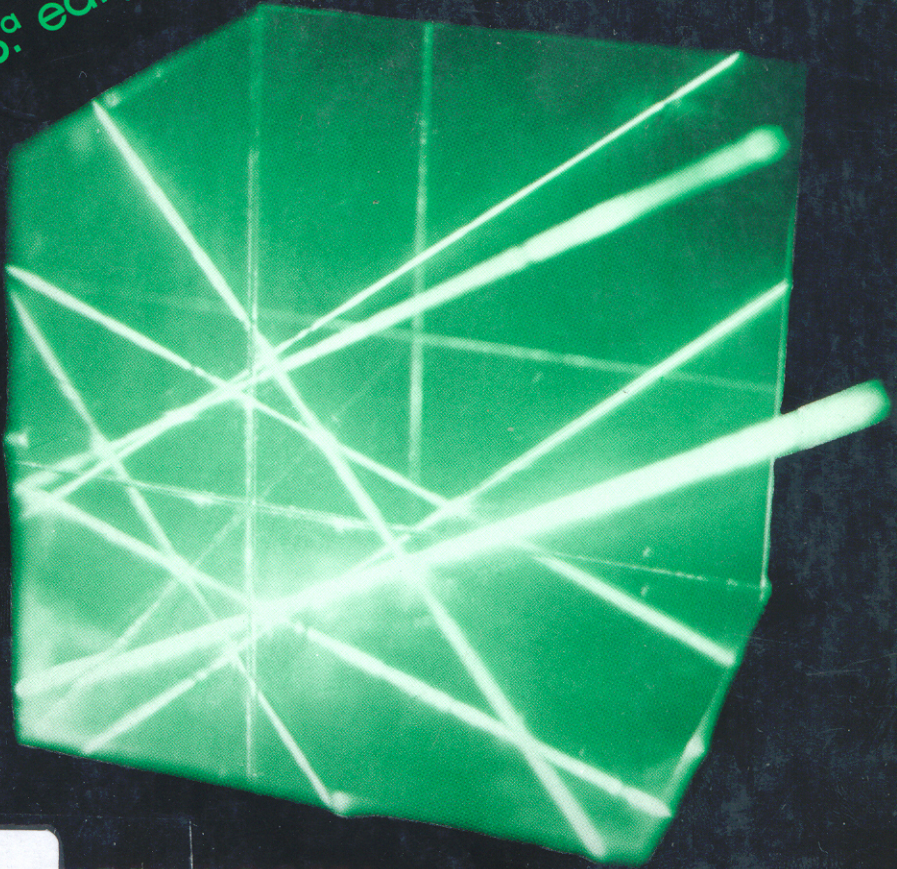
ÁLGEBRA LINEAR

3ª edição



BOLDRINI/COSTA
FIGUEIREDO/WETZLER

editora HARBRA

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

Álgebra linear / José Luiz Boldrini ... [et al.]. – 3. ed. –
A383 São Paulo : Harper & Row do Brasil, 1980.
3. ed. Bibliografia.
1. Álgebra linear I. Boldrini, José Luís.

17. CDD-512.897
80-0969 18. -512.5

Índices para catálogo sistemático:
1. Álgebra linear 512.897 (17.) 512.5 (18.)

ÁLGEBRA LINEAR

3ª edição

ampliada e revista

JOSÉ LUIZ BOLDRINI
SUELI I. RODRIGUES COSTA
VERA LÚCIA FIGUEIREDO
HENRY G. WETZLER

Depto. de Matemática da
Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP

editora HARBRA ltda.

Direção Geral: Julio E. Emöd
Supervisão Editorial: Maria Pia Castiglia
Coordenação Editorial: Maria Elizabeth Santo
Composição e Artes: AM Produções Gráficas Ltda.
Fotolitos: Ferrari Studio e Artes Gráficas Ltda.
Capa: Maria Paula Santo
Impressão e Acabamento: Donnelley Cochrane Gráfica Editora do Brasil Ltda.

Fotografia da Capa: Néstor E. Massa

A fotografia da capa ilustra a seção 5.5. Para obtê-la, utilizou-se o laser de argônio do Departamento de Eletrônica Quântica do Instituto de Física da UNICAMP-SP.

ÁLGEBRA LINEAR – 3ª edição

Rua Joaquim Távora, 629 – Vila Mariana – 04015-001 – São Paulo – SP
Promoção: (011) 5084-2482 e 571-1122. Fax: (011) 575-6876
Vendas: (011) 549-2244 e 571-0276. Fax: (011) 571-9777

Impresso no Brasil *Printed in Brazil*

CONTEÚDO

PREFÁCIO À TERCEIRA EDIÇÃO

Este livro teve como origem o texto de um curso de Álgebra Linear, oferecido para alunos de Engenharia, Física, Matemática, Estatística e Computação da Universidade Estadual de Campinas. O programa foi estabelecido tendo em vista que seria o único curso de Álgebra Linear que a maioria dos alunos receberia. Por isso, procuramos englobar os assuntos que seriam indispensáveis aos cursos que estes alunos seguissem posteriormente. Ele foi ministrado numa disciplina de segundo semestre que é seqüência de um curso, também semestral, de Geometria Analítica.

Os pré-requisitos para a leitura deste texto são os tópicos de Matemática, normalmente vistos até o curso Colegial. A partir destes, introduzimos e desenvolvemos razoavelmente os conceitos básicos de Álgebra Linear, procurando sempre indicar aos alunos as fontes às quais eles podem recorrer para aprofundar seus conhecimentos.

Alunos que cursam pela primeira vez esta disciplina, freqüentemente julgam-na muito abstrata e não vêem como podem utilizar os conceitos básicos. E, normalmente, muitos cursos terminam sem que se mostre aos alunos uma aplicação concreta de tudo o que aprenderam.

Procuramos, então, dar aos tópicos uma abordagem com dois objetivos:

1. Conseguir uma exposição da matéria, de tal forma que a ênfase seja colocada no *uso* dos conceitos. Neste sentido, optamos por uma exposição em que estes sejam introduzidos, na medida do possível, dentro de um contexto onde surja a necessidade de sua apresentação. Algumas demonstrações são propostas na forma de exercícios, o que permite uma maior fluência do texto e possibilita ao aluno desenvolvê-las dentro do seu raciocínio lógico.

2. Encaminhar os conceitos para a solução de problemas nos quais os alunos já tenham sentido dificuldade. Desta forma, é conveniente fixar qualquer um dos capítulos (Cap. 11: *Classificação de Cônicas e Quádricas*; Cap. 12: *Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais*; Cap. 13: *Processos Iterativos*; Cap. 14: *Conjuntos Convexos e Programação Linear*), como chave, ou seja, um capítulo que englobe os diversos conceitos apresentados no livro. Na busca das soluções para os problemas que colocamos nestes capítulos recorremos à maioria dos conceitos incorporados em um curso tradicional de Álgebra Linear (noções de espaço vetorial, autovalores e autovetores, diagonalização de operadores), de modo que os alunos possam perceber a inter-relação entre eles e a aplicação conjunta dos mesmos.

Dentro desta perspectiva, poderíamos sugerir algumas seqüências para o desenvolvimento de um curso de Álgebra Linear:

1. Capítulos 1 a 11;
2. Capítulos 1 a 8 e 12;
3. Capítulos 1 a 8 e 13;
4. Capítulos 1 a 8 e 14.

Uma outra sugestão é a de que o conteúdo deste livro seja desenvolvido, como já vem sendo feito, em disciplinas que integrem os tradicionais cursos de Cálculo, Álgebra Linear e Equações Diferenciais.

Quanto aos aspectos didáticos, gostaríamos de ressaltar que os exercícios são importantes inclusive como extensão de cada capítulo. O conteúdo foi elaborado de modo a se enquadrar em diversos programas, podendo-se deixar de estudar as seções assinaladas com asterisco sem prejuízo do entendimento dos tópicos abordados. Por exemplo, seções como Cadeia de Markov (seção 1.5) e Ajuste de Curvas (8.8), que são tópicos especiais, podem ou não ser incluídas de acordo com o interesse de cada aluno, grupo ou classe.

Nesta terceira edição, a antiga seção 4.9 foi ampliada e transformada no atual Capítulo 14: Conjuntos Convexos e Programação Linear. A relativa simplicidade deste assunto e seu grande número de aplicações práticas são responsáveis por sua difusão e interesse nos últimos anos. Anexamos a este novo capítulo uma seção de autoria do Prof. Antonio Carlos Moretti, que descreve o algoritmo do método simplex para programação linear e indica as etapas para a programação por microcomputadores deste método.

A nossa experiência, assim como a de outros professores, tem mostrado que o núcleo de um curso introdutório de Álgebra Linear e, portanto, o deste livro, corresponde à matéria exposta nos Capítulos de 1 a 8, podendo ser excluídas as seções 7.2 a 7.4, dependendo dos objetivos a atingir. Recomendamos especial atenção aos capítulos introdutórios, principalmente ao que trata de Sistemas Lineares, e que fornecerão a base técnica indispensável para a boa compreensão dos demais capítulos, além de conterem em si métodos fundamentais aplicáveis a muitas situações. Acreditamos que as seções e capítulos alternativos permitam opções para trabalhar com os conceitos de Álgebra Linear em diferentes áreas.

Queremos agradecer a todas as pessoas que leram e utilizaram o livro, enviando sugestões, e de modo especial aos professores Antonio Carlos Gilli Martins e João Frederico C. A. Meyer.

Os Autores

1 MATRIZES

1.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção, apresentamos os conceitos básicos sobre matrizes. Estes conceitos aparecem naturalmente na resolução de muitos tipos de problemas e são essenciais, não apenas porque eles "ordenam e simplificam" o problema, mas também porque fornecem novos métodos de resolução.

Chamamos de *matriz* uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, ao recolhermos os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los na tabela:

	Altura (m)	*Peso (kg)*	*Idade (anos)*
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Ao abstraírmos os significados das linhas e colunas, temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Observe que em um problema em que o número de variáveis e de observações é muito grande, essa disposição ordenada dos dados em forma de matriz torna-se absolutamente indispensável.

