AULA 3 CB0534 WEBCONFERÊNCIA 20-03-2023

PROPRIEDADES DOS LIMITES:

1. $Se\ f(x) = x,$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a.$
2. $Se\ f(x) = C, C\ constante,$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C$
3. Se existem, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L\ e\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = M,$ então:

   i) Existe $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)\} = L + M.$

   ii) Existe $\lim\limits_{x \to a} \{f(x). g(x)\} = L. M$

   iii) Se $M \neq 0, existe\ \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$

   iv) Se n é par e $L > 0, existe\ \lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}.$

Veja no Livro as demonstrações.

Exemplo 2: $Se\ f(x) = x,$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a.$

Solução: É o mesmo que mostrar que $\lim\limits_{x \to a} x = a.$

Para isso, dado $\epsilon > 0, encontrar\ \delta > 0$, de modo que

Quando $0 < |x - a| < \delta$, então $|x - a| < \epsilon$

Qual seria um $\delta > 0$ que satisfaça isso?

Certamente, $\delta = \epsilon$ satisfaz.

Assim escrevemos, tomando $\delta = \epsilon$, teremos

Quando $0 < |x - a| < \epsilon$, então $|x - a| < \epsilon$

Isso prova que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a.$

<u>Exemplo 3</u>: Como prova que $\lim_{x \to 5} x = 5$.

<u>Solução</u>: dado $\epsilon > 0, devo\ encontrar\ \delta > 0$,

de modo que

quando $0 < |x - 5| < \delta$, então $|x - 5| < \epsilon$

tomando $\delta = \epsilon$, obtemos

quando $0 < |x - 5| < \epsilon$, então $|x - 5| < \epsilon$

Isso prova que existe $\lim_{x \to 5} x = 5$.

<u>Exemplo 4</u>: Como prova que $\lim_{x \to 2} 3x = 6$.

<u>Solução</u>: dado $\epsilon > 0, devo\ encontrar\ \delta > 0$,

de modo que

quando $0 < |x - 2| < \delta$, então $|3x - 6| < \epsilon$

temos que $|3x - 6| = 3|x - 2|$

então quando $0 < |x - 2| < \delta$, então $3|x - 2| < \epsilon$

tomando $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, obtemos

quando $0 < |x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$, então $3|x - 2| < 3.\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

ié, quando $0 < |x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$, então $|3x - 6| < 3.\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

Isso prova que existe $\lim_{x \to 2} 3x = 6$.

LIMITES LATERAIS

Vimos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} dado\ \epsilon > 0, \exists \delta > 0\ tal\ que, quando \\ 0 < |x - a| < \delta\ então\ |f(x) - L| < \epsilon \end{cases}$$

Vejamos que o lado direito da equivalência acima,

Pode ser escrito como abaixo:

$$\begin{bmatrix} dado\ \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0\ tal\ que, \\ quando \\ 0 < x - a < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon \\ e \\ dado\ \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0\ tal\ que, \\ quando \\ 0 < a - x < \delta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon \end{bmatrix}$$

Mais ainda, vejamos que podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} dado\ \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0\ tal\ que, \\ quando \\ 0 < x - a < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - L_1| < \epsilon \\ e \\ dado\ \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0\ tal\ que, \\ quando \\ 0 < a - x < \delta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - L_2| < \epsilon \\ e\ \ L_1 = L_2 \end{bmatrix}$$

Assim,

Assim,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \left[\begin{array}{c} dado\ \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0\ tal\ que, \\ quando \\ 0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon \\ e \\ dado\ \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0\ tal\ que, \\ quando \\ 0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon \\ e\ L_1 = L_2 \end{array}\right]$$

Definimos:

1. Se $dado\ \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0\ tal\ que, quando$ $0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$, dizemos que existe o $limite\ de\ f(x) quando\ x\ tende$ à $a,$ $pela\ direita\ e\ vale\ L_1.$

   $Notação$: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$

2. Se $dado\ \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0\ tal\ que, quando$ $0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon$, dizemos que existe o limite de

   $f(x)\ quando\ x\ tende$ à $a,\ pela\ esquerda\ e\ vale\ L_2$

   $Notação$: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$.

