Teoria probabilităţilor discrete

Olariu E. Florentin

Februarie, 2016

Desfăşurarea cursului şi examinarea

- Primele şapte săptămâni: teoria probabilităţilor, ultimele şase săptămâni: statistică.
- Examen parţial în săptămâna a 8-a din primele şapte cursuri;
- Examen final în săptămâna a 15-a din ultimele şase cursuri;
- Două note intermediare pentru seminar şi laborator: T_1 şi T_2:
  - T_1 este o medie din şase note: câte un test care se dă la fiecare sfârşit de seminar;
  - T_2 este nota la un test de laborator care se da la sfârşitul semestrului în săptămâna a 14-a sau a 15-a.

- În total: şase seminarii şi şapte laboratoare;
- Note de la seminar şi laborator:

$$SL = 40\% * T_1 + 40\% * T_2 + 20\% * activitate.$$

- Nota de la teza scrisă

$$TS = 50\% * TS_1 + 50\% * TS_2.$$

- Formula de calcul a notei (corectate ulterior cu repartizarea conform curbei lui Gauss)

$$50\% * SL + 50\% * TS.$$

- **Toate notele implicate – T_1, T_2, TS_1 şi TS_2 – trebuie sa fie peste 5. Dacă una dintre notele acestea nu este peste 5, examenul nu poate fi promovat.**

Table of contents

Experiment aleator

- Noţiunea de *experienţă* sau (*experiment*) *aleator* corespunde, intuitiv, unui proces în urma căruia obţinem un rezultat care nu poate fi cunoscut înaintea desfăşurării procesului, dar a cărui mulţime de rezultate posibile este cunoscută.
- Cel care analizează rezultatele unui astfel de experiment este de obicei un observator neutru şi mai rar un participant deşi, uneori, ar putea participa la efectuarea experimentului aleator. Experimentele în majoritate sunt practice dar pot fi şi abstracte.
- Rezultatele unui experiment aleator sunt datorate *şansei*, iar mecanismul prin care ele (rezultatele) se produc interesează mai puţin. Vom considera că, la un moment dat, avem în atenţie un singur experiment, chiar dacă el se poate repeta.

Experiment aleator

Definition 1.1

Se numeşte **experiment aleator** *un experiment al cărui rezultat nu este cunoscut dinainte, dar ale cărui rezultate posibile sunt cunoscute în totalitate şi care poate fi repetat în condiţii identice.*

Exemple:

1. Aruncând un zar, va apărea una dintre feţele $\{1, 2, \ldots, 6\}$, dar nu ştim cu siguranţă care dintre feţele acestea va apărea. ♣
2. Aruncând două monede, cu siguranţă apare stema (S) şi/sau banul (B) pe amândouă, iar toate rezultatele posibile sunt combinaţiile (S, S), (S, B), (B, S),(B, B). ♣
3. Dacă experimentul constă în măsurarea duratei de viaţă a unei baterii, atunci rezultatul va fi un număr real $x \geqslant 0$. ♣

Eveniment aleator elementar

În analiza unui experiment aleator, urmărim rezultatul acestuia; întotdeauna un singur rezultat se va produce, fără a şti care (din mulţimea cunoscută a rezultatelor posibile). Spunem în acest caz că se produce un *eveniment*.

Definition 2.1

Un rezultat posibil al unui experiment aleator se numeşte **eveniment aleator elementar**, *iar mulţimea acestora se numeşte* **spaţiul evenimentelor elementare** *- notat cu* Ω.

Eveniment aleator

- După efectuarea unui experiment, doar unul dintre elementele mulţimii Ω se "întâmplă" - şi asta conform şansei pe care o are fiecare rezultat posibil al experimentului.
- Asupra rezultatelor experimentului se pot face raţionamente, judecăţi, iar interesul poate fi atras nu doar de rezultatul în sine cât de tipul rezultatului, de familia din care face el parte.
- Această observaţie extinde noţiunea de eveniment aleator elementar.

Definition 2.2

Se numeşte **eveniment aleator** *o anumită submulţime a spaţiului evenimentelor elementare:* $A \subseteq \Omega$.

