Cursul 4

Serii de numere reale

O altă modalitate de construcţie a mulţimii $\mathbb{R}$, care pleacă de la corpul comutativ şi ordonat al numerelor raţionale, este şi aceea bazată pe noţiunea de serie (de elemente din $\mathbb{Q}$), după cum dezvăluie Arnold şi John Knopfmacher în lucrarea lor cu titlul *"Two constructions of real numbers via alternating series"* (Internat. J. Math. & Math. Sci., vol 12, No 3, 1989, pp 603-613). Prin folosirea unui algoritm datorat lui Oppenheim, în virtutea căruia orice număr real r poate fi redat sub forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{b_1}{c_1}\frac{1}{a_2} + \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2}\frac{1}{a_3} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{b_1 \ldots b_{k-1}}{c_1 \ldots c_{k-1}} r_k,$$

unde $a_0 = [r]$ (partea întreagă a lui r), $r_1 = r - a_0$, $a_1 = \left[\frac{1}{r_1}\right]$ (dacă $r_1 \neq 0$) şi, recursiv, $a_m = \left[\frac{1}{r_m}\right]$ (când $r_m > 0$), $r_{m+1} = \left(\frac{1}{a_m} - r_m\right)\frac{c_m}{b_m}$, cu b_m şi c_m numere pozitive (în general, întregi) dependente de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $\forall\, m \in \{1, 2, \ldots, l\}$ $(l \leq k-1)$ - când $r_1, r_2, \ldots, r_l$ diferă de 0 - sau $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, când $\forall\, r_m \neq 0$, cei doi iau în consideraţie cazurile particulare în care fie $b_m = c_m = 1$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, fie $b_m = a_m$ şi $c_m = 1$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, referindu-se, în mod special, la mulţimea de reprezentări de tip Sylvester

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{a_n} + \ldots,$$

cu $a_i \in \mathbb{N}^*$, aşa încât $a_{i+1} \geq a_i(a_i + 1)$, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$ şi respectiv la mulţimea tuturor reprezentărilor de tip Engel

$$a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n} + \ldots,$$

cu $a_i \in \mathbb{N}^*$, aşa încât $a_{i+1} \geq a_i + 1$, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$. Înzestrând fiecare din cele două mulţimi cu adecvate operaţii algebrice de adunare şi înmulţire şi definind câte o relaţie de totală ordine pe ambele, autorii menţionaţi dovedesc în lucrarea lor că, atât prima mulţime, cât şi a cealaltă, satisface axiomele $AR1 \sim AR15$ (v. cursul 2), având pe $\mathbb{Q}$ ca submulţime proprie (a tuturor reprezentărilor Sylvester, respectiv Engel, cu număr finit de termeni). Evident, în prealabil, se acordă atenţie cuvenită acelor situaţii în care reprezentările Sylvester şi Engel au un număr infinit de termeni, supunându-se teoriei seriilor numerice reale. Întru familiarizarea cu aspectele de bază ale unei astfel de teorii, prezentăm aici, în cele ce urmează, noţiuni şi rezultate din sfera seriilor de numere reale. Importanţa cunoaşterii unor asemenea lucruri reiese şi din dezvăluirile şi preocupările unor lucrări de specialitate de dată recentă, între care este de menţionat cea semnată de G. Bagni, relativ la impactul ***seriei lui Guido Grandi*** (1703)

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

atât în trecut, cât şi în prezent ("Infinite Series from History to Mathematics Education", 2005).

Serii în $\mathbb{R}$. Fundamente

Cum, cu excepţia situaţiilor care se referă la $\mathbb{Q}$, atât reprezentările Engel, cât şi reprezentările Sylvester constituie, de fapt, sume (infinite) ale elementelor unui şir (de numere raţionale), este normal să ne întrebăm asupra semnificaţiei unor astfel de entităţi matematice în contextul "trecerii" de la un proces finit (cum este acela al calculului sumei unui număr finit de numere) la "extensia" sa infinită. În acest sens, iată câteva definiţii, exemple şi rezultate de ordin general.

Definiţia 4.1 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale, căruia îi asociem şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\subset\mathbb{R}$, cu termenul general*

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

*Perechea $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$ se numeşte **serie de numere reale** (sau **serie în** $\mathbb{R}$) şi se notează, convenţional, prin*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \;\; sau \; \sum_{n\geq 1} x_n \;\; sau \; \sum_{n=1}^{\infty} x_n \;\; sau \;\; : x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots.$$

*$(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numeşte **şirul sumelor parţiale ataşat seriei** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Termenul general al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, adică x_n, poartă denumirea de **termen general al seriei** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Observaţie: Uneori, când mulţimea indicilor şirului de referinţă (x_n) este $\mathbb{N}$, seria $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ se notează, în mod corespunzător, prin $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (sau $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ sau $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$). Dacă mulţimea respectivă este $\{n\in\mathbb{N} \mid n\geq n_0\}$ (unde $n_0\in\mathbb{N}$ este un anumit număr natural), atunci seria în cauză va fi notată cu $\sum\limits_{n\geq n_0} x_n$ (sau $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x_n$ sau $x_{n_0} + x_{n_0+1} + \ldots + x_n + \ldots$).

