**Logica Propozițională. Seminar 1 - Material suplimentar**

## 0.1 Definiții inductive

În cele ce urmează, în acest curs, prin definiție inductivă, constructivă, structurală sau recursivă vom înțelege același lucru.

### Definiții inductive de mulțimi.

Fie $\mathtt{0}$ și $\mathtt{s}$ două caractere diferite.

Definim mulțimea $\mathbb{N}1$ (o definiție proprie pentru mulțimea numerelor naturale) ca fiind cea mai mică mulțime care satisface următoarele proprietăți:

(B) $\mathtt{0} \in \mathbb{N}1$

(I) dacă $n \in \mathbb{N}1$, atunci $\mathtt{s}n \in \mathbb{N}1$ (dacă șirul de caractere $n \in \mathbb{N}1$ este număr natural, atunci șirul $n$ la care adaugăm caracterul $\mathtt{s}$ în față este și el număr natural.

*Observația* 1. Definiția constructivă a lui $\mathbb{N}1$ din seminar folosește notația $\mathtt{sss0}$ în loc de $\mathtt{s(s(s(0)))}$ (așa cum apare în curs).

Definiția de mai sus se numește definiție inductivă a unei mulțimi. Regula (B) definește cazul de *b*ază și regula (I) definește cazul *i*nductiv. În general, o definiție inductivă conține 0 sau mai multe cazuri de bază și 0 sau mai multe cazuri inductive.

Putem să ne convingem că $\mathtt{ss0}$ este număr natural, după cum urmează:

**Lema 0.1.** *Elementul* $\mathtt{ss0}$ *face parte din mulțimea* $\mathbb{N}1$ *(altfel spus,* $\mathtt{ss0} \in \mathbb{N}1$*).*

*Proof.* Conform regulii (B), știm că:

$$\mathtt{0} \in \mathbb{N}1. \tag{1}$$

Luând $n = \mathtt{0}$ în regula (I), observăm că antecendentul este adevărat conform ecuației (**??**) și deci obținem că

$$\mathtt{s0} \in \mathbb{N}1. \tag{2}$$

Luăm $n = \mathtt{s0}$ în regula (I). Antecedentul regulii (I) este satisfăcut de ecuația (**??**) și deci concluzia regulii (I) trebuie să fie și ea adevărată:

$$\mathtt{ss0} \in \mathbb{N}1. \tag{3}$$

Dar ecuația (**??**) este chiar ceea ce voiam să arătăm.

□

Se poate observa că mulțimea $\mathbb{N}1 = \{\mathtt{0}, \mathtt{s0}, \mathtt{ss0}, \mathtt{sss0}, \ldots\}$.

De multe ori vom prezenta regulile de construcție ale unei mulțimi definite inductiv sub forma unor reguli de inferență, ca mai jos:

**Definiția 0.1.** Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}1$ este cea mai mică mulțime care satisface următoarele proprietăți:

$$(B)\ \frac{}{\mathtt{0} \in \mathbb{N}1} \qquad\qquad (I)\ \frac{n \in \mathbb{N}1}{\mathtt{s}n \in \mathbb{N}1}$$

Regulile (B) și (I) pot fi considerate reguli de inferență și în acest caz, raționamentul prin care se demonstrația lema **??** poate fi prezentată mai simplu, grafic, după cum urmează:

$$(I)\ \cfrac{(I)\ \cfrac{(B)\ \cfrac{}{\mathtt{0} \in \mathbb{N}1}}{\mathtt{s0} \in \mathbb{N}1}}{\mathtt{ss0} \in \mathbb{N}1}$$

**Definiții inductive de funcții. Funcția +.**

O funcție $f : A \to B$ poate fi văzută ca o submulțime $f \subseteq A \times B$ a produsului cartezian $A \times B$ cu următoarele proprietăți:

1. pentru orice $a \in A$, există *cel puțin* un $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in f$ (cu alte cuvinte, funcția este definită pentru fiecare element al domeniului).
2. pentru orice $a \in A$, există *cel mult* un $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in f$ (cu alte cuvinte, funcția nu poate întoarce două valori diferite pentru același argument).

Din moment ce o funcție poate fi văzută ca o mulțime, putem defini funcții inductiv:

**Definiția 0.2.** Funcția $+ : \mathbb{N}1 \times \mathbb{N}1 \to \mathbb{N}1$ (funcția de adunare a două numere naturale) este definită inductiv de următoarele reguli:

$$(B_+)\ \frac{}{\mathtt{0} + m = m} \qquad\qquad (I_+)\ \frac{n + m = k}{\mathtt{s}n + m = \mathtt{s}k}$$

*Observația* 2. Folosim notația consacrată pentru + și scriem $x + y$ în loc de $+(x, y)$ pentru a nota aplicarea funcției + peste două argumente $x$ și $y$. Spre deosebire de curs, adunarea pe $\mathbb{N}1$ este definită în funcție de primul parametru și nu de al doilea.

