Setul 12

de probleme şi exerciţii de matematică

(relative la şiruri şi serii de funcţii reale)

S12.1 Pentru şirurile de funcţii de mai jos, să se determine mulţimea de convergenţă punctuală şi limita punctuală care corespunde fiecăruia dintre punctele respectivei mulţimi:

a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ f_n(x) = \left(|\sin x|^n + |\cos x|^n + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^{1/n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R};$

b) $(f_n)_{n\geq 3} \subset \mathcal{F}([0,1];\mathbb{R}),\ f_n(x) = \begin{cases} xn^\alpha, & \text{dacă } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ \left(\dfrac{2}{n} - x\right) n^\alpha, & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right] \\ 0, & \text{dacă } x \in \left(\dfrac{2}{n}, 1\right] \end{cases},\ n \geq 3, \alpha > 0;$

c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}((\mathbb{R}_+)^3;\mathbb{R}^3),\ f_n(x,y,z) = \left(\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{x+n}, \operatorname{arctg}(ny), \dfrac{1}{1+z^n}\right), \forall\, n \in \mathbb{N}^*, x,y,z \in \mathbb{R}_+;$

d) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ f_n(x) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} [k^m x]}{n^{m+1}},\ m \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R};$

e) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ f_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right), \forall\, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R};$

f) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}([0,1];\mathbb{R}^4),\ f_n(x) = \left(\dfrac{\ln\left(1+n^4x^2\right)}{2n}, x^n\left(1-x^n\right), n^2x^2e^{-n^2x^2}, \dfrac{n^3x}{1+n^4x^2}\right),$
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, x \in [0,1].$

S12.2 Ce se poate spune despre convergenţa uniformă a următoarelor şiruri de funcţii?

a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ f_n(x) = \dfrac{n-(x-1)e^{nx}}{e^{nx}+n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R};$

b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}([1,+\infty);\mathbb{R}^2),\ f_n(x) = \left(\dfrac{x^n}{(1+x^{2n})^n}, \dfrac{\sin(n!x)}{n}\right), \forall\, n \in \mathbb{N}^*, x \in [1,+\infty);$

c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(A;\mathbb{R}),\ f_n(x,y) = \dfrac{nx-ny-1}{(n-1)x+(n+1)y+2}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$
$\forall\, (x,y) \in A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{1}{2} - y < x < y+2\right\};$

d) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(A;\mathbb{R}^2),\ f_n(x,y) = \left(\dfrac{(\ln(xy))^{2n}-2}{(\ln(xy))^{2n}+2}, \dfrac{n\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2+n+1}\right), \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$
$\forall\, (x,y) \in A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{1}{3} \leq xy \leq 2\right\}.$

S12.3

a) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ aşa încât $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\ x \in A$. Să se arate că dacă există $x_0 \in A$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = c_n$, iar $c_n \nrightarrow 0$ pentru $n \to \infty$, atunci convergenţa şirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu poate fi uniformă pe A.

b) Să se calculeze limitele:

$$\lim_{x\searrow 0}\left(\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq 2}}\left(n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)\right)\right),\ \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq 2}}\left(\lim_{x\searrow 0}\left(n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)\right)\right),$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq 2}}\left(n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)\right)\right) \text{ şi } \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq 2}}\left(\lim_{x\to 2}\left(n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)\right)\right).$$

Să se explice faptul că primele două limite diferă, iar celelalte două nu.

c) Ce se poate spune despre continuitatea funcţiei limită, în cazul şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, unde $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+(2\sin x)^{2n}}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$?

d) Să se arate că, deşi şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, cu $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, este convergent uniform pe $\mathbb{R}$, limita şirului derivatelor nu este egală cu derivata limitei lui $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Să se explice de ce.

S12.4

i) Să se stabilească mulţimea de definiţie a sumei pentru următoarele serii de funcţii, precum şi submulţimea ei în punctele căreia există limita globală a respectivei sume:

a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(x^n\operatorname{arctg}\frac{x}{2^n}, (-1)^{n+1}\frac{(\ln x)^n}{n^{\ln x}}\right)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$;

b) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(e^{(x+y+z)^2}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(x+y+z)}\right)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

c) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1-y}{1-2y}\right)^n, \frac{(-1)^n(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}, \frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}z^n(1-z)^n\right)$, $(x,y,z) \in A$, unde $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq \dfrac{1}{2}\right\}$.

ii) Se poate deriva, termen cu termen, fiecare din seriile de mai jos, în raport cu argumentele precizate?

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{(-1)^n}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, \left(\frac{n}{x^n}\right)^n, \frac{(n+3)(xy)^n}{(2^n-1)\left(x^2+1\right)^{n/2}}\right)$, $x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}$ (derivare în raport cu x);

b) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(n^{\ln n}(2x-y)^n, (-1)^{n+1}\frac{(x+y)^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (derivare în raport cu y);

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left\{\ln\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]+\operatorname{th}(nx)-\operatorname{th}\left[(n-1)x\right]\right\}$, $x \in \mathbb{R}$.

