Probabilităţi şi statistică - Curs 5

Martie, 2018

Definition 1

Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete ca mai sus, care admit medie fiecare.

(i) **Covarianţa** *celor două variabile (dacă există) este definită prin*

$$cov[X, Y] = M\left[(X - M[X])\,(Y - M[Y])\right] =$$

$$= \sum_{i,j} (x_i - M[X])\,(y_j - M[Y])\,P\{X = x_i \cap Y = y_j\}.$$

(ii) **Corelaţia** *sau* **coeficientul de corelaţie** *a celor două variabile (dacă au dispersii nenule) este*

$$\rho(X, Y) = \frac{cov[X, Y]}{D[X]D[Y]}.$$

Exemplu. Se dau două urne: U_1 care conţine două bile albe, două negre şi trei bile roşii şi U_2 care conţine trei bile albe, două negre şi o bilă roşie. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de-a doua urnă, iar apoi se extrage o bilă din cea de a doua urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obţinute şi cu Y numărul de bile negre obţinute.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(b) Să se determine repartiţia şi apoi media variabilei XY.

(c) Să se determine covarianţa şi corelaţia celor două variabile.

Soluţie: Observăm că variabilele X şi Y sunt dependente: sunt legate prin relaţia $X + Y \leqslant 2$. Notăm cu A_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este albă", cu B_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este neagră" şi cu C_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este roşie" $(i = \overline{1,2})$.

		X			
		0	1	2	
	0	6/49	11/49	8/49	25/49
Y	1	?	?	0	?
	2	?	0	0	?
		?	?	8/49	

Proposition 1

Fie X şi Y două variabile aleatoare discrete care admit medie. Atunci

(i) $cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y]$.

(ii) $D^2[X + Y] = D^2[X] + 2cov[X, Y] + D^2[Y]$.

(iii) $-1 \leqslant \rho[X, Y] = \rho[Y, X] \leqslant 1$ *şi* $\rho[X, X] = 1$ *(i. e.,* $cov[X, X] = D^2[X]$*).*

(iv) *(exerciţiu)* $\rho[aX + b, Y] = \rho[X, Y]$, *dacă* $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

(v) $cov[aX + bY + c, Z] = a \cdot cov[X, Z] + b \cdot cov[Y, Z]$, *pentru* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(vi) *(exerciţiu)* $cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov[X_i, Y_j]$.

dem.: Vom considera doar cazul în care variabilele sunt amândouă finite. Pentru relaţia (i)

$$cov[X,Y] = M\left[(X - M[X])(Y - M[Y])\right] =$$

$$= M\left[XY - M[Y]X - M[X]Y + M[X]M[Y]\right] =$$

$$= M[XY] - 2M[X]M[Y] + M[X]M[Y] = M[XY] - M[X]M[Y].$$

Pentru cea de-a doua relaţie

$$D^2[X+Y] = M\left[(X+Y)^2\right] - M^2[X+Y] =$$

$$= M\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - \left(M^2[X] + 2M[X]M[Y] + M^2[Y]\right) =$$

$$= \left(M\left[X^2\right] - M^2[X]\right) + 2\left(M[XY] - M[X]M[Y]\right) +$$

$$+ \left(M\left[Y^2\right] - M^2[Y]\right) = D^2[X] + 2cov[X,Y] + D^2[Y].$$

În continuare, pentru (iii), deoarece $0 \leqslant D^2[tX+Y] = t^2 D^2[X] + 2t \cdot cov[X,Y] + D^2[Y]$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, trebuie ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul doi să fie mai mic sau egal cu zero:

$$\Delta = 4cov^2[X,Y] - 4D^2[X]D^2[Y] \leqslant 0 \Leftrightarrow |cov[X,Y]| \leqslant D[X]D[Y].$$

Apoi, $cov[X,X] = \dfrac{1}{2}\Big(D^2[2X] - 2D^2[X]\Big) = D^2[X]$.

Proprietatea (v):

$$cov[aX+bY+c, Z] = M[aXZ+bYZ+cZ] - M[aX+bY+c]M[Z] =$$

$$= aM[XZ] + bM[YZ] + cM[Z] - (aM[X] + bM[Y] + c)M[Z]. \blacksquare$$

Exemplu. Fie X_1, Y_1 şi X_2, Y_2 două perechi de variabile aleatoare având următoarele tablouri de repartiţie comună:

Y_1 \ X_1	1	2	
2	1/4	1/4	1/2
4	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

Y_2 \ X_2	1	2	
2	1/2	0	1/2
4	0	1/2	1/2
	1/2	1/2	

Arătaţi că $\rho[X_1, Y_1] \neq \rho[X_2, Y_2]$ şi $cov[X_1, Y_1] \neq cov[X_2, Y_2]$.

