Cursul 10

Derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor. Derivate şi diferenţiale. Formule de calcul diferenţial.

Printre conceptele fundamentale ale matematicii, implicate fie în stabilirea vitezei de variaţie a stării unor procese din realitatea fizică, fie în problema exprimării (aproximării) locale a unor funcţii neliniare prin aplicaţii liniare, fie în chestiuni geometrice de tangenţă, se numără şi cele relative la derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor, între care se disting noţiunile de derivată şi diferenţială. Reamintind aceste concepte în cazul funcţiilor reale scalar-scalare, prezentăm aici şi corespondentele lor privitoare la funcţii de argument vectorial, cu valori scalare sau vectoriale.

Pentru început, relativ la funcţii reale de o singură variabilă şi cu valori scalare, menţionăm următoarea definiţie:

Definiţia 10.1 *a) Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. De asemenea, fie $x_0 \in A \cap A'$ (în raport cu topologia uzuală pe $\mathbb{R}$). Funcţia f se numeşte* ***derivabilă în*** *x_0 dacă există şi este din $\mathbb{R}$ (nu din $\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$)*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Această limită, notată cu $f'(x_0)$, poartă denumirea de ***derivată a lui*** *f* ***în*** *x_0. În loc de $f'(x_0)$, se mai foloseşte notaţia $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.*

Dacă f este derivabilă în orice punct al unei mulţimi $\varnothing \neq \widetilde{A} \subseteq A$, spunem că f este derivabilă pe $\widetilde{A}$.

b) Fie $\varnothing \neq A_1 \subseteq A$ mulţimea punctelor în care $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă. Funcţia $x \longrightarrow f'(x)$, $x \in A_1$ se numeşte ***derivata lui*** *f şi se notează, firesc, cu f' (sau $\dfrac{df}{dx}$).*

c) Când x_0 este punct interior sau cel mai mare (respectiv cel mai mic) element al mulţimii nevide $A \subseteq \mathbb{R}$, se defineşte ***derivata la stânga*** *(respectiv* ***la dreapta****)* ***a funcţiei*** *$f : A \to \mathbb{R}$* ***în punctul*** *x_0 ca fiind, ori de câte ori există, limita $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (respectiv $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$), notată cu $f'_s(x_0)$ (respectiv $f'_d(x_0)$). Dacă există atât $f'_s(x_0)$, cât şi $f'_d(x_0)$, iar $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$, se spune că f are* ***derivată în*** *x_0.*

Observaţii:

i) O funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă derivatele sale laterale (la stânga şi la dreapta) în x_0, adică $f'_s(x_0)$ şi $f'_d(x_0)$ există, sunt finite şi egale între ele. Atunci: $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$.

ii) Spre eliminarea oricărei ambiguităţi de terminologie care s-ar putea produce în raport cu noţiunea de derivată parţială din cazul funcţiilor de argument vectorial, elementele introduse prin Definiţia 10.1 se însoţesc, adeseori, de epitetul "*ordinar*".

Definiţia 10.2 *Spunem că o funcţie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este* ***de clasă*** *$\mathcal{C}^1(A)$ dacă f este derivabilă pe A şi are derivata f' continuă pe A.*

Observaţie: Când $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este doar continuă pe A, spunem că $f \in \mathcal{C}^0(A)$. Pentru simplitate, în dese rânduri, în locul notaţiei $\mathcal{C}^0(A)$, se foloseşte notaţia $\mathcal{C}(A)$.

Propoziţia 10.1 *Are loc relaţia $\mathcal{C}^1(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Cu alte cuvinte, orice funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ care este derivabilă pe A este şi continuă pe A. Nu şi reciproc.*

Demonstraţie: Prin ipoteză, pentru orice $x_0 \in A$, există şi este finită derivata lui f în x_0, adică $f'(x_0)$, care, în conformitate cu Definiţia 10.1 a), este valoarea limitei $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Cum, $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$, avem $f(x) = (x - x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)$ şi $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$, deducem că există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi este egală chiar cu $f(x_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. Arbitrarietatea lui x_0 în A ne dă dreptul să conchidem că f este continuă pe A. Deci $f \in \mathcal{C}(A)$, din moment ce, iniţial, $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Şi aceasta pentru orice f din $\mathcal{C}^1(A)$. În concluzie, avem $\mathcal{C}^1(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$. Exemplul clasic al funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, care este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă doar pe $\mathbb{R}^*$, ne asigură de faptul că incluziunea din enunţ este strictă. ◀

Pe baza Definiţiei 10.1, prin respectarea unor elementare operaţii de algebră şi de analiză matematică, se obţin reguli de calcul diferenţial ordinar, între care şi regula lui Leibniz (de derivare a produsului de două funcţii) sau regula "lanţului" (de derivare a compusei a două funcţii). Reunite în cuprinsul teoremei pe care o dăm aici fără demonstraţie, iată aceste reguli:

Teorema 10.1 *a) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă f şi g sunt derivabile pe o submulţime (nevidă) $\widetilde{A}$ a lui A, atunci funcţiile $f + g$, $f - g$, αf, $f \cdot g$ şi $\dfrac{f}{g}$ (când $g(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \widetilde{A}$) sunt derivabile pe $\widetilde{A}$ şi, pe $\widetilde{A}$, avem:*

$$(f+g)' = f' + g'; (\alpha f)' = \alpha f'; (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

b) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ şi $g : B \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile (fiecare pe mulţimea ei de definiţie). Atunci funcţia $g \circ f$ este derivabilă pe A şi, pe A, are loc formula:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

c) Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă f este derivabilă pe A şi $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in A$, atunci funcţia inversă $f^{-1} : B \to A$ este derivabilă pe B şi, pe B, are loc relaţia:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Observaţie: Amintindu-ne că derivatele funcţiilor elementare de bază se calculează potrivit următoarelor formule

$$(c)' \equiv \frac{d}{dx}(c) = 0, \forall\, c \in \mathbb{R}; \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in D_\alpha \subseteq \mathbb{R};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \forall\, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \qquad (\sin x)' = \cos x, \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \qquad (\cos x)' = -\sin x, \forall\, x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

se pot utiliza regulile din Teorema 10.1 spre a determina derivatele unor funcţii care se obţin din funcţii elementare prin operaţii algebrice sau prin operaţii de compunere. Astfel, redescoperim formulele

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall\, x \in (-1,1); \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall\, x \in (-1,1);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \forall\, x \in \mathbb{R}; \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \forall\, x \in \mathbb{R},$$

precum şi relaţia

$$(f^g)' = f^g \left(g' \ln f + g \cdot \frac{f'}{f} \right),$$

adevărată atunci când $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ şi $g : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe A.

Ţinând seama de Definiţia 10.1 şi de regulile de calcul pentru limite de funcţii cu valori vectoriale (v. Cursul 9), ne dăm seama că, în cazul funcţiilor reale de argument scalar şi cu valori în $\mathbb{R}^q$ ($q \in \mathbb{N}^*$, $q \geq 2$), noţiunile de derivată şi de derivabilitate se pot defini pe baza următorului rezultat.

Propoziţia 10.2 *Funcţia $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, cu $f_k : A \to \mathbb{R}$, $\forall\, k = \overline{1,q}$, este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ (respectiv pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$) dacă şi numai dacă fiecare dintre funcţile componente $f_1, f_2, \ldots, f_q$ este derivabilă în x_0 (respectiv pe $\widetilde{A}$). În plus, are loc relaţia:*

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0))$$

(respectiv $f' = (f_1', f_2' \ldots, f_q')$, pe $\widetilde{a}$).

