_2)}{3}$ . În același timp, există  $\tilde{\delta}(\epsilon) > 0$ , astfel încât, pentru orice  $x \in A$ , cu  $d_1(x, x_0) < \tilde{\delta}(\epsilon)$ , are loc:  $d_2(f(x), l_2) < \frac{d_2(l_1, l_2)}{3}$ . În consecință, pentru  $\epsilon = \frac{d_2(l_1, l_2)}{3} > 0$ , există  $\hat{\delta}(\epsilon) = \min\{\delta(\epsilon), \tilde{\delta}(\epsilon)\}$ , astfel încât, pentru orice  $x \in A$ , cu  $d_1(x, x_0) < \hat{\delta}(\epsilon)$ , au loc, simultan, relațiile  $d_2(f(x), l_1) < \frac{d_2(l_1, l_2)}{3}$  și  $d_2(f(x), l_2) < \frac{d_2(l_1, l_2)}{3}$ . Cum  $d_2(l_1, l_2) \leq d_2(f(x), l_1) + d_2(f(x), l_2)$ , s-ar ajunge la anomalia:  $d_2(l_1, l_2) < \frac{2d_2(l_1, l_2)}{3}$ . Așadar, de fapt, elementul  $l_1$  trebuie să fie egal cu  $l_2$  și nu diferit. ◀

Tot în cadrul spațiilor metrice, are loc următoarea caracterizare a existenței limitei unei funcții într-un punct.

**Teorema 9.2** Fie  $f : A \subseteq (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ ,  $x_0 \in A'$  și  $l \in Y$ . Avem  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  dacă și numai dacă

$$\forall (x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}, \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ are loc } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l.$$

**Demonstrație:** Dacă  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , atunci, potrivit Definiției 9.4,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât,  $\forall x \in A$ , cu  $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ , avem  $d_2(f(x), l) < \varepsilon$ . Deoarece  $x_0$  este punct de acumulare pentru  $A$ , în conformitate cu Propoziția 6.9, există cel puțin un șir  $(x_n)_{n \geq 0}$ , din  $A \setminus \{x_0\}$ , așa încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . De altfel, pentru orice șir  $(x_n)_{n \geq 0}$  cu elemente din  $A \setminus \{x_0\}$  și cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , avem: pentru  $\tilde{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$ , există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$  cu  $n \geq n_\varepsilon$ , are loc relația  $d_1(x_n, x_0) < \tilde{\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$ . În virtutea acesteia, avem  $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$ . Prin urmare, combinând faptul că  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  cu faptul că  $x_n \rightarrow x_0$ , pentru  $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ , am obținut:  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$ . Asta înseamnă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ .

Reciproc, presupunând că,  $\forall (x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ , cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$  și, totodată, prin reducere la absurd, admitând că  $f(x) \nrightarrow l$ , când  $x \rightarrow x_0$ , adică există  $\epsilon_0 > 0$ , așa încât,  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists x_\delta \in A \setminus \{x_0\}$ , cu  $d_1(x_\delta, x_0) < \delta$  și  $d_2(f(x_\delta), l) \geq \epsilon_0$ , vedem că, pentru  $\delta = \frac{1}{n}$ , cu  $n$  arbitrar din  $\mathbb{N}^*$ , există  $x_n$  în  $A \setminus \{x_0\}$ , așa încât  $d_1(x_n, x_0) < \delta$  și  $d_2(f(x_n), l) \geq \epsilon_0 > 0$ . Deducem astfel că există un șir  $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$  încât  $x_n \rightarrow x_0$ , pentru  $n \rightarrow \infty$  și totuși  $f(x_n) \nrightarrow l$ , când  $n \rightarrow \infty$ , în contradicție cu ipoteza. Prin urmare, în realitate,  $f(x) \xrightarrow{\tau_{d_2}} l$ , când  $x \xrightarrow{\tau_{d_1}} x_0$ . ◀

### Observații:

- 1) Funcția  $f : A \subseteq (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$  nu are limită într-un punct  $x_0 \in A'$  ori de câte ori putem pune în evidență un șir  $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ , cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , pentru care șirul  $(f(x_n))_{n \geq 0} \subseteq Y$  nu are limită.
- 2) Atunci când se pot determina două șiruri,  $(x'_n)_{n \geq 0}$  și  $(x''_n)_{n \geq 0}$ , din  $A \setminus \{x_0\}$ , cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$ , pentru care există  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = l_1 \in Y$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = l_2 \in Y$ , iar  $l_1 \neq l_2$ , putem susține că  $f$  nu are limită în punctul  $x_0 \in A'$ .

De exemplu, funcția  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

nu are limită în punctul  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ , punct care este de acumulare pentru  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Într-adevăr, pentru șirul  $((x'_n, y'_n))_{n \geq 1} = \left( \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right)_{n \geq 1}$ , convergent la  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$  (când  $n \rightarrow \infty$ ), avem

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = l_1, \text{ când } n \rightarrow \infty, \text{ în timp ce, pentru șirul } ((x''_n, y''_n))_{n \geq 1} =$$

$$\left( \left( \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \right)_{n \geq 1}, \text{ convergent și el la } \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, \text{ avem } f(x''_n, y''_n) = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0 = l_2 \neq l_1,$$

când  $n \rightarrow \infty$ .