Soluţie: Deoarece, după cum se observă din tablourile de mai sus, X_1 şi X_2 (Y_1 şi Y_2) au aceeaşi repartiţie, $D[X_1] = D[X_2]$ şi $D[Y_1] = D[Y_2]$, va fi deci suficient să arătăm: $cov[X_1, Y_1] \neq cov[X_2, Y_2]$.

$$M[X_1] = M[X_2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, M[Y_1] = M[Y_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Determinăm media variabilei $X_1 Y_1$ şi apoi covarianţa variabilelor X_1 şi Y_1:

$$X_1 Y_1 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow M[X_1 Y_1] = 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{2},$$

$$cov[X_1, Y_1] = M[X_1 Y_1] - M[X_1] M[Y_1] = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0.$$

Apoi determinăm media variabilei $X_2 Y_2$ şi covarianţa variabilelor X_2 şi Y_2:

$$X_2 Y_2 : \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M[X_2 Y_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 5,$$

de unde

$$cov[X_2, Y_2] = M[X_2 Y_2] - M[X_2] M[Y_2] = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}. \clubsuit$$

Definition 2

Două variabile aleatoare X şi Y se numesc **independente** *dacă, pentru orice două mulţimi de valori A şi B, a lui X, respectiv Y, avem*

$$P\{(X \in A) \cap (Y \in B)\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}.$$

Deoarece $P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot q_j$, în acest caz, repartiţia comună poate fi calculată mai simplu: $r_{ij} = p_i q_j$.

Theorem 2.1

Fie X şi Y variabile aleatoare discrete independente. Atunci:

(i) $M[XY] = M[X]M[Y]$.

(ii) $D^2[X + Y] = D^2[X] + D^2[Y]$.

(iii) $cov[X, Y] = 0$.

dem.: Vom considera, ca şi mai sus, doar cazul în care variabilele sunt amândouă finite. Pentru (i):

$$M[XY] = \sum_z zP\{XY = z\} = \sum_z z \cdot \left(\sum_{z = x_i y_j} P\{X = x_i \cap Y = y_j\} \right) =$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = \sum_{i,j} x_i y_j P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} =$$

$$= \left(\sum_i x_i P\{X = x_i\} \right) \cdot \left(\sum_j y_j P\{Y = y_j\} \right) = M[X]M[Y].$$

Din această relaţie rezultă, în particular, (iii): $cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y] = 0$.

Pentru (ii) folosim Propoziţia 1 sau procedăm direct:

$$D^2[X+Y] = M\left[(X+Y)^2\right] - (M[X+Y])^2 =$$

$$= M\left[X^2 + 2XY + Y^2\right] - (M[X] + M[Y])^2 =$$

$$= M\left[X^2\right] + 2M[XY] + M\left[Y^2\right] - M^2[X] - 2M[X]M[Y] - M^2[Y] =$$

$$= M\left[X^2\right] - M^2[X] + M\left[Y^2\right] - M^2[Y] = D^2[X] + D^2[Y]. \blacksquare$$

Exemplu. Se aruncă două zaruri. Să se determine media produsului şi dispersia sumei.

Soluţie: Fie X_1 şi X_2 rezultatele de pe cele două zaruri. Aceste două variabile sunt independente (dar şi identic repartizate), deci

$$M[X_1X_2] = M[X_1]M[X_2] = \frac{49}{4} \text{ şi } D^2[X_1+X_2] = D^2[X_1]+D^2[X_2].\clubsuit$$

- Rezultatele din această secţiune ne ajută să determinăm majoranţi şi minoranţi pentru probabilităţile care implică o variabilă aleatoare, în cazul în care se cunosc media sau media şi dispersia acesteia.

