

Setul 5
de probleme și exerciții de matematică
(relative la aspecte algebrice ale lui \mathbb{R}^n)

S5.1 Dacă numărul $a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ nu-i un pătrat perfect, să se arate că mulțimea $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \{x + y\sqrt{a} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, înzestrată cu operațiile internă \oplus și externă \odot , definite respectiv prin

$$(x_1 + y_1\sqrt{a}) \oplus (x_2 + y_2\sqrt{a}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{a}, \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$$

și

$$\alpha \odot (x + y\sqrt{a}) = \alpha x + \alpha y\sqrt{a}, \forall \alpha \in \mathbb{Q}, x, y \in \mathbb{Q},$$

este un \mathbb{Q} -spațiu liniar.

S5.2 Fie $M = \{A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a = b + c\}$.

- i) Să se arate că M este un subspațiu liniar al spațiului $(\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.
- ii) Să se afle o bază a lui M și $\dim(M)$.
- iii) Să se arate că $B = \{A_1, A_2, A_3\}$, unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

constituie o bază a lui M . Să se afle coordonatele vectorului $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în această bază.

S5.3 Să se analizeze liniara dependență / independență a următoarelor mulțimi și să se stabilească, în caz de dependență liniară a lor, relația de dependență în cauză.

- a) $\{(1, 1, 1), (1, -2, 3), (-1, 11, -9)\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;
- b) $\{f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{-x}, f_3(x) = x^2e^x\} \subset (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$;
- c) $\{(1, -1, 3), (-1, 1, 4), (1, 1, 1)\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;
- d) $\{f_1(x) = 1, f_2(x) = \cos 2x, f_3(x) = \cos^2 x\} \subset (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

S5.4

- 1°. Să se arate că $B = \{(3, 1, 5), (3, 6, 2), (-1, 0, 1)\}$ formează o bază pentru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, la fel orientată ca și baza canonică a lui \mathbb{R}^3 .
- 2°. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât mulțimea $B' = \{(m, 2, -3), (1, 1, -1), (m, 1, 3)\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ să fie o bază a lui \mathbb{R}^3 , contrar orientată bazei canonice $\{e_1, e_2, e_3\}$.
- 3°. Pentru valorile lui m determinate la 2°, să se afle matricea S a schimbării de bază de la B la B' .
- 4°. Să se determine coordonatele vectorului $x = (1, 2, -1)$ în baza B .

S5.5 Să se arate că aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3, \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

definește un produs scalar pe \mathbb{R}^3 .

S5.6 Fie spațiul liniar real \mathbb{R}^3 , dotat cu produsul scalar euclidian. Să se analizeze ortogonalitatea sistemului de vectori $U = \{(1, -1, 1), (0, 1, 1), (-2, -1, 1)\}$. Să se calculeze apoi $\angle(u, v)$, $\angle(u, w)$ și $\angle(v, w)$, unde $u = (-1, 1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$ și $w = (1, 2, 3)$.

S5.7 Se consideră spațiul euclidian \mathbb{R}^4 , dotat cu produsul scalar canonic. Folosind procedeul de ortonormare a lui Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormată B' , plecând de la baza

$$B = \{(1, 2, -1, 0), (1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, -1, 0, 1)\}.$$

S5.8 În spațiul euclidian \mathbb{R}^4 , înzestrat cu produsul scalar canonic, se consideră sistemul de vectori $C = \{(1, 4, 3, 2), (1, 1, -1, 1), (-3, 0, 7, 6)\}$.

- Să se determine $S = Sp(C)$ și S^\perp .
- Să se afle proiecțiile ortogonale ale vectorului $w = (14, -3, -6, -7)$ pe S și pe S^\perp . Să se verifice că avem

$$\|w - pr_S(u)\| \leq \|w - u\|, \forall u \in C,$$

unde $pr_S(u)$ este notația pentru proiecția ortogonală a vectorului u pe S , care, prin definiție, înseamnă acel vector $v \in S$, pentru care $u - v = x \in S^\perp$.

S5.9

- Folosind inegalitatea lui Minkowski, să se arate că aplicația $\|\cdot\|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ unde } p \in [1, +\infty) \text{ este indicat, constituie o normă pe } \mathbb{R}^n.$$

- Să se arate că $\|x\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Să se demonstreze că:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Să se arate că inegalitatea lui Hölder se poate reda sub forma

$$|\langle x, y \rangle_c| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, p, q \in [1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

unde $\langle x, y \rangle_c$ înseamnă produsul scalar canonic al elementelor x și y din \mathbb{R}^n .