Demonstraţie: $\forall\, x \in A \setminus \{x_0\}$, avem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_q(x) - f_q(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Deducem de aici că există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, notată cu $f'(x_0)$ şi denumită derivata lui f în x_0, dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0}$, $\forall\, k = \overline{1,q}$. Cu alte cuvinte, f este derivabilă în x_0 şi avem egalitatea $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0))$ dacă şi numai dacă fiecare dintre funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_q$ este derivabilă în x_0. Este evident acum că $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ este derivabilă pe $\widetilde{A}$ dacă şi numai dacă $\forall\, k = \overline{1,q}$, f_k este derivabilă pe $\widetilde{A}$. ◀

Observaţie: Un rezultat cu totul analog Propoziţiei 10.2 poate fi formulat şi demonstrat atunci când, în locul lui $f'(x_0)$ şi respectiv $f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_q'(x_0)$, se consideră derivatele corespunzătoare la stânga (sau cele la dreapta). Astfel, funcţia $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ va fi derivabilă la stânga (respectiv la dreapta) în x_0. Evident că, şi într-un asemenea caz, al funcţiilor $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, putem zice că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă $f_s'(x_0)$, adică derivata la stânga a lui f în x_0, există în $\mathbb{R}^q$ (dată fiind de vectorul cu componentele $(f_1)_s'(x_0), (f_2)_s'(x_0), \ldots, (f_q)_s'(x_0)$, împreună cu $f_d'(x_0)$ (derivata la dreapta a lui f în x_0, adică vectorul $((f_1)_d'(x_0), (f_2)_d'(x_0), \ldots, (f_q)_d'(x_0))$ şi $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$. Valoarea comună a acestor derivate laterale este tocmai $f'(x_0)$.

Prin utilizarea Propoziţiei 10.2 şi a Teoremei 10.1, se deduc lesne reguli de calcul pentru derivatele (de ordinul I) ordinare ale unor funcţii reale, scalar-vectoriale, cum sunt regulile (sau formulele) puse în evidenţă de teorema ce urmează:

Teorema 10.2 *Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar funcţiile $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, $g : A \to \mathbb{R}^q$ şi $\varphi : A \to \mathbb{R}$ sunt derivabile într-un punct $x_0 \in A$ (sau pe o mulţime $\widetilde{A} \subseteq A$), atunci tot derivabile în x_0 (respectiv pe $\widetilde{A}$) sunt şi funcţiile $\alpha f + \beta g$, $\varphi \cdot f$, $\langle f(\cdot), g(\cdot)\rangle$ (unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reprezintă un produs scalar pe $\mathbb{R}^q$), având loc formulele:*

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \text{ în } x_0 \text{ (respectiv pe } \widetilde{A} \text{)},$$

$$(\varphi \cdot f)' = \varphi' \cdot f + \varphi \cdot f', \text{ în } x_0 \text{ (respectiv pe } \widetilde{A} \text{) şi}$$

$$(\langle f(x), g(x)\rangle)' = \langle f'(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x)\rangle, \text{ pentru } x = x_0 \text{ (respectiv } \forall\, x \in \widetilde{A}).$$

În plus, dacă $\psi : B \subseteq \mathbb{R} \to A$ este derivabilă pe $\widetilde{B} \subseteq B$, atunci funcţia $f \circ \psi = (f_1 \circ \psi, f_2 \circ \psi, \ldots, f_q \circ \psi) : B \to \mathbb{R}^q$ este derivabilă pe $\widetilde{B}$ şi are loc relaţia:

$$(f \circ \psi)'(x) = \left(\psi' \cdot \left(f' \circ \psi\right)\right)(x) = \psi'(x) \cdot \left(f_1'(\psi(x)), f_2'(\psi(x)), \ldots, f_q'(\psi(x))\right), \forall\, x \in \widetilde{B}.$$

Referindu-ne acum la cazul funcţiilor reale de argument vectorial, este de constatat că, deoarece raportul $\dfrac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}$ nu are sens, nu se poate vorbi despre $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}$ şi deci nu se poate introduce noţiunea de derivată în x_0 prin procedura folosită la funcţiile de argument scalar. Inconvenientul poate fi totuşi surmontat pe una din cele două căi sugerate, pe de o parte, de observaţia potrivit căreia, în cazul unei funcţii $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi a unui punct $x_0 \in A$, dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, avem, pe de-o parte, relaţia
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$ şi, pe de altă parte, următorul rezultat:

Propoziţia 10.3 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ aşa încât $A \neq \varnothing$, $f : A \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in A$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este derivabilă în x_0;

ii) există o aplicaţie liniară $T_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în raport cu care:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T_0(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Demonstraţie: Dacă f este derivabilă în x_0, atunci există derivata $f'(x_0)$, ca element din $\mathbb{R}$. Prin intermediul ei, există aplicaţia liniară $T_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită potrivit relaţiei $T_0(h) = f'(x_0) \cdot h$, astfel încât:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T_0(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Reciproc, dacă există o aplicaţie liniară $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în raport cu care avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

atunci există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $T(h) = t \cdot h$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$ şi, ca atare, obţinem:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - t \right) = 0.$$

Rezultă deci că există $f'(x_0) = t$ şi $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, adică f este derivabilă în x_0. ◀

Folosind prima dintre căile menţionate mai înainte, ajungem la noţiunea de G-diferenţială (altfel spus, ***diferenţială Gâteaux***), în conformitate cu următoarea definiţie:

Definiţia 10.3 *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, unde D este o mulţime deschisă în topologia uzuală pe $\mathbb{R}^p$. De asemenea, fie $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$, astfel încât $\|\mathrm{v}\|_e = 1$, $\|\cdot\|_e$ însemnând norma euclidiană pe $\mathbb{R}^p$.*

*Dacă există $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)}{t} \in \mathbb{R}^q$, atunci această limită, notată îndeobşte cu $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})$ (sau, echivalent, cu $\dfrac{df}{d\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$ ori cu $f'_{\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$), se numeşte **G-diferenţiala (diferenţiala Gâteaux a) lui** f **în punctul** x_0, **după versorul (direcţia)** v sau, încă, **derivata direcţională, după (direcţia)** v, **a funcţiei** f, **în punctul** x_0.*

Observaţie: Întrucât, când există $f'_{\mathrm{v}}(\mathrm{x}_0)$, avem

$$f'(\mathrm{x}_0;s\mathrm{v}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0+t\cdot s\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)}{t} = s\cdot\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0+t\cdot s\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)}{ts} = sf'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}), \forall\, s\in\mathbb{R}^*$$

şi

$$f'(\mathrm{x}_0;0\cdot\mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0;\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0+t\cdot\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p})-f(\mathrm{x}_0)}{t} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p} = 0\cdot f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}),$$

se poate spune că aplicaţia $\psi : D\times S_{d_e}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p};1)\to\mathbb{R}^q$, definită prin $\psi(\mathrm{x}_0,\mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0,\mathrm{v})$, este omogenă în raport cu v. Ca atare, G-diferenţiala lui f în x_0, după direcţia v, are sens chiar şi atunci când v nu este numaidecât versor, putându-se deci renunţa, în Definiţia 10.3, la precizarea $\|v\|_e = 1$.

