

Statistică - Cursul 8

Olariu E. Florentin

Aprilie, 2016

Table of contents

- 1 Statistică
 - Introducere
 - Vocabular
- 2 Statistică descriptivă
 - Variabile
 - Reprezentări grafice
 - Măsurile tendinței centrale
 - Media
 - Mediana
 - Modul
 - Compararea diferitelor măsuri
 - Cvartile
 - Măsurile variabilității
 - Domeniul
 - Dispersia eșantionului și deviația standard a eșantionului
 - Mediana, cvartilele și domeniul intercvartilic
 - Valori aberante

Istorie

- Rădăcinile cuvântului Statistică sunt latine: Status (latina veche) care înseamnă means stat (politic), Statista (italiană) înseamnă politician.
- La mijlocul secolului al XVII-lea într-o Universitate Germană a fost folosit pentru prima oară cuvântul statistik cu sensul de știință politică a statelor: analiza datelor privind statele.
- În Marea Britanie la sfârșitul secolului XVIII termenul de statistică a fost introdus cu un înțeles similar: știința statelor (sau aritmetica politică).
- Utilizarea statisticii fără a o numi în mod expres datează de la începutul civilizației umane: forma incipientă de recensământ al populației, sistematizarea datelor geografice și economice etc.

Istorie

- Primul studiu statistic este considerat în general a fi cel care a pus bazele demografiei: în 1662 doi englezi au introdus metode statistice cum ar fi tabelele speranței de viață și probabilitățile de supraviețuire la diferite vârste.
- Abia în secolul XIX rezultatele din teoria probabilităților au început a fi folosite în raționamentul statistic.
- Bazele matematice ale statisticii s-au consolidat datorită rezultatelor profunde obținute în teoria probabilităților din secolul anterior.
- Începând cu secolul XX au fost dezvoltate noi metode și teorii, iar o influențămajoră asupra statisticii a avut-o dezvoltarea informaticii.

Introducere

"Statistics has become the universal language of the sciences."

Elementary Statistics, R. Johnson, P. Kuby

O *problemă tipică de statistică* este format din

- unul sau mai multe experimente aleatoare din efectuarea cărora rezultă o serie de date.
- o metodă de extragere a informației din date și de interpretare a rezultatelor.

Modul în care informații aeste procesată și interpretată dă naștere la doua ramuri ale statisticii ca știință

- *Statistica descriptivă* - colectează, prezintă și descrie datele (de multe ori în formă grafică).
- *Statistica inferențială* - folosind datele deja colectate ia decizii relativ la populația în cauză.

Introducere

Definition 1.1

Statistica este știința colectării, descrierii, interpretării datelor și luării de decizii pe baza acestor date.

Cele două ramuri ale statisticii sunt și cei doi pași dintr-un studiu statistic:

- **statistica descriptivă** are rolul de a
 - sintetiza, aduna și reprezenta datele;
 - aranja informația, pregătind-o pentru luarea deciziilor;
- **statistica inferențială** are drept scop
 - luarea deciziilor pe baza datelor strânse;
 - estimarea parametrilor (cum sunt media, dispersia etc);
 - verificarea ipotezelor statistice.

Terminologia statistică

- Statistica își are propriul limbaj, dincolo de împărțirea în descriptivă și inferențială.
- Cel mai important concept în statistică este acela de **populație**: colecția completă (exhaustivă) a obiectelor care prezintă interes pentru cel care face studiul.
- Exemple de populații: mulțimea studenților din Iași, mulțimea românilor analfabeți, mulțimea dozelor de cola produse într-o luna într-o fabrică, mulțimea furtunilor tropicale din 2015.

Definition 2.1

O **populație** este o mulțime de obiecte (numite și indivizi) ale căror proprietăți vor fi analizate.

- O populație poate fi finită (dacă poate fi teoretic listată) sau infinită (populația cutremurelor de pământ din zona Vrancea).

Terminologia statistică

- Din cauza dimensiunilor mari ale unei populații studiul statistic se concentrează asupra unei porțiuni mai mici a populației. Acesta este un **eșantion** care constă din indivizi selectați din populație.