Eveniment aleator

Exemple:

1. Aruncând un zar, spaţiul evenimentelor elementare este $\Omega = \{1, 2, \ldots,$ ne-ar putea interesa apariţia unei feţe cu număr par, acesta este evenimetul aleator $A = \{2, 4, 6\}$. ♣
2. La aruncarea a două monede, $\Omega = \{(S, S), (S, B), (B, S), (B, B)\}$. Evenimentul aleator definit astfel: "valorile de pe cele două monede sunt diferite" este $A = \{(S, B), (B, S)\}$. Evenimentul aleator definit prin "pe cel puţin una dintre cele două monede apare stema" este, formal, $B = \{(S, S), (S, B), (B, S)\}$. ♣
3. În cazul experimentului cu măsurarea duratei de viaţă a unei baterii, evenimentul aleator: "viaţa bateriei este cel mult 1500 de ore, dar nu mai puţin de 500 de ore" este intervalul $A = [500, 1500] \subseteq \mathbb{R}_+$. ♣

Eveniment aleator

- Uzual un eveniment aleator este definit prin intermediul unui predicat: evenimentul va fi format din evenimentele elementare (rezultatele experimentului) care satisfac predicatul respectiv.
- Un eveniment aleator este privit, formal, ca o submulţime a mulţimii de evenimente elementare Ω.
- Dacă Ω este o mulţime discretă (adică cel mult numărabilă), atunci orice submulţime $A \subseteq \Omega$ este considerată eveniment aleator.
- Dacă Ω nu este discretă, atunci numai anumite submulţimi pot fi evenimente aleatoare.

Evenimente aleatoare - proprietăţi şi notaţii

Definition 3.1

Spunem că **un eveniment aleator** $A \subseteq \Omega$ **se realizează** *sau* **se produce** *dacă, în urma efectuării experimentului aleator, evenimentul aleator elementar (rezultatul) aparţine lui* A.

- Evenimentele aleatoare se notează, de obicei, cu litere mari de la începutul alfabetului: A, B, C etc. Deoarece, în majoritatea aplicaţiilor Ω va fi o mulţime discretă, vom considera că orice submulţime a lui Ω este un eveniment aleator.
- Nu mai facem distincţie între submulţimi din Ω şi evenimente aleatoare proprietăţile şi operaţiile cu mulţimi se transferă asupra evenimentelor aleatoare.

Evenimente aleatoare - proprietăţi şi notaţii

- $\varnothing$ este **evenimentul imposibil** (nu se realizează niciodată);
- Ω este **evenimentul sigur** (se realizează întotdeauna);
- dacă $A, B \subseteq \Omega$ sunt evenimente aleatoare, atunci
    - $A \cup B$ este de asemeni eveniment aleator care se realizează când se realizează măcar unul dintre evenimentele A şi B;
    - $A \cap B$ este de asemeni eveniment aleator care se realizează când se realizează şi A şi B;
    - $A \setminus B$ este un eveniment aleator care se realizează când se realizează A dar nu şi B;
- dacă A este eveniment aleator, atunci $\overline{A} = \Omega \setminus A$ este de asemenea eveniment aleator şi este numit **evenimentul contrar** lui A: $\overline{A}$ se realizează ori de câte ori A nu se realizează;
- dacă $A \subseteq B$, atunci se spune ca evenimentul A îl **implică** pe B;
- dacă $A \cap B = \varnothing$ se spune că A şi B sunt **incompatibile**, dacă $A \cap B \neq \varnothing$, A şi B sunt **compatibile**;

Evenimente aleatoare - proprietăţi şi notaţii

- În mod similar se pot defini *reuniunea* sau *intersecţia* unui număr finit (sau infinit numărabil) de evenimente aleatoare.