**Propoziția 9.2** Fie  $(X, d_1)$  și  $(Y, d_2)$  spații metrice,  $\emptyset \neq A \subseteq X$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $f : A \rightarrow Y$  și  $g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Dacă

i) există  $l \in Y$  astfel încât  $d_2(f(x), l) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in A$

și

ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,

atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

**Demonstrație:** Pentru acest rezultat (care poate fi considerat un **criteriu pentru existența**, cu o anumită valoare, a **limitei unei funcții într-un punct**), demonstrația decurge, pe baza ipotezelor i) și ii), după cum urmează. Din ii), rezultă că  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât,  $\forall x \in (S_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \setminus \{x_0\}) \cap A$  (adică  $\forall x \in A$ , cu  $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ ), avem  $0 < g(x) < \varepsilon$ . Folosind și i), deducem că  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât,  $\forall x \in A$ , cu  $0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ , avem  $0 \leq d_2(f(x), l) \leq g(x) < \varepsilon$ . Cu alte cuvinte,  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . ◀

Un **alt criteriu** pentru existența limitei unei funcții într-un punct, în cadrul spațiilor metrice, este cel prezentat de teorema ce urmează:

**Teorema 9.3 (Cauchy-Bolzano)**

Fie  $(X, d_1)$  un spațiu metric,  $(Y, d_2)$  un spațiu metric complet,  $\emptyset \neq A \subseteq X$ ,  $x_0 \in A'$  și  $f : A \rightarrow Y$ . Funcția  $f$  are limită în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât  $\forall x', x'' \in A \setminus \{x_0\}$ , cu  $d_1(x', x_0) < \delta(\varepsilon)$  și  $d_1(x'', x_0) < \delta(\varepsilon)$ , avem

$$d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$$

**Demonstrație:** Dacă  $f$  are limită în  $x_0$ , atunci există  $l \in Y$  astfel încât  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , adică, potrivit Definiției 9.4 ( în limbajul " $\varepsilon - \delta$ " ), avem:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ așa încât } \forall x \in A, \text{ cu } 0 < d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \implies d_2(f(x), l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici, luând  $x'$  și  $x''$  din  $A \setminus \{x_0\}$ , așa încât  $d_1(x', x_0) < \delta(\varepsilon)$  și  $d_1(x'', x_0) < \delta(\varepsilon)$ , obținem:  $d_2(f(x'), f(x'')) \leq d_2(f(x'), l) + d_2(f(x''), l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Prin urmare, tocmai caracterizarea din enunț.

Reciproc, dacă are loc caracterizarea din enunț, pentru existența limitei lui  $f$  în  $x_0$ , deducem că, pentru orice șir  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$  care este convergent la  $x_0$ , avem:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  și  $\exists n_\varepsilon = n(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}^*$ , așa încât,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , cu  $n \geq n_\varepsilon$  și  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  cu  $m \geq n_\varepsilon$ , au loc relațiile  $d_1(x_n, x_0) < \delta(\varepsilon)$  și  $d_1(x_m, x_0) < \delta(\varepsilon)$ , pe baza cărora rezultă că  $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ .

Reținem de aici că, în condițiile în care  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$  este un șir convergent la  $x_0$ , șirul  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  este un șir Cauchy în  $Y$ . Cum  $(Y, d)$  este un spațiu metric complet, rezultă că șirul  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  este convergent. Fie  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in Y$ . Tot condiția Cauchy din enunț ne asigură că  $l$  este limita șirului  $(f(x_n))_{n \geq 1}$ , pentru orice șir  $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq A \setminus \{x_0\}$  care este convergent la  $x_0$ . Aceasta deoarece, dacă, prin absurd, ar exista  $(x'_n)_{n \geq 1}$  și  $(x''_n)_{n \geq 1}$  din  $A \setminus \{x_0\}$ , șiruri convergente la  $x_0$  (în  $X$ ), astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = l_1 \neq l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ , atunci, prin folosirea condiției menționate, ar rezulta:  $0 \leq d_2(l_1, l_2) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ . Deci  $l_1 = l_2$ . ◀

**Propoziția 9.3** Fie  $f : A \subseteq (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ ,  $A \neq \emptyset$  și  $x_0 \in A'$ . Dacă  $f$  are limită în punctul  $x_0$ , atunci există o vecinătate  $V_0$  a lui  $x_0$  încât restricția funcției  $f$  la  $(A \cap V_0) \setminus \{x_0\}$  este mărginită.

**Demonstrație:** Utilizând Definiția 9.4 (cu vecinătăți sferice), deducem că dacă  $f$  are limita  $l \in Y$  în punctul  $x_0$ , atunci, pentru  $S_{d_2}(l, 1)$ , există  $V_0 = S_{d_1}(x_0, \delta(1)) \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât, pentru orice  $x$  din  $A \cap (V_0 \setminus \{x_0\})$ , avem  $f(x) \in S_{d_2}(l, 1)$ , adică  $d_2(f(x), l) \leq 1$ , ceea ce înseamnă că  $f|_{(A \cap V_0) \setminus \{x_0\}}$  este mărginită. ◀

**Propoziția 9.4** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric,  $(Y, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -spațiu normat,  $\emptyset \neq A \subseteq X$ ,  $x_0 \in A'$  și  $f : A \rightarrow Y$ .

- i) Dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci există și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = \|l\|$ .
- ii) Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{0}_Y$ .
- iii) Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq \mathbf{0}_Y$ , atunci există  $V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât  $f(x) \neq \mathbf{0}_Y, \forall x \in (A \cap V_0) \setminus \{x_0\}$ .

**Demonstrație:** i) Faptul că există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  implică, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , existența unui  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \in A$ , cu  $0 < d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ , avem  $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ . Dar cum  $|\|f(x)\| - \|l\|| \leq \|f(x) - l\|$ , deducem că  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  așa încât  $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ , cu  $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ , avem  $|\|f(x)\| - \|l\|| < \varepsilon$ . Deci există  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = \|l\|$ .

ii) Cum  $\|f(x) - \mathbf{0}_Y\| = \|f(x)\|, \forall x \in A$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = 0$ , prin aplicarea Propoziției 9.2 și a Teoremei 9.1, rezultă că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  există și este egală cu  $\mathbf{0}_Y$ .

iii) Întrucât  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \mathbf{0}_Y$ , atunci  $\|l\| > 0$  și, pentru  $\varepsilon = \|l\|$ , există  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât  $\forall x \in (S_d(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap A) \setminus \{x_0\}$ , avem  $\|f(x) - l\| < \|l\|$ , de unde:  $\|f(x)\| \leq \|f(x) - l\| < 2\|l\|$ . Există deci  $V_0 = S_d(x_0, \delta(\|l\|))$ , astfel încât  $f$  este mărginită pe  $(V_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$  și diferită de  $\mathbf{0}_Y$ , întrucât, în conformitate cu i), avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = \|l\| \neq 0$ , ceea ce înseamnă că, cel puțin pe o submulțime a lui  $V_0$ , tot din  $\mathcal{V}(x_0)$ ,  $f$  nu se anulează. ◀

**Propoziția 9.5** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric,  $(Y, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -spațiu normat,  $\emptyset \neq A \subseteq X$  și  $x_0 \in A'$ .