În particular, când $p = q = 2$, inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz se poate rescrie în forma:

$$|\langle x, y \rangle_c| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

S5.10 Fie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produs scalar pe \mathbb{R}^n și $\|\cdot\|$ norma indusă de acesta. Să se arate că au loc relațiile, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

i) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Euler) și

ii) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle$ (Hilbert).

S5.11 Fie W un subspațiu liniar al lui \mathbb{R}^n și $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție astfel încât $f \not\equiv 0$, $\{x \in W \mid f(x) = 0\} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ și $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in W$. Se definește aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$, prin:

$$\langle x, y \rangle = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in W.$$

a) Să se arate că W este un spațiu prehilbertian.

b) Să se dovedească că oricare două elemente ale lui W , diferite de $0_{\mathbb{R}^n}$, sunt liniar dependente (altfel spus, $\dim(W) = 1$).

S5.12 Pe mulțimea $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, se definesc operațiile $\oplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, prin $x \oplus y = xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ și $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, prin $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ este un spațiu liniar. Se poate structura \mathbb{R}_+^* ca o algebră?

S5.13 Care dintre mulțimile de mai jos este un subspațiu liniar?

a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 + x_n = 0\} \subset (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

b) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\} \subset (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

S5.14 Să se studieze, după valorile parametrului real m , dependența liniară a următoarelor sisteme de vectori. În caz de dependență liniară, să se găsească relația de dependență respectivă.

i) $\{(3, 1, 4), (-1, 1, 2), (1, 3, m)\} \subset (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

ii) $\{(6, 1, 8, 3), (2, 3, 0, 2), (4, -1, -8, -2), (1, 1, 1, m)\} \subset (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$;

iii) $\{f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = e^x, f_3(x) = \operatorname{sh} x\} \subset (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$.

S5.15 În spațiul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$, se consideră:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

și

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Să se arate că B_1 și B_2 sunt baze pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

b) Să se scrie matricea S a schimbării de la B_1 la B_2 ;

c) Să se afle coordonatele matricii $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ în cele două baze B_1 și B_2 .

S5.16 Să se arate că aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, este un produs scalar pe \mathbb{R}^3 .

S5.17 Fie $U = \{(0, 1, 1, 0), (0, 2, -2, 1), (2, 1, -1, -4), (9, -1, 1, 4)\}$ o submulțime a spațiului liniar $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se arate că U este un sistem ortogonal de vectori în raport cu produsul scalar canonic pe \mathbb{R}^4 și să se calculeze unghiul dintre ultimii doi vectori din U .

S5.18 Folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormată a lui \mathbb{R}^4 , plecând de la

$$B = \{(0, 1, 1, 0), (0, 4, 0, 1), (1, -1, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}.$$

S5.19 Fie \mathbb{R}^4 dotat cu produsul scalar canonic și $U = \{(-3, 0, 1, 2), (1, -1, 0, 1)\}$. Să se calculeze $Sp(U)$ și U^\perp , precum și proiecțiile ortogonale ale vectorului $(2, 1, 2, 1)$ pe U și U^\perp .

S5.20 Fie $\|\cdot\|$ o normă pe \mathbb{R}^n . Să se arate că:

- a) $\|-x\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- b) $\left\| \sum_{k=1}^m u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m \|u_k\|, \forall u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$;
- c) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bibliografie selectivă

1. Veronica T. Borcea, Cătălina I. Davideanu, Corina Forăscu - *Probleme de algebră liniară*, Ed. "Gheorghe Asachi", Iași, 2000.
2. Șt. O. Tohăneanu, Rodica Dăneț - *Curs practic de algebră liniară cu 327 de exerciții și probleme rezolvate*, Ed. Matrix Rom, București, 2004.
3. C. Drăgușin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, București, 2006.
4. E. Cioară - *Algebră liniară. Geometrie analitică (culegere de probleme)*, Editura "Fair Partners", București, 2009.
5. N. Crainic - *Elemente de algebră liniară*, Colecția "Universitaria", Edit. Institutului European, 2011.
6. G. I. Shilov - *An Introduction to the Theory of Linear Spaces (Kindle Edition)*, Dover Publications, 2013.
7. J. Hefferon - *Linear Algebra. Extensive exercise sets, with worked answers to all exercises*, Saint Michael's College, 2014.
8. Y. Tsumura - *Practice Problems for Linear Algebra*, Ohio State University, 2016.