Logică pentru Informatică
Seminar

Ştefan Ciobâcă
Cristian Masalagiu
Vasile Alaiba

November 15, 2016

Observaţia 1. Dacă aveţi nevoie de exerciţii suplimentare, urmăriţi link-urile către capitolele din cartea [2] şi/sau către [1].

1 Logică Propoziţională

1.1 Logica informală

Vom opera doar cu *definiţii operationale* ale unei noţiuni (definiţiile ,,de dictionar" sunt descriptive). O noţiune definită operaţional este complet caracterizată de conţinut sau de sferă. *Sfera* este elementul din structura noţiunii alcătuit din mulţimea obiectelor ale căror proprietăţi formează conţinutul noţiunii.

Conţinutul este elementul din structura noţiunii alcătuit din mulţimea proprietăţilor care caracterizează obiectele care formează sfera noţiunii.

O noţiune nouă va avea sfera inclusă în sfera unei alte noţiuni, definită - operaţional - anterior şi numită gen proxim. Noua sferă se restrânge prin precizarea unei proprietăţi suplimentare - numită diferenţă specifică - pe care obiectele din vechea sferă nu o aveau. Exemple: poligon convex /patrulater /paralelogram /dreptunghi /pătrat...

O *regulă de inferenţă* este formată din ipoteze şi o concluzie. Ipotezele se scriu deasupra liniei şi concluziile dedesubt. O regulă de inferenţă poate fi aplicată într-un pas de raţionament. De exemplu, regula de inferenţă

$$\frac{\text{Toţi X sunt Y} \qquad \text{Toţi Y sunt Z}}{\text{Toţi X sunt Z}}$$

este folosită în următorul raţionament (raţionament care are un singur pas): *Toţi studenţii sunt chiulangii. Toţi chiulangiii sunt repetenţi. Deci toţi studenţii sunt repetenţi.* Un exemplu de raţionament în mai mulţi paşi este următorul: *Dacă trenul ajunge mai târziu şi nu sunt taxiuri în staţie, atunci Ion va întârzia la întâlnirea fixată. Ion nu întârzie la întâlnire. Trenul ajunge într-adevăr mai târziu. [...] Prin urmare, erau taxiuri în staţie.*

Un *paradox* este o afirmaţie care pare să se autocontrazică, sau poate ,,genera" o asemenea situaţie.

EXERCIŢII

1. Evidenţiaţi, pentru fiecare din definiţiile de mai jos, noţiunea definită, genul proxim şi diferenţa specifică:

   (a) Un bloc este o clădire cu mai multe etaje.

   (b) Un programator este o maşină care transformă cafeaua în cod.

(c) Un număr natural este un număr întreg nenegativ.

2. Dați exemple de alte concepte care pot fi definite prin gen proxim și diferență specifică.

3. Următoarele raționamente într-un pas - de fapt, simple reguli de inferență - vi se par ‘corecte’? În ce sens?

   (a) Știm că orice număr par este și număr întreg. Deoarece 2 este par, este și întreg.
   (b) Dacă afară plouă atunci folosesc umbrela. Afară plouă. Deci folosesc umbrela.
   (c) Toți oamenii sunt muritori. Socrate este om. Deci Socrate este muritor.
   (d) Toți studenții sunt chiulangii. Toți chiulangiii sunt repetenți. Deci toți studenții sunt repetenți.
   (e) Toți uhitonatomii sunt jutrenaiopi. Toți jutrenaiopii sunt nutrevecenți. Deci toți uhitonatomii sunt nutrevecenți.
   (f) Orice papagal este animal. Există animale care ciripesc. Înseamnă că papagalii ciripesc.
   (g) Există oameni care fumează. Oricine fumează tușește. Deci există oameni care tușesc.
   (h) Oricine fumează tușește. Există oameni care tușesc. Deci există oameni care fumează.

4. Formulează textul următor un adevăr? *Dacă există petrol în Patagonia, atunci fie experții au dreptate, fie guvernul minte. Nu există petrol în Patagonia sau experții greșesc, așadar guvernul nu minte.*

5. Studiați următoarele reguli de inferență și care vi se par a fi ‘corecte’ și DE CE?

   (a) $$\frac{\text{Toți X sunt Y} \qquad \text{Toți Y sunt Z}}{\text{Toți X sunt Z}}$$

   (b) $$\frac{\text{Toți X sunt Y} \qquad \text{Unii Y sunt Z}}{\text{Toți X sunt Z}}$$

   (c) $$\frac{\text{Toți X sunt Y} \qquad \text{Unii Y sunt Z}}{\text{Unii X sunt Z}}$$

   (d) $$\frac{\text{Toți X sunt Y} \qquad \text{Toți Y sunt Z}}{\text{Unii X sunt Z}}$$

   (e) $$\frac{\text{Unii X sunt Y} \qquad \text{Unii Y sunt Z}}{\text{Unii X sunt Z}}$$

   (f) $$\frac{\text{Unii X sunt Y} \qquad \text{Unii Y sunt Z}}{\text{Toți X sunt Z}}$$

   (g) $$\frac{\text{Unii X sunt Y} \qquad \text{Toți Y sunt Z}}{\text{Unii X sunt Z}}$$

   (h) $$\frac{\text{Unii X sunt Y} \qquad \text{Toți Y sunt Z}}{\text{Toți X sunt Z}}$$

6. Identificați regulile de inferență care au fost folosite în raționamentele de mai sus.

7. Dați exemple de raționamente în care folosiți regulile *modus ponens* și *modus tollens*:

   (a) $$\frac{\text{Dacă X atunci Y} \qquad \text{X este adevărat}}{\text{Y este adevărat}}$$

   (b) $$\frac{\text{Dacă X atunci Y} \qquad \text{Y este fals}}{\text{X este fals}}$$

1.2 Nevoia de logică formală

EXERCIȚII

1. Analizați următorul raționament din punct de vedere lingvistic: silogism /premiză majoră /premiză minoră /3-4 termeni lingvistici:

   Orice om este muritor. Muritor este un cuvânt. Deci orice om este un cuvânt.

