Calcul numeric

Secvențe Sturm pentru rădăcini izolate

Pascăl Ioana-Cristina, 3B6

Introducere

Teorema lui Sturm a apărut în anul 1829, şi aceasta rezolvă problema numărării rădăcinilor reale ale unei ecuaţii polinomiale $f(x) = 0$, peste un interval dat. Folosind-o, putem de asemenea izola rădăcinile reale ale acestei ecuaţii. Datorită acestui fapt, acesta a putut găsi intervale deschise astfel încât fiecare conţine o rădăcină reală şi fiecare rădăcină reală este inclusă într-un interval.

Noțiuni

1. **Izolarea rădăcinilor**

Pentru un polinom cu coeficienţi reali, izolarea rădăcinilor constă în găsirea , pentru fiecare rădăcină reală, un interval care conţine doar această rădăcină.

2. **Secvenţa Sturm**

Pentru un polinom *P(x)* , cu gradul $n \geq 2$, care are coeficienţi raţionali, secvenţa Sturm este o secvenţă $p_0(x),\ p_1(x),\ ...,\ p_r(x)..$

$$p_0(x) = P(x)$$
$$p_1(x) = P'(x)$$
$$p_2(x) = -rest(p_0, p_1) = p_1(x)q_0(x) - p_0(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$p_{i+1}(x) = -rest(p_{i-1}(x),\ p_i(x)) = p_i(x)q_{i-1}(x) - p_{i-1}(x)$$

unde $P'(x)$ este derivatul lui $P(x)$, iar $rest(p_{i-1}(x),\ p_i(x))$ este restul împărţirii polinomului $p_{i-1}(x)$ la polinomul $p_i(x)$. Lungimea secvenţei Sturm poate fi cel mult egală cu gradul lui $P(x)$ ($r \leq n$).

Cu alte cuvinte, secvenţa Sturm a lui $p(x)$ este obţinută prin calcularea opusului restului calculat în procesul de găsire a celui mai mare divizor comun pentru $p(x)$ şi $p'(x)$ folosind algoritmul lui Euclid.

Dacă $r = n$, secvenţa Sturm se numeşte ***completă***, în timp ce, dacă $r < n$, aceasta se numeşte ***incompletă***.

Astfel, observăm faptul că obţinerea restului polinomial este operaţia principală pentru a calcula secvenţa Sturm si, din 1836, pseudo-diviziunea a fost singura metodă folosită pentru a limita calculul în $[x]$.

Totuşi, folosirea pseudo-diviziunea în fiecare pas al algoritmului Sturmian (Euclidian), va cauza creşterea exponenţială a coeficienţilor. Pentru a evita acest lucru, putem face fiecare rezultat intermediar primitivă, astfel încât putem divide resturile cu cel mai mare divizor comun al coeficienţientilor acestuia.

3. **Teorema lui Sturm**

Pentru numere raţionale a, b astfel încât $a < b$ şi a, b nu sunt rădăcini pentru *P(x)*, definim $\nu(a)$ şi $\nu(b)$ ca număr al schimbărilor de semn în secvenţa Sturm în modul următor: $(p_0(a), p_1(a), \ldots, p_r(a))$, $(p_0(b), p_1(b), \ldots, p_r(b))$.

Teorema lui Sturm afirmă faptul că numărul rădăcinilor reale din *P(x)* în intervalul (a, b) este egal cu $\nu(a)$ - $\nu(b)$.

Această teoremă se extinde pentru intervale nemărginite prin definirea semnului la $+\infty$ a polinomului ca fiind semnul coeficientului important (adică cel al termenului cu gradul cel mai mare). La $-\infty$, semnul polinomului este semnul coeficientului important, pentru polinoamele cu grad par, iar pentru cele cu gradul impar, semnul va fi opus faţă de cel al coeficientului important.

Exemplu

Presupunem că dorim să găsim numărul de rădăcini dintr-un anumit interval pentru polinomul $p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$. Vom avea:

$$p_0(x) = p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$$

$$p_1(x) = p'(x) = 4x^3 + 3x^3 - 1$$

Restul diviziunii Euclidiene a lui p_0 cu p_1 este $-\frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{15}{16}$; înmulţind acesta cu -1 , vom obţine : $p_2(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{16}$.

Mai departe, împărţind p_1 cu p_2 şi înmulţind restul cu -1 , obţinem $p_3(x) =- 32x - 64$.

Acum împarţind p_2 la p_3 şi înmulţind restul cu -1 , obţinem $p_4(x) =- \frac{3}{16}$. Deoarece $p_4(x)$ este constantă, s-a terminat calculul secvenţei Sturm.

