Probabilităţi şi statistică - Curs 4

martie, 2017

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

Definition 1

Fie X o variabilă aleatoare discretă cu repartiţia (1), **media** *variabilei X (dacă există) este*

$$M[X] = \sum_i p_i x_i \quad (2)$$

- Media unei variabile aleatoare discrete este o sumă finită sau suma unei serii infinite (care poate converge sau nu) a valorilor ei, ponderate cu probabilităţile aferente.

Exemplu. Se aruncă două zaruri identice şi se notează cu X valoarea maximă de pe cele două feţe. X este evident o variabilă aleatoare cu şase valori posibile: $1, 2, \ldots, 6$. Funcţia de masă de probabilitate este

$$
\begin{aligned}
f_X(1) = P\{X = 1\} = &\quad P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36},\\
f_X(2) = P\{X = 2\} = &\quad P(\{(1,2),(2,1),(2,2)\}) = \frac{1}{12},\\
f_X(3) = P\{X = 3\} = &\quad P(\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)\}) = \frac{5}{36},\\
f_X(4) = P\{X = 4\} = &\quad P(\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),\ldots\}) = \frac{7}{36},\\
f_X(5) = P\{X = 5\} = &\quad P(\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),\ldots\}) = \frac{1}{4},\\
f_X(6) = P\{X = 6\} = &\quad P(\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),\ldots\}) = \frac{11}{36}.
\end{aligned}
$$

Repartiţia acestei variabile este

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

Media variabilei este

$$M[X] = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}. \clubsuit$$

- Următoarele două propoziţii enumeră câteva proprietăţi importante ale mediei unei variabile aleatoare.

Proposition 1

Fie X o variabilă aleatoare discretă $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie reală. Atunci $h(X)$ este o variabilă aleatoare şi

$$M[h(X)] = \sum_i h(x_i) p_i.$$

proof: Fie $Y = h(X) : \Omega \to \mathbb{R}$; Y este evident o variabilă aleatoare discretă. Funcţia de masă de probabilitate a lui Y este $f_Y : Y(\Omega) = h(X(\Omega)) \to [0,1]$, unde

$$f_Y(y_j) = P\left(\bigcup_i \{h(x_i) = y_j\}\right) = \sum_{h(x_i)=y_j} P\{X = x_i\} = \sum_{h(x_i)=y_j} f_X(x_i),$$

Astfel

$$M[Y] = \sum_j y_j f_Y(y_j) = \sum_j y_j \sum_{h(x_i)=y_j} f_X(x_i) =$$

$$= \sum_j \sum_{h(x_i)=y_j} h(x_i) f_X(x_i) = \sum_i h(x_i) f_X(x_i).$$

■

Proposition 2

(i) *Dacă* X *este o variabilă aleatoare discretă, atunci* $aX+b$ *este o variabilă aleatoare şi* $M[aX+b]=aM[X]+b$*, pentru orice* $a,b\in\mathbb{R}$.

(ii) *Dacă* X_1 *şi* X_2 *sunt variabile aleatoare discrete, atunci* X_1+X_2 *este o variabilă aleatoare şi* $M[X_1+X_2]=M[X_1]+M[X_2]$.

(iii) *Fie* $X\geqslant 0$*, atunci* $M[X]\geqslant 0$*, iar* $M[X]=0$ *numai dacă* $X\equiv 0$.

proof: (i) este imediată.

Pentru (ii) reinterpretăm formula pentru medie: pentru o variabilă aleatoare discretă X avem

$$M[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega), \text{ de unde}$$

$$M[X_1 + X_2] = \sum_{\omega \in \Omega} [X_1(\omega) + X_2(\omega)] \, P(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) P(\omega) = M[X_1] + M[X_2].$$

(iii) Dacă $x_i \geqslant 0$, pentru orice i, atunci $p_i x_i \geqslant 0$, $\forall i$ şi

$$M[X] = \sum_i p_i x_i \geqslant 0.$$

$\blacksquare$

Exemplu. Se aruncă două zaruri. Să se determine media sumei celor două zaruri.