2. Care dintre urmatoarele afirmații le-ați introduce - cu certitudine – în LP, ele neimplicând nicio ambiguitate în ceea ce privește valoarea de adevăr de tip 0-1?

   (a) Eu văd negru.
   (b) Trimite poza lui Ștefan!
   (c) Nu vreau să fac nimic.
   (d) Nu vreau să fac ceva.
   (e) Dacă x este par atunci dacă y este impar scrie 10; altfel scrie 9.
   (f) Are alta fata.
   (g) Am văzut un om cu un binoclu.

3. *Paradoxul lui Russell.* Putem avea mulțimi de mulțimi. De exemplu, mulțimea $X = \{\{1,2,3\},\{2,4\}\}$ conține mulțimea $\{2,4\}$.

   Unele mulțimi se pot conține pe ele însele. De exemplu, fie clasa de mulțimi X_i (unde $i \in \mathbb{N}$ este un număr natural). Mulțimea $X_0 = \emptyset$ este mulțimea vidă, iar pentru $i \geq 1$, definim mulțimea $X_i = X_{i-1} \cup \{X_{i-1}\}$ ca fiind mulțimea obținută prin reuniunea la X_{i-1} a unui singur element care întâmplător este o mulțime, și anume chiar X_{i-1}. Dacă definim $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$, putem să ne convingem că $X \in X$.

   Ce este și mai interesant este că putem alege toate mulțimele *care nu se conțin pe ele însele* și să le punem într-o mulțime R:

   $$R = \{X \mid X \notin X\}.$$

   Este adevărat ca $R \in R$?

4. *Paradoxul bărbierului.* Bărbierul unui oraș bărbierește toate persoanele care nu se bărbieresc pe ele însele. Bărbierul se bărbierește singur?

1.3 Definiții inductive

În cele ce urmează, în acest curs, prin definiție inductivă, constructivă, structurală sau recursivă vom înțelege același lucru.

Definiții inductive de mulțimi.

Fie `0` și `s` două caractere diferite.

Definim mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ ca fiind cea mai mică mulțime care satisface următoarele proprietăți:

(B) $\mathtt{0} \in \mathbb{N}$

(I) dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $\mathtt{s}n \in \mathbb{N}$ (dacă șirul de caractere $n \in \mathbb{N}$ este număr natural, atunci șirul n la care adaugăm caracterul `s` în față este și el număr natural.

Observația 2. Definiția constructivă a lui $\mathbb{N}$ din seminar folosește notația `sss0` în loc de $\mathtt{s}(\mathtt{s}(\mathtt{s}(\mathtt{0})))$ (așa cum apare în curs).

Definiția de mai sus se numește definiție inductivă a unei mulțimi. Regula (B) definește cazul de *b*ază și regula (I) definește cazul *i*nductiv. În general, o definiție inductivă conține 0 sau mai multe cazuri de bază și 0 sau mai multe cazuri inductive.

Putem să ne convingem că $\mathtt{ss0}$ este număr natural, după cum urmează:

Lema 1.1. *Elementul* $\mathtt{ss0}$ *face parte din mulțimea* $\mathbb{N}$ *(altfel spus,* $\mathtt{ss0} \in \mathbb{N}$*).*

Proof. Conform regulii (B), știm că:

$$\mathtt{0} \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Luând $n = \mathtt{0}$ în regula (I), observăm că antecendentul este adevărat conform ecuației (1) și deci obținem că

$$\mathtt{s0} \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Luăm $n = \mathtt{s0}$ în regula (I). Antecedentul regulii (I) este satisfăcut de ecuația (2) și deci concluzia regulii (I) trebuie să fie și ea adevărată:

$$\mathtt{ss0} \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Dar ecuația (3) este chiar ceea ce voiam să arătăm.

□

Se poate observa că mulțimea $\mathbb{N} = \{\mathtt{0}, \mathtt{s0}, \mathtt{ss0}, \mathtt{sss0}, \ldots\}$.

De multe ori vom prezenta regulile de construcție ale unei mulțimi definite inductiv sub forma unor reguli de inferență, ca mai jos:

Definiția 1.1. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este cea mai mică mulțime care satisface următoarele proprietăți:

$$\text{(B)}\ \frac{}{\mathtt{0} \in \mathbb{N}} \qquad\qquad \text{(I)}\ \frac{n \in \mathbb{N}}{\mathtt{s}n \in \mathbb{N}}$$

Regulile (B) și (I) pot fi considerate reguli de inferență și în acest caz, raționamentul prin care se demonstrația lema 1.1 poate fi prezentată mai simplu, grafic, după cum urmează:

$$\text{(I)}\ \cfrac{\text{(I)}\ \cfrac{\text{(B)}\ \cfrac{}{\mathtt{0} \in \mathbb{N}}}{\mathtt{s0} \in \mathbb{N}}}{\mathtt{ss0} \in \mathbb{N}}$$

Definiții inductive de funcții. Funcția +.

O funcție $f : A \to B$ poate fi văzută ca o submulțime $f \subseteq A \times B$ a produsului cartezian $A \times B$ cu următoarele proprietăți:

1. pentru orice $a \in A$, există *cel puțin* un $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in f$ (cu alte cuvinte, funcția este definită pentru fiecare element al domeniului).
2. pentru orice $a \in A$, există *cel mult* un $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in f$ (cu alte cuvinte, funcția nu poate întoarce două valori diferite pentru același argument).

