Algoritmica grafurilor - Seminar 1

October, 2018

Exercise 1.

Un profesor a scris p exerciţii şi doreşte să le propună unui grup de n students.

a) În câte moduri poate să facă acest lucru? (Câte un exerciţiu fiecărui student, dar nu neapărat diferite.)

b) Aceeaşi întrebare dacă doreşte să le propună exerciţii diferite ($p \geqslant n$).

c) Dar dacă doreşte să ofere câte două exerciţii diferite fiecărui student? (Studenţi diferiţi pot primi cel mult un exerciţiu în comun, $p \geqslant n$.)

Exercise 2. Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcţie. Definim clasa de complexitate a lui f

$$\mathcal{O}(f(n)) = \{g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* : \exists a, b, n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ a. î. } g(n) \leqslant a \cdot f(n) + b, \forall n \geqslant n_0\}$$

(Observăm că $a = a_g, b = b_g, n_0 = n_{0,g}$.) Printr-un abuz de notaţie scriem $g(n) = \mathcal{O}(f(n)$ în loc de $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.

(a) Arătaţi că ne putem lipsi de b în definiţia de mai sus.

(b) Arătaţi că dacă $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} \in \mathbb{R}$, atunci $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$

Exercise 3. Arătaţi că

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \mathcal{O}(n^2)$ şi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \mathcal{O}(n^3)$;

(b) $\log_a n = \mathcal{O}(\log_b n)$ şi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathcal{O}(\log n)$;

Exercise 4. Legenda spune că (Titus Flavius Josephus) nu ar fi devenit faimos fără talentul său de matematician. În timpul primului război iudeo-roman, a făcut parte dintr-un grup de 41 de rebeli iudei blocaţi într-o peşteră de către romani. Preferând să se sinucidă decât să fie capturaţi, rebelii au decis să se aşeze în cerc şi, într-un sens fixat, fiecare a treia persoană să se sinucidă. Josephus, împreună cu un prieten, considerând sinuciderea fără sens a calculat în ce poziţii trebuie să stea aşa încât el şi prietenul să supravieţuiască.
În varianta noastră n persoane sunt aşezate în cerc (numerotate de la 1 la n) şi eliminăm fiecare a a doua persoană până când rămâne una singură. Fie j_n numărul supravieţuitorului.

a) Determinaţi $j_1, j_2, \ldots, j_{10}$.
b) Scrieţi (în pseudocod) o funcţie recursivă pentru a calcula j_n.
(c) Care este formula pentru j_n? (Indicaţie: ce se întâmplă când n devine o putere a lui 2?)

Exercise 5.

Care este numărul maxim, r_n, de regiuni obţinute prin trasarea a n linii în plan?

Exercise 6. Dată o mulţime M cu $n \geqslant 1$ elemente, o partiţgie a lui M este o familie de submulţimi ale lui M, $\mathcal{P} = \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$, astfel încât $M_i \neq \varnothing$, $\forall i$, $M_i \cap M_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ şi $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M$. Dacă $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{P}'$ sunt două partiţi spunem că $\mathcal{P}$ este mai fină decât $\mathcal{P}'$ dacă pentru orice submulţime $M_i \in \mathcal{P}$ există o submulţime $M'_j \in \mathcal{P}'$ astfel încât $M_i \subseteq M'_j$. Considerăm următoarea problemă de decizie.

PARTITION

Instanţă: M, $|M| = n \in \mathbb{N}^*$ şi două partiţii $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ ale lui M.

Întrebare: Este $\mathcal{P}$ mai fină decât $\mathcal{P}'$?

(a) Arătaţi că **PARTITION** $\in$ **P**.

(b) Descrieţi o procedură recursivă care să decidă, pentru două partiţii date, dacă una dintre ele este mai fină decât cealaltă.