Soluţie: Fie X_i rezultatul zarului i; suma celor doua zaruri poate fi scrisă ca $X = X_1 + X_2$, deci, conform propoziţiei 2, $M[X] = M[X_1] + M[X_2]$. Variabilele X_1 şi X_2 sunt identic repartizate:

$$X_1, X_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \text{de unde}$$

$$M[X_1] = M[X_2] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow M[X] = 7. \clubsuit$$

Definition 2

Fie X o variabilă aleatoare. Se numeşte **dispersia** *(sau* **varianţa***) lui X, media pătratului abaterii de la medie (dacă există):*

$$D^2[X] = M[(X - M[X])^2] = \sum_i p_i (x_i - M[X])^2 .$$

- Observăm că o condiţie necesară pentru existenţa dispersiei este ca variabila să aibă medie. O metodă de calcul a dispersiei este dată de următorul rezultat.

Proposition 3

Fie X o variabilă aleatoare care admite dispersie, atunci

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2 .$$

proof:

$$D^2[X] = \sum_i p_i (x_i - M[X])^2 = \sum_i p_i \left(x_i^2 - 2x_i M[X] + (M[X])^2 \right) =$$

$$= \sum_i p_i x_i^2 - 2 \left(\sum_i p_i x_i \right) M[X] + \sum_i p_i (M[X])^2 =$$

$$= M[X^2] - 2M[X] \cdot M[X] + (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2 .$$

■

Proposition 4

Fie X o variabilă aleatoare care admite dispersie, atunci

(i) $D^2[X] \geqslant 0$ *şi* $D^2[X] = 0$ *dacă şi numai dacă* $X \equiv const$ *(variabilă degenerată);*

(ii) $D^2[aX + b] = a^2 D^2[X]$, *pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$.

proof: (i) este evident ca $D^2[X] \geqslant 0$ şi că $D^2[X] = 0$ dacă şi numai dacă $x_i = M[X]$, $\forall i$, i.e. X este constantă (şi egală cu media sa).

(ii) $D^2[aX+b] = M[(aX+b-aM[X]-b)^2] = M[a^2(X-M[X])^2] =$
$= a^2 M[(X-M[X])^2]$. ∎

Definition 3

Deviaţia standard *a variabilei aleatoare* X *este*

$$D[X] = \sqrt{D^2[X]}.$$

Repartiţii discrete remarcabile - Repartiţia uniformă U_n

- O variabilă aleatoare se spune că este distribuită **uniform** *cu parametrul* $n \in \mathbb{N}^*$ dacă are repartiţia

$$U_n : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

- Este uşor de văzut că media şi dispersia unei astfel de variabile sunt

$$M[X] = \frac{n+1}{2} \text{ şi } D^2[X] = \frac{n^2-1}{12}.$$

- O astfel de repartiţie am întâlnit în cazul aruncării unui zar.

Repartiţii discrete remarcabile - Repartiţia Bernoulli şi binomială $B(n, p)$

- Să considerăm un experiment al cărui rezultat poate fi intrepretat ca succes sau eşec. Fie X definită astfel

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dacă experimentul are succes} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

(Uzual experimentului i se asociază un eveniment aleator A (cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$): succesul înseamnă realizarea acestui eveniment.)

- Funcţia de masă de probabilitate este $f(0) = 1 - p$ şi $f(1) = p$. O astfel de variabilă este **repartizată Bernoulli** *cu parametrul p* şi are repartiţia

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

- Media şi dispersia sunt $M[X] = p$ şi $D^2[X] = p(1-p)$.

- Să presupunem acum că un astfel de experiment (cu rezultate posibile succes/eşec) este efectuat de n ori în mod independent şi notăm cu X numărul de succese.
- Se spune că variabila X este **repartizată binomial** *cu parametrii n şi p*. Utilizând schema binomială putem determina tabloul de repartiţie al acestei variabile

$$B(n,p):\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ C_n^0(1-p)^n & C_n^1 p(1-p)^{n-1} & \dots & C_n^k p^k(1-p)^{n-k} & \dots & C_n^n p^n \end{pmatrix},$$

- iar caracteristicile sunt $M[X]=np$ şi $D^2[X]=np(1-p)$.

Proposition 5

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabile aleatoare independente repartizate Bernoulli cu parametrul $p \in (0,1)$. Atunci $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ este o variabilă repartizată $B(n,p)$.

Exemplu. Se aruncă un zar până apare de trei ori faţa cu numărul 6.