Din moment ce o funcție poate fi văzută ca o mulțime, putem defini funcții inductiv:

Definiția 1.2. Funcția $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (funcția de adunare a două numere naturale) este definită inductiv de următoarele reguli:

$$(B_+)\ \frac{}{\mathtt{0} + m = m} \qquad\qquad (I_+)\ \frac{n + m = k}{\mathtt{s}n + m = \mathtt{s}k}$$

Observația 3. Folosim notația consacrată pentru $+$ și scriem $x+y$ în loc de $+(x,y)$ pentru a nota aplicarea funcției $+$ peste două argumente x și y. Spre deosebire de curs, adunarea pe $\mathbb{N}$ este definită în funcție de primul parametru și nu de al doilea.

Putem folosi definiția inductivă de mai sus pentru a demonstra:

Lema 1.2. *Suma dintre* $\mathtt{s0}$ *și* $\mathtt{ss0}$ *este* $\mathtt{sss0}$ *(mai simplu,* $\mathtt{s0}+\mathtt{ss0}=\mathtt{sss0}$*, sau* $1+2=3$*).*

Proof.

$$(I_+)\ \dfrac{(B_+)\ \dfrac{}{\mathtt{0}+\mathtt{ss0}=\mathtt{ss0}}}{\mathtt{s0}+\mathtt{ss0}=\mathtt{sss0}}$$

□

Demonstrația de mai sus este ușoară fiindcă se referă la două valori concrete care trebui adunate: $\mathtt{s0}$ și $\mathtt{ss0}$. Să încercăm să demonstrăm ceva mai interesant:

Lema 1.3. *Pentru orice* $m \in \mathbb{N}$*,* $m+\mathtt{0}=m$*.*

Observația 4. La prima vedere, demonstrația pare foarte simplă fiindca e suficient să aplicăm regula (B_+). Dar regula (B_+) ne spune doar că $\mathtt{0}+m=m$, nu și că $m+\mathtt{0}=m$. Care este diferența dintre $\mathtt{0}+m$ și $m+\mathtt{0}$? Știm din clasa I că funcția $+$ este comutativă, dar noi nu am demonstrat încă asta (o vom demonstra mai târziu). Deci trebuie să găsim altă metodă de a demonstra lema.

Demonstrația lemei 1.3. Metoda de care avem nevoie se numește *inducție structurală*, o metodă care generalizează principiul inducției pe care l-ați învățat deja în liceu.

În inducția structurală *după* o anumită valoare definită inductiv, tratăm fiecare caz (de bază sau inductiv) al valorii respective. În cazul nostru, vom demonstra că

$$m+\mathtt{0}=m$$

pentru orice număr natural $m \in \mathbb{N}$ prin inducție structurală după m:

1. (cazul de bază) dacă $m=\mathtt{0}$, trebuie să demonstrăm că

   $$\mathtt{0}+\mathtt{0}=\mathtt{0}.$$

   Dar acest lucru rezultă direct din regula (B_+).

2. (cazul inductiv) dacă $m=\mathtt{s}n$, trebuie să arătăm că

   $$\mathtt{s}n+\mathtt{0}=\mathtt{s}n.$$

   Puterea demonstrației prin inducție structurală este că avem voie să presupunem că ceea ce trebuie să demonstrăm despre m este deja adevărat despre n. Această presupunere se numește ipoteză inductivă și în cazul nostru este:

   $$n+\mathtt{0}=n. \tag{4}$$

   Putem acum aplica regula (I_+) peste ecuația (4) pentru a obține ceea ce vrem să demonstrăm:

   $$(I_+)\ \dfrac{(4)\ \dfrac{}{n+\mathtt{0}=n}}{\mathtt{s}n+\mathtt{0}=\mathtt{s}n}$$

$\square$

O altă lema interesantă care poate fi demonstrată prin inducție structurală după m:

Lema 1.4. *Pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, avem că $n + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(n + m)$.*

Proof. Prin inducție structurală după n:

1. dacă $n = \mathtt{0}$, avem de arătat că:
$$\mathtt{0} + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(\mathtt{0} + m).$$
Dar $\mathtt{0} + \mathtt{s}m \stackrel{B_+}{=} \mathtt{s}m$. Cum $m \stackrel{B_+}{=} \mathtt{0} + m$, rezultă că $\mathtt{s}m = \mathtt{s}(\mathtt{0} + m)$. Deci $\mathtt{0} + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(\mathtt{0} + m)$, ceea ce trebuia să arătăm.

2. dacă $n = \mathtt{s}k$, avem de arătat că
$$\mathtt{s}k + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(\mathtt{s}k + m)$$
dar știm din ipoteza de inducție că
$$k + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(k + m). \tag{5}$$
Dar $\mathtt{s}k + \mathtt{s}m \stackrel{I_+}{=} \mathtt{s}(k + \mathtt{s}m) \stackrel{(5)}{=} \mathtt{s}(\mathtt{s}(k + m)) \stackrel{I_+}{=} \mathtt{s}(\mathtt{s}k + m)$, ceea ce trebuia sa arătăm.

$\square$

Un alt exemplu de demonstrație prin inducție structurală:

Lema 1.5. *Pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, $n + m = m + n$ (altfel spus, adunarea este comutativă).*

Proof. Prin inducție structurală după m:

1. (cazul de bază) $m = \mathtt{0}$:
Avem de arătat că $n + \mathtt{0} = \mathtt{0} + n$.
Dar $n + \mathtt{0} \stackrel{Lemma\ 1.3}{=} n \stackrel{(B_+)}{=} \mathtt{0} + n$, ceea ce trebuia să arătăm.