Outros exemplos de matrizes são:

$$\begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} \qquad [3 \quad 0 \quad 1] \qquad [1]$$

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções, ou ainda outras matrizes.

Representaremos uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Usaremos sempre letras maiúsculas para denotar matrizes, e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz **A** (isto é, o número de linhas e colunas), escreveremos $\mathbf{A}_{m \times n}$. Também são utilizadas outras notações para matriz, além de colchetes, como parênteses ou duas barras. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

Não obstante, neste livro as matrizes aparecerão sempre entre colchetes.

Para localizar um elemento de uma matriz, dizemos a linha e a coluna (nesta ordem) em que ele está. Por exemplo, na matriz:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

o elemento que está na primeira linha e terceira coluna é -4, isto é, $a_{13} = -4$, Ainda neste exemplo, temos $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -3$ e $a_{23} = 2$.

1.1.1 Definição: Duas matrizes $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$ são iguais, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se elas têm o mesmo número de linhas ($m = r$) e colunas ($n = s$), e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \text{sen } 90° & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.2 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Ao trabalhar com matrizes, observamos que existem algumas que, seja pela quantidade de linhas ou colunas, ou ainda, pela natureza de seus elementos, têm propriedades que as diferenciam de uma matriz qualquer. Além disso, estes tipos de matrizes aparecem freqüentemente na prática e, por isso, recebem nomes especiais.

Consideremos uma matriz com m linhas e n colunas que denotamos por $\mathbf{A}_{m \times n}$:

1.2.1 Matriz Quadrada é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [8]$$

No caso de matrizes quadradas $\mathbf{A}_{m \times m}$, costumamos dizer que **A** é uma matriz de ordem m.

1.2.2 Matriz Nula é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Exemplos:

$$\mathbf{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Matriz-Coluna é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Analogamente, temos:

1.2.4 Matriz-Linha é aquela onde $m = 1$.

Exemplos: $[3 \quad 0 \quad -1]$ e $[0 \quad 0]$

1.2.5 Matriz Diagonal é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na "diagonal" são nulos.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Um exemplo importante de matriz diagonal vem a seguir.

1.2.6 Matriz Identidade Quadrada é aquela em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplos:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.7 Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

1.2.8 Matriz Triangular Inferior é aquela em que $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2.9 Matriz Simétrica é aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

Observe que, no caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal.

1.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Ao utilizar matrizes, surge naturalmente a necessidade de efetuarmos certas operações. Por exemplo, consideremos as tabelas, que descrevem a produção de grãos em dois anos consecutivos.

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o primeiro ano

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	3000	200	400	600
Região B	700	350	700	100
Região C	1000	100	500	800

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o segundo ano

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	5000	50	200	0
Região B	2000	100	300	300
Região C	2000	100	600	600

Se quisermos montar uma tabela que dê a produção por produto e por região nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os elementos correspondentes das duas tabelas anteriores:

$$\begin{bmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 & 50 & 200 & 0 \\ 2000 & 100 & 300 & 300 \\ 2000 & 100 & 600 & 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8000 & 250 & 600 & 600 \\ 2700 & 450 & 1000 & 400 \\ 3000 & 200 & 1100 & 1400 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante os dois anos				
	soja	feijão	arroz	milho
Região A	8000	250	600	600
Região B	2700	450	1000	400
Região C	3000	200	1100	1400

Podemos considerar agora a seguinte situação. Existem muitos incentivos para se incrementar a produção, condições climáticas favoráveis etc., de tal forma que a previsão para a safra do terceiro ano será o triplo da produção do primeiro. Assim, a matriz de estimativa de produção deste último será:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{soja} & \text{feijão} & \text{arroz} & \text{milho} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9000 & 600 & 1200 & 1800 \\ 2100 & 1050 & 2100 & 300 \\ 3000 & 300 & 1500 & 2400 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Região A} \\ \text{Região B} \\ \text{Região C} \end{array}$$

Acabamos de efetuar, neste exemplo, duas operações com matrizes: soma e multiplicação por um número, que serão definidas formalmente, a seguir.

1.3.1 Adição: A soma de duas matrizes de mesma ordem, $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B}_{m \times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que denotaremos $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Isto é,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Observe que, pela forma com que foi definida, a adição de matrizes tem as mesmas propriedades que a adição de números reais.

Propriedades: Dadas as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ de mesma ordem $m \times n$, temos:

i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (comutatividade)
ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (associatividade)
iii) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula $m \times n$.

Poderá ser usada a notação $\mathbf{0}_{m \times n}$ para a matriz nula, quando houver perigo de confusão com o número zero.

A operação que definiremos a seguir é a multiplicação de uma matriz por um número (real ou complexo), também chamada multiplicação por escalar.

1.3.2 Multiplicação por Escalar: Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um número, então definimos uma nova matriz

$$k \cdot \mathbf{A} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$-2 \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Dadas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de mesma ordem $m \times n$ e números k, k_1 e k_2, temos:

i) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
ii) $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$
iii) $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, isto é, se multiplicarmos o número zero por qualquer matriz $\mathbf{A}$, teremos a matriz nula.
iv) $k_1(k_2\mathbf{A}) = (k_1k_2)\mathbf{A}$

Às vezes, é conveniente considerarmos as linhas de uma dada matriz como colunas de uma nova matriz.

1.3.3 Transposição: Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $\mathbf{A}' = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de $\mathbf{A}$, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. $\mathbf{A}'$ é denominada *transposta* de $\mathbf{A}$.

1.3.4 Exemplos

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \qquad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Exemplo 2:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

i) Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua transposta, isto é, se, e somente se $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. (Observe a matriz **B** acima.)

ii) $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}$. Isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$. Em palavras, a transposta de uma soma é igual à soma das transpostas.

iv) $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$, onde k é qualquer escalar.

Antes de definir uma outra operação, a multiplicação de matrizes, vejamos um exemplo do que pode ocorrer na prática.

Suponhamos que a seguinte matriz forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Alimento I} \\ \text{Alimento II} \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

Podemos representar o consumo dos alimentos I e II (nesta ordem) pela matriz "consumo":

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$$

A operação que vai nos fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o "produto":

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

Isto é, serão ingeridas 30 unidades de vitamina A, 15 de B e 2 de C.

Outro problema que poderemos considerar em relação aos dados anteriores é o seguinte:

Se o custo dos alimentos depender somente do seu contéudo vitamínico e soubermos que os preços por unidade de vitamina A, B e C são, respectivamente, 1,5, 3 e 5 u.c.p., quanto pagaríamos pela porção de alimentos indicada anteriormente?

$$(**) \quad \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= [30(1{,}5) + 15(3) + 2(5)]$$

$$= [100]$$

Ou seja, pagaríamos 100 u.c.p.

Observamos que nos "produtos" de matrizes efetuados em (*) e (**), cada um dos elementos da matriz-resultado é obtido a partir de uma linha da primeira matriz e uma coluna da segunda. Além disso, com relação às ordens das matrizes envolvidas, temos:

Em (*) $\quad [\ ]_{1 \times 2} \cdot [\ ]_{2 \times 3} = [\ ]_{1 \times 3}$

Em (**) $\quad [\ ]_{1 \times 3} \cdot [\ ]_{3 \times 1} = [\ ]_{1 \times 1}$

O exemplo anterior esboça uma definição de multiplicação de matrizes **A** e **B**, quando **A** é uma matriz linha. Esta noção de produto pode ser estendida para o caso mais geral, e os elementos da matriz-produto serão obtidos pela soma de produtos dos elementos de uma linha da primeira matriz pelos elementos de uma coluna da segunda matriz. Por exemplo,

Sejam

$$\mathbf{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

e $$\mathbf{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A matriz-produto **AB** é a matriz 2×2 definida como:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Agora, passemos para a definição geral.

1.3.5 Multiplicação de Matrizes: Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{rs}]_{n \times p}$. Definimos $\mathbf{AB} = [c_{uv}]_{m \times p}$ onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \ldots + a_{un}b_{nv}$$

Observações:

i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{l \times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, a matriz-resultado $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ será de ordem $m \times p$.

ii) O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

1.3.6 Exemplos

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2(-1) + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 4(-1) + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 5(-1) + 3 \cdot 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Não é possível efetuar esta multiplicação, porque o número de colunas da primeira é diferente do número de linhas da segunda.

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Propriedades:

i) Em geral $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (podendo mesmo um dos membros estar definido e o outro não).

Exemplo:

Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Então $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Note, ainda, que $\mathbf{AB} = 0$, sem que $\mathbf{A} = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$.

Desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas:

ii) $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ (Isto justifica o nome da matriz identidade.)

iii) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma)

iv) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma)

v) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associatividade)

vi) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ (Observe a ordem!)

vii) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

1.4 EXERCÍCIOS

1. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = [2 \ \ -1]$$

Encontre:

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
c) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
d) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$
e) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$
f) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$
g) $-\mathbf{A}$
h) $-\mathbf{D}$

2. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, então $x =$ __________.

3. Se **A** é uma matriz simétrica, então $\mathbf{A} - \mathbf{A}' =$ __________.

4. Se **A** é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}'$ é __________.

5. Se **A** é uma matriz diagonal, então $\mathbf{A}' =$ __________.

6. Verdadeiro ou falso?
   a) $(-\mathbf{A})' = -(\mathbf{A}')$
   b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{B}' + \mathbf{A}'$
   c) Se $\mathbf{AB} = 0$, então $\mathbf{A} = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$.
   d) $(k_1\mathbf{A})(k_2\mathbf{B}) = (k_1k_2)\mathbf{AB}$
   e) $(-\mathbf{A})(-\mathbf{B}) = -(\mathbf{AB})$
   f) Se **A** e **B** são matrizes simétricas, então $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
   g) Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, então $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 0$.
   h) Se podemos efetuar o produto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, então **A** é uma matriz quadrada.

