Algoritmica Grafurilor - Cursul 12

Ianuarie 2019

Cuprins

1 Grafuri planare
- Proprietăţi elementare
- Desenarea grafurilor planare
- Separatori mici

Fie $G = (V, E)$ un graf şi $\mathcal{S}$ o suprafaţă (e.g., plan, sferă) din $\mathbb{R}^3$. O **reprezentare** a lui G pe $\mathcal{S}$ este un graf $G' = (V', E')$ astfel încât:

a) $G \cong G'$;

b) V' este o mulţime puncte distincte ale lui $\mathcal{S}$;

c) Orice muchie $e' \in E'$ este o curbă simplă (curbă Jordan) conţinută în $\mathcal{S}$ unindu-i extremităţile;

d) Orice punct din $\mathcal{S}$ este fie un nod al lui G' fie este conţinut în cel mult o muchie a lui G'.

Dacă $\mathcal{S}$ este un plan, atunci G este un **graf planar** şi G' este o **reprezentare planară** a lui G.
Dacă $\mathcal{S}$ este un plan şi G' este un graf satisfăcând constrângerile b), c) şi d) de mai sus, atunci G' se numeşte **graf plan**.

Grafuri planare - Proprietăţi elementare - Proiecţia stereografică

Lemă

Un graf este planar dacă şi numai dacă are o reprezentare pe o sferă.

Demonstraţie. Dacă G este planar, fie G' o reprezentare planară a lui G în planul π. Luăm un punct x în π şi considerăm o sferă $\mathcal{S}$ tangentă la π în x. Fie y punctul diametral opus lui x în $\mathcal{S}$. Considerăm $\varphi : \pi \to \mathcal{S}$ dată prin $\varphi(M) =$ punctul diferit de y în care dreapta My intersectează sfera, $\forall M \in \pi$. φ este o bijecţie şi astfel $\varphi(G')$ este o reprezentare a lui G pe $\mathcal{S}$.

Reciproc, dacă G are o reprezentare pe o sferă $\mathcal{S}$: luăm un punct y în $\mathcal{S}$, considerăm x, punctul diametral opus lui y pe $\mathcal{S}$, construim un plan tangent π la $\mathcal{S}$ în x, şi definim $\psi : \mathcal{S} \to \pi$ by $\psi(M) =$ punctul în care dreapta yM intersectează planul π, pentru orice $M \in \mathcal{S}$. Imaginea prin ψ a reprezentării lui G pe sferă, $\psi(G)$, este reprezentarea planară dorită a lui G. $\square$

Fie G un **graf plan**. Dacă ştergem punctele lui G din plan (nodurile şi muchiile sale), acesta este descompus într-o reuniune finită de **regiuni conexe** maximale din plan (oricare două puncte pot fi unite printr-o curbă simplă conţinută în acea regiune), care sunt numite **feţele** lui G.

Exact una dintre aceste feţe este nemărginită şi este numită faţa **exterioară**.

Fiecare faţă este caracterizată de mulţimea muchiilor care-i formează **frontiera**. Fiecare circuit al lui G împarte planul în exact două regiuni conexe, astfel fiecare muchie a unui circuit aparţine la exact două frontiere (la exact două feţe).

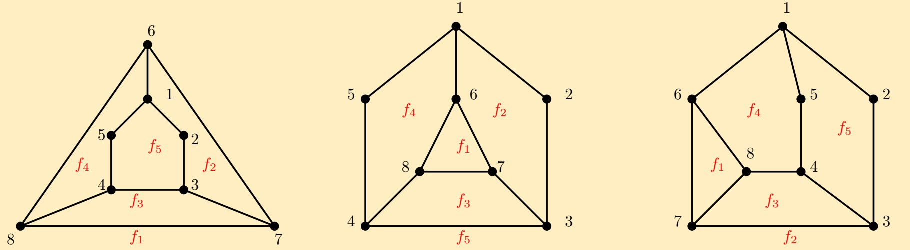
Un graf planar poate avea diferite reprezentări planare.

Lemă

Orice reprezentare planară a unui graf planar poate fi transformată într-o reprezentare planară diferită în care o faţă fixată a primei reprezentări să devină faţa exterioară a celei de-a doua.