Definiţia 10.4 *Fie f, D şi x_0 ca în definiţia 10.3.*

*a) Dacă există $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\in\mathbb{R}^q$ pentru orice $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^p$, atunci spunem că funcţia $f : D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ este **G-diferenţiabilă (diferenţiabilă Gâteaux) în** $\mathrm{x}_0\in D$.*

b) Dacă aplicaţia $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^p\longmapsto f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\in\mathbb{R}^q$ este liniară (nu numai omogenă) şi continuă, atunci elementul din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$, notat cu $f'(\mathrm{x}_0)$ şi definit prin relaţia

$$f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}), \forall\,\mathrm{v}\in\mathbb{R}^p$$

*se numeşte **G-derivata** (sau **derivata Gâteaux a) funcţiei** f **în punctul** x_0, iar f se numeşte **G-derivabilă (derivabilă Gâteaux** sau **derivabilă direcţional) în** x_0 .*

*c) Spunem că f este **G-diferenţiabilă (diferenţiabilă Gâteaux pe o mulţime** $\widetilde{D}\subseteq D$ dacă $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})$ există (în $\mathbb{R}^q$) pentru orice $\mathrm{x}_0\in\widetilde{D}$ şi orice $\mathrm{v}\in\mathbb{R}^p$. Analog, dacă derivata Gâteaux $f'(\mathrm{x}_0)$ există în orice punct $\mathrm{x}_0\in\widetilde{D}$, zicem că funcţia f este **G-derivabilă (derivabilă Gâteaux) pe mulţimea** $\widetilde{D}$.*

Observaţie: Mulţimea funcţiilor $f : D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ care sunt G-diferenţiabile (respectiv G-derivabile) într-un punct din D sau pe o submulţime a lui D este nevidă, deoarece din această mulţime fac parte funcţiile identic-constante ($f(\mathrm{x}) = c\in\mathbb{R}^q$, $\forall\,\mathrm{x}\in D$), care au G-diferenţiala egală cu $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}$, în orice punct din D, după orice direcţie v din $\mathbb{R}^p$ (respectiv, au G-derivata egală cu elementul nul din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$. De asemenea, aceleiaşi mulţimi îi aparţin şi funcţiile liniare $f : D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, pentru care avem:

$$f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0)+tf(\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)}{t} = f(\mathrm{v}), \forall\,\mathrm{x}_0\in D, \forall\,\mathrm{v}\in\mathbb{R}^p.$$

Deci, în acest caz, $f'(\mathrm{x}_0) = f$, $\forall\,\mathrm{x}_0\in D$.

Definiţia 10.5 *a) Dacă funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este G-derivabilă într-un punct x_0 al mulţimii deschise D, atunci elementul $f'(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$ defineşte* ***gradientul lui** f **în*** x_0*, care se notează cu $(\nabla f)(\mathrm{x}_0)$ şi se citeşte* ***"nabla" f în*** x_0 *(sau se mai notează cu $\mathrm{grad}f(\mathrm{x}_0)$), pe baza relaţiei*

$$\big(f'(\mathrm{x}_0)\big)(\mathrm{v}) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v}\rangle_e, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p,$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ reprezintă produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^p$.

(Aşadar, $(\nabla f)(\mathrm{x}_0)$ este un vector din $\mathbb{R}^p$ definit prin intermediul relaţiei sus-menţionate).

b) Dacă funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este G-derivabilă într-un punct x_0 din D, atunci matricea asociată aplicaţiei liniare $f'(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ se numeşte ***matricea jacobiană a lui** f **în*** x_0*, având drept linii tocmai gradienţii, în x_0, ai componentelor lui f. Notată cu $J_f(\mathrm{x}_0)$, această matrice este dată astfel de relaţia*

$$J_f(\mathrm{x}_0) = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)(\mathrm{x}_0) \\ (\nabla f_2)(\mathrm{x}_0) \\ \vdots \\ (\nabla f_q)(\mathrm{x}_0) \end{pmatrix},$$

în care $f_1, f_2, \ldots, f_q$ sunt componentele lui f.

c) În cazul când $p = q \geq 2$, determinantul matricii jacobiene $J_f(\mathrm{x}_0)$ (adică $\det(J_f(\mathrm{x}_0))$) se numeşte ***jacobianul lui** f **în*** x_0 *sau, echivalent,* ***determinantul funcţional*** *al funcţiilor $f_1, f_2, \ldots, f_q$, în raport cu variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_q$ (componentele unui vector generic $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_q)^T$ din D), calculat în x_0. Acesta din urmă se notează, uzual, prin:*

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_q)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_q)}(\mathrm{x}_0).$$

d) În particular, când $\mathrm{v} = \mathbf{e}_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, G-diferenţiala $f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{e}_k)$ (unde $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) \in D$), dată de limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + t, x_{k+1}^0, \ldots, x_p^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)}{t},$$

se numeşte ***derivata parţială, de ordinul I, a funcţiei** $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$**, în raport cu*** x_k *(componenta de rang k a argumentului vectorial $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in D$ pentru f),* ***în punctul*** $x_0 \in D$ *şi se notează cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$. Când există $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) \in \mathbb{R}^q$, pentru $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$, cu $f_j : D \to \mathbb{R}$, $\forall\, j = \overline{1, q}$, avem*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f_q}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)\right),$$

funcţia f numindu-se ***derivabilă parţial, de ordinul I, în raport cu** x_k**, în punctul*** x_0.

Funcţia f se numeşte ***derivabilă parţial, de ordinul I, în raport cu** x_k**, pe o mulţime*** $\widetilde{D} \subseteq D$*, dacă există $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^q$, $\forall\, \mathrm{x} \in \widetilde{D}$. Într-o atare situaţie, funcţia $\mathrm{x} \in \widetilde{D} \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}^q$, notată cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, se numeşte* ***derivata parţială a lui** f**, de ordinul I, în raport cu** x_k**, pe mulţimea*** $\widetilde{D}$.

Observaţii:

i) Pe baza formulei, cu limită, pentru $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$ (din Definiţia 10.5), se poate spune că derivata parţială $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$ este, de fapt, derivata în x_k^0 a funcţiei de o variabilă scalară

$$x_k \longmapsto f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_p^0),$$

adică funcţia parţială $f_{[k]}$, corespunzătoare lui f, în punctul $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$. Astfel, calculul derivatei parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$ poate fi redus, practic, la calculul derivatei (de ordinul I) pentru o funcţie de o singură variabilă, anume x_k, celelalte variabile independente din componenţa lui x (adică $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p$) figurând ca nişte constante în respectivul proces de calcul.

ii) Când $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este derivabilă parţial, de ordinul I, pe o mulţime $\widetilde{D} \subseteq D$, în raport cu orice variabilă x_k, iar funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}^q$ sunt continue pe $\widetilde{D}$, spunem că f este ***de clasă*** $\mathcal{C}^1$ ***pe*** $\widetilde{D}$ şi consemnăm acest fapt prin: $f \in \mathcal{C}^1(\widetilde{D})$.

iii) În cazul în care $q = 1$ şi, pentru $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, se poate vorbi despre relaţia

$$f'(\mathrm{x}_0; \mathrm{v}) = f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{v}) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v} \rangle_e, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p, \mathrm{x}_0 \in D,$$

luând $\mathrm{v} = \mathbf{e}_k$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = f'(\mathrm{x}_0; \mathbf{e}_k) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathbf{e}_k \rangle_e, \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

