Algoritmica Grafurilor - Cursul 10

Decembrie 2018

1. Fluxuri în reţele
   - Fluxuri de cost minim
2. Reduceri în timp polinomial pentru probleme pe grafuri
   - Mulţimii stabile de cardinal maxim
   - Colorări ale nodurilor
   - Probleme Hamiltoniene
3. Exerciţii pentru seminarul din săptămâna a 13-a

Să presupunem că în reţeaua $R = (G, s, t, c)$, se dă în plus o **funcţie de cost**: $a : E \to \mathbb{R}$; $\forall ij \in E$, $a(ij) = a_{ij}$ este costul arcului ij (interpretat ca fiind costul trimiterii unei "unităţi" de flux pe arcul ij).

Dacă x este un flux în R, atunci **costul lui x este**

$$\mathbf{a(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}.}$$

Problema fluxului de cost minim

Date: R o reţea, $a : E \to \mathbb{R}$ o funcţie de cost, şi $v \in \mathbb{R}_+$,

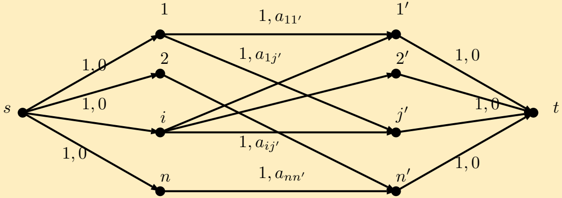
Determină: un flux x^0 în R astfel încât

$$a(x^0) = \min \{a(x) \ : \ x \text{ flux în } R, v(x) = v\}.$$

Să observăm că, dacă v nu este mai mare decât valoarea fluxului maxim în R, atunci problema are întotdeauna soluţii ($a(x)$ este o funcţie liniară definită pe mulţimea nevidă şi compactă din $\mathbb{R}^{m+1}$ a tuturor fluxurilor de valoare v).

1. Problema asignării. Se dau n muncitori şi n slujbe. Costul repartizării muncitorului i slujbei j este a_{ij}. Să se asigneze fiecare muncitor câte unei slujbe astfel încât costul total să fie minim.

Considerăm reţeaua bipartită de mai jos, unde fiecare arc este etichetat cu capacitatea sa urmată de cost. Astfel, $c_{ij'} = 1$, $c_{si} = 1$, $a_{si} = 0$, $c_{j't} = 1$, şi $a_{j't} = 0$, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.



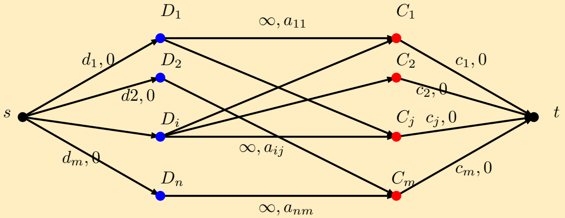
Un flux de cost minim de valoare n constituie soluţia problemei.

Similar putem determina un cuplaj perfect de pondere minimă într-un graf bipartit.

2. Problema de transport Hitchcock-Koopmans. Un produs, disponibil în depozitele $D_1, \ldots, D_n$ în cantităţile $d_1, \ldots, d_n$, respectiv, este cerut decătre clienţii $C_1, \ldots, C_m$ în cantităţile $c_1, \ldots, c_m$, respectiv. Se cunosc costurile de transport unitar, a_{ij} - de la depozitul D_i la clientul C_j, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$,$\forall j \in \{1, \ldots, m\}$.

Să se determine o schemă de transport care să satisfacă cererea clienţilor cu un cost total al transportului minim.

Problema are soluţie numai dacă $\sum_{i=1}^{n} d_i \geqslant \sum_{j=1}^{m} c_j$. În acest caz, un flux de cost minim de valoare $v = \sum_{i=1}^{m} c_i$, în reţeaua de mai jos, rezolvă problema.



Definiţie

Fie x un flux în $R = (G, s, t, c)$ şi $a : E \to \mathbb{R}$ o funcţie de cost.

- *Dacă P este un A-drum în R relativ la x, atunci* **costul drumului** *P este definit ca*

$$a(P) = \sum_{ij \in E(P), ij \text{ forward}} a_{ij} - \sum_{ij \in E(P), ji \text{ backward}} a_{ji}$$

- *Dacă C este un A-drum închis în R relativ la x, atunci $a(C)$ este calculat ca mai sus, după stabilirea unui sens de parcurgere alui C (este possible ca ambele sensuri să ofere A-drumuri relativ la x).*

Remarci

- Dacă P este un drum de creştere relativ la x, atunci $x^1 = x \otimes r(P)$ este un flux de valoare $v(x^1) = v(x) + r(P)$ şi cost $a(x^1) = a(x) + r(P) \cdot a(P)$.