Exemplu. Să considerăm ca experiment aruncarea a două zaruri:

$$\Omega = \{(i, j)\ :\ 1 \leqslant i, j \leqslant 6\},\ \text{sunt 36 de evenimente elementare.}$$

Fie A evenimentul "suma zarurilor este 4" şi B = "zarurile sunt mai mari decât 4":

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \text{ şi } B = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

- $A \cup B = \{(1,3),(2,2),(3,1),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$;
- $A \cap B = \varnothing$ - A şi B sunt evenimente incompatibile;
- $\overline{A} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2),(2,3),\ldots(6,6)\}$. ♣

Funcţia de probabilitate

- Vom considera în această secţiune că Ω este cel mult numărabilă:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \text{ (finită sau infinit numărabilă).}$$

- Noţiunea de *probabilitate* pleacă de la ideea de a asocia câte un număr real fiecărui eveniment aleator cu scopul de a le măsura astfel şansele.
- Probabilitatea unui eveniment aleator A se notează cu $P(A)$. Următoarele axiome definesc *funcţia de probabilitate*.

Axiomele funcţiei de probabilitate

Definition 1.1

Dacă Ω este mulţimea evenimentelor aleatoare elementare ale unui experiment aleator, o **funcţie de probabilitate** *asociată acestuia este o funcţie P definită pe familia evenimentelor aleatoare (în cazul nostru $\mathbb{P}(\Omega)$) care satisface*

Axioma 1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, *pentru orice eveniment aleator A.*

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$ *şi* $P(\varnothing) = 0$.

Axioma 3. *Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ sunt evenimente aleatoare mutual incompatibile, atunci*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Axiomele funcţiei de probabilitate

- Axioma 1 ne spune că probabilitatea asociată unui eveniment aleator este un număr nenegativ şi subunitar.
- Axioma 2 arată că orice rezultat al experimentului, cu probabilitate 1, se găseşte în mulţimea Ω. În plus, mai spune că evenimentul imposibil nu se produce niciodată.
- Axioma 3 arată că, pentru orice şir de evenimente aleatoare mutual incompatibile, probabilitatea de a se produce măcar unul dintre aceste evenimente este suma probabilităţilor tuturor evenimentelor.
- În cazul în care şirul este infinit (înţelegând prin aceasta şi că $P(A_k) > 0$, pentru o infinitate de indici k), axioma 3 garantează şi convergenţa seriei din membrul drept.

Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate

Property 1.1

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *evenimente aleatoare mutual incompatibile, atunci*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} P(A_k).$$

proof: Considerăm în axioma 3, $A_k = \varnothing, \forall\, k \geqslant m+1$. ■

Property 1.2

Dacă A *şi* B *sunt evenimente aleatoare, atunci*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B).$$

proof: În proprietatea 1.1: $m = 2$, $A_1 = A \cap B$ şi $A_2 = A \setminus B$. ■

Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate

Property 1.3

Dacă A şi B sunt evenimente aleatoare, atunci

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B).$$

proof: Folosind proprietăţile 1.1 şi 1.2
$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B).$ ■

Property 1.4

Dacă A este un eveniment aleator, atunci

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

proof: Proprietatea 1.1 şi axioma 2: $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}).$ ■

Proprietăţi ale funcţiei de probabilitate

Property 1.5

Fie A şi B evenimente aleatoare, dacă A implică B ($A \subseteq B$), atunci

$$P(A) \leqslant P(B).$$

proof: Conform proprietăţii 1.2 şi axiomei 1
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A).$ ■

- O altă proprietate numită *principiul includerii şi al excluderii* este enunţată şi demonstrată în Anexa 1.

Probabilitatea evenimentelor aleatoare elementare

- Vom nota cu $P(\omega)$ probabilitatea evenimentului aleator elementar $\{\omega\}$, $\forall\,\omega \in \Omega$. Din axioma 3, pentru orice eveniment A

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \qquad (1)$$

- Dacă A conţine un număr finit de elemente, atunci suma de mai sus este o sumă finită sau este o serie dacă A conţine un număr infinit de elemente. Suma este nulă dacă A este mulţimea vidă.
- Obţinem o definiţie echivalentă a funcţiei de probabilitate dacă înlocuim axioma 3 cu

Axioma 3'. Pentru orice eveniment aleator A

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

În multe situaţii Ω constă din evenimente elementare egal probabile şi în număr finit:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}, P(\omega_i) = p, \forall 1 \leqslant i \leqslant n,$$

atunci

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = np, \text{ i. e., } P(\omega_i) = p = \frac{1}{n}, \forall i.$$

Să considerăm, în acest caz, un eveniment aleator A, cu $|A| = k$, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, atunci

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j}) = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

Am demonstrat în acest fel

Proposition 2.1

Dacă evenimentele aleatoare elementare sunt egal probabile (şi în număr finit), atunci probabilitatea unui eveniment aleator A se determină ca raportul dintre numărul de elemente din A şi numărul de elemente din Ω.