Definiţia 4.2 *Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ se numeşte **convergentă,** şi acest fapt se notează prin $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$, dacă şi numai dacă există $S\in\mathbb{R}$ astfel încât $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (adică şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent în $\mathbb{R}$, cu limita S). Numărul real S se numeşte **suma seriei** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ şi putem scrie: $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

*Dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu are limită în $\mathbb{R}$ (adică $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nu există sau, dacă există, este $-\infty$ sau $+\infty$), atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ se numeşte **divergentă** şi acest fapt se notează prin $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D)$.*

Exemple:

a) Fie $r\in\mathbb{R}$, arbitrar fixat. Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, în care $x_n = r^n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, se numeşte ***seria geometrică cu raţia*** r. Şirul sumelor parţiale ataşat ei are termenul general S_n dat prin

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}, & r\neq 1 \\ n+1, & r=1 \end{cases} \;\; \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ există şi este finită doar dacă $|r|<1$, putem spune că avem $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r^n(C)$, când $|r|<1$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r^n(D)$, când $|r|\geq 1$.

Aşadar, seria lui Grandi $1-1+1-1+\ldots$, adică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$, care este seria geometrică cu raţia $r=-1$, are statutul de serie divergentă. Ca atare, suma ei nu este nici 0, nici 1 şi nici $1/2$, după cum a existat (şi mai există încă, pe alocuri, şi în prezent), în mod eronat, impresia că aşa ar fi, ci nu există, pur şi simplu (în sensul Definiţiei 4.2).

b) Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă, deoarece avem: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$ şi $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

c) Seria $\sum_{n\geq 2} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$ este convergentă şi are suma $S = \sqrt{2}-1$, întrucât:
$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k^2-k}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{k-1}} - \sqrt{\frac{k+1}{k}}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi există $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) = \sqrt{2}-1 \in \mathbb{R}$.

d) Seria cu termenul general $\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergentă, deoarece şirul sumelor parţiale corespunzător ei, adică şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termenul general $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este monoton (strict) crescător, în virtutea faptului că $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi, totodată, este majorat (mărginit superior) căci avem:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Astfel, potrivit Teoremei 3.2 (v. cursul 3), şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

Definiţia 4.3 *Prin **natura** seriei* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *înţelegem calitatea ei de a fi convergentă sau divergentă.*

Definiţia 4.4 *Se numeşte **criteriu de convergenţă** (sau **criteriu de divergenţă** sau **criteriu de stabilire a naturii**), pentru o serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*, o anumită condiţie (sau un anumit set de condiţii) care, prin satisfacerea ei (a lui) de către* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*, ne permite să stabilim convergenţa (respectiv divergenţa sau natura) seriei cu termenul general* x_n.

Definiţia 4.5 *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie de numere reale. Dacă* $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *atunci **seria*** $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte **cu termeni nenegativi**; dacă* $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte **serie cu termeni pozitivi**, iar dacă* $x_n < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte **serie cu termeni negativi**. Atunci când* x_n *nu are acelaşi semn pentru orice valoare a indicelui* $n \in \mathbb{N}^*$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte **serie cu termeni oarecari**. În cazul în care* $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte **alternată**.*

Observaţie: Reprezentările Sylvester şi Engel ale unui număr real sunt serii alternate, cu elemente din $\mathbb{Q}$.

Definiţia 4.6 *Fie seria de numere reale* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $p \in \mathbb{N}^*$. *Se numeşte* ***rest de ordinul*** p *al seriei considerate (şi se notează cu* R_p*) seria* $\sum_{n=p+1}^{\infty} x_n$.

Definiţia 4.7 *O serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *şi în care* x_n *se poate pune sub forma* $y_n - y_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *unde* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir cu comportare cunoscută, se numeşte* ***serie telescopică.***

Observaţie: Seriile de la punctele b) şi c) ale exemplului de mai sus sunt, desigur, telescopice.

Definiţia 4.8 *a) Două serii de numere reale* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ *se numesc* ***egale*** *dacă şi numai dacă* $u_n = v_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. *În acest caz, scriem:* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$.

b) Seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ *se numesc* ***de aceeaşi natură*** *dacă şi numai dacă sunt, simultan, convergente sau divergente.*

De pildă, seriile de la punctele c) şi d) ale exemplului de mai înainte sunt de aceeaşi natură (fiind, ambele, convergente), pe când seriile de la b) şi d) sunt serii de naturi diferite (prima fiind divergentă, iar cealaltă convergentă).

Teorema 4.1 ***(Criteriul general - al lui Cauchy - de convergenţă a unei serii de numere reale)*** *Fie, în* $\mathbb{R}$, *o serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$. *Aceasta este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât, oricare ar fi* n *din* $\mathbb{N}^*$, *cu* $n \geq n_\varepsilon$, *avem:*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstraţie: În conformitate cu Definiţia 4.2, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă (în $\mathbb{R}$), dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale corespunzător ei, adică $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este un şir convergent. Dar, în $\mathbb{R}$, orice şir este convergent, dacă şi numai dacă este şir Cauchy. Aşadar, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir Cauchy, adică, potrivit Definiţiei 3.11 (v. cursul 3), dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$ avem: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Altfel spus, cum $S_{n+p} - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}$, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem: $|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$. ◀

Exemplu: Seria armonică alternată $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ este convergentă deoarece şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este convergent, fiind şir Cauchy. Într-adevăr, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1, \text{ când } \epsilon \in (0,1] \\ 1, \text{ când } \epsilon > 1 \end{cases} \in \mathbb{N}^*$, cu $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ partea întreagă a lui $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_\varepsilon + 1} < \varepsilon.$$

Prin negare, enunţul Teoremei 4.1 devine:

Propoziţia 4.1 ***(Criteriul general de divergenţă pentru o serie în*** $\mathbb{R}$***)*** *Seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă dacă şi numai dacă există* $\varepsilon_0 > 0$ *cu proprietatea că, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, k_n \geq n$ *şi* $\exists\, p_n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $|x_{k_n+1} + x_{k_n+2} + \ldots + x_{k_n+p_n}| \geq \varepsilon_0$.