Demonstraţie. Fie G' o reprezentare planară a lui G şi F o faţă a lui G'. Fie G^0 o reprezentare a lui G' pe o sferă şi F^0 faţa a lui G^0 corespunzând lui F. Alegem un punct y în interiorul lui F^0, x punctul său diametral opus pe sferă, şi π planul tangent în x la sferă.

$G'' = \psi(G^0)$ este o reprezentare a lui G în planul π având ca faţă exterioară $\psi(F^0)$. $\square$



Teoremă

(Formula lui Euler) Fie $G = (V, E)$ un graf conex plan cu n noduri, m muchii şi f feţe. Atunci,

$$\mathbf{f = m - n + 2}.$$

Demonstraţie. Inducţie după f.

Grafuri planare - Proprietăţi elementare - Euler's formula

Demonstraţie (continuare). Dacă $f = 1$, atunci G nu are circuite şi, deoarece este conex, este un arbore. Urmează că $m = n - 1$ şi teorema este adevărată.

În pasul inductiv să presupunem că teorema are loc pentru orice graf conex plan cu mai puţin de $f(\geqslant 2)$ feţe. Fie e o muchie de pe un circuit al lui G (există un astfel de circuit, deoarece $f \geqslant 2$). Atunci e aparţine frontierei a exact două feţe a lui G. Urmează că $G_1 = G - e$ este un graf conex plan cu n noduri, $m - 1$ muchii şi $f - 1$ feţe. Teorema are loc pentru G_1, deci $f - 1 = m - 1 - n + 2$, i. e., $f = m - n + 2$. $\square$

Remarcă

Din punct de vedere algoritmic, teorema de mai sus implică (vezi următoarele două corolarii) că orice planar graf este rar: dacă m este numărul de muchii şi n este numărul de noduri, atunci $m = \mathcal{O}(n)$.

Corolarul 1

Fie $G = (V, E)$ un graf conex planar cu $n \geqslant 3$ noduri şi m muchii. Atunci,

$$\mathbf{m \leqslant 3n - 6}.$$

Demonstraţie. Fie G' o reprezentare planară a lui G. Dacă G' are doar o faţă, atunci G este un arbore, $m = n - 1$, şi pentru $n \geqslant 3$ inegalitatea are loc.

Dacă G' are cel puţin două feţe, atunci fiecare faţă F a lui G' are în frontiera sa muchiile unui circuit C_F, şi fiecare astfel de muchie aparţine la exact două feţe. Orice circuit al lui G' are cel puţin trei muchii, astfel

$$2m \geqslant \sum_{F \text{ faţă a lui } G'} length(C_F) \geqslant \sum_{F \text{ faţă a lui } G'} 3 = 3f = 3(m-n+2),$$

Adică inegalitatea dorită. $\square$

Remarcă

Graful K_5 nu este planar (numărul său de noduri este $n = 5$, numărul său de muchii este $m = 10$ şi $10 > 3 \cdot 5 - 6$).

Corolarul 2

Fie $G = (V, E)$ un graf bipartit, planar şi conex cu $n \geqslant 3$ noduri şi $m \geqslant 3$ muchii. Atunci,

$$\mathbf{m \leqslant 2n - 4.}$$

Demonstraţie. Aceeaşi demonstraţie ca pentru Corolarul 1, dar folosind faptul că orice circuit al lui G' are cel puţin patru muchii. □

Remarcă

Graful $K_{3,3}$ nu este planar (numărul său de noduri este $n = 6$, numărul său de muchii este $m = 9$ şi $9 > 2 \cdot 6 - 4$).

Grafuri planare - Proprietăţi elementare - Euler's formula

Corolarul 3

Dacă $G = (V, E)$ este un graf conex planar, atunci există $v_0 \in V$ astfel încât

$$\mathbf{d_G(v_0) \leqslant 5}.$$

Demonstraţie. Putem să presupunem că G are cel puţin două muchii (altfel e banal). Fie G' o reprezentare planară a lui G cu n noduri şi m muchii. Dacă notăm cu n_i numărul de noduri de grad i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ atunci

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot n_i = 2m \leqslant 2(3n-6) = 6\left(\sum_i n_i\right) - 12 \Rightarrow \sum_i (i-6)n_i + 12 \leqslant 0.$$

Pentru $i \geqslant 6$ toţi termenii din această sumă sunt $\geqslant 0$, deci există $i_0 \leqslant 5$ astfel încât $n_{i_0} > 0$. $\square$

Fie $G = (V, E)$ un graf şi $v \in V$ astfel încât $d_G(v) = 2$ şi $vw_1, vw_2 \in E$, $w_1 \neq w_2$.
Fie $h(G) = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{vw_1, vw_2\} \cup \{w_1w_2\})$.