2. (cazul inductiv) dacă $m = \mathtt{s}k$ pentru un $k \in \mathbb{N}$, atunci știm că:
$$n + k = k + n$$
și trebuie să arătăm că
$$n + \mathtt{s}k = \mathtt{s}k + n.$$
...

$\square$

EXERCIȚII

1. Demonstrați că $\mathtt{ssss0}$ este număr natural.
2. Demonstrați că $\mathtt{ss0} + \mathtt{sss0} = \mathtt{sssss0}$.
3. Continuați demonstrația lemei 1.5.
4. Definiți inductiv funcția $\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (înmulțirea a două numere naturale). În definiția inductivă, puteți face apel la funcția $+$.
5. Demonstrați că $\mathtt{ss0} \times \mathtt{sss0} = \mathtt{ssssss0}$.
6. Arătați că $\times$ este comutativă (veți avea nevoie de două leme auxiliare, la fel ca la $+$).

1.4 Sintaxa Logicii Propoziționale

Fie $A = \{\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots\}$ o mulțime infinită, numărabilă, fixată, de *variabile propoziționale.*

Definiția 1.3. Mulțimea LP, a formulelor din logica propozițională, este cea mai mică mulțime care satisface următoarele proprietăți:

1. (pasul de bază) orice variabilă propozițională este formulă: dacă $p \in A$, atunci $p \in LP$ este formulă;
2. (pas inductiv) dacă $f \in LP$ este o formulă, atunci negația formulei, $(\neg f) \in LP$ este formulă;
3. (pas inductiv) dacă $f_1 \in LP$ și $f_2 \in LP$ sunt două formule, atunci conjuncția formulelor, $(f_1 \wedge f_2) \in LP$ este formulă;
4. (pas inductiv) dacă $f_1 \in LP$ și $f_2 \in LP$ sunt două formule, atunci disjuncția formulelor, $(f_1 \vee f_2) \in LP$ este formulă;
5. (pas inductiv) dacă $f \in LP$ atunci $(f) \in LP$ este formulă.

Dându-se o formulă, putem defini inductiv o funcție $|\cdot| : LP \to \mathbb{N}$ care calculează *dimensiunea* formulei:

Definiția 1.4.

$|p| = 1$ pentru orice $p \in A$,

$|(\neg f)| = 1 + |f|$ pentru orice $f \in LP$,

$|(f_1 \wedge f_2)| = 1 + |f_1| + |f_2|$ pentru orice $f_1, f_2 \in LP$,

$|(f_1 \vee f_2)| = 1 + |f_1| + |f_2|$ pentru orice $f_1, f_2 \in LP$,

$|(f)| = |f|$ pentru orice $f \in LP$.

În definiția de mai sus, primul pas este pasul de bază și ceilalți pași sunt pașii inductivi. În general, nu vom marca explicit care pași sunt de bază și care inductivi.

Dându-se o formulă, putem defini inductiv o funcție $\mathit{aparvar}\Big(\cdot\Big) : LP \to \mathbb{N}$ care calculează numărul de apariții ale tuturor variabilelor propoziționale în formulă:

Definiția 1.5.

$\mathit{aparvar}\Big(p\Big) = 1$ pentru orice $p \in A$,

$\mathit{aparvar}\Big((\neg f)\Big) = \mathit{aparvar}\Big(f\Big)$ pentru orice $f \in LP$,

$\mathit{aparvar}\Big((f_1 \wedge f_2)\Big) = \mathit{aparvar}\Big(f_1\Big) + \mathit{aparvar}\Big(f_2\Big)$ pentru orice $f_1, f_2 \in LP$,

$\mathit{aparvar}\Big((f_1 \vee f_2)\Big) = \mathit{aparvar}\Big(f_1\Big) + \mathit{aparvar}\Big(f_2\Big)$ pentru orice $f_1, f_2 \in LP$,

$\mathit{aparvar}\Big((f)\Big) = \mathit{aparvar}\Big(f\Big)$ pentru orice $f \in LP$.

Să arătăm că:

Lema 1.6. *Pentru orice formulă $f \in LP$, $\mathit{aparvar}\Big(f\Big) \leq |f|$.*

Proof. Prin inducție structurală după f:

1. dacă $f = p$ pentru o variabilă propozițională $p \in LP$, atunci $\mathit{aparvar}\Big(f\Big) = \mathit{aparvar}\Big(p\Big) = 1 \leq 1 = |p| = |f|$, ceea ce trebuia să arătăm.

2. dacă $f = (\neg f')$ pentru o formulă $f' \in LP$, atunci trebuie să arătăm că

$$aparvar\Big((\neg f')\Big) \leq |(\neg f')|.$$

Ipoteza de inducție este că

$$aparvar\Big(f'\Big) \leq |f'|. \tag{6}$$

Dar $aparvar\Big((\neg f')\Big) \overset{def.\ aparvar(\cdot)}{=} aparvar\Big(f'\Big) \overset{(6)}{\leq} |f'| \overset{def.\ |\cdot|}{=} |(\neg f')| - 1 \leq |(\neg f')|$, ceea ce trebuia să arătăm.

3. dacă $f = (f_1 \wedge f_2)$, ...

4. dacă $f = (f_1 \vee f_2)$, ...

5. dacă $f = (f')$, ...

□

EXERCIȚII

1. Scrieți definiția mulțimii LP sub formă de reguli de inferență.

2. Arătați că $(\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})) \in LP$.

3. Terminați demonstrația prin inducție a lemei 1.6.

4. Definiți inductiv funcția $subf : LP \to 2^{LP}$ care calculează toate subformulele unei formule.

5. Definiți funcția $arb : LP \to Arb$ care calculează arborele abstract asociat unei formule. Mulțimea Arb este mulțimea tuturor arborilor cu rădăcină (o vom considera intuitiv, fără definiție).