Theorem 2.1

(Inegalitatea lui Markov.) *Fie* $X \geqslant 0$ *o variabilă aleatoare cu media* $M[X] = \mu$. *Atunci*

$$P\{X \geqslant t\} \leqslant \frac{\mu}{t}, \forall t > 0.$$

proof: în cazul în care variabila X este discretă şi repartiţia ei este

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

unde $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$. Să presupunem că $t \in (x_{k-1}, x_k]$ $(x_0 = -\infty)$, atunci

$$\mu = M[X] = \sum_i p_i x_i \geqslant \sum_{i \geqslant k} p_i x_i \geqslant t \sum_{i \geqslant k} p_i = t \cdot P\{X \geqslant t\}.$$

■

Proposition 2

Egalitatea are loc în inegalitatea lui Markov dacă şi numai dacă

$$P\{X=0\}+P\{X=t\}=1.$$

proof: Dacă reluăm şirul de inegalităţi din demonstraţia Teoremei ??, transformându-le în egalităţi, obţinem

$$p_i x_i = 0, \forall i < k \text{ şi } p_i x_i = p_i t, \forall t \geqslant k.$$

Deoarece în tabloul de repartiţie considerăm doar valori posibile ale variabilei (i. e., $p_i > 0$, $\forall i$), urmează că

X are doar două valori $x_1 = 0$ şi $x_2 = t$ sau are o singură valoare$X \equiv$

■

Exemplu. Fie $X \geqslant 0$ o variabilă aleatoare cu $M[X] = 1$. Să se majoreze probabilităţile

$$P\{X \geqslant 2\}, P\{X \geqslant 4\} \text{ şi } P\{X \geqslant 2^k\}.$$

Soluţie: Conform inegalităţii lui Markov

$$P\{X \geqslant 2\} \leqslant \frac{M[X]}{2} = \frac{1}{2}, P\{X \geqslant 4\} \leqslant \frac{M[X]}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X \geqslant 2^k\} \leqslant \frac{M[X]}{2^k} = \frac{1}{2^k} \clubsuit$$

Observaţie. Probabilitatea ca o variabilă $X \geqslant 0$ cu medie finită, să aibă valori mai mari sau egale decât un număr t, foarte mare, devine foarte mică pe măsură ce t creşte.

Theorem 2.2
(**Inegalitatea lui Cebâşev.**) *Fie X o variabilă aleatoare cu media $M[X] = \mu$ şi dispersia $D^2[X] = \sigma^2$. Atunci*

$$P\{|X-\mu| \geqslant t\} \leqslant \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$

proof:
Considerăm variabila $Y = (X-\mu)^2$ care are $M[Y] = D^2[X]$, conform inegalităţii lui Markov,

$$P\{|X-\mu| \geqslant t\} = P\left\{(X-\mu)^2 \geqslant t^2\right\} \leqslant \frac{M[Y]}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$

■

- O posibilă interpretare a acestei inegalităţi este următoarea: dacă o variabilă are o dispersie mică, atunci probabilitatea ca această variabilă să ia valori departe de medie este scăzută.
- Următoarea consecinţă a inegalităţii lui Cebâşev spune că probabilitatea ca o variabilă să ia o valoare depărtată de medie la cel puţin k deviaţii standard este cel mult $\frac{1}{k^2}$.
- În acest sens se poate spune că deviaţia standard este o măsură împrăştierii valorilor variabilei în jurul mediei.

Corollary 2.1

Fie X o variabilă cu media $M[X] = \mu$ şi dispersia $D^2[X] = \sigma^2 > 0$.

$$P\{|X-\mu| \geqslant k\sigma\} \leqslant \frac{1}{k^2}, \forall k > 0.$$

Proposition 3

Egalitatea are loc în inegalitatea lui Cebâşev dacă şi numai dacă

$$P\{X = \mu - t\} + P\{X = \mu\} + P\{X = \mu + t\} = 1.$$

proof: Inegalitatea lui Cebâşev se bazează pe cea a lui Markov, deci vom avea egalitate dacă şi numai dacă $P\{Y = 0\} + P\{Y = t^2\} = 1$.

$$P\{Y = 0\} = P\{(X-\mu)^2 = 0\} = P\{X = \mu\}, \text{ iar}$$

$$P\{Y = t^2\} = P\{(X-\mu)^2 = t^2 = P\{|X-\mu| = t\} =$$

Exemplu. Fie X o variabilă aleatoare cu $M[X] = 1$ şi $D^2[X] = 4$. Să se majoreze probabilităţile

$$P\{X \geqslant 3\}, P\{|X-1| \geqslant 6\} \text{ şi } P\{X \leqslant -9\}.$$

Soluţie: Conform inegalităţii lui Cebâşev

$$P\{X \geqslant 3\} \leqslant P\{|X-1| \geqslant 2\} \leqslant \frac{D^2[X]}{2^2} = 1,$$

$$P\{|X-1| \geqslant 6\} \leqslant \frac{4}{9},$$

$$P\{X \leqslant -9\} \leqslant P\{|X-1| \geqslant 10\} \leqslant \frac{1}{25} \clubsuit$$