În virtutea acestui fapt şi a celui potrivit căruia reprezentarea oricărui vector $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$, în baza canonică $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p\} \subseteq \mathbb{R}^p$, este $\mathrm{v} = \sum\limits_{k=1}^{p} v_k \mathbf{e}_k$, obţinem:

$$\langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v} \rangle_e = \sum_{k=1}^{p} \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathbf{e}_k \rangle_e = \sum_{k=1}^{p} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) =$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0) \right), \mathrm{v} \right\rangle, \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

De aici, deducem că, ori de câte ori există, gradientul lui f în x_0 este vectorul din $\mathbb{R}^p$ cu componentele $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$, $k = \overline{1, p}$, adică:

$$(\nabla f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0) \right).$$

iv) Pe baza ultimei formule şi a celei care dă matricea jacobiană $J_f(\mathrm{x}_0)$, în cazul în care $q \geq 2$, deducem că, pentru funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, când este G-derivabilă în $\mathrm{x}_0 \in D$, avem

$$J_f(\mathrm{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}},$$

unde $f_1, f_2, \ldots, f_q$ sunt componentele lui f.

v) Ţinând seama de precizările făcute la punctul i) al observaţiei de faţă, putem vedea că regulile de calcul cu G-diferenţiale (şi apoi, în particular, cu gradienţi şi cu derivate parţiale de ordinul I), se bazează pe următoarele relaţii:

$$\begin{aligned}
(\alpha f+\beta g)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) &= \alpha f'(x_0;\mathrm{v})+\beta g'(x_0;\mathrm{v}), \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\\
&\quad \forall\, f: D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, g: D\to\mathbb{R}, \mathrm{x}_0\in D, \mathrm{v}\in\mathbb{R}^p\\
&\quad \text{cu } f \text{ şi } g\ G\text{-diferenţiabile în } \mathrm{x}_0 \text{ pe direcţia v;}\\
(f\cdot g)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) &= g(\mathrm{x}_0)\cdot f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})+f(\mathrm{x}_0)\cdot g'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}),\\
&\quad \forall\, f: D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, g: D\to\mathbb{R}, \mathrm{x}_0\in D, \mathrm{v}\in\mathbb{R}^p\\
&\quad \text{cu } f \text{ şi } g\ G\text{-diferenţiabile în } \mathrm{x}_0 \text{ pe direcţia v;}\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) &= \frac{1}{g^2(\mathrm{x}_0)}\left[g(\mathrm{x}_0)\cdot f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})-g'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\cdot f(\mathrm{x}_0)\right],\\
&\quad \forall\, f: D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}, g: D\to\mathbb{R}, \mathrm{x}_0\in D, \mathrm{v}\in\mathbb{R}^p\\
&\quad \text{cu } f \text{ şi } g\ G\text{-diferenţiabile în } \mathrm{x}_0 \text{ pe direcţia v.}
\end{aligned}$$

În general, raportul dintre G-diferenţiabilitatea unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ într-un punct $\mathrm{x}_0 \in D$, după o direcţie $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$, nu implică, ca în cazul $p = q = 1$, continuitatea globală a lui f în x_0, ci doar continuitatea pe direcţia v, în x_0, potrivit următorului rezultat.

Teorema 10.3 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi deschisă, v, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f are derivată direcţională (G-diferenţială), după v, în x_0, anume $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$, atunci f este continuă, pe direcţia v, în punctul x_0.*

Demonstraţie: În conformitate cu Definiţia 10.3, există $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ dacă şi numai dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, $\forall\, t \in \mathbb{R}^*$ cu $|t| < \delta_\varepsilon$, avem:

$$\left\|\frac{1}{t}\left(f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)\right)-f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\right\|_{\mathbb{R}^q} < \varepsilon.$$

Atunci:

$$\|f(\mathrm{x}_0+tv)-f(\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q} \le \left\|f(\mathrm{x}_0+t\mathrm{v})-f(\mathrm{x}_0)-tf'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\right\|_{\mathbb{R}^q}+\left\|tf'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\right\|_{\mathbb{R}^q} \le$$

$$\le |t|\left(\varepsilon+\left\|f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v})\right\|_{\mathbb{R}^q}\right), \forall\, |t|<\delta_\varepsilon.$$

De aici, rezultă că $\lim\limits_{t\to 0} f(\mathrm{x}_0+tv) = f(\mathrm{x}_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0, pe direcţia v. ◄

În particular, când Teorema 10.3 are loc pentru $\mathrm{v} = \mathbf{e}_k$, se poate spune doar că derivabilitatea parţială, de ordinul I, a funcţiei f în punctul x_0, în raport cu x_k, implică continuitatea "parţială" (pe direcţia $\mathbf{e}_k$), nu numaidecât continuitatea globală, a lui f în x_0. Continuitatea globală se poate obţine în condiţiile următoarei teoreme.

Teorema 10.4 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă există o vecinătate $V \subseteq D$, a punctului x_0, pe care f este derivabilă parţial, de ordinul I , iar funcţiile $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$ sunt, $\forall\, k = \overline{1,p}$, $\forall\, k = \overline{1,q}$, mărginite pe V, atunci f este continuă, în sens global, în punctul x_0.*

Demonstraţie: Continuitatea lui $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ în punctul $\mathrm{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ este asigurată de continuitatea fiecăreia dintre componentele f_k ale lui f în x_0. Este suficient deci să arătăm că există $\lim\limits_{x \to x_0} f_j(\mathrm{x}) = f_j(\mathrm{x}_0)$, $\forall\, j = \overline{1, q}$. În acest sens, prin aplicarea teoremei lui Lagrange (de medie) pentru funcţii de o singură variabilă reală şi prin folosirea ipotezei de mărginire, pe V, a funcţiilor $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$ ($k = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$), constatăm că, pentru orice $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in V$, există $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$, cu ξ_k între x_k şi x_k^0, $\forall\, k = \overline{1, p}$, astfel încât:

$$\begin{aligned}
\left|f_j(x_1, x_2, \ldots, x_p) - f_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)\right| &\leq \left|f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p) - f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^0)\right| + \\
&+ \left|f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^0) - f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}, x_{p-1}^0, x_p^0)\right| + \cdots \\
&+ \left|f_j(x_1, x_2^0, \ldots, x_p^0) - f_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)\right| = \\
&= \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_p}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, \xi_p)\right| \left|x_p - x_p^0\right| + \\
&\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_{p-1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}, \xi_{p-1}, x_p^0)\right| \left|x_{p-1} - x_{p-1}^0\right| + \cdots \\
&+ \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \ldots, x_p^0)\right| \left|x_1 - x_1^0\right| \leq M_j \sum_{k=1}^{p} \left|x_k - x_k^0\right|,
\end{aligned}$$

unde $M_j = \max\limits_{1 \leq k \leq p} \{\sup\limits_{x \in V} \left|\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}\right|\}$. De aici, rezultă clar că f_j este continuă global în x_0, $\forall\, j = \overline{1, q}$. ◀

Observaţie: O condiţie suficientă pentru existenţa unei vecinătăţi $V \subseteq D$, a punctului x_0, pe care funcţia f, derivabilă parţial, de ordinul I, pe D să aibă derivatele parţiale, ale tuturor componentelor sale, mărginite, ar fi continuitatea în x_0 a respectivelor derivate.