   Calculați mulțimea subformulelor și arborele abstract al următoarelor formule:

   (a) $((\mathtt{p} \wedge (\neg\mathtt{q})) \wedge \mathtt{r})$
   (b) $((\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q})) \wedge \mathtt{r})$
   (c) $(\neg((\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q})) \wedge \mathtt{r}))$

6. Definiți funcția $height : LP \to \mathbb{N}$ care calculează înălțimea arborelui abstract al formulei.

7. Arătați prin inducție structurală că $height(f) \leq |f|$ pentru orice formulă $f \in LP$.

8. Definiți funcția $prop : LP \to 2^A$, care calculează pentru fiecare formulă mulțimea variabilelor propoziționale care apar în formulă.

9. În practică, când scriem formule din LP, nu scriem parantezele decât dacă este strict necesar.

   La fel cum dacă scriem $5 \times -3 + 2$ înțelegem $(5 \times (-3)) + 2$, la fel în loc de $\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q} \vee \mathtt{r}$ vom înțelege $((\mathtt{p} \wedge (\neg\mathtt{q})) \vee \mathtt{r})$. În acest sens, negația $\neg$ este operatorul cu prioritatea cea mai mare, urmat de $\wedge$ și apoi urmat de $\vee$. Putem ține minte această convenție asociind $\neg$ cu minusul unar, $\wedge$ cu înmulțirea și $\vee$ cu adunarea. De asemenea, vom arăta mai târziu că operatorii $\wedge$ și $\vee$ sunt asociativi și comutativi. Din acest motiv, vom permite scrierea $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \mathtt{r}$ în loc de $((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r})$ sau de $(\mathtt{p} \wedge (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r}))$.

   Exprimați cu cât mai puține paranteze următoarele formule:

   (a) $((\mathtt{p} \wedge (\neg\mathtt{q})) \wedge \mathtt{r})$
   (b) $((\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q})) \wedge \mathtt{r})$

(c) $(\neg((\mathtt{p} \vee (\neg \mathtt{q})) \wedge \mathtt{r}))$

10. Dați exemple de 5 formule interesante (cu cât mai mulți operatori, variabile, etc.) și calculați pentru fiecare dintre ele arborele abstract, subformulele și scrieți-le cu cât mai puține paranteze.

11. Dați exemple de literali negativi și literali pozitivi.

12. Dați 5 exemple de clauze.

1.5 Semantica Logicii Propoziționale – Introducere

Definiția 1.6. Mulțimea $B = \{0, 1\}$ este mulțimea valorilor de adevăr.
Funcția $\bullet : B \times B \to B$ este funcția "și logic".
Funcția $+ : B \times B \to B$ este funcția "sau logic".
Funcția $\bar{\cdot} : B \times B \to B$ este funcția "negație logică".

Definiția 1.7. O funcție $S : A \to B$ (A fiind mulțimea variabilelor propoziționale și $B = \{0, 1\}$ mulțimea valorilor de adevăr) se numește structură.

Extensia $S' : LP \to B$ a funcției $S : A \to B$ este singura funcție (vezi teorema de extensie din curs) care satisface următoarele proprietăți:

1. $S'\Big(p\Big) = S\Big(p\Big)$, pentru orice $p \in A$;
2. $S'\Big((\neg f)\Big) = \overline{S'\Big(f\Big)}$, pentru orice $f \in LP$;
3. $S'\Big((f_1 \wedge f_2)\Big) = S'\Big(f_1\Big) \bullet S'\Big(f_2\Big)$, pentru orice $f_1, f_2 \in LP$;
4. $S'\Big((f_1 \vee f_2)\Big) = S'\Big(f_1\Big) + S'\Big(f_2\Big)$, pentru orice $f_1, f_2 \in LP$;
5. $S'\Big((f)\Big) = S'\Big(f\Big)$, pentru orice $f \in LP$.

În cele ce urmează, vom nota $S'\Big(f\Big)$ cu $S\Big(f\Big)$ pentru orice $f \in LP$. Valoarea de adevăr $S\Big(f\Big)$ se numește *valoarea de adevăr a formulei f în structura S*. În loc de structură, folosim și noțiunea de interpretare sau asignare (cele trei noțiuni sunt echivalente – în acest curs).

Definiția 1.8. *Formulă satisfiabilă, validă/tautologie, contradicție/nesatisfiabilă* Vezi slide-uri.

EXERCIȚII

1. Fie $A = \{\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots\}$ mulțimea variabilelor propoziționale.

   Fie $S : A \to B$ structura definită după cum urmează:

   $S(\mathtt{p}) = 1$ $S(\mathtt{q}) = 0$ $S(\mathtt{r}) = 0$ $S(a) = 0$ pentru orice altă variabilă propozițională $a \in A \setminus \{\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}\}$.

