UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
1.ª Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I
Prof. Marcelo Melo

Aluno(a):____

Funções e Modelos

1. Verifique que a equação $|x-7|+|x-8|=1$ possui infinitas soluções.

2. Na superfície do oceano, a pressão da água é igual à do ar acima da água, 1,05 kg/cm^2. Abaixo da superfície, a pressão da água cresce 0,10 kg/cm^2 para cada metro abaixo da superfície.

   (a) Expresse a pressão da água como uma função da profundidade abaixo da superfície do oceano.

   (b) A que profundidade a pressão é de 7 kg/cm^2?

3. Sob condições ideais, sabe-se que uma certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias:

   (a) Qual o tamanho da população após 15 horas?

   (b) Qual o tamanho da população após t horas?

   (c) Qual o tamanho da população após 20 horas?

   (d) Trace o gráfico da função população.

   (e) Estime o tempo para a população atingir 50.000 bactérias.

   (f) Encontre a função inversa da função população.

   (g) Explique o significado da inversa da função população.

4. O topo B de uma torre vertial AB é visto de um ponto C do solo sob um ângulo de 30°. A distância de C à base da torre é 100 m. Calcule a altura da torre.

5. Para medir a largura de um rio de margens paralelas sem atravessá-lo, um observador, no ponto A de uma margem, visa um ponto B na margem oposta (suponha que AB é perpendicular às margens). De A, ele caminha sobre a margem e marca um ponto C, distando 28 m de A. Em seguida, ele mede o ângulo $B\widehat{C}A = 70°$. Sabendo que $\text{tg}70° = 2,75$, calcule a largura do rio.

6. O número de horas de luz solar em Ancara, na Turquia, no t-ésimo dia do ano foi modelado pela função

$$L(t) = 12 + 2,8 \cdot \text{sen}\left[\tfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right].$$

   (a) Verifique que a curva começou seu ciclo em 21 de março, isto é, no 80 dia do ano.
   (b) Qual é a duração máxima da luz solar em Ancara? Ela é registrada em que dia do ano?
   (c) Qual é a duração mínima da luz solar em Ancara? Ela é registrada em que dia do ano?

7. Encontre uma fórmula para a função descrita e obtenha seu domínio.

   (a) Expresse a área de um triângulo equilátero como uma função do comprimento de um lado.
   (b) Expresse a área superficial de um cubo como uma função de seu volume.
   (c) Expresse a hipotenusa do triângulo retângulo com uma área de 25 m^2 como uma função do seu perímetro P.

8. Quando dobra o percurso em uma corrida de táxi, o custo da nova corrida é igual ao dobro, maior que o dobro ou menor que o dobro da corrida original?

9. A e B são locadoras de automóvel. A cobra 1 real por quilômetro rodado mais uma taxa de 100 reais fixa. B cobra 80 centavos por quilômetro mais uma taxa fixa de 200 reais. Discuta a vantagem de A sobre B ou de B sobre A em função do número de quilômetros a serem rodados.

10. Duas velas de mesmo comprimento são acesas simultaneamente. A primeira queima completamente em 4 horas e a segunda, em 3 horas. Depois de acesas, em quanto tempo uma delas terá o triplo do comprimento da outra?

11. Comprei algumas garrafas de um bom vinho por 540 reais. Por ter obtido um desconto de 15 reais no preço de cada garrafa, consegui comprar 3 garrafas a mais do que previra originalmente. Quantas garrafas de vinho comprei?

12. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

13. A equação $x^2 - 9x + c = 0$ tem raízes inteiras. Qual é o maior valor possível para c?

14. Determine o valor máximo de $81n - n^2$, n inteiro.

15. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *par* quando se tem $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (a) Verifique se $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ é função par.
    (b) Verifique se $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5$ é função par.

16. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *ímpar* quando se tem $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (a) Verifique se $f(x) = x^3 + x$ é função ímpar.
    (b) Verifique se $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5$ é função ímpar.

17. Se $f : A \to B$ é uma função injetora, mostre que $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ para quaisquer $X, Y \subset A$.

18. Verifique que $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre o intervalo $(-1, 1)$ e determine sua inversa.

19. Seja $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ uma função tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Prove que:
    (a) $f(0) = 0$;
    (b) $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$;
    (c) ou $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ ou $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

20. Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um polinômio com coeficientes inteiros.
    (a) Se um número racional $\frac{p}{q}$ (com p e q primos entre si) é tal que $f(\frac{p}{q}) = 0$, prove que p divide a_0 e q divide a_n.
    (b) Conclua que quando $a_n = 1$, as raízes de f são inteiras ou irracionais.
    (c) Use o resultado geral para provar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional.

21. Utilize o exercício anterior para encontrar as raízes dos polinômios:
    (a) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$;
    (b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$;
    (c) $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$.

22. Mostre que $\log_2 5$ é um número irracional.

23. Dados os números reais positivos x e y, as médias aritmética, geométrica e harmônica de tais números são definidas, respectivamente, por $a = \frac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$ e $h = \left(\frac{1}{2}(x^{-1} + y^{-1})\right)^{-1}$. Mostre que $h \leq g \leq a$.

