Cursul 6

Cadru topologic pentru $\mathbb{R}^n$

În continuarea precedentei părţi, din cursul 5, dedicată, în întregime, unor aspecte de ordin algebric (relative la $\mathbb{R}^n$, în principal), sunt prezentate aici elemente cu caracter topologic legate de $\mathbb{R}^n$. Se definesc mai întâi noţiuni de bază din domeniul topologiei generale, după care sunt expuse chestiuni ce privesc spaţiile metrice, cu referiri de interes la $\mathbb{R}^n$. În cele din urmă, sunt luate în atenţie noţiunile de şir şi de serie de elemente din $\mathbb{R}^n$ şi se dau, în context, caracterizări unor puncte şi mulţimi de puncte topologic remarcabile.

Elemente de topologie generală

Iniţiată, cu mai bine de un secol în urmă, în lucrările lui Karl Weierstrass şi dezvoltată ulterior prin contribuţiile semnificative ale unor matematicieni ca J. W. Alexander, P. I. Alexandrov şi S. Lefshetz, ***topologia***, numită (până prin 1930) "analysis situs", este, ca ramură a matematicii, disciplina care se ocupă de aşa-numitele proprietăţi topologice ale mulţimilor de puncte, adică de acele proprietăţi care pot fi formulate folosind numai noţiunea de mulţime deschisă şi noţiunile obişnuite din teoria mulţimilor, precum element, submulţime, complementară, reuniune, intersecţie şi alte asemenea. Totodată, ca ramură de sine-stătătoare a matematicii, topologia are în vedere şi proprietăţile de ordin specific ale funcţiilor, între care existenţa limitei (de un anumit tip) într-un punct şi continuitatea într-un punct sau pe o mulţime sunt cele mai studiate. Devenită în prezent obiect fundamental al matematicii, topologia are aplicaţii aproape în toate domeniile ştiinţei, chiar şi în cele nematematice, mai cu seamă în legătură cu demonstrarea unor rezultate de existenţă din cadrul acelor probleme ce reclamă soluţii de un anumit fel, cu anumite proprietăţi şi care să aparţină anumitor mulţimi.

Ca entitate matematică în sine, noţiunea de topologie (structură topologică) pe o mulţime este introdusă de următoarea definiţie.

Definiţia 6.1 *Fie X o mulţime nevidă oarecare. Numim* ***topologie*** *(sau* ***structură topologică****) pe X o mulţime τ, de submulţimi (părţi) ale lui X, care satisface următoarele condiţii:*

(AT1) $\varnothing, X \in \tau$;

(AT2) orice reuniune de elemente (mulţimi) din τ este un element al lui τ;

(AT3) orice intersecţie finită de mulţimi din τ aparţine lui τ.

Exemple:

a) Mulţimea τ_0 a tuturor submulţimilor D ale lui $\mathbb{R}$, pentru care, fiecărui punct $x \in D$ îi corespunde un $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\{y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\} \subseteq D$, este, după cum, fără dificultate, se poate constata, prin verificarea axiomelor (AT1) - (AT3), o topologie pe $\mathbb{R}$. Aceasta se numeşte ***topologia uzuală (obişnuită) pe mulţimea numerelor reale***.

b) Oricare ar fi mulţimea X, mulţimea tuturor părţilor sale, adică mulţimea $\mathcal{P}(X)$ este desigur o topologie pe X, deoarece verifică (AT1) - (AT3). Aceasta este denumită ***topologie discretă*** pe X.

c) Pentru o mulţime oarecare X, diferită de $\varnothing$, mulţimea $\{\varnothing, X\}$ îndeplineşte (AT1) - (AT3) şi este deci o topologie pe X, denumită ***topologie grosieră (nondiscretă)*** (pe X).

Definiţia 6.2 *Spunem că topologia τ_1, pe o mulţime X, este **mai puţin fină** decât topologia τ_2, pe aceeaşi mulţime X, sau, altfel zis, toplogia τ_2 este **mai fină** decât τ_1 dacă $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Se notează aceasta prin $\tau_1 \preccurlyeq \tau_2$.*

Observaţii:

i) Relaţia binară de "fineţe" pe mulţimea topologiilor (pe o aceeaşi mulţime X) este, cu evidenţă, o relaţie de ordine (parţială).

ii) Pe orice mulţime X, topologia grosieră este cea mai puţin fină (decât orice altă topologie), iar topologia discretă este cea mai fină.

Definiţia 6.3 *Un cuplu (X, τ), în care X este o mulţime, iar τ o topologie pe X, se numeşte **spaţiu topologic**.*

Exemplu: $(\mathbb{R}, \tau_0)$ este spaţiul topologic uzual al mulţimii numerelor reale.

Definiţia 6.4 *j) Într-un spaţiu topologic (X, τ), se numeşte **mulţime deschisă** (sau τ-**deschisă**) orice submulţime a lui X care aparţine topologiei τ.*

*j) O submulţime a mulţimii X se numeşte **închisă** dacă complementara ei (în raport cu X) este deschisă.*

Propoziţia 6.1 *Dacă (X, τ) este un spaţiu topologic, atunci:*

1. $\varnothing$ şi X sunt mulţimi închise;

2. orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă;

3. o intersecţie oarecare de mulţimi închise este mulţime închisă.

Demonstraţie: 1. Potrivit Definiţiei 6.1 (AT1) şi Definiţiei 6.4 j), $\varnothing$ este o mulţime deschisă. Rezultă atunci că $X = X \setminus \varnothing$ este, în conformitate cu Definiţia 6.4 jj), o mulţime închisă. Totodată, pe baza Definiţiei 6.1 (AT1) şi a Definiţiei 6.4 j), mulţimea X este deschisă, de asemenea. În consecinţă, complementara ei faţă de X, adică mulţimea $\varnothing$ este închisă.

