Setul 6
de probleme şi exerciţii de matematică
(relative la aspecte topologice legate de $\mathbb{R}^n$)

S6.1 Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $A \in \mathcal{P}(X)$. Să se arate că are loc egalitatea

$$\mathcal{C}(\mathring{A}) = \overline{\mathcal{C}(A)}.$$

S6.2 Să se demonstreze că:

i) o mulţime A dintr-un spaţiu topologic (X, τ) este deschisă dacă şi numai dacă

$$A \cap \partial A = \varnothing.$$

ii) $\overline{A} = A \cup \partial A$, $\forall\ A \subseteq (X, \tau)$.

S6.3 Să se găsească interiorul, închiderea, mulţimea derivată, mulţimea punctelor izolate (partea discretă), frontiera şi exteriorul următoarelor submulţimi din $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{R}^2$, în raport cu topologia uzuală în cauză:

i) $A = \left\{ \dfrac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \dfrac{n-2}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

ii) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x^2 + 1, x^2 < 1 - y \right\}$;

iii) $A = A_1 \times A_2$, unde $A_1 = (-3, 2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}_-)$ şi $A_2 = \left\{ \dfrac{(n+2)(-1)^{[\frac{n}{3}]} + 4}{5n - 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

S6.4 Să se verifice că următoarele aplicaţii definesc metrici pe mulţimile specificate:

a) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \begin{cases} \min\{1, |x - y|\}, & x, y \in \mathbb{Q}, \\ \min\{|x - y|, 2\}, & x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{în rest.} \end{cases}$.

b) $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{când } x_1 = y_1, \\ |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{când } x_1 \neq y_1, \end{cases}$,
$\forall\ x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$,
$\forall\ x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

S6.5 Se consideră $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, astfel încât:

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ şi

ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (Lindenbaum).

Să se demonstreze că d este o metrică pe $\mathbb{R}^n$.
S6.6 Dacă d este o metrică pe $\mathbb{R}^n$, să se arate că au loc relaţiile următoare:

a) $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)$, $\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}^n$ (inegalitatea triunghiului).

b) $|d(x,y)-d(u,v)| \leq d(x,u)+d(y,v)$, $\forall\ x,y,u,v \in \mathbb{R}^n$ (inegalitatea patrulaterului).

S6.7 Fie $\rho \subseteq \{(d,\hat{d}) \mid d$ şi $\hat{d}$ sunt metrici pe $\mathbb{R}^n$ şi $\exists\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}_+^*$, aşa încât $\lambda d(x,y) \leq \hat{d}(x,y) \leq \mu d(x,y), \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n\}$. Să se arate că relaţia binară ρ este una de echivalenţă pe mulţimea distanţelor definite pe $\mathbb{R}^n$.

S6.8 Fie X un $\mathbb{R}$-spaţiu liniar şi d o metrică pe X. Să se arate că dacă d este compatibilă cu operaţiile spaţiului liniar X, fiind

i) invariantă la translaţii, adică

$$d(x+z,y+z)=d(x,y), \forall\ x,y,z \in X \text{ şi}$$

ii) supusă la condiţia

$$d(\lambda x,\theta)=|\lambda| d(x,\theta),\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, x \in X,$$

atunci aplicaţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\|x\| = d(x,\theta),\ \forall\ x \in X,$$

este o normă pe X (θ este vectorul nul din X).

1. **S6.9** Să se arate că, într-un spaţiu metric oarecare (X,d), aderenţa unei mulţimi $A \subset X$, în raport cu topologia τ_d, indusă de metrica pe X, coincide cu mulţimea tuturor acelor elemente din X a căror distanţă la A este egală cu 0.

S6.10 Să se studieze natura următoarelor şiruri şi, atunci când este cazul, să se determine limitele corespunzătoare:

a) $(x_n,y_n,z_n,t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^4$, unde

$$x_n = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2);\ y_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right),$$

$$z_n = \left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} \text{ şi } t_n = n(\pi - 2\mathrm{arctg} n),\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

b) $(x_n,y_n,z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^3$, unde $0 \leq 3x_{n+1} \leq y_n+z_n$, $0 \leq 3y_{n+1} \leq x_n+z_n$, $0 \leq 3z_{n+1} \leq x_n+y_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

c) $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^2$, unde $x_n = \left(\dfrac{n!(n+4)!}{[(n+2)!]^2}\right)^n$ şi $y_n = \sqrt[n]{C_n^1 \cdot C_n^2 \cdot \ldots \cdot C_n^n}$, $\forall\ n \geq 2$.

d) $(x_n,y_n,z_n,u_n,v_n,w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^6$, unde $x_n = \dfrac{3n}{5n+2}$, $y_n = \sin\dfrac{\pi}{n+4}$, $z_n = \left(1+\dfrac{7}{n}\right)^n$, $u_n = \sqrt[n]{n-1}$, $v_n = 6+\dfrac{(-1)^n}{n}$ şi $w_n = 3^{-n}-1$, $\forall\ n \geq 2$.

S6.11 Să se analizeze natura următoarelor serii:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+1)\sqrt[3]{n^2+1}}{n^3+2n+1}, \left(\frac{3+(-1)^n}{5}\right)^n, 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}\right)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}, \frac{3n^2+n-2}{n!}\right)$;

c) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \frac{n!}{n^{2n}}, \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(3k-1)}, \frac{\ln(n+1)-\ln n}{(\ln n)^2}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n, \frac{\sin(nx)}{n^x}\right)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

S6.12 Să se arate că, într-un spaţiu topologic oarecare (X, τ), avem: $\overline{A} = C(Ext(A)), \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.
S6.13 Să se demonstreze că:

i) o mulţime $A \subset (X, \tau)$ este închisă dacă şi numai dacă $\partial A \subset A$;

ii) $\mathring{A} = A \setminus \partial A, \forall\, A \in \mathcal{P}(X)$.

S6.14 Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$d(x, y) = |\text{arctg}\ x - \text{arctg}\ y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că d este o distanţă pe $\mathbb{R}$ şi că nu există vreo normă pe $\mathbb{R}$ care să inducă metrica d. Este d echivalentă cu metrica uzuală pe $\mathbb{R}$?
S6.15 Să se găsească mulţimile de puncte remarcabile relativ la următoarele mulţimi:

a) $B = \left\{\frac{n-1}{n}\cos\frac{n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ sau } y \in \mathbb{Q}\}$;

c) $A = [(-3, 1) \cap \mathbb{Q}] \cup \left\{\frac{2+(-1)^n n}{5n+3} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

S6.16 Să se analizeze şirul şi seria date:

a) $((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}^3$, unde $x_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$, $y_n = \sum_{k=1}^{n}\text{arctg}\ \frac{1}{k^2+3k+3}$ şi $z_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}, \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \frac{(n+1)\sin\frac{n\pi}{6}}{n(n^3+1)}\right)$.

Bibliografie folositoare

1. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
2. Anca-Maria Precupanu, Liviu Florescu, Gh. Blendea, M. Cuciureanu - *Spaţii metrice. Probleme*, Ed. Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 1990.
3. Ana Niţă, Tatiana Stănăşilă - *Probleme rezolvate şi exerciţii fundamentale,* Ed. ALL, Bucureşti, 2004.

4. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. J. Shen - *General Topology*, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 2011

6. Paul Garrett - *Review of Metric Spaces*, Univ. of Minnesota Press, 2013.

7. T.W. Körner - *Metric and Topological Spaces*, University of Cambridge, 2015.