- i) Dacă  $f, g : A \rightarrow Y$  sunt astfel încât există  $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , atunci, pentru orice  $\alpha$  și  $\beta \in \mathbb{R}$ , funcția  $\alpha f + \beta g$  are limită în punctul  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f + \beta g) = \alpha l_1 + \beta l_2.$$

- ii) Dacă  $f : A \rightarrow Y$  și  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$  sunt astfel încât există  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ ,

atunci funcția  $\varphi \cdot f : A \rightarrow Y$  are limită în punctul  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\varphi \cdot f)(x) = \alpha \cdot l.$$

**Demonstrație:** i) Se ține seama că  $\|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha l_1 - \beta l_2\| \leq |\alpha| \|f(x) - l_1\| + |\beta| \|g(x) - l_2\|$  și se aplică existența limitelor  $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

ii) Se are în vedere faptul că  $\|\varphi(x)f(x) - \alpha l\| = \|(\varphi(x) - \alpha) + \alpha(f(x) - l)\| \leq \|f(x)\| \|\varphi(x) - \alpha\| + |\alpha| \|f(x) - l\|$  și se aplică, odată cu caracterizarea existenței limitelor implicate (în limbajul " $\varepsilon - \delta$ "), Propoziția 9.3. ◀

**Observație:** Atât teoremele 9.1 - 9.3, cât și propozițiile 9.1 - 9.5 se aplică și cazului funcțiilor reale, în care, în particular,  $X = \mathbb{R}^k$  și  $Y = \mathbb{R}^m$ , aceste spații fiind, după caz, privite ca niște spații metrice sau normate în mod corespunzător.

Un rezultat specific funcțiilor reale cu valori în  $\mathbb{R}^n$  este următorul.

**Teorema 9.4** Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in A'$  și  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , unde  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\forall i = \overline{1, m}$ . Atunci  $f$  are limita  $l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$  în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă există simultan  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i$ ,  $\forall i = \overline{1, m}$ .

**Demonstrație:** Rezultatul acesta se obține pe baza Teoremei 9.2, de caracterizare a limitei lui  $f$  în  $x_0$  prin șiruri și pe baza faptului că, în  $\mathbb{R}^k$  și  $\mathbb{R}^m$ , convergența unui șir de elemente echivalează cu convergența lui pe coordonate. ◀

**Teorema 9.5 (Principiul substituției)**

Fie  $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$  spații metrice,  $\emptyset \neq A \subseteq X$ ,  $\emptyset \neq B \subseteq Y$ ,  $x_0 \in A'$ ,  $y_0 \in B'$ ,  $f : A \rightarrow B$  și  $g : B \rightarrow Z$ . Dacă:

$$j) \ y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

$$jj) \ f(x) \neq y_0, \forall x \in A \setminus \{x_0\} \text{ și}$$

$$jjj) \ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \in Z,$$

atunci funcția compusă  $g \circ f : A \rightarrow Z$  are limită în punctul  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l.$$

**Demonstrație:** Cum  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$ , rezultă că  $\forall W \in \mathcal{V}(l)$ ,  $\exists V$  din  $\mathcal{V}(y_0)$  așa încât  $\forall y \in (V \setminus \{y_0\}) \cap B$ , avem  $g(y) \in W$ . În același timp, deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  și  $f$  ia valori în  $B \setminus \{y_0\}$ , înseamnă că, pentru  $V$ , există  $U \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel încât, pentru orice  $x$  din  $(U \setminus \{x_0\}) \cap A$ , să avem  $f(x) \in (V \setminus \{y_0\}) \cap B$ . Prin urmare,  $\forall W \in \mathcal{V}(l)$ ,  $\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$  așa încât, oricare ar fi  $x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$  să aibă imaginea sa prin  $g \circ f$  în  $W$ . Deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l$ . ◀

În afară de noțiunea de **limită globală** a unei funcții  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  (cu  $p, q \in \mathbb{N}^*$ ) într-un punct  $x_0 \in A'$ , noțiune introdusă prin una dintre definițiile 9.1 - 9.5, există, în cazul unei astfel de funcții reale, când  $p \geq 2$ , și conceptul de **limită iterată**, definită după cum urmează.

Pentru funcția vectorială de  $p$  variabile reale ( $p \geq 2$ )  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , fie **funcțiile** sale **parțiale**

$$f_{[k]} : x_k \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_p), \forall k = \overline{1, p}$$

care sunt definite pe  $A_{[k]} = \{x_k \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2, \dots, x_p) \in A\}$  și cu valori în  $\mathbb{R}^q$ ,  $\forall k = \overline{1, p}$ .

