

Setul 2

de probleme și exerciții de matematică

(cu privire la structuri algebrice, mulțimi de numere, ordinali, cardinali și inegalități numerice)

S2.1 Să se dovedească unicitatea elementului neutru și a inversului unui element (când există) în cadrul unui monoid (M, \cdot) cu $U(M) \neq \emptyset$.

S2.2 Să se arate că dacă M , M' și M'' sunt monoizi în raport cu operațiile algebrice ϕ_1 , ϕ_2 și respectiv ϕ_3 , iar $f \in \text{Hom}(M, M')$ și $g \in \text{Hom}(M', M'')$, atunci $g \circ f \in \text{Hom}(M, M'')$.

S2.3 Să se arate că dacă M este o mulțime nevidă, atunci $(\mathcal{P}(M), \cup)$ este un monoid comutativ.

S2.4 Să se arate că, oricare ar fi monoidul (M, \circ) , dubletul $(U(M), \circ)$ este grup. Când $(U(M), \circ)$ este comutativ?

S2.5 Fie (M, \circ) un monoid cu unitatea e . Să se arate că $e \in U(M)$ și că dacă $x, y \in U(M)$, cu $x \circ y \in U(M)$, atunci $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ (unde x^{-1} și y^{-1} sunt inversele elementelor x și respectiv y).

S2.6 Fie (M, \circ) un monoid comutativ cu simplificare și $'\sim'$ o relație binară definită pe $M \times M$ prin $(x, y) \sim (x', y') \iff x \circ y' = x' \circ y$. Să se arate că $'\sim'$ este o relație de echivalență pe $M \times M$.

S2.7 Fie (G, \circ) și $(G', *)$ două grupuri și $f : G \rightarrow G'$ un morfism de grupuri. Să se arate că $f(e) = e'$ și $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $\forall x \in G$, unde e și e' sunt elementele neutre din G și G' respectiv.

S2.8 i) Să se arate că următoarele operații algebrice definite pe \mathbb{Z} sunt asociative:

$$a \circ b = a + b - ab, \quad a * b = a + b + ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

ii) Sunt $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, *)$ inele?

S2.9 Fie $(A, +, \cdot)$ un inel unitar și comutativ, iar $\emptyset \neq S \subseteq A$ un sistem multiplicativ fără divizori ai lui zero. Să se arate că funcția $i_S : A \rightarrow A_S$, unde A_S este inelul fracțiilor lui A relativ la S , definită prin $i_S(a) = \frac{a}{1} = [(a, 1)]_{\sim}$, este un monomorfism de inele.

S2.10 Fie axiomele lui Peano, pentru \mathbb{N} , sub următoarea formă:

- a1) Există un număr natural numit 0.
- a2) Orice număr natural n are un unic succesor $s(n)$.
- a3) Numărul 0 nu este succesorul nici unui număr natural.
- a4) Dacă $s(m) = s(n)$, cu $m, n \in \mathbb{N}$, atunci $m = n$.
- a5) Dacă $M \subseteq \mathbb{N}$ este așa încât $0 \in M$ și, $\forall n \in M$, avem $s(n) \in M$, atunci $M = \mathbb{N}$.

Pentru oricare patru dintre aceste axiome, excluzând-o pe cea de-a cincea, găsiți un model de mulțime (dacă este posibil) ce le satisface. Indicați succesiunea elementelor din model în maniera $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$.

S2.11 Arătați că dacă M este o mulțime ce satisface cele cinci axiome ale lui Peano (v. **S2.10**) și $n \in M$, atunci $s(n) \neq n$, $\forall n \in M$.

S2.12 Să se demonstreze că dacă m și n sunt din \mathbb{N} și $m + n = 0$, atunci $m = n = 0$.

S2.13 Să se arate că $n < s(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

S2.14 Folosind principiul inducției transfinite să se arate că, pentru orice ordinal α , este adevărată relația: $1 \cdot \alpha = \alpha$.

S2.15 Dacă ω reprezintă notația pentru cel mai mic ordinal infinit, să se constate că

$$2 \cdot \omega = \sup \{2n \mid n < \omega\} = \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2,$$

deducându-se astfel că înmulțirea ordinalilor nu este comutativă.

S2.16 Fie α și β ordinali. Să se demonstreze că $\alpha + \beta$ este ordinal limită dacă și numai dacă fie β este un ordinal limită diferit de 0, fie $\beta = 0$ și α este ordinal limită.

S2.17 Să se dovedească că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, intervalele deschise $\left(-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ și (a, b) au aceeași cardinalitate. Se poate spune același lucru și în legătură cu două intervale deschise, (a, b) și (c, d) , din \mathbb{R} ?