(a) Care este probabilitatea ca să fie necesare exact douăzeci de aruncări ale zarului?

(b) Daca zarul este aruncat de douăzeci de ori, care este numărul mediu de apariţii ale feţei şase?

Soluţie: (a) Douăzeci de aruncări sunt suficiente numai dacă în primele nouăsprezece aruncări faţa 6 apare de exact două ori şi mai apare odată la ultima aruncare. Aceste două evenimente sunt independente, deci probabilitatea cerută (a intersecţiei lor) este

$$\binom{19}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\cdot\frac{1}{6}\cong 0.035682$$

(b) Variabila X care numără de câte ori apare faţa şase în douăzeci de aruncări este repartizată $B(20,1/6)$. $M[X]=20\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{3}\cong 3.333$ ♣

Exemplu. O variantă echivalentă a jocului numit *Roata norocului* este următoarea: un jucător pariază pe unul dintre numerele de la 1 la 6, apoi se aruncă trei zaruri şi dacă apare numărul ales de jucător de k ori, acesta câştigă k\$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$, iar dacă numărul ales nu apare pe nici un zar, atunci pierde 1\$. Jocul oferă şanse corecte jucătorului? Care este câştigul mediu?

Soluţie: Fie X câştigul jucătorului, valorile lui X pot fi $\{-1, 1, 2, 3\}$. Variabila X are funcţia de masă de probabilitate similară cu aceea aunei variabile binomiale. Deoarece probabilitatea ca pe faţa unui zar să apară numărul ales este $1/6$, avem

$$P\{X = -1\} = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216},$$

$$P\{X=1\}=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216},$$

$$P\{X=2\}=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216},$$

$$P\{X=3\}=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}.$$

Jocul nu oferă şanse corecte celui care îl joacă deoarece probabilitatea de a pierde a acestuia este $125/216 > 1/2$, iar câştigul mediu este

$$M[X]=(-1)\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{75}{216}+2\cdot\frac{15}{216}+3\cdot\frac{1}{216}=-\frac{17}{216}\clubsuit$$

Repartiţii discrete remarcabile - Repartiţia geometrică $Geometric(p)$

- Să considerăm acum un experiment aleator şi un eveniment aleator A (cu $P(A) = p \in (0,1)$) asociat acestui experiment. Variabilă care notează numărul de repetări independente ale experimentului până la realizarea evenimentului A se spune că este **repartizată geometric** *cu parametrul* p.
- Tabloul de repartiţie al unei astfel de variabile (vezi schema geometrică) este

$$G(p) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p & p(1-p) & \dots & p(1-p)^{n-1} & \dots \end{pmatrix}$$

- Caracteristicile repartiţiei geometrice sunt

$$M(X) = \frac{1}{p} \text{ şi } D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Repartiţia geometrică $Geometric(p)$ - exemplu

Exemplu. Se aruncă în mod repetat două zaruri până se obţine un produs egal cu 6. Care este media şi dispersia numărului de aruncări?

Soluţie: $A =$" produsul zarurilor este egal cu 6"

$$A = \{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)\}, P(A) = \frac{4}{36}.$$

Fie X = numărul de aruncări necesare realizării evenimentului A. X este repartizată geometric cu parametrul $p = 1/9$.

$$M[X] = \frac{1}{p} = 9, D^2[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{8}{9}.$$

Sunt necesare, în medie, 9 aruncări pentru obţinerea unui produs egal cu 6. ♣

- O variabilă aleatoare X este **repartizată Poisson** *cu parametrul* $\lambda > 0$ dacă funcţia sa de masă de probabilitate este

$$f(k) = P\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \forall k \geqslant 0.$$

- Tabloul de repartiţie al unei astfel de variabile este

$$Poisson(\lambda) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ \lambda^0 \frac{e^{-\lambda}}{0!} & \lambda \frac{e^{-\lambda}}{1!} & \dots & \lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} & \dots \end{pmatrix},$$

iar caracteristicile sunt

$$M[X] = \lambda \text{ şi } D^2[X] = \lambda.$$

- În general repartiţia Poisson modelează apariţia evenimentelor care se produc cu frecvenţă scăzută, într-un interval de timp fixat.
- Astfel de exemple de aplicaţii ale repartiţiei Poisson sunt: numărul de apeluri telefonice greşite dintr-o zi, numărul de particule emise de o sursă radioactivă într-un interval de timp dat, numărul de erori tipografice pe o pagină, numărul de naşteri pe oră într-o anumită zi etc.
- O parte dintre aplicaţiile acestei repartiţii se datorează faptului că pentru n suficient de mare şi p suficient de mic (astfel încât np să fie o valoare rezonabilă) repartiţia binomială $B(n,p)$ poate fi aproximată cu $Poisson(np)$.