24. Se $f_0(x) = x/(x+1)$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

25. Use indução sobre n natural para demonstrar os seguintes fatos:
    (a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
    (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
    (c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;
    (d) $n \geq 4 \Longrightarrow n! > 2^n$;
    (e) $7^n - 1$ é divisível por 6.

26. (*Binômio de Newton*) Se $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \ .$$

27. Prove, por indução, que um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos.

28. Para cada inteiro $n > 2$ mostre que existem n naturais dois a dois distintos, tais que a soma de seus inversos é igual a 1.

29. Seja n um inteiro positivo ímpar. Em um campo aberto estão n crianças posicionadas de tal modo que para cada uma delas as distâncias às outras $n - 1$ crianças são todas distintas. Cada criança tem uma pistola d'água e, ao som de um apito, atira na criança mais próxima de si. Mostre que uma das crianças permanecerá enxuta.

30. Dados n $(n \geq 2)$ objetos de pesos distintos, prove que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo $2n - 3$ pesagens em uma balança de pratos. É esse o número mínimo de pesagens que permitem determinar o mais leve e o mais pesado?

Limites e Continuidade

31. Calcule os limites.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ (b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ (e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$, $n\in\mathbb{N}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$, $n\in\mathbb{N}$ (h) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$ (i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$

32. Calcule os limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x+3}$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$ (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1})$ (h) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{3x+1}{4x^2-1}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x-5}{x^2+3x-4}$

33. Calcule os limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-a^2)}{x-a}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2+x-2}$

(d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$ (e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cos\dfrac{2}{x}$

34. Calcule os limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+\pi}{x-e}\right)^x$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-4^x}{3^x-2^x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{\operatorname{sen} x}$ (h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$ (i) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$

35. Resolva o seguinte.

(a) Se $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$, para $x \geq 0$, calcule $\lim_{x\to 4} f(x)$.

(b) Se $2x \leq f(x) \leq x^4 - x^2 + 2$, para todo x, calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$.

36. O custo (em reais) para remover $p\%$ dos poluentes da água de um lago é dado por

$$C = \frac{25.000p}{100 - p}, \quad 0 \leq p < 100$$

onde C é o custo, e p é a porcentagem de poluentes removidos.

(a) Determine o custo para remover 50% dos poluentes.

(b) Que porcentagem dos poluentes pode ser removida por R$ 100.000,00?

(c) Determine $\lim_{p\to 100} C$. Explique o significado desse resultado.

37. A temperatura de um paciente depois de receber um antitérmico é dada por

$$T = 36,8 + \frac{3}{t+1}$$

onde T é a temperatura em graus Celsius e t é o tempo em horas.

(a) Para que valores de t a função é válida?

(b) Qual é a temperatura do paciente no instante em que recebeu o antitérmico?

(c) Qual é a temperatura do paciente depois de 2 horas?

(d) Calcule e dê uma interpretação para o limite $\lim_{t\to\infty}\left(36,8 + \dfrac{3}{t+1}\right)$.

38. Determine as assíntotas horizontais de $y = f(x)$ nos seguintes casos.

(a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ (b) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}$ (d) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{64x^3+1}}{\sqrt[4]{x^4+6x^2+1}}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} - x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

39. Determine as assíntotas verticais de $y = f(x)$ nos seguintes casos.

    (a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

    (b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$

    (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}$

    (d) $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-1}$.

    (e) $f(x) = \frac{1}{x^4-16}$

    (f) $f(x) = \frac{1}{x^3-3x^2+2x}$.

40. Resolva o seguinte.

    (a) Verifique que a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua de $y = \sqrt{x^2+1}$.

    (b) Verifique que a reta $y = -x$ é uma assíntota oblíqua de $y = \sqrt{x^2+1}$.

    (c) Determine as assíntotas oblíquas de $y = |x|$.

    (d) Determine as assíntotas oblíquas de $y = \frac{x^2}{x+1}$.

41. Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} 3x+3 & \text{se} & x < -1 \\ x^2-1 & \text{se} & -1 \leq x \leq 1 \\ x^3-5x & \text{se} & x > 1 \end{cases}$ é contínua em $(-\infty, +\infty)$.

42. Encontre todos os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; & x \leq a \\ x^2 & ; & x > a \end{cases}$$

43. Determine L para que a função dada seja contínua.

    (a) $f(x) = \begin{cases} Lx+1 & ; & x \leq 3 \\ Lx^2-1 & ; & x > 3 \end{cases}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}} & ; & x \neq 5 \\ L & ; & x = 5 \end{cases}$

44. Suponha que $|f(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua em 0.

45. Use o teorema do valor intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

    (a) $x^3 - 3x + 1 = 0, \ (0, 1)$

    (b) $x^2 = \sqrt{x+1}, \ (1, 2)$

    (c) $\cos x = x, \ (0, \frac{\pi}{2})$

46. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ contínua. Prove que f possui um ponto fixo, isto é, existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. Dê exemplo de uma função contínua $f : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$ sem ponto fixo.

47. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

48. Se $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x)$.

49. Se $[x]$ denota a função maior inteiro, encontre $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{[x]}$.

50. Encontre números a e b tais que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{ax+b} - 2}{x} = 1$.

51. Existe um número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

    exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

52. Para quais valores de a é verdade que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e \ ?$$

53. Seja C_1 o círculo com equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e seja C_2 o círculo, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de interseção superior dos dois círculos, e R é o ponto de interseção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 encolher, isto é, quando $r \to 0^+$?

54. Considere um ponto P de abscissa positiva sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular que bissecta OP intercepta o eixo y. (O é a origem do sistema.) À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição limite? Se sim, encontre-a.

55. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

Sugestões e Respostas

1. Note que 7 e 8 são soluções. 2. (a) $P = 0,10d + 1,05$ (b) 59,5 m.

3. (a) 3.200 (b) $P(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ (c) 10.159 (e) $t \approx 26,9$ h (f) $P^{-1}(x) = 3\log_2(x/100)$ (g) O tempo decorrido quando existirem x bactérias.

4. $\overline{AB} \approx 57,7$ m. 5. 77 m. 6. (a) $L(80) = 12$ horas. (b) $14,8$ horas no dia $t = 171,25$ (21 de junho). (c) $9,2$ horas no dia $t = 353,75$ (21 de dezembro).

7. (a) $A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ (b) $S = 6\sqrt[3]{V^2}$ (c) $h = \frac{P^2-100}{2P}$ 8. Menor do que o dobro.

9. Para quilometragem inferior a 500 km, A é mais vantajosa. 10. Após t horas, $t/4$ da primeira vela e $t/3$ da segunda já foi consumido. Então, $t = \frac{8}{3}$h $=$ 2h40min.

11. Se x é a quantidade inicial de garrafas, então $x^2 + 3x - 108 = 0$ e, portanto, comprei $x + 3 = 12$ garrafas.

12. Se x passageiros ocupam os lugares, a receita da empresa é $-10x^2 + 1800x$, cujo valor máximo é atingido para $x = 90$.

13. $c = 20$ 14. O máximo ocorre para $n = 10$ e vale 410.

17. Use a injetividade de f para monstrar que $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$.

18. $f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 19. Escreva $0 = 0 + 0$, $1 = 1 \cdot 1$ e $x = x \cdot 1$.

20. $f(\frac{p}{q}) = 0 \Longrightarrow a_0 + a_1\frac{p}{q} + \cdots + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0 \Longrightarrow a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n = 0.$

22. Suponha que $\log_2 5$ é racional. 23. Observe que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.

24. Utilize indução para mostrar que $f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}$.

26. Use indução sobre n e a relação de Stifel $\left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array}\right)$, onde $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, para $0 \leq k \leq n$, e por convenção $0! = 1$.

28-30. Utilize indução sobre n.

31. (a) 2 (b) 6 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 4 (e) na^{n-1} (f) $\frac{1}{3}$ (g) $\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$ (h) -7 i) 0

32. (a) 1 (b) -2 (c) 2 (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{3}$ (f) 1 (g) $\frac{1}{2}$ (h) $+\infty$ (i) $-\infty$

33. (a) 0 (b) $2a$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) -1 (e) $-\text{sen}a$ (f) $-\infty$ (g) $\cos a$ (h)0 (i) 0

34. (a) -4 (b) 1 (c) $e^{e+\pi}$ (d) 1 (e) $\ln a$ (f) $\frac{\ln\frac{5}{4}}{\ln\frac{3}{2}}$ (g) $\ln 2$ (h) $\frac{1}{2}$ (i) -1

35. (a) 7 (b) 2

36. (a) R$ 25.000,00 (b) 80% (c) ∞. A função custo aumenta sem limite quando p tende a 100 pela esquerda. Assim, de acordo com esse modelo, não é possível remover 100% dos poluentes.

37. (a) $t \geq 0$ (b) 39,8 °C (c) 37,8 °C (d) 36,8 $°C$ (temperatura normal)

38. (a) A reta $y = 2$. (b) A reta $y = \frac{1}{2}$. (c) As retas $y = 3$ e $y = -3$. (d) As retas $y = 2$ e $y = -2$. (e) As retas $y = 4$ e $y = -4$. (f) As retas $y = \frac{1}{2}$ e $y = 0$.

39. (a) A reta $x = 2$. (b) As retas $x = 1$ e $x = 2$. (c) A reta $x = 0$ (eixo y). (d) A reta $x = 1$. (e) As retas $x = 2$ e $x = -2$. (f) As retas $x = 0, x = 1$ e $x = 2$.

40. (c) As retas $y = x$ e $y = -x$. (d) A reta $y = x - 1$.

41. f é descontínua apenas para $x = 1$. 42. $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 43. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\sqrt{2}$

44. Use o Teorema do Confronto.

46-47. Use o Teorema do Valor Intermediário.

48. $\frac{3}{4}$ 49. 1 50. $a = b = 4$.

51. $a = 15$ e o limite é -1 52. $a = 1/2$.

53. $R \to (4, 0)$, quando $r \to 0^+$.

54. $Q \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$, quando $P \to (0, 0)$.