2. Cum, în conformitate cu (AT3) (din Definiţia 6.1), orice intersecţie finită de mulţimi din τ, adică mulţimi deschise (potrivit Definiţiei 6.4 jj)), este tot o mulţime din τ, deci deschisă, se poate deduce lesne, prin complementariere în raport cu X şi folosire a regulilor lui De Morgan, că oricare reuniune finită de mulţimi închise este o mulţime închisă.

3. În mod asemănător, folosind (AT2), complementarierea faţă de X şi regulile lui De Morgan, obţinem faptul că o intersecţie oarecare de mulţimi închise este mulţime închisă. ◀

Definiţia 6.5 *Dacă A este o mulţime nevidă dintr-un spaţiu toplogic (X, τ), atunci $\tau_A = \{A \cap D \mid D \in \tau\}$ se numeşte **urma topologiei τ pe** A.*

Exemplu: Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, mulţimea $\tau^0_{[a,b]} = \{[a, b] \cap D \mid D \in \tau_0\}$ este urma topologiei reale uzuale τ_0 pe mulţimea $[a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leqslant r \leqslant b\}$ (intervalul închis $[a, b]$).

Definiţia 6.6 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$. Se numeşte **vecinătate a mulţimii** A orice submulţime V a lui X care include o mulţime deschisă D ($D \in \tau$) astfel încât, la rândul său, D o include pe A ($A \subseteq D \subseteq V$). În cazul în care $A = \{x\}$, unde x este un element al mulţimii X, V se numeşte **vecinătate a lui** x.*

Este de remarcat faptul că dacă V este o vecinătate a unei mulţimi $A \subset (X, \tau)$, atunci V este vecinătate pentru orice element $a \in A$ şi reciproc.

Propoziţia 6.2 *Oricare ar fi un element arbitrar x al unui spaţiu topologic (X, τ), mulţimea tuturor vecinătăţilor sale, notată cu $\mathcal{V}(x)$, are următoarele proprietăţi:*

(PV1) dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \subseteq U \subseteq X$, atunci $U \in \mathcal{V}(x)$.

(PV2) oricare ar fi mulţimea finită $\{V_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{V}(x)$, intersecţia $\bigcap_{i \in I} V_i$ aparţine mulţimii $\mathcal{V}(x)$;

(PV3) $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$;

(PV4) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \in \mathcal{V}(x)$, astfel încât, $\forall y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$.

Demonstraţie: Pentru (PV1): $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists D \in \tau$ cu $x \in D \subseteq V$. Cum $V \subseteq U \subseteq X$, urmează că $x \in D \subseteq U$. Ca atare, $U \in \mathcal{V}(x)$, în conformitate cu Definiţia 6.6.

Relativ la (PV2): $\forall V_i \in \mathcal{V}(x)$, $i \in I$, $\exists D_i \in \tau$, astfel încât $x \in D_i \subseteq V_i$, $\forall i \in I$. Atunci $\bigcap_{i \in I} D_i \in \tau$ (conform axiomei (AT3) din Definiţia 6.1) şi $x \in \bigcap_{i \in I} D_i \subseteq \bigcap_{i \in I} V_i$. Deci $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}(x)$.

(PV3) are loc, cu evidenţă, în virtutea Definiţiei 6.6.

În ceea ce priveşte (PV4), pe baza Definiţiei 6.6, deducem că, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists D \in \tau$ aşa încât $x \in D \subseteq D \subseteq V$. Se poate spune că $D \in \mathcal{V}(x)$, deocamdată. Întrucât avem $y \in D \subseteq D$, $\forall y \in D$, putem afirma că $D \in \mathcal{V}(y)$, de asemenea. Aşadar, luând $W = D$, are loc (PV4). ◀

Observaţie: Proprietăţile (PV1) - (PV4) sunt caracteristice pentru un sistem de vecinătăţi $\mathcal{V}(x)$. Mai exact, se poate arăta că, dacă fiecărui punct x dintr-o mulţime X i se asociază o mulţime $\tilde{\mathcal{V}}(x)$, de părţi din X, astfel încât $\tilde{\mathcal{V}}(x)$ să satisfacă (PV1) - (PV4), atunci există o structură topologică $\tilde{\tau}$, unică, pe X, în raport cu care, pentru orice $x \in (X, \tilde{\tau})$, să avem $\mathcal{V}(x) = \tilde{\mathcal{V}}(x)$, unde $\mathcal{V}(x)$ este sistemul de vecinătăţi ataşat punctului x, prin topologia τ.

Definiţia 6.7 *a) Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $x \in X$. Numim **sistem fundamental de vecinătăţi ale lui** x o mulţime $\mathcal{U}(x)$ de vecinătăţi ale lui x care satisface condiţia că, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, există $U \in \mathcal{U}(x)$, astfel încât $U \subseteq V$.*

*b) Într-un spaţiu topologic (X, τ), se numeşte **bază a topologiei** τ o familie $\mathcal{B}$ de mulţimi deschise (din τ) în raport cu care orice mulţime $D \in \tau$ se poate reprezenta ca reuniune de mulţimi din $\mathcal{B}$.*

Propoziţia 6.3 *O mulţime $\mathcal{B}$ de părţi deschise dintr-un spaţiu topologic (X, τ) este o bază pentru topologia τ dacă şi numai dacă, oricare ar fi punctul $x \in (X, \tau)$, familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x.*

Demonstraţie: Dacă (X, τ) este un spaţiu topologic în care $\mathcal{B}$ este o bază pentru topologia τ, x este un punct arbitrar din (X, τ) şi $V \in \mathcal{V}(x)$, atunci există $D \in \tau$ aşa încât $x \in D \subseteq V$. În plus, D se reprezintă ca o reuniune de mulţimi din $\mathcal{B}$. Există deci $B \in \mathcal{B}$, astfel încât $x \in B \subseteq D$. Prin urmare, avem $B \subseteq V$. Ţinând seama de Definiţia 6.7 a), putem trage concluzia că $\mathcal{B}_x$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru punctul x.