Definition 2.2

*Un **eșantion** este o submulțime a populației. Dintr-un punct de vedere teoretic fiecare individ are aceleași șanse de a aparține eșantionului, și orice grup particular de indivizi este ales în mod independent pentru a face parte din eșantion. Dacă aceste condiții sunt îndeplinite atunci avem un **eșantion aleator simplu**.*

- Când se alege o populație sau un eșantion pentru studiu, interesează o anumită trăsătură a indivizilor.
- Astfel de trăsături (attribute) pot fi: înălțimea, volumul, mărimea pe scara Richter, vârsta, presiunea sângelui, culoarea ochilor, suprafața etc.

Terminologia statistică

Definition 2.3

O **variabilă** sau un **atribut** este o caracteristică a indivizilor din populație sau eșantion.

- După ce alegem un eșantion trebuie să măsurăm valorile unuia sau mai multor variabile asociate. Acestea sunt **datele**, ele pot fi numere reale, întregi, cuvinte, litere etc.

Definition 2.4

Datele sunt valori variabilei colectate de la fiecare individ din eșantion.

- O populație este descrisă numeric de **parametri** (medie, disperse, deviație standard); parametrii sunt în centrul unui studiu statistic.
a respectivă.

Terminologia statistică

Definition 2.5

Un **parametru** este o valoare numerică care privește întreaga populație.

- Dacă populația este foarte mare (ceea ce se întâmplă adesea) un parametru anume nu poate fi calculat.
- O soluție este de a calcula parametrul doar pentru un eșantion al populației. Aceasta este o **statistică**.
- Pentru orice parametru și fiecare eșantion există o statistică corespunzătoare.

Definition 2.6

O **statistică** este un parametru calculat pentru un eșantion în locul întregii populații.

Folosirea terminologiei

- **Populație:** mulțimea studenților din primul an din Iași.
- **Eșantion:** studenții din primul an de la FII.
- **Variabilă/atribut:** dimensiunea vocabularului lor curent.
- **Date:** 4200, 3520, 1800, ... - dimensiunile vocabularului pentru fiecare student din primul an de la FII.
- **Parametru:** media dimensiunii vocabularului studenților din primul an din Iași
- **Statistică:** media dimensiunii vocabularului studenților din primul an de la FII.

Tipuri de variabile

- Clasificarea variabilelor împarte atributele în cantitative sau calitative. Astfel există
- Variabile care oferă o *informație calitativă*, cum ar fi culoarea ochilor studenților, genurile literare ale cărților dintr-o bibliotecă (ficțiune, știință, literatură motivațională etc), tipul de personalitate ale persoanelor dintr-o comunitate (sanguin, coleric, melancolic sau flegmatic), nivelul de satisfacție a clienților unui magazin etc.
- Variabile care dau o *informație cantitativă*; spre exemplu: înălțimea studenților, greutatea lor, suma de bani pe care un student o cheltuie pe cărți într-un an școlar ș. a.

Tipuri de variabile

Definition 1.1

O **variabilă calitativă** (sau **categorică**) este o variabilă care descrie un individ dintr-o populație (conform unor categorii).

O **variabilă cantitativă** este o variabilă care măsoară un individ dintr-o populație.

- Variabilele calitative pot fi **nominale** sau **ordinale**.
- Variabilele nominale sunt: culoarea ochilor, tipul de personalitate, numele membrilor unei comunități etc.
- Exemple de variabile ordinale: nivelul de satisfacție a clienților, nivelul de educație (liceal, post-liceal, universitar, post-universitar, doctoral) etc.

Tipuri de variabile

Definition 1.2

O **variabilă nominală** este o variabilă care numește sau descrie un individ dintr-o populație fără a putea asigura o ordine naturală acestor valori..

O **variabilă ordinală** este o variabilă ale cărei valori pot fi ordonate în mod natural.

- Variabilele cantitative pot fi **discrete** sau **continue**. Cele două tipuri pot fi distinse astfel: unele numără iar celelalte măsoară.

Tipuri de variabile

- O variabilă discretă de obicei numără: numărul de credite ale unui student, numărul de pagini ale unei cărți etc; câteodată o asemenea variabilă sumează puncte/note care nu pot fi continue.
- O variabilă continuă măsoară: volumul, înălțimea, viteza, presiunea etc.

Definition 1.3

O **variabilă discretă** este o variabilă care are un număr finit sau infinit dar numărabil de valori; o astfel de variabilă poate avea valori corespunzând unor puncte izolate de pe un interval real.

