Logica de ordinul I. Întrebări și exerciții pentru testarea înțelegerii.

Următoarea listă de întrebări și exerciții este proiectată pentru a testa înțelegerea conceptelor din Logica de ordinul I. Unele au răspunsuri punctuale, iar altele au răspunsuri deschise. Puteți folosi întrebările pentru a vă testa gradul de înțelegere a conceptelor în felul următor: pentru fiecare întrebare, trebuie să știți răspunsul și să îl puteți argumenta convingător și cu încredere.

Dacă nu știți răspunsul la o întrebare, nu are sens să întrebați colegii sau profesorul – nu vă va ajuta cu nimic să aflați răspunsul. Trebuie pur și simplu să reluați studiul cursurilor.

- Introducere.
  - Logica de ordinul I nu are legătură cu logica propozițională.
  - Logica de ordinul I aduce în plus față de logica propozițională doar noțiunea de cuantificator.
  - Predicatele sunt funcții.
  - Cuantificatorii sunt predicate.
  - Mulțimile sunt relații.
  - Relațiile sunt mulțimi.
  - Dați exemple de mulțimi.
  - Dați exemple de relații.
- Sintaxa logicii de ordinul I.
  - Definiți noțiunea de signatură.
  - Dați exemple de signaturi.
  - Signaturile conțin simboluri funcționale și predicative.
  - Din ce este format alfabetul logicii de ordinul I?
  - Termenii sunt variabile sau simboluri funcționale.
  - Variabilele au aritate zero.
  - Constantele sunt simboluri funcționale de aritate zero.
  - Simbolurile funcționale sunt variabile sau constante.
  - Fiecare termen are cel puțin doi arbori abstracți de sintaxă.
  - Formulele atomice sunt formate cu utilizând simboluri predicative și termeni.
  - Formulele atomice conțin neapărat cuantificatori.
  - Spre deosebire de logica propozițională, formulele logicii de ordinul I nu sunt definite inductiv.
  - Orice formulă din logica de ordinul I are cel puțin un conector logic.
  - Variabilele care apar într-o formulă sunt mereu libere.
  - Parantezele nu apar în formulele logicii de ordinul I.
  - Toate formulele din logica de ordinul I conțin cuantificatori.
  - Dacă o formulă nu are cuantificatori, atunci ea este atomică.
  - O formulă poate avea mai mulți arbori abstracți de sintaxă.
  - Formulele cuantificate nu pot conține $\neg$.
  - Care este ordinea priorității conectorilor si cuantificatorilor logici?
- Semantica logicii de ordinul I.
  - Definiți noțiunea de structură.

- Structurile conțin predicate și funcții.
- Structurile sunt triplete care conțin un domeniu, predicate și funcții.
- Structurile și signaturile sunt același lucru.
- Simbolurile funcționale și funcțiile sunt același lucru.
- Simbolurile predicative și predicatele sunt același lucru.
- Funcția care calculează mulțimea variabilelor care apar într-o formulă este recursivă.
- Mulțimile variabilelor libere și variabilelor legate ale unei formule sunt diferite.
- Care este diferența între apariția liberă a unei variabile și noțiunea de variabilă liberă?
- Care este diferența între apariția legată a unei variabile și noțiunea de variabilă legată?
- Fie $\varphi = \Big(\forall x.\big(P(x,y) \land \exists y.\big(P(z, f(x,y)) \land P(x,y)\big)\big)\Big) \land P(x,x)$. Calculați $\mathit{free}(\varphi)$.
- Calculați $\mathit{bound}(\varphi)$.
- Care sunt aparițiile legate ale lui x în φ? Dar cele libere?
- Ce înseamnă domeniu de vizibilitate al unei variabile legate?
- O atribuire este o funcție.
- O atribuire asociază variabilelor câte un termen.
- O atribuire asociază tuturor variabilelor un element din domeniu.
- O atribuire asociază unei variabile un element din domeniu.
- O atribuire se poate aplica unui termen.
- Definiți noțiunea de actualizare a unei atribuiri.
- $S, \alpha \models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ dacă ...
- $S, \alpha \models \exists x.\varphi$ dacă ...
- $S, \alpha \models \forall x.\varphi$ dacă ...
- Dacă o formulă este satisfiabilă într-o structură S atunci ea este satisfiabilă.
- Dacă o formulă este satisfiabilă într-o structură S atunci ea este validă.
- Dacă o formulă este satisfiabilă într-o structură S atunci ea este validă în acea structură.
- Dacă o formulă este validă într-o structură S atunci ea este satisfiabilă.
- Dacă o formulă este validă într-o structură S atunci ea este validă.
- Dacă o formulă este validă într-o structura S atunci ea este satisfiabilă în acea structură.
- Dacă o formulă este satisfiabilă, atunci ea este satifiabilă în orice structură.
- Dacă o formulă este satisfiabilă, atunci există măcar o structură astfel încât ea este satifiabilă în acea structură.
- Dacă o formulă este validă, atunci ea este satifiabilă în orice structură.
- Dacă o formulă este validă, atunci există o structură astfel încât ea este satifiabilă în acea structură.
- Orice tautologie este satisfiabilă.
- Orice formulă satisfiabilă este și tautologie.
- Negația oricărei contradicții este o tautologie.
- Negația unei formule satisfiabile este nesatisfiabilă.
- Nu există formule nevalide care să fie satisfiabile.
- Negația oricărei tautologii este o tautologie.
- Formula $\forall x.\exists y.P(x,y)$ nu este validă.