Reciproc, admiţând că, pentru orice $x \in (X, \tau)$, mulţimea $\mathcal{B}_x$ este un sistem fundamental de vecinătăţi pentru x şi considerând o mulţime deschisă oarecare D (din τ), precum şi un punct y arbitrar din D, putem vedea că, întrucât $D \in \mathcal{V}(y)$, există o mulţime $B_y \in \mathcal{B}_y$ astfel încât $B_y \subseteq D$.

În consecinţă, avem: $\bigcup\limits_{y\in D} B_y \subseteq D$. În acelaşi timp, cum, pentru orice $y \in D$, avem $y \in B_y$, rezultă: $D \subseteq \bigcup\limits_{y\in D} B_y$. Aşadar, $D = \bigcup\limits_{y\in D} B_y$, adică D se reprezintă ca o reuniune de mulţimi din $\mathcal{B}$. ◀

Exemple:

1) Familia $B = \{\{x\} \mid x \in X\}$, unde X este o mulţime nevidă oarecare, constituie o bază pentru $\mathcal{P}(X)$, topologia discretă pe X.

2) Familia mulţimilor de tipul $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a < b$, formează o bază pentru τ_0, topologia uzuală pe $\mathbb{R}$.

În cele ce urmează, sunt date definiţii şi proprietăţi ale unor puncte şi submulţimi remarcabile dintr-un spaţiu topologic oarecare (X, τ)

Definiţia 6.8 *a) Fie A o parte nevidă a spaţiului topologic (X,τ). Un element x_0 din A se numeşte* ***punct interior al mulţimii*** *A dacă $A \in \mathcal{V}(x_0)$, adică dacă A este vecinătate pentru x_0.*

b) Mulţimea tuturor punctelor interioare ale unei mulţimi $A \subseteq (X,\tau)$ se numeşte ***interiorul mulţimii*** *A şi se notează prin $\mathring{A}$ (sau $int(A)$).*

Teorema 6.1 *Într-un spaţiu topologic (X,τ), arbitrar, sunt adevărate următoarele relaţii şi afirmaţii:*

1°. $\mathring{A} \subseteq A$, $\forall A \subseteq X$;

2°. $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$, $\forall A, B \subseteq X$;

3°. $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\forall A, B \subseteq X$;

4°. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$, $\forall A, B \subseteq X$;

5°. $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{D\subseteq A\\ D\in\tau}} D$, $\forall A \subseteq X$;

6°. $A \in \tau \Leftrightarrow A = \mathring{A}$.

Demonstraţie: Relaţia 1° este, clar, evidentă. Pentru 2°, fie $x \in \mathring{A}$, oarecare. Atunci $A \in \mathcal{V}(x)$ şi, cum, prin ipoteză, $A \subseteq B$, rezultă, pe baza (PV1) (din Propoziţia 6.2), că $B \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \mathring{B}$. Altfel spus, $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$, ori de câte ori $A \subseteq B$. Pentru 3°, în virtutea relaţiei 2°, pe baza faptului că $A \cap B \subseteq A$ şi $A \cap B \subseteq B$, vedem că $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} \subseteq \mathring{A}$ şi $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} \subseteq \mathring{B}$. Deci $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Dar are loc şi incluziunea inversă, după cum urmează: $\forall x \in \mathring{A} \cap \mathring{B} \Rightarrow x \in \mathring{A}$ şi $x \in \mathring{B}$, adică $A \in \mathcal{V}(x)$ şi $B \in \mathcal{V}(x)$. De aici, ţinând cont de (PV2) (din Propoziţia 6.2), rezultă că $A \cap B \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \overset{\circ}{\overline{A \cap B}}$, adică $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A \cap B}}$. În privinţa relaţiei 4°, deoarece $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B$, avem $\mathring{A} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$ şi $\mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$, ţinând seama de 2°. În consecinţă, deducem că $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$. Pentru 5°, dacă x este un element arbitrar al lui $\mathring{A}$, există atunci o mulţime $D \in \tau$, astfel încât $x \in D \subseteq A$. Ca atare, $x \in \bigcup\limits_{\substack{D\subseteq A\\ D\in\tau}} D$ şi deci $\mathring{A} \subseteq \bigcup\limits_{\substack{D\subseteq A\\ D\in\tau}} D$. Invers, dacă $x \in \bigcup\limits_{\substack{D\subseteq A\\ D\in\tau}} D$, reiese că există $D \in \tau$, aşa încât $x \in D \subseteq A$. Prin urmare, $A \in \mathcal{V}(x)$ şi, astfel, $x \in \mathring{A}$. Altfel spus: $\bigcup\limits_{\substack{D\subseteq A\\ D\in\tau}} \subseteq \mathring{A}$. În ceea ce priveşte 6°, dacă $A \in \tau$, rezultă că

$A \subseteq \bigcup\limits_{\substack{D\subseteq A\\ D\in\tau}}$, adică $A \subseteq \mathring{A}$, în virtutea relaţiei 5°. Ţinând cont şi de 1°, obţinem: $A = \mathring{A}$. Reciproc, dacă $A = \mathring{A}$, atunci, în virtutea relaţiei 5°, reiese că $\mathring{A} \in \tau$, adică $A \in \tau$. ◄

Definiţia 6.9 *a) Un element x din X care este punct interior complementarei $X \setminus A$, unde $A \subseteq X$, se numeşte* ***punct exterior*** *al lui A.*

b) Mulţimea punctelor exterioare unei mulţimi $A \subseteq X$ se numeşte ***exteriorul*** *lui A şi se notează $Ext(A)$.*

Propoziţia 6.4 *Un element x dintr-un spaţiu topologic (X, τ) este punct exterior pentru o mulţime $A \subseteq X$ dacă şi numai dacă există cel puţin o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \varnothing$.*

Demonstraţie: $x \in Ext(A) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{X \setminus A} \Leftrightarrow (X \setminus A) \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists\, D \in \tau$, cu $x \in D \subseteq X \setminus A \Leftrightarrow \exists\, D \in \tau$, $x \in D$ şi $D \cap A = \varnothing \Leftrightarrow \exists\, V \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $V \cap A = \varnothing$. ◄