Diferenţiala şi diferenţiabilitatea Fréchet a unei funcţii reale, într-un punct sau pe o mulţime

Utilizând acum sugestia oferită de Propoziţia 10.3, putem introduce aici noţiunile de diferenţiabilitate şi diferenţială Fréchet, în conformitate cu următoarea definiţie.

Definiţia 10.6 *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$, iar $f : D \to \mathbb{R}^q$.*

a) Spunem că funcţia f este ***diferenţiabilă Fréchet într-un punct*** *$\mathrm{x}_0 \in D$, dacă există o aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi o funcţie $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, astfel încât $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \alpha(\mathrm{x}) = \alpha(\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi*

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D,$$

unde $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ desemnează o normă (de exemplu, cea euclidiană) pe $\mathbb{R}^p$, iar $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ este vectorul nul din $\mathbb{R}^q$.

În acest caz, aplicaţia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ se numeşte ***diferenţiala (derivata) Fréchet, de ordinul I, a funcţiei f, în punctul*** *x_0, depinde de x_0 şi se notează, convenţional, cu $(df)(\mathrm{x}_0)$.*

b) Spunem că f este ***diferenţiabilă Fréchet pe o mulţime*** *$\widetilde{D} \subseteq D$ dacă şi numai dacă f este diferenţiabilă, în sensul de la a) în orice punct $\mathrm{x}_0 \in \widetilde{D}$.*

Observaţii: Pe baza Definiţiei 10.6 a), deducem că, într-o altă exprimare, echivalentă cu cea din cadrul definiţiei menţionate, putem spune că f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0 dacă există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$$

sau, încă, echivalent, există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = 0_{\mathbb{R}}.$$

O altă modalitate (echivalentă cu cea din Definiţia 10.6 a)) de a exprima faptul că f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, este cea care afirmă că dacă există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ şi, odată cu T, o aplicaţie $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, definită prin

$$\alpha(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}}, & \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0 \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}, & \mathrm{x}=\mathrm{x}_0, \end{cases} \quad \mathrm{x}\in D,$$

astfel încât α să fie continuă în x_0 şi, prin asta, să aibă loc relaţia

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|, \forall\, \mathrm{x}\in D,$$

atunci f se poate numi Fréchet-diferenţiabilă în x_0.

Propoziţia 10.4 *Fie D o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci diferenţiala $(df)(\mathrm{x}_0)$ este unică.*

Demonstraţie: Admiţând că $(df)(\mathrm{x}_0)$ nu ar fi unică, ar exista T_1 şi $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ astfel încât:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = 0\ (\in\mathbb{R}).$$

Atunci, am avea $(\forall\, \mathrm{x}\in D, \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0)$:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{\|T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \\ &= \frac{1}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} \|(f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))-(f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_1(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))\|_{\mathbb{R}^q} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} + \frac{\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)-T_2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} \xrightarrow[\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0]{} 0. \end{aligned}$$

De aici, luând $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}$, cu $\mathrm{u}\in\mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$ şi $t\in\mathbb{R}^*$, ar rezulta:

$$0 = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\|T_1(t\mathrm{u})-T_2(t\mathrm{u})\|_{\mathbb{R}^q}}{\|t\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{|t|\,\|T_1(\mathrm{u})-T_2(\mathrm{u})\|_{\mathbb{R}^q}}{|t|\,\|\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}}.$$

Prin urmare, am avea: $T_1(\mathrm{u}) = T_2(\mathrm{u})$, $\forall\, \mathrm{u}\in\mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}$. Dar cum $T_1(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = T_2(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$, ajungem, în definitiv, la concluzia:$T_1 = T_2$. ◀

Cu privire la mulţimea funcţiilor $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ care sunt diferenţiabile Fréchet (într-un punct din D sau pe o mulţime $\widetilde{D} \subseteq D$), se poate spune că ea nu este vidă, deoarece cel puţin funcţiile identic constante şi funcţiile liniare aparţin respectivei mulţimi, în baza următorului rezultat:

Propoziţia 10.5 *a) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, cu D mulţime deschisă, este o funcţie constantă, atunci f este Fréchet-diferenţiabilă pe D şi $(df)(\mathrm{x}) = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)}$, $\forall \mathrm{x} \in D$.*

b) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o funcţie liniară, atunci f este diferenţiabilă Fréchet pe D şi $(df)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$, $\forall \mathrm{x} \in D$.

Demonstraţie: a) Pentru $f(\mathrm{x}) = \mathrm{c}$, cu $\mathrm{c} \in \mathbb{R}^q$, $\forall \mathrm{x} \in D$, avem:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{\mathrm{c}-\mathrm{c}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}.$$

b) pentru $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, avem:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - f(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}.$$

Deci, există $(df)(\mathrm{x}_0) = f(\mathrm{x}_0)$, $\forall \mathrm{x}_0 \in D$. ◀

Un alt rezultat, afirmând, în esenţă, că diferenţiala unei funcţii $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, într-un punct x_0, are, drept componente, diferenţialele $(df_j)(\mathrm{x}_0)$, $j = \overline{1,q}$, este următorul:

Teorema 10.5 *Fie D o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^p$, x_0 un punct din D şi o funcţie $f = (f_1, f_2, \ldots, f_q) : D \to \mathbb{R}^q$, cu $f_j : D \to \mathbb{R}$, $\forall j = \overline{1,q}$. Funcţia f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale - $f_1, f_2, \ldots, f_q$ - sunt diferenţabile Fréchet în x_0. În plus, are loc egalitatea:*

$$(df)(\mathrm{x}_0) = ((df_1)(\mathrm{x}_0), (df_2)(\mathrm{x}_0), \ldots, (df_q)(\mathrm{x}_0)),$$

unde $(df_j)(\mathrm{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$, $\forall j = \overline{1,q}$.

Demonstraţie: Potrivit Definiţiei 10.6 şi observaţiei ce o succedă, f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, dacă şi numai dacă există $T = (T_1, T_2, \ldots, T_q) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, cu $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$, $\forall k = \overline{1,q}$, precum şi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) : D \to \mathbb{R}^q$, cu $\alpha_k : D \to \mathbb{R}$, $\forall k = \overline{1,q}$, astfel încât $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \alpha(\mathrm{x}) = \alpha(\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall \mathrm{x} \in D.$$

Pe componente, aceasta înseamnă că, $\forall k = \overline{1,q}$, avem:

$$f_k(\mathrm{x}) = f_k(\mathrm{x}_0) + T_k(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha_k(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall \mathrm{x} \in D,$$

cu $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \alpha_k(\mathrm{x}_0) = \alpha_k(\mathrm{x}_0) = 0$, $\forall k = \overline{1,q}$. Prin urmare, se poate spune că f_k este diferenţibilă Fréchet în x_0 şi $(df)(\mathrm{x}_0) = T_k$, $\forall k = \overline{1,q}$. În plus, are loc relaţia:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = T = (T_1, T_2, \ldots, T_q) = ((df_1)(\mathrm{x}_0), (df_2)(\mathrm{x}_0), \ldots, (df_q)(\mathrm{x}_0)).$$