- Formula $(\forall x.P(x,x)) \rightarrow \exists x_2.P(x_1,x_2)$ este validă.
- Formula $\forall x.\exists y.P(x,y)$ nu este validă.
- Formula $\forall x.\neg P(x,x)$ este satisfiabilă.
- Formula $\forall x.\neg P(x,x) \wedge \exists x.P(x,x)$ nu este satisfiabilă.

- Deducția naturală

  - Substituțiile sunt funcții.
  - Dacă σ este o substituție, extensia ei la termeni se notează cu σ^*.
  - Dacă σ este o substituție, extensia ei la termeni se notează cu $\sigma^\sharp$.
  - Dacă σ este o substituție, extensia ei la termeni se notează cu $\sigma^\flat$.
  - Dacă σ este o substituție, extensia ei la formule de ordinul I se notează cu σ^*.
  - Dacă σ este o substituție, extensia ei la formule de ordinul I cu $\sigma^\sharp$.
  - Dacă σ este o substituție, extensia ei la formule de ordinul I se notează cu $\sigma^\flat$.
  - Ce este o secvență?
  - Ce este o regulă de inferență?
  - Ce este un sistem deductiv?
  - Ce este o demonstrație formală?
  - Noțiunile de secvență validă și formulă validă sunt similare.
  - Sistemul deductiv al logicii de ordinul I:

$$\wedge i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \wedge e_2\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi',}$$

$$\rightarrow e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi') \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi',} \qquad \rightarrow i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi'),} \qquad \vee i_1\ \frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),}$$

$$\vee i_2\ \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),} \qquad \vee e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi' \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash \varphi',}$$

$$\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot,} \qquad \neg i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi,} \qquad \bot e\ \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi,}$$

$$\text{Ipoteză}\ \frac{}{\Gamma \vdash \varphi}\ \varphi \in \Gamma, \qquad \text{Extindere}\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi' \vdash \varphi,} \qquad \neg\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi.}$$

$$\forall e\ \frac{\Gamma \vdash \forall x.\varphi}{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]} \qquad \exists e\ \frac{\Gamma \vdash \exists x.\varphi \qquad \Gamma \cup \{\varphi[x \mapsto x_0]\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ x_0 \notin \mathit{vars}(\Gamma, \varphi, \psi)$$

$$\forall i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto x_0]}{\Gamma \vdash \forall x.\varphi}\ x_0 \notin \mathit{vars}(\Gamma, \varphi) \qquad \exists i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi[x \mapsto t]}{\Gamma \vdash \exists x.\varphi}$$

  Este acest sistem corect? Dar complet?

  - Care dintre următoarele secvențe sunt valide:
    1. $\{((\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}) \wedge \forall \mathtt{x.P(x)})\} \vdash (\mathtt{Q(a)} \wedge \forall \mathtt{x.P(x)})$;
    2. $\{((\mathtt{P(a)} \wedge \mathtt{Q(a)}) \wedge \forall \mathtt{x.P(x)}), \forall \mathtt{x.Q(x)}\} \vdash (\forall \mathtt{x.Q(x)} \wedge \mathtt{Q(a)})$;

