Exerciții LP1 - Semantică și forme normale

December 5, 2016

Fie structura $S = (U, I)$, unde;

1. $U = \mathbb{Z}$;
2. $I_x = 7$, $I_y = 5$, $I_z = 0$ pentru orice $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$;
3. $I_c = 3$;
4. $I_d = 0$;
5. pentru orice $u \in U$, $I_P(u) = 1$ ddacă u este par;
6. pentru orice $u \in U$, $I_Q(u) = 1$ ddacă u este impar;
7. pentru orice $u, v \in U$, $I_R(u, v) = 1$ ddacă u este mai mic sau egal ca v;
8. pentru orice $u, v \in U$, $I_T(u, v) = 1$ ddacă u este mai mic strict decât v;
9. $I_f(u, v) = u + v$, pentru orice $u, v \in U$;
10. $I_h(u) = u + 1$, pentru orice $u \in U$;
11. $I_g(u) = 2 * u$, pentru orice $u \in U$.

1. Calculați interpretarea următorilor termeni în structura S de mai sus:
   (a) c
   (b) x
   (c) y
   (d) $f(x, y)$
   (e) $f(y, x)$
   (f) $h(z)$
   (g) $g(h(c))$
   (h) $h(g(c))$
   (i) $(f(x, h(z))$
   (j) $f(f(x, d), f(y, z))$

2. Calculați interpretarea umătorilor termeni în structura $S[x \mapsto 8]$:

   (a) c
   (b) x
   (c) y
   (d) $f(x, y)$
   (e) $f(y, x)$
   (f) $h(z)$
   (g) $g(h(c))$
   (h) $h(g(c))$
   (i) $(f(x, h(z))$
   (j) $f(f(x, d), f(y, z))$

3. Calculați interpretarea următoarelor formule în structura S de mai sus:

   (a) $P(x)$
   (b) $Q(x)$
   (c) $Q(y)$
   (d) $P(c)$
   (e) $R(c, x)$

4. Calculați interpretarea următoarelor formule în structura $S[x \mapsto 8]$:

   (a) $P(x)$
   (b) $Q(x)$
   (c) $Q(y)$
   (d) $P(c)$
   (e) $R(c, x)$

5. Calculați interpretarea următoarelor formule în structura S de mai sus:

   (a) $P(x) \vee Q(x)$
   (b) $\neg P(d)$
   (c) $P(x) \rightarrow Q(h(x))$
   (d) $P(d) \rightarrow Q(h(d))$
   (e) $P(d) \wedge \neg Q(d)$