Exemplu: Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$, numită ***armonică simplă*** (întrucât fiecare termen al ei, cu excepţia primului, este media armonică a celor care îl încadrează, adică $x_n = \dfrac{2}{x_{n-1}^{-1} + x_{n+1}^{-1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$), este divergentă. Astfel, pentru $k, p \in \mathbb{N}^*$ şi $p \geq k$, avem:

$$x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{k+p} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+p} > \frac{p}{k+p} \geq \frac{1}{2},$$

ceea ce înseamnă că există $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} > 0$ aşa încât are loc condiţia din enunţul Propoziţiei 4.1.

Propoziţia 4.2 ***(Criteriu de divergenţă)*** *Fie seria de numere reale* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*. Dacă şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *nu este convergent la* 0*, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: Presupunând, prin absurd, că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ ar fi convergentă, ar rezulta atunci că, potrivit Teoremei 4.1, pentru n trecut în rolul lui $n+1$ şi cu $p = 1$, avem $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, contrar ipotezei din enunţ. Deci $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (D)$. ◀

Observaţie: În mod necesar, pentru orice serie convergentă $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, trebuie să avem convergenţa la zero a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pe de altă parte, dacă, pentru o serie $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ de numere reale, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent la zero, nu înseamnă că seria respectivă este convergentă neapărat. *Condiţia* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *este numai* ***necesară*** *pentru convergenţa seriei cu termenul general* x_n (din $\mathbb{R}$), ***nu şi suficientă***.

Astfel, de exemplu, în cazul seriei armonice simple, chiar dacă $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ este, după cum deja am văzut, divergentă.

În ceea ce priveşte seria lui Grandi, adică seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n$, se vede, odată în plus, că, întrucât $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ nu există, seria respectivă este divergentă.

Definiţia 4.9 *a) O serie de numere reale* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***absolut convergentă*** *dacă şi numai dacă seria valorilor absolute ale termenilor săi, adică seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$ *este convergentă. În acest caz, notăm* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (AC)$.

b) Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***semiconvergentă*** *şi notăm acest fapt prin* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n (SC)$*, dacă şi numai dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă, dar nu şi absolut convergentă.*

Exemplu: Seria armonică alternată $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este semiconvergentă întrucât, după cum am văzut deja, ea este convergentă, dar nu şi absolut convergentă, căci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$, adică seria armonică simplă $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$, este divergentă.

Teorema 4.2 *Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.*

Demonstraţie: Fie seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$, cu $x_n\in\mathbb{R}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, aşa încât $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|x_n|(C)$. Prin urmare, potrivit Teoremei 4.1, putem afirma că, $\forall\,\varepsilon>0$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$, astfel încât:

$$||x_{n+1}|+|x_{n+1}|+\ldots+|x_{n+p}||<\varepsilon,\forall\, n\in\mathbb{N}^*,n\geq n_\varepsilon \text{ şi } \forall\, p\in\mathbb{N}^*$$

Altfel spus, avem $|x_{n+1}|+|x_{n+1}|+\ldots+|x_{n+p}|<\varepsilon$, $\forall\, n\geq n_\varepsilon$ şi $p\in\mathbb{N}^*$. De aici, folosind faptul că $|x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+p}|\leq|x_{n+1}|+|x_{n+1}|+\ldots+|x_{n+p}|$, deducem că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă.
◀

Exemplu: Seria alternată $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ este convergentă pentru că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|$, adică seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ este, după cum am arătat la punctul d) al primului exemplu de aici, convergentă.

Teorema 4.3 ***(Criteriul restului)*** *O serie $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\lim_{p\to\infty}R_p=0$ (unde R_p este restul de ordin p al seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$).*

Demonstraţie: Cum $R_p=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n-S_p$, $\forall\, p\in\mathbb{N}^*$, dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă şi are suma S, atunci $R_p=S-S_p$ şi $\lim_{p\to\infty}R_p=S-\lim_{p\to\infty}S_p=0$, deoarece $\lim_{p\to\infty}S_p=S$. Reciproc, dacă $\exists\lim_{p\to\infty}R_p=0$, atunci seria $\sum_{n=p+1}^{\infty}x_n$ este convergentă, ceea ce înseamnă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este convergentă. ◀

Observaţie: Din demonstraţia Teoremei 4.3 desprindem faptul că, dacă unei serii numerice din $\mathbb{R}$ i se adaugă sau i se înlătură un număr finit de termeni, atunci natura respectivei serii nu se schimbă.

Teorema 4.4 ***(Adunarea a două serii convergente din R şi înmulţirea unei serii din R cu un scalar (număr) real nenul)***

i) Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ converge şi are suma S' (în $\mathbb{R}$), iar seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}y_n$ converge şi are suma S'' (în $\mathbb{R}$), atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n+y_n)$ este convergentă, având suma $S'+S''$.

ii) Dacă $\lambda\in\mathbb{R}^*$ şi seria de numere reale $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă (sau divergentă), atunci seria seriile $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ şi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$ au aceeaşi natură.