Theorem 3.1

Fie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ variabile independente, repartizate Bernoulli fiecare cu parametrul p_i. Dacă notăm $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = M[X]$, atunci

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} < \left[\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{\mu} \text{ (upper tail), } \forall \delta > 0 \text{ şi}$$

$$P\{X < (1-\delta)\mu\} < \left[\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right]^{\mu} \text{ (lower tail), } \forall \delta \in [0,1).$$

- Prima dintre inegalităţile de mai sus arată că suma unui număr finit de variabile Bernoulli independente scade exponenţial pe măsură ce ne depărtăm (către dreapta) de media acestei sume:

$$\lim_{\delta \to +\infty} \left[\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right]^{\mu} = 0.$$

- Ambele inegalităţi de mai sus au forme mai simple după cum vom vedea mai jos.

Corollary 3.1

Fie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *variabile independente, repartizate Bernoulli fiecare cu parametrul* p_i. *Dacă notăm* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mu = M[X]$, *atunci*

$$P\{X > (1 \pm \delta)\mu\} < \exp\left(\frac{-\delta^2\mu}{2+\delta}\right), \forall \delta \geqslant 0.$$

Aplicaţie. Se aruncă de n ori o monedă şi fie X_i o variabilă egală cu 1 dacă apare stema la a i-a aruncare şi 0 altfel. $X = \sum_{i=1} X_i$ numără de câte ori apare stema în cele n aruncări. Ştim că

$$M[X_i] = p_i = \frac{1}{2}, D^2[X_i] = p_i(1-p_i) = \frac{1}{4},$$

$$\mu = M[X] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{n}{2} \text{ şi } \sigma^2 = D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} D^2[X_i] = \frac{n}{4}.$$

(Aceasta este o altă metodă de a calcula caracteristicile unei variabile binomiale.)

Folosind inegalitatea lui Chernoff putem evalua probabilitatea ca variabila X să fie mai mare decât media astfel

$$P\{X > \mu + \lambda\} = P\left\{X > \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)\mu\right\} < exp\left(\frac{-\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\right).$$

Vom utiliza acum şi inegalităţile lui Markov şi Cebâşev:

$$P\{X \geqslant \mu + \lambda\} \leqslant \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{n}{n + 2\lambda} \text{ (Markov)},$$

$$P\{X \geqslant \mu + \lambda\} \leqslant P\{|X - \mu| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{\sigma^2}{\lambda^2} = \frac{n}{4\lambda^2} \text{ (Cebâşev)}.$$

$$P\{X > \mu + \lambda\} < \exp\left(\frac{-\lambda^2}{\lambda + n}\right) \text{ (Chernoff)}.$$

Se observă că inegalitatea lui Markov este mai slabă decât aceea a lui Cebâşev, iar aceasta este mai slabă decât cea a lui Chernoff. Pe de altă parte însă, inegalitatea lui Markov (ca şi cea a lui Cebâşev) nu necesită independenţa celor n variabile aleatoare; în al doilea caz însă, independenţa poate uşura calculul dispersiei lui X.

Theorem 4.1

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *variabile aleatoare independente mărginite:* $a_i \leqslant X_i \leqslant b_i$, $a_i \neq b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ *şi* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Atunci*

$$P\{X - M[X] \geqslant \pm\delta\} \leqslant \exp\left(-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right), \forall\delta \geqslant 0.$$

Corollary 4.1

În condiţiile teoremei avem

$$P\{|X - M[X]| \geqslant \delta\} \leqslant 2\exp\left(-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right), \forall\delta \geqslant 0.$$

- **Repartiţii comune:** II.3, II.6, II.9, II.11, II.12, II.14
- **Inegalităţile lui Markov şi Cebâşev:** III.2, III.6, III.7, III.8, III.9
- **Rezervă:** II.7, II.8, II.10, III.1, III.10

I.1. Demonstraţi că (X, Y şi Z sunt variabile aleatoare)

(a) $cov[aX+bY+c, Z] = a\cdot cov[X,Z]+b\cdot cov[Y,Z], \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

(b) $cov\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov[X_i, Y_j]$, pentru orice variabile aleatoare $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ şi $(Y_i)_{1\leqslant j\leqslant m}$ (inducţie).