7. Se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, então $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2 =$ __________.

8. Se **A** é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}^2$ é __________.

9 Ache x, y, z, w se $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

    mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$.

11. Suponha que $\mathbf{A} \neq 0$ e $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ onde **A**, **B**, **C** são matrizes tais que a multiplicação esteja definida.
    a) $\mathbf{B} = \mathbf{C}$?
    b) Se existir uma matriz **Y**, tal que $\mathbf{YA} = \mathbf{I}$, onde **I** é a matriz identidade, então $\mathbf{B} = \mathbf{C}$?

12. Explique por que, em geral, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

13. Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

    a) Mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = 0$, $\mathbf{AC} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{CA} = \mathbf{C}$.
    b) Use os resultados de (*a*) para mostrar que $\mathbf{ACB} = \mathbf{CBA}$, $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$.

14. Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, ache **B**, de modo que $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.

15. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:

	Ferro	Madeira	Vidro	Tinta	Tijolo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

(Qualquer semelhança dos números com a realidade é mera coincidência.)

a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?
b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.c.p. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?
c) Qual o custo total do material empregado?

16. Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo, significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j, $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual seria o significado da matriz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$?

Seja $\mathbf{A}^2 = [c_{ij}]$. Calculemos o elemento $c_{42} = \sum_{k=1}^{5} a_{4k}a_{k2} = 0+0+1+0+0=1$.

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1$. Isto significa que a estação 4 transmite para a estação 2 através de uma retransmissão pela estação 3, embora não exista uma transmissão direta de 4 para 2.

a) Calcule A^2.
b) Qual o significado de $c_{13} = 2$?
c) Discuta o significado dos termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 de modo a justificar a afirmação: "A matriz A^2 representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra com uma única retransmissão".
d) Qual o significado das matrizes $A + A^2$, A^3 e $A + A^2 + A^3$?
e) Se A fosse simétrica, o que significaria?

17. Existem três marcas de automóveis disponíveis no mercado: o Jacaré, o Piranha e o Urubu. O termo a_{ij} da matriz A abaixo é a probabilidade de que um dono de carro da linha i mude para o carro da coluna j, quando comprar um carro novo.

$$\begin{array}{cc} & \text{Para} \\ & \begin{array}{ccc} \text{J} & \text{P} & \text{U} \end{array} \\ \text{De} \begin{array}{c} \text{J} \\ \text{P} \\ \text{U} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Os termos da diagonal dão a probabilidade a_{ii} de se comprar um carro novo da mesma marca.

A^2 representa as probabilidades de se mudar de uma marca para outra depois de duas compras. Você pode verificar isto a partir dos conceitos básicos de probabilidade (consulte 1.5) e produto de matrizes.

Calcule A^2 e interprete.

18. Tente descobrir outras situações concretas que possam ser analisadas de modo similar ao de cada um dos problemas 15, 16 e 17.

* 1.5 PROCESSOS ALEATÓRIOS: CADEIAS DE MARKOV

Muitos dos processos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados (pelo menos em primeira aproximação) como se o fenômeno estudado passasse, a partir de um estado inicial, por uma seqüência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorreria segundo uma certa probabilidade. (Suporemos nesta secção um conhecimento mínimo sobre probabilidades.) No caso em que esta probabilidade de transição depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado a seguir, o processo será chamado *processo de Markov* e uma seqüência de estados seguindo este processo será denominada uma *cadeia de Markov.* Evidentemente, ao se supor tal restrição estaremos simplificando, talvez demasiadamente, uma vez

que as probabilidades podem se modificar com o tempo. Mas, assim mesmo, a informação que obtivermos com este modelo já nos servirá de auxílio para uma previsão do comportamento de certos fenômenos.

Suponhamos, por exemplo, que, em uma determinada região, observa-se que se chover bastante durante um ano, a probabilidade de que chova bastante no ano seguinte é $\frac{1}{4}$, e que a probabilidade de que faça seca é de $\frac{3}{4}$. Ainda, se houver seca em um ano, no ano seguinte a probabilidade de haver seca ou chuva suficiente será a mesma, e igual a $\frac{1}{2}$. Suponhamos também, para simplificar (o que não ocorre na prática, embora possamos usar como recurso para ter um indicador da situação), que estas probabilidades não mudem com o decorrer do tempo. Os estados possíveis para este processo são: chuva e seca.

Podemos ter, então, as seguintes seqüências de acontecimentos (árvore de probabilidades):

Assim, sabendo que no primeiro ano houve seca, a probabilidade de que chova bastante no terceiro ano é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Conforme o número de anos aumenta, as contas se tornam mais complicadas e, se estivermos interessados em previsões a longo prazo sobre o clima da região, temos que procurar um outro procedimento. Isto pode ser feito se introduzirmos a noção de *matriz das probabilidades de transição*, e a de *vetor de probabilidades.* A matriz T das probabilidades de transição é obtida da tabela de probabilidades onde o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna indica a probabilidade de transição do j-ésimo para o i-ésimo estado.

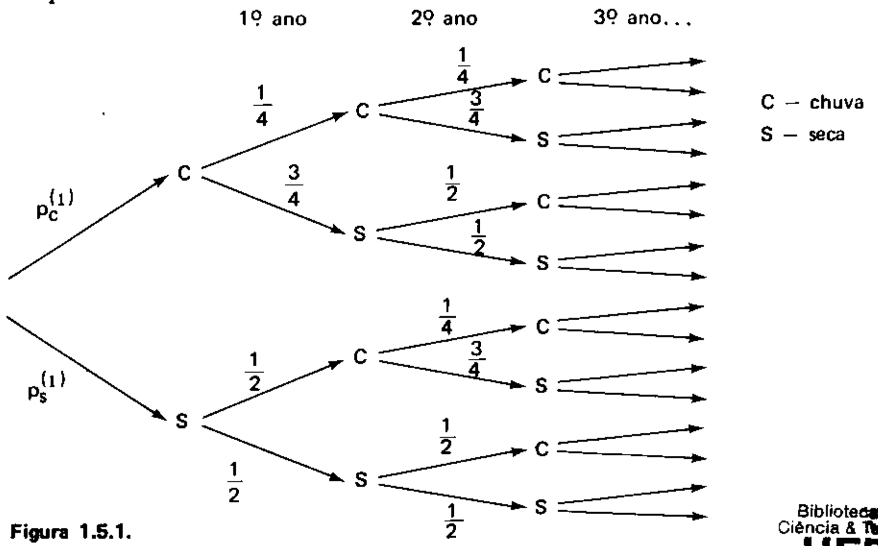


Figura 1.5.1.

$$\begin{array}{c|cc} & C & S \\ \hline C & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ S & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

O vetor de probabilidades é a matriz

$$\begin{bmatrix} p_c^{(n)} \\ p_s^{(n)} \end{bmatrix}$$

cuja primeira linha dá a probabilidade de que haja chuva no n-ésimo ano e a segunda linha dá a probabilidade de que haja seca no n-ésimo ano.

Analisando a árvore de probabilidades vemos que

$$p_c^{(2)} = \frac{1}{4}\,p_c^{(1)} + \frac{1}{2}\,p_s^{(1)}$$

$$p_s^{(2)} = \frac{3}{4}\,p_c^{(1)} + \frac{1}{2}\,p_s^{(1)}$$

Observamos que $\mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}p_c^{(1)} + \frac{1}{2}p_s^{(1)} \\ \frac{3}{4}p_c^{(1)} + \frac{1}{2}p_s^{(1)} \end{bmatrix}$

e portanto

$$\begin{bmatrix} p_c^{(2)} \\ p_s^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

O mesmo ocorre do segundo para o terceiro ano, deste para o quarto etc. Temos, então, a seqüência:

$$\underset{1^{\circ}\text{ ano}}{\begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}} \longrightarrow \underset{2^{\circ}\text{ ano}}{\begin{bmatrix} p_c^{(2)} \\ p_s^{(2)} \end{bmatrix}} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix} \longrightarrow \underset{3^{\circ}\text{ ano}}{\begin{bmatrix} p_c^{(3)} \\ p_s^{(3)} \end{bmatrix}} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p_c^{(2)} \\ p_s^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^2 \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

n-ésimo ano

$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{bmatrix} p_c^{(n)} \\ p_s^{(n)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^n \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

Portanto, o comportamento do clima desta região a longo prazo (isto é, quando n aumenta) poderá ser previsto se soubermos que os elementos das matrizes $\mathbf{T}^n$, $n = 1, 2, \ldots$ se aproximam dos elementos de uma matriz fixa $\mathbf{P}$ pois, neste caso,

$p_c^{(n)} \longrightarrow p_1$ e $p_s^{(n)} \longrightarrow p_2$ quando $n \longrightarrow \infty$

com

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} p_c^{(1)} \\ p_s^{(1)} \end{bmatrix}$$

(Tal previsão é importante, pois se chegarmos, por exemplo, à conclusão que $p_s^{(n)} \to 1$ quando $n \to \infty$, a longo prazo a região se tornará um deserto.)

Se $\mathbf{T}^n$ não se aproxima de uma matriz $\mathbf{P}$, então não poderemos fazer nenhuma previsão a longo prazo, pois o processo se modificará bastante a cada passo. Assim, um dos problemas que devemos resolver é quais são as condições sobre a matriz $\mathbf{T}$ das probabilidades de transição, para que suas potências se aproximem de uma determinada matriz. Antes de resolver isto, porém, vamos formalizar a situação anterior.

1.5.1 Definição: Um *processo aleatório de Markov* é um processo que pode assumir estados $a_1, a_2, \ldots, a_r$, de tal modo que a probabilidade de transição de um estado a_j para um estado a_i seja p_{ij} (um número que só depende de a_j e a_i).

A *matriz das probabilidades de transição (matriz estocástica)* é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \ldots & p_{rr} \end{bmatrix}$$

(Observe que $p_{ij} \geqslant 0$, e que a soma de cada coluna deve ser 1.)