Definiţia 6.10 *i) Un element x dintr-un spaţiu topologic (X, τ) se numeşte* ***punct aderent*** *pentru o mulţime $A \subseteq X$ dacă $V \cap A \neq \varnothing$, $\forall\, V \in \mathcal{V}(x)$.*

ii) Mulţimea tuturor punctelor aderente ale unei mulţimi A din spaţiul topologic (X, τ) se numeşte ***aderenţa*** *(sau* ***închiderea****)* ***mulţimii*** *A şi se notează cu $\overline{A}$.*

Teorema 6.2 *În orice spaţiu topologic (X, τ), au loc următoarele relaţii şi afirmaţii:*

1°. $A \subseteq \overline{A}$, $\forall\, A \subseteq X$;

2°. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$, $\forall\, A, B \subseteq X$;

3°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{B}$, $\forall\, A, B \subseteq X$;

4°. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{B}$, $\forall\, A, B \subseteq X$;

5°. $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F\supseteq A\\ (X\setminus F)\in\tau}} F$, $\forall\, A \subseteq X$;

6°. $(X \setminus A) \in \tau \Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Demonstraţie: Pentru 1°, dacă x (oarecare) $\in A$, atunci, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $x \in V$ şi deci $x \in V \cap A$, adică $V \cap A \neq \varnothing$. Altfel spus, $x \in \overline{A}$. Aşadar: $A \subseteq \overline{A}$. Relativ la 2°, dacă $A \subseteq B$ şi $x \in \overline{A}$, avem $\varnothing \neq V \cap A \subseteq V \cap B, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. Deci $x \in \overline{B}$, adică $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Cât priveşte 3°, ţinând seama de 2°, din faptul că $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B$, rezultă că $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ şi $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Deci: $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Reciproc, dacă $\forall\, x \in \overline{A \cup B}$, avem $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, $\forall\, U \in \mathcal{V}(x)$. Dacă am presupune că $x \notin \overline{A}$ şi $x \notin \overline{B}$, atunci vor exista două vecinătăţi $V, W \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \cap A = \varnothing$ şi $W \cap B = \varnothing$.Însă $U = V \cap W \in \mathcal{V}(x)$ şi $U \cap (A \cup B) = \varnothing$ - ceea ce nu este po sibil, atât timp cât, în realitate, $U \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, $\forall U \in \mathcal{V}(x)$. Pentru 4°, întrucât $A \cap B \subseteq A$ şi $A \cap B \subseteq B$, prin intersecţie, deducem că $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Privitor la 5°, se poate vedea, mai întâi, că $\overline{A} = X \setminus Ext(A)$, ceea ce înseamnă că $\overline{A}$ este o mulţime închisă. Cum, din 1°, $A \subseteq \overline{A}$, avem: $\bigcap\limits_{\substack{F\supseteq A\\ (X\setminus F)\in\tau}} F \subseteq \overline{A}$. Invers, contând cu anticipaţie pe 6°, avem $\overline{F} = F$, $\forall\, F \subseteq X$, aşa încât $(X \setminus F) \in \tau$. Atunci, din faptul că $A \subseteq F$, în conformitate cu 1°, rezultă: $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{F} = F$. De aici, luând intersecţia după F, obţinem: $\overline{A} \subseteq \bigcap\limits_{\substack{F \supseteq A \\ (X \setminus F) \in \tau}} F$. Prin urmare, prin dublă incluziune, are loc 5°. În fine, pentru 6°, dacă A este închisă, înseamnă că mulţimea $(X \setminus A)$ este deschisă. Deci $X \setminus A = \overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}} = Ext(A)$. Atunci: $A = X \setminus Ext(A) = \overline{A}$. Reciproc, dacă $A = \overline{A}$, deducem că $A = X \setminus Ext(A)$, adică $X \setminus A = Ext(A) = \overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}}$. Deci $(X \setminus A) \in \tau$, ceea ce înseamnă că A este închisă. ◀

Definiţia 6.11 *i) Fie $A \subseteq (X, \tau)$. Se numeşte* ***frontieră a mulţimii*** *A, notată cu $Fr(A)$ (sau cu ∂A), mulţimea $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.*

ii) O ***mulţime*** *$A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte* ***densă în*** *X, atunci când $\overline{A} = X$.*

Exemplu: În (X, τ_0), avem: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, mulţimea numerelor raţionale este densă în $\mathbb{R}$, în raport cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}$.

Definiţia 6.12 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$.*

a) Un element $x \in X$ se numeşte ***punct de acumulare*** *pentru mulţimea A dacă, pentru orice vecinătate V a lui x, are loc relaţia*

$$(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

b) Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale unei mulţimi $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte ***mulţime derivată*** *a lui A şi se notează cu A'.*

Propoziţia 6.5 *În orice spaţiu topologic (X, τ), sunt adevărate relaţiile următoare:*

1°. $A' \subseteq \overline{A}$, $\forall\, A \subseteq X$;

2°. $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$, $\forall\, A, B \subseteq X$;

3°. $(A \cup B)' = A' \cup B'$, $\forall\, A, B \subseteq X$.

Demonstraţie: 1°. $\forall\, x \in A' \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing, \forall\, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \varnothing, \forall\, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overline{A}$.

2°. $\forall\, x \in A' \Rightarrow (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing, \forall\, V \in \mathcal{V}(x) \overset{A \subseteq B}{\Longrightarrow} \varnothing \neq (V \setminus \{x\}) \cap A \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap B \Rightarrow x \in B'$.