- În acest caz probabilitatea unui eveniment aleator este numărul de cazuri favorabile supra numărul total de cazuri posibile. Practic, calculul probabilităţilor devine o problemă de numărare.
- Situaţiile în care se poate aplica rezultatul de mai sus trebuie sa fie distinse cu grijă pentru că *nu întotdeauna evenimentele elementare sunt egal probabile*. Drept reper putem folosi principiul subînţeles al simetriei: evenimente similare sau "identice" au probabilităţi egale.

Evenimente aleatoare elementare echiprobabile

Exemplu. Atunci când extragem o bilă dintr-o urnă se întelege că orice bilă are aceeaşi probabilitate de a fi extrasă. Dacă în urnă avem bile de culori diferite: două bile albe şi trei bile negre, nu mai putem presupune că fiecare culoare are aceleaşi şanse de a fi extrasă. ♣

Exemplu. Dacă se aruncă un zar obişnuit, probabilitatea să apară pe faţă unul dintre numerele $\{1, 2, \ldots, 6\}$ este aceeaşi. Dacă însă pe trei dintre feţe este înscris numărul 1, iar pe celelalte feţe numerele 2, 3 şi 4, atunci, la aruncarea zarului apariţia numărului 1 nu mai este egală cu a celorlalte trei numere. ♣

Exerciţii pentru seminar

- **Evenimente aleatoare:** I.1., I.2. (a), I.3., I.4. (a, c), I.5. (b), I.6. (a, b, d)
- **Funcţia de probabilitate:** II.1., II.3., II.4., II.6., II.8. (b, c), II.9. (b, d), II.10. (a)
- **Rezervă:** II.2., II.5., II.7., II.11., II.13.

Sfârşit

Exerciţii - evenimente aleatoare

I.1. Trei jucători, 1, 2 şi 3 aruncă pe rând, în această ordine, o monedă. Câştigă cel care obţine primul stema. Mulţimea evenimentelor elementare poate fi descrisă astfel (0 pentru ban şi 1 pentru stemă)

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \ldots, 0000\cdots\}$$

a) Determinaţi evenimentele aleatoare $A_i =$ jucătorul i câştigă jocul, $i = \overline{1,3}$.

b) Determinaţi evenimentele aleatoare $\overline{A_1 \cup A_3}$, $\overline{A_1} \cup A_2$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ şi $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.

c) Arătaţi că $A_1 \cup A_3 \subseteq \overline{A_2}$. Este adevărat că $A_1 \cup A_3 = \overline{A_2}$?

I.2. O limuzină care face curse către un aeroport are o capacitate de 6 locuri şi transportă pasageri de la cele trei hoteluri ale aeroportului.

Exerciţii - evenimente aleatoare

a) Descrieţi evenimentele aleatoare elementare în cazul în care interesează câţi pasageri ajung de la fiecare dintre cele trei hoteluri la aeroport.

b) Descrieţi evenimentele aleatoare elementare în cazul în care interesează doar numărul de pasageri care ajung la aeroport.

I.3. Se aruncă două zaruri (unul roşu şi unul negru). Fie A evenimentul "suma zarurilor este un număr impar", $B =$ "cel puţin unul dintre zaruri are valoarea 1" şi $C =$" suma zarurilor este 5". Descrieţi evenimentele $A \cap B$, $A \cup C$, $B \cap C$, $A \cap C$, $\overline{A} \cap B$ şi $A \cap B \cap \overline{C}$.

I.4. Fie A şi B două evenimente asociate unui experiment aleator. Arătaţi că

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

b) $A \cup \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap B}$, $A \cap B = B \cap (A \cup \overline{B})$;

c) $A \cap B = B \cap (\overline{\overline{A} \cap B})$, $A \cap B = B \setminus (\overline{A} \cap B)$.