Putem folosi definiția inductivă de mai sus pentru a demonstra:

**Lema 0.2.** *Suma dintre* $\mathtt{s0}$ *și* $\mathtt{ss0}$ *este* $\mathtt{sss0}$ *(mai simplu,* $\mathtt{s0} + \mathtt{ss0} = \mathtt{sss0}$*, sau* $1 + 2 = 3$*).*

*Proof.*

$$(I_+)\ \frac{(B_+)\ \dfrac{}{\mathtt{0} + \mathtt{ss0} = \mathtt{ss0}}}{\mathtt{s0} + \mathtt{ss0} = \mathtt{sss0}}$$

□

Demonstrația de mai sus este ușoară fiindcă se referă la două valori concrete care trebui adunate: $\mathtt{s0}$ și $\mathtt{ss0}$. Să încercăm să demonstrăm ceva mai interesant:

**Lema 0.3.** *Pentru orice* $m \in \mathbb{N}1$, $m + \mathtt{0} = m$.

*Observația* 3. La prima vedere, demonstrația pare foarte simplă fiindca e suficient să aplicăm regula $(B_+)$. Dar regula $(B_+)$ ne spune doar că $\mathtt{0} + m = m$, nu și că $m + \mathtt{0} = m$. Care este diferența dintre $\mathtt{0} + m$ și $m + \mathtt{0}$? Știm din clasa I că funcția + este comutativă, dar noi nu am demonstrat încă asta (o vom demonstra mai târziu). Deci trebuie să găsim altă metodă de a demonstra lema.

*Demonstrația lemei* **??**. Metoda de care avem nevoie se numește *inducție structurală*, o metodă care generalizează principiul inducției pe care l-ați învățat deja în liceu.

În inducția structurală *după* o anumită valoare definită inductiv, tratăm fiecare caz (de bază sau inductiv) al valorii respective. În cazul nostru, vom demonstra că

$$m + \mathtt{0} = m$$

pentru orice număr natural $m \in \mathbb{N}1$ prin inducție structurală după $m$:

1. (cazul de bază) dacă $m = \mathtt{0}$, trebuie să demonstrăm că

   $$\mathtt{0} + \mathtt{0} = \mathtt{0}.$$

   Dar acest lucru rezultă direct din regula $(B_+)$.

2. (cazul inductiv) dacă $m = \mathtt{s}n$, trebuie să arătăm că

   $$\mathtt{s}n + \mathtt{0} = \mathtt{s}n.$$

   Puterea demonstrației prin inducție structurală este că avem voie să presupunem că ceea ce trebuie să demonstrăm despre $m$ este deja adevărat despre $n$. Această presupunere se numește ipoteză inductivă și în cazul nostru este:

   $$n + \mathtt{0} = n. \tag{4}$$

Putem acum aplica regula $(I_+)$ peste ecuația (**??**) pentru a obține ceea ce vrem să demonstrăm:

$$(I_+)\ \dfrac{(\textbf{??})\ \dfrac{}{n + \mathtt{0} = n}}{\mathtt{s}n + \mathtt{0} = \mathtt{s}n}$$

□

O altă lema interesantă care poate fi demonstrată prin inducție structurală după $m$:

**Lema 0.4.** *Pentru orice $n, m \in \mathbb{N}1$, avem că $n + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(n + m)$.*

*Proof.* Prin inducție structurală după $n$:

1. dacă $n = \mathtt{0}$, avem de arătat că:
$$\mathtt{0} + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(\mathtt{0} + m).$$
Dar $\mathtt{0} + \mathtt{s}m \stackrel{B_+}{=} \mathtt{s}m$. Cum $m \stackrel{B_+}{=} \mathtt{0} + m$, rezultă că $\mathtt{s}m = \mathtt{s}(\mathtt{0} + m)$. Deci $\mathtt{0} + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(\mathtt{0} + m)$, ceea ce trebuia să arătăm.

2. dacă $n = \mathtt{s}k$, avem de arătat că
$$\mathtt{s}k + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(\mathtt{s}k + m)$$
dar știm din ipoteza de inducție că
$$k + \mathtt{s}m = \mathtt{s}(k + m). \tag{5}$$
Dar $\mathtt{s}k + \mathtt{s}m \stackrel{I_+}{=} \mathtt{s}(k + \mathtt{s}m) \stackrel{(\textbf{??})}{=} \mathtt{s}(\mathtt{s}(k + m)) \stackrel{I_+}{=} \mathtt{s}(\mathtt{s}k + m)$, ceea ce trebuia sa arătăm.

□

Un alt exemplu de demonstrație prin inducție structurală:

**Lema 0.5.** *Pentru orice $n, k \in \mathbb{N}1$, $n + m = m + n$ (altfel spus, adunarea este comutativă).*

*Proof.* Prin inducție structurală după $m$:

1. (cazul de bază) $m = \mathtt{0}$:
Avem de arătat că $n + \mathtt{0} = \mathtt{0} + n$.
Dar $n + \mathtt{0} \stackrel{Lemma\ \textbf{??}}{=} n \stackrel{(B_+)}{=} \mathtt{0} + n$, ceea ce trebuia să arătăm.

