Calcul Numeric

Cursul 2

2020

Anca Ignat

Calcul matricial

Fie matricea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;,\quad A = \left(a_{ij}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n}$$

Se defineşte ***matricea transpusă***:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, A^T = \left(a_{ji}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Pentru matricea:

$$A \in \mathbb{C}^{m\times n},\ A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}$$

se defineşte ***matricea adjunctă*** A^H:

$$A^H = \overline{A^T} = \left(\overline{a_{ji}}\right)_{\substack{j=1\ldots n \\ i=1\ldots m}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^H = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Pentru $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matricea adjunctă coincide cu transpusa, $A^H = A^T$.

Fie vectorul $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, acesta este considerat vector coloană,

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\mathbf{1}}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

Dacă facem înmulţirea matricială $\boldsymbol{Ae_j}$ obţinem coloana $\boldsymbol{j}$ a matricei $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{Ae_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{\text{poziţia } j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Ae_j}$ este coloana $\boldsymbol{j}$ a matricei $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{j=1,...,n}$;

$\boldsymbol{e_i^T A}$ este linia $\boldsymbol{i}$ a matricei $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i=1,...,m}$.

Fie vectorii ***x, y***, cu ajutorul lor definim produsele scalare în $\mathbb{C}^{n}$ şi $\mathbb{R}^{n}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ , } \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$(x\,,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = y^H x = \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \cdots & \overline{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n , \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proprietăţile matricei $\boldsymbol{A^H}$		Proprietăţi ale matricei $\boldsymbol{A^T}$
1.	$(A + B)^H = A^H + B^H$	$(A + B)^T = A^T + B^T$
2.	$(A^H)^H = A$	$(A^T)^T = A$
3.	$(AB)^H = B^H A^H$	$(AB)^T = B^T A^T$
4.	$(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Propoziţie

Fie $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^{n}$, $y \in \mathbb{C}^{m}$ atunci:

$$\left(Ax, y \right)_{\mathbb{C}^m} = \left(x , A^H y \right)_{\mathbb{C}^n} .$$

Pentru cazul real avem:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ x \in \mathbb{R}^{n}, y \in \mathbb{R}^{m} \Rightarrow \left(Ax, y \right)_{\mathbb{R}^m} = \left(x , A^T y \right)_{\mathbb{R}^n}$$

Demonstraţie

$$(Ax , y) = y^H (Ax) = y^H A\, x = y^H (A^H)^H x =$$

$$= (A^H y)^H x = (x , A^H y).$$

Tipuri de matrice

Definiţii

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***simetrică*** dacă $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***autoadjunctă*** dacă $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***unitară*** dacă $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***ortogonală*** dacă

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I}_{n}.$$

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A=(a_{i\,j})}$ se numește matrice ***triunghiulară inferior*** (sau ***inferior triunghiulară***) dacă

$$\boldsymbol{a_{i\,j} = 0} \text{ pentru } \boldsymbol{j > i}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A=(a_{ij})$ se numește matrice ***triunghiulară superior*** (sau ***superior triunghiulară***) dacă

$$a_{ij} = 0 \text{ pentru } j < i$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notăm cu $\boldsymbol{I_n}$ matricea unitate:

$$\boldsymbol{I_n} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times n}}, \boldsymbol{I_n} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonală ***D*=diag*[d_1, d_2,…,d_n]***

$$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Norme

Definiție

Fie $\boldsymbol{X}$ un spațiu vectorial real. Se numește ***normă*** aplicația:

$$\| \,.\, \| : X \to \mathbb{R}_+$$

care îndeplinește condițiile:

$$\textbf{(1)}\ \ \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0;$$

$$\textbf{(2)}\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\ x, y \in X;$$

$$\textbf{(3)}\ \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall\ x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vom numi ***norme vectoriale*** normele definite pe spațiile $X = \mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Fie spațiile vectoriale $\mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$. Pe aceste spații următoarele aplicații sunt norme vectoriale:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2};$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1..n\}.$$

Dacă $\|\cdot\|_{\boldsymbol{v}}$ este o normă vectorială şi $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ este o matrice nesingulară atunci aplicația:

$$\|\cdot\|_{\boldsymbol{P}} : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{v}}$$

este de asemenea o normă vectorială.

Definiție

Se numește ***produs scalar*** în spațiul vectorial $\boldsymbol{X}$ aplicația:

$$(\cdot\,,\cdot): X \times X \to K$$

care satisface condițiile :

$$(a)\ (x\,,x) \geq 0\,, \forall\ x \in X, \quad (x, x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0;$$

$$(b)\ (x\,,y) = \overline{(y\,,x)}\,, \forall\ x\,,y \in X,$$

$$(c)\ (\lambda x\,,y) = \lambda(x\,,y), \forall\ x\,,y \in X\,, \forall \lambda \in K,$$

$$(d)\ (x + y\,,z) = (x\,,z) + (y\,,z), \forall\ x\,,y\,,z \in X\,.$$

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$\left|\left(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{y}\right)\right| \leq \sqrt{\left(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}\right)}\sqrt{\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\right)} \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$$

Într-un spațiu vectorial dotat cu produs scalar se poate induce o normă numită euclidiană:

$$\left\|\boldsymbol{x}\right\|_{\mathbf{2}} = |\,\boldsymbol{x}\,| := \sqrt{\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\right)}.$$

Reamintim definiția produselor scalare pe $\mathbb{C}^n$ şi pe $\mathbb{R}^n$ introduse anterior:

$$(x\,,\,y)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y_i} \quad , \quad (x\,,\,y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i$$

Obținem norma euclidiană (valabilă în spaţiile $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{R}^n$):

$$\|x\|_2 = |\,x\,| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,.$$

Norme matriceale

Definiție

Aplicația $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ se numește ***normă matriceală*** dacă:

$$\textbf{(1)}\ \|A\| \geq 0\ \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

$$\textbf{(2)}\ \|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|\ ,\forall \alpha \in \mathbb{R}\,, \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(3)}\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(4)}\ \|A * B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|\,, \forall\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Exemple

Norma Frobenius definită de relația $\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ este o normă matriceală.