O *vetor de probabilidades* é aquele cuja i-ésima linha dá a probabilidade de ocorrência do estado a_i após n transações:

$$\begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ \vdots \\ p_r^{(n)} \end{bmatrix}$$

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior vemos que, após n passos,

$$\begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ \vdots \\ p_r^{(n)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^n \cdot \begin{bmatrix} p_1^{(1)} \\ \vdots \\ p_r^{(1)} \end{bmatrix}$$

1.5.2 Previsões a Longo Prazo: Para podermos fazer previsões a longo prazo, a matriz **T** deve cumprir certas condições. Assim, introduzimos a definição a seguir.

1.5.3 Definição: Uma matriz das probabilidades de transição é *regular* se alguma de suas potências tem todos os elementos não nulos.

A importância da matriz regular para as previsões a longo prazo é dada pelo teorema abaixo:

1.5.4 Teorema: Se a matriz $\mathbf{T}_{r \times r}$ das probabilidades de transição é regular, então:

i) As potências $\mathbf{T}^n$ aproximam-se de uma matriz **P**, no sentido de que cada elemento de $\mathbf{T}^n$ aproxima-se do elemento correspondente em **P**.

ii) Todas as colunas de **P** são iguais, sendo dadas por um vetor-coluna

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \end{bmatrix}$$

com $p_1 > 0, p_2 > 0, ..., p_r > 0$.

iii) Para qualquer vetor de probabilidades inicial

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} p_1^{(1)} \\ \vdots \\ p_r^{(1)} \end{bmatrix}$$

o vetor de probabilidades $\mathbf{T}^n\mathbf{V}_1$ aproxima-se de **V** (dado no item anterior).

iv) O vetor **V** é o único vetor que satisfaz $\mathbf{V} = \mathbf{TV}$.

O que este teorema nos diz é que se a matriz das probabilidades de transição é regular, então é possível fazer previsão a longo prazo e esta não depende das probabilidades iniciais $\mathbf{V}_1$. Além disso, o item (*iv*) nos indicará como achar as probabilidades depois de um longo prazo. O processo utilizado para se encontrar o vetor "final" de probabilidades, usando o item (*iv*), corresponde à procura de autovetor associado ao autovalor um da matriz **T**, segundo as denominações que veremos no Capítulo 6. Não faremos a prova deste teorema porque isto nos desviará demais de nossos objetivos.

1.5.5 Exemplos

Exemplo 1: No problema sobre previsão de clima que estávamos estudando na introdução,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é regular pois sua primeira potência, isto é, ela mesma, já tem todos os elementos estritamente positivos; e assim podemos concluir, usando o item (*iv*), que quaisquer que sejam as probabilidades iniciais, as probabilidades a longo prazo são dadas por:

$$\begin{bmatrix} p_c \\ p_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_c \\ p_s \end{bmatrix}$$

ou $\begin{cases} p_c = \frac{1}{4} p_c + \frac{1}{2} p_s \\ p_s = \frac{3}{4} p_c + \frac{1}{2} p_s \end{cases}$

ou $\begin{cases} 2p_s = 3p_c \\ 2p_s = 3p_c \end{cases} \Longrightarrow p_s = \frac{3}{2} p_c$

Como devemos ter $p_c + p_s = 1$ (que é a probabilidade total), temos $p_c + \frac{3}{2} p_c = 1$ ou $p_c = \frac{2}{5}$ e, portanto, $p_s = \frac{3}{5}$. Assim, a longo prazo a probabilidade de um ano de chuva é $\frac{2}{5}$, enquanto que a probabilidade de um ano de seca é $\frac{3}{5}$ (dentro das hipóteses simplificadoras), e portanto a região tenderá a uma ligeira aridez.

Exemplo 2: Suponhamos que em uma determinada região, a cada ano três por cento da população rural migra para as cidades, enquanto que apenas um por cento da população urbana migra para o meio rural. Se todas as demais condições permanecerem estáveis, as condições políticas não mudarem, e estas porcentagens de migração continuarem as mesmas, qual deve ser a relação entre as populações urbana e rural desta região a longo prazo?

Como três por cento da população rural migra para o meio urbano, a probabilidade de migração do meio rural para o meio urbano é 0,03, enquanto que a probabilidade de não migração é 0,97. Como um por cento da população urbana migra para o meio rural a probabilidade de migração do meio urbano para o rural é 0,01 e a de não migração é 0,99. Denotando por U o meio urbano e por R o meio rural, temos a matriz das probabilidades de transição:

	R	U
R	0,97	0,01
U	0,03	0,99

Como a matriz é regular, a longo prazo as probabilidades p_R, de viver no meio rural, e p_U, de viver no meio urbano, devem satisfazer

$$\begin{bmatrix} 0,97 & 0,01 \\ 0,03 & 0,99 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_R \\ p_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_R \\ p_U \end{bmatrix}$$

donde $p_U = 3p_R$ e, como devemos ter $p_U + p_R = 1$, temos $p_R = 0,25$ e $p_U = 0,75$. Ou seja, a longo prazo, e se não houver modificações nas tendências de migração, teremos 25% da população no meio rural e 75% da população no meio urbano.

Exemplo 3: Observa-se experimentalmente que, em condições naturais e sem ser submetida à pesca industrial, a quantidade de uma certa espécie de peixes varia da seguinte forma: se em um determinado ano a população diminuiu, a probabilidade de que diminua ainda mais no ano seguinte é de 0,6 e, se em um determinado ano a população aumenta, a probabilidade de que diminua no ano seguinte é de apenas 0,3. Entretanto, observa-se que sendo submetida à pesca industrial, quando a população aumenta num determinado ano, a probabilidade de que diminua no ano seguinte se altera para 0,5, enquanto que se a população diminui num ano, a probabilidade de que diminua no ano seguinte continua sendo de 0,6. Deseja-se saber como, a longo prazo, a pesca industrial estará afetando os peixes dessa espécie, para ver se é necessário diminuir a intensidade de pesca ou se, ao contrário, é possível aumentá-la.

Os estados deste processo são: diminuição da população (D) e aumento da população (A). Então, sem haver pesca industrial, a matriz de probabilidades de transição é

	D	A
D	0,6	0,3
A	0,4	0,7

Como é uma matriz regular, as probabilidades p_D da população diminuir e p_A da população aumentar a longo prazo são dadas por

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_D \\ p_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_D \\ p_A \end{bmatrix}$$

que, sendo resolvida (lembrando que $p_D + p_A = 1$), fornece $p_D = \frac{3}{7}$ e $p_A = \frac{4}{7}$. Portanto, como a probabilidade de a população aumentar é maior, em condições naturais, a espécie tem a sobrevivência razoavelmente garantida. Com a pesca industrial, a matriz se altera para

	D	A
D	0,6	0,5
A	0,4	0,5

Como é uma matriz regular, a longo prazo p_D e p_A são dadas por

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_D \\ p_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_D \\ p_A \end{bmatrix}$$

Assim, temos $p_D = \frac{5}{9}$ e $p_A = \frac{4}{9}$. Como a probabilidade de a população diminuir é maior, se a espécie for submetida à pesca industrial, sua sobrevivência será ameaçada e, portanto, a pesca deve ser diminuída.

Exemplo 4: Duas substâncias distintas estão em contato e trocam íons de sódio entre si. Sabe-se (por dedução teórica, ou experimentação) que um íon de sódio do meio (1) tem probabilidade 0,7 de passar ao meio (2), enquanto que um íon de sódio que esteja no meio (2) tem probabilidade 0,1 de passar ao meio (1). Colocando-se dois moles de sódio no meio (1), quais serão as con-

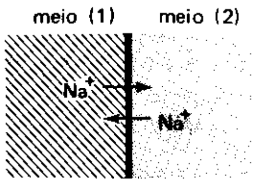


Figura 1.5.2

centrações de sódio em cada um dos meios, após um longo período de tempo?

Os estados deste processo são: o íon está no meio (1) e o íon está no meio (2). A matriz de probabilidades de transição é:

	meio (1)	meio (2)
meio (1)	0,3	0,1
meio (2)	0,7	0,9

Sejam p_1 e p_2 as probabilidades de estar no meio (1) e (2), respectivamente. Então, inicialmente, quando todo o sódio foi colocado no meio (1), $p_1^{(1)} = 1$ e $p_2^{(1)} = 0$. Como a matriz de probabilidades é regular, a longo prazo as probabilidades não dependem das probabilidades iniciais, e devem satisfazer

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,7 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo (lembrando sempre que $p_1 + p_2 = 1$), temos $p_1 = \frac{1}{8}$ e $p_2 = \frac{7}{8}$.

Logo, as concentrações finais em cada meio são $\frac{1}{8} \cdot 2 = 0,25$ moles no meio (1) e $\frac{7}{8} \cdot 2 = 1,75$ moles no meio (2).

1.5.6 Previsões em Genética: Com pequenas modificações das idéias usadas nos processos de Markov, podemos estudar vários problemas genéticos. Sabemos que o tipo mais simples de transmissão de herança genética é efetuado através de pares de genes, os quais podem ser ambos dominantes, recessivos, ou um dominante e outro recessivo. Chamemos G o gene dominante e g o gene recessivo. Um indivíduo será chamado dominante se tiver genes GG, híbrido se tiver genes Gg, e recessivo, caso os genes sejam gg. Um indivíduo herda os genes ao acaso, um deles de seu pai e o outro de sua mãe. Assim, nos vários tipos de cruzamento, temos probabilidades distintas de transmissão de herança genética. No caso de cruzamento de indivíduos dominantes teremos somente filhos de genótipos dominantes.