(c) $D^2\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D^2[X_i] + 2\sum_{i<j} cov[X_i, X_j]$, pentru orice variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

I.2*. Daţi exemplu de o pereche de variabile care nu sunt independente dar au covarianţa nulă

II.1. Să presupunem că X şi Y au următoarea repartiţie comună

		Y		
		-3	2	4
X	1	0.2	?	0.2
	3	0.3	0.05	0.05

(a) Determinaţi repartiţiile individuale ale variabilelor X şi Y.

(b) Calculaţi $cov[X, Y]$ şi $\rho[X, Y]$.

(c) Sunt X şi Y independente?

II.2. O monedă este aruncată de trei ori. Fie X o variabilă egală cu 1 dacă apare stema şi 0 dacă apare banul la prima aruncare, iar Y o variabilă egală cu numărul de apariţii ale stemei. Determinaţi:

(a) Repartiţia comună acelor două variabile.

(b) Repartiţiile individuale ale lui X şi Y şi covarianţa lor.

II.3. Fie X o variabilă aleatoare cu următoarea distribuţie şi $Y = X^2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Determinaţi

(a) Repartiţia lui Y şi repartiţia comună acelor două variabile.

(b) Covarianţa şi corelaţia celor două variabile.

II.4. Fie X şi Y două variabile aleatoare independente cu următoarele distribuţii

$$X : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \; Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinaţi repartiţia comună a celor două variabile şi covarianţa lor.

(b) Determinaţi repartiţia şi media variabilei $X + Y$.

II.5. Într-o urnă sunt trei bile roşii şi cinci bile negre. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu o bilă de culoare diferită. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile roşii şi cu Y numărul de bile negre extrase.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(b) Variabilele X şi Y sunt independente?

II.6. Într-o urnă sunt patru bile albe (două numerotate cu 1 şi două numerotate cu 2) şi trei bile negre (două numerotate cu 1 şi una numerotată cu 2). Din urnă se extrag succesiv şi fără întoarcere două bile. Fie X numărul de bile albe obţinute şi Y numărul de bile numerotate cu 2.

(a) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(b) Variabilele X şi Y sunt independente?

II.7. O monedă se aruncă de trei ori. Se notează cu X numărul de steme care apar la primele două aruncări şi cu Y numărul de steme care apar la ultima aruncare. Să se determine

(a) repartiţiile variabilelor X şi Y.

(b) repartiţia comună a variabilelor X şi Y. (Sunt X şi Y independente?)

(c) repartiţia variabilei $X + Y$.

II.8. Variabilele X şi Y au repartiţia comună dată mai jos.

		X			
		-1	1	2	3
Y	-1	0	$1/36$	$1/6$	$1/12$
	0	$1/18$	0	$1/18$	0
	1	0	$1/36$	$1/6$	$1/12$
	2	$1/12$	0	$1/12$	$?$

(a) Să se calculeze $P(X \geqslant 2 \text{ şi } Y \leqslant 0)$.

(b) Sunt variabilele X şi Y independente?

(c) Să se determine repartiţia variabilei $X + Y$.

II.9. Se aruncă două monede A şi B de trei ori; moneda B este falsificată: probabilitatea de a apărea stema este 0.4. Fie X variabila care numără de câte ori apare stema pe moneda A şi Y cea care numără de câte ori apare stema pe moneda B.

(a) Sunt variabilele X şi Y independente?

(b) Să se determine repartiţia comună a variabilelor X şi Y.

(c) Să se calculeze probabilităţile $P(X = Y)$, $P(X > Y)$ şi $P(X + Y \geqslant 4)$.

II.10. Repartiţia comună a două variabile X şi Y este dată prin

$$p(X = x_i \cap Y = y_j) = \begin{cases} kx_i y_j, & x_i = \overline{1,2}, y_j = \overline{1,3} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}, \text{ unde } k \in \mathbb{R}.$$

(a) Să se determine k.

(b) Să se determine repartiţiile celor două variabile X şi Y.

(c) Sunt variabilele X şi Y independente?