Remarci

- Dacă C este un A-drum închis în R relativ la x, atunci $x^1 = x \otimes r(C)$ este un flux de valoare $v(x^1) = v(x)$ şi cost $a(x^1) = a(x) + r(C) \cdot a(C)$. Urmează că **dacă** $a(C) < 0$ **atunci** x^1 **este un flux de aceeaşi valoare cu** x **dar de cost** $c(x^1) < c(x)$.

Teorema 1

Un flux x de valoare v este un flux de cost minim dacă şi numai dacă nu există un A-drum închis de cost negativ relativ la x în R.

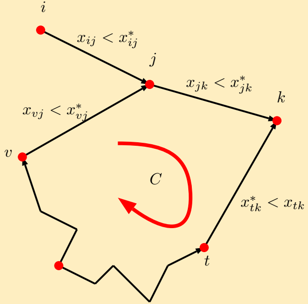
Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Din remarca de mai sus.
"$\Leftarrow$" Fie x un flux de valoare v astfel încât nu există un A-drum închis de cost negativ relativ la x în R. Fie x^* un flux de cost minim de valoare v astfel încât

$$\Delta(x, x^*) = \min\{\Delta(x, x') \ :\ x' \text{ flux de cost minim de valoare } v\},$$

unde $\Delta(x, x') = |\{ij \in E \ :\ x_{ij} \neq x'_{ij}\}|$.

Dacă $\Delta(x, x^*) = 0$, atunci $x = x^*$, astfel x este un flux de cost minim. Altfel, $\Delta(x, x^*) > 0$ şi există ij astfel încât $x_{ij} \neq x^*_{ij}$. Să presupunem că $0 \leqslant x_{ij} < x^*_{ij} \leqslant c_{ij}$ (dacă $x_{ij} > x^*_{ij}$, raţionamentul este similar). Din legea conservării fluxului, există $jk \in E$ astfel încât $0 \leqslant x_{jk} < x^*_{jk} \leqslant c_{jk}$, sau există $kj \in E$ astfel încât $0 \leqslant x^*_{kj} < x_{kj} \leqslant c_{jk}$.

Deoarece numărul de noduri este finit, repetând acest raţionament, obţinem, C, un A-drum închis relativ la x în R:



Dacă parcurgem C în sens contrar, obţinem un A-drum închis, C', relativ la x^*. Deoarece $a(C) \geqslant 0$ (din ipoteză), şi $a(C') = -a(C)$ urmează că $a(C) = 0$. (x^* este de cost minim; astfel, din implicaţia directă, $a(C') \geqslant 0$).

Dacă vom considera $x' = x^* \otimes \delta(C')$, unde

$$\delta(C') = \min\left\{ \min_{kj \textit{ forward in } C'} (x_{kj} - x^*_{kj}), \min_{kj \textit{ backward in } C'} (x^*_{jk} - x_{jk}) \right\},$$

atunci x' satisface $v(x') = v(x^*) = v$, $a(x') = a(x^*) + \delta(C') \cdot a(C') = a(x^*)$.

Astfel x' este un flux de cost minim de valoare v, dar $\Delta(x, x') < \Delta(x, x^*)$, în contradicţie cu alegerea lui x^*. Astfel $\Delta(x, x^*) = 0$, şi teorema este demonstrată. $\square$

Teorema 2

Dacă x este un flux de cost minim de valoare v şi P_0 este un drum de creştere relativ la x astfel încât

$$a(P_0) = \min\{a(P) \,:\, P \text{ drum de creştere relativ la } x\},$$

atunci $x^1 = x \otimes r(P_0)$ este un flux de cost minim de valoare $v(x^1) = v + r(P_0)$.

Demonstraţie. Omisă.

Un drum de creştere de cost minim poate fi găsit folosind un algoritm pentru drumuri de cost minim. Dacă x este un flux în R şi $a : E \to \mathbb{R}$ este o funcţie de cost, atunci luând $a_{ij} = \infty$ dacă $ij \in E$ (când $xij = 0$), construim

$$\overline{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{dacă } x_{ij} < c_{ij} \text{ şi } x_{ji} = 0, \\ \min\{a_{ij}, -a_{ji}\}, & \text{dacă } x_{ij} < c_{ij} \text{ şi } x_{ji} > 0, \\ -a_{ji}, & \text{dacă } x_{ij} = c_{ij} \text{ şi } x_{ji} > 0, \\ +\infty, & \text{dacă } x_{ij} = c_{ij} \text{ şi } x_{ji} = 0. \end{cases}$$

Un st-drum de cost $\overline{a}$ minim corespunde unui drum de creştere de cost minim relativ la x în R, şi un circuit de cost negativ corespunde unui A-drum închis relativ la x în R.