3°. $A \subseteq A \cup B$ şi $B \subseteq A \cup B \Rightarrow A' \subseteq (A \cup B)'$ şi $B' \subseteq (A \cup B)' \Rightarrow A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. Pe de altă parte, $\forall\, x \in (A \cup B)' \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) = ((U \setminus \{x\}) \cap A) \cup ((U \setminus \{x\}) \cap B) \neq \varnothing$, $\forall\, U \in \mathcal{V}(x)$. Dacă am avea $x \notin A'$ şi $x \notin B'$, atunci ar există două vecinătăţi $V, W \in \mathcal{V}(x)$ aşa încât $(V \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$ şi $(W \setminus \{x\}) \cap B = \varnothing$, de unde, notând cu $U = V \cap W$, am obţine contradicţia $(U \setminus \{x\}) \cap A = (U \setminus \{x\}) \cap B = \varnothing$. Aşadar, $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$şi, ca atare, are loc 3°. ◀

Teorema 6.3 *Dacă $A \subseteq (X, \tau)$, atunci:*

j) $\overline{A} = A \cup A'$;

jj) $A = \overline{A} \iff A' \subseteq A$.

Demonstraţie: j) $A \subseteq \overline{A}$ şi $A' \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Invers, dacă x (arbitrar ales) $\in \overline{A}$, atunci $V \cap A \neq \varnothing, \forall V \in \mathcal{V}(x)$. În această situaţie, există două posibilităţi: sau $x \in A$ sau $x \notin A$ şi, inevitabil, $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$, adică $x \in A'$. Aşadar: $x \in A \cup A'$. Altfel spus, avem şi incluziunea $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

jj) Dacă $A = \overline{A}$, ţinând seama de j), avem: $A = \overline{A} = A \cup A'$. Adică: $A' \subseteq A$. Reciproc, dacă $A' \subseteq A$, atunci: $\overline{A} = A \cup A' = A$. ◀

Definiţia 6.13 *i) Fie $A \subseteq (X, \tau)$, cu A nevidă. Un element x, din A, care nu este din A', se numeşte* ***punct izolat*** *al lui A. Mulţimea punctelor izolate ale mulţimii A se numeşte* ***partea discretă a mulţimii*** *A şi se notează cu $Iz(A)$ (sau cu $\mathcal{D}(A)$)*

ii) Mulţimea $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte ***discretă*** *dacă şi numai dacă orice punct al său este un punct izolat, adică dacă $A = Iz(A)$ (sau $A \cap A' = \varnothing$).*

Definiţia 6.14 *a) Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, unde (X, τ) este un spaţiu topologic. Mulţimile A_1 şi A_2 se numesc* ***separate*** *dacă şi numai dacă există $D_1, D_2 \in \tau$, astfel încât: $A_1 \subseteq D_1$, $A_2 \subseteq D_2$ şi $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.*

b) O mulţime $A \subseteq (X, \tau)$ se numeşte ***neconexă*** *dacă şi numai dacă există două mulţimi separate, A_1 şi $A_2 \subseteq (X, \tau)$, astfel încât $A = A_1 \cup A_2$.*

c) Mulţimea $A \subseteq (A, \tau)$ se numeşte ***conexă*** *dacă şi numai dacă A nu este neconexă.*

Definiţia 6.15 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic.*

a) O familie $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de părţi ale lui X se numeşte ***acoperire*** *a unei mulţimi $A \subseteq (X, \tau)$ dacă*

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Dacă $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ şi A este inclusă în $\displaystyle\bigcup_{U_i \in \tilde{\mathcal{U}}} U_i$, spunem că $\tilde{\mathcal{U}}$ este o ***subacoperire*** *a lui $\mathcal{U}$. O acoperire $\mathcal{U}$ a lui A se numeşte* ***deschisă*** *dacă elementele U_i ale lui $\mathcal{U}$, $\forall i \in I$, sunt mulţimi deschise (adică $U_i \in \tau$, $\forall i \in I$).*

b) O submulţime A a spaţiului topologic (X, τ) se numeşte ***compactă*** *dacă, din orice acoperire deschisă a sa, se poate extrage o subacoperire finită (adică având un număr finit de elemente).*

Observaţie: Definiţiile şi rezultatele de mai sus sunt fără îndoială valide în cazul în care $X = \mathbb{R}^n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Dotând pe $\mathbb{R}^n$ cu o topologie τ, se poate vorbi despre spaţiul topologic $(\mathbb{R}^n, \tau)$ şi, în cadrul acestuia, noţiunile şi proprietăţile lor, prezentate în cadrul general de până aici, se vor păstra.

Spaţii metrice. Referiri la $\mathbb{R}^n$

Definiţia 6.16 *a) Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte* ***distanţă*** *(sau* ***metrică****) pe X, o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele condiţii:*

(AD1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X;$

(AD2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ *(simetria);*

(AD3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiulară);*

b) Perechea (X, d), în care X este o mulţime nevidă şi d este o metrică pe X, se numeşte ***spaţiu metric****.*

Observaţie: Din Definiţia 6.16, rezultă că, dacă (X, d) este un spaţiu metric, atunci $d(x,y) \geqslant 0$, $\forall\, x, y \in X$.

Exemple:

1) Fie $X = \mathbb{R}$ şi $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $d_1(x,y) = |x-y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Ţinând seama de proprietăţile funcţiei modul pe $\mathbb{R}$, se poate vedea că d_1 satisface axiomele (AD1) - (AD2), fiind deci o metrică pe $\mathbb{R}$, numită ***metrică uzuală***. Astfel, $(\mathbb{R}, d_1)$ este un spaţiu metric.

2) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $X = \mathbb{R}^n$. Considerând $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

se poate constata uşor că d_2 îndeplineşte (AD1) şi (AD2). De asemenea, pe baza inegalităţii Cauchy-Buniakowski-Schwarz, se verifică că d_2 satisface şi (AD3). Prin urmare, d_2 este o metrică pe $\mathbb{R}^n$ (numită ***metrica euclidiană***), iar $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este un spaţiu metric (euclidian).