S2.18 Fiecare dintre mulțimile specificate mai jos are cardinalul egal cu \aleph_0 sau 2^{\aleph_0} ori $2^{2^{\aleph_0}}$. Determinați, argumentat, ce se potrivește și unde:

- a) $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$;
- b) $\mathbb{Z}[X]$ (mulțimea polinoamelor cu coeficienți întregi);
- c) Mulțimea numerelor reale transcendente;
- d) Mulțimea punctelor unui plan;
- e) Mulțimea funcțiilor de la \mathbb{R} la \mathbb{N} .

S2.19 Să se arate că mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale înzestrată cu operațiile

$$n_1 \wedge n_2 = (n_1, n_2) \text{ și } n_1 \vee n_2 = [n_1, n_2], \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

unde (n_1, n_2) semnifică cel mai mare divizor comun al numerelor n_1 și n_2 , iar $[n_1, n_2]$ înseamnă cel mai mic multiplu comun al numerelor n_1 și n_2 , are o structură algebrică de latice. Ce atribute are această latice? (Este ea completă, distributivă sau/și modulară?)

S2.20 Dacă A și B sunt "mpo" (mulțimi parțial ordonate), fie $\mathcal{F}(A; B)$ mulțimea funcțiilor de la A la B , pe care se definește relația de parțială-ordine următoare

$$f \leq_{\mathcal{F}} g \iff f(x) \leq_B g(x), \forall x \in A,$$

unde \leq_B este notația pentru relația de ordine parțială pe B .

Să se demonstreze că, dacă B este o latice în raport cu operațiile

$$y_1 \wedge y_2 = \min \{y_1, y_2\} = \begin{cases} y_1, & \text{când } y_1 \leq_B y_2 \\ y_2, & \text{când } y_2 \leq_B y_1 \end{cases} \text{ și}$$

$$y_1 \vee y_2 = \max \{y_1, y_2\} = \begin{cases} y_2, & \text{când } y_1 \leq_B y_2 \\ y_1, & \text{când } y_2 \leq_B y_1 \end{cases}, \forall y_1, y_2 \in B,$$

atunci și $\mathcal{F}(A; B)$ este o latice față de două operații ușor deductibile în context.

S2.21 (G, \circ) fiind un grup, să se vadă că mulțimea $\mathcal{S}(G)$, a tuturor subgrupurilor lui G , este o latice față de ordinea parțială " \subseteq ".

S2.22 Arătați că mulțimea tuturor relațiilor de echivalență pe o mulțime A , notată cu $\mathcal{E}q(A)$, este o latice completă în raport cu ordinea parțială " \subseteq ".

S2.23 Să se arate că $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \mathcal{C}(X), \emptyset, X)$ este o algebră Boole.

S2.24 Fie $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ o algebră Boole. Să se demonstreze că, dacă x și y sunt elemente ale algebrei B , astfel încât

$$x \wedge y = 0 \text{ și } x \vee y = 1,$$

atunci $x = y'$.

S2.25 Să se demonstreze inegalitatea lui Holder:

$$\sum_{k=1}^n |a_k| |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q},$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

S2.26 Să se arate că, $\forall a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ și $p \geq 1$, are loc inegalitatea lui Minkowski:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}.$$

S2.27 Să se arate că, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$, cu $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, avem:

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot \dots \cdot x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n.$$

(inegalitatea generalizată a mediilor)

S2.28 Să se demonstreze că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, are loc inegalitate lui Carleman

$$\sum_{k=1}^n (a_1 a_2 \dots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^n a_k,$$

unde e e un coeficient optimal când $n \rightarrow \infty$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

S2.29 Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea (Titu Andreescu):

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

S2.30 Să se demonstreze că, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, avem:

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n} \right)^{1/2} \leq \max(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Bibliografie orientativă

1. D. Bușneag, D. Pîrv - *Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
2. F. L. Țiplea - *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
3. B. Poonen - *Infinity: Cardinal Numbers*, 2002.
4. S. Burris, H. P. Sankappanavar - *A course in Universal Algebra*, 2000, (cap. I + cap. IV).
5. M. O. Drâmbe - *Inegalități. Idei și metode*, Ed. GIL, Zalău, 2003.
6. P-A. Svensson - *Boolean Algebras (Algebraic Structures I)*, Linnaeus University, 2009.
7. P. P. Korovkin - *Inequalities*, Mir Publishers, Moscow, 2012.
8. V. K. Khanna - *Lattices and Boolean Algebras. First Concepts*, Second Edition, Vikas Publishing House Pvt. Ltd.-Noida, 2012.
9. Hawkes, Herbert E. - *Higher Algebra*. Reprint. London: Forgotten Books, 2013