Atunci, avem următorul algoritm pentru determinarea unui flux de cost minim:

Fluxuri de cost minim - Un algoritm generic (Klein, Busacker, Gowan etc.)

fie x un flux de valoare $v' \leqslant v$; // x poate fi nul sau $x = (v/v(y) \cdot y$, unde y este un flux valoare maximă.

while ($\exists C$ un circuit de cost $\overline{a}$ negative) **do**

  $x \leftarrow x \otimes r(C)$;

end while

while $(v(x) < v)$ **do**

  determină un st-drum P de cost $\overline{a}$ minim;

  $x \leftarrow x \otimes \min\{r(P), v - v(x)\}$;

end while

Complexitatea timp al celui de-al doilea while este $\mathcal{O}(n^3 v)$ (dacă pornim cu fluxul nul şi capacităţile sunt întregi). Primul while poate fi implementat astfel încât să aibă $\mathcal{O}(nm^2 \log n)$ iteraţii.

Memento

- Fie $P_i : I_i \rightarrow \{da, nu\}$ $(i \in \{1, 2\})$ două **probleme de decizie**. **P_1 se reduce polinomial la P_2**, şi notăm aceasta prin $P_1 \leqslant_P P_2$, dacă există o funcţie calculabilă în timp polinomial $\Phi : I_1 \rightarrow I_2$, astfel încât $P_1(i) = P_2(\Phi(i)), \forall i \in I_1$.
- Funcţiile Φ vor fi definite folosind un algoritm care construieşte, pentru fiecare instanţă $i_1 \in I_1$, o instanţă $i_2 \in I_2$ în timp polinomial (în dimensiunea lui i_1), astfel încât $P_1(i_1) = da$ dacă şi numai dacă $P_2(i_2) = da$.
- Construcţia din spatele reducerii în timp polinomial arată cum prima problemă poate fi rezolvată eficient folosind un oracol pentru cea de-a doua.

- Relaţia $\leqslant_P$ este o relaţie tranzitivă pe mulţimea problemelor de decizie (deoarece, clasa funcţiilor polinomial calculabile este închisă la compunere).

Exemplu

SAT $\leqslant_P$ **3SAT**

SAT

Instanţă: $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ o mulţime finită de variabile booleene;

$$C = C_1 \wedge C_2 \ldots \wedge C_m \text{ o formulă CNF peste } U:$$

$$C_i = v_{i1} \vee v_{i_2} \vee \ldots \vee v_{i_{k_i}}, i = \overline{1, m}, \text{ unde}$$

$$\forall i_j, \exists \alpha \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ a. î. } v_{i_j} = u_\alpha \text{ sau } v_{i_j} = \overline{u}_\alpha.$$

Întrebare: Există o asignare $t : U \to \{true, false\}$ a. î. $t(C) = true$?

3SAT este restricţia problemei **SAT** la mulţimea instanţelor în care fiecare clauză C_i are exact 3 literali ($k_i = 3$), unde un literal, v_{i_j}, este o variabilă sau o variabilă negată.

Problema SAT este faimoasă deoarece este prima problemă despre care s-a arăta ca este NP-completă (Cook, 1971).

$$\mathbf{NP} \neq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP} = \mathbf{P}$$

Reduceri în timp polinomial - Problema mulţimii stabile de cardinal maxim

SM

Instanţă: $G = (V, E)$ un graf şi $k \in \mathbb{N}$.

Întrebare: Există o mulţime stabilă S în G astfel încât $|S| \geqslant k$?

Teorema 3

(Karp, 1972). 3SAT $\leqslant_P$ SM.

Demonstraţie. Fie $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, $C = C_1 \wedge C_2 \ldots \wedge C_m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ cu $C_i = v_{i1} \vee v_{i_2} \vee v_{i_3}$, $i = \overline{1, m}$, (unde $\forall i_j, \exists \alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a. î. $v_{i_j} = u_\alpha$ sau $v_{i_j} = \overline{u}_\alpha$) reprezentând datele unei instanţe a problemei **3SAT**.

Vom construi în timp polinomial (în $n + m$) un graf G şi $k \in \mathbb{N}$, astfel încât există o asignare t care satisface C dacă şi numai dacă există o mulţime stabilă S în G astfel încât $|S| \geqslant k$.

Demonstraţie (continuare).

Construcţia grafului G:

- $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie grafurile disjuncte $T_i = (\{u_i, \overline{u}_i\}, \{u_i\overline{u}_i\})$.
- $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, fie grafurile disjuncte $Z_j = (\{a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}\}, \{a_{j1}a_{j2}, a_{j2}a_{j3}, a_{j3}a_{j1}\})$.
- $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, fie mulţimea de muchii $E_j = \{a_{j1}v_{j1}, a_{j2}v_{j2}, a_{j3}v_{j3}\}$, unde $v_{j1} \vee v_{j2} \vee v_{j3}$ este clauza C_j.