3. $\{((\mathtt{P(a)} \land \mathtt{Q(a)}) \land \forall \mathtt{x.P(x)})\} \vdash (\forall \mathtt{x.P(x)} \land (\mathtt{Q(a)} \land \mathtt{P(a)}))$;
4. $\{((\mathtt{P(a)} \land \mathtt{Q(a)}) \to \forall \mathtt{x.P(x)}), \mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash \forall \mathtt{x.P(x)}$;
5. $\{(\mathtt{P(a)} \to \forall \mathtt{x.P(x)}), \mathtt{P(a)}, \mathtt{Q(a)}\} \vdash (\mathtt{Q(a)} \land \forall \mathtt{x.P(x)})$;
6. $\{(\mathtt{P(a)} \to \mathtt{P(b)}), (\mathtt{Q(a)} \to \mathtt{P(b)})\} \vdash ((\mathtt{P(a)} \lor \mathtt{Q(a)}) \to \mathtt{P(b)})$;
7. $\{\neg(\mathtt{P(a)} \land \mathtt{Q(a)})\} \vdash (\neg \mathtt{P(a)} \lor \neg \mathtt{Q(a)})$;
8. $\{\neg(\neg \mathtt{P(a)} \lor \neg \mathtt{Q(a)})\} \vdash (\mathtt{P(a)} \land \mathtt{Q(a)})$;
9. $\{\neg(\neg \mathtt{P(a)} \land \neg \mathtt{Q(a)})\} \vdash (\mathtt{P(a)} \lor \mathtt{Q(a)})$;
10. $\{\forall \mathtt{x.(P(x)} \land \mathtt{Q(x))}\} \vdash \forall \mathtt{x.P(x)}$;
11. $\{\forall \mathtt{x.Q(x)}, \mathtt{P(a)}\} \vdash \mathtt{P(a)} \land \mathtt{Q(a)}$;
12. $\{\forall \mathtt{x.P(x)}, \forall \mathtt{x.Q(x))}\} \vdash \forall \mathtt{x.(P(x)} \land \mathtt{Q(x))}$;
13. $\{\exists \mathtt{x}.\exists \mathtt{y.P(x,y)}\} \vdash \exists \mathtt{y}.\exists \mathtt{x.P(x,y)}$;
14. $\{\exists \mathtt{x}.\forall \mathtt{y.P(x,y)}\} \vdash \forall \mathtt{y}.\exists \mathtt{x.P(x,y)}$;
15. $\{\forall \mathtt{y}.\exists \mathtt{x.P(x,y)}\} \vdash \exists \mathtt{x}.\forall \mathtt{y.P(x,y)}$;
16. $\{\neg(\exists \mathtt{x.P(x)})\} \vdash \forall \mathtt{x}.\neg \mathtt{P(x)}$;
17. $\{\forall \mathtt{x}.\neg \mathtt{P(x)}\} \vdash \neg(\exists \mathtt{x.P(x)})$.

- Formule echivalente
  - Ce înseamnă că două formule sunt echivalente într-o structură S?
  - Exemple de formule echivalente într-o structură S dată.
  - Ce inseamnă că două formule sunt echivalente?
  - Exemple de formule echivalente.
  - Exemple de formule care sunt echivalente într-o structura S dată, dar nu sunt echivalente în general.
  - Putem da exemple de formule echivalente, dar care nu sunt echivalente într-o structură S dată?
- Forma normala prenex
  - Ce înseamnă că o formulă este în formă normală Prenex?
  - Care dintre următoarele formule sunt în formă normală Prenex:
    1. $\forall x.P(x,y) \lor \forall x.Q(x)$
    2. $\forall x.\forall y.\neg(P(x,y) \to Q(y))$
    3. $\forall x.\exists y.P(x,y)$
    4. $P(x,y)$
    5. $\neg\forall x.P(x,y)$
  - Pentru o formulă oarecare, putem găsi o formulă *corespunzătoare* în formă normală Prenex? Care este relația dintre aceste două formule?
  - Enunțați Lema Redenumirii.
  - Cum găsim o formă normală Prenex pentru o formulă φ dată?
  - Puneți formulele următoate în formă normală Prenex:
    1. $\exists x.\forall y.(Q(x) \lor \exists z.R(x,y,z))$
    2. $\exists x.P(x,y) \lor \forall y.Q(y)$
    3. $\forall x.\exists y.P(x,y) \leftrightarrow \exists x.\forall y.\exists z.R(x,y,z)$
    4. $\neg(\forall x.\exists y.R(z,x,y) \to \exists x.(\neg\forall y.P(y,z) \to Q(x)))$
    5. $\forall x.(\exists y.P(x,y) \land (\forall y.\neg P(x,y)) \to \neg(\exists x.R(x,y,z) \land Q(x)))$
- Formule închise:

– Ce înseamnă că două formule sunt echisatisfiabile?
– Când spunem că o formulă este închisă?
– Cum construim închiderea existențială a unei formule?
– Care este relația dintre o formulă φ și închiderea sa existențială?
– Cum construim închiderea universală a unei formule?
– Care este relația dintre o formulă φ și închiderea sa universală?