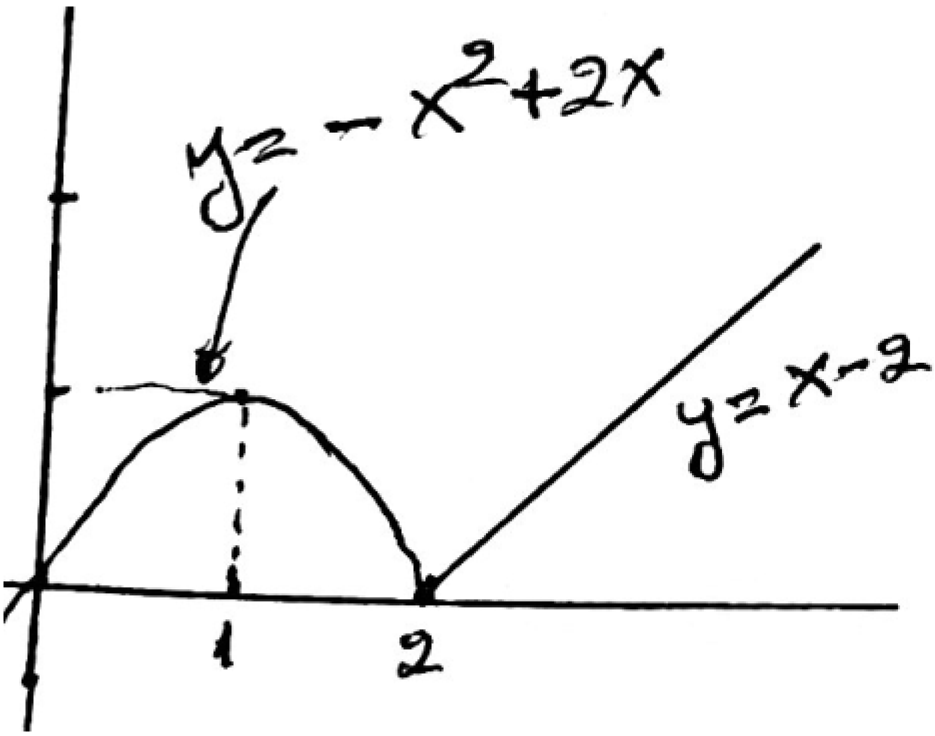
Concluímos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \left[\begin{array}{c} Existem \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = L_1\ e\ \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2 \\ e\ L_1 = L_2 \end{array}\right]$$

<u>Exemplo 5</u>: Verifique se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, **onde**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & se\ x \le 2 \\ x - 2, & se\ x > 2 \end{cases} \quad a = 2.$$

<u>Solução</u>:



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(-x^2 + 2x\right) = 0$$

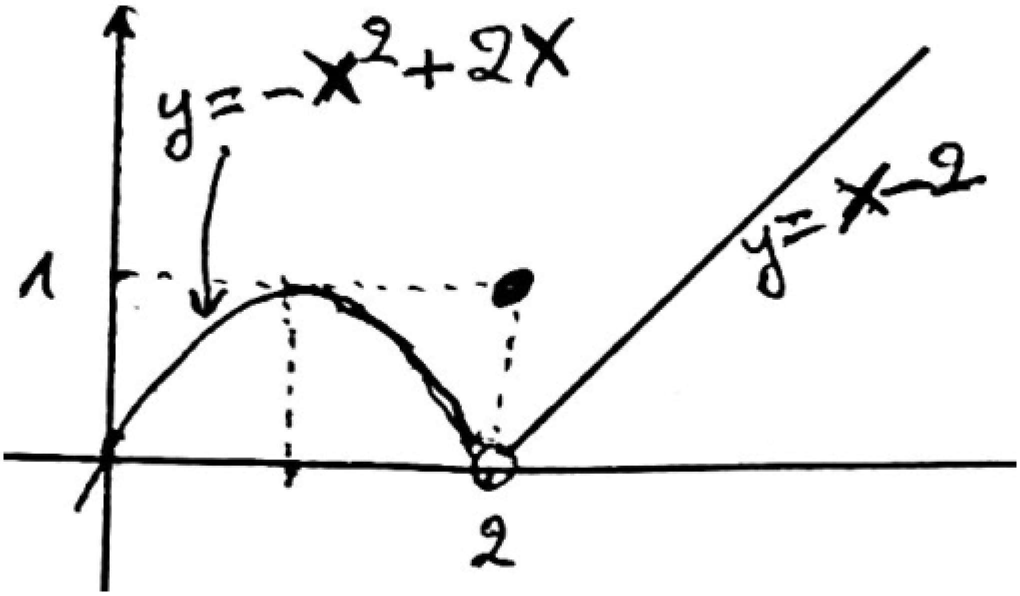
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x - 2) = 0$$

Portanto existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0.$

<u>Exemplo 6</u>: Verifique se existe $\lim_{x \to a} g(x)$, onde

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & se\ x < 2 \\ x - 2, & se\ x > 2 \\ 1\,, & se\ \ x = 2 \end{cases} \qquad a = 2$$