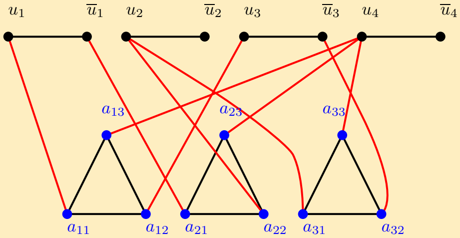
$$V(G) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V(T_i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} V(Z_j)\right)$$

$$E(G) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E(T_i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} E(Z_j) \cup E_j\right).$$

Evident, construcţia lui G se poate face în timp polinomial relativ la dimensiunea $n + m$ a instanţei **3SAT**. Fie $k = n + m$.

Exemplu

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$; $C = (u_1 \vee u_3 \vee u_4) \wedge (\overline{u}_1 \vee u_2 \vee u_4) \wedge (u_2 \vee \overline{u}_3 \vee u_4)$; $k = 4 + 3 = 7$.



Să presupunem că răspunsul la întrebarea problemei **SM** pentru (G, k) instanţă este da.

$\exists S \in \mathcal{S}_G$ (familia tuturor mulţimilor stabile din G) astfel încât $|S| \geqslant k$.

Deoarece fiecare mulţime stabilă poate avea cel mult un nod în fiecare $V(T_i)$ şi fiecare $V(Z_j)$, urmează că $|S| = k$ şi $|S \cap V(T_i)| = 1$, $|S \cap V(Z_j)| = 1$, $\forall i = \overline{1, n}$, $\forall j = \overline{1, m}$.

Fie $t : U \to \{true, false\}$ dată prin

$$t(u_i) = \begin{cases} true, & \text{dacă } S \cap V(T_i) = \{\overline{u}_i\} \\ false, & \text{dacă } S \cap V(T_i) = \{u_i\} \end{cases}$$

Atunci, $t(C_j) = true$, $\forall j = \overline{1, m}$, astfel $t(C) = true$, şi răspunsul la **3SAT** este da.

Într-adevăr, $\forall j = \overline{1, m}$, dacă $C_j = v_{j1} \vee v_{j1} \vee v_{j3}$ şi $S \cap V(Z_j) = \{a_{jk}\}$ $(k \in \{1, 2, 3\})$, atunci (deoarece $a_{jk}v_{jk} \in E$) urmează că $v_{jk} \notin S$.

- Dacă $v_{jk} = u_\alpha$, atunci $u_\alpha \notin S$, deci $\overline{u}_\alpha \in S$, şi - din definiţia lui t - avem $t(u_\alpha) = true$, adică, $t(v_{jk}) = true$, ceea ce implică $t(C_j) = true$.
- Dacă $v_{jk} = \overline{u}_\alpha$, atunci $\overline{u}_\alpha \notin S$, deci $u_\alpha \in S$, şi - din definiţia lui t - avem $t(\overline{u}_\alpha) = true$, adică, $t(v_{jk}) = true$, ceea ce implică $t(C_j) = true$.

Reciproc, dacă răspunsul la întrebarea problemei **3SAT** este da, atunci $\exists t : U \to \{true, false\}$ astfel încât $t(C_j) = true$, $\forall j = \overline{1, m}$.

Fie $\overline{S}_1$ mulţimea stabilă $\overline{S}_1 = \bigcup_{i=1}^{n} V'_i$ cu n noduri, unde

$$V'_i = \begin{cases} \{\overline{u}_i\}, & \text{dacă } t(u_i) = true\} \\ \{u_i\}, & \text{dacă } t(u_i) = false\} \end{cases}$$

Atunci, deoarece $t(C_j) = true$, $\forall j = \overline{1, m}$, urmează că există $k_j \in \{1, 2, 3\}$ astfel încât $t(v_{jk}) = true$. Fie $\overline{S}_2 = \bigcup_{j=1}^{m} \{a_{jk_j}\}$. Evident, $\overline{S}_2$ este o mulţime stabilă în G având m noduri.

Fie $\overline{S} = \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2$. Evident, $|\overline{S}| = n + m = k$ (astfel $|\overline{S}| \geqslant k$). Dacă arătăm că $\overline{S}$ este o mulţime stabilă, atunci răspunsul la **SM** pentru instanţă (G, k) este da.

Să presupunem că $\exists v, w \in \overline{S}$ astfel încât $e = vw \in E(G)$. Atunci o extremitate a lui e este în $\overline{S}_1$, iar cealaltă în $\overline{S}_2$. Dacă $v \in \overline{S}_1$, atunci avem două cazuri:

- $v = u_\alpha$, $w = a_{jk_j}$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k_j \in \{1, 2, 3\}$ şi $v_{jk_j} = u_\alpha$.
  Deoarece $t(v_{jk_j}) = true$, urmează că $t(u_\alpha) = true$, astfel $v = u_\alpha \notin \overline{S}_1$, contradicţie.