GG cruzado com GG
- → GG com probabilidade 1
- → Gg com probabilidade 0
- → gg com probabilidade 0

No caso de cruzamento de indivíduos recessivos, teremos:

gg cruzado com gg
- → GG com probabilidade 0
- → Gg com probabilidade 0
- → gg com probabilidade 1

No caso do cruzamento de um indivíduo dominante com um recessivo, temos:

GG cruzado com gg
- → GG com probabilidade 0
- → Gg com probabilidade 1
- → gg com probabilidade 0

No caso do cruzamento de um indivíduo dominante com um híbrido, temos:

GG cruzado com Gg
- → GG com probabilidade 0,5
- → Gg com probabilidade 0,5
- → gg com probabilidade 0

No caso recessivo e híbrido, temos:

gg cruzado com Gg
- → GG com probabilidade 0
- → Gg com probabilidade 0,5
- → gg com probabilidade 0,5

E finalmente, no caso de dois indivíduos híbridos, temos:

Gg cruzado com Gg
- → GG com probabilidade 0,25
- → Gg com probabilidade 0,5
- → gg com probabilidade 0,25

Denotando por d, dominante, r, recessivo e h, híbrido, e os respectivos cruzamentos por $d \times d$, $d \times r$ etc., colocando as probabilidades em colunas, podemos montar a seguinte matriz T:

	$d \times d$	$r \times r$	$d \times r$	$d \times h$	$r \times h$	$h \times h$
d	1	0	0	0,5	0	0,25
h	0	0	1	0,5	0,5	0,5
r	0	1	0	0	0,5	0,25

Além disso, numa população numerosa composta por uma porcentagem $p_d^{(1)}$ de indivíduos de características dominantes, $p_h^{(1)}$ de indivíduos híbridos e $p_r^{(1)}$ de indivíduos de características recessivas, a probabilidade de cruzamento de genes de um indivíduo dominante com outro dominante é $p_d^{(1)} \cdot p_d^{(1)}$. Se quizermos calcular a probabilidade de um cruzamento onde um dos indivíduos é dominante e o outro é híbrido, temos que somar $p_d^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$ (considerando que o primeiro é dominante e o segundo é híbrido) a $p_h^{(1)} \cdot p_d^{(1)}$. Assim, a probabilidade é de $2p_d^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$. Os outros casos seguem o mesmo raciocínio e temos então:

Cruzamento	Probabilidade
$d \times d$	$p_d^{(1)} \cdot p_d^{(1)}$
$r \times r$	$p_r^{(1)} \cdot p_r^{(1)}$
$d \times r$	$2\,p_d^{(1)} \cdot p_r^{(1)}$
$d \times h$	$2\,p_d^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$
$r \times h$	$2\,p_r^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$
$h \times h$	$p_h^{(1)} \cdot p_h^{(1)}$

(Estamos supondo que a característica genética analisada seja tal que não interfira no cruzamento natural.)

Então, podemos ter as porcentagens de indivíduos dominantes, $p_d^{(2)}$, de indivíduos híbridos, $p_h^{(2)}$, e de indivíduos recessivos, $p_r^{(2)}$, da segunda geração, multiplicando as matrizes:

$$\begin{bmatrix} p_d^{(2)} \\ p_h^{(2)} \\ p_r^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_d^{(1)} \cdot p_d^{(1)} \\ p_r^{(1)} \cdot p_r^{(1)} \\ 2p_d^{(1)} \cdot p_r^{(1)} \\ 2p_d^{(1)} \cdot p_h^{(1)} \\ 2p_r^{(1)} \cdot p_h^{(1)} \\ p_h^{(1)} \cdot p_h^{(1)} \end{bmatrix}$$

Supondo que não haja novo cruzamento de indivíduos da primeira geração (o que, em geral, ocorre com populações de insetos etc.), uma vez obtidas as porcentagens de indivíduos da segunda geração, podemos obter as porcentagens da terceira geração, multiplicando novamente a matriz **T** pelos novos dados, e assim sucessivamente. Dessa forma, obtemos o perfil genético de qualquer geração. Evidentemente, os cálculos tornam-se demorados, mas podem ser feitos facilmente, se usarmos calculadoras. Este tipo de análise é muito simples (demais talvez), mas é importante em muitos campos, como em Agricultura, para se ter uma idéia da propagação da resistência genética a certos tipos de doença, da resistência de insetos a tipos de inseticidas etc.

Exemplo: Aplica-se um certo tipo de inseticida em uma plantação, para se combater uma determinada espécie de insetos. Após a aplicação verifica-se que, dos poucos insetos sobreviventes, 60% eram resistentes ao inseticida e os outros 40% não o eram (e haviam sobrevivido por razões casuais). Sabe-se que o ciclo de vida desses insetos é de um ano e que eles se cruzam apenas uma vez em cada geração. Além disso, ficou comprovada que a resistência ao inseticida é uma característica dominante e que o inseticida não foi aplicado novamente. Tendo estes dados em mente, perguntamos qual é a porcentagem de insetos resistentes ao inseticida após dois anos?

Como a resistência é uma característica dominante, os insetos resistentes podem ter genótipo *GG* ou *Gg* na relação 1 : 2, e assim, 20% dos insetos resistentes são dominantes e 40% são híbridos. Temos, portanto, $p_d^{(1)} = 0{,}2$, $p_h^{(1)} = 0{,}4$ e $p_r^{(1)} = 0{,}4$ e assim, a distribuição da porcentagem dos insetos após um ano é dada por

$$\begin{bmatrix} p_d^{(2)} \\ p_h^{(2)} \\ p_r^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (0{,}2) \cdot (0{,}2) \\ (0{,}4) \cdot (0{,}4) \\ 2(0{,}2) \cdot (0{,}4) \\ 2(0{,}2) \cdot (0{,}4) \\ 2(0{,}4) \cdot (0{,}4) \\ (0{,}4) \cdot (0{,}4) \end{bmatrix}$$

ou seja, $p_d^{(2)} = 0{,}16$, $p_h^{(2)} = 0{,}48$ e $p_r^{(2)} = 0{,}36$. Após mais um ano, a distribuição de insetos será dada por

$$\begin{bmatrix} p_d^{(3)} \\ p_h^{(3)} \\ p_r^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (0{,}16) & (0{,}16) \\ (0{,}36) & (0{,}36) \\ 2(0{,}16) & (0{,}36) \\ 2(0{,}16) & (0{,}48) \\ 2(0{,}36) & (0{,}48) \\ (0{,}48) & (0{,}48) \end{bmatrix}$$

ou seja, $p_d^{(3)} = 0{,}16$, $p_h^{(3)} = 0{,}48$ e $p_r^{(3)} = 0{,}36$. Assim, após dois anos, a porcentagem dos insetos resistentes ao inseticida será $p_d^{(3)} + p_h^{(3)} = 0{,}16 + 0{,}48 = 0{,}64$, ou seja, 64% da população é resistente. Dessa forma, se for necessária uma nova aplicação de inseticida, não será conveniente aplicar o mesmo tipo, pois ele matará no máximo 36% do insetos.

Observe que a distribuição dos insetos quanto ao genótipo GG, Gg ou gg permaneceu a mesma na segunda e terceira gerações. ($p_d^{(2)} = p_d^{(3)} = 0{,}16$ $p_h^{(2)} = p_h^{(3)} = 0{,}48$ e $p_r^{(2)} = p_r^{(3)} = 0{,}36$.)

Calcule as probabilidades para a quarta geração de insetos (depois de três anos). O resultado que você obteve não é uma casualidade. Existe uma "lei genética" muito conhecida, que estabelece sob condições ideais que depois da segunda geração, a distribuição entre os genótipos permanece a mesma. Assim, se partirmos de uma população onde a formação inicial é dada por freqüências $p_d^{(1)} = u$, $p_h^{(1)} = v$ e $p_r^{(1)} = w$, temos:

Genótipo	*Geração inicial*	*Gerações seguintes*
GG	u	$(u + \frac{v}{2})^2$
Gg	v	$2(u + \frac{v}{2})(w + \frac{v}{2})$
gg	w	$(w + \frac{v}{2})^2$

Você pode mostrar esta relação através do produto de matrizes.

No "modelo genético" considerado neste parágrafo, é assumida uma situação-padrão: não existe migração, os encontros são ao acaso, não ocorrem mutações nem seleção, os dois sexos aparecem sempre em quantidades iguais.

Esta relação de estabilidade genética aqui apresentada foi mostrada independentemente, pelo matemático G. H. Hardy e o genético W. Weinberg em 1908.

* 1.6 EXERCÍCIOS

1. Suponha que um corretor da Bolsa de Valores faça um pedido para comprar ações na segunda-feira, como segue: 400 quotas de ação A, 500 quotas da ação B e 600 quotas da ação C. As ações A, B e C custam por quota Cr\$ 500,00, Cr\$ 400,00 e Cr\$ 250,00, respectivamente.

   a) Encontre o custo total de ações, usando multiplicação de matrizes.

   b) Qual será o ganho ou a perda quando as ações forem vendidas seis meses mais tarde se as ações A, B e C custam Cr\$ 600,00, Cr\$ 350,00 e Cr\$ 300,00 por quota, respectivamente?

2. É observado que as probabilidades de um time de futebol ganhar, perder e empatar uma partida depois de conseguir uma vitória são $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{10}$ respectivamente; e depois de ser derrotado são $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10}$ e $\frac{2}{5}$, respectivamente; e depois de empatar são $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{5}$, respectivamente. Se o time não melhorar nem piorar, conseguirá mais vitórias que derrotas a longo prazo?

3. Numa pesquisa procura-se estabelecer uma correlação entre os níveis de escolaridade de pais e filhos. Estabelecendo as letras P para os que concluíram o curso primário, S para o curso secundário e U para o curso universitário, a probabilidade de um filho pertencer a um destes grupos, dependendo do grupo em que o pai está é dada pela matriz

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{P} & \text{S} & \text{U} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{P} \\ \text{S} \\ \text{U} \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

   Qual é a probabilidade de um neto de um indivíduo que realizou o curso secundário ser um universitário?

4. Numa cidade industrial, os dados sobre a qualidade do ar são classificados como satisfatório (S) e insatisfatório (I). Assuma que, se num dia é registrado S, a probabilidade de se ter S no dia seguinte é de $\frac{2}{5}$ e que, uma vez registrado I, tem-se $\frac{1}{5}$ de probabilidade de ocorrer S no dia seguinte.

   a) Qual é a probabilidade do quarto dia ser S, se o primeiro dia é I?
   b) O que se pode dizer a longo prazo sobre a probabilidade de termos dias S ou I?