O **variabilă continuă** este o variabilă care are un număr infinit și nenumărabil de valori; o astfel de variabilă poate avea, de obicei, orice valoare dintr-un interval real, incluzând orice valoare posibilă dintre orice două valori.

Reprezentări grafice

- O primă formă de explorare a datelor este utilizarea reprezentărilor grafice care pot revela un comportament sistematic (un șablon) al variabilei.
- Tipul de reprezentare grafică depinde în mod normal de tipul variabilei.
- Pentru date calitative reprezentările grafice folosite sunt pie charts și bar graphs.
- Pentru datele cantitative scopul reprezentărilor grafice este de a afla forma distribuției variabilei.

Reprezentări grafice - date calitative

- Datele calitative sunt mai întâi transformate în frecvențe.
- *Frecvența* unei observații (o valoare a unei variabile) este numărul de repetări ale acelei observații în eșantion.
- *Frecvența relativă* a unei observații este raportul dintre frecvența observației respective și numărul total de observații (dimensiunea eșantionului).
- *Distribuția frecvențelor* unei variabile calitative este familia tuturor perechilor formate din observație și frecvența sa corespunzătoare.

Reprezentări grafice - date cantitative

- Pentru date cantitative putem utiliza frecvențele și frecvențele relative sau *gruparea* datelor pentru a regăsi distribuția frecvențelor:
 - datele sunt *grupate* în clase (sau *bins*) care sunt uzual intervale cu aceeași lungime; clasele nu trebuie să se acopere.
 - o regulă pentru determinarea lungimii claselor: $1 + \log n / \log 2$ unde n este dimensiunea eșantionului.
 - apoi datele sunt *sortate* pe clase: se determină numărul observațiilor din fiecare clasă - acestea sunt frecvențele.
 - suma frecvențelor este dimensiunea eșantionului (n).
 - frecvențele relative se pot afla împărțind frecvențele la n .

Reprezentări grafice - date cantitative

- Cea mai utilizată metodă de reprezentare grafică a datelor cantitative este *histogram*.
- O altă metodă la îndemână pentru eşantioanele relativ mici este *stem-and-leaf*.

Datele

- Când privim reprezentarea grafică a datelor din eșantion ne putem pune următoarele întrebări.
- Care sunt valorile centrale/medii?
- Cât de mult sunt împrăștiate aceste date în jurul valorilor medii?
- Care este forma distribuției?
- Există valori care nu se potrivesc cu imaginea generală a distribuției?

Tendința centrală

- *Tendința centrală* sau *centrul distribuției* este centrul (abstract) al datelor. Toate măsurile tendinței centrale sunt legate într-un fel sau altul de noțiunea de medie.
- Diferite moduri de a defini tendința centrală:
 - Punctul care ține distribuția în echilibru.
 - Numărul care minimizează suma tuturor deviațiilor absolute.
 - Numărul care minimizează suma tuturor deviațiilor la pătrat.
 - Cea mai frecventă valoare.

Media (aritmetică)

- Să presupunem că valorile din eșantion sunt x_1, x_2, \dots, x_n .

Definition 3.1

Media de selecție sau **media eșantionului** este media aritmetică a tuturor datelor din eșantion:

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

- Formula mediei pentru întreaga populație este în esență identică.
- **Media populației** se notează cu μ .

Media, eșantionul și populația

- În limbajul teoriei probabilităților media populației este media unei variabile aleatoare, X , ale cărei valori sunt cele ale indivizilor din populație; deci $M[X] = \mu$.
- Media de selecție este o statistică care estimează media populației.
- Să presupunem că X_1, X_2, \dots, X_n sunt variabilele din spatele fiecărui individ al eșantionului, iar x_i este doar o valoare a variabilei X_i .
- Atunci X_i este o variabilă aleatoare cu aceeași distribuție ca a lui X . Mai mult, variabilele $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sunt independente în ansamblu.
- Aceste observații conduc la faptul că media de selecție poate fi văzută ca o variabilă aleatoare, iar media aritmetic calculată pentru un eșantion este una dintre posibilele valori ale ei (fiecare eșantion dă o altă valoare a mediei de selecție).