Lemă

G este planar dacă şi numai dacă $h(G)$ este planar.

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" Presupunem că $h(G)$ e planar.
Dacă $w_1w_2 \notin E$, atunci pe curba simplă care uneşte punctele corespunzând lui w_1 şi w_2 într-o reprezentare planară a lui $h(G)$ inserăm un punct nou corespunzând lui v; dacă $w_1w_2 \in E$ considerăm un punct nou corespunzând lui v "destul de aproape" de curba reprezentând w_1w_2 pe una dintre feţele reprezentării planare a lui $h(G)$ şi "unim" acest punct nou cu punctele corespunzând lui w_1 şi w_2 prin curbe simple care nu le intersectează pe cele deja existente.

Demonstraţie (continuare) "⇒" Reciproc, presupunem că G este planar.

În reprezentarea sa planară, ştergem punctul corespunzând lui v şi cele două curbe corespunzând muchiilor vw_1 şi vw_2 sunt înlocuite cu reuniunea lor; dacă $w_1w_2 \in E$, atunci curba simplă care-i corespunde este ştearsă. $\square$

Notăm cu $h^*(G)$ graful obţinut din G prin aplicarea repetată a transformăriih până se obţine un graf fără noduri de grad 2.

Urmează că G este planar dacă şi numai dacă $h^*(G)$ este planar.

Două grafuri G_1 şi G_2 sunt **homeomorfe** dacă $h^*(G_1) \cong h^*(G_2)$.

Teoremă

(Kuratowski, 1930) Un graf este planar dacă şi numai dacă nu conţine subgrafuri homeomorfe cu K_5 sau cu $K_{3,3}$.

Teoremă

(Fary, 1948, independent Wagner & Stein) Orice graf planar are o reprezentare planară cu toate muchiile segmente de dreaptă (**reprezentare Fary**).

Problemă: Să se determine o reprezentare Fary cu punctele reprezentând nodurile de coordonate întregi şi aria suprafeţei ocupată de reprezentare polinomială în n, numărul de noduri.

Teoremă

(Fraysseix, Pach, Pollack, 1988) Orice graf planar G cu n noduri are o reprezentare planară cu noduri în puncte cu coordonate întregi din $[0, 2n-4] \times [0, n-2]$ şi cu toate muchiile segmente de dreaptă.

Demonstraţie algoritmică. Vom schiţa o desenare în $\mathcal{O}(n \log n)$. Fără a restrânge generalitatea, vom presupune că G este **maximal planar**: $\forall e \in E(G)$, $G + e$ nu este planar (adăugăm muchii la G pentru a-l face maximal planar şi când aceste muchii (segmente) vor fi desenate le facem invizibile). Observăm că orice faţă a unui graf maximal planar este un triunghi şi are $3n-6$ muchii, unde n este numărul său de noduri.

Lema 1

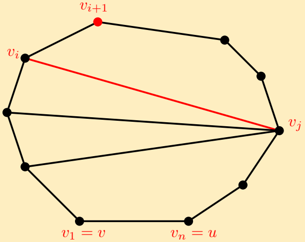
Fie G un graf planar şi G' o reprezentare planară a lui G. Dacă C' este un circuit al lui G' care trece prin muchia $uv \in E(G')$, atunci există $w \in V(C')$ astfel încât $w \neq u, v$ şi nu există nicio coardă interioară a lui C' cu o extremitate în w.

Demonstraţie. Fie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nodurile lui C' întâlnite într-o parcurgere de la u la v ($v = v_1$, $u = v_n$).