6. Calculați interpretarea următoarelor formule în structura S de mai sus:

   (a) $\forall z.\Big(P\big(h(z)\big)\Big)$

(b) $\forall z.Q(x)$

(c) $\forall z.Q(z)$

(d) $\forall z.(Q(z) \vee P(z))$

(e) $\forall z.(Q(z) \rightarrow P(h(z)))$

(f) $\forall x.(Q(x) \vee P(x))$

(g) $\forall x.(Q(x) \wedge P(x))$

(h) $\forall x.(Q(g(h(x))))$

7. Calculați interpretarea următoarelor formule în structura S de mai sus:

   (a) $\exists x.(Q(x))$

   (b) $\exists y.(P(y))$

   (c) $\exists x.(P(y))$

   (d) $\exists x.(Q(y))$

   (e) $\exists x.(Q(y) \vee P(y))$

8. Calculați interpretarea următoarelor formule în structura S de mai sus:

   (a) $R(y, x)$

   (b) $R(x, y)$

   (c) $\forall z.R(x, z)$

   (d) $\exists z.R(x, z)$

   (e) $\forall x.R(x, h(x))$

   (f) $\exists x.R(x, g(x))$

   (g) $\exists x.R(h(x), x)$

   (h) $\exists x.R(x, y)$

9. Calculați interpretarea următoarelor formule în structura S de mai sus:

   (a) $\forall x.\forall y.R(x, y)$

   (b) $\forall x.\exists y.R(x, y)$

   (c) $\exists x.\exists y.R(x, y)$

   (d) $\exists x.\forall y.R(x, y)$

   (e) $\forall x.\exists y.R(f(x, y), x)$

   (f) $\forall x.\exists y.R(f(x, y), x)$

10. Calculați interpretarea următoarelor formule în structura S de mai sus:

    (a) $\forall x.\forall y.T(x, y)$

    (b) $\forall x.\exists y.T(x, y)$

(c) $\exists x.\exists y.T(x, y)$

(d) $\exists x.\forall y.T(x, y)$

(e) $\forall x.\exists y.T(f(x, y), x)$

(f) $\forall x.\exists y.T(f(x, y), x)$

11. Arătați că următoarea formulă este adevărată în structura S:

$$F = \forall x.\forall y.\Big(R(x, y) \to \exists z.\big(R(x, z) \land R(z, y)\big)\Big)$$

12. Arătați că următoarea formulă nu este adevărată în structura S:

$$F = \forall x.\forall y.\Big(T(x, y) \to \exists z.\big(T(x, z) \land T(z, y)\big)\Big)$$

13. Fie structura $S_1 = (U, I)$ astfel încât:

    (a) $U = \mathbb{R}$;

    (b) $I_x = 7$, $I_y = \pi = 3.1415\ldots$, $I_z = 0$ pentru orice $z \in \mathcal{X} \setminus \{x, y\}$;

    (c) $I_c = 3.1415$;

    (d) $I_d = 0$;

    (e) pentru orice $u \in U$, $I_P(u) = 1$ ddacă u este par;

    (f) pentru orice $u \in U$, $I_Q(u) = 1$ ddacă u este impar;

    (g) pentru orice $u, v \in U$, $I_R(u, v) = 1$ ddacă u este mai mic sau egal ca v;

    (h) pentru orice $u, v \in U$, $I_T(u, v) = 1$ ddacă u este mai mic strict decât v;

    (i) $I_f(u, v) = u + v$, pentru orice $u, v \in U$;

    (j) $I_{f'}(u, v) = u \times v$, pentru orice $u, v \in U$;

    (k) $I_h(u) = u + 1$, pentru orice $u \in U$;

    (l) $I_g(u) = 2 * u$, pentru orice $u \in U$.

14. Calculați valorile de adevăr ale formulelor din exercițiile de mai sus în structura S_1.

15. Arătați că următoarea formulă este adevărată în structura S_1:

$$F = \forall x.\forall y.\Big(R(x, y) \to \exists z.\big(R(x, z) \land R(z, y)\big)\Big)$$

16. Arătați că și următoarea formulă este adevărată în structura S_1:

$$F = \forall x.\forall y.\Big(T(x, y) \to \exists z.\big(T(x, z) \land T(z, y)\big)\Big)$$

17. Arătați că S și S_1 sunt model pentru următoarele formule:

   (a) $F_1 = \forall x.\forall y.(T(x, y) \rightarrow R(x, y))$
   (b) $F_2 = \forall x.\forall y.\forall z.(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$
   (c) $F_3 = \forall x.\forall y.\forall z.(R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow (R(x, g(x)) \wedge R(g(x), x)))$

18. Arătați că S este model pentru următoarele formule:

   (a) $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists y.(R(x, y) \wedge Q(y)))$
   (b) $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists y.(R(x, y) \wedge P(y)))$

19. Găsiți câte un model pentru fiecare din următoarele formule:

   (a) $\forall x.P(x)$
   (b) $\exists x.P(x)$
   (c) $\exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)$
   (d) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x))$
   (e) $\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$
   (f) $\forall x.\Big(\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \wedge \big(Q(x) \rightarrow P(x)\big)\Big)$
   (g) $\forall x.(P(x) \rightarrow R(c, x))$
   (h) $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists y.R(x, y))$
   (i) $\forall x.(P(x) \rightarrow \forall y.R(x, y))$

20. Găsiți câte o structură în care următoarele formule să nu fie adevărate:

   (a) $\exists x.P(x)$
   (b) $\exists x.R(x, y)$
   (c) $\exists x.\exists y.R(x, y)$
   (d) $\forall x.P(x)$
   (e) $\forall x.P(y)$
   (f) $\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$
   (g) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x))$
   (h) $\exists x.(P(x) \vee Q(x))$