Pentru a găsi numărul de rădăcini reale ale lui p_0 , trebuie sa evaluăm secvenţele de semn ale acestor polinoale la - ∞ şi la + ∞ **,** care sunt respectiv $(+,-,+,+,-)$ şi $(+,+,+,-,-)$. Deci $v(-\infty) - v(+\infty) = 3 - 1 = 2$, ceea ce arată faptul că p are două rădăcini reale.

Izolarea rădăcinilor

Teorema lui Sturm oferă o modalitate de a izola rădăcinile reale mai puţin eficientă (pentru polinoame cu coeficienti întregi) faţă de alte metode, cum ar fi Regula de semne a lui Descartes. Totuşi, este folositoare în alte circumstanţe, în special în scop teoretic, de exemplu pentru algoritmi de geometrie algebrică reală care implică numere infinitezimale (care tind către 0).

Pentru izolarea rădăcinilor reale, pornim de la un interval $(a, b]$ care conţine toate rădăcinile reale, sau rădăcinele de interes (cum ar fi rădăcinile pozitive) , şi calculăm $v(a)$ şi $v(b)$. Dacă $v(b) - v(a) = 0$ sau $v(b) - v(a) = 1$, algoritmul se opreşte pentru intervalul respectiv. Dacă $v(b) - v(a) \geq 2$, împărţim acest interval în doua, calculând $c = \frac{a+b}{2}$ şi reluăm operaţiile pentru $(a, c]$ şi $(c, b]$.

În timpul acestui proces, când vom întalni un interval care nu conţine nicio rădăcină, acesta poate fi înlăturat din lista de intervale de luat în considerare. Când întâlnim un interval care conţine exact o rădăcină, se poate opri divizarea acestuia, deoarece este interval de izolare. Procesul se va opri în final , când vor ramane doar intervale de izolare.

Explicare algoritm - Izolarea rădăcinilor

Fie $P(x)$ un polinom întreg nepătratic de grad d, având coeficienţi pe L-biţi.

1) Calculăm secvenţa Sturm a lui $P(x)$.
2) Calculăm un interval $(-b, b)$ care conține toate rădăcinile lui $P(x)$. Iniţializăm coada Q cu acest interval.
3) Cât timp Q nu este goală, facem următoarele operaţii:
    a) Extragem un interval I din Q (împărţim intervalul din Q în 2 intervale egale)
    b) Calculăm numărul de rădăcini care se află în acest interval folosind secvenţa Sturm.
    c) Dacă I conţine doar o rădăcină, atunci afişăm I.
    d) Dacă I nu conţine nici o rădăcină, renunţăm la acesta.
    e) Altfel, împărţim I în două intervale deschise, I_L, I_R, la termenul din mijloc $m(I)$. Verificăm dacă $m(I)$ este rădăcina, iar dacă răspunsul este pozitiv, afişăm $m(I)$.
    f) Adăugam I_L şi I_R în Q.

Exemplu - Izolarea rădăcinilor

Fie polinomul $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x^2-36)(x^2-81)$. Rădăcinile reale ale acestui polinom sunt : (9, 6, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -9). Intervalul pe care îl va lua iniţial implementarea mea va fi : (-9.01, 9.01) şi îl voi pune într-o lista. În acest interval va găsi 9 rădăcini reale. Aceste rădăcini le-am aflat folosind biblioteca sympy, pentru a-mi putea alege intervalul iniţial. După ce observa ca sunt 9 rădăcini, împărţim acest interval în două mai mici:(-9.01, 0) şi (0, 9.01), în primul va găsi 7 rădăcini, iar în al doilea 2. Şi împarte fiecare interval până intervalul va conţine doar o rădăcină. Pentru polinomul de mai sus, intervalele de izolare vor fi :

[(-9.01,-6.7575), (4.505,6.7575), (6.7575,9.01), (-6.7575,-5.6312), (-5.6312, -4.505), (-4.505, -3.3788), (-3.3788, -2.2525), (-2.2525, -1.1262), (-1.1262,00)]

Care vor conţine rădăcinile după cum urmează (-9, 6, 9, -6, -5, -4, -3, -2, -1).

Bibliografie

- http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0986-22.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/Sturm%27s_theorem
- https://pdfs.semanticscholar.org/835e/1c5e9ac182d2735da4e92a81f57cc53b63f4.pdf
- http://w3.impa.br/~eric/tesis.pdf
- https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-7643-7984-1_8