Setul 3
de probleme şi exerciţii de matematică
(cu privire la şiruri dintr-un corp ordonat şi, mai cu seamă, din $\mathbb{R}$)

S3.1 Să se demonstreze Propoziţia 3.3 din cursul 3.

S3.2 Fie $(K, +, \cdot, <)$ un domeniu de integritate ordonat şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ inelul ordonat al numerelor întregi. Să se arate că există un unic monomorfism izotonic de inele de la $\mathbb{Z}$ la K.

S3.3 Să se arate că, pe $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, relaţia binară "$\sim$", definită prin $\alpha \sim \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})) \Longleftrightarrow \alpha - \beta \in \mathcal{N}(\mathbb{Q})$, este o relaţie de echivalenţă.

S3.4 Să se demonstreze teorema lui Cesàro: "Orice şir mărginit de numere reale are cel puţin un subşir convergent."

S3.5 Să se arate că, pentru o submulţime nevidă A a lui $\mathbb{R}$, un element α din $\mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A, dacă şi numai dacă:

(i) $x \leq \alpha,\ \forall\, x \in A$ şi

(ii) $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A$ astfel încât $\alpha - \epsilon < x_\epsilon$.

S3.6 Să se stabilească care dintre şirurile cu termenii generali următori este şir Cauchy şi care nu este:

1) $x_n = \dfrac{\sin a}{2} + \dfrac{\sin 2a}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin na}{2^n},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (unde a este un parametru real dat).

2) $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

S3.7 (Lema lui O. Stolz) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ un şir oarecare, iar $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ un şir monoton şi nemărginit. Să se arate că, dacă există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n},\ \text{în } \overline{\mathbb{R}},$$

atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, având loc egalitatea:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

S3.8 Să se arate că şirul cu termenul general

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

este convergent în $\mathbb{R}$ (limita sa fiind aşa numita constantă a lui Euler, $c = 0,577215... \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

S3.9 Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, unde

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

este convergent (limita sa este egală cu $\dfrac{\pi^2}{6}$, după cum se poate stabili pe o cale abordabilă ulterior).

S3.10 Să se calculeze următoarele limite

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}};\quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};\quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}.$$

S3.11 Să se determine $L(x_n)$ pentru fiecare din şirurile cu termenul general x_n, unde:

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N}^*$; b) $x_n = 2 + (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$; c) $x_n = \dfrac{(-1)^n + n \operatorname{tg}\frac{n\pi}{4}}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

S3.12 Să se demonstreze Propoziţia 3.1 din cursul 3.

S3.13 Să se arate că $(\mathcal{N}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ este un subinel al inelului unitar comutativ $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$.

S3.14 Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$. Să se arate că $\beta = \inf A$ $(\in \mathbb{R})$ dacă şi numai dacă

(i) $\beta \leq x,\ \forall\, x \in A$ şi

(i) $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in A$ astfel încât $x_\epsilon < \beta + \epsilon$.

S3.15 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, în $[0, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, având loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

S3.16 Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, definit prin $x_1 = 1$ şi

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) x_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent şi să i se afle limita.

S3.17 Să se calculeze următoarele limite

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\dfrac{\pi}{2} \cdot \sin\dfrac{\pi}{3} \cdot \ldots \cdot \sin\dfrac{\pi}{n}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}}$.

S3.18 Să se găsească $L(x_n)$ pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, unde

$$x_n = [1 + (-1)^n] \cdot n^{(-1)^n} + \cos\frac{n\pi}{6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Bibliografie selectivă

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, (§1.5), ediţia a III-a, Ed. Polirom, Iaşi, 1998.

2. W. J. Kaczor, M. T. Nowak - *Problems in Mathematical Analysis. Real numbers, sequences, series*, Student Mathematical Library, vol. 4, AMS Publ.,2000.

3. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

5. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

6. N. Cotfas, L. A. Cotfas - *Elemente de analiză matematică,* Ed. Universit. din Bucureşti, 2010.

7. W. Anscombe - *Cauchy Sequences: Cauchy's Criterion as a useful test for convergence*, University of Leeds, United Kingdom, 2013.

8. L. Fehér, G. Kós, Á. Tóth - *Mathematical Analysis. Problems and Exercises-II*, Eötvös Loránd University, Faculty of Science, Typotex, 2014.