5. Numa ilha maravilhosa verificou-se que a cor azul ocorre em borboletas de genótipo *aa*, e não ocorre em *Aa* e *AA*. Suponha que a proporção de borboletas azuis seja $\frac{1}{4}$. Depois de algumas gerações, qual será a porcentagem das borboletas não azuis, mas capazes de ter filhotes azuis?

1.7 RESPOSTAS

1.7.1 Respostas de 1.4

2. $x = 1$
4. Triangular inferior
6. *a*) V; *b*) V; *c*) F; *d*) V; *e*) F; *f*) F; *g*) F; *h*) V
8. Triangular superior
12. Porque em geral o produto de matrizes não é comutativo.
15. *a*) [146 526 260 158 388]

   b) $\begin{bmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{bmatrix}$

   c) Cr$ 11.736,00

16. *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0{,}59 & 0{,}28 & 0{,}13 \\ 0{,}44 & 0{,}39 & 0{,}17 \\ 0{,}48 & 0{,}36 & 0{,}16 \end{bmatrix}$

1.7.2 Respostas de 1.6

2. As probabilidades de ganhar, perder ou empatar, a longo prazo, são aproximadamente iguais a 1/3, sendo a probabilidade de ganhar ligeiramente maior.
3. A probabilidade é 1/3.
4. *a*) 31/125

   b) A longo prazo, a probabilidade de termos dias satisfatórios é 1/4 e de termos dias insatisfatórios é 3/4.

Leituras Sugeridas e Referências

[1] Herstein, I. N.; *Tópicos de Álgebra*; Editora Polígono, São Paulo, 1970.
[2] Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*; McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971.
[3] SMSG; *Matemática: Curso Colegial*, vol. 3; Yale University Press, New Haven, 1965.
[4] Campbell, H. G.; *Linear Algebra with Applications*; Meredith Corporation, New York, 1971.

2

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.1 INTRODUÇÃO

Na natureza, as coisas estão sempre mudando, se transformando, e o ser humano, para garantir sua sobrevivência e melhorar sua existência, precisa conhecer e dominar estes processos de mudança. Um dos métodos encontrados para se descrever estas transformações foi o de procurar nestas o que permanece constante durante a mudança. Por exemplo, sabemos que o hidrogênio (H_2) reage com o oxigênio (O_2) para produzir água (H_2O). Mas, quanto de hidrogênio e de oxigênio precisamos? Esta é uma mudança que podemos descrever do seguinte modo: x moléculas de H_2 reagem com y moléculas de O_2 produzindo z moléculas de H_2O, ou esquematicamente:

$$xH_2 + yO_2 \longrightarrow zH_2O.$$

O que permanece constante nessa mudança? Como os átomos não são modificados, o número de átomos de cada elemento no início da reação deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento, no fim da reação. Assim, para o hidrogênio devemos ter $2x = 2z$, e para o oxigênio, $2y = z$. Portanto, as nossas incógnitas x, y e z devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se conseguirmos descobrir quais são os números x, y, z que satisfazem simultaneamente estas relações, teremos aprendido um pouco mais sobre como se comporta a natureza.

Este procedimento que consiste em identificarmos o que permanece constante na mudança, leva a um sistema de equações que precisa ser resolvido e, em muitos casos, as equações envolvidas são lineares (como no exemplo anterior da reação de H_2 com O_2). Evidentemente, você já sabe um pouco como resolver este tipo de sistema, mas quando o número de equações se torna muito grande, ou temos menos equações do que incógnitas (como no caso anterior), podem surgir muitas dúvidas, até mesmo sobre a existência ou não de solução para o sistema.

Por outro lado, em sistemas que apresentam mais do que uma solução é necessário ter-se uma forma clara de se expressar todas elas. Por exemplo, no sistema anterior você pode encontrar duas soluções distintas para (x, y, z) (faça isto!), mas só o terá resolvido se conseguir expressar o conjunto de todas as soluções. Por isso, nosso objetivo neste capítulo é estudar um método para a resolução de sistemas lineares em geral. A técnica que será utilizada pode não ser a melhor no caso de sistemas muito simples, mas tem a vantagem de poder ser aplicada sempre e ser facilmente mecanizada. É particularmente útil em sistemas com grande número de incógnitas onde o uso de calculadoras é inevitável. Em síntese, este método consiste em substituir o sistema inicial por sistemas cada vez mais simples, sempre "equivalentes" ao original.

Comecemos com o seguinte exemplo. (Para efeito de visualização, colocaremos ao lado de cada sistema uma matriz a ele associada.)

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1)\\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2)\\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3)\end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 4 & 4\\ 1 & -3 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

1º Passo: Eliminamos x_1 das equações (2) e (3). Para isto, multiplicamos a equação (1) por -2 e somamos a equação obtida com a equação (2), obtendo uma nova equação (2'). Da mesma maneira produziremos a equação (3'), obtida ao multiplicarmos a equação (1) por -1, somando esta nova equação à equação (3). Isto resulta no seguinte sistema:

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1')\\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 & (2')\\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3')\end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -3 & -2 & 2\\ 0 & -7 & -5 & 4\end{bmatrix}$$

2º Passo: Tornamos o coeficiente de x_2 da equação (2') igual a 1. Para isto, multiplicamos a equação (2') por -1/3. O sistema resultante é:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1'')\\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2'')\\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3'')\end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -7 & -5 & 4\end{bmatrix}$$

3º Passo: Eliminamos x_2 das equações (1'') e (3''). Para isto, multiplicamos a equação (2'') por -4 e somamos a esta a equação (1''), obtendo (1'''). De maneira análoga obtemos (3'''), multiplicando a equação (2'') por 7 e somando a esta nova equação a equação (3'').

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1''')\\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2''')\\ 0x_1 + 0x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (3''')\end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

4º Passo: Tornamos o coeficiente de x_3 na equação (3''') igual a 1. Para isto, multiplicamos a equação (3''') por -3. Isto resulta no seguinte sistema:

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1^{iv})\\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2^{iv})\\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 & (3^{iv})\end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

5º Passo: Eliminamos x_3 das duas primeiras equações do sistema V. Multiplicamos a equação (3^{iv}) por -1/3 e somamos a esta nova equação a equação (1^{iv}). De modo análogo, multiplicamos a equação (3^{iv}) por -2/3 e a esta nova equação somamos a equação (2^{iv}). Sistema resultante:

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3\\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -2\\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2\end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} x_1 = 3\\ x_2 = -2\\ x_3 = 2\end{cases}$$

Assim, cada sistema foi obtido a partir do sistema anterior, por "operações" que preservaram as igualdades. Por isto, cada terna (x_1, x_2, x_3) que é solução do sistema I, também será solução dos sistemas seguintes. Deste modo, uma vez encontradas as soluções do sistema VI, as soluções do sistema I, se existirem devem estar entre estas, isto é, *toda solução do sistema I também é solução do sistema VI*.

O ponto fundamental deste procedimento é que as etapas são todas reversíveis. Por exemplo, partindo do sistema II podemos obter o sistema I, da seguinte maneira:

$$(1) = (1')$$
$$(2) = 2 \cdot (1') + (2')$$
$$(3) = (1') + (3')$$

(Com esta notação estamos querendo indicar que, por exemplo, a segunda linha (2) do sistema I é obtida multiplicando-se por dois a primeira linha (1') do sistema II e somando-se a segunda linha (2') do sistema II, isto é, $(2) = 2 \cdot (1') + (2')$.)

De modo análogo, você pode obter o sistema V a partir de VI, IV a partir de V, III a partir de IV e II a partir de III. Usando o mesmo argumento anterior, podemos dizer que *toda solução de VI também é solução de I.* A partir das duas afirmações destacadas acima concluímos que os sistemas I, II, III, IV, V e VI têm as mesmas soluções e, portanto, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$, que é a solução de VI, é a única solução do sistema inicial I. (Você pode verificar por substituição direta, que esta é uma solução, mas apenas como garantia de que não erramos nos cálculos.)

Podemos afirmar que no exemplo anterior os sistemas I, II, III, IV, V e VI são *equivalentes* segundo a definição dada a seguir.

Observe que, no exemplo anterior, as únicas operações que efetuamos são dos seguintes tipos:

i) Multiplicar uma equação por um número diferente de zero.
ii) Adicionar a equação a outra.

Existe ainda uma outra operação que às vezes precisaremos efetuar neste procedimento, e ela também é reversível.

iii) Permutar duas equações.

Por exemplo, no sistema:

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 = 5 & (1) \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

nosso primeiro passo seria permutar as equações (1) e (2), de modo a obter o coeficiente de x_1 diferente de zero na primeira equação.

Estas operações num sistema produzem sempre sistemas com mesmo conjunto-solução, como vimos no exemplo anterior. Uma demonstração formal deste fato, usando matrizes elementares, será vista em 3.8.5. Agora iremos usar matrizes para apresentar uma maneira organizada de resolver sistemas de equações, seguindo a idéia do exemplo anterior. Antes, porém, vamos formalizar alguns conceitos.

2.2 SISTEMAS E MATRIZES

2.2.1 Conceitos

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, números reais (ou complexos).

Uma *solução* do sistema $(*)$ é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Dois sistemas de equações lineares são *equivalentes* se, e somente se toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

2.2.2 Sistemas e Matrizes

Podemos escrever o sistema $(*)$ numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

a matriz das incógnitas e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

a matriz dos termos independentes.