S12.5

i) Să se găsească mulţimea de convergenţă corespunzătoare fiecăreia dintre seriile de puteri ce urmează:

a) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{n+2}}\cdot x^n,\ x\in\mathbb{R};$

b) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{n\cdot 3^n},\ x\in\mathbb{R};$

c) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sqrt{n}-1\right)^n\cdot x^n,\ x\in\mathbb{R}.$

ii) Să se determine suma fiecărei serii de mai jos:

a) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)},\ x\in A_c\subset\mathbb{R};$

b) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(n+1)^3}{n(n+2)}x^{n-1},\ x\in A_c\subset\mathbb{R};$

c) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!},\ x\in A_c\subset\mathbb{R}.$

S12.6

i) Să se găsească seriile Taylor corespunzătoare funcţiilor de mai jos, în punctele indicate:

a) $f(x)=e^{-x}-2\cos x,\ x_0=0,\ x\in\mathbb{R};$

b) $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)+\operatorname{sh}x,\ x\in(-1,1),\ x_0=0;$

c) $f(x)=\frac{2x-5}{x^2-4x+3},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,3\},\ x_0=-1;$

d) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ x\in(-1,1],\ x_0=0;$

e) $f(x)=x\operatorname{arctg}x+\ln\sqrt{1+x^2},\ x\in\mathbb{R},\ x_0=1;$

f) $f(x)=\int_0^x\frac{\operatorname{arctg}t}{t}\,dt,\ x\in[-1,1],\ x_0=0.$

ii) Pe baza seriei de tip MacLaurin a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, să se arate că are loc egalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{2n+2}(2n)!!}=\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

iii) Să se aproximeze funcţia $h:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}_+^*$, $h(x)=(1+\sin x)^x$, în vecinătatea punctului $x_0=0$, printr-un polinom de gradul patru.

iv) Să se determine eroarea absolută pentru formula de calcul aproximativ:

$$\ln(\sin x+1)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},x\in\left(-\frac{\pi}{4},\pi\right).$$

S12.7

a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, cu

$$f|_{[-\pi,\pi]}(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\pi, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, \pi) \\ 0, & \text{dacă } x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}.$$

Să se determine seria Fourier-trigonometrică corespunzătoare. Să se analizeze apoi convergenţa punctuală (simplă) a seriei rezultate. Să se compare, în cele din urmă, funcţia f cu suma seriei în cauză şi să se deducă, astfel, suma seriei numerice $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

b) Să se afle seria Fourier trigonometrică asociată funcţiei $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$ şi apoi să se calculeze sumele seriilor numerice $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{(2n+1)^4}$.

c) Să se arate că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi x)}{n^3} = \frac{\pi^3}{12}(x^3 - x),\ \forall\ x \in [-1, 1]$$

şi, în particular, că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

S12.8 Să se determine mulţimea de convergenţă punctuală şi mulţimea de convergenţă uniformă pentru şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R})$, $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{nx^n}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. Este suma seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ o funcţie continuă pe mulţimea ei de definiţie?

S12.9 Fie $f(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+n+1} \left(\dfrac{(x+y)^2 - 2}{1 + 2(x-y)^2} \right)^n$, $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Să se stabilească mulţimea $\tilde{A} \subseteq A$ pe care f este global continuă, precum şi mulţimea $\breve{A} \subseteq A$ pe care f este diferenţiabilă Fréchet de ordinul întâi.

S12.10 Să se arate că dacă $f(x, y, z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n y^n z^n}{nz^{n-1}}$, atunci

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{xyz}{2 - xyz},$$

$$\forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |xyz| \le a < 1 \text{ (cu } a \in (0, 1)).$$

S12.11 Apelând la $f''(x)$, să se găsească seria MacLaurin corespunzătoare funcţiei

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{4} \arcsin x + \frac{3x}{4}\sqrt{1-x^2}, x \in (-1, 1).$$

S12.12 Pe baza seriei Fourier trigonometrice ataşată funcţiei $f : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-x)$, să se arate că suma seriei numerice $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1 + (2\pi+1)(-1)^{n+1}}{n^2}$ este $\dfrac{\pi^2}{12}(2\pi + 3)$.

Bibliografie recomandată

1. Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină - *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral. (Vol. III, cap. 7)*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1967.

2. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme. (Cap. 9)*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

3. Constantin Drăguşin, Octav Olteanu, Marinică Gavrilă - *Analiză matematică. Teorie şi aplicaţii. (Vol. I, §3.4, Vol. II, cap. 15 şi cap. 16)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. Silvia-Otilia Corduneanu - *Capitole de analiză matematică,* Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2010.

5. Kiryl Tsishchanka - *Representing Functions as Power Series*, Calculus Website, CIMS-NYU, 2010

6. Kenneth Kuttler - *Calculus. Theory and Applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, London, 2011.

7. * * * - *Solved Problems for Series of Functions,* http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/3/txe3ec3.htm, 2015.

8. Paul's Online Math Notes - *Calculus II (Notes) / Series & Sequences / Power Series*, http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/PowerSeries.aspx, 2016.