Exemplu. Într-o maternitate, naşterile au loc cu o rată de 2.1 pe oră.

(a) Care este probabilitatea ca într- oră să se nască patru copii?

(b) Dar ca într-o anumită oră să se nască cel puţin trei copii?

Soluţie: Fie X numărul de naşteri pe oră, X este distribuită $Poisson(2.1)$.

(a) $P\{X = 4\} = \lambda^4 \dfrac{e^{-\lambda}}{4!} \cong 0.099231 \; (\lambda = 2.1)$

(b) Pentru a doua cerinţă putem evita calculul sumei unei serii astfel

$$P\{X \geqslant 3\} = \sum_{k \geqslant 3} P\{X = k\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} P\{X = k\} =$$

$$= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \cong 0.350368 \; (\lambda = 2.1). \clubsuit$$

- Reluăm contextul schemei bilei neîntoarse: într-o urnă sunt n bile de două culori (n_1 albe şi n_2 neagre) şi se extrag simultan k bile din urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obţinute; această variabilă se spune că este **repartizată hipergeometric**.
- Tabloul său de repartiţie (vezi şi schema bilei neîntoarse) este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & j & \dots & r \\ \frac{\binom{n_1}{0}\binom{n_2}{k}}{\binom{n}{k}} & \frac{\binom{n_1}{1}\binom{n_2}{k-1}}{\binom{n}{k}} & \dots & \frac{\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j}}{\binom{n}{k}} & \dots & \frac{\binom{n_1}{r}\binom{n_2}{k-r}}{\binom{n}{k}} \end{pmatrix},$$

unde $r = \min\{k, n_1\}$.
- Media şi dispersia ei sunt

$$M[X] = \frac{kn_1}{n}, D^2[X] = k \cdot \frac{n-k}{n-1} \cdot \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n}$$

- Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete cu repartiţiile

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \text{ şi } Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m & \dots \end{pmatrix}.$$

Definition 4

Repartiţia comună *a celor două variabile este formată din mulţimea tripletelor*

$$(x_i, y_j, P\{X = x_i \cap Y = y_j\})_{i,j}$$

- Dacă notăm cu $r_{ij} = P\{X = x_i \cap Y = y_j\}$ repartiţia comună se poate reprezenta într-un tablou astfel:

				X			
		x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	
	y_1	r_{11}	r_{21}	$\dots$	r_{i1}	$\dots$	q_1
	y_2	r_{12}	r_{22}	$\dots$	r_{i2}	$\dots$	q_2
Y	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	
	y_j	r_{1j}	r_{2j}	$\dots$	r_{ij}	$\dots$	q_j
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	
		p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	

- Se observă că probabilităţile aferente celor două variabile pot fi obţinute adunând probabilităţile din repartiţia comună pe linii (pentru Y) respectiv pe coloane (pentru X):

$$\sum_i r_{ij} = q_j, \forall\, j \quad \text{şi} \quad \sum_j r_{ij} = p_i, \forall\, i.$$

Exemplu. Se dau două urne: U_1 care conţine două bile albe, două negre şi trei bile roşii şi U_2 care conţine trei bile albe, două negre şi o bilă roşie. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de-a doua urnă, iar apoi se extrage o bilă din cea de a doua urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obţinute şi cu Y numărul de bile negre obţinute.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(b) Să se determine repartiţia şi apoi media variabilei $X + Y$.

Soluţie: Observăm că variabilele X şi Y sunt dependente: sunt legate prin relaţia $X + Y \leqslant 2$. Notăm cu A_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este albă", cu B_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este neagră" şi cu C_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este roşie" $(i = \overline{1,2})$.