Exerciţii - evenimente aleatoare

I.5. Fie A şi B evenimente aleatoare. Simplificaţi următoarele expresii

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;

b) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

I.6. Fie A, B şi C trei evenimente aleatoare asociate unui experiment. Determinaţi, în funcţie de A, B şi C, expresiile corespunzătoare următoarelor evenimente

a) dintre cele trei evenimente se realizează doar A;

b) se realizează A şi C dar nu şi B.

c) cel puţin două dintre cele trei evenimente se realizează;

d) se realizează exact unul dintre cele trei evenimente;

e) se realizează cel mult trei dintre ele.

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.1. Considerăm un experiment aleator a cărui mulţime de evenimente elementare este $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Care dintre următoarele funcţii poate fi o funcţie de probabilitate definită pe Ω? De ce?

a) $P(\omega_1) = \frac{1}{3}, P(\omega_2) = \frac{1}{9}, P(\omega_3) = \frac{1}{3}, P(\omega_4) = \frac{1}{9}, P(\omega_5) = \frac{1}{9};$

b) $P(\omega_1) = \frac{1}{4}, P(\omega_2) = \frac{1}{8}, P(\omega_3) = -\frac{1}{4}, P(\omega_4) = \frac{1}{2}, P(\omega_5) = \frac{3}{8};$

c) $P(\omega_1) = \frac{1}{2}, P(\omega_2) = \frac{1}{8}, P(\omega_3) = \frac{1}{8}, P(\omega_4) = \frac{1}{8}, P(\omega_5) = \frac{3}{8}.$

II.2. Fie A şi B două evenimente aleatoare aşa încât $P(A \cap B) = 1/4$, $P(\overline{A}) = 1/3$ şi $P(B) = 1/2$. Calculaţi $P(A \cup B)$, $P(A \setminus B)$, $P(B \setminus A)$ şi $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

II.3. Fie A şi B două evenimente aleatoare astfel încât $P(A \cup B) = 3/4$, $P(A \cap B) = 1/6$ şi $P(\overline{B}) = 4/5$. Calculaţi probabilitatea evenimentelor A, $\overline{A}$, $(B \setminus A)$, $(A \setminus B)$ şi $A \cup \overline{B}$.

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.4. Fie A şi B două evenimente aleatoare incompatibile pentru care se cunosc $P(A) = 0.3$ şi $P(B) = 0.5$. Care este probabilitatea ca

a) să se realizeze A sau B?

b) să se realizeze B dar nu şi A?

c) să se realizeze simultan cele două evenimente?

II.5. Pentru ca o rezoluţie să ajungă în faţa preşedintelui S.U.A. trebuie să treacă prin Senat şi prin Camera Reprezentanţilor. Dintre toate rezoluţiile prezentate acestor două corpuri legislative 60% trec de Cameră, 70% trec de Senat şi 80% trec de cel puţin unul dintre cele două corpuri. Să se calculeze probabilitatea ca o rezoluţie să ajungă la preşedinte.

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.6. Un elev trebuie să aleagă două dintre următoarele cursuri: franceză, matematici şi istorie. El alege istorie cu probabilitate $5/8$, franceză cu probabilitate $5/8$ şi alege franceză şi istorie cu probabilitate $1/4$. Care este probabilitatea pentru ca elevul să aleagă matematici? Dar probabilitatea ca el să aleagă istorie sau franceză?

II.7. Într-o cursă hipică se întrec trei cai: H_1, H_2 şi H_3. H_1 are de două ori mai multe şanse ca H_2 să câştige, iar H_2 de două ori mai multe şanse ca H_3 să câştige.

a) Care sunt probabilităţile de a câştiga ale celor trei cai?

b) Dar probabilitatea ca nici primul, nici al doilea cal să nu câştige?

II.8. Fie A şi B două evenimente aleatoare. Arătaţi că

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$;

b) $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$;

c) $P(A \Delta B) = P(A) - 2P(A \cap B) + P(B)$.