Demonstraţie: i) Cum există $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=S'$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(y_1+y_2+\ldots+y_n)=S''$, este evident că există $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k+y_k)=S'+S''$. Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ este convergentă şi are suma $S'+S''$.

ii) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ este convergentă, atunci şirul sumelor ei parţiale este convergent (în $\mathbb{R}$). În consecinţă, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*$, şi şirul cu termenul general $\lambda\,(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, adică $\lambda x_1+\lambda x_2+\ldots+\lambda x_n$ este convergent, ceea ce înseamnă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)$ este convergentă. Când seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ este divergentă, atunci şirul $((x_1+x_2+\ldots+x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent, şi deci şi şirul $(\lambda\,(x_1+x_2+\ldots+x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*$, ceea ce revine la faptul că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$ este divergentă. Reciproc, dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$, unde $\lambda\in\mathbb{R}^*$, este convergentă, atunci, potrivit primei părţi a acestei demonstraţii a punctului ii), şi seria $\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă. Analog, dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$ este divergentă, atunci şi seria $\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este divergentă. Aşadar, $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*$, seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda x_n)$ au aceeaşi natură. ◀

Observaţie: Afirmaţia de la i) nu are loc şi atunci când seriile implicate sunt simultan divergente, întrucât, este posibil ca, uneori, seria sumă să fie convergentă. Astfel, de exemplu, seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n+1}$ sunt divergente, pe când seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right]$, având şirul sumelor parţiale constant, este convergentă.

Teorema 4.5 *Dacă, într-o serie convergentă de numere reale, se asociază termenii seriei în grupe finite, cu păstrarea ordinii termenilor, atunci se obţine tot o serie convergentă, cu aceeaşi sumă.*

Demonstraţie: Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n(C)$, cu $x_n\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, $\forall\,n\in\mathbb{N}^*$. Există deci $S\in\mathbb{R}$, aşa încât $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Fie acum seria $(x_1+x_2+\ldots+x_{n_1})+(x_{n_1+1}+\ldots+x_{n_2})+\ldots+\left(x_{n_{k-1}+1}+\ldots+x_{n_k}\right)+\ldots$, obţinută din seria iniţială prin asocierea termenilor ei în grupe finite de ăstrarea ordinii. Fie $y_k=x_{n_{k-1}+1}+\ldots+x_{n_k}$, $\forall\,k\in\mathbb{N}^*$. Atunci $y_1+y_2+\ldots+y_k=S_{n_k}$ şi deci $\lim\limits_{k\to\infty}(y_1+\ldots+y_k)=\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=S$, ceea ce înseamnă că seria nou-obţinută este convergentă, având aceeaşi sumă ca şi seria iniţială. ◀

Observaţii: 1) Prin asocierea în grupe finite a termenilor unei serii divergente din $\mathbb{R}$, cu păstrarea ordinii, se pot obţine serii convergente. Astfel, în cazul seriei lui G. Grandi, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n$, care este divergentă, putem să ne gândim la asocierea $(-1+1)+(-1+1)+\ldots+(-1+1)+\ldots$, obţinând astfel o serie convergentă, cu suma 0.

2) Dacă seria convergentă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ are termenul general x_n de forma unei sume finite, atunci, prin disociere se poate obţine o serie divergentă. De exemplu, din seria convergentă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right]$,

prin disociere, ajungem la seria divergentă $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n$.

Serii cu termeni din $\mathbb{R}_+$. Criterii de stabilire a naturii unei serii de numere reale pozitive.

Cum investigarea absolutei convergenţe a unei serii de numere reale revine la analiza convergenţei unei serii cu termeni din $\mathbb{R}_+$, este firesc să ne referim, în mod aparte, la serii de tipul $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Propoziţia 4.3 *O serie de numere reale nenegative* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *(cu* $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*) este convergentă dacă şi numai dacă şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, al sumelor sale parţiale, este majorat.*

Demonstraţie: Dacă seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ este convergentă, atunci $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi deci mărginit (în $\mathbb{R}$), adică şi majorat.

Reciproc, cum $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător. Fiind şi majorat, prin aplicarea Teoremei 3.2 , şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Deci : $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$. ◀

Teorema 4.6 ***(Criteriile de comparaţie I, II şi III)***

(CC I) *Fie seriile cu termeni reali pozitivi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$, *aşa încât* $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

- *a) Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C)$, *atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$;
- *b) Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D)$, *atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D)$.

(CC II) *Fie seriile* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$, *cu* $x_n > 0, y_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât* $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

- *a) Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C)$, *atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$;
- *b) Dacă* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D)$, *atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D)$.

(CC III) *Fie seriile* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$, *cu* $x_n > 0, y_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *aşa încât există* $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ $(\in [0, +\infty])$.

- *a) Dacă* $l \in (0, +\infty)$, *atunci seriile* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *au aceeaşi natură;*
- *b) Dacă* $l = 0$, *atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C) \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C)$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D) \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D)$.
- *c) Dacă* $l = +\infty$, *atunci* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(C) \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C)$ *şi* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D) \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D)$.

Demonstraţie: (CC I) $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S'_n = x_1 + \ldots + x_n \leq y_1 + \ldots + y_n = S''_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Când $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(C)$, şirul $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este majorat, coform Propoziţiei 4.3. Atunci şi şirul $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este majorat. Dar şi monoton crescător, întrucât $S'_n - S'_{n-1} = x_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Prin urmare, potrivit aceleiaşi propoziţii 4.3, $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi deci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă. Astfel, are loc a).