Demonstraţie (continuare). Dacă C' nu are corzi interioare, atunci lemma este adevărată. Altfel, alegem o pereche (i, j) astfel încât $v_i v_j$ este o coardă interioară a lui C' şi

$j - i = \min\{k - l \,:\, k > l + 1, v_k v_l \in E(G'), v_k v_l$ coardă interioară a lui C

Atunci, $w = v_{i+1}$ nu este incident cu o coardă interioară: $v_{i+1} v_p$ cu $i + 1 < p < j$ nu poate fi o coardă interioară - din modul de alegere a perechii (i, j), şi $v_{i+1} v_l$ cu $l < i$ sau $l > j$ nu este o coardă interioară deoarece ar trebui să intersecteze $v_i v_j$. $\square$



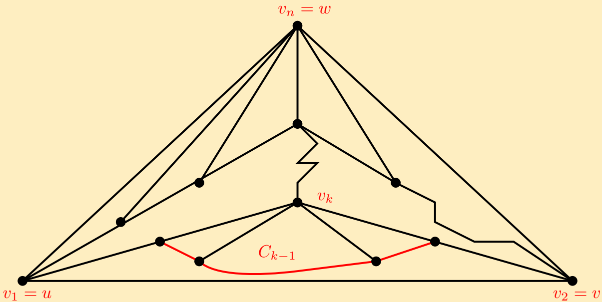
Lema 2

Fie G un graf maximal planar cu $n \geqslant 4$ noduri şi G' o reprezentare planară a lui G având faţa exterioară triunghiul u, v, w. Atunci, există o etichetare $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a nodurilor lui G' astfel încât $v_1 = u$, $v_2 = v$, $v_n = w$ şi, pentru fiecare $k \in \{4, \ldots, n\}$, avem:

(i) Subgraful indus $G'_{k-1} = [\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}]_G$ este 2-conex şi faţa sa exterioară este determinată de circuitul C'_{k-1} conţinând uv.

(ii) În subgraful indus G'_k nodul v_k este în faţa exterioară a lui G'_{k-1} şi $N_{G'_k}(v_k) \cap \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ este un drum de lungime $\geqslant 1$ pe circuitul $C'_{k-1} - uv$.

Demonstraţie. Fie $v_1 = u$, $v_2 = v$, $v_n = w$, $G'_n = G$, $G'_{n-1} = G - v_n$.



Demonstraţie (continuare). Observăm că $N_{G'_n}(w)$ este un circuit conţinând uv (după o sortare a lui $N_{G'_n}(w)$ pe coordonata x şi folosind planaritatea maximală). Urmează că i) şi ii) au loc pentru $k = n$.
Dacă v_k a fost deja ales ($k \leqslant n$) atunci în $G'_{k-1} = G' - \{v_n, \ldots, v_k\}$, vecinii lui v_k determină un circuit C'_{k-1} conţinând uv şi formând frontiera feţei exterioare a lui G'_{k-1}.

Demonstraţie (continuare). Din Lema 1, există v_{k-1} pe C'_{k-1} astfel încât v_{k-1} nu este extremitatea vreunei corzi interioare a lui C'_{k-1}. Prin construcţie, v_{k-1} nu este incident cu vreo coardă externă a lui C'_{k-1} (din planaritatea maximală). Urmează că G'_{k-2} conţine un circuit C'_{k-2} cu proprietăţile (i) şi (ii). $\square$

Demonstraţia Teoremei (Fraysseix, Pach, Pollack). Fie G un graf maximal planar cu n noduri, G' o reprezentare planară cu nodurile etichetate $v_1, \ldots, v_n$ ca în Lema 2, şi u, v, w faţa sa exterioară.

Vom construi o reprezentare Fary a lui G având nodurile puncte de coordonate întregi.

Presupunem că în pasul k ($\geqslant 3$) al construcţiei avem o astfel de reprezentare a lui G_k şi sunt îndeplinite următoarele trei condiţii:

Demonstraţie (continuare).

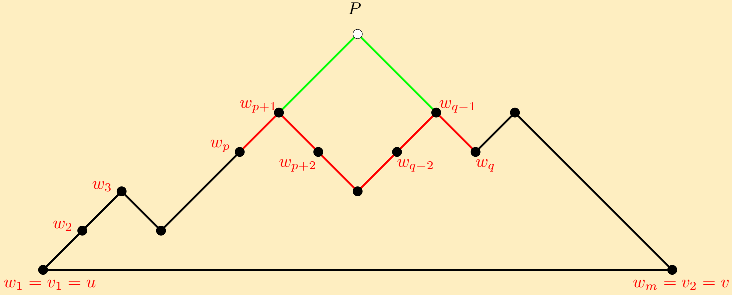
(1) v_1 are coordonatele $(0,0)$; v_2 are coordonatele $(i,0)$, $i \leqslant 2k-4$.