21. Arătați că următoarele formule sunt satisfiabile:

   (a) $P(x)$
   (b) $P(x) \wedge Q(x)$
   (c) $P(x) \wedge Q(c)$
   (d) $\exists x.(P(x) \wedge Q(c))$

(e) $\forall x.P(x)$

22. Arătați că următoarele formule sunt valide:

    (a) $P(x) \vee \neg P(x)$
    (b) $P(x) \rightarrow P(x)$
    (c) $(\forall x.P(x)) \rightarrow (\exists x.P(x))$
    (d) $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists x.P(x))$
    (e) $\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(c) \rightarrow Q(c)$
    (f) $\Big(\forall x.\forall y.(R(x,y) \rightarrow R(y,x))\Big) \wedge R(x,y) \rightarrow R(y,x)$

23. Arătați că, pentru orice formule $F_1, F_2, F_3 \in \texttt{LP1}$, următoarele echivalențe au loc:

    (a) $F_1 \vee F_2 \equiv F_2 \vee F_1$
    (b) $F_1 \wedge F_2 \equiv F_2 \wedge F_1$
    (c) $(F_1 \vee F_2) \vee F_3 \equiv F_1 \vee (F_2 \vee F_3)$
    (d) $(F_1 \wedge F_2) \wedge F_3 \equiv F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)$
    (e) $F_1 \rightarrow F_2 \equiv \neg F_1 \vee F_2$
    (f) $\neg(F_1 \wedge F_2) \equiv \neg F_1 \vee \neg F_2$
    (g) $\neg(F_1 \vee F_2) \equiv \neg F_1 \wedge \neg F_2$
    (h) $F_1 \rightarrow F_2 \equiv \neg F_1 \vee F_2$

24. Arătați că, pentru orice formulă $F \in \texttt{LP1}$, pentru orice $x \in \mathcal{X}$, următoarele echivalențe au loc:

    (a) $\forall x.F \equiv \neg(\exists x.(\neg F))$
    (b) $\exists x.F \equiv \neg(\forall x.(\neg F))$

25. Arătați că, pentru orice formule $F, G \in \texttt{LP1}$, pentru orice $x \in \mathcal{X}$, dacă $x \notin \mathit{free}(G)$, atunci următoarele echivalențe au loc:

    (a) $\forall x.(F \wedge G) \equiv \forall x.F \wedge G$
    (b) $\forall x.(F \vee G) \equiv \forall x.F \vee G$
    (c) $\exists x.(F \wedge G) \equiv \exists x.F \wedge G$
    (d) $\exists x.(F \vee G) \equiv \exists x.F \vee G$

26. Arătați că, pentru orice formule $F, G \in \texttt{LP1}$, următoarele echivalențe au loc:

    (a) $\forall x.(F \wedge G) \equiv \forall x.F \wedge \forall x.G$
    (b) $\exists x.(F \vee G) \equiv \exists x.F \vee \exists x.G$

27. Arătați că, pentru orice formulă $F \in \texttt{LP1}$, următoarele echivalențe au loc:

    (a) $\forall x.\forall.y.F \equiv \forall y.\forall x.F$

    (b) $\exists x.\exists.y.F \equiv \exists y.\exists x.F$

28. Arătați că, pentru orice formulă $F \in \texttt{LP1}$, dacă $x \notin \mathit{free}(F)$, atunci următoarele echivalențe au loc:

    (a) $\forall x.F \equiv F$

    (b) $\exists x.F \equiv F$

29. Arătați că o formulă F este validă dacă și numai dacă închiderea ei universală este validă.

30. Arătați că o formulă F este satisfiabilă dacă și numai dacă închiderea ei existențială este satisfiabilă.

31. Arătați că:

    (a) $\forall x.P(x) \models P(c)$

    (b) $\forall x.P(x) \models P(x)$

    (c) $\forall x.P(x) \models \exists x.P(x)$

    (d) $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \models \forall x.P(x)$