Media, eşantionul și populația

- Dacă media de selecție este o variabilă aleatoare, îi putem calcula media:

$$\begin{aligned}M[\bar{x}_n] &= M\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] = \\&= \frac{1}{n} M[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \\&= \frac{M[X_1] + M[X_2] + \cdots + m[X_n]}{n} = \mu.\end{aligned}$$

- Media mediei de selecție este media populației.
- O astfel de statistică se numește *estimator nedeplasat* al parametru-lui corespunzător.
- Media de selecție este un estimator nedeplasat pentru media popu-lației.

Media pentru date grupate

- Formula din definiția anterioară este valabilă pentru date negrupate. În acest caz toate datele din eșantion contribuie direct la calculul mediei de selecție.
- Pentru date grupate se folosește o formulă cu ponderi:

$$M = \frac{m_i * f_i}{\sum_i f_i}$$

unde m_i este mijlocul intervalului clasei i , iar f_i este numărul de observații care aparțin clasei i .

- În această formulă observațiile nu contribuie direct la calculul mediei; cu toate acestea este o formulă preferată în cazul datelor grupate pentru eșantioane mari fiind mai ușor de calculat.

Proprietăți ale mediei

- Ne întoarcem acum la definiția inițială (pentru date negrupate) a mediei de selecție.
- Variații mici în suma de la numărător nu modifică prea mult media. Spunem ca media este stabilă la variații mici ale datelor.
- *Valorile aberante* sau *extreme* pot avea o influență mare asupra mediei; introducând o valoare foarte mare sau foarte mică media se poate schimba foarte mult.
- Media este o funcție *liniară* (la fel ca media unei variabile aleatoare).
- *Deviatiile* de la medie sunt $(x_i - \bar{x}_n)$; suma lor este zero:

$$\sum_i (x_i - \bar{x}_n) = 0.$$

Proprietăți ale mediei

- (*Definiția variațională*) Se poate arăta că media este numărul M care minimizează suma deviațiilor la pătrat:

$$\sum_i (x_i - M)^2.$$

- Există și alte tipuri de medie în afară de cea aritmetică (A): media geometrică (G), media armonică (H).

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

- Să presupunem că o mașină parcurge distanța dintre două orașe de patru ori cu vitezele 80km/h, 90km/h, 60km/h, and 120km/h, respectiv. Care a fost viteza sa medie?
- Folosim media aritmetică obținem 87.5 km/h, dar media adecvată aici este cea armonică: 82.3km/h.

Mediana

- Mediana este o *statistică ordonată*; calculul unei astfel de statistici presupune ordonarea crescătoare a datelor din eșantion.

Definition 3.2

Median (Me) este valoarea din mijloc când datele din eșantion sunt sortate.

- Mediana împarte datele din eșantion în două jumătăți: o jumătate conține datele mai mari sau egale decât mediana, iar cealaltă jumătate le conține pe cele mai mici sau egale.
- Valoarea medianei este o observație sau media a doua observații (pentru eșantioane de dimensiune pară).
- Ca statistică mediana este mult mai puțin influențată de existența valorilor aberante.

Mòdul

Definition 3.3

Mòdul este observația cea mai frecventă din eșantion.

- Pentru date grupate se alege mai întâi clasa cu cea mai mare frecvență **clasa modală**. Fie i indexul acestei clase, a_i marginea stângă a intervalului corespunzător și L lungimea comună a intervalelor.
- Atunci mòdul poate fi calculat folosind formula
$$mod = a_i + \frac{L * (f_i - f_{i-1})}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}.$$
- **Antimòdul** este cea mai puțin frecventă observație.

Compararea diferitelor măsuri

- Mai stabile la valorile aberante sunt mediana și mōdul.
- Media încorporează toate valorile și nu poate fi calculată, în cazul datelor grupate pentru distribuții deschise (primul, sau ultimul interval deschis).
- Mediana și mōdul nu sunt funcții liniare.
- Mōdul este calculat mai laes pentru date grupate.
- Pentru distribuții asimetrice mōdul oferă cea mai reală imagine asupra tendinței centrale.