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamamos *matriz ampliada do sistema.* Cada linha desta matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema. Observe que no exemplo dado em 2.1, ao lado de cada sistema, escrevemos sua matriz ampliada. Assim, no sistema dado:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

temos a forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Em termos de matrizes ampliadas, na resolução do sistema, partimos de

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

e chegamos a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

que é a matriz ampliada do sistema VI

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

através de operações equivalentes às efetuadas nas equações dos sistemas. Estas que serão definidas a seguir são as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

2.3 OPERAÇÕES ELEMENTARES

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

i) Permuta das *i*-ésima e *j*-ésima linhas. ($L_i \longleftrightarrow L_j$)

Exemplo: $L_2 \longrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ii) Multiplicação da *i*-ésima linha por um escalar não nulo k. ($L_i \longrightarrow kL_i$)

Exemplo: $L_2 \longrightarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

iii) Substituição da *i*-ésima linha pela *i*-ésima linha mais k vezes a *j*-ésima linha. ($L_i \longrightarrow L_i + kL_j$)

Exemplo: $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B *é linha equivalente* a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Notações: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ou $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ pois}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to -1L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Já comentamos em 2.1 que as operações com linhas de um sistema produzem outro sistema equivalente ao inicial. Em termos de matrizes, podemos enunciar este resultado como:

2.3.1 Teorema: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

(A demonstração deste teorema, usando-se matrizes elementares, está em 3.8.5.)

Como vimos, o processo utilizado para se resolver sistemas por "eliminação de incógnitas" corresponde a passar a matriz ampliada do sistema inicial para matrizes-linha equivalentes a esta, até que cheguemos a uma matriz conveniente que indique a solução do sistema original. Você pode observar em 2.2. que a matriz final (associada ao sistema VI) tem uma forma especial. Ela é um exemplo do que chamaremos *matriz-linha reduzida à forma escada*. O método que apresentamos aqui consiste em obter por linha-redução estas matrizes, por meio das quais chegamos à solução do sistema de uma forma explícita.

Um outro método, conhecido como o Método de Gauss, reduz por linha-equivalência a matriz ampliada do sistema a uma matriz "triangular". (Você terá a oportunidade de resolver sistemas por este método, que é muito usado por suas vantagens computacionais, no Exercício 17 de 2.6. Não perca!)

2.4 FORMA ESCADA

2.4.1 Definição: Uma matriz $m \times n$ é *linha reduzida à forma escada* se

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).

d) Se as linhas 1, ..., r são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Esta última condição impõe a forma escada à matriz:

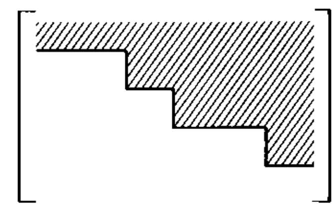


Figura 2.4.1

Isto é, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

2.4.2 Exemplos

Exemplo 1: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Não é a forma escada pois a segunda condição não é satisfeita.

Exemplo 2: $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Não é a forma escada pois não satisfaz a primeira e a quarta condições.

Exemplo 3: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Não satisfaz a primeira nem a terceira condição.

Exemplo 4: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ É a forma escada pois todas as condições são satisfeitas.

2.4.3 Teorema: Toda matriz $A_{m \times n}$ é linha-equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Para a demonstração, veja a secção 2.7. Este teorema permite-nos definir os conceitos abaixo que serão relacionados a seguir com o número real de equações e o número de soluções de um sistema.

2.4.4 Definição: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha-equivalente a **A**. O *posto* de **A**, denotado por p, é o número de linhas não nulas de **B**. A *nulidade* de **A** é o número $n - p$.

Observamos que dada uma matriz **A** qualquer, para achar seu posto necessitamos encontrar primeiro sua matriz-linha reduzida à forma escada, e depois contar suas linhas não nulas. Este número é o posto de **A**. A nulidade é a diferença entre colunas de **A** e o posto.

2.4.5 Exemplos

Exemplo 1: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de **A**, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações com matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

O posto de **A** é 3 e a nulidade de **A** é $4 - 3 = 1$.
Observação: Se interpretarmos a matriz **A** dada acima como sendo a matriz ampliada de um sistema linear, teremos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

A matriz-linha reduzida à forma escada é linha-equivalente à matriz **A**. Assim, o sistema que ela representa:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{11}{8} \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial, possuindo a mesma solução que este.

Exemplo 2: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de **B**, onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações matriciais:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O posto de **B** é 2, e a nulidade é 1. Repare que a matriz

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

tem o mesmo posto e nulidade que **B**.

Reinterpretando as matrizes acima como sistemas de equações, diremos que o sistema de quatro equações associado à matriz inicial:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema de duas equações:

$$\begin{cases} x + 0y = \dfrac{14}{9} \\ 0x + y = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

associado à matriz-linha reduzida à forma escada. Este é um caso de sistema com equações redundantes. A terceira e a quarta equações (que se tornam nulas no final do processo) podem ser desprezadas. Isto significa que o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

associado à matriz $\mathbf{B}_1$.

Usamos dizer também que, neste caso, as duas primeiras equações são "independentes" e que as demais são "dependentes" destas. Você vai se familiarizar com estas denominações no Capítulo 4. Ainda segundo esta terminologia, denominamos posto de uma matriz ao número de *linhas "independentes"* desta. Você pode observar que uma linha será "dependente" de outras (isto é, será igual a zero no final do processo de redução) se ela puder ser escrita como soma de produtos destas outras linhas por constantes. Costumamos dizer também que esta linha é uma *combinação linear* das outras. Por exemplo, na matriz **B** podemos dizer que a primeira e a segunda linhas são independentes, enquanto que a terceira e a quarta são combinações lineares das duas primeiras linhas.

Você viu assim que um posto da matriz ampliada de um sistema nos dá o número de equações independentes deste. Na próxima secção veremos que o posto também está relacionado com o número de soluções de um sistema.

2.5 SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

O objetivo desta secção é estudar detalhadamente todas as situações que podem ocorrer na resolução de um sistema linear.

2.5.1 Se tivermos um sistema de uma equação e uma incógnita

$$ax = b$$

existirão três possibilidades:

i) $a \neq 0$. Neste caso a equação tem uma única solução

$$x = \frac{b}{a}$$

ii) $a = 0$ e $b = 0$. Então temos $0x = 0$ e qualquer número real será solução da equação.

iii) $a = 0$ e $b \neq 0$. Temos $0x = b$. Não existe solução para esta equação.

Para analisar sistemas de duas equações e duas incógnitas, vejamos alguns exemplos.

2.5.2 Exemplos

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Lembramos que o conjunto de pontos $(x_1, x_2) \in R \times R$, que satisfaz cada equação deste sistema, representa uma reta no plano. Para resolver este sistema devemos então encontrar os pontos comuns a estas duas retas.

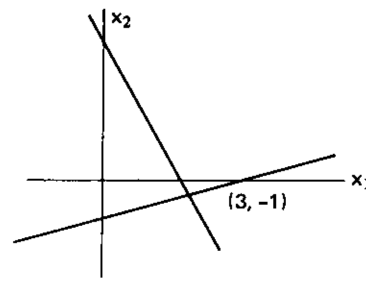


Figura 2.5.1

Deste modo, (3, -1) é a única solução. A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$. Transformando-a em matriz-linha reduzida à forma escada, obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, que é a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x_1 \quad = 3 \\ \quad x_2 = -1 \end{cases}$$

equivalente ao sistema inicial. O sistema tem uma única solução $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$, como foi analisado graficamente. Observamos que o posto da matriz dos coeficientes do sistema reduzido $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e o da matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é 2.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$$

As duas retas que formam este sistema são coincidentes.

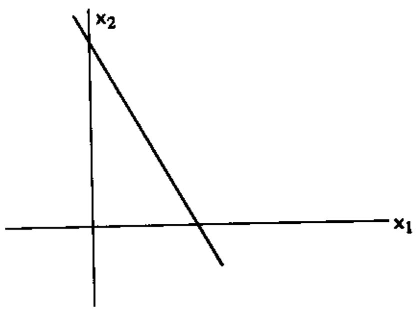


Figura 2.5.2

Neste caso, vemos geometricamente que qualquer ponto de uma das retas é solução deste sistema. A matriz ampliada do sistema e a matriz reduzida por linhas à forma escada são:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o sistema acima é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2} \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

onde a segunda equação pode ser simplesmente "ignorada", pois não estabelece nenhuma condição sobre x_1 ou x_2. Ela é verdadeira para quaisquer números x_1 e x_2. O conjunto de soluções deste sistema será dado, atribuindo-se valores arbitrários para a incógnita x_2 e tomando $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2$. Assim, para $x_2 = \lambda$ temos:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\lambda$$
$$x_2 = \lambda$$

Atribuindo diversos valores para λ, obtemos várias soluções para o sistema. Por exemplo, para $\lambda = 0$, temos $x_1 = \frac{5}{2}$ e $x_2 = 0$. Para $\lambda = 1$, temos $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ etc. Este sistema admite infinitas soluções.

Observe que a matriz ampliada e também a matriz dos coeficientes do sistema têm posto 1, pois, uma vez transformadas em matrizes-linha reduzidas na forma escada, elas possuem uma linha não nula. A nulidade da matriz dos coeficientes é $2 - 1 = 1$ que é também chamada o grau de liberdade do sistema. Isto quer dizer que o nosso sistema apresenta uma variável livre.

Exemplo 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$

Geometricamente, temos duas retas no plano que não possuem nenhum ponto em comum, pois são paralelas, e portanto este sistema não tem solução. Isto é mostrado na Figura 2.5.3.

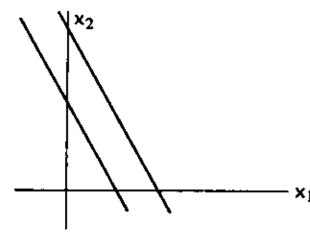


Figura 2.5.3

A matriz ampliada deste sistema $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ é equivalente à matriz-linha reduzida à forma escada

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o sistema inicial é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ 0x_1 + \quad 0x_2 = 1 \end{cases}$$

Não existe nenhum valor de x_1 ou x_2 capaz de satisfazer a segunda equação. Assim, o sistema inicial não tem solução. Dizemos que ele é incompatível (impossível). Vamos comparar a matriz de coeficientes e a ampliada, reduzidas à forma escada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que o posto da matriz dos coeficientes do sistema inicial é 1 e o posto de sua matriz ampliada é 2.

