Tema nr. 6

Date $(n+1)$ puncte distincte, x_0, x_1, …, x_n ($x_i \in \mathbb{R}\ \forall i$, $x_i \neq x_j$, $\ i \neq j$) şi cele $(n+1)$ valori ale unei funcţii necunoscute f în aceste puncte, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

să se aproximeze funcţia f în $\bar{x}$, $f(\bar{x})$, pentru un $\bar{x}$ dat, $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$:

- folosind aproximarea polinomială calculată cu metoda cele mai mici pătrate. Pentru calculul valorii polinomului obţinut în punctul $\bar{x}$ să se folosească *schema lui Horner*. Să se afişeze $S_m(\bar{x})$ şi $|S_m(\bar{x}) - f(\bar{x})|$.

- folosind interpolarea trigonometrică. În acest caz se consideră că funcţia f este periodică de perioadă 2π iar nodurile de interpolare sunt în număr impar $n = 2m$, $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2m} < 2\pi$. Să se afişeze $T_n(\bar{x})$ şi $|T_n(\bar{x}) - f(\bar{x})|$.

Pentru rezolvarea sistemelor liniare implicate în implementarea metodelor de mai sus se poate folosi biblioteca utilizată la **Tema 2**.

Nodurile de interpolare $\{x_i, i = 0, ..., n\}$ se vor genera astfel: x_0 şi x_n se citesc de la tastatură sau dintr-un fişier astfel ca $x_0 < x_n$, iar x_i se generează aleator astfel ca $x_i \in (x_0, x_n)$ şi $x_{i-1} < x_i$; valorile $\{y_i, i = 0, ..., n\}$ se construiesc folosind o funcţie f declarată în program (exemple de alegere a nodurilor x_0, x_n şi a funcţiei $f(x)$ se găsesc la sfârşitul acestui document), $y_i = f(x_i), i = 0, ..., n$;

Bonus (10 pt): Să se facă graficul funcţiei f şi al funcţiilor aproximative calculate S_m şi T_n

Interpolare prin metoda celor mai mici pătrate

Fie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Dat $\bar{x} \in [a, b]$ să se aproximeze $f(\bar{x})$ cunoscând cele $n+1$ valori y_i ale funcţiei f în nodurile de interpolare.

Se caută un polinom de grad m:

$$S_m(x) = S_m(x; a_0, a_1, \ldots, a_m) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k$$

Coeficienţii $\{a_i; i=\overline{0,m}\}$ sunt soluţia problemei de minimizare:

$$\min \left\{ \sum_{r=0}^{n} \left| S_m(x_r; a_0, a_1, \dots, a_m) - y_r \right|^2 \ ; \ a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

şi de asemenea, sunt soluţia sistemului liniar:

$$Ba = f$$

$$B = (b_{ij})_{i,j=0,\dots,m} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)} \quad f = (f_i)_{i=0,\dots,m} \in \mathbb{R}^{m+1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} \Big) a_j \ = \ \sum_{k=0}^{n} y_k x_k^i \quad , \quad i = 0, \dots, m$$

Acest sistem liniar se poate rezolva cu biblioteca numerică folosită la *Tema 2*.

Valoarea funcţiei f în punctul $\bar{x}$ se aproximează prin valoarea polinomului S_m în punctul $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}) \approx S_m(\bar{x}; a_0, a_1, \dots, a_m)$$

Valoarea polinomului $S_m(\bar{x})$ se va calcula folosind schema lui Horner.

Schema lui Horner de calcul a valorii $P(x_0)$

Fie P un polinom de grad p:

$$P(x) = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \cdots + c_{p-1} x + c_p \ , \quad (c_0 \neq 0)$$

Putem scrie polinomul P şi astfel:

$$P(x) = ((\cdots(((c_0 x + c_1)x + c_2)x + c_3)x + \cdots)x + c_{p-1})x + c_p$$

Ţinând cont de această grupare a termenilor obţinem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{aligned} d_0 &= c_0 \,, \\ d_i &= c_i + d_{i-1} x_0 \ , \quad i = \overline{1,p} \end{aligned} \tag{1}$$

În şirul de mai sus:

$$P(x_0) = d_p$$

iar ceilalţi termeni calculaţi ($d_i, i = 0, \ldots, p-1$) , sunt coeficienţii polinomului cât, Q, din împărţirea cu rest:

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x - x_0)Q(x) + r \ , \\ Q(x) & = & d_0 x^{p-1} + d_1 x^{p-2} \cdots + d_{p-2} x + d_{p-1} \ , \\ r & = & d_p = P(x_0). \end{array}$$

Pentru a calcula $P(x_0)$ (d_p) cu formulele (1) se poate folosi o singură valoare reală $d \in \mathbb{R}$ şi nu un vector $d \in \mathbb{R}^p$.

Interpolare trigonometrică

Interpolarea trigonometrică se foloseşte pentru aproximarea funcţiilor periodice de perioadă T:

$$f(x+T) = f(x) \quad , \quad \forall x.$$

Vom considera cazul $T = 2\pi$. Presupunem că avem un număr impar de puncte de interpolare $n = 2m$ din intervalul $[0, 2\pi)$:

$$0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < 2\pi.$$

Funcţia f se aproximează ca o combinaţie liniară de funcţii sin şi cos astfel:

$$f(x) \approx T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k\,x) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin(k\,x).$$

Notăm cu:

$$\phi_0(x) = 1 \quad , \quad \phi_{2k-1}(x) = \sin(k\,x) \quad , \quad \phi_{2k}(x) = \cos(k\,x) \quad , \quad k = 1, \ldots, m.$$

Coeficienţii $\{a_k; k = 0, \ldots m\}$ şi $\{b_k; k = 1, \ldots m\}$ se găsesc rezolvând sistemul liniar:

$$TX = Y \quad , \quad X = (a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots, b_m, a_m)^T$$

$$T = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \ldots & \phi_{n-1}(x_0) & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \ldots & \phi_{n-1}(x_1) & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ldots & \phi_{n-1}(x_2) & \phi_n(x_2) \\ \vdots & & & & & \\ \phi_0(x_{n-1}) & \phi_1(x_{n-1}) & \phi_2(x_{n-1}) & \ldots & \phi_{n-1}(x_{n-1}) & \phi_n(x_{n-1}) \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \ldots & \phi_{n-1}(x_n) & \phi_n(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_m \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m+1}.$$

Rezolvarea acestui sistem liniar se poate face folosind biblioteca utilizată la **Tema 2**.

$$f(\bar{x}) \approx T_n(\bar{x}) = a_0\phi_0(\bar{x}) + b_1\phi_1(\bar{x}) + a_1\phi_2(\bar{x}) + \cdots + b_m\phi_{2m-1}(\bar{x}) + a_m\phi_{2m}(\bar{x}).$$

Date de intrare - exemple

$$x_0 = a = 1 \quad , \quad x_n = b = 5 \quad , \quad f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 12$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{31\pi}{16} \quad , \quad f(x) = \sin(x) - \cos(x)$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{31\pi}{16} \quad , \quad f(x) = \sin(2x) + \sin(x) + \cos(3x)$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_n = \frac{63\pi}{32} \quad , \quad f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$$