Pentru b), dacă avem $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n(D)$, atunci $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S'_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este un şir nemărginit şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = +\infty$. În consecinţă, deoarece $S'_n \leq S''_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} S''_n = +\infty$, ceea ce înseamnă că $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n(D)$.

Pentru (CC II), înmulţind relaţiile $\dfrac{x_2}{x_1} \leq \dfrac{y_2}{y_1}$, $\dfrac{x_3}{x_2} \leq \dfrac{y_3}{y_2}$, $\ldots$, $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} \leq \dfrac{y_n}{y_{n-1}}$, găsim : $\dfrac{x_n}{x_1} \leq \dfrac{y_n}{y_1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Altfel spus, avem: $x_n \leq \dfrac{x_1}{y_1} y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, ţinând seama de (CC I) şi de Teorema 4.4, rezultă ambele concluzii de la (CC II).

Pentru (CC III), dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ există şi este finită ($l \in [0, \infty)$), atunci, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât

$$(*) \quad l - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < l + \varepsilon, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon.$$

Pentru a), când $l > 0$, luăm $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$ şi vom avea $\dfrac{l}{2} < \dfrac{x_n}{y_n} < \dfrac{3l}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon$. Astfel, prin aplicarea criteriului (CC I) şi a Teoremei 4.4, rezultă concluzia cerută, seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ fiind de aceeaşi natură.

Pentru b), când $l = 0$, din (*) putem conta numai pe partea dreaptă, adică pe relaţia $x_n < \varepsilon y_n$, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$. Atunci, iarăşi prin folosirea Teoremei 4.4 şi a criteriului (CC I), se ajunge la concluzia din enunţ.

Pentru c), când $l = \infty$, avem: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq \tilde{n}_\varepsilon$, are loc relaţia $\dfrac{x_n}{y_n} > \varepsilon$. Altfel spus, $\dfrac{y_n}{x_n} < \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\forall\, n \geq \tilde{n}_\varepsilon$. Se aplică acum (CC III, b), cu x_n şi y_n în roluri inversate. ◀

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sin \dfrac{1}{n^2+1}$ are termeni pozitivi. Luând în consideraţie seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}\,(C)$ şi observând că există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin \dfrac{1}{n^2+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = 1 \in (0, +\infty)$, putem spune, prin aplicarea criteriului (CC III, a), că seria dată este de aceeaşi natură cu seria (de comparaţie) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$.

Deci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sin \dfrac{1}{n^2+1}\,(C)$.

Teorema 4.7 ***(Criteriul general de condensare al lui Cauchy)*** *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie cu termeni reali pozitivi, aşa încât şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este descrescător. Dacă există un şir* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de numere naturale, strict crescător şi divergent, astfel încât şirul* $\left(\dfrac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ *este mărginit, atunci seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (k_{n+1} - k_n)\, x_{k_n}$ *sunt de aceeaşi natură.*

Demonstraţie: Fie $y_n = x_{k_n+1} + x_{k_n+2} + \ldots + x_{k_{n+1}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir descrescător, avem:

$$(k_{n+1} - k_n)\, x_{k_{n+1}} \le y_n \le (k_{n+1} - k_n)\, x_{k_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

De aici, întrucât şirul $\left(\dfrac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ este mărginit şi cu elemente pozitive, adică există $M > 0$, aşa încât

$$0 < \frac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} < M, \forall\, n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\},$$

avem, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, relaţia

$$\frac{1}{M}\,(k_{n+2} - k_{n+1})\, x_{k_{n+1}} < \frac{k_{n+1} - k_n}{k_{n+2} - k_{n+1}}\,(k_{n+2} - k_{n+1})\, x_{k_{n+1}} =$$

$$= (k_{n+1} - k_n)\, x_{k_{n+1}} \le y_n \le (k_{n+1} - k_n)\, x_n$$

Pe baza acesteia, conform criteriului (CC I) şi a Teoremei 4.4, rezultă că seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (k_{n+1} - k_n)\, x_{k_n}$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ sunt de aceeaşi natură. Dar cum, potrivit Teoremei 4.5, seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ sunt de aceeaşi natură, putem conchide că are loc concluzia prezentei teoreme. ◀

Observaţie: De regulă, în aplicaţii, se ia $k_n = 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Evident că, în acest caz, şirul $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict cresător şi divergent în $\mathbb{N}$, iar $\dfrac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}} = \dfrac{2^{n+1} - 2^n}{2^n - 2^{n-1}} = 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar şirul $\left(\dfrac{k_{n+1} - k_n}{k_n - k_{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*\{1\}}$ este mărginit. Atunci, particularizând aplicarea Teoremei 4.7, putem afirma că seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ (unde $x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir descrescător) şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n x_{2^n}$ (unde $2^n = k_{n+1} - k_n = 2^{n+1} - 2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$) sunt de aceeaşi natură. Acesta este, de fapt, ***criteriul simplu de condensare al lui Cauchy***.

Exemplu: Pentru aşa-numita ***serie armonică generalizată***, adică pentru seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$, unde α este un parametru real , aplicarea criteriului simplu de condensare al lui Cauchy ne conduce la concluzia că natura seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$ este aceeaşi cu a seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^\alpha$, adică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{2^{(\alpha-1)n}}$, care nu este altceva decât o serie geometrică cu raţia $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$. Cum aceasta din urmă este convergentă când $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$ şi divergentă în rest, adică pentru $0 \le \alpha \le 1$, concluzionăm că seria armonică generalizată este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă când $\alpha \le 1$ (pentru $\alpha < 0$ seria este evident divergentă, termenul ei general nefiind convergent la 0).