În cazul în care  $x_k^0$  este un punct de acumulare al mulțimii  $A_{[k]}$  ( $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ ), se poate vorbi despre existența limitei  $\lim_{x_k \rightarrow x_k^0} f_{[k]}(x_k)$  care ar fi să fie un element din  $\mathbb{R}^q$  ce depinde parametric de celelalte variabile  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p$ . S-ar putea apoi considera limita

$$\lim_{x_j \rightarrow x_j^0} \left( \lim_{x_k \rightarrow x_k^0} f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_p) \right), k, j \in \{1, 2, \dots, p\}$$

Aceasta va depinde de celelalte  $p - 2$  variabile ( $i = \overline{1, p}$ ) diferite de  $x_j$  și  $x_k$ . În fine, dacă se consideră limitele după toate variabilele  $x_i$  ( $i = \overline{1, p}$ ), luate pe rând, atunci

$$(*) \lim_{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0} \left( \lim_{x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0} \left( \dots \lim_{x_{i_p} \rightarrow x_{i_p}^0} f(x_1, x_2, \dots, x_p) \dots \right) \right), \text{ cu } \{i_1, i_2, \dots, i_p\} = \{1, 2, \dots, p\},$$

va reprezenta un element din  $\mathbb{R}^q$  care nu mai depinde de nici una dintre variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_p$ .

**Definiția 9.6** Limita  $(*)$  se numește **limita iterată a funcției**  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , **în punctul**  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) \in A'$ , **în ordinea**  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ .

**Observație:** Pentru o funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , se poate vorbi despre  $p!$  limite iterate, într-un punct  $x_0 \in A'$ . De exemplu, pentru cazul  $p = 3$ , limitele iterate în cauză sunt următoarele:

$$\begin{aligned} l_{123} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \left( \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \left( \lim_{x_3 \rightarrow x_3^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{132} = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \left( \lim_{x_3 \rightarrow x_3^0} \left( \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \\ l_{213} &= \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \left( \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \left( \lim_{x_3 \rightarrow x_3^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{231} = \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \left( \lim_{x_3 \rightarrow x_3^0} \left( \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \\ l_{312} &= \lim_{x_3 \rightarrow x_3^0} \left( \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \left( \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right), \quad l_{321} = \lim_{x_3 \rightarrow x_3^0} \left( \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \left( \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right). \end{aligned}$$

Acestea sunt limitele funcției  $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^q$  atunci când  $x_1, x_2$  și  $x_3$  tind succesiv la  $x_1^0, x_2^0$  și  $x_3^0$ , în fiecare dintre cele  $3!$  (adică 6) ordini  $(i_1, i_2, i_3)$  posibile.

**Propoziția 9.6** Dacă, pentru o funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , în  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0) \in A'$ , există atât o limită iterată  $l_{i_1, i_2, \dots, i_p} = \lim_{x_{i_1} \rightarrow x_{i_1}^0} \left( \lim_{x_{i_2} \rightarrow x_{i_2}^0} \left( \dots \lim_{x_{i_p} \rightarrow x_{i_p}^0} f(x_1, x_2, \dots, x_p) \dots \right) \right)$ , cât și limita globală  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci  $l = l_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ .

**Demonstrație:** Existența limitei  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (unde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  și  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$ ) se interpretează prin aceea că,  $\forall \varepsilon > 0$ , există o vecinătate a lui  $x_0$ , fie ea notată cu  $U$ , astfel încât, pentru orice  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  din  $(U \cap A) \setminus \{x_0\}$ , avem  $\|f(x_1, x_2, \dots, x_p) - l\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$  (unde  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$  este o normă (de exemplu una euclidiană) pe  $\mathbb{R}^q$ ). De aici, prin trecere la limită, succesiv după  $x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \dots, x_{i_1}$ , la respectiv  $x_{i_p}^0, x_{i_{p-1}}^0, \dots$  și  $x_{i_1}^0$ , obținem, atâta timp cât există limita iterată  $l_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ , că are loc relația  $\|l_{i_1, i_2, \dots, i_p} - l\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon$ , ceea ce denotă că, datorită arbitrarității lui  $\varepsilon$ , avem  $l_{i_1, i_2, \dots, i_p} = l$ . ◀

**Observații:**

- a) Dacă funcția  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  are două limite iterate diferite într-un același punct  $x_0 \in A'$ , atunci  $f$  nu are limită globală în punctul respectiv.

- b) Dacă există numai o parte dintre limitele iterate ale unei funcții  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  într-un punct  $x_0 \in A'$ , nu înseamnă că există și celelalte limite iterate. Cu atât mai puțin că există limita globală a lui  $f$  în  $x_0$ .
- c) Chiar dacă toate limitele iterate există și sunt egale, nu se poate afirma că există limita globală. De exemplu, funcția  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , definită prin  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$ , are limitele iterate  $l_{12} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \left( \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) \right) = 0 = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \left( \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) \right) = l_{21}$ , dar nu și limita globală  $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} f(x_1, x_2)$ , deoarece există șirurile  $\left( \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$  și  $\left( \left( \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0)$  pentru care  $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = l_1$  și  $f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = l_2 \neq l_1$ .
- d) Pentru o funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , este posibil să nu existe limitele iterate într-un punct  $x_0 \in A'$  și totuși să existe limita globală, a lui  $f$ , în acel punct. Este, de exemplu, cazul funcției  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2}$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0 \text{ și } x_2 \neq 0\}$ . Pentru această funcție, nu există  $l_{12}$  și nici  $l_{21}$ , deoarece nu există  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ . În schimb, pe baza relației  $0 \leq |f(x_1, x_2)| = \left| (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_1 + x_2|$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in A$ , prin trecere la limită ( $(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)$ ), se obține faptul că există  $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} f(x_1, x_2) = 0$ .

Pentru o funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , pe lângă noțiunile de limită globală și limită iterată într-un punct  $x_0 \in A'$ , se mai poate vorbi despre *limită după o direcție dată* și *limită parțială* în  $x_0$ . În acest sens, are loc definiția care urmează.