<u>Solução</u>:



$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2} \left(-x^2 + 2x\right) = 0$$

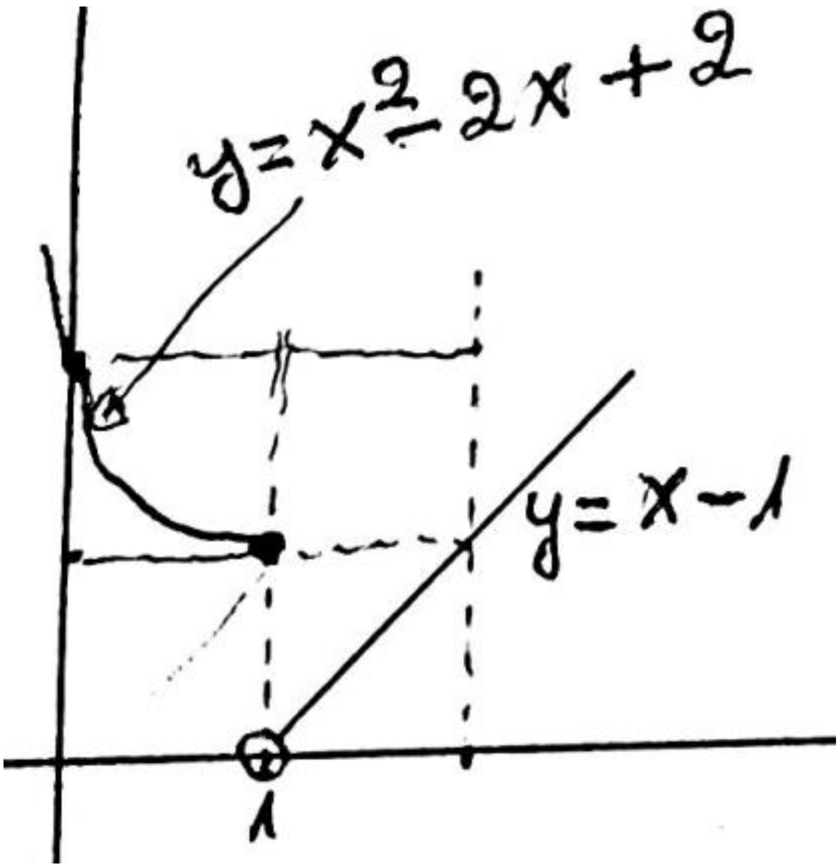
$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$$

Portanto existe $\lim_{x \to 2} g(x) = 0$.

<u>Exemplo 7</u>: Verifique se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & se\ x \leq 1 \\ x - 1, & se\ x > 1 \end{cases} \quad a = 1.$$

<u>Solução</u>:



$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(x^2 - 2x + 2\right) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, concluímos que

Não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Exemplo 8: Verifique se existe $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

Solução:

Veja que não podemos usar a propriedade do limite do quociente.

Sabemos que para verificar o limite quando $x \to a, consideramos\ x \neq a$.

Verificamos que para $x \neq 2, \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = x + 1$.

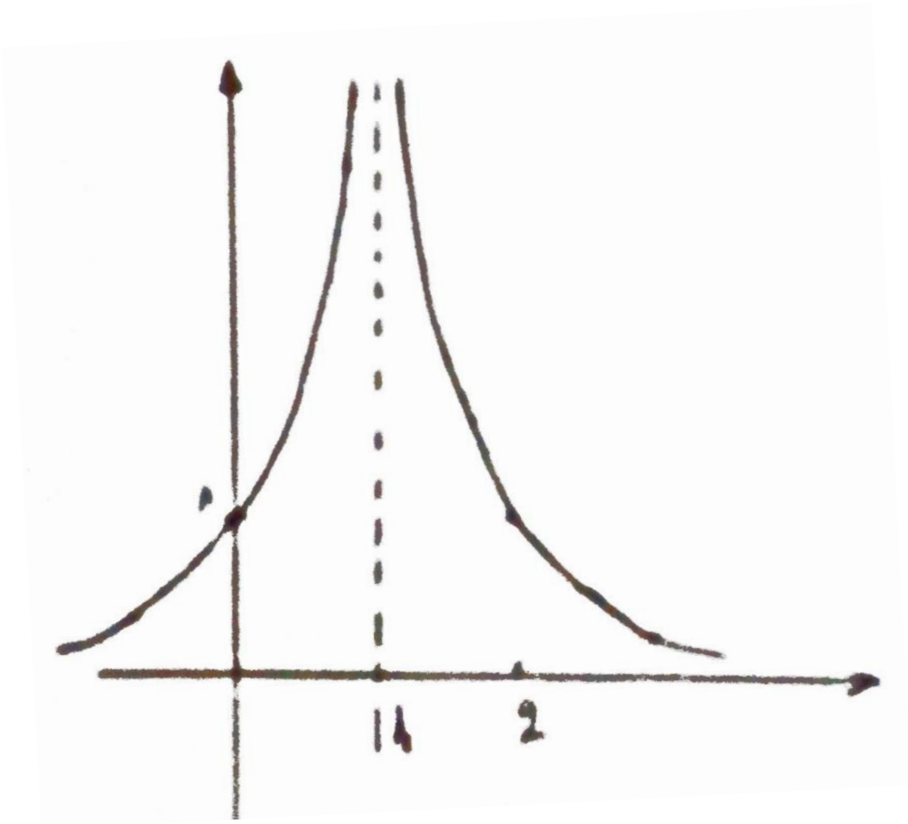
Então $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 1) = 3$.