Odată în plus, vedem astfel că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind una armonică generalizată, cu $\alpha = 2 > 1$.

Teorema 4.8 *(**Criteriul rădăcinii** - al lui Cauchy, **cu limită**) Fie seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n \ge 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, aşa încât există $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Atunci:*

i) dacă $l < 1$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă;

ii) dacă $l > 1$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă;

iii) dacă $l = 1$, nu putem decide natura seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

Demonstraţie: Întrucât există $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \in [0, +\infty)$, avem: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, are loc relaţia

$$(\bullet) \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{x_n} < l + \varepsilon.$$

În cazul i), deoarece $l < 1$, putem lua $\varepsilon \in (0, 1 - l)$ şi atunci rezultă că $x_n < (l + \varepsilon)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, cu $0 < l + \varepsilon < 1$. Prin aplicarea criteriului (CC I), pe baza faptului că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (l + \varepsilon)^n$ este convergentă, ca serie geometrică cu raţia subunitară, rezultă că $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă.

În cazul ii), cum $l > 1$, putem lua $\varepsilon \in (0, l - 1)$ şi atunci, din $(\bullet)$ rezultă că $1 < (l - \varepsilon)^n < x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_\varepsilon$. Pe baza aceluiaşi criteriu, (CC I), întrucât seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (l - \varepsilon)^n$, în care $l - \varepsilon > 1$, este divergentă, rezultă că avem: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\, (D)$.

În fine, când $l = 1$, adică în cazul iii), nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, după cum reiese din exemplele în care $x_n = \dfrac{1}{n}$ sau $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. În ambele situaţii, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}}$, dar $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}\, (D)$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}\, (C)$. ◀

Observaţie: Atunci când nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, o variantă mai "slabă" a criteriului rădăcinii are loc cu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$ în rolul lui l, la i) şi cu $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$, în loc de $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, la ii).

Teorema 4.9 *(**Criteriul lui Kummer**) Fie seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, cu $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă există şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$, astfel încât şirul $\left(a_n \dfrac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are limită, fie ea notată cu l, atunci:*

i) când $l > 0$, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă;

ii) când $l < 0$, iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{a_n}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă;

iii) când $l = 0$, nu putem stabili natura seriei date.

Demonstraţie: În cazul i), cum $l > 0$, obţinem: $\forall\, \varepsilon \in (0, l)$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$,

$$0 < l - \varepsilon < a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} < l + \varepsilon.$$

De aici, reiese că:

$$(\bullet\bullet) \quad 0 < x_{n+1} < \frac{a_n x_n - a_{n+1} x_{n+1}}{l - \varepsilon}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon.$$

În consecinţă, şirul $(a_n x_n)_{n \geq n_\varepsilon}$ este descrescător. Cum, în plus, $0 < a_n x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, se poate spune că şirul $(a_n x_n)_{n \geq n_\varepsilon}$ este convergent. Deci există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = \lambda$. Atunci:

$$\sum_{n \geq n_\varepsilon} \frac{1}{l-\varepsilon}\left(a_n x_n - a_{n+1}x_{n+1}\right) = \frac{1}{l-\varepsilon} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=n_\varepsilon}^{k} \left(a_n x_n - a_{n+1}x_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{l-\varepsilon} \lim_{k\to\infty} \left(a_{n_\varepsilon} x_{n_\varepsilon} - a_{k+1}x_{k+1}\right) = \frac{1}{l-\varepsilon}\left(a_{n_\varepsilon} x_{n_\varepsilon} - \lambda\right).$$

Prin urmare, seria $\sum\limits_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{l-\varepsilon}\left(a_n x_n - a_{n+1}x_{n+1}\right)$ este convergentă. În virtutea acestui fapt, ţinând seama de relaţia (••), rezultă că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, conform criteriului (CC I).

În cazul ii), cum $l < 0$, găsim că, pentru orice $\varepsilon \in (0, -l)$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, aşa încât:

$$a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} < l + \varepsilon < 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon.$$

Altfel spus, avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}, \forall\, n \geq n_\varepsilon$. Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a_n}$ fiind divergentă prin ipoteză, reiese atunci, prin aplicarea criteriului (CC II), că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă.

În cazul în care $l = 0$, nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$. Astfel, pentru $x_n = \frac{1}{n}$ şi $a_n = n$, avem $a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} = 0$, iar $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(D)$. Pe când, pentru $x_n = \frac{1}{n^2}$ şi $a_n = n^2$, avem $a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} = 0$, cu $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(C)$. ◀

Observaţii:

j) Luând $a_n = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, pe baza Teoremei 4.9, obţinem următorul ***criteriu*** (***al raportului*** sau ***al lui D'Alembert***) de stabilire a naturii seriei cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$:

"*Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$, *pentru care există limita* $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. *Dacă* $L < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(C)$, *în timp ce, dacă* $L > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\,(D)$, *iar dacă* $L = 1$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$."

jj) În cazul în care $a_n = n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, Teorema 4.9 furnizează aşa-numitul ***criteriu al lui Raabe-Duhamel***, cu următorul enunţ:

"*Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$, *aşa încât există limita* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right)\right] = \rho$. *Dacă* $\rho > 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă, iar dacă* $\rho < 1$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă. Dacă* $\rho = 1$, *nu putem stabili, cu certitudine, natura seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$."

jjj) Dacă, în Teorema 4.9, luăm $a_n = n \ln n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci obţinem aşa-numitul ***criteriu al lui Bertrand***, cu enunţul următor:

"*Fie seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *unde* $x_n > 0$, $\forall\, n \in N^*$. *Presupunem că există următoarea limită:* $\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} n \ln n - (n+1)\ln(n+1)\right)$. *Atunci, dacă* $\mu > 0$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă, iar dacă* $\mu < 0$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă. Când* $\mu = 0$, *nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$."