		X: 0	X: 1	X: 2	
Y	0	6/49	11/49	8/49	25/49
	1	?	?	0	?
	2	?	0	0	?
		?	?	8/49	

- **Caracteristici ale variabilelor aleatoare:** I.1(a, c), I.4, I.7(a), I.8, I.9, I.15, I.16.
- **Repartiţii discrete remarcabile:** II.1, II.2, II.6, II.9, III.1, III.4, III.6, IV.1, IV.3.
- **Repartiţii comune:** V.1.
- **Rezervă:** I.5, I.6, I.12, II.3, III.2, IV.4, V.3, V.2.

Sfârşit

Exerciţii - repartiţii şi caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

I.1. Determinaţi media şi dispersia fiecăreia dintre următoarele variabile aleatoare

$a) X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$ $b) Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ $c) Z : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

I.2. O monedă falsificată are probabilitatea de a apare stema la o aruncare 2/3. Moneda se aruncă de patru ori. Fie X variabila aleatoare care notează numărul maxim de apariţii consecutive ale stemei. Să se determine repartiţia, media şi dispersia variabilei X.

I.3. Sunt alese două bile la întâmplare dintr-o urnă care conţine opt bile albe, patru bile negre şi două bile galbene. Să presupunem că o bilă neagră valorează 2$, iar una albă 1$. Se notează cu X câştigul obţinut; să se determine repartiţia, media şi dispersia variabilei X.

I.4. Fie X diferenţa dintre numărul de apariţii ale stemei şi ale banului la aruncarea de trei ori a unei monede. Determinaţi repartiţia şi media variabilei aleatoare X.

I.5.

(a) Se aruncă un zar şi se notează cu X numărul de puncte obţinute. Să se determine repartiţia, media şi dispersia variabilei X.

(b) Se aruncă două zaruri. Care este media şi dispersia sumei celor două zaruri? Dar ale produsului?

I.6. Se aruncă o monedă până apare banul sau până apare de cinci ori stema. Care este numărul mediu de aruncări care să îndeplinească această condiţie?

I.7. Un zar se aruncă de două ori. Fie X_1 şi X_2 rezultatele obţinute. Se definesc

$$X = \min\{X_1, X_2\} \text{ şi } Y = \max\{X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2\}.$$

Să se determine repartiţiile variabilelor a) X şi b) Y.

I.8. Se dau trei urne. Prima conţine o bilă albă şi una neagră, cea de-a doua conţine două bile albe şi şase negre iar a treia o bilă albă şi trei negre. Din prima urnă se extrage o bilă şi se introduce în cea de-a doua, după care se extrage o bilă din cea de-a doua urnă şi se introduce în cea de-a treia; în sfârşit se extrage o bilă din ultima urnă. Să se determine media şi dispersia numărului de bile albe extrase.

I.9. O anumită familie regală are copii atâta vreme cât nu a apărut un băiat sau sunt mai puţin de trei copii în familie. Să se determine media şi dispersia numărului de fete într-o astfel de familie. (Probabilitatea ca un nou născut să fie fată este 1/2.)

I.10. O monedă se aruncă până când apare stema de patru ori sau până apare banul de patru ori (oricare apare mai întâi). Determinaţi media şi dispersia numărului de aruncări necesare.

I.11. Patru bile se repartizează uniform şi independent în trei urne. Notăm cu X numărul de urne ocupate şi cu Y numărul de bile din cea de-a doua urnă. Să se determine repartiţiile şi mediile celor două variabile.

I.12. Se dau trei urne. Prima conţine două bile albe si două negre, cea de-a doua conţine cinci bile albe şi trei negre, iar a treia conţine trei bile albe şi trei negre. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Se cer repartiţia, media şi dispersia numărului de bile negre obţinute.

I.13*. Cinci numere distincte sunt distribuite aleator uniform la cinci jucători numerotaţi de la 1 la 5. Când doi dintre jucători îşi compară numerele, câştigă cel care are numărul mai mare.

Mai întâi jucătorii 1 şi 2 îşi compară numerele, apoi câştigătorul dintre ei cu jucătorul 3 şi aşa mai departe. Fie X variabila aleatoare care numără de câte ori jucătorul 1 este câştigător. Determinaţi repartiţia şi media lui X.

