

Tema nr. 7

Fie P un polinom de grad n cu coeficienți reali:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

și ϵ precizia calculelor.

Să se calculeze intervalul $[-R, R]$ în care se găsesc toate rădăcinile reale ale polinomului P . Să se implementeze metoda lui Laguerre de aproximare a rădăcinilor unui polinom. Pentru calculul valorii unui polinom într-un punct să se folosească schema lui Horner. Să se aproximeze cât mai multe rădăcini ale polinomului P cu metoda Laguerre pornind de la puncte de start, x_0 , diferite. Rezultatele se vor afișa pe ecran și se vor memora într-un fișier. În fișierul respectiv se vor scrie doar rădăcinile distincte (2 valori reale v_1 și v_2 sunt considerate diferite dacă $|v_1 - v_2| > \epsilon$).

Bonus 15 pt.: găsirea rădăcinilor complexe ale polinomului P .

Metoda Laguerre de aproximare a rădăcinilor reale ale unui polinom

Fie P un polinom de grad n :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (a_0 \neq 0) \quad (1)$$

Toate rădăcinile reale ale polinomului P se află în intervalul $[-R, R]$ unde R este dat de:

$$R = \frac{|a_0| + A}{|a_0|}, \quad A = \max\{|a_i|; i = \overline{1, n}\} \quad (2)$$

Pentru a aproxima o rădăcină reală x^* (din intervalul $[-R, R]$) a polinomului P definit de (1), se construiește un șir de numere reale, $\{x_k\}$, care converge la rădăcina $x^* \in [-R, R]$ căutată ($x_k \rightarrow x^*$ pentru $k \rightarrow \infty$).

Pornind cu x_0 o valoare reală dată, șirul $\{x_k\}$ se construiește astfel (x_{k+1} se calculează din x_k):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{n P(x_k)}{P'(x_k) + \text{semn}(P'(x_k)) \sqrt{H(x_k)}}, \quad k = 0, 1, \dots \\ x_{k+1} &= x_k - \Delta x_k \left(\Delta x_k = \frac{n P(x_k)}{P'(x_k) + \text{semn}(P'(x_k)) \sqrt{H(x_k)}} \right) \\ H(x_k) &= (n-1)^2 [P'(x_k)]^2 - n(n-1)P(x_k)P''(x_k) \end{aligned} \quad (3)$$

Prin P' și P'' am notat prima și respectiv a doua derivată a polinomului P . Pentru $x \in \mathbb{R}$ funcția $\text{semn}(x)$ se definește astfel:

$$\text{semn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \geq 0 \\ -1 & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Observație importantă: Alegerea iterației inițiale, x_0 , poate determina convergența sau divergența șirului x_k la x^* . De obicei, o alegere a iterației inițiale x_0 în vecinătatea lui x^* asigură convergența $x_k \rightarrow x^*$ pentru $k \rightarrow \infty$.

Nu este nevoie de memorat întreg șirul $\{x_k\}$ ci doar 'ultimul' element calculat, x_{k_0} . Se consideră că o valoare $x_{k_0} \approx x^*$ (este 'ultimul' element calculat) atunci când diferența dintre două iterații succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluția x^* . Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluției x^* cu metoda lui Laguerre este următoarea:

Metoda lui Laguerre

$x = (x_0) = \text{ales aleator} ; k=0 ;$
(pentru convergența șirului $\{x_k\}$ este de preferat de
ales iterația inițială x_0 în vecinătatea soluției căutate)
do
{
★ if ($H(x) < 0$) EXIT;
(se poate încerca schimbarea iterației inițiale x_0)
★ if ($|P'(x_k) + \text{semn}(P'(x_k)) \sqrt{H(x_k)}| \leq \epsilon$) EXIT;
(se poate încerca schimbarea iterației inițiale x_0)
★ calculează Δx folosind formula (3) ;
★ $x = x - \Delta x$;
★ $k=k+1$;
}
while ($|\Delta x| \geq \epsilon$ și $k \leq k_{\max}$ și $|\Delta x| \leq 10^8$)
if ($|\Delta x| < \epsilon$) $x_k \approx x^*$;
else *divergență* ; (de încercat schimbarea lui x_0)

Schema lui Horner de calcul al valorii $P(v)$

Fie P un polinom de grad n :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_i \in \mathbb{R} \forall i, \quad a_0 \neq 0 \quad (4)$$

Putem scrie polinomul P și astfel:

$$P(x) = (((\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \dots)x + a_{n-1})x + a_n$$

Ținând cont de această grupare a termenilor, obținem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului P într-un punct $v \in \mathbb{R}$ oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_i &= a_i + b_{i-1}v, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (5)$$

Folosind șirul de mai sus, valoarea polinomului P în punctul v este:

$$P(v) = b_n$$

iar ceilalți termeni b_i calculați, sunt coeficienții polinomului cât, Q , din împărțirea cu rest:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - v)Q(x) + r, \\ Q(x) &= b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}, \\ r &= b_n = P(v). \end{aligned} \quad (6)$$

Pentru a calcula $P(v)$ (b_n) cu formulele (5) se poate folosi o singură valoare reală $b \in \mathbb{R}$ și nu un vector $b \in \mathbb{R}^n$.

Example

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 ,$$

$$a_0 = 1.0, \quad a_1 = -6.0, \quad a_2 = 11.0, \quad a_3 = -6.$$

$$P(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{7}\right)(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{42}(42x^4 - 55x^3 - 42x^2 + 49x - 6)$$

$$a_0 = 42.0, \quad a_1 = -55.0, \quad a_2 = -42.0, \quad a_3 = 49.0, \quad a_4 = -6.0.$$

$$P(x) = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3)$$

$$a_0 = 8.0, \quad a_1 = -38.0, \quad a_2 = 49.0, \quad a_3 = -22.0, \quad a_4 = 3.0.$$

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

$$= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

$$a_0 = 1.0, \quad a_1 = -6.0, \quad a_2 = 13.0, \quad a_3 = -12.0, \quad a_4 = 4.0.$$