II.11. Într-un meci de tenis dintre doi jucători P_1 şi P_2, învinge cel care câştigă primul două seturi. P_1 câştigă fiecare set, independent, cu probabilitatea $1/3$. Notăm cu X numărul de seturi jucate de P_1 până la sfârşitul meciului şi cu Y numărul de seturi câştigate de P_2. Să se determine

(a) repartiţia comună a celor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

II.12. Probabilitatea de a apărea stema la aruncarea unei monezi este $1/3$. Moneda este aruncată de trei ori. Se notează cu X numărul de apariţii ale banului şi cu Y numărul maxim de apariţii consecutive ale stemei. Să se determine

(a) repartiţia comună acelor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

II.13. Un zar este aruncată de trei ori. X este variabila care notează de câte ori apare un număr par, iar Y notează de câte ori apare un număr prim. Să se determine

(a) repartiţia comună acelor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

II.14. Într-o urnă sunt 5 bile albe şi 4 bile roşii. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu o bilă de culoare opusă. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile albe şi cu Y numărul de bile roşii extrase. Să se determine

(a) repartiţia comună acelor două variabile; prin ce relaţie sunt legate cele două variabile?

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

II.15. Într-o urnă sunt 3 bile negre şi 5 bile verzi. Se extrage o bilă din urnă şi, dacă bila este neagră, ea este pusă la locîmpreună cu o bilă verde, iar dacă este verde se înlocuieşte cu două bile de culoare neagră. Apoi se extrage încă o bilă. Fie X numărul de bile negre şi Y numărul de bile verzi extrase. Determinaţi

(a) repartiţia comună a celor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; X şi Y sunt independente?

II.16. Se dau două urne: una conţine 2 bile albe şi 2 bile negre, iar cealaltă o bilă albă şi 2 bile negre. Se aruncă un zar, dacă apare un multiplu de 3, se extrage o bilă din prima urnă, altfel, se extrage o bilă din a doua urnă. Fie X numărul de bile albe rămase în prima urnă şi Y numărul de bile negre din a doua urnă. Să se determine

(a) repartiţia comună a celor două variabile;

(b) covarianţa celor două variabile; X şi Y sunt independente?

II.17. Într-o urnă sunt 4 bile albe şi 5 bile negre. Se extrage din urnă o bilă şi se procedează astfel: dacă bila este albă ea este pusă la loc în urnă, iar dacă este neagră se înlocuieşte cu o bilă de culoare albă. Apoi se extrage încă o bilă. Fie X numărul de bile albe şi Y numărul de bile negre extrase. Să se determine

(a) repartiţia comună a celor două variabile; prin ce relaţie sunt legate cele două variabile?

(b) covarianţa celor două variabile; sunt cele două variabile independente?

II.18. Într-o urnă sunt 3 bile roşii şi 4 bile negre. Se extrage din urnă o bilă şi se înlocuieşte cu două bile de culoare opusă. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile roşii extrase şi cu Y numărul de bile negre rămase în urnă. Determinaţi

(a) repartiţia comună a celor două variabile;

(b) covarianţa lui X cu Y; sunt X şi Y independente?

III.1. O variabilă aleatoare $X \geqslant 0$ are media şi dispersia egale amândouă cu 20. Folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev ce se poate spune despre probabilitatea $P\{X \geqslant 40\}$? Dar despre $P\{-60 \leqslant X \leqslant 100\}$?

III.2. Se dă o variabilă aleatoare $X \geqslant 0$ cu $M[X] = D^2[X] = 1$. Majoraţi sau minoraţi, corespunzător, folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev, următoarele probabilităţi:

$$P\{X \geqslant 2\}, P\{|X-1| \geqslant 2\}, P\{X \leqslant -3\}$$

III.3. O variabilă aleatoare $X \geqslant 0$ are $M[X] = D^2[X] = 2$. Folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev ce se poate spune despre probabilitatea $P\{X \geqslant 8\}$? Dar despre $P\{|X-2| \geqslant 8\}$?

III.4. Fie $X \geqslant 0$ variabilă aleatoare cu $M[X] = 2$ şi $D^2[X] = 1$. Folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev, ce se poate spune despre probabilităţile $P\{X \geqslant 6\}$ şi $P\{|X-1| \geqslant 5\}$?

III.5. O variabilă aleatoare $X \geqslant 0$ are $M[X] = 2$ şi $D^2[X] = 3$. Folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev ce se poate spune despre probabilitatea $P\{X \geqslant 8\}$? Dar despre $P\{|X - 2| \geqslant 4\}$?