- $v = \overline{u}_\alpha$, $w = a_{jk_j}$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k_j \in \{1, 2, 3\}$ şi $v_{jk_j} = \overline{u}_\alpha$.
  Deoarece $t(v_{jk_j}) = \mathit{true}$, urmează că $t(\overline{u}_\alpha) = \mathit{true}$, astfel $t(u_\alpha) = \mathit{false}$. Astfel, $v = \overline{u}_\alpha \notin \overline{S}_1$, contradicţie. $\square$

O demonstraţie similară poate fi făcută pentru a arăta că **SAT** $\leqslant_P$ **SM**, singura diferenţă este că Z_i sunt grafuri complete cu k_i noduri.

COL

Instanţă: $G = (V, E)$ graf şi $p \in \mathbb{N}^*$.

Întrebare: Există o p-colorare (a nodurilor) lui G?

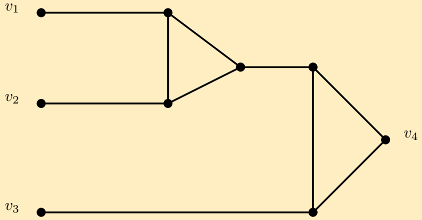
Teorema 4

3SAT $\leqslant_P$ **COL**.

Această teoremă arată că problema colorării nodurilor este **NP**-hard. Demonstraţia dată mai jos arată că problema, care se obţine din **COL** prin restricţia la instanţele cu $p = 3$, care poate fi numită 3-**COL**, este **NP**-hard, de asemeni.

Lema 1

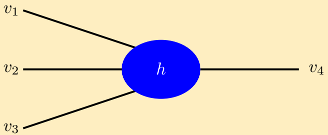
Fie H graful



a) Dacă c este o 3-colorare a lui H a. î. $c(v_1) = c(v_2) = c(v_3) = a \in \{1, 2, 3\}$, atunci în mod necesar $c(v_4) = a$ (forcing).

b) Dacă $c : \{v_1, v_2, v_3\} \to \{1, 2, 3\}$ satisface $c(\{v_1, v_2, v_3\}) \neq \{a\}$, ($a \in \{1, 2, 3\}$), atunci c poate fi extinsă la o 3-colorare c a lui H cu $c(v_4) \neq a$.

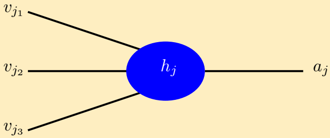
Demonstraţie. Se examinează lista 3-colorărilor lui H.
Vom utiliza reprezentarea simplificată a grafului H:



Demonstraţia Teoremei 4. Considerăm datele unei instanţe a **3SAT**: $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, o mulţime de variabile booleene, şi $C = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, $(m \in \mathbb{N}^*)$ formulă CNF cu $C_j = v_{j_1} \vee v_{j_2} \vee v_{j_3}$, $\forall j = \overline{1, m}$, unde $\forall i = \overline{1, 3}$, $\exists \alpha$ a. î. $v_{j_i} = u_\alpha$ sau $v_{j_i} = \overline{u}_\alpha$.
Vom construi un graf G cu proprietatea că G este 3-colorabil dacă şi numai dacă răspunsul la **3SAT** pentru această instanţă este da, adică, există o asignare $t : U \to \{true, false\}$ astfel încât $t(C) = true$.

Construcţia necesită un timp polinomial, şi constă din următorii paşi:

- Considerăm grafurile disjuncte (V_i, E_i), $\forall i = \overline{1, n}$, unde $V_i = \{u_i, \overline{u}_i\}$ şi $E_i = \{u_i\overline{u}_i\}$.
- Pentru $C_j = v_{j_1} \vee v_{j_2} \vee v_{j_3}$, $\forall j = \overline{1, m}$, considerăm grafurile:

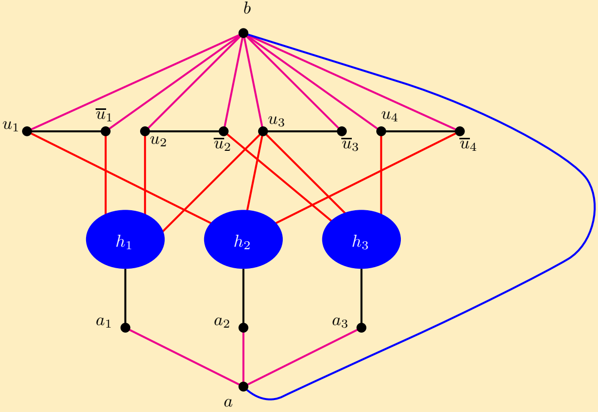


  unde, v_{j_k} $(k = \overline{1, 3})$ sunt nodurile corespunzătoare literalilor v_{j_k}, grafurile h_j sunt disjuncte, şi a_j sunt noduri distincte.
- Considerăm un nod nou a, şi toate muchiile aa_j, $\forall j = \overline{1, m}$.
- Considerăm un nod nou b, toate muchiile bu_i, $b\overline{u}_i$, $\forall i = \overline{1, n}$ şi ba.