Reciproc, dacă fiecare funcţie f_k $(k = \overline{1,q})$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci există $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$, $\forall k = \overline{1,q}$ şi $\alpha_k : D \to \mathbb{R}$, cu $\alpha_k(\mathrm{x}) = \dfrac{(f_k(\mathrm{x}) - f_k(\mathrm{x}_0) - T_k(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0))}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}}$, $\forall \mathrm{x} \in D \setminus \{\mathrm{x}_0\}$, $\alpha_k(\mathrm{x}_0) = 0$ şi $\alpha(\mathrm{x}) = (\alpha_1(\mathrm{x}), \alpha_2(\mathrm{x}), \ldots, \alpha_q(\mathrm{x}))$. Or, aceasta înseamnă că f este diferenţiabilă Fréchet în x_0, cu $(df)(\mathrm{x}_0) = T$. ◀

Propoziţia 10.6 *Dacă D este o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^p$, x_0 un punct din D, iar $f : D \to \mathbb{R}^q$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet în x_0, atunci f este continuă (global) în x_0.*

Demonstraţie: Într-adevăr, dacă $f : D \to \mathbb{R}^q$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, atunci există $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$ şi $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, continuă şi nulă în x_0, astfel încât

$$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}, \forall\, \mathrm{x} \in D.$$

De aici, ţinând seama de faptul că $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} T(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$ şi $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\| = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}$, deducem clar că $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x})$ există şi este egală cu $f(\mathrm{x}_0)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în x_0. ◀

Observaţie: Propoziţia 10.6 ne arată că necesară diferenţiabilităţii lui f în x_0 este continuitatea funcţiei f în x_0, în sens global. Nu însă şi suficientă.

Legătura dintre diferenţiala Fréchet şi derivata (diferenţiala) Gâteaux este, în parte, dată de următoarea teoremă.

Teorema 10.6 *Fie $\varnothing \neq D$ o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, atunci f este derivabilă Gâteaux în x_0 şi are loc relaţia:*

$$f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

(Altfel spus, există $f'(\mathrm{x}_0)$ şi $f'(\mathrm{x}_0) = (df)(\mathrm{x}_0)$).

Demonstraţie: Deoarece f este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, cu F-diferenţiala $(df)(\mathrm{x}_0)$, există $\alpha : D \to \mathbb{R}^q$, continuă şi nulă în x_0, astfel încât $f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0) + ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0) + \alpha(\mathrm{x})\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}$, $\forall\, \mathrm{x} \in D$. Atunci:

$$\frac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = \frac{((df)(\mathrm{x}_0))(t\mathrm{u}) + \alpha(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u})\|t\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p}}{t} =$$

$$= ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u}) + \alpha(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u})\frac{|t|}{t}, \forall\, t \in \mathbb{R}^*, |t| < r, \mathrm{u} \in \mathbb{R}^p, \|\mathrm{u}\|_{\mathbb{R}^p} = 1.$$

Prin urmare, există $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{u}) - f(\mathrm{x}_0)}{t} = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u})$. De aici, mai departe, avem:

$$f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) = f'\left(\mathrm{x}_0; \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) = \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p} \cdot f'\left(\mathrm{x}_0; \frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) =$$

$$= \|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p} \cdot ((df)(\mathrm{x}_0))\left(\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_{\mathbb{R}^p}}\right) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}\}.$$

Dar cum şi $f'(\mathrm{x}_0;\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^q} = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^p})$, putem conchide că există $f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) \in \mathbb{R}^q$ (deci f este G-diferenţiabilă în x_0) şi

$$f'(\mathrm{x}_0;\mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p.$$

Altfel spus, există $f'(\mathrm{x}_0)$ (deci f este G-derivabilă în x_0) şi $f'(\mathrm{x}_0) = (df)(\mathrm{x}_0)$. ◀

Observaţii: Pe baza acestei teoreme şi a faptului că $f'(\mathrm{x}_0;\mathbf{e}_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)$, putem spune că $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{e}_k)$, $\forall\, k = \overline{1,p}$. Astfel, $\forall\, \mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p) = \sum\limits_{k=1}^{p} v_k\mathbf{e}_k$, avem

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = ((df)(\mathrm{x}_0))\left(\sum_{k=1}^{p} v_k\mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} v_k\,((df)(\mathrm{x}_0))(\mathbf{e}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), \mathrm{v} \rangle_e ,$$

când $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$.

În cazul unei funcţii vectoriale $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, am avea

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = (J_f((\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le k \le p}} (\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p,$$

ori de câte ori D este o mulţime deschisă, iar f este Fréchet-diferenţiabilă în $\mathrm{x}_0 \in D$. De aici, deducem că, în raport cu perechea de baze canonice din $\mathbb{R}^p$ şi respectiv $\mathbb{R}^q$, matricea asociată aplicaţiei liniare $(df)(\mathrm{x}_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este tocmai Jacobiana $J_f(\mathrm{x}_0)$.

Dacă, în continuare, ţinem seama de faptul că aplicaţiile de proiecţie $pr_k : D \to \mathbb{R}$, definite prin $pr_k(\mathrm{x}) = x_k$, $\forall\, k = \overline{1,p}$, $\forall\, \mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, sunt liniare şi deci, prin aplicarea Propoziţiei 10.5, sunt diferenţiabile Fréchet pe D, cu $d(pr_k) = pr_k$, $\forall\, k = \overline{1,p}$, atunci, ori de câte ori funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$, avem:

$$((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{v}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) v_k = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) pr_k(\mathrm{v}) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) pr_k\right)(\mathrm{v}) = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) d(pr_k)\right)(\mathrm{v}), \forall\, \mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Cum $pr_k(\mathrm{x}) = x_k$, diferenţiala $d(pr_k)$, care este independentă de punctul în care o calculăm, se notează, prin convenţie, cu dx_k, $\forall\, k = \overline{1,p}$. Astfel găsim formula de calcul următoare:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0) dx_k.$$

Făcând uz de vectorul $d\mathrm{x} = (dx_1, dx_2, \ldots dx_p)$, se poate scrie

$$(df)(\mathrm{x}_0) = \langle (\nabla f)(\mathrm{x}_0), d\mathrm{x} \rangle_e ,$$

ori de câte ori funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă Fréchet în $\mathrm{x}_0 \in D$.

Analog, pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ care este Fréchet-diferenţiabilă în $\mathrm{x}_0 \in D$, deducem că are loc formula:

$$(df)(\mathrm{x}_0) = (J_f(\mathrm{x}_0))(d\mathrm{x}).$$

În anumite condiţii, prezentate în enunţul teoremei ce urmează (fără demonstraţie, aici), diferenţiabilitatea Gâteaux într-un punct implică totuşi diferenţiabilitatea Fréchet în acel punct.

Teorema 10.7 *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este G-derivabilă pe o vecinătate W a punctului x_0, de forma $\{\mathrm{u} = \mathrm{x}_0 + t\mathrm{v} \mid t \in [0,1], \mathrm{v} \in \mathbb{R}^p\}$, iar G-derivata $f'(\cdot)$ este continuă în x_0 (în sensul topologiei spaţiului $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$), atunci f este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi $(df)(\mathrm{x}_0) = f'(\mathrm{x}_0)$.*

Acest rezultat, reformulat la nivelul derivatelor parţiale de ordinul întâi ale componentelor lui f (în raport cu componentele argumentului vectorial x), constituie următorul criteriu de Fréchet-diferenţiabilitate:

"Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to R^q$, cu D mulţime nevidă şi deschisă, este derivabilă parţial, de ordinul I, pe o vecinătate W a punctului $x_0 \in D$ (cu $W \subseteq D$), iar derivatele parţiale $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ (ale componentelor

lui f) sunt continue în x_0, atunci f este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi matricea asociată aplicaţiei liniare $(df)(x_0)$ este chiar Jacobiana lui f în x_0, adică $J_f(x_0)$."

