Setul 10

de probleme şi exerciţii de matematică

(relative la derivabilitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor reale)

S10.1 Pentru următoarele funcţii, să se studieze derivabilitatea (ordinară, direcţională, Gâteaux sau parţială, după caz) în punctele sau pe mulţimile şi, acolo unde se sugerează, pe direcţiile indicate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$, în $x_0=1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max\left\{|x|,\left|2-x^2\right|\right\}$, pe $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x]\sin^2(\pi x)$, pe $\mathbb{R}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2+3x+3\right), & x\in\mathbb{Q}\\ (x+2)\left(e^{x+1}-1\right), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, în $x_0\in\{-2,-1\}$;

e) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=4xy^3-z^2$, în $(-1,1,13)$ după direcţia $(4,-3,12)$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, f(x)=\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}},\left(1+x^2\right)^{\sqrt[3]{x}}\right)$, în $x_0=0$;

g) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=\sin(x\sin(y\sin z))$, într-un punct din $\{(x,y,\pi)\in\mathbb{R}^3\mid xy=0\}$, pe direcţia v a intersecţiei planelor $2x+y+2z-1=0$ şi $3x+y+3z+1=0$;

h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y)=\left(e^{xy},\cos(x-y)-1,\ln\left(x^2+\sqrt{1+y^2}\right)\right)$, în punctul $0_{\mathbb{R}^2}$, pe direcţia v a dreptei ce trece prin punctele $(1,-2)$ şi $(-3,1)$;

i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, în $(x_0,y_0)=(0,0)$;

j) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$, în $(x_0,y_0)=(0,0)$, unde

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \text{şi}\quad f_2(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

S10.2 Să se analizeze diferenţiabilitatea Fréchet, în origine, pentru fiecare dintre următoarele funcţii:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ f(x)=(f_1(x),f_2(x))$, în $x_0=0$, unde

$$f_1(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0\\ x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}\quad \text{şi}\quad f_2(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ \operatorname{arctg}x, & x\geq 0\end{cases};$$

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$;

d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$, cu

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \text{ şi } f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

S10.3 Să se determine diferenţialele de ordinul întâi, doi şi trei ale următoarelor funcţii, într-un punct interior oarecare al mulţimii lor de definiţie:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=\left(x^2y,xy-y^2,x^3-2xy\right)$;

b) $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(\ln x,\operatorname{arctg} x)$;

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=\left(e^z\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+1}\right),\sin(x-y+z)\right)$.

S10.4 Fie $f:\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z))$, unde $f_1(x,y,z)=x^y+y^z-2z^x$ şi $f_2(x,y,z)=\dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{y^2z}+\dfrac{1}{z^3(x+y)}$, $\forall\, x,y,z>0$. Să se calculeze:

a) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(3,2,1)+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1,3,2)+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}(2,3,1)$ şi $(\nabla f_1)(1,1,1)$;

b) $x\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)-y\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)+2z\dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)$ în punctul $(3,3,1)$;

c) $((df_1)(1,e,e))\left(\dfrac{2}{e},1,-1\right)$ şi $\left((df_2)\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)\right)(1,1,-2)$;

d) $(df)(x_0,y_0,z_0)$ (într-un punct curent, (x_0,y_0,z_0), din $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$).

S10.5 Să se arate că funcţiile de mai jos, derivabile pe mulţimea lor de definiţie, satisfac relaţiile indicate:

a) $f(x,y)=xy\sqrt{1+(x^2-y^2)^2}$,

$$xy<(y,x),(\nabla f)(x,y)>_e=||(x,y)||_e^2\cdot f(x,y);$$

b) $f(x,y,z)=\ln(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z)$, $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z>0$,

$$\sin 2x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+\sin 2y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+\sin 2z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2;$$

c) $f(x,y)=\sin x+g(\sin y-\sin x)$,

$$\cos y\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\cos x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos x\cos y,\forall g\in\mathcal{C}^1\left([-2,2];\mathbb{R}\right);$$

d) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\varphi\left(x_1-x_2,(x_3-x_4)e^{-x_1},x_3-x_4(x_1-x_2+1)\right)$,

$$(x_1-x_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,x_4)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right)+$$

$$+(x_3-x_4)\left[(x_1-x_2+1)\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4)+\frac{\partial f}{\partial x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)\right]=0,\forall\varphi\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}\right).$$

S10.6 Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$. Să se arate că există derivatele parţiale de ordinul al doilea, mixte, ale lui f, în orice punct $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dar acestea nu sunt continue în $(0,0)$. Sunt ele egale în $(0,0)$?