Graful G are un număr de liniar de noduri relativ la $n + m$.

Exemplu

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $C = (\overline{u}_1 \vee u_2 \vee u_3) \wedge (u_1 \vee u_3 \vee \overline{u}_4) \wedge (\overline{u}_2 \vee u_3 \vee u_4)$.
Graful G este



Traveling salesman problem

Să presupunem că răspunsul la **3SAT** pentru instanţă considerată este da

Astfel $\exists t : U \to \{true, false\}$ a. î. $t(C) = true$, adică, $t(C_j) = true$, $\forall j = \overline{1, m}$. Vom arăta că G este 3-colorabil.

Colorăm mai întâi nodurile u_i şi $\overline{u}_i$, $\forall i \overline{1, n}$.

$$\begin{cases} c(u_i) = 1 \text{ şi } c(\overline{u}_i) = 2, \text{dacă } t(u_i) = true \\ c(u_i) = 2 \text{ şi } c(\overline{u}_i) = 1, \text{dacă } t(u_i) = false \end{cases}$$

Observăm că, dacă v este un literal, atunci $c(v) = 2$ dacă şi numai dacă $t(v) = false$.

Deoarece t este o asignare pentru care satisface C, $t(C_j) = true$, $\forall j = \overline{1, m}$. Urmează că $c(\{v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}\}) \neq \{2\}$, $\forall j = \overline{1, m}$.

Din Lema 1 b), putem extinde c la o 3-colorare, în fiecare graf h_j, astfel încât $c(a_j) \neq 2$, adică $c(a_j) \in \{1, 3\}$.

Reciproc, să presupunem că G este 3-colorabil.
Putem presupune că $c(b) = 3$ şi $c(a) = 2$ (altfel, redenumim culorile).
Urmează că $\{c(u_i), c(\overline{u}_i\} = \{1, 2\}$, $\forall i = \overline{1, n}$ şi $c(a_j) \in \{1, 3\}$, $\forall j = \overline{1, m}$.
Din Lema 1 a), urmează că $c(\{v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}\}) \neq 2$, $\forall j = \overline{1, m}$. Aceasta înseamnă că, $\forall j = \overline{1, m}$, există a $v_{j_k} \in C_j$ astfel încât $c(v_{j_k}) = 1$.
Astfel, definind $t : U \to \{true, false\}$ prin

$$t(u_i) = \begin{cases} true, & \text{dacă } c(u_i) = 1 \\ false, & \text{dacă } c(u_i) = 2 \end{cases},$$

Obţinem o asignare cu proprietatea că $t(C_j) = true$, $\forall j = \overline{1, m}$.
Astfel răspunsul la **3SAT** pentru instanţa dată este da.

Memento: Fie G un (di)graf. Un circuit C al lui G este un circuit Hamiltonian dacă $V(C) = V(G)$.
Un drum deschis P al lui G este un **drum Hamiltonian** dacă $V(P) = V(G)$. Un **(di)graf Hamiltonian** este un (di)graf care are un circuit Hamiltonian. Un **(di)graf trasabil** este a (di)graf careare un drum Hamiltonian.

Teorema 5

(Nash-Williams, 1969) Următoarele cinci probleme sunt echivalente polinomial:

CH: Dat un graf G. Este G Hamiltonian?

TR: Dat un graf G. Este G trasabil?

DCH: Dat un digraf G. Este G Hamiltonian?

DTR Dat un digraf G. Este G trasabil?

BCH: Dat un graf bipartit G. Este G Hamiltonian?

Remarcă

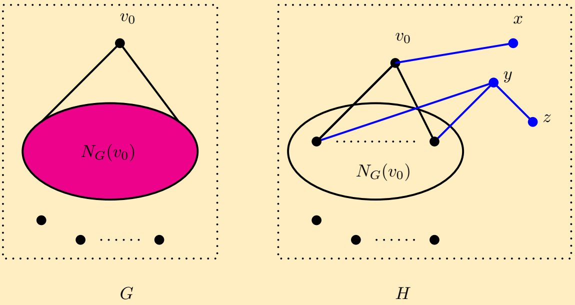
P_1 şi P_2 sunt echivalente polinomial dacă $P_1 \leqslant_P P_2$ şi $P_2 \leqslant_P P_1$.

Demonstraţia Teoremei 5.

CH $\leqslant_P$ TR Fie G un graf şi $v_0 \in V(G)$. Construim în timp polinomial un graf H astfel încât G este Hamiltonian dacă şi numai dacă H este trasabil.

Fie $V(H) = V(G) \cup \{x, y, z\}$ şi $E(H) = E(G) \cup \{xv_0, yz\} \cup \{wy : w \in V(G)$ şi $wv_0 \in V(G)\}$.

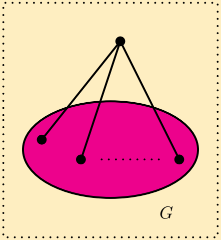
Demonstraţia Teoremei 5 (continuare).