   Stabiliți valoarea de adevăr în structura S de mai sus a următoarelor formule:

   (a) $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$
   (b) $(\mathtt{q} \wedge \mathtt{p})$
   (c) $(\neg \mathtt{q})$
   (d) $((\neg \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r})$
   (e) $(((\neg \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r}) \vee (\neg p))$

2. Găsiți câte o structură S în care următoarele formule să fie adevărate (câte o structură pentru fiecare formulă):

   (a) $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$
   (b) $(\mathtt{p} \wedge (\neg \mathtt{q}))$
   (c) $((\mathtt{p} \wedge (\neg \mathtt{q})) \vee \mathtt{q})$

3. Găsiți câte o structură S în care următoarele formule să fie false (câte o structură pentru fiecare formulă):

   (a) $(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$
   (b) $(\mathtt{q} \wedge (\mathtt{p} \vee (\neg \mathtt{q})))$
   (c) $((\mathtt{p} \wedge (\neg \mathtt{q})) \vee \mathtt{q})$

4. Care dintre următoarele formule sunt satisfiabile?

   (a) $(\mathtt{p} \wedge (\neg \mathtt{p}))$
   (b) $(\mathtt{p} \vee (\neg \mathtt{p}))$
   (c) $(\mathtt{p} \vee (\neg \mathtt{p})) \wedge (\neg \mathtt{q})$
   (d) $((\mathtt{p} \vee (\neg \mathtt{p})) \wedge ((\neg \mathtt{p}) \wedge \mathtt{q}))$
   (e) $((\mathtt{p} \vee (\neg \mathtt{q})) \wedge ((\neg \mathtt{p}) \vee \mathtt{r}))$

5. Care dintre următoarele formule sunt valide?

   (a) $(\mathtt{p} \wedge (\neg \mathtt{p}))$
   (b) $(\mathtt{p} \vee (\neg \mathtt{p}))$
   (c) $\mathtt{p}$
   (d) $(\mathtt{p} \vee (\neg \mathtt{p})) \wedge (\neg \mathtt{q})$
   (e) $(\mathtt{p} \rightarrow (\neg \mathtt{p}))$
   (f) $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{r})$

6. Asociați pentru fiecare dintre afirmațiile următoare o formulă din LP care să modeleze înțelesul său din limba română și studiați satisfiabilitatea acestora:

   (a) Dacă afară plouă, stau în casă sau merg în mall. Nu stau în casă doar dacă nu mă plictisesc. Afară plouă și nu mă plictisesc.

       Rezolvare. Identificăm următoarele propoziții atomice: afară plouă, stau în casă, merg la mall, mă plictisesc.

       Fiecărei propoziții îi asociem o variabilă propozițională: $\mathtt{p}_1$ (afară plouă), $\mathtt{p}_2$ (stau în casă), $\mathtt{p}_3$ (merg la mall), $\mathtt{p}_4$ (mă plictisesc). Afirmațiile pot fi modelate, în ordine, prin următoarele formule din LP: $\mathtt{p}_1 \rightarrow (\mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_3)$, $(\neg \mathtt{p}_2) \leftrightarrow (\neg \mathtt{p}_4)$, $\mathtt{p}_1 \wedge \neg \mathtt{p}_4$.

   (b) Lucrez la logică doar dacă nu se poate ieși afară. Se poate ieși afară dacă nu plouă și este cald. Din moment ce nu lucrez la logică și afară este cald, înseamnă că plouă.

   (c) Lucrurile merg bine în țară dacă la conducerea țării nu sunt hoți și economia este sănătoasă. Oamenii pleacă în străinătate dacă și numai dacă lucrurile nu merg bine în țară. Economia este sănătoasă, dar oamenii pleacă în străinătate.

7. Dați exemple de 5 contradicții.

8. Dați exemple de 5 tautologii.

Definiția 1.9. *Tare și slabă echivalență.* Vezi slideuri.

EXERCIȚII

1. Demonstrați că, pentru orice formule $f, g, h \in LP$, au loc următoarele echivalențe:

   (a) $(f \wedge (g \wedge h)) \equiv ((f \wedge g) \wedge h)$;

   (b) $(f \wedge g) \equiv (g \wedge f)$;

   (c) $(f \vee (g \vee h)) \equiv ((f \vee g) \vee h)$;

   (d) $(f \vee g) \equiv (g \vee f)$;

   (e) $(\neg(\neg f)) \equiv f$;

   (f) $(\neg(f \wedge g)) \equiv ((\neg f) \vee (\neg g))$;

   (g) $(\neg(f \vee g)) \equiv ((\neg f) \wedge (\neg g))$.

2. Demonstrați că, pentru orice formule $f, g \in LP$, următoarele echivalențe au loc dacă și numai dacă $f \in LP$ este tautologie:

   (a) $f \vee g \equiv f$;

   (b) $f \wedge g \equiv g$.

3. Demonstrați că, pentru orice formule $f, g \in LP$, următoarele echivalențe au loc dacă și numai dacă $f \in LP$ este contradicție:

   (a) $f \wedge g \equiv f$;

   (b) $f \vee g \equiv g$.

Definiția 1.10. *Consecință semantică* - vezi slideuri.

EXERCIȚII

1. Arătați că $\neg \mathtt{p}$ este consecință semantică din $\mathtt{p} \rightarrow (\neg \mathtt{p})$.

2. Arătați că $\mathtt{p}$ nu este consecință semantică din $\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}$.

3. Arătați că $\mathtt{p}$ este consecință semantică din $\mathtt{q} \rightarrow \mathtt{p}$ și $\mathtt{q}$.

4. Arătați că $\mathtt{p}_3$ este consecință semantică din $\mathtt{p}_1 \rightarrow (\mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_3)$, $(\neg \mathtt{p}_2) \leftrightarrow (\neg \mathtt{p}_4)$ și $\mathtt{p}_1 \wedge \neg \mathtt{p}_4$.

1.6 Problema SAT pentru LP. Algoritmi sintactici și semantici

Definiția 1.11. *Problema SAT* - vezi slide 85.

Definiția 1.12. O formulă $f \in LP$ se află în *formă normală conjunctivă* (FNC, pe scurt) dacă este o conjuncție de disjuncții de literali, adică o conjuncție de clauze; respectiv, $f \in LP$ este în *formă normală disjunctivă* (FND, pe scurt), dacă este o disjuncţie de conjuncţii de literali.