Compararea diferitelor măsuri

- Dacă eșantionul conține date foarte mari sau foarte mici mediana este măsura preferată mediei - stabilitatea o face mai reprezentativă.
- Pentru distribuții simetrice cele trei măsuri sunt aproape egale.
- Forma distribuției poate fi legată de relația dintre medie și mediană; forma poate fi
- asimetrică spre stânga dacă $\bar{x}_n < Me$;
- simetrică dacă $\bar{x}_n = Me$;
- asimetrică spre dreapta dacă $\bar{x}_n > Me$;

Cvartile

- Relativ la măsurile tendinței centrale există *măsurile de poziție* care sunt statistici ordonate ca și mediana.

Definition 3.4

Cvartilele sunt valori care împart domeniul (ordonat al) observațiilor în patru segmente egale.

- Prima cvartilă, Q_1 , este o valoare astfel în cât 25% dintre observații sunt cel mult egale cu Q_1 și cel mult 75% sunt mai mari sau egale.
- A treia cvartilă, Q_3 , este o valoare astfel în cât 75% dintre observații sunt cel mult egale cu Q_3 și cel mult 25% sunt mai mari sau egale.

Cvartile

- A doua cvartilă, Q_2 , este o valoare astfel în cât 50% dintre observații sunt cel mult egale cu Q_2 și cel mult 50% sunt mai mari sau egale. Din acest motiv a doua cvartilă este egală cu mediana: $Me = Q_2$.
- Cvartilele au proprietăți similare cu cele ale medianei. Cea mai importantă fiind aceea că sunt stabile în prezența valorilor aberante.
- Statistici ordonate similare sunt: *decilele*, *percentilele* etc. Toate aceste statistici împart datele ordonate în subeșantioane egale.
- De exemplu există nouă decile care împart datele sortate în zece părți egale, fiecare parte reprezentând 10% din eșantion.

Măsurile ale variabilității

- După determinarea "centrului" datelor studiul statistic continuă cu analiza *împrăstierii* sau a *variabilității* datelor
- Valorile din eșantion pot să difere mult între ele și față de valoarea "centrală".
- Măsura în care valoare "centrală"/medie este reprezentativă pentru întreg eșantionul depinde de variabilitatea (sau dispersia) datelor.
- Eșantionul are variabilitate mare dacă există valori foarte mari sau foarte mici față de valoarea medie.
- Deoarece avem două moduri importante de a măsura tendința centrală (media și mediana) vom avea două metode de a măsura împrăstierea.

Domeniul

Definition 4.1

Domeniul este diferența dintre cea mai mică și cea mai mare valoare din eșantion.

$$\text{range} = \max - \min.$$

- Deoarece definiția aceasta se bazează doar pe valorile extreme, dacă minimul sau maximum este foarte mare respectiv foarte mic, domeniul nu este reprezentativ pentru variabilitatea datelor.
- Se observă că valorile aberante au o influență directă asupra domeniului.

Dispersia eșantionului

Începem cu măsurile variabilității legate de medie.

- Deviațiile față de medie sunt $(x_i - \bar{x}_n)$.
- O deviație $(x_i - \bar{x}_n)$ este pozitivă (negativă) când x_i este mai mare (mai mică) decât media de selecție.
- Pentru a descrie o valoare medie a deviațiilor s-ar putea utiliza media aritmetică a acestor deviații. Dar suma acestor deviații fiind zero, o astfel de medie este nulă.
- Putem îndepărta acest efect ridicând la pătrat deviațiile și utilizând o medie pătratică în locul uneia aritmetice.

Dispersia eșantionului

Definition 4.2

Dispersia eșantionului, s^2 , n fiind dimensiunea eșantionului, este:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{n - 1},$$

- Dispersia eșantionului este nenegativă și este zero dacă și numai dacă valorile sunt toate identice.
- Dispersia eșantionului este statistica asociată *dispersiei populației*, notată cu σ^2 .