Atunci, H este trasabil dacă şi numai dacă are un drum Hamiltonian, P, cu extremităţile x şi z (care au gradul 1 în H). P există în H dacă şi numai dacă în G există un drum Hamiltonian cu o extremitate în v_0 şi cealaltă un vecin al lui v_0, adică, dacă şi numai dacă G este Hamiltonian.

Demonstraţia Teoremei 5 (continuare).

TR $\leqslant_P$ CH Fie G un graf. Considerăm $H = G + K_1$. Atunci, H este Hamiltonian dacă şi numai dacă G are un drum Hamiltonian.



$G + K_1$

Echivalenţa problemelor **DCH** şi **DTR** se dovedeşte similar.

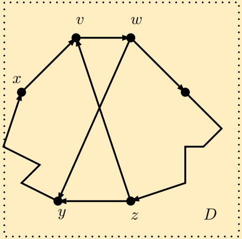
CH $\leqslant_P$ DCH Fie G un graf. Fie D digraful obţinut din G prin înlocuirea fiecărei muchii cu o pereche simetrică de arce.

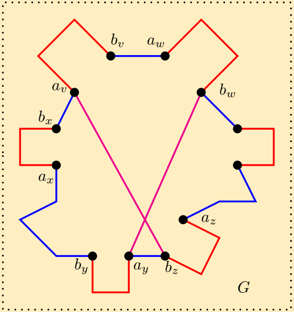
Evident fiecare circuit în G dă un circuit în D şi reciproc, fiecare circuit în D dă un circuit în G.

DCH $\leqslant_P$ CH fie D un digraf. Fiecare nod $v \in V(D)$ este înlocuit printr-un graf neorientat $P_3(v)$ cu extremităţi a_v şi b_v:

$$P_3(v) = (\{a_v, b_v, c_v, d_v\}, \{a_v c_v, c_v d_v, d_v b_v\}).$$

Fiecare arc $vw \in E(D)$ este înlocuit prin muchia (neorientată) $b_v a_w$. Fie G graful obţinut (în timp polinomial) astfel:





Fiecare circuit C al lui D corespunde unui circuit în G şi reciproc, fiecare circuit în G corespunde unui circuit al lui D. Urmează că D este Hamiltonian dacă şi numai dacă G este Hamiltonian.

Să observăm că dacă C este un circuit al lui G, atunci acesta este generat de un circuit C' of D, şi $length(C) = 3 \cdot length(C') + length(C') = 4 \cdot length(C')$. Urmează că orice circuit al lui G este par, deci G este un graf bipartit.

Astfel demonstraţia de mai sus (**DCH** $\leqslant_P$ **CH**) este de fapt **DCH** $\leqslant_P$ **BCH**.

Deoarece **BCH** $\leqslant_P$ **CH** este evidentă, Teorema 5 este complet demonstrată. $\square$

Exerciţiul 1. Arătaţi că următoarea problemă este **NP**-completă

INT

Instanţă: $n, m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$.

Întrebare: Există o asignare $x \in \mathbb{Z}^n$ a. î. $Ax \leqslant b$?

(Inegalitatea $\leqslant$ dintre doi vectori este pe componente.) *Hint:* You can try **SM** $\leqslant_P$ **INT**.

Exerciţiul 2. Considerăm următoarea problemă de decizie

P

Instanţă: $G = (V, E$ un digraf şi $p \in \mathbb{N}$.

Întrebare: Există $A \subseteq V$ astfel încât $|A| \leqslant p$ şi $G - A$ nu conţine circuite?

Arătaţi că **SM** $\leqslant_P$ **P**.

Exerciţiul 3. Un hipergraf k-uniform este o pereche $H = (V, E)$, unde $V \neq \varnothing$ este o mulţime finită, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, şi $E \subseteq \mathbb{P}_k(V) = \{A \subseteq E : |A| = k\}$. Este uşor de văzut că un hipergraf 2-uniform este un graf simplu.

Spunem că un hipergraf k-uniform $H = (V, E)$ este *simplu* dacă există o funcţie $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ astfel încât $\forall u, v \in V$, $u \neq v$, dacă $u, v \in e$ pentru o anumită muchie $e \in E$, atunci $c(u) \neq c(v)$. Considerăm următoarea problemă de decizie

k-SIMPLE

Instanţă: H un hipergraf k-uniform.

Întrebare: H este simplu?

(a) Arătaţi că problema 3-**SIMPLE** este **NP**-completă.

(b) Arătaţi că problema 2-**SIMPLE** este în **P**.

Exerciţiul 4. Considerăm următoarea problemă de decizie:

AGM

Instanţă: G un graf, $k \in \mathbb{N}$.

Întrebare: G are un arbore parţial T astfel încât $\Delta(T) \geqslant k$?