Teorema 4.10 *(**Criteriul lui Gauss**) Fie seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, *cu* $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă raportul* $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ *se poate exprima sub forma*

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{x_n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, *iar şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este mărginit, atunci:*

a) când $\alpha > 1$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

b) când $\alpha < 1$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă;*

c) când $\alpha = 1$ *şi* $\beta > 1$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

d) când $\alpha > 1$ *şi* $\beta \leq 1$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie: a) În ipotezele din enunţ, vedem că există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}$ şi această limită este egală cu α. Altfel spus, există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\alpha}$. Atunci, prin aplicarea criteriului raportului, putem spune că, pentru $\frac{1}{\alpha} < 1$, adică pentru $\alpha > 1$, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă. Tot astfel, când $\alpha < 1$, seria care ne interesează este, întru concluzia de la b), divergentă. Când $\alpha = 1$, nu ne putem pronunţa, prin criteriul lui D'Alembert, asupra naturii seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$. În acest caz însă, vedem că avem:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \beta + \frac{y_n}{n^\gamma}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Astfel, prin aplicarea criteriului lui Raabe-Duhamel, găsim că, atunci când $\beta > 1$, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, iar când $\beta < 1$, ea este divergentă. Avem aşadar atinse concluzia de la c) şi, cu excepţia cazului $\alpha = 1$ şi $\beta = 1$, concluzia de la d).

În fine, când $\alpha = 1$ şi $\beta = 1$, întru aplicarea criteriului lui Bertrand, constatăm că:

$$n \ln n \frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = n \ln n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}\right) -$$

$$-(n+1)\ln(n+1) = (n+1)\ln\frac{n}{n+1} + y_n\frac{\ln n}{n^\gamma} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 < 0.$$

Aceasta deoarece $\dfrac{\ln n}{n^\gamma} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi $\left[(n+1)\ln\dfrac{n}{n+1}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln e = -1$. Prin urmare, în conformitate cu respectivul criteriu, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este divergentă. ◀

Criterii de convergenţă pentru serii de numere reale cu termeni oarecari.

Teorema 4.11 ***(Criteriul lui Dirichlet)*** *Fie seria de numere reale $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, unde $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi are forma $x_n = y_n z_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă şirul sumelor parţiale ce corespunde seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ este mărginit şi dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător şi convergent la 0, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă.*

Demonstraţie: Deoarece, prin ipoteză, şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, este mărginit, există $M > 0$, astfel încât $|S_n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. În acelaşi timp, întrucât şirul de numere reale pozitive $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi convergent la 0, avem:

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*,\ \text{aşa încât}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon, : z_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Atunci, în intenţia aplicării criteriului general al lui Cauchy de convergenţă pentru seria cu termenul general $x_n = y_n z_n$, obţinem faptul că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există n_ε de mai sus, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| = |y_{n+1}z_{n+1} + \ldots + y_{n+p}z_{n+p}| =$$
$$= |(S_{n+1} - S_n)\, z_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1})\, z_{n+2} + \ldots + (S_{n+p} - S_{n+p-1})\, z_{n+p}| =$$
$$= |-S_n z_{n+1} + S_{n+1}(z_{n+1} - z_{n+2}) + \ldots + S_{n+p-1}(z_{n+p-1} - z_{n+p}) + S_{n+p}z_{n+p}| \leq$$
$$\leq M z_{n+1} + M(z_{n+1} - z_{n+2}) + \ldots + M(z_{n+p-1} - z_{n+p}) + M z_{n+p} = 2M z_{n+1} < \varepsilon.$$

Aşadar, în conformitate cu respectivul criteriu, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, este convergentă. ◀

Exemplu: Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ este convergentă, deoarece se aplică Teorema 4.11, cu $y_n = \cos n$ şi $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Avem: $S_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n = \dfrac{\cos\dfrac{n}{2}\cdot\cos\dfrac{n+1}{2}}{\sin\dfrac{1}{2}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Deci $|S_n| \leq \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{1}{2}\right|} = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. În acelaşi timp, şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător şi convergent la 0. În consecinţă, seria din acest exemplu este convergentă.

