# Tema nr. 8

Fie $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcţie reală. Să se aproximeze un punct de minim (local sau global) al funcţiei $F$ folosind metoda Yun-Petcović [1]. Să se verifice dacă soluţia obţinută este punct de minim prin verificarea semnului celei de-a doua derivate în punctul găsit. Să se compare soluţiile obţinute folosind cele două moduri de aproximare a derivatei funcţei $F$, din punct de vedere al numărului de iteraţii efectuate pentru obţinerea soluţiilor (pentru aceeaşi precizie $\epsilon > 0$).

## Minimizarea funcţiilor de o variabilă

Fie $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcţie reală de două ori derivabilă, $F \in C^2(\mathbf{R})$, pentru care vrem să aproximăm soluţia $x^*$ a problemei de minimizare:

$$\min\{F(x); x \in V\} \quad \longleftrightarrow \quad F(x^*) \leq F(x) \quad \forall x \in V \tag{1}$$

unde $V = \mathbf{R}$ ($x^*$ este punct de minim global) sau $V = [\bar{x} - r, \bar{x} + r]$ (punct de minim local). Se numeşte *punct critic* pentru funcţia $F$, un punct $\tilde{x}$ care este rădăcină a primei derivate a lui $F$:

$$F'(\tilde{x}) = 0. \tag{2}$$

Se ştie că pentru funcţiile de două ori derivabile, punctele de minim ale funcţiei $F$ se găsesc printre punctele critice. Un punct critic este punct de minim dacă:

$$F''(x^*) > 0.$$

Vom căuta punctele de minim ale lui $F$ printre soluţiile ecuaţiei (2). Mai jos este descrisă metoda lui Yun-Petcović de aproximare a unei rădăcini a ecuaţiei neliniare:

$$g(x) = 0 \qquad (g(x) = F'(x)).$$

### Metoda Yun-Petcović

Rădăcina $x^*$ se aproximează construind un şir $\{x_k\}$ care, în anumite condiţii, converge la soluţia $x^*$ căutată. Convergenţa şirului depinde de alegerea primelor elemente ale şirului.

[1] J. Korean Math. Soc.48(2011), No. 3, pp. 487-497

Elementul $k+1$ al şirului, $x_{k+1}$, se construieşte folosind cele două elemente imediat precedente din şir, $x_k$ şi $x_{k-1}$, astfel:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h_k}{g(x_k) - g(x_k - h_k)} g(x_k) = x_k - \Delta x_k \ , \qquad k = 0, 1, \dots \ ,$$
$$x_0, x_1 - \ \text{date},$$
$$h_k = x_k - x_{k-1} \quad , \quad \Delta x_k = \frac{h_k}{g(x_k) - g(x_k - h_k)} g(x_k). \tag{3}$$

Convergenţa şirului $\{x_k\}$ la $x^*$ depinde de alegerea primelor două elemente al şirului, $x_0$, $x_1$. Dacă cunoaştem un interval $(a, b)$ astfel încât $g(a)g(b) < 0$, iniţializarea:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = \frac{a+b}{2}$$

asigură convergenţa şirului la rădăcina căutată.

**Observaţie importantă:** Alegerea elementelor iniţiale, $x_0$ şi $x_1$, poate determina convergenţa sau divergenţa şirului $x_k$ la $x^*$. De obicei, o alegere a datelor iniţiale în vecinătatea lui $x^*$ asigură convergenţa $x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$.

Nu este necesară memorarea întregului şir $\{x_k\}$ ci avem nevoie doar de 'ultimul' element $x_{k_0}$ calculat. Se consideră că o valoare $x_{k_0}$ aproximează rădăcina căutată, $x^*$, $x_{k_0} \approx x^*$ ($x_{k_0}$ este ultimul element al şirului care se calculează) atunci când diferenţa dintre două iteraţii succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0 - 1}| < \epsilon$$

unde $\epsilon$ este precizia cu care vrem să aproximăm soluţia $x^*$. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluţiei $x^*$ este următoarea:

*Schema de calcul*

se aleg aleator $x_0$ şi $x_1$ ;
//(pentru convergenţa şirului $\{x_k\}$ este bine de ales
// datele iniţiale $x_0$, $x_1$, în vecinătatea soluţiei căutate)
$x = x_1$ , $h = x_1 - x_0$;
$k = 0$ ;
do
{
- if ( $|g(x) - g(x-h)| \leq \epsilon$) return FALSE;
  // (schimbă datele iniţiale $x_0, x_1$ )
- calculează $\Delta\, x$ cu formula (3) ;
- $x_1 = x$ ; $x = x - \Delta\, x$ ; $h = -\Delta\, x$;
- $k = k + 1$;

}
while ($|\Delta\, x| \geq \epsilon$ şi $k \leq k_{\max}$ şi $|\Delta\, x| \leq 10^8$)
if ( $|\Delta\, x| < \epsilon$ ) $x_k \approx x^*$ ;
else *"divergenţă"* ; //(de încercat schimbarea datelor iniţiale)

Pentru a calcula valoarea derivatei funcţiei $F$ într-un punct oarecare se vor folosi următoarele două formule de aproximare:

$$F'(x) \approx G_i(x,h) \quad , \quad i = 1,2$$

unde

$$G_1(x,h) = \frac{3F(x) - 4F(x-h) + F(x-2h)}{2h}$$
$$G_2(x,h) = \frac{-F(x+2h) + 8F(x+h) - 8F(x-h) + F(x-2h)}{12h}$$

cu $h = 10^{-5}$ sau $10^{-6}$ (poate fi considerat ca parametru de intrare). Se va verifica dacă punctul critic calculat cu metoda Yun-Petković este punct de minim pentru funcţia $F$, verificând relaţia:

$$F''(x^*) > 0.$$

Pentru a aproxima derivata secundă, $F''$, se va folosi formula:

$$F''(x) \approx \frac{-F(x+2h) + 16F(x+h) - 30F(x) + 16F(x-h) - F(x-2h)}{12h^2}$$

**Exemple**

$$F(x) = x^2 - 4x + 3 \quad , \quad x^* = 2$$

$$F(x) = x^2 + e^x \quad , \quad x^* \approx -0.351734$$

$$F(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \quad , \quad x^* \in \{1,2\}$$