(2) Dacă $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sunt nodurile circuitului care corespunde feţei exterioare a lui G_k, într-o parcurgere de la v_1 la v_2 ($w_1 = v_1$, $w_m = v_2$), atunci
$$x_{w_1} < x_{w_2} < \ldots < x_{w_m}.$$

(3) Muchiile $w_1w_2, w_2w_3, \ldots, w_{m-1}w_m$ sunt segmente de dreaptă paralele cu una dintre cele două bisectoare ale axelor de coordonate.

Condiţia (3) implică faptul că $\forall i < j$, paralela prin w_i la prima bisectoare intersectează paralela prin w_j la cea de-a doua bisectoare într-un un punct de coordonate întregi (w_i şi w_j au coordonate întregi).

Construcţia lui G'_{k+1}. Fie $w_p, w_{p+1}, \ldots, w_q$ vecinii din G'_k ai lui v_{k+1} în G'_{k+1} ($1 \leqslant p < q \leqslant m$).



Demonstraţie (continuare) Paralela prin w_p la prima bisectoare intersectează paralela prin w_q la cea de-a doua bisectoare în punctul P. Dacă din P putem trasa segmentele Pw_i, $p \leqslant i \leqslant q$ astfel încât toare sunt distincte, atunci putem lua $v_{k+1} = P$ pentru a obţine o reprezentarea Fary a lui G_{k+1} cu toate noduri de coordonate întregi, satisfăcând condiţiile (1) - (3).

Dacă segmentul $w_p w_{p+1}$ este paralel cu prima bisectoare, atunci translatăm către dreapta cu 1 toate nodurile lui G_k care au $x \geqslant x_{w_{p+1}}$. Facem o altă translaţie la dreapta cu 1 a tuturor nodurilor lui G_k având coordonata $x \geqslant x_{w_q}$.

Acum, toate segmentele $P' w_i$, cu $p \leqslant i \leqslant q$, sunt distincte, segmentele $w_i w_{i+1}$ cu $i = \overline{q, m-1}$ au pantele ± 1 şi de asemenea $w_p P'$ şi $P' w_q$ au pantele ± 1 (unde P' este intersecţia paralelei la prima bisectoare prin w_p cu paralela la cea de-a doua bisectoare prin w_q).

Luăm $v_{k+1} = P'$ şi pasul k al construcţiei este terminat. $\square$

Algoritmul poate fi implementat în $\mathcal{O}(n \log n)$.

Teoremă

(Tarjan & Lipton, 1979) *Fie G un graf planar cu n noduri. Există o partiţie (A, B, S) a lui $V(G)$ astfel încât:*

- *S separă A de B în G: $G - S$ nu conţine muchii de la A la B,*
- $|A| \leqslant (2/3)n$, $|B| \leqslant (2/3)n$,
- $|S| \leqslant 4\sqrt{n}$.

Această partiţie poate fi găsită în $\mathcal{O}(n)$.

Ideea demonstraţiei. Fie G un graf conex plan. Executăm o parcurgere **bfs** dintr-un nod oarecare s, etichetând fiecare nod v cu nivelul corespunzător din arborele bfs obţinut. Fie $L(t)$, mulţimea tuturor nodurilor de pe nivelul t, pentru $0 \leqslant t \leqslant l + 1$. Ultimul nivel $L(l + 1)$ este - din raţiuni tehnice - vid (ultimul nivel este în fapt l).

Demonstraţie (continuare). Fiecare nivel intern este un separator în G (avem muchii doar între nivele consecutive). Fie t_1 nivelul de mijloc, adică nivelul care conţine cel de-al $\lfloor n/2 \rfloor$-lea nod întâlnit în timpul parcurgerii. Mulţimea $L(t_1)$ satisface:

$$\left| \bigcup_{t<t_1} L(T) \right| < \frac{n}{2} \text{ şi } \left| \bigcup_{t>t_1} L(T) \right| < \frac{n}{2}.$$

Dacă $|L(t_1)| \leqslant 4\sqrt{n}$, teorema este demonstrată.