    (e) $P(x), P(x) \rightarrow Q(x) \models Q(x)$

    (f) $F, F \rightarrow G \models G$ pentru orice $F, G \in \texttt{LP1}$

    (g) $P(c), \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \models Q(c)$

32. Arătați că $F \equiv G$ ddacă $F \models G$ și $G \models F$.

33. Arătați că $\forall x.P(x) \equiv \forall y.P(y)$.

34. Arătați că, pentru orice $F, G, H \in \texttt{LP1}$, următoarele echivalențe au loc:

    (a) $F \wedge G \equiv G \wedge F$ (comutativitatea lui $\wedge$)

    (b) $F \vee G \equiv G \vee F$ (comutativitatea lui $\vee$)

    (c) $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$ (asociativitatea lui $\wedge$)

    (d) $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$ (asociativitatea lui $\vee$)

35. Arătați că, pentru orice $F, G, H \in \texttt{LP1}$, următoarele echivalențe au loc:

    (a) $\neg\neg F \equiv F$

    (b) $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$ (distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$)

    (c) $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ (distributivitatea lui $\wedge$ față de $\vee$)

    (d) $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$ (legea 1 a lui de Morgan)

(e) $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$ (legea 2 a lui de Morgan)

36. Arătați că, pentru orice $F, G \in \texttt{LP1}$ și pentru orice variabilă $x \in \mathcal{X}$ care nu apare liber în G, următoarele echivalențe au loc:

(a) $\forall x.F \wedge G \equiv \forall x.(F \wedge G)$

(b) $\forall x.F \vee G \equiv \forall x.(F \vee G)$

(c) $\exists x.F \wedge G \equiv \exists x.(F \wedge G)$

(d) $\exists x.F \vee G \equiv \exists x.(F \vee G)$

37. Calculați:

(a) $\Big(\forall x.\forall y.\big((P(x) \vee \neg Q(x,y)) \wedge (Q(a,y) \vee \neg P(a))\big)\Big)|_{1\cdot 1\cdot 2}$

(b) $\Big(\forall x.\forall y.\big((P(x) \vee \neg Q(x,y)) \wedge (Q(a,y) \vee \neg P(a))\big)\Big)|_{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2}$

(c) $\Big(\forall x.\forall y.\big((P(x) \vee \neg Q(x,y)) \wedge (Q(a,y) \vee \neg P(a))\big)\Big)[R(a)]_{1\cdot 1\cdot 2}$

(d) $\Big(\forall x.\forall y.\big((P(x) \vee \neg Q(x,y)) \wedge (Q(a,y) \vee \neg P(a))\big)\Big)[\forall z.Q(z)]_{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2}$

38. Folosiți teorema de substituție și câte una din echivalențele demonstrate mai sus pentru a arăta că:

(a) $P(x) \wedge (Q(a) \wedge Q(b)) \equiv P(x) \wedge (Q(b) \wedge Q(a))$

(b) $\neg\neg R(x,y) \vee P(x) \equiv R(x,y) \vee P(x)$

(c) $\forall x.\forall y.(\neg(R(x,y) \wedge P(x))) \equiv \forall x.\forall y.(\neg R(x,y) \vee \neg P(x))$

(d) $\forall x.(\forall y.P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x.\forall y.(P(x) \wedge Q(x))$

(e) $\forall x.\neg(\exists y.P(x)) \equiv \forall x.\forall y.\neg P(x)$

39. Folosiți lema de redenumire (și eventual teorema de substituție) pentru a demonstra următoarele echivalențe:

(a) $\forall x.P(x) \equiv \forall y.P(y)$

(b) $\forall x.P(x) \wedge P(x) \equiv \forall y.P(y) \wedge P(x)$

(c) $\forall x.(\forall x.P(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x.(\forall y.P(y) \wedge P(x))$

(d) $\forall x.(\forall x.P(x) \wedge P(x)) \wedge P(x) \equiv \forall y.(\forall x.P(x) \wedge P(y)) \wedge P(x)$