I.14*. A şi B joacă următorul joc: A scrie pe o hârtie unul dintre numerele 1 sau 2 şi B trebuie să ghicească numărul scris. Dacă numărul scris este i şi B îl ghiceşte atunci B primeşte i\$ de la A. Dacă B greşeşte, atunci îi plăteşte 0.75\$ lui A.

(a) Să presupunem că B alege 1 cu probabilitate p şi 2 cu probabilitate $(1-p)$. Deteminaţi câştigul mediu al lui B, dacă A scrie (i) numărul 1, respectiv (ii) numărul 2.

(b) Să presupunem acum că A alege să scrie 1 cu probabilitate q şi 2 cu probabilitate $(1-q)$. Determinaţi pierderea medie al lui A, dacă B alege (i) numărul 1, respectiv (ii) numărul 2.

I.15*. Într-un meci de tenis dintre doi jucători P_1 şi P_2, învinge cel care câştigă primul două seturi. P_1 câştigă fiecare set, independent, cu probabilitatea 1/3. Notăm cu X numărul de seturi jucate de P_1 până la sfârşitul meciului şi cu Y numărul de seturi câştigate de P_2. Să se determine repartiţiile şi mediile variabilelor X şi Y.

I.16*. Probabilitatea de a apărea stema la aruncarea unei monezi este 1/3. Moneda este aruncată de trei ori. Se notează cu X numărul de apariţii ale banului şi cu Y numărul maxim de apariţii consecutive ale stemei. Să se determine repartiţiile şi mediile variabilelor X şi Y.

I.17*. Un zar este aruncată de trei ori. X este variabila care notează de câte ori apare un număr par, iar Y notează de câte ori apare un număr prim. Să se determine repartiţiile şi mediile variabilelor X şi Y.

Exerciţii - repartiţii şi caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

I.18. Într-o urnă sunt 5 bile albe şi 4 bile roşii. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu o bilă de culoare opusă. Apoi se mai extrage o bilă. Fie X numărul de bile albe şi Y numărul de bile roşii extrase. Aflaţi repartiţiile variabilelor X şi Y.

I.19*. Într-o urnă sunt 3 bile negre şi 5 bile verzi. Se extrage o bilă din urnă şi se procedează astfel: dacă bila este neagră ea este pusă la loc în urnă împreună cu o bilă verde, iar dacă este verde se înlocuieşte cu două bile de culoare neagră. Apoi se extrage încă o bilă. Fie X numărul de bile negre şi Y numărul de bile verzi extrase. Aflaţi repartiţiile şi mediile variabilelor X şi Y.

I.20*. Se dau două urne: una conţine 2 bile albe şi 2 bile negre, iar cealaltă o bilă albă şi 2 bile negre. Se aruncă un zar, dacă apare un multiplu de 3, se extrage o bilă din prima urnă, altfel, se extrage o bilă din a doua urnă. Fie X numărul de bile albe rămase în prima urnă şi Y numărul de bile negre din a doua urnă. Determinaţi repartiţiile şi mediile şi variabilelor X şi Y.

Exerciţii - repartiţii şi caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

I.21*. Într-o urnă sunt 4 bile albe şi 5 bile negre. Se extrage din urnă o bilă şi se procedează astfel: dacă bila este albă ea este pusă la loc în urnă, iar dacă este neagră se înlocuieşte cu o bilă de culoare albă. Apoi se extrage încă o bilă. Fie X numărul de bile albe şi Y numărul de bile negre extrase. Să se determine repartiţiile şi mediile variabilelor X şi Y.

I.22*. Într-o urnă sunt 3 bile roşii şi 4 bile negre. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu două bile de culoare opusă. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile roşii extrase şi cu Y numărul de bile negre rămase în urnă. Găsiţi repartiţiile, mediile şi dispersiile variabilelor X şi Y.

I.23. Fie X o variabilă aleatoare care admite medie şi dispersie ($M[X] = \mu$ şi $D^2[X] = \sigma^2 > 0$). Calculaţi media şi dispersia variabilei $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ (aceasta este *operaţia* numită *de standardizare*).

I.24. Arătaţi că $D^2[X+Y]+D^2[X-Y]=2D^2[X]+2D^2[Y]$.

I.25. Fie X şi Y două variabile aleatoare independente cu aceeaşi medie şi dispersie. Arătaţi că $M\left[(X-Y)^2\right]=2D^2[X]$.