Teorema 4.12 ***(Criteriul lui Abel)*** *Fie seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*, unde* $x_n \in \mathbb{R}$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $x_n = u_n v_n$*,* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$*. Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ *din* $\mathbb{R}$ *este convergentă, iar şirul* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este unul monoton şi mărginit, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n v_n$ *(adică* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$*) este convergentă.*

Demonstraţie: Să zicem că $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton crescător şi mărginit. Atunci, el este convergent (în $\mathbb{R}$). Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Evident, $v_n - l \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Scriind $u_n v_n$ sub forma $u_n v_n = u_n(v_n - l) + l u_n = -u_n(l - v_n) + l u_n$, vedem că, în virtutea Teoremei 4.2, pe baza ipotezei de convergenţă a seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$, reiese că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} l u_n$ este convergentă, iar, în acelaşi timp, prin aplicarea criteriului lui Dirichlet (Teorema 4.11) asupra seriei cu termenul general $u_n(l - v_n)$, vedem că şirul $(l - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are toate elementele pozitive, este descrescător şi convergent la 0, pe când şirul sumelor parţiale ce corespund seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ este mărginit, întrucât seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ este, prin ipoteză, convergentă. Ca atare, seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(l - v_n)$ este convergentă şi ea. Rezultă atunci că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n v_n$, ca diferenţă a două serii convergente, este finalmente convergentă. ◀

Teorema 4.13 ***(Criteriul lui Leibniz, pentru serii alternate)*** *Dacă şirul* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de numere reale pozitive este descrescător şi convergent la* 0*, atunci seria alternată* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n w_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie: Aplicăm criteriul lui Dirichlet, luând $y_n = (-1)^n$ şi $z_n = w_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Întrucât $S_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \begin{cases} 1, & \text{când } n \text{ este par} \\ 0, & \text{când } n \text{ este impar} \end{cases}$, se vede că $|S_n| \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, cum şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ este descrescător şi convergent la 0, ipotezele criteriului lui Dirichlet sunt îndeplinite. Astfel, prin utilizarea acestui criteriu, rezultă că seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n z_n$, adică seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n w_n$, este convergentă. ◀

Alte rezultate relative la serii de numere reale (fără demonstraţii)

Teorema 4.14 ***(Riemann)***

Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie semiconvergentă de numere reale. Atunci:*

i) există o bijecţie $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *pentru care seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\tau(n)}$ *este divergentă;*

ii) pentru orice $r \in \mathbb{R}$*, există o bijecţie* $\varphi_r : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$*, astfel încât seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\varphi_r(n)}$ *este convergentă şi are suma egală cu* r*.*

Definiţia 4.10 *O serie de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte* ***necondiţionat convergentă*** *dacă şi numai dacă, oricare ar fi bijecţia* $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\psi(n)}$ *este convergentă.*

Teorema 4.15 *Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este absolut convergentă, atunci ea este necondiţionat convergentă şi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\psi(n)},$$

oricare ar fi bijecţia $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$.

Definiţia 4.11 *Se numeşte* ***produs Cauchy al seriilor*** *de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$, *unde* $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_{n-k+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 4.16 *(**Mertens**)*
Dacă două serii de numere reale sunt convergente şi cel puţin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs Cauchy al celor două serii este convergentă, iar suma ei este egală cu produsul sumelor celor două serii.

Propoziţia 4.4 *Produsul Cauchy a două serii absolut convergente este o serie absolut convergentă, cu suma egală cu produsul sumelor celor două serii.*

Teorema 4.17 *(**asupra dezvoltării** p**-adice a unui număr** a**, real, pozitiv şi subunitar**)*
Fie $p \in \mathbb{N}^*$, *cu* $p > 1$. *Dacă* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *este un şir de numere naturale, aşa încât* $0 \le a_k < p$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{p^k}$ *este convergentă, iar suma sa este un număr real* $a \in [0, 1]$.

Teorema 4.18 *(**de dezvoltare** p**-adică a unui număr real** $a \in (0, 1]$)*
Fie $p \in \mathbb{N}^*$, *cu* $p > 1$ *şi* $a \in (0, 1]$. *Atunci există un şir de numere naturale* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, *neconstant nul de la un rang înainte, aşa încât* $0 \le a_k \le p-1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $a = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{a_k}{p^k}$

Teorema 4.19 *(**de aproximare a sumei unei serii alternate**)*
Fie seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n x_n$, *cu* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$ *descrescător şi convergent la* 0. *De asemenea, fie* S *suma acestei serii şi* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şirul corespunzător al sumelor parţiale .*
Atunci:

$$|S - S_n| < x_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 4.20 *(**de aproximare a sumei unei serii absolut convergente**) Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie absolut convergentă de numere reale,* S *suma sa şi* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şirul corespunzător al sumelor parţiale . Atunci, dacă există* $\lambda \in (0, 1)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

i) $\sqrt[n]{|x_n|} \le \lambda$, $\forall\, n \ge n_0$, *avem:* $|S - S_n| \le \dfrac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$, $\forall\, n \ge n_0$
sau

ii) $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \lambda$, $\forall\, n \geq n_0$, *avem:* $|S - S_n| < \frac{|x_{n+1}|}{1-\lambda}$, $\forall\, n \geq n_0$.

Bibliografie

1. A. Knopfmacher, J. Knopfmacher - *Two Constructions of the Real Numbers via Alternating Series*, Iternat. J. Math & Math. Sci., Vol. 12, no. 3 (1989), pp 603-613.

2. J. Galambos - *The Representation of Real Numbers by Infinite Series*, Lecture Notes in Math., 502, Springer, 1976.

3. C. Badea - *A theorem of irrationality of infinte series and applications*, Acta Arithmetica, LXIII, 4 (1993).

4. G. Bagni - *Infinite Series from History to Mathematics Education*, 2005.

5. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 3)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

6. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul Diferenţial. (Cap. 2)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

7. Elena Macovei, F. Iacob - *Matematică (pentru anul I, info, ID)*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2006.

8. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 2)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

9. Marina Gorunescu - *Lecţii de analiză matematică pentru informaticieni*, Reprografia Univ. Craiova, 2000.