Pe $\mathbb{R}^n$ se mai pot defini, ca distanţe, şi următoarele aplicaţii:

$$d_p(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \forall\, p \geqslant 1, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\tilde{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

În particular, din metrica (Minkowski) d_p, pentru $p = 1$, se obţine distanţa (Manhattan) d_1, definită prin:

$$d_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

iar pentru $p \longrightarrow \infty$, se ajunge la distanţa (Cebîşev) d_∞, definită prin:

$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - y_k|, \forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

3) Dacă X este o mulţime nevidă oarecare, aplicaţia $d : X \times X \to \mathbb{R}$, definită prin

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \\ 0, & \text{dacă } \mathrm{x} = \mathrm{y} \end{cases},$$

satisface, cu evidenţă, axiomele (AD1) - (AD3) din Definiţia 6.16, ceea ce înseamnă că d este o metrică pe X (numită ***metrică discretă***). Spaţiul (X, d) se numeşte ***spaţiu metric discret***.

4) Orice spaţiu normat $(V, \|\cdot\|)$ (vezi Definiţia 5.16 - b) este un spaţiu metric, în raport cu distanţa $d : V \times V \to \mathbb{R}$, ori de câte ori $(V, +, \cdot)$ este un spaţiu liniar real (peste $\mathbb{R}$), unde

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|, \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in V.$$

În acest caz, d se numeşte ***distanţa indusă de norma*** $\|\cdot\|$. În general, nu orice distanţă este indusă de o normă. Astfel, metrica $\tilde{d}$, definită mai sus pe $\mathbb{R}^n$, nu este indusă de nici o normă, întrucât $\tilde{d}(\mathrm{x}, \mathbf{0})$ nu satisface cea de-a doua axiomă din Definiţia 5.16 a).

5) Orice spaţiu prehilbertian real este un spaţiu metric. Distanţa în cauză este distanţa indusă de norma dată de produsul scalar ce intervine în această situaţie. Se poate trage concluzia că, în raport cu orice produs scalar definit pe $\mathbb{R}^n$ (deci şi în raport cu produsul scalar euclidian), mulţimea $\mathbb{R}^n$, înzestrată cu metrica indusă de respectivul produs scalar (prin intermediul normei asociate lui), poate fi considerată că este un spaţiu metric.

6) Fie $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ şi aşa-numita ***funcţie a lui Baire***, $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \end{cases}.$$

Prin intermediul acesteia, aplicaţia $d_f : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|, \forall\, x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

satisface axiomele (AD1) - (AD3) din Definiţia 6.16 a), fiind deci o metrică pe $\overline{\mathbb{R}}$. Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, d_f)$ este atunci un spaţiu metric.

Definiţia 6.17 *Fie (X, d) un spaţiu metric.*

a) ***Distanţa de la un element*** $x \in X$ ***la o mulţime nevidă*** $A \subseteq X$ *este notată cu $\rho(x, A)$ şi egală, prin definiţie, cu* $\inf \{d(x, a) \mid a \in A\}$.

Pentru mulţimea vidă $\varnothing$, se acceptă, prin convenţie, că $\rho(x, \varnothing) = +\infty$.

b) ***Distanţa dintre două mulţimi nevide*** $A, B \subseteq (X, d)$ *este definită prin:*

$$\rho(A, B) = \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Prin convenţie, $\rho(A, \varnothing) = \rho(\varnothing, A) = +\infty$, $\forall\, A \subseteq X$.

c) Se numeşte ***diametru al unei mulţimi nevide*** $A \subseteq (X, d)$ *elementul din $\overline{\mathbb{R}}$, notat cu $\rho(A)$ şi dat de relaţia:*

$$\rho(A) = \sup \{d(a, \tilde{a}) \mid a, \tilde{a} \in A\}.$$

Convenţional, $\rho(\varnothing) = -\infty$.

Propoziţia 6.6 *Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare. Atunci, pe baza Definiţiei 6.17, au loc următoarele afirmaţii:*

i) $A \subseteq B \subseteq (X, d) \Rightarrow \rho(A) \leqslant \rho(B)$

ii) $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *este unipunctuală în (X, d).*

Definiţia 6.18 *Fie A o submulţime nevidă a spaţiului metric (X, d).*

j) A se numeşte ***mărginită*** *dacă $\rho(A) < +\infty$.*

jj) A este numită ***mulţime nemărginită*** *dacă $\rho(A) = +\infty$.*

Pe o mulţime X , nevidă şi dotată cu o metrică d, se pot introduce diferite structuri topologice, dintre care una este intim legată de metrica d, numindu-se ***topologie compatibilă*** (sau ***generată***) ***cu*** (***de***) ***această metrică***. În scopul precizării sale, introducem acum noţiunile de sferă deschisă şi de bilă, în conformitate cu următoarea definiţie.

Definiţia 6.19 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+^*$. Numim* ***sferă deschisă*** *(respectiv* ***închisă*** *sau* ***bilă****) de centru x_0 şi rază r mulţimea $\{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$, notată cu $S(x_0; r)$ (respectiv mulţimea $B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant r\}$).*

Observaţie: Termenul de ***sferă*** de rază r şi centru x_0 este atribuit mulţimii $Fr\,(S(x_0; r))$.

Topologia τ_d, generată (indusă) de metrica d, pe mulţimea X este atunci aceea care are drept bază (în sensul Definiţiei 6.7 b)) mulţimea tuturor sferelor deschise din X. Într-o asemenea topologie, o mulţime D este deschisă dacă ea este vidă sau dacă, pentru orice punct $x \in D$, există $r \in \mathbb{R}_+^*$, aşa încât $S(x; r) \subseteq D$. Familia tuturor mulţimilor de acest fel este însăşi topologia τ_d pe X. Faptul că τ_d este, în sensul Definiţiei 6.1, o topologie pe X, se poate vedea prin verificarea satisfacerii de către aceasta a axiomelor (AT1) - (AT3). Se poate vedea, de asemenea, că orice sferă deschisă din X (în sensul Definiţiei 6.19) este element din τ_d, meritându-şi într-adevăr denumirea de “deschisă”.