S10.7 Fie C o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^n$, astfel încât, pentru orice $x \in C$ şi orice $t \in \mathbb{R}^*$, avem $tx \in C$. O funcţie $f : C \to \mathbb{R}$ este, prin definiţie, *omogenă în sens Euler*, de grad ω ($\omega \in \mathbb{R}$) (sau, altfel spus, f este ω-*omogenă în sens Euler*), pe C, dacă şi numai dacă $f(tx) = t^\omega f(x)$, $\forall\, x \in C$, $\forall t \in \mathbb{R}^*$.

Să se arate că, în ipoteza că f este Fréchet diferenţiabilă pe C şi $\omega \in \mathbb{R}$, atunci f este ω-omogenă în sens Euler dacă şi numai dacă satisface identitatea lui Euler:

$$< \nabla f(x), x >= \omega f(x), \forall\, x \in C \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

S10.8 Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime convexă (adică, pentru orice $x, y \in A$ şi $\lambda \in [0,1]$, avem $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$), cu interiorul $\mathring{A}$ nevid şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe A şi deferenţiabilă pe $\mathring{A}$. Să se arate atunci că f este convexă pe $\mathring{A}$ (adică, $\forall\, x, y \in \mathring{A}$ şi $\lambda \in [0,1]$, satiface relaţia $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$), dacă şi numai dacă verifică relaţia

$$< (\nabla f)(y) - (\nabla f)(x), y - x >\geq 0, \forall\, x, y \in \mathring{A}$$

sau, echivalent, inegalitatea:

$$f(y) \geq f(x) + < (\nabla f)(x), y - x >, \forall\, x, y \in \mathring{A}.$$

S10.9 Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, deschisă şi convexă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet pe D. Atunci, oricare ar fi punctele $x, y \in D$, există $z \in \{ty + (1-t)x \mid t \in (0,1)\}$, astfel încât

$$f(y) - f(x) = (df)(z)(y - x).$$

S10.10 Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $D \neq \varnothing$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$ ($q \geq 2$). Să se arate că dacă D este deschisă şi convexă, iar f este diferenţiabilă Fréchet pe D, atunci, pentru oricare două puncte $x, y \in D$, există $\xi \in \{ty + (1-t)x \mid t \in (0,1)\}$, astfel încât:

$$\|f(y) - f(x)\|_{\mathbb{R}^q} \leq \|(df)(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)} \cdot \|y - x\|_{\mathbb{R}^p}.$$

S10.11

a) Să se dezvolte funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4,$$

cu ajutorul formulei lui Taylor, în vecinătatea punctului $(1,1,1)$;

b) Să se dezvolte Taylor polinomul $P(x,y) = 2x^3 - 3x^2 y + 2y^2 + 9x^2 - 3y + 6x + 3$ după puterile lui $x+1$ şi $y-1$;

c) Să se scrie dezvoltarea Taylor, după puterile lui x şi y, a funcţiei $f(x,y) = \left(e^{\sin(x-y)}, \cos(x+y)\right)$, până la termenii de gradul al doilea inclusiv.

S10.12 Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, xy + yz + zx\right)$

a) Să se studieze derivabilitatea Gâteaux şi diferenţiabilitatea Fréchet a lui f pe $Kerf$;

b) Să se arate că Jacobiana funcţiei f există şi este singulară în orice punct din $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

S10.13 Să se arate că $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x, y, z) = (z^2 - x^2 - y^2) \cdot \mathrm{sh}(x - y + z)$, satisface relaţia

$$(z-y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + (x+z)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + (x+y)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

S10.14 Fie $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, dată prin $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1x_2x_3}$.

a) Să se calculeze $(df)(1, 1, 1)$.

b) Să se arate că f este convexă.

S10.15 Fie D o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^3$. De asemenea, fie $f : D \to \mathbb{R}^*$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D. Să se arate că are loc formula:

$$\left(\left(d^2\left(\frac{1}{f}\right)\right)(x)\right)(u,v) = -\frac{1}{f^2(x)}\left(\left(d^2 f\right)(x)\right)(u,v) + \frac{2}{f^3(x)}\left((df)(x)\right)(u)\cdot\left((df)(x)\right)(v),$$

$$\forall\, x \in D, \forall\, u, v \in \mathbb{R}^3.$$

S10.16 Să se scrie formula lui Taylor de ordinul 3 pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = 3x_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 2x_2 + 4,$$

într-o vecinătate a punctului $(-2, 1)$.

Bibliografie indicată

1. C. Drăguşin - *Calcul diferenţial (Culegere de exerciţii şi probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2008.

2. Irinel Radomir, Andreea Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme. (Cap. 5)*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

3. Ileana Toma - *Analiză matematică.Calcul diferenţial.Curs, aplicaţii si exerciţii propuse,* Conspress (U.T.C.B.), 2010.

4. M. Postolache - *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii),* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

5. James Stewart - *Student Solutions Manual, Chapters 10-17 for Stewart's Multivariable Calculus*, 8th Paperback, 2015.

6. Tevian Dray a. a. - *Interpreting Derivatives,* Oregon State University, 2016.