EXERCIȚII

1. Găsiți o formă normală conjuctivă și o formă normală disjunctivă pentru următoarele formule:

   (a) $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r}$;

   (b) $(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r}$;

   (c) $\neg((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r})$;

   (d) $\neg((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee \mathtt{r})$;

   (e) $\neg((\neg(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})) \vee (\mathtt{p} \vee \mathtt{q}))$;

(f) $(\mathtt{p}_1 \wedge \mathtt{q}_1) \vee (\mathtt{p}_2 \wedge \mathtt{q}_2) \vee \ldots \vee (\mathtt{p}_\mathtt{n} \wedge \mathtt{q}_\mathtt{n})$ (rezolvați întâi pentru $n = 2$ și $n = 3$, apoi pentru un n oarecare);

(g) $(\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{q}_1) \wedge (\mathtt{p}_2 \wedge \mathtt{q}_2) \wedge \ldots \wedge (\mathtt{p}_\mathtt{n} \wedge \mathtt{q}_\mathtt{n})$ (rezolvați întâi pentru $n = 2$ și $n = 3$, apoi pentru un n oarecare).

Definiția 1.13. *Algorithmul Horn* - vezi slide-urile 57 - 60.

EXERCIȚII

1. Să se aplice algoritmul Horn formulei:

   (a) $(\mathtt{p}_1 \vee \neg\mathtt{p}_4) \wedge (\neg\mathtt{p}_3 \vee \neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_4) \wedge (\neg\mathtt{p}_1 \vee \neg\mathtt{p}_2) \wedge \mathtt{p}_4 \wedge \neg\mathtt{p}_5$

   (b) $(\neg\mathtt{p}_2 \vee \neg\mathtt{p}_4) \wedge \neg\mathtt{p}_5 \wedge \neg\mathtt{p}_3 \wedge \mathtt{p}_2 \wedge (\neg\mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_4)$

   (c) $(\neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2) \wedge (\neg\mathtt{p}_2 \vee \neg\mathtt{p}_3) \wedge (\neg\mathtt{p}_1 \vee \neg\mathtt{p}_4 \vee \mathtt{p}_2)$

   (d) $\mathtt{p}_1 \wedge (\neg\mathtt{p}_2 \vee \neg\mathtt{p}_4) \wedge \mathtt{p}_2 \wedge (\neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_4)$

   (e) $(\neg\mathtt{p}_4 \vee \mathtt{p}_1) \wedge (\neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2) \wedge \mathtt{p}_1 \wedge (\neg\mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_3) \wedge (\neg\mathtt{p}_3 \vee \mathtt{p}_4)$

Definiția 1.14. *Rezolvent, demonstrație prin rezoluție* Vezi slide-urile 63 - 76.

EXERCIȚII

1. Să se reprezinte ca mulțime de clauze și să se studieze satisfiabilitatea folosind metoda rezoluției:

   (a) $(\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2) \wedge (\neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2) \wedge (\neg\mathtt{p}_2 \vee \neg\mathtt{p}_3) \wedge \mathtt{p}_3$

   (b) $(\neg\mathtt{p}_4 \vee \mathtt{p}_1) \wedge (\neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2) \wedge \mathtt{p}_1 \wedge (\neg\mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_3) \wedge (\neg\mathtt{p}_3 \vee \mathtt{p}_4)$

2. Găsiți o respingere pentru formulele:

   (a) $\{\{\mathtt{p}_1, \mathtt{p}_2, \neg\mathtt{p}_3\}, \{\neg\mathtt{p}_1\}, \{\mathtt{p}_1, \mathtt{p}_2, \mathtt{p}_3\}, \{\mathtt{p}_1, \neg\mathtt{p}_2\}\}$

   (b) $\{\{\mathtt{p}_1, \neg\mathtt{p}_2, \mathtt{p}_3\}, \{\mathtt{p}_2, \mathtt{p}_3\}, \{\neg\mathtt{p}_1, \mathtt{p}_3\}, \{\mathtt{p}_2, \neg\mathtt{p}_3\}, \{\neg\mathtt{p}_3\}\}$

3. Arătaţi că formula $(\neg\mathtt{p}_2 \wedge \neg\mathtt{p}_3 \wedge \mathtt{p}_4) \vee (\neg\mathtt{p}_2 \wedge \neg\mathtt{p}_4) \vee (\mathtt{p}_3 \wedge \mathtt{p}_4) \vee \mathtt{p}_2$ este tautologie, folosind metoda rezoluției.

4. Arătați că formula $\mathtt{G} = (\mathtt{p}_1 \wedge \mathtt{p}_2 \wedge \mathtt{p}_3)$ este consecinţă semantică din mulţimea de formule $\mathcal{G} = \{\neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2, \neg\mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_3, \mathtt{p}_1 \vee \neg\mathtt{p}_3, \mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_3\}$ folosind metoda rezoluţiei.

5. Fie formula $F \in LP$ și mulțimea de clauze $C \subseteq LP$ (unde $\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{e}, \mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \mathtt{s}, \mathtt{t} \in \mathtt{A}$). Să se arate că $C \models F$ folosind rezoluția:

   (a) $C = \{a \vee \neg b \vee c, \neg a \vee c, a \vee b \vee e, \neg c \vee e\}, F = e$.

   (b) $C = \{\neg p \vee \neg q \vee r, p, q\}, F = r$

   (c) $C = \{\neg q \vee p, \neg p \vee r \vee q, \neg p \vee \neg q, p \vee \neg t, \neg p \vee \neg r, p \vee q \vee s \vee t, p \vee \neg s \vee t\}, F = t$.

