

Setul 9

de probleme și exerciții de matematică
(relative la limite de funcții și continuitatea funcțiilor)

S9.1 Prin folosirea exclusivă a unor limite fundamentale adecvate, să se calculeze:

a) $\lim_{x \nearrow 1} \frac{\sin(p \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, p \in \mathbb{R}^*;$

b) $\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1 + \sum_{k=1}^n \ln(1+kx)}{\sum_{k=1}^n n^{kx-1}} \right)^{\frac{1}{x}}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} \right), n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n};$

d) $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{4}} \left((\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}, \frac{\sin 4x}{\sqrt{\pi-4x}}, \frac{2^{\operatorname{ctg} x} - 2}{x - \frac{\pi}{4}}, \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right), \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos 2x} \right);$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+3x^2)}{x^2}, \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \frac{\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2} + x\right)^m}{e^{nx} - e^{mx}} \right), m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, m \neq n.$

S9.2 Să se studieze existența și, atunci când este cazul, să se facă determinarea limitelor iterate $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ și $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$, a limitelor parțiale $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$ și $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$, cât și a limitei globale $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, pentru funcțiile $f : A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ date mai jos:

a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|};$ b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{1 + x^2 y^2} - 1}{x^2 + y^2};$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2};$ d) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$

e) $f(x, y) = y^2 \ln(x^2 + y^2);$ f) $f(x, y) = \frac{e^{\frac{1}{x^2 + y^2}}}{x^6 + y^6}.$

S9.3 Să se arate că funcțiile următoare nu au limită globală în origine, deși au în acest punct limite parțiale, limite iterate și chiar limite în orice direcție admisă:

a) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$

b) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x = y\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \left(\frac{x+y}{x-y}, \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right);$

c) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y^2 = 2x\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x};$

d) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{x^2 y^2}{(x-y)^2 + x^2 y^2}, (1 + |xy|)^{\frac{2}{x^2+y^2}} \right)$.

S9.4 Să se determine următoarele limite:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}, \frac{\sin(x^3+y^3)}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \right);$

b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{1}{xyz} \operatorname{tg} \frac{xyz}{1+xyz}, (1+xyz)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} \right);$

c) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{1 - \cos(1 - \cos(x^2 + y^2 + z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^4}, \frac{x^2 y^2 z^2}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2} \right).$

S9.5 Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

a) $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, unde

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & , x \in [-1, 0) \\ p & , x = 0 \\ e^{\frac{1-\sqrt{1+x}}{x^2 e^x}} & , x > 0 \end{cases} \quad \text{și}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \in [-1, 0) \\ p & , x = 0 \\ \cos \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & , x > 0 \end{cases}, \text{ cu } p \in \mathbb{R}.$$

b) $f : A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)} & , (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\} \\ \alpha & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$, unde

$$f_1(x,y,z) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^p \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & , (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases},$$

$$f_2(x,y,z) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^p e^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}} & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}, \text{ cu } p \in \mathbb{R}.$$

S9.6 Să se determine mulțimea punctelor de discontinuitate pentru fiecare dintre funcțiile reale următoare:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y} e^{-|x|y^{-2}} & , y \neq 0 \\ 1 & , y = 0; \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & , x+y \neq 0 \\ 0 & , x+y = 0; \end{cases}$

$$c) \ f(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/3} \ln(x^2 + y^2 + z^2) & , (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 1/3 & , (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

S9.7 Să se arate că funcțiile reale de mai jos sunt parțial continue în origine sau chiar continue pe orice direcție, în câteva din cazuri, dar nu și global continue în respectivul punct:

$$a) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

$$b) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^6 + y^3} & , y \neq -x^2 \\ 0 & , y = -x^2; \end{cases}$$

$$c) \ f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(xy + yz + xz)}{\sqrt{(x^4 + y^2 + z^4)}} & , (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & , (x, y, z) = (0, 0, 0); \end{cases}$$

$$d) \ f(x, y) = \begin{cases} \min \left\{ \left| \frac{x}{y} \right|, \left| \frac{y}{x} \right| \right\} & , (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \\ 0 & , \text{în rest.} \end{cases}$$

S9.8 Să se stabilească care dintre următoarele funcții este uniform continuă pe mulțimea de definiție indicată:

$$a) \ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{x} \sin \frac{2}{x};$$

$$b) \ f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \ f(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 2}, \frac{\arcsin(x + 1)}{x + 1} \right);$$

$$c) \ f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \ f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2};$$

$$d) \ f : [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = (\sin x + \cos y, e^{-x} \operatorname{tg} y - 1).$$

S9.9

a) Să se arate că funcția $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definită prin $f(x) = (\cos x, \sin x)$ este continuă și că, în virtutea acestui fapt, mulțimea $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ este conexă.

b) Care dintre următoarele mulțimi este conexă și care nu?