I.26. Dacă X şi Y au aceeaşi dispersie, atunci

$$M[(X+Y)(X-Y)]=M[X+Y]M[X-Y].$$

II.1. Se aruncă două monede de şapte ori. De câte ori se obţine în medie stema pe amândouă monedele?

II.2. O sursă generează independent biţi (0 cu probabilitate 0.6).

(a) Care este probabilitatea ca într-o secvenţă de şapte biţi să apară doi de 1 şi cinci de 0?

(b) Care este numărul mediu de biţi egali cu 0 într-o secvenţă de cinci biţi?

II.3. La începutul secolului XIX încercarea de a contacta pe cineva prin telefon avea o probabiliate de sucees egală cu 0.75. Care era numărul mediu de succese din douăsprezece încercări de a contacta pe cineva prin telefon?

II.4. Un individ susţine că are ESP (percepţii extra-senzoriale); este testat în felul următor: o monedă este aruncată de zece ori şi i se cere să ghicească în avans rezultatele. Şapte din cele zece răspunsuri se dovedesc a fi corecte. Care este probabilitatea de a fi dat un răspuns cel puţin la fel de bun dacă nu ar fi avut ESP?

II.5. Un canal de comunicare transmite mesaje sub forma unor biţi, dar datorită interferenţelor electrostatice un bit transmis este receptat eronat cu probabilitate 0.2. Se transmite un mesaj format dintr-un singur bit; pentru a reduce erorile de receptare în loc de 0 se transmite 00000 şi 11111 în loc de 1. Dacă receptorul foloseşte metoda majorităţii pentru a decoda mesajul, care este probabilitatea ca mesajul să fie decodat greşit? (Se presupune că biţii sunt transmişi independent.)

II.6. Se extrag zece cărţi dintr-un pachet de cărţi de joc, cu întoarcere. Care este numărul mediu de trefle obţinute în cele zece extrageri?

II.7. Pe un canal de comunicaţie se transmit biţi în mod aleator şi independent (0 apare cu probabilitate 0.4). Sunt recepţionate opt perechi. Care este media şi dispersia numărului de perechi $0-1$ recepţionate?

II.8. Un canal de comunicaţie transmite şase secvenţe de câte trei biţi; fiecare bit este transmis aleator şi independent (1 apare cu probabilitate 0.2). Care este media şi dispersia numărului de secvenţe $0-1-0$ recepţionate?

II.9. Se aruncă două zaruri de opt ori. De câte ori în medie apare un produs par?

II.10.** Un vânzător de ziare cumpără *New York Times* cu 0.50$ şi îl vinde cu 0.75$, dar exemplarele nevândute nu le poate returna. Cererea pentru acest ziar urmează o distribuţie binomială cu parametrii $n = 8$ şi $p = 0.25$. Care este numărul ($\leqslant 8$) aproximativ de exemplare pe care trebuie să le cumpere pentru a-şi maximiza profitul mediu?

III.1. Care este numărul mediu de de aruncări a două zaruri necesar obţinerii unui produs mai mic strict decât 7? Dar a unei sume pare?

III.2. Se extrag cărţi dintr-un pachet (cu întoarcere). Care este numărul mediu de extrageri necesar obţinerii unei trefle?

III.3. 1% din biţii transmişi de-a lungul unei căi de comunicaţie sunt recepţionaţi eronat. Biţii se transmit până la apariţia primei erori. Care este numărul mediu de biţi transmişi?

III.4. Se extrage câte o carte dintr-un pachet de cărţi de joc, cu întoarcere, până când se obţine o figură care nu este caro. Care este numărul mediu de extrageri necesare realizării acestui eveniment?

III.5. Se aruncă două zaruri de mai multe ori. Care este numărul mediu de aruncări până când exact unul dintre cele două zaruri este un număr prim? Dar numărul mediu de aruncări necesare obţinerii unei sume divizibile prin cinci?

III.6. Pe un canal de comunicaţie se transmit biţi în mod aleator şi independent (0 apare cu probabilitate 0.4). Biţii sunt recepţionaţi în perechi. Care este media şi dispersia numărului de perechi recepţionate până când apare o pereche $0-0$?