Aplicația $\|\boldsymbol{A}\|_{\max} = \max\{|a_{ij}|; i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n\}$ ***<u>NU</u>*** este o normă matriceală.

Pentru ***n* = *2*** fie:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{T}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_2 ,\ \|A\|_{\max}=\|B\|_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|A*B\|_{\max}=1>\ \|A\|_{\max}\bullet\|B\|_{\max}=\frac{1}{2}.$$

Norme matriceale naturale

- $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ o normă vectorială $\to \|\cdot\|_i : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ ***normă matriceală naturală*** sau ***indusă***.

$$\|A\|_i = \max\left\{ \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} ; x \in \mathbb{R}^n , x \neq 0 \right\}$$

Definiţii echivalente :

$$\|A\|_i = \max\{ \|Ax\|_v \; ; x \in \mathbb{R}^n , \|x\|_v \leq 1\}$$
$$= \max\{ \|Ax\|_v \; ; x \in \mathbb{R}^n , \|x\|_v = 1\}$$

$\|A\|_{\mathbf{i}}$ se numeşte ***normă matriceală naturală*** sau ***normă indusă*** de normă vectorială $\|\cdot\|_{v}$

Avem următoarea relaţie:

$$\|Ax\|_{\mathrm{v}} \leq \|A\|_{\mathrm{i}} \|x\|_{\mathrm{v}} , \forall\, A \in \mathbb{R}^{n\times n} , \forall x \in \mathbb{R}^{n}.$$

Norma Frobenius $\|\cdot\|_F$ nu este o normă naturală.

$$\|I_n\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \frac{\|I_n x\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}} ; x \neq 0 \} = 1, \ \forall \ \|\cdot\|_i,$$

$$\|I_n\|_F = (1+1+\cdots+1)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1 \text{ pentru } \ n \geq 2.$$

Pentru $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ norma matriceală indusă este:

$$\|A\|_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

Pentru $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|;\ i = 1, \ldots, n\}$ norma matricială indusă este:

$$\|A\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|;\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- $\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbf{v,P}}$ - norme vectoriale → $\|\cdot\|_{\mathbf{i}}$ şi respectiv $\|\cdot\|_{\mathbf{i,P}}$

normele matriciale induse

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{v,P}} = \|\boldsymbol{Px}\|_{\mathbf{v}} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{A}\|_{\mathbf{i,P}} = \left\|\boldsymbol{PAP}^{-1}\right\|_{\mathbf{i}}$$

Valori şi vectori proprii

Definiţii

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$. Se numeşte ***valoare proprie*** (***autovaloare***) a matricei $\boldsymbol{A}$ un număr complex $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ pentru care există un vector nenul $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ a.î.:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x}.$$

Vectorul x se numeşte ***vector propriu*** (***autovector***) asociat val. proprii $\boldsymbol{\lambda}$.

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x} \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{\lambda I_n} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{det}(\boldsymbol{\lambda I_n} - \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$$

→ Matricea $\lambda I_n - A$ este singulară.

Polinomul:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\lambda - a_n$$

se numeşte ***polinom caracteristic*** asociat matricei ***A***.

→ **grad** $p_A = n$ → are n rădăcini care sunt valorile proprii ale matricei ***A***.

Se numeşte ***rază spectrală*** a matricei ***A***:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1,\ldots,n, \lambda_i \text{ – valorile proprii ale matricei A}\}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$ norma indusă este

$$\|A\|_2 = |A| = \sqrt{\rho(A^T A)}$$ se numeşte ***norma spectrală***.

Propoziţia 1

Fie $\|\cdot\|$ o normă matriceală naturală. Atunci:

$$\rho(A) \leq \|A\|, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **,$\{A^k\}$ un şir de matrici.**

$$A^k \to 0_{n\times n},\, k \to \infty \;\Leftrightarrow\; \left\|A^k\right\| \to 0,\, k \to \infty.$$

Propoziţia 2

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Atunci:

$$A^k \to 0,\, k \to \infty \;\Leftrightarrow\; \rho(A) < 1.$$

Dacă există o normă matriceală naturală pentru care $\|A\| < 1$ atunci:

$$A^k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty.$$

$$(n = 1 \to a \in \mathbb{R},\, a^k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty \;\Leftrightarrow\; |a| < 1.)$$

Propoziţia 3

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Seria $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k$ converge dacă şi numai dacă raza spectrală a matricei $\boldsymbol{A}$ este subunitară:

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = S \iff \rho(A) < 1.$$

Dacă există o normă a matricei A astfel încât $\|\boldsymbol{A}\| < \boldsymbol{1}$ atunci seria converge. În cazul convergenței avem :

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = S = (I - A)^{-1}.$$

Propoziţia 4

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pentru care există o normă matriceală naturală astfel ca $\|\boldsymbol{A}\| < \mathbf{1}$. Atunci există matricele $(\boldsymbol{I}_n \pm \boldsymbol{A})^{-1}$ şi avem evaluările:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \|\boldsymbol{A}\|} \leq \left\|(\boldsymbol{I} \pm \boldsymbol{A})^{-1}\right\| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \|\boldsymbol{A}\|}.$$