Lemă

Există nivelele $t_0 \leqslant t_1$ şi $t_2 \geqslant t_1$ astfel încât $|L(t_0)| \leqslant \sqrt{n}$, $|L(t_2)| \leqslant \sqrt{n}$ şi $t_2 - t_0 \leqslant \sqrt{n}$.

Demonstraţie. Considerăm t_0 cel mai mare întreg care satisface $t \leqslant t_1$ şi $|L(t)| \leqslant \sqrt{n}$ (există un astfel de nivel deoarece $|L(0)| = 1$). Există t_2 un cel mai mic întreg care satisface $t > t_1$ şi $|L(t_2)| \leqslant \sqrt{n}$ (se observă că $|L(l+1)| = 0$).
Orice nivel dintre t_0 şi t_2 are mai mult de $\sqrt{n}$ noduri, deci numărul acestor nivele nu poate depăşi $\sqrt{n}$ (altfel, numărul de noduri ar fi $> n$).
□

Demonstraţie (continuare la Teorema separatorilor). Fie

$$C = \bigcup_{t<t_0} L(t), D = \bigcup_{t_0<t<t_2} L(t), E = \bigcup_{t>t_2} L(t).$$

- $|D| \leqslant (2/3)n$. Teorema are loc cu $S = L(t_0) \cup L(t_2)$, A mulţimea de cardinal maxim dintre C, D şi E, iar B reuniunea celor două mulţimi rămase (C şi E au cel mult $n/2$ elemente).

Demonstraţie (continuare la Teorema separatorilor).

- $n_1 = |D| > (2/3)n$. Dacă putem găsi un separator de tipul $1/3 \leftrightarrow 2/3$ pentru D cu cel mult $2\sqrt{n}$ noduri, atunci îl adăugăm la $L(t_0) \cup L(t_2)$ pentru a obţine un separator de cardinal cel mult $4\sqrt{n}$, pentru A luăm reuniunea mulţimii de cardinal maxim dintre C şi E cu partea mai mică rămasă din D, şi pentru B luăm reuniunea celor două mulţimi rămase.

Separatorul pentru (graful indus de) D poate fi construit astfel: ştergem toate nodurile lui G care nu sunt din D mai puţin s care este unit cu toate nodurile de pe nivelul t_0+1. Graful obţinut se notează cu D şi este planar şi conex. Are un arbore parţial de diametru cel mult $2\sqrt{n}$ (orice nod este accesibil din s pe un drum de lungime cel mult $\sqrt{n}$, după cum am demonstrat în Lema de mai sus). Acest arbore este parcurs dfs pentru a obţine separatorul dorit. Detaliile (foarte interesante) sunt omise. $\square$

Considerăm problema de a decide dacă un graf planar dat are o 3-colorare (a nodurilor), care este o problemă **NP**-completă.

În cazul unui un graf G cu număr mic de noduri (pentru o constant c, putem verifica toate cele $\mathcal{O}(3^c) = \mathcal{O}(1)$ funcţii de la $V(G)$ la $\{1, 2, 3\}$) putem decide dacă există o 3-colorare.

Pentru grafuri planare cu $n > c$ noduri construim în timp liniar, $\mathcal{O}(n)$, partiţia (A, B, C) a nodurilor sale, cu $|A|, |B| \leqslant (2n/3)$ şi $|C| \leqslant \sqrt{n}$.

Se testează fiecare $3^{|C|} = 2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$ funcţie posibilă de la C la $\{1, 2, 3\}$ dacă este o 3-colorare a subgrafului indus de C şi dacă această colorare poate fi extinsă la o 3-colorare a subgrafului indus de $A \cup C$ în G şi de asemeni la o 3-colorare a subgrafului indus de $B \cup C$ în G (recurivs).

O aplicaţie a Teoremei Separatorilor

Timpul de execuţie, $T(n)$, al acestui algoritm, satisface recursia

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & \text{dacă } n \leqslant c, \\ \mathcal{O}(n) + 2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}\left(\mathcal{O}(\sqrt{n}) + 2T(2n/3)\right), & \text{dacă } n > c. \end{cases}$$

Urmează că $T(n) = 2^{\mathcal{O}(\sqrt{n})}$ (este posibil ca acele constante din spatele notaţiei $\mathcal{O}(\cdot)$ să fie foarte mari).