**Definiția 9.7** a) Fie  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , unde  $A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in A'$  și  $u \in \mathbb{R}^p$ . Se spune că funcția  $f$  are **limită în  $x_0$ , după direcția  $u$** , dacă funcția  $t \mapsto f(x_0 + tu)$ , cu  $t \in \{t \geq 0 \mid x_0 + tu \in A\} \neq \emptyset$ , are limită în  $t = 0$ , adică dacă există  $l_u^0 \in \mathbb{R}^q$  astfel încât:

$$l_u^0 = \lim_{t \searrow 0} f(x_0 + tu).$$

- b) Când  $u = \mathbf{e}_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ , atunci  $l_{\mathbf{e}_k}^0$  se numește **limita parțială a funcției  $f$  în punctul  $x_0$** .

Nu pentru orice funcție se poate defini limita într-un punct după o direcție  $u$  sau  $\mathbf{e}_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ , deoarece mulțimea  $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid x_0 + tu \in A\}$ , respectiv mulțimea  $\{t \in \mathbb{R}_+ \mid x_0 + t\mathbf{e}_k \in A\}$ , ar putea fi mulțimea vidă sau 0 ar putea să nu fie punct de acumulare pentru asemenea mulțimi, ori, pur și simplu, să nu existe limita în cauză. Totuși, dacă există limita globală, atunci se poate vedea că există și limita după orice direcție, în conformitate cu următorul rezultat.

**Propoziția 9.7** Fie  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in A'$  și  $u \in \mathbb{R}^p$ , așa încât  $x_0$  să fie punct de acumulare și pentru mulțimea  $A \cap \{x_0 + tu \mid t \geq 0\} \neq \emptyset$ . Dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și este egală cu  $l \in \mathbb{R}^q$ , atunci există și  $\lim_{t \searrow 0} f(x_0 + tu) = l_u$  și avem  $l_u = l$ .

**Demonstrație:** Pentru orice șir  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ , cu  $t_n \rightarrow 0$ , când  $n \rightarrow \infty$ , avem  $x_n = x_0 + t_n u \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ . În plus, deducem că

$$l_u = \lim_{t_n \rightarrow 0} f(x_0 + t_n u) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l.$$





În particular, pentru  $u = \mathbf{e}_k$ , Propoziția 9.7 se referă la raportul dintre limita globală a lui  $f$  în  $x_0$  și limita parțială, de rang  $k$ , a lui  $f$  în  $x_0$ , precizând că, dacă există  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , atunci există și  $l_k = \lim_{t \searrow 0} f(x_0 + t\mathbf{e}_k)$  și  $l = l_k$ .

**Observație:** Existența limitei după una sau mai multe direcții (chiar și după toate direcțiile posibile) nu garantează existența limitei globale a unei funcții într-un punct. Astfel, de exemplu, funcția  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ , nu are, după cum am văzut deja, limită globală în punctul  $(0, 0)$ , dar are limită după orice direcție  $u \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ , căci:

$$\lim_{t \searrow 0} f(0 + tu_1, 0 + tu_2) = \lim_{t \searrow 0} \frac{t^2 u_1 u_2}{t^2 (u_1^2 + u_2^2)} = \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}.$$

Când  $u = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$  sau  $u = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , limitele parțiale ale acestei funcții în punctul  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$  sunt egale cu 0.

Pentru funcții reale de argument scalar  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  se poate vorbi și despre noțiunea de **limită laterală** într-un punct  $x_0 \in A'$ . Mai exact, dacă  $x_0 \in \mathbb{R}$  este un **punct de acumulare la stânga** pentru  $A$ , adică, prin definiție, punct de acumulare pentru mulțimea  $A \cap \{x < x_0\}$ , atunci spunem că  $f$  are **limită la stânga în**  $x_0$ , notată cu  $l_s$  (sau cu  $f(x_0^-)$ , ori  $f(x_0 - 0)$ ) dacă  $f|_{A \cap \{x < x_0\}}$  are limită globală în  $x_0$ , în sensul Definiției 9.1. Tot așa, dacă  $x_0$  este un **punct de acumulare la dreapta** pentru  $A$ , adică punct de acumulare al mulțimii  $\{x \in A \mid x > x_0\}$ , atunci se spune că  $f$  are limită la dreapta în  $x_0$ , notată cu  $l_d$  (sau cu  $f(x_0^+)$  ori  $f(x_0 + 0)$ ) dacă  $f|_{A \cap \{x > x_0\}}$  are limită (globală) în  $x_0$ , în sensul aceleiași Definiții 9.1. Evident, ținând seama de Teorema 9.2 și de definițiile de imediat-mai-sus pentru limitele la dreapta și la stânga (în cazul  $p = 1$ ), se poate face caracterizarea limitei laterale a unei funcții reale scalar-scalar sau scalar-vectoriale și prin intermediul șirurilor adecvat adaptate contextului.

Astfel, se poate arăta că  $l_s$  (respectiv  $l_d$ )  $\in \mathbb{R}^q$  este limita la stânga (respectiv la dreapta) a unei funcții  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  într-un punct  $x_0$  de acumulare la stânga (respectiv la dreapta) a lui  $A$  dacă și numai dacă, pentru orice șir strict crescător (respectiv descrescător)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq A$ , cu  $x_n \rightarrow x_0$ , are loc  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}^q} l_s$  (respectiv  $l_d$ ).

De asemenea, tot pe baza Teoremei 9.2, ca și în cazul funcțiilor reale scalar-scalar, se poate vedea că o funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  are limită (globală) într-un punct de acumulare  $x_0$  a lui  $A$  dacă și numai dacă există atât limita la dreapta (când este posibil), cât și limita la stânga (tot când este posibil) a lui  $f$  în  $x_0$  și cele două limite laterale sunt egale.