(e) $\forall x.\exists x.P(x) \equiv \forall y.\exists x.P(x)$

(f) $\forall x.\exists x.P(x) \equiv \forall x.\exists z.P(z)$

40. Aduceți următoarele formule în FNP:

(a) $\forall x.(P(x) \wedge \exists x.Q(x,y)) \wedge Q(x,x)$

(b) $Q(x,x) \wedge \forall x.(P(x) \wedge \exists x.Q(x,y)) \wedge \exists x.Q(x,x)$

(c) $Q(x, y, z) \wedge \forall x.(P(x) \wedge \exists z.Q(x, y)) \wedge \forall z.Q(x, x)$

(d) $\forall y.(Q(x, y, z) \wedge \forall x.(P(x) \wedge \exists z.Q(x, y)) \wedge \forall z.Q(x, x))$

(e) $\forall x.\exists x.\forall x.(Q(x, y, z) \wedge \forall x.(P(x) \wedge \exists z.Q(x, y)) \wedge \forall z.Q(x, x))$

(f) $\forall x.(P(x) \wedge \exists y.Q(x, y))$

(g) $\neg\forall x.(P(x) \wedge \exists y.Q(x, y))$

(h) $\neg\forall x.(P(x) \wedge \neg\forall y.Q(x, y))$

(i) $\neg\forall x.(P(x) \wedge \neg(\forall y.Q(x, y)) \wedge Q(x, y))$

(j) $\neg\forall x.\exists y.\forall z.\neg P(x, y, z)$

41. Arătați că:

    (a) $\exists x.P(x) \equiv_s P(a)$

    (b) $\forall y.\exists x.P(x, y) \equiv_s \forall y.P(f(y), y)$

    (c) $\exists y.\forall x.P(x, y) \equiv_s \forall x.P(x, c)$

42. Demonstrați lema de Skolem-izare.

43. Aduceți următoarele formule (care se află deja în FNP), în FNS:

    (a) $\forall x.\forall y.\forall z.P(x, y, z)$

    (b) $\forall x.\exists y.\forall z.P(x, y, z)$

    (c) $\forall x.\exists y.\exists z.P(x, y, z)$

    (d) $\exists y.P(a, y, b)$

    (e) $\exists y.\exists z.P(x, y, z)$

    (f) $\forall x.\exists y.\forall z.\exists y'.(P(x, y, z, y') \wedge \neg(Q(x) \vee R(y, y')))$

    Ce relație există între formule de la care am plecat și formula la care am ajuns?

44. Aduceți următoarele formule, aflate deja în FNS, în FNSC:

    (a) $\forall x.\forall y.(P(x) \vee (Q(x) \wedge R(y)))$

    (b) $\forall x.\forall y.\forall z.(Q(x) \vee \neg(P(x) \vee (Q(x) \wedge R(y))))$

    (c) $\forall x.\forall y.\forall z.\neg(Q(z) \vee \neg(P(x) \vee (Q(x) \wedge R(y))))$

    (d) $\forall x.\forall y.\forall z.\neg(\neg Q(z) \vee \neg(\neg P(x) \vee (Q(x) \wedge R(y))))$

    (e) $\forall x.\forall y.\forall z.\neg(\neg(Q(x) \wedge R(z)) \vee \neg(\neg P(x) \vee (Q(x) \wedge R(y))))$

45. Aduceți următoarele formule în FNSC (trecând pe rând prin FNP, FNS):

    (a) $\forall x.\exists y.P(x, y)$

    (b) $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists y.R(x, y))$

    (c) $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists y.(R(x, y) \wedge P(y)))$

(d) $\exists x.P(x)$

(e) $\exists x.(P(x) \wedge \forall x.P(x))$

(f) $\exists x.(P(x) \rightarrow \forall x.P(x))$

(g) $\forall x.(P(x) \rightarrow \exists x.P(x))$

(h) $\forall x.P(x) \rightarrow \exists x.P(x)$

(i) $\forall x.\neg(\forall y.(P(x,y) \vee \exists z.(P(x,z) \wedge P(y,z))))$

46. Rezolvați exercițiile propuse în suportul de curs care nu sunt cuprinse în documentul acesta.