Exemplo 9: Verificar $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$,

veja $\lim_{x \to 1}(x - 1)^2$ =0, logo não se aplica

a propriedade do limite do quociente.

O gráfico de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$



No caso dizemos que a reta $x = 1$ é assíntota Vertical ao gráfico.

<u>Definição</u>: Seja f definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a.

Dizemos que <u>$f(x)$ cresce indefinidamente</u>

quando $x \to a$, se para qualquer $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, quando $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$.

$Notação$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

No caso, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

Dado $N > 0$, <u>queremos encontrar</u> $\delta > 0$ de modo

Que, $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow f(x) > N, isto$ é, $\frac{1}{(x-1)^2} > N$

Mas, $\frac{1}{(x-1)^2} > N \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{N}}$

Tomando, então, $\delta = \frac{1}{\sqrt{N}}$

Quando $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow \frac{1}{N} > |x-1|^2 = (x-1)^2$

Logo $\frac{1}{(x-1)^2} > N$. Portanto $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

<u>Observação</u>: Essa a notação escolhida para dizer que $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ cresce indefinidamente quando $x \to 1$.

Não se trata de limite como definido anteriormente mas somente de uma notação.

No caso a reta $x = 1$ é chamada <u>assíntota vertical</u> ao gráfico de f.

De modo análogo, definimos:

Definição: Seja f definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a.

Dizemos que $f(x)$ decresce indefinidamente

Quando $x \to a$, se para qualquer $N < 0$, existe $\delta > 0$ tal que, quando

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N.$$

Notação: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Observe que novamente trata-se de uma notação. Nesse caso também diz-se que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

Definição: Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f, se acontecer uma das condições:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Do modo como provamos no exemplo anterior Podemos provar para $r \in N$:

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$; **2.** $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, se\ r\ \text{í}mpar \\ +\infty, \ \ se\ r\ par. \end{cases}$;

<u>Caso de</u> $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$,

onde $\lim_{x \to a} g(x) = c \neq 0 \ \ e \ \ \lim_{x \to a} f(x) = 0$

- **Teorema: Suponha a um número real, existem**

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ **e** $\lim_{x \to a} g(x) = c \neq 0$**, então:**

i)Se $c > 0$ **e** $\begin{cases} f(x) \to 0^+, teremos \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty \\ f(x) \to 0^-, teremos \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty \end{cases}$

ii)Se $c < 0$ **e** $\begin{cases} f(x) \to 0^+, teremos \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty \\ f(x) \to 0^-, teremos \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty \end{cases}$

Exemplo 9: $\lim_{x \to -2^-} \frac{x+3}{x+2}$

Temos:

$$\lim_{x \to -2^-} (x+3) = 1 \text{ e } \lim_{x \to -2^-} (x+2) = 0$$

Mas quando $x \to -2^- \Rightarrow (x+2) \to 0^-$

Assim, pelo Teorema, $\lim_{x \to -2^-} \frac{x+3}{x+2} = -\infty$.

Exemplos 10: Determine as assíntotas verticais ao Gráfico de $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$

Solução:

No exemplo anterior vimos que $\lim_{x \to -2^-} \frac{x+3}{x+2} = -\infty$.
Logo a reta $x = -2$ **é uma assíntota vertical ao gráfico de** f.
Podemos ver que para qualquer outro valor de x, o limite $f(x)$ **existe. Logo esse gráfico só possui uma assíntota vertical.**