În general, din punct de vedere practic, pentru funcțiile reale scalar-scalar sau scalar-vectoriale (luate pe componente), calculul limitei într-un punct se realizează, mai ales în cazuri de nedeterminare, prin folosirea unor limite remarcabile (fundamentale), cum sunt următoarele:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln a} \quad (0 < a \neq 1); \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1;$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a \quad (0 < a \neq 1); \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = 1;$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^r - 1}{t} = r \quad (r \in \mathbb{R}); \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = 1.$$

## Continuitatea funcțiilor

După cum am menționat deja în introducere, continuitatea funcțiilor se leagă, conceptual, de noțiunea de structură topologică a spațiilor implicate în definirea acelor funcții. Mai precis, continuitatea unei funcții într-un punct al mulțimii ei de definiție sau pe o mulțime, parte proprie sau chiar improprie, dar nevidă, a mulțimii de definiție în cauză, este strâns legată de existența limitei în respectivul punct (corespunzător, în toate punctele submulțimii vizate) și de egalitatea valorii ei cu valoarea funcției în punct (respectiv, în punctele mulțimii considerate).

**Definiția 9.8** Fie  $(X, \tau_1)$  și  $(Y, \tau_2)$  două spații topologice, iar  $A$  o parte nevidă a lui  $X$ . De asemenea fie  $f : A \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in A$  și  $\tilde{A} \subseteq A$ , cu  $\tilde{A} \neq \emptyset$ .

- i) **Funcția**  $f$  se numește **continuuă în**  $x_0$  dacă există limita (globală) a lui  $f$  în  $x_0$  și valoarea acestei limite este egală cu  $f(x_0)$  sau dacă  $x_0$  este punct izolat al lui  $\tilde{A}$ .
- ii) **Funcția**  $f$  se spune că este **continuuă pe mulțimea**  $\tilde{A}$  dacă  $f$  este continuuă în orice punct al lui  $\tilde{A}$ .

Evident, ținând seama de toate cele precizate în legătură cu noțiunea de limită a unei funcții într-un punct, se pot da diverse caracterizări (în limbajul vecinătăților, în limbajul metricilor, în limbajul normelor, în limbajul " $\varepsilon - \delta$ ", în limbajul șirurilor) noțiunii de continuitate a lui  $f$  în  $x_0 \in A$ , prin înlocuirea lui  $l$  cu  $f(x_0)$ . În același timp, prin utilizarea lui  $f(x_0)$  în locul lui  $l$ , acolo unde este cazul, și rezultatele cuprinse în propozițiile și teoremele de până aici se pot reformula, în spiritul continuității lui  $f$  în  $x_0$  (fie global, în raport cu toate variabilele implicate, fie după o direcție, fie sub aspect de parțialitate).

**Definiția 9.9** O funcție  $f : A \subseteq (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$  care nu este continuuă într-un punct  $x_0 \in A$  se numește **funcție discontinuuă în**  $x_0$ , iar punctul  $x_0$  se numește **punct de discontinuitate** al lui  $f$ .

**Teorema 9.6 (de caracterizare a continuității unei funcții pe un spațiu metric)**

Fie  $(X, d_1)$  și  $(Y, d_2)$  două spații metrice, iar  $f : X \rightarrow Y$  o funcție. Atunci sunt echivalente următoarele afirmații:

- 1)  $f$  este continuuă pe  $X$ ;
- 2)  $\forall D \in \tau_{d_2} \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_{d_1}$ ;
- 3)  $\forall F \subseteq Y$ , cu  $Y \setminus F \in \tau_{d_2} \Rightarrow X \setminus f^{-1}(F) \in \tau_{d_1}$ ;
- 4)  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ .

**Demonstrație:** 1)  $\Rightarrow$  4) Fie  $A \in \mathcal{P}(X)$  și  $y \in f(\overline{A})$ . Există atunci  $x \in \overline{A}$  astfel ca  $y = f(x)$ . Cum  $x \in \overline{A}$ , potrivit Propoziției 6.7, există un șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq A$  așa încât  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\tau_{d_1}} x$ . Deoarece  $f$  este continuuă pe  $X$ , deci și în  $x$ , rezultă, în conformitate cu Teorema 9.2, că  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\tau_{d_1}} f(x) = y$ . Prin urmare, există un șir  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq f(A)$  așa încât  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\tau_{d_1}} y$ , ceea ce înseamnă că  $y \in \overline{f(A)}$ . Astfel, incluziunea  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  este arătată.

4)  $\Rightarrow$  3) Fie  $F$  o mulțime închisă din  $(Y, d_2)$ , adică  $F = \overline{F}$  în  $Y$  și fie  $A = f^{-1}(F)$ . Deoarece 4) are loc, avem:

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F.$$

De aici, rezultă că  $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq f^{-1}(F) = A$ . Cum  $A \subseteq \overline{A}$ ,  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ , reiese că  $A = \overline{A}$  ceea ce ne spune că  $f^{-1}(F)$  este închisă în  $X$ .

3)  $\Rightarrow$  2) Fie  $D \in \tau_{d_2}$ . Atunci  $Y \setminus D$  este închisă în  $Y$  și, prin 3),  $f^{-1}(Y \setminus D)$  este închisă în  $X$ . În consecință, mulțimea  $X \setminus f^{-1}(Y \setminus D)$ , adică  $X \setminus (f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(D)) = f^{-1}(D)$  este deschisă în  $X$ .