În particular, ***mulţimea*** $\mathbb{R}^n$, ***dotată***, de exemplu, ***cu metrica euclidiană*** d_2, poate fi privită, prin prisma cuplului $(\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$, unde τ_{d_2} este topologia indusă de d_2, ca un spaţiu topologic. Într-un asemenea context, τ_{d_2} poartă denumirea de ***topologie euclidiană*** sau ***uzuală*** pe $\mathbb{R}^n$, iar $(\mathbb{R}^n, \tau_{d_2})$ se numeşte ***spaţiu topologic euclidian real***, n***-dimensional***.

Definiţia 6.20 *Două metrici, d şi $\hat{d}$, pe o aceeaşi mulţime X, se numesc* **echivalente** *dacă induc aceeaşi topologie pe X, adică dacă $\tau_d = \tau_{\hat{d}}$.*

Teorema 6.4 *Fie d şi $\hat{d}$ metrici pe o mulţime X. Dacă există două constante reale şi pozitive, α şi β, astfel încât*

$$(*) \quad \alpha \cdot d(x, y) \leqslant \hat{d}(x, y) \leqslant \beta \cdot d(x, y), \forall\, x, y \in X,$$

atunci d şi $\hat{d}$ sunt metrici echivalente.

Demonstraţie: Se constată că prima (cea de la stânga) dintre inegalităţile din $(*)$ implică faptul că $\tau_d \preccurlyeq \tau_{\hat{d}}$, iar cealaltă inegalitate conduce la relaţia $\tau_{\hat{d}} \preccurlyeq \tau_d$, ajungându-se astfel la concluzia că $(*)$ implică egalitatea topologiilor τ_d şi $\tau_{\hat{d}}$, ceea ce înseamnă echivalenţa metricilor d şi $\hat{d}$.

Astfel, pentru a arăta că $\tau_d \preccurlyeq \tau_{\hat{d}}$, se consideră x arbitrar din X şi o sferă arbitrară $S_d(x; r)$. Luând $r_\alpha = \alpha \cdot r > 0$, observăm că $S_{\hat{d}}(x; r_\alpha) \subseteq S_d(x; r)$, întrucât, $\forall\, y \in S_{\hat{d}}(x; r_\alpha)$, avem $\hat{d}(x, y) < r_\alpha = \alpha \cdot r$ şi, din $(*)$, deducem că $\alpha \cdot d(x, y) \leqslant \hat{d}(x, y) < \alpha \cdot r$. De aici, rezultă că $d(x, y) < r$, adică $y \in S_d(x; r)$. Deci $S_d(x; r) \in \tau_{\hat{d}}$ şi, astfel, reiese că $\tau_d \preccurlyeq \tau_{\hat{d}}$. În mod cu totul similar, se arată că are loc şi relaţia inversă, adică $\tau_{\hat{d}} \preccurlyeq \tau_d$ ◀

Exemplu: Metricile d_1, d_2 şi d_∞ sunt echivalente pe $\mathbb{R}^n$. Aceasta întrucât, după cum se poate vedea, (nedificil în fond) au loc relaţiile următoare, de tipul $(*)$:

$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant \sqrt{n} \cdot d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n \text{ şi},$$

$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant d_1(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant n \cdot d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Observaţii:

1) Condiţia $(*)$ este doar suficientă, nu şi necesară pentru echivalenţa a două metrici, d şi $\hat{d}$. Fără să satisfacă numaidecât $(*)$, două metrici pot fi echivalente. De exemplu, pe $X = \mathbb{R}_+^*$, metricile $d(x, y) = |x - y|$ şi $\hat{d}(x, y) \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$, sunt echivalente (inducând o aceeaşi topologie), dar nu satisfac nici o relaţie de tipul $(*)$.

2) În cazul în care metricile d şi $\hat{d}$ sunt induse de nişte norme, atunci condiţia $(*)$ este nu numai suficientă, ci şi necesară pentru ca respectivele metrici să fie echivalente. În acel caz, la nivelul normelor $\|\cdot\|$ şi $|||\cdot|||$ ce induc pe d şi pe $\hat{d}$, relaţia $(*)$ revine la următoarea:

$$(**) \quad \alpha\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant \beta\|x\|, \forall\, x \in X,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, iar X este spaţiul liniar real în cauză. Se poate spune atunci că $(**)$ reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca normele $\|\cdot\|$ şi $|||\cdot|||$ (implicit, şi metricile induse de aceste norme) să fie echivalente.

Şiruri şi serii de elemente din $\mathbb{R}^n$

Cum, după cum am văzut deja, $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu o distanţă, poate fi apreciat, în pereche cu metrica respectivă, ca un spaţiu metric, consideraţiile ce urmează sunt potrivite şi pentru cazul în care, în particular, X, mulţimea la care ne referim în general, este $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 6.21 *Fie (X, d) un spaţiu metric oarecare şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de puncte din X.*

*a) Spunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **mărginit** dacă mulţimea elementelor sale este mărginită, adică dacă există $\tilde{x} \in X$ şi $r \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x_n \in S(\tilde{x}, r)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

*b) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este unul **fundamental (Cauchy)** dacă: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_\varepsilon$ şi $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.*

*c) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este numit **convergent** la un $x_0 \in X$ dacă şirul de numere reale $(d(x_n, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge la 0.*

Teorema 6.5 *Fie $X = \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), dotat cu metrica euclidiană d_2. Un şir de puncte din $\mathbb{R}^m$ este convergent, în $\mathbb{R}^m$, dacă şi numai dacă, cele m şiruri componente (ale coordonatelor) sunt convergente şi, atunci limita şirului din $\mathbb{R}^m$ este punctul ale cărui coordonate sunt limitele celor m şiruri din $\mathbb{R}$ ale coordonatelor.*

De asemenea, un şir de puncte din $\mathbb{R}^m$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$. La fel, studiul unei serii din $\mathbb{R}^m$, revine la studiul componentelor sale în $\mathbb{R}$.