Mai mult, dacă $f \in \mathcal{C}^1(\widetilde{D})$, unde $\varnothing \neq \widetilde{D} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p$, atunci f este Fréchet-diferenţiabilă pe $\widetilde{D}$. De aceea, funcţiilor din $\mathcal{C}^1(\widetilde{D})$ li se mai spune ***continuu-diferenţiabile*** (pe $\widetilde{D}$).

Propoziţia 10.7 ***(Reguli de calcul cu diferenţiale Fréchet)***

Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$, iar x_0 un punct din D.

i) Dacă f şi $g : D \to \mathbb{R}^q$ sunt Fréchet-diferenţiabile în x_0, iar λ şi $\mu \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $\lambda f + \mu g : D \to \mathbb{R}^q$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc formula

$$(d(\lambda f + \mu g))(\mathrm{x}_0) = \lambda (df)(\mathrm{x}_0) + \mu (dg)(\mathrm{x}_0).$$

ii) Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ şi $g : D \to \mathbb{R}^q$ sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci funcţia $f \cdot g : D \to R^q$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0 şi are loc relaţia:

$$(d(f \cdot g))(\mathrm{x}_0) = g(\mathrm{x}_0) \cdot (df)(\mathrm{x}_0) + f(\mathrm{x}_0) \cdot (dg)(\mathrm{x}_0).$$

iii) Dacă $f : D \to \mathbb{R}^q$ şi $g : D \to \mathbb{R}^*$ sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci funcţia $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}^q$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc egalitatea:

$$\left(d\left(\frac{f}{g}\right)\right)(\mathrm{x}_0) = \frac{1}{g(\mathrm{x}_0)}(df)(\mathrm{x}_0) - \frac{1}{g^2(\mathrm{x}_0)} f(\mathrm{x}_0)(dg)(\mathrm{x}_0).$$

*iv) **(regula "lanţului")** Dacă Ω este o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^q$, funcţia $f : D \to \Omega$ este Fréchet-diferenţiabilă în x_0, iar $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ este Fréchet-diferenţiabilă în $f(\mathrm{x}_0)$, atunci $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă Fréchet în x_0 şi are loc formula:*

$$(d(g \circ f))(\mathrm{x}_0) = (dg)(f(\mathrm{x}_0)) \circ (df)(\mathrm{x}_0).$$

Demonstraţie: Pentru i), ii) şi iii), se foloseşte Definiţia 10.6. În ceea ce priveşte iv), avem:

$$\lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{(g \circ f)(\mathrm{x}) - (g \circ f)(\mathrm{x}_0) - (((dg)(f(\mathrm{x}_0)))) \circ ((df)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} =$$

$$= \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} \frac{g(f(\mathrm{x})) - g(f(\mathrm{x}_0)) - (dg)(f(\mathrm{x}_0))(f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0))}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}} +$$

$$+ \lim_{\substack{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0\\ \mathrm{x}\neq\mathrm{x}_0}} ((dg)(f(\mathrm{x}_0))) \left(\frac{f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0) - (df)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_{\mathbb{R}^p}}\right) =$$

$$= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} + ((dg)(f(\mathrm{x}_0)))(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^q}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} + \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}.$$

◀

Observaţie: La nivelul matricilor Jacobiene, regula "lanţului" se redă prin relaţia

$$J_{g \circ f}(\mathrm{x}_0) = J_g(f(\mathrm{x}_0)) \cdot J_f(\mathrm{x}_0),$$

care, la rândul ei, la nivelul elementelor acestor matrici, adică la nivelul derivatelor parţiale ale componentelor lui $h = g \circ f$, g şi f, se prezintă astfel:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0) = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\left(f(\mathrm{x}_0)\right) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \mathrm{x}_j}(\mathrm{x}_0), \forall\, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}.$$

În situaţia în care $m = p = q \geq 2$, matricile implicate sunt pătratice şi, prin considerarea determinanţilor lor, avem relaţia:

$$det\left(J_{g\circ f}(\mathrm{x}_0)\right) = det\left(J_g\left(f(\mathrm{x}_0)\right)\right) \cdot det\left(J_f(\mathrm{x}_0)\right).$$

Altfel spus, avem:

$$\frac{D(h_1, h_2, \ldots, h_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(\mathrm{x}_0) = \frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}(f(\mathrm{x}_0)) \cdot \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(\mathrm{x}_0).$$

Când $f \in \mathcal{C}^1(D; E)$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $E \subseteq \mathbb{R}^p$ sunt mulţimi deschise şi nevide, atunci, dacă f este şi bijectivă, există $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(E; D)$ şi $J_{f^{-1}}\left(f(\mathrm{x}_0)\right) = J_f^{-1}(\mathrm{x}_0)$.

Definiţia 10.7 *Date fiind mulţimile deschise şi nevide D_1 şi D_2 din $\mathbb{R}^p$, se numeşte **difeomorfism** (sau **transformare regulată** sau **izomorfism diferenţiabil**) de la D_1 la D_2 o bijecţie $T : D_1 \to D_2$, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe D_1, a cărei inversă $T^{-1} : D_2 \to D_1$ este o aplicaţie continuă, iar matricea jacobiană $J_T(\mathrm{x})$ este nesingulară, $\forall\, \mathrm{x} \in D$ (adică determinantul funcţional $\frac{D(T_1, T_2, \ldots, T_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(\mathrm{x}_0)$ este nenul).*

Orice difeomorfism induce, din punct de vedere geometric, o transformare (schimbare) de coordonate (nu numaidecât liniară).

Derivate şi diferenţiale de ordin superior

Mai întâi, în cazul unei funcţii reale scalar-scalare $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fie $D_1 \neq \varnothing$ acea submulţime de puncte din D în care f este derivabilă (ordinar, de ordinul I). Cu alte cuvinte, se poate vorbi despre derivata $f' : D_1 \to \mathbb{R}$. Dacă aceasta, la rândul ei, este derivabilă într-un punct x_0 din $D_1 \cap D_1'$, atunci elementul $\left(f'\right)'(\mathrm{x}_0)$ se notează cu $f''(\mathrm{x}_0)$ şi se numeşte ***derivata a doua a lui** f **în*** x_0, fiind din $\mathbb{R}$. Când $f''(\mathrm{x})$ există şi este finită, pentru orice $\mathrm{x} \in D_2 \subseteq D_1$, atunci spunem că f este de două ori derivabilă pe D_2, iar funcţia $x \in D_2 \longmapsto f''(\mathrm{x}) \in \mathbb{R}$ se numeşte ***derivata a doua a lui** f*.

Prin recurenţă, spunem că f este derivabilă de n-ori ($n \in \mathbb{N}^*$) în $\mathrm{x}_0 \in \widetilde{D} \subseteq D$ dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă o dată în punctul x_0 şi $f^{(n)}(\mathrm{x}_0)$, adică $\left(f^{(n-1)}\right)'(\mathrm{x}_0)$, se numeşte derivata de ordinul n a funcţiei f în x_0. La nivel de funcţii, $f^{(n)}$ reprezintă derivata de ordinul întâi a derivatei de ordinul $(n-1)$ a lui f. În mod asemănător se introduc şi derivatele laterale de ordin superior ale unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ într-un punct $\mathrm{x}_0 \in D$.