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.9. Arătaţi că pentru trei evenimente aleatoare A, B, C au loc următoarele relaţii

a) $P(A \cap B) + P[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1;$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) = 1;$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = 1;$

d) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A})P(\overline{B}).$

II.10. Fie A_1, A_2 şi A_3 trei evenimente asociate unui experiment aleator.

a) În ce condiţii are loc relaţia

$$P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)?$$

b) Demonstraţi că, dacă $A \cap B \cap C = \varnothing$, atunci

$$P[(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)] = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A).$$

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.11*. Doi studenţi x şi y urmează un curs la care, în urma examinării, se poate obţine unul din următoarele calificative: A, B sau C. Probabilitatea ca x să obţină B este 0.3. Probabilitatea ca y să obţină B este 0.4. Probabilitatea ca nici unul să nu obţină A dar cel puţin unul să obţină B este 0.1. Care este probabilitatea ca cel puţin unul dintre studenţi să obţină B dar nici unul să nu obţină C?

II.12*. Într-o urnă sunt zece bile numerotate de la 1 la 10; din urnă se extrag două bile. Care este probabilitatea ca suma celor două numere astfel obţinute să fie impară dacă

a) cele două bile sunt extrase simultan?

b) cele două bile sunt extrase una după alta fără întoarcere?

c) cele două bile sunt extrase una după alta cu întoarcere?

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.13*. Un zar este construit în aşa fel încât probabilitatea de a apărea o faţă este proporţională cu numărul de pe acea faţă.

a) Care este probabilitatea de a obţine o faţă cu număr par la o aruncare?

b) Dar probabilitatea de a obţine un număr prim?

II.14*. Dacă $P(A) = 0.9$ şi $P(B) = 0.8$, arătaţi că $P(A \cap B) \geqslant 0.7$.

a) Arătaţi că $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

b) Demonstraţi prin inducţie inegalitatea lui Bonferroni: pentru n evenimente aleatoare $A_1, A_2, \ldots A_n$ avem

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1.$$

Exerciţii - Funcţia de probabilitate

II.15*. Se consideră un experiment care are un număr infinit numărabil de evenimente aleatoare elementare:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}.$$

a) Arătaţi că nu este posibil ca toate evenimentele elementare să aibă o aceeaşi probabilitate nenulă.

b) Este posibil ca toate evenimentele elementare să aibă probabilitate nenulă?

II.16*. Se consideră un experiment aleator şi Ω mulţimea evenimentelor elementare. Să se arate că funcţia $d : \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega) \to [0, 1]$, definită prin $d(A, B) = P(A \Delta B)$ este o metrică pe familia evenimentelor aleatoare $\mathbb{P}(\Omega)$.

Anexa 1

Property 0.1

(Principiul includerii şi al excluderii) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sunt evenimente aleatoare, atunci

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} P(A_k) - \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant m} P(A_{k_1}\cap A_{k_2}) + \cdots +$$

$$+(-1)^{p+1} \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_p\leqslant m} P\left(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\ldots\cap A_{k_p}\right) + \cdots +$$

$$+(-1)^{m+1} P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m).$$

dem.: Procedăm prin inducţie după m: pentru $m = 2$ avem proprietatea 1.3.

Anexa 1

Presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru orice $(m-1)$ evenimente aleatoare.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) - P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) \cap A_m\right] + P(A_m) = \tag{2}$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) - P\left[\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m)\right] + P(A_m).$$

Pentru primele două sume aplicăm ipoteza inductivă şi obţinem

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k) - \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \cdots + \tag{3}$$

$$+(-1)^{p+1} \sum_{1\leqslant k_1<k_1<\ldots<k_p\leqslant m-1} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_p}\right) + \cdots +$$

Anexa 1

$$+(-1)^m P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m-1}),$$

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m)\right] = \sum_{k=1}^{m-1} P(A_k \cap A_m) - \qquad (4)$$

$$= \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant m-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_m) + \cdots +$$

$$+(-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < k_1 < \ldots < k_p \leqslant m-1} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_p} \cap A_m\right) + \cdots +$$

$$+(-1)^{m+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m-1} \cap A_m).$$

Combinând (2), (3) şi (4) obţinem proprietatea dorită. ■

Bibliography

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.