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}; \quad A_2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q};$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ și } y \neq x + 1\}; \quad A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

S9.10

a) Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o aplicație bijectivă. Să se arate că f este homeomorfism între spațiile euclidiene \mathbb{R}^p și \mathbb{R}^q dacă și numai dacă, pentru orice mulțime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}^p$, are loc relația: $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

b) Să se arate că (\mathbb{R}, d_e) și (\mathbb{R}, d_d) , unde d_e desemnează metrica euclidiană, iar d_d metrica discretă, nu sunt homeomorfe.

S9.11 Să se calculeze următoarele limite:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^x - 27}{x - 3}, \frac{x \sin 3 - 3 \sin x}{x \sin x - 3 \sin 3}, \frac{3^x - x^3}{x - 3} \right);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}}, \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^x \right);$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left((x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2), (x-y) \operatorname{arctg} \frac{1}{2x^2 + 3y^2}, (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}} \right);$$

$$d) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2x - 3y}{z}, (x + y + z) \ln(1 + |xyz|) \right).$$

S9.12 Să se analizeze continuitatea funcțiilor:

$$a) f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (f_1(x), f_2(x)), \text{ unde}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} : x, & x \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{ctg} : x, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \text{și} \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 1 - \frac{\pi}{16}, & x \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{4x}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} ;$$

$$b) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)), \text{ unde}$$

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x^2 - y + 2}}{y^2 - 4}, & \text{când } 2 \neq y \leq x^2 + 2 \\ 2^{-3}, & \text{în rest} \end{cases} \quad \text{și}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^4 - y^2)^2}{x^6}, & \text{când } y^2 \leq x^4 \neq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} ;$$

$$c) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \alpha e^{x+y+z}, & \text{dacă } x + y + z < 0 \\ \beta & \text{dacă } x + y + z \geq 0 \end{cases} \quad \text{unde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

S9.13 Se pot prelungi, prin continuitate, la \mathbb{R}^2 , funcțiile date în continuare?

$$a) f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\frac{\ln(1 + x^2|y|)}{x^2 + y^2}, (1 + \sin(x^4 + y^4))^{\frac{1}{x^2 + y^2}} \right);$$

$$b) f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = \left(\frac{\sin(x^2 - y^2)}{|x| + |y|}, (|x| + |y|)^{x^2 + y^2}, \frac{xy}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}} \right).$$

S9.14 Sunt funcțiile de mai jos uniform continue pe \mathbb{R}^2 și respectiv \mathbb{R}^n ?

$$a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } (x, y) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \\ \frac{4}{\pi}(x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \\ 1, & \text{dacă } (x, y) \notin B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) \end{cases} ;$$

b) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\|x\|-1)(2-\|x\|)}}, & \text{dacă } \|x\| \in (1, 2) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

S9.15

a) Să se arate că mulțimea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \arctgt, y = \ln(1 + t^2), t \in [-1, 1]\}$ este compactă și conexă.

b) Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \left((|x| + |y| + |z|) \ln \left(1 + \frac{1}{|x| + |y| + |z|} \right), \sqrt{2 - (|x| + |y| + |z|)} \right), & (x, y, z) \in B \\ (0, \sqrt{2}), & (x, y, z) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \\ (\ln 2, 1), & (x, y, z) \in C \end{cases},$$

unde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, iar $C = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\}$.

De asemenea, fie $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2, x + y + z \leq 2\}$.

Să se arate că:

- i) mulțimea A este compactă și conexă;
- ii) $f|_A$ este uniform continuă;
- iii) $f(A)$ este compactă și conexă.

Bibliografie orientativă

1. C. Drăgușin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Editura Matrix Rom, București, 2006.
2. R. Gologan, A. Halanay ș. a. - *Probleme de examen. Analiză matematică*, Editura Matrix Rom, București, 2004.
3. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
4. D. Hajduković - *Some Problems About the Limit of a Real-Valued Function*, 2002.
5. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică. Exerciții și probleme*, Editura Matrix Rom, București, 2005.
6. A. Foster - *Limits and Continuity of Functions of Two or Three Variables. A Manual For Self-Study*, The City College of The City University of New York, New York, 2014.
7. D. R. Wilkins - *Analysis in Several Real Variables*, Michaelmas Term, 2016.