- Forma normala Skolem:
  – Ce înseamnă că o formulă este în Forma Normala Skolem?
  – Care dintre următoarele formule sunt în Forma Normala Skolem:
    1. $\forall x.P(x, y) \lor \forall x.Q(x)$
    2. $\forall x.\forall y.\neg(P(x, y) \to Q(y))$
    3. $\exists x.(Q(x) \land P(x, y))$
    4. $\forall x.(Q(x) \lor \exists y.(Q(y) \land P(x, i(y))$
    5. $\exists x.Q(x) \land \exists y.Q(y)$
    6. $\forall x.\exists y.(Q(x) \to (Q(y) \land P(x, i(y)))$
  – Enunțați teorema de aducere în Formă Normală Skolem.
  – Care este relația dintre o formulă și formula corespunzătoare aflată în FNS?
  – Cum procedăm pentru a aduce o formulă dată în Formă Normală Skolem?
  – Aduceți urmatoare formule în FNS:
    1. $\forall x.(Q(x) \land P(x, y))$
    2. $\forall x.Q(x) \land \exists y.Q(y)$
    3. $\forall x.P(x, y) \lor \forall x.Q(x)$
    4. $\forall x.\exists y.P(x, y) \leftrightarrow \exists x.\forall y.\exists z.R(x, y, z)$
    5. $\neg(\forall x.\exists y.R(z, x, y) \to \exists x.(\neg\forall y.P(y, z) \to Q(x)))$
    6. $\forall x.(\exists y.P(x, y) \land (\forall y.\neg P(x, y)) \to \neg(\exists x.R(x, y, z) \land Q(x)))$

- Rezoluția de bază
  – Ce este rezoluția de bază?
  – Pentru ce este folosită rezoluția de bază?
  – Demonstrati folosind rezolutia de baza ca urmatoarele formule aflate in FNSC sunt nesatisfiabile:
    1. $\forall x.P(x, e) \land \neg P(e, x)$
    2. $\forall x.\forall y.\neg P(x, i(x)) \land P(i(e), i(e))$
    3. $\forall x.\forall y.(P(x, i(y)) \lor \neg Q(x)) \land \neg P(f(x, y), x) \land Q(y)$
    4. $\forall x.\forall y.(P(x, y) \lor Q(x) \lor \neg Q(y)) \land \neg Q(i(y)) \land Q(f(x, y)) \land \neg P(i(x), y)$
    5. $\forall x.\forall y.R(x, y, z) \land (\neg R(i(z), e, i(i(e))) \lor Q(x)) \land \neg Q(f(y, i(e))$
  – Demonstrati folosind rezolutia de baza ca urmatoarele formule sunt valide:
    1. $(\forall x.P(x, i(x))) \to P(x, i(y))$
    2. $(\forall x.Q(x)) \to \exists x.Q(x)$
    3. $(\forall x.\neg Q(x)) \to \neg\exists x.Q(x)$
    4. $((P(e, e) \land Q(a) \to \forall x.P(x, x)) \land P(e, e) \land Q(a)) \to \forall x.P(x, x)$
    5. $(\forall x.(P(x, i(e)) \land Q(x))) \to P(f(x, i(z)), i(e))$
    6. $\big(\neg\exists x.Q(x)\big) \leftrightarrow \big(\forall x.\neg Q(x)\big)$;
    7. $\big(\exists y.\forall x.P(x, y)\big) \to \big(\forall x.\exists y.P(x, y)\big)$;

- Rezoluția de ordinul I
  - Ce este rezoluția de ordinul I?
  - Pentru ce este folosită rezoluția de ordinul I?
  - Demonstrati folosind rezolutia de ordinul I ca urmatoarele formule aflate in FNSC sunt nesatisfiabile:
    1. $\forall x.P(x,e) \wedge \neg P(e,x)$
    2. $\forall x.\forall y.\neg P(x,i(x)) \wedge P(i(e),i(e))$
    3. $\forall x.\forall y.(P(x,i(y)) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg P(f(x,y),x) \wedge Q(y)$
    4. $\forall x.\forall y.(P(x,y) \vee Q(x) \vee \neg Q(y)) \wedge \neg Q(i(y)) \wedge Q(f(x,y)) \wedge \neg P(i(x),y)$
    5. $\forall x.\forall y.R(x,y,z) \wedge (\neg R(i(z),e,i(i(e))) \vee Q(x)) \wedge \neg Q(f(y,i(e))$
  - Demonstrati folosind rezolutia de ordinul I ca urmatoarele formule sunt valide:
    1. $(\forall x.P(x,i(x))) \rightarrow P(x,i(y))$
    2. $(\forall x.Q(x)) \rightarrow \exists x.Q(x)$
    3. $(\forall x.\neg Q(x)) \rightarrow \neg\exists x.Q(x)$
    4. $((P(e,e) \wedge Q(a) \rightarrow \forall x.P(x,x)) \wedge P(e,e) \wedge Q(a)) \rightarrow \forall x.P(x,x)$
    5. $(\forall x.(P(x,i(e)) \wedge Q(x))) \rightarrow P(f(x,i(z)),i(e))$
    6. $\big(\neg\exists x.Q(x)\big) \leftrightarrow \big(\forall x.\neg Q(x)\big)$;
    7. $\big(\exists y.\forall x.P(x,y)\big) \rightarrow \big(\forall x.\exists y.P(x,y)\big)$;