III.7. Un canal de comunicaţie transmite secvenţe de câte trei biţi; fiecare bit este transmis aleator şi independent (1 apare cu probabilitate 0.2). Care este media şi dispersia numărului de secvenţe recepţionate până când apare o secvenţă $0-0-1$?

IV.1. Între orele 7 şi 8 numărul mediu de accidente de pe o autostradă este 0.7. Care este probabilitatea ca într-o zi între orele 7 şi 8

a) să se producă cel puţin trei accidente?

b) să se producă exact un accident?

IV.2. O companie de transport are trei maşini pe care le închiriază diverşilor clienţi câte o zi întreagă. Numărul de cereri pentru maşini pe zi este distribuit Poisson cu media $\lambda = 1.5$. Să se calculeze proporţia zilelor în care

(a) nici o maşină nu este cerută;

(b) este nevoie să se refuze cereri de închiriere.

IV.3. Presupunând că numărul de erori tipografice urmează o distribuţie Poisson cu o medie de 3 erori pe pagină, să se determine probabilitatea ca pe o pagină dată să avem cel puţin 4 greşeli tipografice.

IV.4. Numărul de defecte de fabricaţie într-un cablu de fibră optică urmează o distribuţie Poisson: în 100m de cablu numărul mediu de defecte este 1.5

(a) Care este probabilitatea ca în 100m de cablu să existe exact două defecte de fabricaţie?

(b) Care este probabilitatea ca în 100m de cablu să existe cel puţin patru defecte de fabricaţie?

IV.5. Numărul de incidente aviatice lunare este de 3.5. Care este probabilitatea ca în luna următoare

(a) să aibă loc exact 2 accidente?

(b) să aibă loc cel mult un accident?

IV.6. Presupunând că numărul de aterizări pe un aeroport urmează o repartiţie Poisson cu media de 3 pe minut, să se determine probabilitatea ca într-un interval de un minut să aterizeze cel mult 2 avioane.

IV.7. Numărul de apeluri telefonice la recepţia unui hotel urmează o distribuţie Poisson cu media 2 pe minut. Să se determine probabilitatea ca într-un anumit minut să apară cel puţin un apel.

IV.8. Numărul de cereri pentru un server web urmează o distribuţie Poisson cu o medie de 4 cereri pe minut, să se determine probabilitatea de a avea cel puţin 3 cereri într-un minut.

IV.9. Numărul de asigurări de viaţă pe care le vinde un agent de asigurări urmează o distribuţie Poisson cu media 3 pe zi. Care este probabilitatea ca într-o anumită zi agentul sa vândă cel mult o asigurare?

IV.10. Numărul de expoziţii de artă organizate le Palatul Culturii urmează o distribuţie Poisson cu media 5 pe an. Să se determine probabilitatea ca într-o anumit an să se organizeze cel mult două astfel de expoziţii.

IV.11*. Fie X o variabilă aleatoare repartizată Poisson cu parametrul $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Studiaţi monotonia funcţiei $i \mapsto P\{X = i\}$. Pentru ce valoare a lui i îşi atinge această funcţie maximul?

IV.12*. Fie X o variabilă aleatoare repartizată Poisson cu parametrul λ. Arătaţi că

$$P\{X \text{ este par}\} = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right).$$

(Folosiţi dezvoltarea în serie Taylor, convergentă pe toată axa reală, $e^x = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$.)

IV.13*. Fie X o variabilă Poisson cu parametrul λ. Calculaţi $M[X!]$.

V.1. Să presupunem că X şi Y au următoarea repartiţie comună

		Y			
		-3	2	4	
X	1	0.1	0.2	0.2	
	3	0.3	$?$	0.1	

Determinaţi repartiţiile individuale ale variabilelor X şi Y.

V.2. O monedă este aruncată de trei ori. Fie X o variabilă egală cu 1 dacă apare stema şi 0 dacă apare banul la prima aruncare, iar Y o variabilă egală cu numărul de apariţii ale stemei în toate aruncările. Determinaţi repartiţia comună acelor două variabile.

V.3. Fie X o variabilă aleatoare cu următoarea distribuţie şi $Y = X^2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Determinaţi repartiţia lui Y şi repartiţia comună a celor două variabile.

V.4. Într-o urnă sunt trei bile roşii şi cinci bile negre. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu o bilă de culoare diferită. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile roşii şi cu Y numărul de bile negre extrase. Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.