Arătaţi că $\mathbf{AGM} \in \mathbf{P}$.

Exerciţiul 5. Fie $D = (V, E)$ un digraf fără bucle. O mulţime stabilă a lui D, $S \subseteq V$, este numită quasi-kernel dacă fiecare nod $v \in V \setminus S$ sibil din S pe un drum de lungime cel mult 2.

(a) Arătaţi că un quasi-kernel poate fi construit în $\mathcal{O}(n + m)$, unde $n = |V|$ şi $m = |E|$.

(b) Arătaţi că 3-**SAT** se poate reduce în timp polinomial la problema determinării dacă într-un digraf dat există un quasi-kernel care conţine un nod dat.

Exerciţiul 6. Considerăm următoarea problemă de decizie: **LPL**

Instanţă: G un graf, $k \in \mathbb{N}$.

Întrebare: Are G un drum P astfel încât $length(P) \geqslant k$?

Arătaţi că **LPL** este **NP**-completă.

Exerciţiul 7. Un kernel într-un digraf $G = (V, E)$ este o mulţime stabilă $S \subseteq V$ astfel încât $\forall\ u \in V \setminus S$ există $v \in S$ cu $vu \in E$. Considerăm următoarea problemă de decizie:

NUCLEU

Instanţă: G un digraf.

Întrebare: Are G un kernel?

Arătaţi că următoarea construcţie conduce la o reducere polinomială a lui **SAT** la **NUCLEU** (i.e. **SAT** $\leqslant_P$ **NUCLEU**):

Exerciţiul 7 (continuare). Pentru fiecare conjucţie de clauze, F, instanţă a lui **SAT**, definim un digraf G (o instanţă pentru **NUCLEU**):

- pentru fiecare clauză C a lui F adăugăm un 3-circuit la G

$$v_C^1, v_C^1 v_C^2, v_C^2, v_C^2 v_C^3, v_C^3, v_C^3 v_C^1;$$

- pentru fiecare variabilă x care apare în formula F, adăugăm un 2-circuit la G

$$v_x, v_x v_{\overline{x}}, v_{\overline{x}}, v_{\overline{x}} v_x, v_x;$$

- pentru fiecare clauză C şi fiecare literal u care apare în C adăugăm a G trei arce

$$v_u v_C^1, v_u v_C^2, v_u v_C^3.$$

Exercise 8. Considerăm următoarea problemă de decizie

2SAT

Instanţă: $\mathcal{C}$ o familie de clauze fiecare cu doi literali.

Întrebare: Există o asignare a valorilor de adevăr către variable astfel ca toate clauzele din $\mathcal{C}$ să fie satisfăcute?

Define G digraful (implicaţiilor): $V(G)$ = mulţimea literalilor folosiţi în $\mathcal{C}$ şi $E(G) = \{\overline{v}_j w_j, \overline{w}_j v_j \ : \ C_j = v_j \vee w_j,\ j = \overline{1, m}\}$ (fiecare clauză introduce în G două arce). Arătaţi că $\mathcal{C}$ este satisfiabilă dacă şi numai dacă x_i şi $\overline{x}_i$ aparţin la componente tari conexe diferite ale lui G, $\forall i = \overline{1, n}$. Arătaţi că această proprietate poate fi verificată în $\mathcal{O}(n + m)$.

Exercise 9. Arătaţi că următoarea problemă este **NP**-completă.

MAX-2SAT

Instanţă: $\mathcal{C}$ o familie de clauze fiecare cu cel mult doi literali şi $k \in \mathbb{N}$.

Întrebare: Există o asignare a valorilor de adevăr către variable astfel ca cel puţin k dintre clauze să fie satisfăcute?

Exercise 10. Considerăm următoarea problemă de decizie

NAE-3SAT

Instanţă: $\mathcal{C}$ o familie de clauze fiecare cu doi literali.

Întrebare: Există o asignare a valorilor de adevăr către variable astfel ca în fiecare clauză să avem şi un literal adevărat şi unul fals?

Arătaţi că următoarea construcţie conduce la o reducere polinomială a lui **3SAT** la **NAE 3SAT** (i.e. **3SAT** $\leqslant_P$ **NAE 3SAT**):

- păstrăm variabilele booleene ale instanţei **3SAT**, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ şi adăugăm o variabilă (nouă) x;
- pentru fiecare clauză $C_j = v_{j_1} \vee v_{j_2} \vee v_{j_3}$ adăugăm o variabilă nouă y_j şi înlocuim C_j cu două clauze:

$$C_j^1 = v_{j_1} \vee v_{j_2} \vee y_j,\, C_j^2 = v_{j_3} \vee x \vee \overline{y}_j.$$

Exerciţiul 11. Arătaţi că următoarea problemă este **NP**-completă.

P

Instanţă: G un graf, $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant |G|$.

Întrebare: Are G un arbore parţial, T, cu $\Delta(T) \leqslant k$?