Calcul Numeric

Cursul 7

2020

Anca Ignat

Metoda Jacobi pentru rezolvarea sistemelor liniare

Fie sistemul:

$$Ax = b\,, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad b \in \mathbb{R}^{n}$$

cu

$$\det A \neq 0 \quad , \quad a_{ii} \neq 0\,,\ i = 1,2,\ldots,n$$

Alegem:

$$B = \mathrm{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det B = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$$

$$B^{-1} = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Matricea $\boldsymbol{C}$ este:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{dacă } i \neq j \\ 0 & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

Matricea iteraţiei se poate calcula şi are forma:

$$M := B^{-1}C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad m_{ij} = \begin{cases} -(\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}) & \text{dacă } i \neq j \\ 0 & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

Construim vectorul g:

$$g := Mx^{(k)} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad Mx^{(k)} = (g_i)_{i=1}^n$$

Componentele vectorului g sunt:

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j^{(k)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} = -(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} \quad , i = 1,\dots,n$$

Vectorul $\boldsymbol{d}$ este:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{d}_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n , \quad \boldsymbol{d}_i = \frac{\boldsymbol{b}_i}{\boldsymbol{a}_{ii}}, i = 1,\ldots,n$$

Şirul $\{x^{(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se construieşte folosind formula:

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d \quad \leftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = g_i + d_i \ , i = 1,\ldots,n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1,\ldots,n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \qquad (9)$$

Formula (9) descrie ***metoda lui Jacobi*** de aproximare a soluţiei unui sistem liniar.

Condiţii suficiente de convergenţă

Propoziţia 1

$$\| M \| < 1 \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \to x^*, \; k \to \infty.$$

Demonstraţie. Fie x^* soluţia sistemului $Ax=b$. Din relaţia $A=B-C$ rezultă $Bx^* = Cx^* + b$ sau $x^* = Mx^* + d$.
Procesul iterativ $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d$ conduce la relaţia:

$$\left\| x^* - x^{(k+1)} \right\| = \left\| M\left(x^* - x^{(k)} \right) \right\| \le \| M \| \left\| x^* - x^{(k)} \right\| \le \cdots \le \| M \|^{k+1} \left\| x^* - x^{(0)} \right\|$$

În continuare vom aplica această propoziţie pentru diverse norme.

- Din $\| M \|_F = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ deducem:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right)^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \to x^*, k \to \infty \tag{10}$$

- Din $\| M \|_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} | m_{ij} |; j = 1,\ldots,n\} < 1$ deducem:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{| a_{ij} |}{| a_{ii} |} \right) < 1 \quad \forall j = 1,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \to x^{*}, k \to \infty \quad (11)$$

- ***(Criteriul dominanţei diagonalei pe linii)***

Din $\| M \|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n} | m_{ij} |; i = 1,\ldots,n\} < 1$ deducem:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{| a_{ij} |}{| a_{ii} |} \right) < 1 \quad \forall i = 1,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \to x^{*}, k \to \infty$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} | < | a_{ii} | \quad \forall i = 1,\ldots,n \Rightarrow \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{*} \qquad (12)$$

- ***(Criteriul dominanţei diagonalei pe coloane)***

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad \forall j = 1,\ldots,n \Rightarrow \|M\|_1 < 1 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \quad (13)$$

Metoda Gauss-Seidel pentru rezolvarea sistemelor liniare

Considerăm din nou sistemul liniar:

$$Ax = b\,,\quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}\,,\quad b \in \mathbb{R}^{n}$$

cu

$$\det A \neq 0 \quad , \quad a_{ii} \neq 0\,,\, i = 1, 2, \ldots, n$$

Putem deduce metoda Gauss-Seidel din metoda lui Jacobi astfel:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad x_j^{(k)} \quad - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} \ , i = 1,\ldots,n \ - \ \textbf{Jacobi}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad x_j^{(k+1)} \quad - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} \ , i = 1,\ldots,n - \textbf{Gauss-Seidel}$$

Când calculăm $x_i^{(k+1)}$ cunoaştem deja $x_1^{(k+1)},\cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$ şi putem folosi aceste valori în prima sumă.