2)  $\Rightarrow$  1) Fie  $x_0$  arbitrar din  $X$ . Pentru a vedea că  $f$  este continuă în  $x_0$ , fie  $D = S_{d_2}(f(x_0), \varepsilon) \in \mathcal{V}(f(x_0))$ . Folosind 2), avem:  $f^{-1}(D) \in \tau_{d_1}$ . În plus,  $x_0 \in f^{-1}(D)$  (căci  $f(x_0) \in D$ ). Deci  $f^{-1}(D) \in \mathcal{V}(x_0)$ . Astfel, există o sferă deschisă  $S_{d_1}(x_0, \delta)$ , centrată în  $x_0$ , încât  $S_{d_1}(x_0, \delta) \subset f^{-1}(D)$ . De aici, reiese că  $f(S_{d_1}(x_0, \delta)) \subseteq D = S_{d_2}(f(x_0), \varepsilon)$ , ceea ce înseamnă că  $f$  este continuă în  $x_0$ . ◀

### Definiția 9.10 (Prelungirea prin continuitate a unei funcții)

Fie  $(X, d_1)$  și  $(Y, d_2)$  două spații metrice,  $A \subseteq X$ ,  $A \neq \emptyset$  și  $x_0 \in A \cap A'$ . De asemenea, fie  $f : A \setminus \{x_0\} \rightarrow Y$ , pentru care există  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in Y$ . Atunci funcția  $\tilde{f} : A \rightarrow Y$ , definită prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \{x_0\} \\ l, & \text{dacă } x = x_0 \end{cases},$$

se numește **prelungire a lui  $f$  la  $A$ , prin continuitate în punctul  $x_0$** .

Aceasta întrucât  $\tilde{f}$  este continuă în  $x_0$ , grație faptului că  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \tilde{f}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l = \tilde{f}(x_0)$ .

**Definiția 9.11** a) O aplicație  $f$  a unui spațiu metric  $(X, d_1)$  în alt spațiu metric  $(Y, d_2)$  se numește **homeomorfism** sau **izomorfism topologic** dacă  $f$  este bijectie, iar  $f$  și  $f^{-1}$  sunt continue pe  $X$  și respectiv  $Y$  (altfel spus,  $f$  este o **bijectie bicontinuă**).

b) Două spații metrice  $(X, d_1)$  și  $(Y, d_2)$  se numesc **homeomorfe** dacă există un homeomorfism  $f : X \rightarrow Y$ .

**Observație:** Orice izometrie  $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ , adică orice bijectie care păstrează distanțele este un homeomorfism de la  $X$  la  $Y$ , fiind, evident, bicontinuă. În particular, orice translație  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  este un homeomorfism, fiind o izometrie.

**Definiția 9.12** Fie  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^p$  și  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Funcția  $f$  se numește **uniform continuă** pe o mulțime  $\tilde{A} \subseteq A$  dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \text{ încât } \forall x', x'' \in \tilde{A}, \text{ cu } \|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon, \text{ are loc}$$

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

**Propoziția 9.8** O funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  uniform continuă pe o mulțime  $\tilde{A} \subseteq A$  este, în mod necesar, continuă pe  $\tilde{A}$  și deci continuă în fiecare punct din  $\tilde{A}$ .

**Demonstrație:** Luând, în Definiția 9.12, unul din punctele  $x'$  și  $x''$  fixate pe moment (de exemplu  $x'' = x_0 \in \tilde{A}$ ), deducem lesne că  $f$  este continuă în  $x_0$ . Cum  $x_0$  este arbitrar fixat în  $\tilde{A}$ , conchidem că  $f$  este continuă pe  $\tilde{A}$ , fapt consemnat prin notația  $f \in \mathcal{C}(\tilde{A}; \mathbb{R}^q)$ . ◀

### Observații:

a) Reciproca Propoziției 9.8 nu este adevărată, întrucât există funcții continue (pe o mulțime) care nu sunt uniform continue (pe respectiva mulțime).

- b) Dacă o funcție reală, cu valori vectoriale este uniform continuă pe o mulțime (parte a mulțimii ei de definiție), atunci și funcțiile ei componente sunt uniform continue pe acea mulțime. Nu și reciproc.

**Definiția 9.13** a) O funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  se numește **lipschitziană** dacă există  $L \in \mathbb{R}_+^*$  astfel încât

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq L\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}, \forall x', x'' \in A.$$

- b) O funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  se numește **hölderiană**, de ordin  $\alpha \in (0, 1]$ , dacă există  $M \in \mathbb{R}_+^*$  așa încât

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq M\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}^\alpha, \forall x', x'' \in A.$$

**Observație:** Orice funcție lipschitziană este o funcție hölderiană de ordin  $\alpha = 1$ .

**Teorema 9.7** Orice funcție hölderiană  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  este uniform continuă pe  $A$ .

**Demonstrație:** Folosind Definiția 9.13, b), deducem că,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha} > 0$ , astfel încât,  $\forall x', x'' \in A$ , cu  $\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p} < \delta_\varepsilon$ , are loc relația:

$$\|f(x') - f(x'')\|_{\mathbb{R}^q} \leq M\|x' - x''\|_{\mathbb{R}^p}^\alpha < M\left(\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}\right)^\alpha = \varepsilon, \forall x', x'' \in A.$$

Deci  $f$  este uniform continuă pe  $A$ . ◀

### Proprietăți ale funcțiilor continue pe mulțimi

**Teorema 9.8** O funcție continuă  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  transformă orice submulțime compactă  $\tilde{A} \subseteq A$  într-o mulțime  $f(\tilde{A})$  compactă.

**Demonstrație:** Reamintindu-ne că, fiind în spații finit dimensionale, mulțimea  $\tilde{A}$  este compactă dacă și numai dacă este mărginită și închisă, sau, în limbajul șirurilor, dacă orice șir din  $\tilde{A}$  conține cel puțin un subșir convergent, cu limita în  $\tilde{A}$ , deducem, pe baza continuității lui  $f$ , că imaginea prin  $f$  a respectivului subșir constituie un subșir al șirului  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ , convergent la imaginea prin  $f$  a limitei subșirului din  $\tilde{A}$ , punct ce se află în mulțimea  $f(\tilde{A})$ . Prin urmare, rezultă că, odată cu  $\tilde{A}$  și mulțimea  $f(\tilde{A})$  este compactă în  $\mathbb{R}^q$ . ◀

În cazul în care  $q = 1$ , de aici, obținem teorema lui Weierstrass și anume:

**Teorema 9.9** Fie  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  continuă, unde  $A$  este o mulțime compactă (în raport cu topologia uzuală pe  $\mathbb{R}^p$ ). Atunci funcția  $f$  este mărginită și își atinge efectiv marginile.