2. (cazul inductiv) dacă $m = \mathtt{s}k$ pentru un $k \in \mathbb{N}1$, atunci știm că:
$$n + k = k + n$$
și trebuie să arătăm că
$$n + \mathtt{s}k = \mathtt{s}k + n.$$
...

□

## EXERCIȚII

1. Demonstrați că $\mathtt{ssss0}$ este număr natural.
2. Demonstrați că $\mathtt{ss0} + \mathtt{sss0} = \mathtt{sssss0}$.
3. Continuați demonstrația lemei **??**.
4. Definiți inductiv funcția $\times : \mathbb{N}1 \times \mathbb{N}1 \to \mathbb{N}1$ (înmulțirea a două numere naturale). În definiția inductivă, puteți face apel la funcția $+$.
5. Demonstrați că $\mathtt{ss0} \times \mathtt{sss0} = \mathtt{ssssss0}$ .
6. Arătați că $\times$ este comutativă (veți avea nevoie de două leme auxiliare, la fel ca la $+$).

## 0.2 Sintaxa Logicii Propoziționale

Fie $A = \{\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \ldots\}$ o mulțime infinită, numărabilă, fixată, de *variabile propoziționale*.

**Definiția 0.3.** Mulțimea $LP$, a formulelor din logica propozițională, este cea mai mică mulțime care satisface următoarele proprietăți:

1. (pasul de bază) orice variabilă propozițională este formulă: dacă $p \in A$, atunci $p \in LP$ este formulă;
2. (pas inductiv) dacă $f \in LP$ este o formulă, atunci negația formulei, $(\neg f) \in LP$ este formulă;
3. (pas inductiv) dacă $f_1 \in LP$ și $f_2 \in LP$ sunt două formule, atunci conjuncția formulelor, $(f_1 \wedge f_2) \in LP$ este formulă;
4. (pas inductiv) dacă $f_1 \in LP$ și $f_2 \in LP$ sunt două formule, atunci disjuncția formulelor, $(f_1 \vee f_2) \in LP$ este formulă;
5. (pas inductiv) dacă $f \in LP$ atunci $(f) \in LP$ este formulă.

Dându-se o formulă, putem defini inductiv o funcție $|\cdot| : LP \to \mathbb{N}1$ care calculează *dimensiunea* formulei:

**Definiția 0.4.**
$|p| = 1$ pentru orice $p \in A$,
$|(\neg f)| = 1 + |f|$ pentru orice $f \in LP$,
$|(f_1 \wedge f_2)| = 1 + |f_1| + |f_2|$ pentru orice $f_1, f_2 \in LP$,
$|(f_1 \vee f_2)| = 1 + |f_1| + |f_2|$ pentru orice $f_1, f_2 \in LP$,
$|(f)| = |f|$ pentru orice $f \in LP$.

În definiția de mai sus, primul pas este pasul de bază și ceilalți pași sunt pașii inductivi. În general, nu vom marca explicit care pași sunt de bază și care inductivi.

Dându-se o formulă, putem defini inductiv o funcție $aparvar\Big(\cdot\Big) : LP \to \mathbb{N}$ care calculează numărul de apariții ale tuturor variabilelor propoziționale în formulă:

**Definiția 0.5.**
$aparvar\Big(p\Big) = 1$ pentru orice $p \in A$,
$aparvar\Big((\neg f)\Big) = aparvar\Big(f\Big)$ pentru orice $f \in LP$,
$aparvar\Big((f_1 \wedge f_2)\Big) = aparvar\Big(f_1\Big) + aparvar\Big(f_2\Big)$ pentru orice $f_1, f_2 \in LP$,
$aparvar\Big((f_1 \vee f_2)\Big) = aparvar\Big(f_1\Big) + aparvar\Big(f_2\Big)$ pentru orice $f_1, f_2 \in LP$,
$aparvar\Big((f)\Big) = aparvar\Big(f\Big)$ pentru orice $f \in LP$.

Să arătăm că:

**Lema 0.6.** *Pentru orice formulă $f \in LP$, $aparvar\Big(f\Big) \leq |f|$.*

*Proof.* Prin inducție structurală după $f$:

1. dacă $f = p$ pentru o variabilă propozițională $p \in LP$, atunci $aparvar\Big(f\Big) = aparvar\Big(p\Big) = 1 \leq 1 = |p| = |f|$, ceea ce trebuia să arătăm.
2. dacă $f = (\neg f')$ pentru o formulă $f' \in LP$, atunci trebuie să arătăm că
$$aparvar\Big((\neg f')\Big) \leq |(\neg f')|.$$
Ipoteza de inducție este că
$$aparvar\Big(f'\Big) \leq |f'|. \tag{6}$$
Dar $aparvar\Big((\neg f')\Big) \overset{def.\ aparvar(\cdot)}{=} aparvar\Big(f'\Big) \overset{(??)}{\leq} |f'| \overset{def.\ |\cdot|}{=} |(\neg f')| - 1 \leq |(\neg f')|$, ceea ce trebuia să arătăm.
3. dacă $f = (f_1 \wedge f_2)$, ...
4. dacă $f = (f_1 \vee f_2)$, ...
5. dacă $f = (f')$, ...

□