Deducerea metodei Gauss-Seidel din schema generală se face luând:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \textbf{dacă } j \le i \\ 0 & \textbf{dacă } j > i \end{cases}$$

Matricea $\boldsymbol{B}$ este nesingulară ($a_{ii} \neq 0, \forall i$):

$$\det B = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$$

Matricea $\boldsymbol{C}$ este:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{dacă } i < j \\ 0 & \text{dacă } i \geq j \end{cases}$$

În cazul metodei Gauss-Seidel, vectorul $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ se obţine din $\boldsymbol{x}^{(k)}$ rezolvând sistemul inferior triunghiular (7) din schema generală:

$$\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{Cx}^{(k)} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f} \tag{14}$$

Soluţia sistemului (14) este dată de formula:

$$\boldsymbol{x_i} = (\boldsymbol{f_i} - \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{b_{ij} x_j}) / \boldsymbol{b_{ii}} = (\boldsymbol{f_i} - \sum_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{a_{ij} x_j}) / \boldsymbol{a_{ii}}\ , \quad \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n} \tag{15}$$

Vectorul $\boldsymbol{f}$ este:

$$f_i = (Cx^{(k)})_i + b_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (16)$$

$$(Cx^{(k)})_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \ , \forall i = 1, \ldots, n \qquad (17)$$

Folosind formula de rezolvare a sistemelor inferior triunghiulare (15), relaţiile (16) şi (17) avem:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)}\right)}{a_{ii}} \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Condiţii suficiente de convergenţă pentru metoda Gauss-Seidel

Propoziţia 1

Dacă matricea $\boldsymbol{A}$ este astfel încât:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)^2 < 1$$

atunci are loc convergenţa şirului construit cu metoda Gauss-Seidel la soluţia sistemului $\boldsymbol{Ax=b}$:

$$x^{(k)} \to x^{*}, \; k \to \infty \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Propoziţia 2 ***(Criteriul dominanţei diagonalei pe linii)***

Dacă matricea ***A*** este astfel încât:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

atunci:

$$x^{(k)} \to x^{*}, k \to \infty \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^{n}$$

Propoziţia 3 ***(Criteriul dominanţei diagonalei pe coloane)***

Dacă matricea $\boldsymbol{A}$ este astfel încât:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad \forall j = 1, \dots, n$$

atunci metoda Gauss-Seidel converge:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{*}, \ \ \forall x^{(0)}$$

Metode iterative pentru matrice simetrice şi pozitiv definite

Considerăm cazul sistemelor liniare cu matricea sistemului simetrică şi pozitiv definită:

$$\boldsymbol{A = A^T} \text{ – \textbf{matrice simetrică} – } \boldsymbol{a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = A^T \quad \Rightarrow \quad A = L + D + L^T$$

$$D = \mathrm{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad L^T = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Definiţii

Matricea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se numeşte ***pozitiv semidefinită*** (*A* ≥*0*):

$$\left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}\right)_{\mathbb{R}^n} \geq \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Matricea *A* se numeşte ***pozitiv definită*** (***A*** > ***0***) dacă:

$$\left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}\right)_{\mathbb{R}^n} > \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

Propoziţie

Dacă matricea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este pozitiv definită atunci matricea $\boldsymbol{A}$ este nesingulară.

Demonstraţie: Presupunem prin reducere la absurd că matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită şi singulară. Atunci, sistemul de ecuaţii liniare $\boldsymbol{Ax=0}$ are pe lângă soluţia banală $\boldsymbol{x=0}$ şi o soluţie $\boldsymbol{x^0 \neq 0}$. Avem:

$$\boldsymbol{x^0 \neq 0 \;\Rightarrow\; 0 < \left(Ax^0, x^0\right) = \left(0, x^0\right) = 0} \quad \textbf{contradicţie!}$$

$$\boldsymbol{A > 0 \;\Rightarrow\; a_{ii} = \left(Ae_i, e_i\right) > 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n}$$

Lemă

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice simetrică şi $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice nesingulară astfel încât matricea $\boldsymbol{P = B + B^T - A}$ este pozitiv definită. Fie matricea $\boldsymbol{M = I_n - B^{-1}A}$. Atunci raza spectrală a matricei $\boldsymbol{M}$ este strict subunitară dacă şi numai dacă matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită:

$$\rho(M) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad A > 0$$

Teoremă

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice simetrică, nesingulară, cu diagonala pozitivă, $\boldsymbol{a_{ii} > 0}$, $\forall\, \boldsymbol{i = 1, \ldots, n}$ şi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$ vectorul termenilor liberi. Atunci metoda lui Gauss-Seidel generează şiruri convergente la soluţia $\boldsymbol{x^* = A^{-1}b}, \forall\, \boldsymbol{x^{(0)}}$ dacă şi numai dacă $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită .

Demonstraţie: Din teorema de convergenţă avem:

$$\boldsymbol{x^{(k)} \to x^{*}}\ ,\quad \boldsymbol{k \to \infty} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\rho(M) < 1}$$

Dacă matricea $\boldsymbol{A}$ se scrie sub forma:

$$\boldsymbol{A = L + D + L^{T}}$$

matricele $\boldsymbol{B}$ şi $\boldsymbol{C}$ sunt date de:

$$\boldsymbol{B = L + D} \quad , \quad \boldsymbol{C = B - A = -L^{T}}$$

Matricea iteraţiei $\boldsymbol{M}$ este:

$$\boldsymbol{M = B^{-1}C = B^{-1}(B - A) = I_n - B^{-1}A}$$

Încercăm să aplicăm **Lema** de mai sus. Pentru aceasta verificăm dacă matricea $\boldsymbol{P}$ este pozitiv definită:

$$P = B + B^T - A = L + D + (L + D)^T - L - D - L^T = D$$

$$(Px, x)_{\mathbb{R}^n} = (Dx, x)_{\mathbb{R}^n} = ((a_{ii}x_i)_i, (x_i)_i)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

$$a_{ii} > 0 \quad \forall i \Rightarrow (Px, x)_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Rightarrow P > 0$$

Putem aplica **Lema** de unde deducem convergenţa şirului construit cu metoda Gauss-Seidel doar în cazul în care matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită:

$$x^{(k)} \to x^*, \quad k \to \infty \iff \rho(M) < 1 \iff A \text{ pozitiv definită}$$

Metodele relaxării

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice reală pătratică de dimensiune *n*, simetrică, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$ şi pozitiv definită, $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{0}$ şi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ un vector real. Considerăm sistemul de ecuaţii liniare:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Deoarece matricea *A* este pozitiv definită sistemul de mai sus are soluţie unică, $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Vom considera funcţia $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \Big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{y}\Big)_{\mathbb{R}^n} \ , \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

Din faptul că matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită avem:

$$\boldsymbol{f(y) \geq 0}\,,\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \quad \textbf{şi}\ \boldsymbol{f(y)} > 0 = \boldsymbol{f(x^*)}\ , \forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}^*$$

Prin urmare $\boldsymbol{x}^*$ este şi unica soluţie a problemei de minimizare:

$$\mathbf{min}\left\{ \boldsymbol{f(y)}\,;\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \right\} = \mathbf{0} = \boldsymbol{f(x^*)}$$

Vom căuta soluţia sistemului $\boldsymbol{Ax=b}$, $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ ca fiind soluţia problemei de minimizare de mai sus folosind o metodă de tip relaxare de forma:

$$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n - \textbf{dat}, \quad y^{(k+1)} = y^{(k)} + c_k e_l \ , \ \ l = l_k \ \ , \ \ k = 0,1,\ldots$$

$$y_j^{(k+1)} = y_j^{(k)} \ , \ \ \forall \ j \neq l \ \ , \quad y_l^{(k+1)} = y_l^{(k)} + c_k$$

Constanta c_k se determină astfel încât $f(y^{(k+1)}) < f(y^{(k)})$ în speranţa că şirul $y^{(k)}$ astfel construit converge la x^*. Notăm cu

$r^{(k)} = b - Ay^{(k)}$ vectorul reziduu.

Avem:

$$r^{(k)} = b - Ay^{(k)} = Ax^* - Ay^{(k)} = A(x^* - y^{(k)})$$

$$f(y^{(k+1)}) = f(y^{(k)}) - 2\,c_k\, r_l^{(k)} + c_k^2 a_{ll}$$

Pentru ca $f(y^{(k+1)}) < f(y^{(k)})$ este necesar şi suficient să alegem c_k astfel ca:

$$c_k^2 a_{ll} - 2\,c_k\, r_l^{(k)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_{ll} > 0)\, c_k \in \left(0, 2\frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}}\right) \text{sau} \left(2\frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}}, 0\right)$$

$$c_k = \omega_k \frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}} \;, \quad \text{cu } \omega_k \in (0, 2)$$

Metoda de relaxare obţinută este următoarea:

$$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n - \textbf{dat}, \; y^{(k+1)} = y^{(k)} + \omega_k \frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}} e_l \,, \quad k = 0,1,\dots \,, \quad \omega_k \in (0,2)$$

Pentru a aproxima x^* se deduce o clasă de metode numite ***metodele relaxării succesive***. Aceste metode se obţin aplicând metodele de relaxare de mai sus. Vom considera:

$$\omega_k = \omega, \forall k$$

Vom construi un şir $\left\{x^{(k)}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ astfel:

$$x^{(0)} = y^{(0)} \textbf{ un vector din } \mathbb{R}^n \textbf{ dat}$$

$$l = 1 \quad y^{(1)} = y^{(0)} + \omega \frac{r_1^{(0)}}{a_{11}} e_1$$

$$l = 2 \quad y^{(2)} = y^{(1)} + \omega \frac{r_2^{(1)}}{a_{22}} e_2$$

$$\vdots$$

$$l = n \quad y^{(n)} = y^{(n-1)} + \omega \frac{r_n^{(n-1)}}{a_{nn}} e_n$$

$$x^{(1)} = y^{(n)}$$

Trecerea de la iteraţia $\boldsymbol{k}$ la iteraţia următoare se face astfel:

$$x^{(k)} = y^{(kn)}$$

$$l = 1 \quad y^{(kn+1)} = y^{(kn)} + \omega \frac{r_1^{(kn)}}{a_{11}} e_1$$

$$l = 2 \quad y^{(kn+2)} = y^{(kn+1)} + \omega \frac{r_2^{(kn+1)}}{a_{22}} e_2$$

$$\vdots$$

$$l = n \quad y^{(kn+n)} = y^{(kn+n-1)} + \omega \frac{r_n^{(kn+n-1)}}{a_{nn}} e_n$$

$$x^{(k+1)} = y^{((k+1)n)}, \; k = 0,1,2,\ldots$$

Acum putem scrie dependenţa vectorului $\boldsymbol{x^{(k+1)}}$ de $\boldsymbol{x^{(k)}}$:

$$\boldsymbol{x^{(0)}} \in \mathbb{R}^n, \omega \in (0,2) \ \textbf{date,}$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1,2,\dots,n,$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1,2,\dots,n,$$

$$k = 0,1,2,\dots$$

Metodele de mai sus poartă numele de ***metodele relaxării succesive***. Pentru $\boldsymbol{\omega = 1}$ obţinem metoda Gauss-Seidel.

- $\mathbf{0 < \omega < 1}$ metodele se numesc de ***sub-relaxare*** şi pot fi folosite în cazul când metoda Gauss-Seidel diverge.

- $\mathbf{1 < \omega < 2}$ metodele se numesc de ***supra-relaxare*** şi pot fi folosite pentru accelerarea convergenţei în cazul când metoda Gauss-Seidel converge.

Rearanjând formulele de mai sus avem:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{\omega} x_i^{(k+1)} = \left(B\, x^{(k+1)} \right)_i = \frac{(1-\omega)}{\omega} a_{ii} x_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i =$$

$$= \left(C\, x^{(k)} \right)_i + \left(b \right)_i$$

Matricea $\boldsymbol{A}$ fiind simetrică, poate fi scrisă sub forma:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L}^T \quad \textbf{cu} \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & 0 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \mathbf{0} & \cdots & 0 & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{n\,n-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \textbf{diag}\left[\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22}, \ldots, \boldsymbol{a}_{nn}\right]$$

Cu aceste notaţii, matricile ***B*** şi ***C*** de mai sus pot fi scrise astfel:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{D} \qquad , \qquad \boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}^T$$

Vom verifică dacă metodele relaxării succesive se înscriu în clasa generală de metode iterative, adică vom verifica dacă ***A=B-C*** :

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{L} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{1}-\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L}^T = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L}^T = \boldsymbol{A}$$

Convergenţa şirului $\boldsymbol{x}^{(k)}$ la soluţia $\boldsymbol{x}^{*}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$?

Teoremă

Fie o matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simetrică, $A=A^T$ cu **det**$A \neq 0$, $a_{ii}>0$, $\forall i = 1,\ldots,n$, $b \in \mathbb{R}^n$ un vector real şi $\omega \in (0,2)$. Atunci şirul $x^{(k)}$ construit cu o metoda de relaxare succesivă converge la soluţia x^* a sistemului liniar $Ax=b$ oricare ar fi iteraţia iniţială $x^{(0)}$ dacă şi numai dacă matricea A este pozitiv definită.

$$x^{(k)} \to x^*, k \to \infty, \forall\, x^{(0)} \quad \Leftrightarrow \quad (Ax, x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

Demonstraţie: Vom verifica dacă raza spectrală a matricei iteraţiei este subunitară folosind **Lema.** Avem:

$$M = B^{-1}C = B^{-1}\left(B - A\right) = I_n - B^{-1}A$$

$$B = L + \frac{1}{\omega}D \quad , \; \det B = \frac{1}{\omega^n} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0 \quad (a_{ii} > 0 \, , \; \forall i)$$

Matricea A este simetrică iar matricea B este nesingulară. Pentru a fi îndeplinite ipotezele Lemei trebuie să verificăm că matricea P este pozitiv definită:

$$P = B + B^T - A = L + \frac{1}{\omega}D + L^T + \frac{1}{\omega}D - L - D - L^T = \frac{2-\omega}{\omega}D$$

$$\left(Px,x\right)=\frac{(2-\omega)}{\omega}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2>0\,,\;\; x\neq 0\;\;(a_{ii}>0,\forall i)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2-\omega)}{\omega}>0\;\;\Leftrightarrow\omega\in\left(0,2\right)$$

Toate ipotezele lemei sunt îndeplinite, prin urmare avem convergența dorită.