Demonstraţie: Fie $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ un şir pentru care $\mathrm{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^m\right)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ şi $x_n^j \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, j = \overline{1,m}$. Totodată, $\forall\, \mathrm{y} = \left(y^1, y^2, \ldots, y^m\right) \in \mathbb{R}^m$, este adevărată relaţia:

$$(\ !\ ) \quad |y^j| \leqslant \|y\|_e = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(y^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \forall\, j = \overline{1,m}.$$

Admiţând că $\mathrm{x}_n \xrightarrow{d_2} \mathrm{x}_* = \left(x_*^1, x_*^2, \ldots, x_*^m\right) \in \mathbb{R}^m$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_*) = 0$, în $\mathbb{R}$, deducem, pe seama relaţiei (!), că, luând $y^j = x_n^j - x_*^j$, $\forall\, j = \overline{1,m}$, avem:

$$(\ !!\ ) \quad |x_n^j - x_*^j| \leqslant d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_*) \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_n^i - x_*^i|, \forall\, j = \overline{1,m}.$$

Întrucât $d_2(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_*) \longrightarrow 0$, reiese că $|x_n^j - x_*^j| \longrightarrow 0$, $\forall\, j = \overline{1,m}$, ceea ce înseamnă că toate cele m şiruri componente ale şirului $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente în $\mathbb{R}$, la coordonatele corespunzătoare ale lui x_*. Faptul reciproc rezultă adevărat pe baza inegalităţii din partea dreaptă a relaţiei (!!).

În ceea ce priveşte concluzia relativă la un şir Cauchy $(\mathrm{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, ea rezultă în virtutea relaţiei (!), în care, de data aceasta, se ia $y^j = x^j_{n+p} - x^j_n$, $\forall\, j = \overline{1,m}$. La fel şi concluzia privitoare la o serie din $\mathbb{R}^m$. ◀

Propoziţia 6.7 ***(De caracterizare a punctelor aderente ale unei mulţimi dintr-un spaţiu metric, cu ajutorul şirurilor)***

Fie A o submulţime a unui spaţiu metric (X, d).Un punct $x \in X$ este aderent pentru A dacă şi numai dacă există un şir de puncte din A care să conveargă la x, în τ_d.

Demonstraţie: Se ţine seama de faptul că $x \in \overline{A} \Leftrightarrow V \cap A \neq \varnothing$, $\forall\, V \in \mathcal{V}(x)$. În particular, pentru $V = S_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right)$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, avem: $S_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Alegând câte un punct $x_n \in S_d\left(x; \dfrac{1}{n}\right) \cap A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, obţinem un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$ pentru care $d(x_n, x) < \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, adică $d(x_n, x) \longrightarrow 0$, când $n \to \infty$. Cu alte cuvinte, $x_n \xrightarrow{d_2} x$.

Reciproc, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$ este un şir convergent, în τ_d, la un punct x din X, atunci, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_\varepsilon$, avem $d(x_n, x) < \varepsilon$. Altfel spus, $x_n \in S_d(x; \varepsilon)$. Deci: $S_d(x; \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Ori, aceasta înseamnă că $x \in \overline{A}$. ◀

Observaţie: În virtutea rezultatului stipulat de Propoziţia 6.7, putem afirma că o mulţime A dintr-un spaţiu metric (X, d) (şi, în particular, din $\mathbb{R}^n$) este închisă (în raport cu τ_d), adică $A = \overline{A}$, dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent de puncte din A aparţine lui A.

Propoziţia 6.8 ***(De caracterizare a punctelor de acumulare cu ajutorul şirurilor)***

Fie $A \subseteq (X, d)$. Atunci $x \in A'$ dacă şi numai dacă există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset A$, astfel încât $x_n \neq x$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Altfel spus, $x \in A'$ dacă şi numai dacă $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Definiţia 6.22 *a) Un spaţiu metric (X, d) se numeşte **complet** dacă şi numai dacă orice şir Cauchy din X este convergent la un punct din X.*

*b) Un spaţiu prehilbertian şi complet (ca spaţiu metric, cu metrica indusă de norma dată, la rândul ei, de produsul scalar în cauză) se numeşte **spaţiu Hilbert**.*

*c) Un spaţiu normat şi complet (în raport cu metrica indusă de norma existentă) se numeşte **spaţiu Banach**.*

Teorema 6.6 *Spaţiul $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu produsul scalar euclidian, este un spaţiu Hilbert. Dotat cu norma euclidiană, $\mathbb{R}^n$ este un spaţiu Banach, fiind un spaţiu complet în raport cu metrica euclidiană.*

Demonstraţie: În conformitate cu Teorema 6.5, un şir din $\mathbb{R}^n$ este de tip Cauchy dacă şi numai dacă toate cele n şiruri componente ale sale sunt şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$. Cum, în $\mathbb{R}$, înzestrat cu metrica (topologia) uzuală, orice şir Cauchy este convergent, se poate spune, în virtutea aceleiaşi teoreme, că şirul considerat în $\mathbb{R}^n$, ca şir Cauchy, este, în mod necesar, convergent în $\mathbb{R}^n$ (în raport cu metrica euclidiană). Prin urmare, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este un spaţiu metric complet. Cum d_2 este indusă de norma euclidiană $\|\cdot\|_2$, putem afirma că spaţiul normat $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ este complet, adică un spaţiu Banach. În fine, întrucât $\|\cdot\|_2$ este norma dată de produsul scalar euclidian $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$, se poate zice că spaţiul prehilbertian $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ este complet în raport cu metrica indusă de norma dată de $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$, adică $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ este un spaţiu Hilbert. ◀

Bibliografie

1. W. G. Chinn, N. E. Steenrod - *Introducere în topologie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

2. Olga Costinescu - *Elemente de topologie generală*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 3)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (Cap. 4)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată. Analiză matematică (Cap. IV)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

6. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (Cap. 4)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.