Tot recursiv, se pot defini şi noţiunile de diferenţială Gâteaux, derivată parţială, gradient şi diferenţială Fréchet de ordin superior pentru funcţii reale de argument vectorial.

Astfel, în ceea ce priveşte derivatele parţiale, putem defini, prin recurenţă, derivate parţiale de un ordin oarecare $l \in \mathbb{N}^*$, plecând de la derivatele parţiale de ordinul $l-1$. Dacă, pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, există derivata $\frac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_l}}$, pe o vecinătate a punctului $\mathrm{x}_0 \in D$, şi această funcţie admite derivată parţială (de ordinul întâi), în raport cu x_{i_1} în x_0, unde $i_1, i_2, \ldots, i_l$ sunt elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, p\}$, atunci:

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_l}}(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_l}}\right)}{\partial x_{i_1}}(\mathrm{x}_0).$$

În general, cum indicii $i_1, i_2, \ldots, i_l$ se pot repeta, se preferă exprimarea

$$\left(D^\alpha f\right)(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_p} x_p}(\mathrm{x}_0), \text{ unde } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p, \alpha_k \in \mathbb{N}^*, k = \overline{1, p},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ numindu-se *multi-indice* p-dimensional. Dacă cel puţin două dintre componentele lui α sunt nenule, atunci ***derivata parţială*** în cauză se numeşte ***mixtă***. Altminteri ea se numeşte *derivată parţială nemixtă*.

În cazul în care $|\alpha| = 2$, derivatele mixte care pot exista sunt egale, în condiţiile teoremei lui Schwartz sau ale teoremei lui Young, teoreme ale căror enunţuri (fără demonstraţie) le dăm aici, în continuare.

Teorema 10.8 ***(H. A. Schwartz)***

Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ are derivatele parţiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existente pe o vecinătate a unui punct interior $\mathrm{x}_0 \in D$ şi aceste derivate sunt continue în x_0, atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathrm{x}_0)$

Teorema 10.9 ***(G. C. Young)***

Dacă toate derivatele parţiale de ordinul întâi ale unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ există pe o vecinătate a unui punct x_0, interior unei mulţimi nevide $\widetilde{D} \subseteq D$ şi aceste derivate sunt diferenţiabile Fréchet în x_0, atunci $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x}_0)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathrm{x}_0)$ există şi coincid.

Mai general, dacă o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ admite derivate parţiale până la ordinul $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, continue pe mulţimea nevidă şi deschisă D, atunci

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}}(\mathrm{x}_0) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_p}}(\mathrm{x}_0),$$

oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$, $\mathrm{x}_0 \in D$ şi $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$ obţinut prin permutarea lui $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$.

Definiţia 10.8 *Fie D o mulţime deschisă şi nevidă din $\mathbb{R}^p$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f este* ***de clasă $\mathcal{C}^m$ pe*** *D ($m \geq 2$) dacă f este derivabilă parţial de ordinul m (în raport cu toate variabilele) pe D şi toate derivatele parţiale de ordin m sunt continue pe D. Mulţimea tuturor funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^m$ pe D se notează cu $\mathcal{C}^m(D)$.*

Definind $\mathcal{C}^\infty(D)$ ca fiind mulţimea ***funcţiilor indefinit derivabile parţial pe*** D, adică mulţimea funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^m(D)$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, vedem că are loc relaţia:

$$\mathcal{C}^\infty(D) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^m(D) \subset \mathcal{C}^{m-1}(D) \subset \ldots \mathcal{C}^1(D) \subset \mathcal{C}^0(D).$$

În ceea ce priveşte diferenţiabilitatea Fréchet de ordin superior a unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, are loc următoarea definiţie.

Definiţia 10.9 *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi deschisă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie.*

a) Spunem că f este ***de m ori*** *($m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$)* ***diferenţiabilă Fréchet într-un punct*** *$\mathrm{x}_0 \in D$ dacă f este derivabilă parţial de $(m-1)$ ori într-o vecinătate $V \subseteq D$ a lui x_0 şi toate derivatele parţiale de ordinul $(m-1)$ ale lui f sunt diferenţiabile Fréchet, de ordinul întâi, în x_0.*

b) Spunem că f este ***de m ori diferenţiabilă Fréchet pe*** *$\widetilde{D} \subseteq D$ dacă f este de m ori Fréchet diferenţiabilă în orice punct $\mathrm{x} \in \tilde{D}$.*

c) Numim ***diferenţială Fréchet de ordinul*** *m a funcţiei f în punctul $\mathrm{x}_0 \in D$, aplicaţia $(d^m f)(\mathrm{x}_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$((d^m f)(\mathrm{x}_0))(\mathrm{u}) = \left(u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0) + \cdots + u_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathrm{x}_0)\right)^m, \forall\, \mathrm{u} \in \mathbb{R}^p,$$

unde expresia din membrul secund înseamnă că paranteza se ridică, formal, la puterea simbolică m, după formula polinomială a lui Newton.

De exemplu, pentru $m = 2$, avem:

$$\left(\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)\right)(\mathrm{u}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j, \forall\, \mathrm{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Teorema 10.10 ***(Formula lui Taylor)***
Fie D o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de $(m+1)$ ori diferenţiabilă Fréchet pe D, x_0 un punct din D şi $S_{d_e}(\mathrm{x}_0; r)$ o sferă deschisă inclusă în D. Atunci, pentru orice $\mathrm{x} \in S_{d_e}(\mathrm{x}_0; r)$, există un punct ξ, aparţinând segmentului cu extremităţile x_0 şi x, astfel încât:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}) \quad &= \quad f(\mathrm{x}_0) + \frac{1}{1!}(df)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \frac{1}{2!}\left(d^2 f\right)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \cdots + \\ &\quad + \frac{1}{m!}(d^m f)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) + \frac{1}{(m+1)!}\left(d^{m+1} f\right)(\xi)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0). \end{aligned}$$

Demonstraţie: Considerând un versor oarecare $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^p$ şi $t \in (-r, r)$, se defineşte $\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}$, prin $\varphi(t) = f(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v})$. Cum f este de $(m+1)$-diferenţiabilă pe D, rezultă că şi φ este la fel pe $(-r, r)$. În plus, vedem că avem

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\sum_{k=1}^{p} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0 + t\mathrm{v})\right)^{(k)}, \forall\, k = \overline{1, m+1}.$$

De aici, pentru $\mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{x} - \mathrm{x}_0}{t}$, cu $t \in (-r, r) \setminus \{0\}$, găsim:

$$t^k \varphi^{(k)}(0) = \left(d^k f\right)(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0), \forall\, k = \overline{1, m}.$$

Pe de altă parte, are loc egalitatea

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{t^m}{m!}\varphi^{(m)}(0) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\tau),$$

unde $\tau = \lambda t$, cu $\lambda \in (0, 1)$, $\forall\, t \in (-r, r)$.

Astfel, întrucât $t^{m+1}\varphi^{(m+1)}(\tau) = \left(d^{(m+1)}f\right)(\xi)(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)$, cu $\xi = \mathrm{x}_0+\tau\mathrm{v}$, deducem că este adevărată formula din enunţ. ◀

Bibliografie recomandată

1. F. Iacob - *Matematică pentru anul II - ID*, seria 2004-2005.

2. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice (cap. 11)*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

3. Rodica Luca-Tudorache - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 5 şi 6)*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005

4. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial (cap. 6 şi 7)*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. Ecaterina Cioară, M. Postolache - *Capitole de analiză matematică*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.