III.6. Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare a unei monede falsificate este 0.3. Moneda este aruncată de 300 de ori. Majoraţi probabilitatea ca stema să apară de cel puţin 100 de ori.

III.7. Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare a unei monede falsificate este 0.2. Moneda este aruncată de n ori. Găsiţi un majorant pentru probabilitatea ca stema să apară în cel puţin 50% din cazuri.

III.8. Două monede sunt aruncate de 25 de ori. Probabilitatea de a apărea stema la o o aruncare este 0.25 pentru prima monedă şi 0.8 pentru cea de-a doua. Folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev, găsiţi câte un majorant pentru probabilitatea ca stema să apară simultan pe ambele monede de cel puţin 10 de ori.

III.9. Se aruncă două zaruri de 36 de ori. Folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev, găsiţi un majorant pentru probabilitatea ca produsul zarurilor să fie un număr prim de cel puţin 10 ori.

III.10. Două monede sunt aruncate de 32 de ori. Probabilitatea de a apărea stema la o o aruncare este 1/3 pentru prima monedă şi 3/4 pentru cea de-a doua. Folosind inegalităţile lui Markov şi Cebâşev, găsiţi câte un majorant pentru probabilitatea ca stema să apară simultan pe ambele monede de cel puţin 12 de ori.

III.11. Se aruncă o monedă de n ori. Fie X numărul de apariţii ale stemei. Găsiţi câte un majorant (cât mai mic) pentru

(a) $P\{|X - n/2| > \sqrt{n}\}$ şi $P\{X > n/2 + \sqrt{n}\}$;

(b) $P\{|X - n/2| > 5\sqrt{n}\}$ şi $P\{X > n/2 + 5\sqrt{n}\}$.

III.12. Fie X o variabilă repartizată a Poisson cu parametrul λ. Estimaţi probabilitatea ca X să devieze de la medie cu cel puţin $2\sqrt{\lambda}$.

III.13*. (Borel-Cantelli) Fie $(A_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de evenimente cu $\sum\limits_{n\geqslant 1} P(A_n) < +\infty$. Arătaţi că probabilitatea ca cel mult k dintre aceste evenimente să se producă este cel puţin

$$1 - \frac{\sum\limits_{n\geqslant 1} P(A_n)}{k}.$$

(*Indicaţie: Folosiţi inegalitatea lui Markov pentru o variabilă care numără câte din evenimente se realizează.*)

dem.: (pentru teorema 3.1) Fie $t > 0$, atunci, conform inegalităţii lui Markov, avem

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} = P\{e^{tX} > e^{t(1+\delta)\mu}\} < \frac{M\left[e^{tX}\right]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Folosind independenţa variabilelor

$$M\left[e^{tX}\right] = M\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] = M\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M\left[e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n}\left[p_i e^{t} + (1-p_i)\right],$$

Astfel

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} < \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[1 + p_i(e^{t}-1)\right]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Folosind inegalitatea $x+1 < e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, obţinem

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} < \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\exp\left(p_i(e^t-1)\right)\right]}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(e^t-1)\right)}{e^{t(1+\delta)\mu}},$$

deci

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} < \frac{\exp \mu(e^t-1)}{\exp t\mu(1+\delta)}, \forall t > 0.$$

Căutăm minimul funcţiei $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dată prin $f(t) = (e^t - 1)\mu - t\mu(1+\delta)$:

$$f'(t) = \mu(e^t - 1 - \delta), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \ln(1+\delta),$$

f este descrescătoare pe intervalul $(0, \ln(1+\delta)]$ şi crescătoare pe intervalul $[\ln(1+\delta), +\infty)$.

Astfel, obţinem, în final

$$P\{X > (1+\delta)\mu\} < \left[\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{\mu}.$$

O demonstraţie similară se poate face pentru cealaltă inegalitate din teoremă. ■

proof: (pentru corolarul 3.1) Putem rescrie majorantul din Teorema 3.1 astfel

$$\left[\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{\mu} = \left(\exp\left[\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta)\right]\right)^{\mu}.$$

Se poate arăta că $ln(1+\delta) > \dfrac{2\delta}{1+\delta}, \forall\delta > 0$, de unde

$$\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta) \leqslant \frac{-\delta^2\mu}{2+\delta}.$$