Dispersia eșantionului

- Motivul pentru care se utilizează $(n - 1)$ ca numitor în definiția dispersiei eșantionului este acela că astfel se obține un estimator nedeplasat.
- Media dispersiei eșantionului (văzută ca o variabilă aleatoare) este

$$\begin{aligned}
 M[s^2] &= M \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x}_n)^2}{n - 1} \right] = M \left[\frac{\sum_{i=1}^n \left(nX_i - \sum_{j=1}^n X_j \right)^2}{n(n - 1)} \right] = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n M \left[n^2 X_i^2 - 2nX_i \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) + \left(\sum_{j=1}^n X_j \right)^2 \right]}{n^2(n - 1)} =
 \end{aligned}$$

Dispersia eșantionului

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sum_{i=1}^n M[n^2 X_i^2] - 2n \sum_{i=1}^n M\left[\sum_{j=1}^n X_i X_j\right] + nM\left[\sum_{j=1}^n X_j^2 + 2 \sum_{i < j} X_i X_j\right]}{n^2(n-1)} \\
 &= \frac{n^2 \sum_{i=1}^n M[X_i^2] - 2n \sum_{i=1}^n M[X_i^2] - 2n \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} M[X_i X_j]}{n^2(n-1)} + \\
 &\quad + \frac{n \sum_{j=1}^n M[X_j^2] + 2n \sum_{i < j} M[X_i X_j]}{n^2(n-1)} =
 \end{aligned}$$

Dispersia eșantionului

$$\begin{aligned}
 & \frac{n(n-1) \sum_{i=1}^n M[X_i^2] - 2n \sum_{i < j} M[X_i X_j]}{n^2(n-1)} = \\
 & \frac{n^2(n-1) \sum_{i=1}^n M[X_i^2] - 2n \sum_{i < j} M[X_i] M[X_j]}{n^2(n-1)} = \\
 & \frac{\sum_{i=1}^n M[X_i^2] - M[X_i]^2}{n} = \sigma^2.
 \end{aligned}$$

Deviația standard a eșantionului

- O formulă mai simplă (exercițiu) pentru dispersia eșantionului este

$$s^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n(n-1)}.$$

Definition 4.3

Deviația standard a eșantionului, s , este rădăcina pătrată a dispersiei eșantionului.

- Deviația standard a eșantionului este un estimator deplasat al deviației standard a populației, σ .
- Se poate arăta că deviația standard a eșantionului este mai mică decât cea a populației, $s < \sigma$.

Sumarul celor cinci numere

Continuăm cu măsurile ale împrăștierei legate de mediană. Mai întâi sumarul celor cinci numere.

Definition 4.4

Sumarul celor cinci numere este compus din

- 1 *min*, cea mai mică valoare din eșantion;
- 2 Q_1 , prima cvartilă;
- 3 Me , mediana;
- 4 Q_3 , a treia cvartilă;
- 5 *max*, cea mai mare valoare din eșantion.

Domeniul intercvartilic

- O metodă grafică de a reprezenta sumarul celor cinci numere: *box-and-whiskers*.

Definition 4.5

Cvartila medie este valoarea de mijloc dintre prima și cea de-a treia cvartilă:

$$midq = \frac{Q_1 + Q_3}{2}.$$

Domeniu intercvartilic este diferența dintre prima și cea de-a treia cvartilă:

$$IQR = Q_3 - Q_1.$$

Valori aberante

- *Valorile aberante* sunt acele valori din eșantion care pot fi considerate prea mici sau prea mari față de "tabloul" general al eșantionului.
- Evident, valorile aberante sunt legate de variabilitatea datelor. În mod obișnuit aceste valori vin din erori de măsură, dar pot avea și cauze naturale.
- Câteodată aceste valori aberante (dacă sunt datorate măsurilor) pot fi eliminate din eșantion înainte de orice altă analiză statistică.
- Vom avea două reguli de determinare a valorilor aberante, deoarece și variabilitatea datelor se măsoară în două feluri.

Valori aberante

- Prima regulă este legată de medie. Pot fi considerate valori aberante acele valori ale eșantionului care nu aparțin intervalului $(\bar{x}_n - 2s, \bar{x}_n + 2s)$.
- A doua regulă se numește regula $1.5 * IQR$ și spune că o valoare este aberantă dacă nu aparține intervalului $(Q_1 - 1.5 * IQR, Q_3 + 1.5 * IQR)$ is an outlier.

Bibliography



Freedman, D., R. Pisani, R. Purves, *Statistics*, W. W. Norton & Company, 4th edition, 2007.



Johnson, R., P. Kuby, *Elementary Statistics*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 11th edition, 2012.



Shao, J., *Mathematical Statistics*, Springer Verlag, 1998.



Spiegel, M. R., L. J. Stephens, *Theory and Problems of Statistics*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, 3rd edition, 1999.