Tema 1 - 2 noiembrie 2018

Termen de predare: 9 noiembrie 2018, 12:00-14:00 în C403

- **Tema poate fi rezolvată în echipe de câte doi studenţi.**
- **Pentru soluţii redactate în LaTeX se oferă un bonus de 1 punct.**
- **Soluţiile identice sau copiate conduc la anularea punctajelor.**
- **Soluţiile trebuie să conţină numele celui/celor care au redactat-o şi vor fi transmise pe hârtie, nu prin e-mail.**
- **Nu rescrieţi enunţurile! Nu este nevoie de mai mult de $1-2$ pagini pentru fiecare dintre probleme.**

1. Se consideră reţeaua stradală a unui oraş. Se ştie că putem îndepărta posibilitatea de a merge în cerc în oraş pe această reţea prin blocarea a cel mult p sensuri de străzi (prin blocarea unui singur sens se înţelege obstrucţionarea sensului vizat de pe stradă). Arătaţi că putem îndepărta posibilitatea de a merge în cerc în oraş pe reţeaua sa stradală prin inversarea a cel mult p sensuri de străzi.

(Inversarea unui sens pe o stradă cu două sensuri implică păstrarea doar a celuilalt sens; inversarea sensului unei străzi cu un singur sens implică introducerea celuilalt sens.) **(2 puncte)**

2. Considerăm următoarea operaţie binară pe grafuri: dacă $G_i = (V_i, E_i)$ $(i = \overline{1,2})$ sunt două grafuri, atunci $G_1 \odot G_2$ este următorul graf

$$V(G_1 \odot G_2) = V(G_1) \times V(G_2) \text{ şi } E(G_1 \odot G_2) = \{(u_1, u_2)(v_1, v_2) \ : \ u_1v_1 \in E(G_1), u_2v_2 \in E(G_2)\}$$

Arătaţi că $G_1 \odot G_2$ este conex dacă şi numai dacă G_1 şi G_2 sunt conexe şi unul dintre ele conţine un circuit impar. **(2 + 2 = 4 puncte)**

3. Fie M_G transpusa matricii de incidenţă nod-muchie a unui graf dat $G = (V, E)$, adică $M_G = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, unde

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}.$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } e_i \text{ este incidentă cu } v_j \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

(a) Arătaţi că dacă T este un arbore, atunci prin îndepărtarea din M_T a unei coloane corespunzătoare unui nod dat se obţine o matrice pătratică nesingulară.

(b) Arătaţi că dacă C este un circuit, atunci M_C este matrice nesingulară dacă şi numai dacă C este impar.

(1 + 2 = 3 puncte)

4. Fie $G = (V, E)$ un digraf, $a : E \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de cost definită pe arcele sale şi $s, t \in V$ astfel încât $2 \leqslant d_G(s, t) < \infty$. Considerăm următoarea versiune a algoritmului lui Dijkstra care porneşte simultan din s şi din t pentru a determina un drum de cost minim de la s la t.

for $(i \in V \setminus \{s\})$ **do**
  $u_i^F \leftarrow a_{si}$; $before[i] \leftarrow s$; $u_k^B \leftarrow a_{kt}$; $after[k] \leftarrow t$; // înainte (forward) din s, înapoi (backward) din t
$S \leftarrow \{s\}$; $T \leftarrow \{t\}$; $U \leftarrow \infty$; $before[s] \leftarrow 0$; $after[t] \leftarrow 0$;
while $(\min\limits_{j \in V \setminus S} u_j^F + \min\limits_{l \in V \setminus T} u_l^B < U)$ **do**
  determină $j^* \in V \setminus S$ astfel încât $u_{j^*}^F = \min\limits_{j \in V \setminus S} u_j^F$; $S \leftarrow S \cup \{j^*\}$;
  determină $l^* \in V \setminus T$ astfel încât $u_{l^*}^B = \min\limits_{l \in V \setminus T} u_l^B$;
  for $(j \in V \setminus S)$ **do**
    if $(u_j^F > u_{j^*}^F + a_{j^*j})$ **then**
      $u_j^F \leftarrow u_{j^*}^F + a_{j^*j}$; $before[j] \leftarrow j^*$;
    if $((j \in T)$ and $(u_{j^*}^F + a_{j^*j} + u_j^B < U))$ **then**
      $U \leftarrow u_{j^*}^F + a_{j^*j} + u_j^B$; $i \leftarrow j$;
  if $(u_{j^*}^F + u_{l^*}^B \geqslant U)$ **then**
    return i, U;
  $T \leftarrow T \cup \{l^*\}$;
  for $(l \in V \setminus T)$ **do**
    if $(u_l^B > a_{ll^*} + u_{l^*}^B)$ **then**
      $u_l^B \leftarrow a_{ll^*} + u_{l^*}^B$; $after[l] \leftarrow l^*$;
    if $((l \in S)$ and $(u_l^F + a_{ll^*} + u_{l^*}^B < U))$ **then**
      $U \leftarrow u_l^F + a_{ll^*} + u_{l^*}^B$; $i \leftarrow l$;
return i, U;

(a) Demonstraţi că după fiecare iteraţie în bucla **while** $\min\limits_{j \in V \setminus S} u_j^F$ şi $\min\limits_{l \in V \setminus T} u_l^B$ nu descresc.

(b) Să presupunem că suntem imediat după efectuarea unei iteraţii în bucla **while** şi $P_{st} \in \mathcal{P}_{st}$ este un drum cu $j, l \in V(P_{st})$ aşa încât

- j şi toate nodurile dinaintea sa sunt din S, iar l şi toate nodurile de după el sunt din T;
- j este ultimul nod de pe P_{st} din S şi l este primul nod de pe P_{st} din T;
- succesorul lui j pe drumul P_{st} este j', iar predecesorul lui l pe drumul P_{st} este l'.

Dacă $j' \neq l$ şi $l' \neq j$, atunci $a(P_{st}) \geqslant u_j^F + a_{jj'} + a_{l'l} + u_l^B \geqslant \min\limits_{h \in V \setminus S} u_h^F + \min\limits_{k \in V \setminus T} u_k^B$.

(c) Arătaţi că $s, \ldots, before(i), i, after(i), \ldots, t$ este un drum de cost minim de la s la t şi costul său este U (i este nodul returnat de algoritm).

(1 + 2 + 2 = 5 puncte)