■

dem.: (pentru teorema 4.1) Este suficient să abordăm doar una dintre inegalităţi:

$$P\{X-M[X]\geqslant\delta\}=P\{e^{tX}\geqslant e^{t(\delta+M[X])}\}\overset{(Markov)}{\leqslant}\frac{M\left[e^{tX}\right]}{e^{t(\delta+M[X])}}\leqslant$$

$$\overset{(indep.)}{\leqslant}\exp\left[-t(M[X]+\delta)\right]\cdot\prod_{i=1}^{n}M\left[e^{tX_i}\right]=e^{-t\delta}\cdot\prod_{i=1}^{n}M\left[e^{tX_i}\right]e^{-tM[X_i]}.$$

Pentru a majora în continuare, studiem funcţia $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, dată prin $f(t)=e^t$:

$f'(t)=f''(t)=e^t>0,\forall t\in\mathbb{R}_+$, deci f este concavă pe $\mathbb{R}_+$, i. e.,

$$f\left[\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\right]\leqslant\lambda f(t_1)+(1-\lambda)f(t_2),\forall t_1,t_2\in\mathbb{R}_+,\lambda\in[0,1].$$

Deoarece $X_i \in [a_i, b_i]$, putem scrie $X_i = \lambda a_i + (1-\lambda) b_i$, unde $\lambda = \dfrac{X_i - a_i}{b_i - a_i} \in [0, 1]$. Astfel,

$$e^{tX_i} = exp[t\lambda a_i + t(1-\lambda) b_i] \leqslant \lambda e^{ta_i} + (1-\lambda) e^{tb_i} \text{ de unde}$$

$$M\left[e^{tX_i}\right] \leqslant M\left[\lambda e^{ta_i} + (1-\lambda) e^{tb_i}\right] = e^{ta_i} M\left[\frac{X_i - a_i}{b_i - a_i}\right] + e^{tb_i} M\left[\frac{b_i - X}{b_i - a}\right.$$

$$M\left[e^{t(X_i - M[X_i])}\right] \leqslant e^{-tM[X_i]}\left(e^{ta_i} \cdot \frac{M[X_i] - a_i}{b_i - a_i} + e^{tb_i} \cdot \frac{b_i - M[X_i]}{b_i - a_i}\right).$$

Vom arăta că expresia de mai sus este mai mică sau egală cu

$$\exp\left[\frac{t^2 (b_i - a_i)^2}{8}\right].$$

Pentru aceasta notăm $\theta = t(b_i - a_i)$ şi $\alpha = \dfrac{M[X_i] - a_i}{b_i - a_i}$, considerăm funcţia $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (obţinută prin logaritmarea expresiei de mai sus):

$$g(\theta) = -\theta\alpha + \ln\left(1 - \alpha + \alpha e^{\theta}\right) - \frac{\theta^2}{8}$$

şi arătăm că $g(\theta) \leqslant 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(\theta) = -\alpha - \frac{\theta}{4} + \frac{\alpha e^{\theta}}{(1-\alpha) + \alpha e^{\theta}} = -\alpha - \frac{\theta}{4} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha},$$

$$g''(\theta) = -\frac{1}{4} + \frac{\alpha(1-\alpha)e^{-\theta}}{\left[(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha\right]^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha} \cdot \frac{(1-\alpha)e^{-\theta}}{(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)e^{-\theta}+\alpha} + \frac{(1-\alpha)e^{-\theta}}{(1-\alpha)e^{-\theta}+\alpha}\right)^2 = 0$$

Conform formulei lui Taylor există un $\theta_0 \in [0, \theta]$, astfel în cât

$$g(\theta) = g(0) + g'(0)\frac{\theta}{1!} + g''(\theta_0)\frac{\theta_0^2}{2!} \leqslant 0.$$

Astfel

$$M\left[e^{t(X_i - M[X_i])}\right] \leqslant \exp\left[\frac{t^2(b_i - a_i)^2}{8}\right], \forall i$$

şi de aici

$$P\{X - M[X] \geqslant \delta\} \leqslant \exp\left[\frac{t^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 - t\delta\right], \forall t \geqslant 0.$$

Exponentul de mai sus este o funcţie de gradul doi în t, care-şi atinge minimul pentru $t = \dfrac{4\delta}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}$:

$$\exp\left[\frac{t^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 - t\delta\right] \geqslant \exp\left[-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right].$$

Bibliography

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Hoeffding, W., *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, J. of the Amer. Statistical Assoc. vol. 58, issue 301, pp. 13-30, 1963.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.