6. Fie formulele $G, H \in LP$, unde $G = (x \leftrightarrow z) \wedge y, H = (y \leftrightarrow z) \to x$ și $x, y, z \in A$. Aduceți formulele G și $\neg H$ în formă clauzală, apoi arătați că H este consecință semantică din G. Ce rezultate teoretice ați folosit?

7. Construiți graful complet de rezoluție (care reprezintă $Res^*(F)$) pentru formula F de mai jos:

   $$F = A \wedge B \wedge C \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee E) \wedge (\neg C \vee \neg E).$$

   Este F nesatisfiabilă? În acest caz, aplicați anumite ,,strategii de căutare /alegere” pentru a identifica mai repede o posibilă respingere.

Definiția 1.15. *Algoritmul DPLL* - vezi slide-uri.

EXERCIȚII

1. Aplicați Algoritmul DPLL formulelor din LP, aflate în FNC:
   (a) $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$
   (b) $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge \neg p \wedge \neg r$

2. Fie formula F, din logica /calculul propozițional ($p, q, r, s \in A$), dată prin:
   $F = \neg((p \to s) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to (s \wedge q \wedge r \wedge \neg p))))$.
   Aduceți F la o FNC, H, și aplicați apoi Algoritmul DPLL lui H. Ce puteți spune despre satisfiabilitatea lui F?

3. Reluați exercițiul anterior (în aceleași condiții) pentru formula:
   $F = (p \to ((q \vee r) \wedge s)) \wedge \neg(q \leftrightarrow (r \wedge (p \vee s)))$.
   Puteți găsi, în cazul în care F este satisfiabilă, un model S (pentru F), fără a modifica DPLL în mod esențial (ci doar adăugând câtiva pași suplimentari la algoritmul cunoscut)?
   Indicație. În momentul ,,eliminării" unui literal $a \in A$, se poate ,,ghici" o valoare a lui $S(a)$, astfel încât $S(F)$ să ,,aibă șanse" să fie egală cu 1.

4. Aplicați Algoritmul DP (și /sau DPLL) formulelor propoziționale care urmează și deduceți dacă sunt sau nu satisfiabile:
   (a) $F = A \wedge B \wedge (\neg A \vee D \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee E) \wedge (C \vee \neg E) \wedge J$.
   (b) $F = A \wedge B \wedge (\neg A \vee D \vee E) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee E) \wedge (C \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg E)$.

5. Arătați că formula propozițională F de mai jos, aflată în FNC, este nesatisfiabilă, prin toate metodele cunoscute:
   $$F = B \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg B)$$
   Se poate ,,extrage" (sintactic!) din F o submulțime strictă de clauze care să reprezinte ,,cu siguranță" o (sub)formulă nesatisfiabilă? Dar una având un ,,cardinal minim"?

Definiția 1.16. *Funcții booleene* - vezi slide-uri

Teorema 1.7. *Teoremele de descompunere în sumă de termeni și produs de factori* - vezi slide-uri

EXERCIȚII

1. Fie următoarele funcții booleene:
   (a) $f_1 \in FB^{(2)}$, $f_1(x, y) = x + x \cdot y$
   (b) $f_2 \in FB^{(3)}$, $f_2(x, y, z) = \overline{x \cdot y + z}(x + z)$
   (c) $f_3 \in FB^{(2)}$, $f_3(x, y) = \overline{(x \cdot (x \to y)) \to y}$
   (d) $f_4 \in FB^{(2)}$, $f_4(x, y) = \overline{x \cdot ((x \to y) \to y)}$
   (e) $f_5 \in FB^{(3)}$, $f_5(x, y, z) = x + (y \cdot (\bar{z} \oplus x))$ ($\oplus$ reprezintă ,,sau exclusiv")

   Pentru fiecare funcție:
   (a) găsiți o FNCP și o FNDP;
   (b) construiți o BDD redusă;
   (c) pentru cele care coincid cu funcția ,,identic 0", găsiți o formulă propozițională F care are ,,același tabel de adevăr" și apoi construiți o respingere pentru un G ($G \in LP, G \equiv F$), pornind cu clauzele lui G.

Definiția 1.17. *Deducția naturală* - vezi slide-uri

EXERCIȚII

1. Arătați că următoarele secvențe sunt valide ($\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \varphi \in LP$):

    (a) $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$

    (b) $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$

    (c) $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge r)$

    (d) $q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$

    (e) $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$

    (f) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

    (g) $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$

    (h) $(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \vdash q$

    (i) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ ((**LEM**) este derivată, în ordine, din $(\vee i_1)$, $(\neg e)$, $(\neg i)$, $(\vee i_2)$ (iar $(\neg e)$, iar $(\neg i)$ ...) și $(\neg\neg e)$)

    (j) $p \to q \vdash \neg p \vee q$ (aici, folosind (**LEM**))

2. Arătați, folosind deducția naturală:

    (a) $\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg q \vee \neg p$

    (b) $p \to q \dashv\vdash \neg q \to \neg p$

    (c) $(p \wedge q) \to p \dashv\vdash r \vee \neg r$

    (d) $\neg(p \vee q) \dashv\vdash \neg q \wedge \neg p$

    (e) $p \to q \dashv\vdash \neg p \vee q$

    (f) $(p \wedge q) \to r \dashv\vdash p \to (q \to r)$

Bibliografie

[1] M. Huth and M. Ryan. *Logic in computer science : modelling and reasoning about systems.* Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 2000.

[2] C. Masalagiu. *Fundamentele logice ale Informaticii.* Alexandru Ioan Cuza University Publishing House, 2004.