**Demonstrație:** Prin aplicarea Teoremei 9.8, rezultă că  $f(A)$  este o mulțime compactă în  $\mathbb{R}$ . Deci  $f(A)$  este mărginită și închisă (în raport cu topologia uzuală pe  $\mathbb{R}$ ). Fie  $m = \inf_{x \in A} f(x)$  și  $M = \sup_{x \in A} f(x)$ . Cum  $f(A)$  este închisă, reiese că  $m$  și  $M$  aparțin lui  $f(A) \subseteq \mathbb{R}$  și există  $x_m, x_M \in A$  astfel încât  $f(x_m) = m$  și  $f(x_M) = M$ . ◀

**Teorema 9.10 (Cantor)**

Dacă o funcție  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  este continuă pe o mulțime compactă  $\tilde{A} \subseteq A$ , atunci ea este uniform continuă pe  $\tilde{A}$ .

**Demonstrație:** Prin reducere la absurd, presupunem că  $f$  nu este uniform continuă pe  $\tilde{A}$ , adică:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \text{ așa încât } \forall \delta > 0, \exists x'_\delta, x''_\delta \in \tilde{A}, \text{ cu } \|x'_\delta - x''_\delta\|_{\mathbb{R}^p} < \delta \text{ și } \|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0,$$

unde  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$  și  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^q}$  sunt normele euclidiene uzuale. Atunci, pentru  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists x'_n, x''_n \in \tilde{A}$ , cu  $\|x'_n - x''_n\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{1}{n}$  și  $\|f(x'_n) - f(x''_n)\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0$ . Cum  $\tilde{A}$  este compactă în  $\mathbb{R}^p$ , șirul  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \tilde{A}$  conține un subșir convergent la un element  $\tilde{x} \in \tilde{A}$ . Din relația  $\|x'_{n_k} - x''_{n_k}\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{1}{n_k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , deducem că șirul  $(x''_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq \tilde{A}$  este convergent și el la  $\tilde{x} \in \tilde{A}$ . Astfel, în virtutea continuității lui  $f$ , obținem  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k})$ , ceea ce este în contradicție cu relația  $\|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\|_{\mathbb{R}^q} \geq \varepsilon_0 > 0$ . Prin urmare, presupunerea inițială este falsă, ceea ce înseamnă că, de fapt,  $f$  este uniform continuă pe mulțimea compactă  $\tilde{A}$ . ◀

Un alt rezultat important relativ la aplicațiile continue pe o mulțime este următorul, prezentat aici cu o schiță de demonstrație.

**Propoziția 9.9** Fie  $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  o funcție continuă pe  $A$  și  $B \subseteq A$  o mulțime conexă. Atunci  $f(B)$  este conexă în  $\mathbb{R}^q$ .

**Demonstrație:** Presupunând, prin absurd, că  $f(B)$  nu este conexă, există atunci două mulțimi nevide și deschise din  $\mathbb{R}^q$ ,  $D_1$  și  $D_2$ , astfel încât  $D_1 \cap D_2 \cap f(B) = \emptyset$ ,  $D_1 \cap f(B) \neq \emptyset$ ,  $D_2 \cap f(B) \neq \emptyset$  și  $f(B) \subseteq D_1 \cup D_2$ . Cum  $f$  este continuă pe  $A$ , mulțimile  $\tilde{D}_1 = f^{-1}(D_1)$  și  $\tilde{D}_2 = f^{-1}(D_2)$  sunt deschise în  $\mathbb{R}^p$ . În plus,  $\tilde{D}_1 \neq \emptyset$ ,  $\tilde{D}_2 \neq \emptyset$ ,  $\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 \cap B = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \cap B = f^{-1}(D_1 \cap D_2 \cap f(B)) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ,  $\tilde{D}_1 \cap B \neq \emptyset$ ,  $\tilde{D}_2 \cap B \neq \emptyset$  și  $B \subseteq f^{-1}(D_1 \cup D_2) \subseteq f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2) = \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$ . De aici, rezultă că  $B$  nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza din enunț. Prin urmare,  $f(B)$  este, în mod necesar, conexă. ◀

**Propoziția 9.10** Dacă  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  este o aplicație liniară, atunci  $f$  este continuă.

**Demonstrație:** Cum  $f$  este liniară de la  $\mathbb{R}^p$  la  $\mathbb{R}^q$ , considerând raportarea la bazele canonice din  $\mathbb{R}^p$  și  $\mathbb{R}^q$ , se poate spune că există o matrice  $A \in \mathcal{M}_{q \times p}(\mathbb{R})$  așa încât  $f(x) = Ax$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^p$ . De aici, prin utilizarea normelor euclidiene pe  $\mathbb{R}^p$  și  $\mathbb{R}^q$ , deducem că avem  $\|f(x)\| \leq \|A\| \|x\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^p$ , unde

$$\|A\| = \left\| (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \right\| = \left( \sum_{i,j=1}^{p,q} a_{ij}^2 \right)^{1/2}. \text{ În consecință, are loc relația}$$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|A\| \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^p,$$

în virtutea căreia rezultă că  $f$  este continuă (chiar uniform continuă) pe  $\mathbb{R}^p$ . ◀

## Bibliografie recomandată

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (cap. VI)*, Editura Polirom, Iași, 1998.
2. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferențial (cap. IV)*, Editura Tehnopress, Iași, 2005
3. C-tin Drăgușin, Octav Olteanu, Marinică Gavrila - *Analiză matematică (cap. V, vol I)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferențial (cap. 5)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.

**5.** V. Postolică - *Eficiență prin matematică aplicată. Analiză matematică (cap. 7)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.

**6.** M. Postolache - *Analiză matematică ( teorie și aplicații )*, Editura "Fair Partners", București, 2011.