2.5.3 Caso Geral: Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais (ou complexos). Este sistema poderá ter

i) uma única solução: $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$

ii) infinitas soluções

iii) nenhuma solução.

No primeiro caso, dizemos que o sistema é *possível* (compatível) e *determinado*. No segundo caso, dizemos que o sistema é *possível* e *indeterminado*. E no terceiro caso, dizemos que o sistema é *impossível* (incompatível).

Consideremos a matriz ampliada do sistema anterior e tomemos sua matriz-linha reduzida à forma escada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)} \quad \begin{bmatrix} & & & & c_1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & c_k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

Procure entender e demonstrar (veja a secção 2.7) cada uma das afirmações do teorema abaixo. Leia com atenção e volte aos exemplos dados em 2.5.2, se achar conveniente.

2.5.4 Teorema

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Para finalizarmos este assunto, convém ilustrá-lo. Dizemos no caso *iii* que o *grau de liberdade* do sistema é $n - p$.

Em cada exemplo, é dada a matriz-linha reduzida à forma escada da matriz ampliada. Usamos a notação

p_c = posto da matriz dos coeficientes e

p_a = posto da matriz ampliada. Se $p_c = p_a$ denotamos simplesmente por p.

2.5.5 Exemplos

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad p_c = p_a = 3$$

$m = 3$, $n = 3$ e $p = 3$. Então, a solução é única e $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$.

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad p_c = p_a = 2$$

$m = 2$, $n = 3$ e $p = 2$. Temos um grau de liberdade: $x_1 = -10 - 7x_3$ e $x_2 = -6 - 5x_3$.

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$m = 3$, $n = 3$, $p_c = 2$ e $p_a = 3$. O sistema é impossível e, portanto, não existe solução.

Exemplo 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_c = p_a = 2$$

$m = 3$, $n = 4$ e $p = 2$. Temos dois graus de liberdade: $x_1 = -10 + 10x_3 + 2x_4$ e $x_2 = 4 - 7x_3 - x_4$.

2.5.6 Agora, depois de termos mostrado como é possível resolver sistemas de equações lineares através de matrizes, podemos voltar ao problema que havíamos proposto no início do capítulo, relativo à quantidade de hidrogênio e oxigênio necessária para se formar a água.

Sabemos que

$$xH_2 + yO_2 \longrightarrow zH_2O$$

onde x, y, z devem satisfazer

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada, associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que, reduzida à forma escada, dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, z é uma variável livre e, assim, se tornarmos $z = \lambda$, teremos

$$\begin{cases} x - \lambda = 0 \\ y - \frac{1}{2}\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note o significado de termos um grau de liberdade na solução deste sistema. Temos apenas estabelecida a proporção com que os elementos devem entrar na reação, e, para diferentes valores de λ, teremos quantidades diferentes de reagentes produzindo quantidades diferentes de água. Por exemplo,
se $\lambda = 2$, teremos $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$
se $\lambda = 4$, teremos $4H_2 + 2O_2 \rightarrow 4H_2O$

2.5.7 Exemplos

Exemplo 1: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

A matriz associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

que reduzida à forma escada fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Reinterpretando o sistema, vemos que z e t são variáveis livres (grau de liberdade 2). Chamando $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$ obtemos:

$$\begin{aligned} x &= -5\lambda_1 + \lambda_2 \\ y &= 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ z &= \lambda_1 \\ t &= \lambda_2 \end{aligned}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $[-5\ 2\ 1\ 0]'$ e $[1\ -1\ 0\ 1]'$ são soluções do sistema obtidas da seguinte forma: a primeira, fazendo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, e a segunda, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Elas são chamadas *soluções básicas* do sistema porque geram todas as outras. Todo sistema homogêneo tem solução que pode ser escrita desta forma. Basta reduzir o sistema, observar as variáveis livres e atribuir valores 1 para uma delas e zero para as outras, obtendo as soluções básicas (tantas quanto o grau de liberdade). A solução será uma soma destas soluções multiplicadas por constantes.

Exemplo 2: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

que reduzida torna-se $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Reinterpretando, vemos que y e z são variáveis livres.

Fazendo $y = \lambda_1$ e $z = \lambda_2$, temos

$$\begin{aligned} x &= -3\lambda_1 - \lambda_2 \\ y &= \lambda_1 \\ z &= \lambda_2 \end{aligned}$$

As soluções básicas são então: $x = -3$, $y = 1$, $z = 0$ e $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$. Assim

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases}$$

A matriz associada é

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ que reduzida à forma escada torna-se

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Reinterpretando, vemos que z e t são livres.

Fazendo $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= -5\lambda_1 + \lambda_2 + 3 \\ y &= 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2 \\ z &= \lambda_1 \\ t &= \lambda_2 \end{aligned}$$

ou $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Compare com o exemplo 1. O que você nota?

2.6 EXERCÍCIOS

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

2. Descreva todas as possíveis matrizes 2×2, que estão na forma escada reduzida por linhas.

3. Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão 3.

5. Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$

escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza-a à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

6. Determine k, para que o sistema admita solução.

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

7. Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

8. Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

9. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) determinou-se que:
   i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.
   ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.
   iii) O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,
   a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.
   b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente Cr\$ 1,00?

Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

10. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

11. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

17. O método de Gauss para resolução de sistemas é um dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações que envolve. Ele consiste em se reduzir a matriz ampliada do sistema por linha-equivalência a uma matriz que só é diferente da linha reduzida à forma escada na condição *b*) de 2.4.1, que passa a ser: *b'*) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os elementos *abaixo* desta linha iguais a zero. As outras condições *a*, *c* e *d* são idênticas. Uma vez reduzida a matriz ampliada a esta forma, a solução final do sistema é obtida por substituição.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a última matriz corresponde ao sistema:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{2}$$
$$x_2 = -1.$$

Por substituição, $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ou seja, $x_1 = 2$.

Resolva pelo método de Gauss os Exercícios 14, 15 e 16 e compare as respostas.

18. *a*) Mostre a proposição 2.4.3 para matrizes 2×2 quaisquer.
 b) Sinta a dificuldade que você terá para formalizar o resultado para matrizes $n \times m$, mas convença-se de que é só uma questão de considerar todos os casos possíveis, e escreva a demonstração. Consulte 2.7.

19. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, b_i, são todos nulos.
 a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?
 b) Encontre os valores de $k \in R$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \qquad + kz = 0 \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).

20. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$$

Note que podemos escrevê-lo na forma matricial

$$(*) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que a matriz $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ é uma solução para o sistema.

b) Resolva o sistema e verifique que toda "matriz-solução" é da forma

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $\lambda \in R$.

c) Verifique

$$\lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

é a solução do sistema homogêneo, associado ao sistema (*),

$$(**) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Conclua, dos itens *a*), *b*) e *c*), que o conjunto-solução do sistema * é o conjunto-solução do sistema **, somado a uma solução particular do sistema *.

21. Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Encontre uma solução dele sem resolvê-lo. (Atribua valores para x, y, z e w.)
b) Agora, resolva efetivamente o sistema, isto é, encontre sua matriz-solução.
c) Resolva também o sistema homogêneo associado.
d) Verifique que toda matriz-solução obtida em *b*) é a soma de uma matriz-solução encontrada em *c*) com a solução particular que você encontrou em *a*).

22. Altamente motivado pelos Exercícios 20 e 21, mostre que toda matriz-solução de um sistema linear $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é a soma de uma solução do sistema homogêneo associado $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ com uma solução particular de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Sugestão: siga as etapas seguintes, usando somente propriedades de matrizes.

i) Mostre que se $\mathbf{X}_0$ é uma solução do sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{X}_1$ é uma solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1$ é solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

ii) Se $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ são soluções de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ é solução de $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

iii) Use *i*) e *ii*) para chegar à conclusão desejada.

23. Faça o balanceamento das reações:

a) $N_2O_5 \rightarrow NO_2 + O_2$ (decomposição térmica do N_2O_5)

b) $HF + SiO_2 \rightarrow SiF_4 + H_2O$ (dissolução do vidro em HF)

c) $(NH_4)_2CO_3 \rightarrow NH_3 + H_2O + CO_2$

24. Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

a) Discuta a solução do sistema.

b) Acrescente a equação $2z + kw = 9$ a este sistema, encontre um valor de k que torne o sistema incompatível.

25. Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.

Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) de cada alimento, determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

ii) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

iii) O alimento III tem 2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.

iv) O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.

v) O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

26. Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada 10 m² 140 g de nitrato, 190 g de fosfato e 205 g de potássio.

Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

i) Cada quilograma do adubo I custa 5 u.c.p. e contém 10 g de nitrato, 10 g de fosfato e 100 g de potássio.

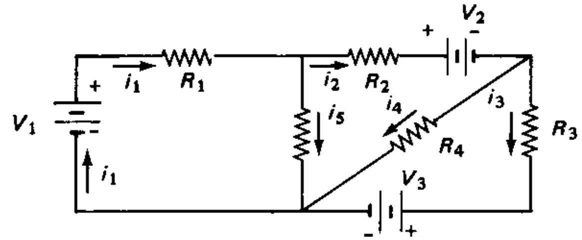
ii) Cada quilograma do adubo II custa 6 u.c.p. e contém 10 g de nitrato, 100 g de fosfato e 30 g de potássio.

iii) Cada quilograma do adubo III custa 5 u.c.p. e contém 50 g de nitrato, 20 g de fosfato e 20 g de potássio.

iv) Cada quilograma do adubo IV custa 15 u.c.p. e contém 20 g de nitrato, 40 g de fosfato e 35 g de potássio.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar 54 u.c.p. a cada 10 m² com a adubação?

27. Deseja-se construir um circuito como o mostrado na figura,



onde $V_1 = 280$ V, $V_2 = 100$ V, $V_3 = 50$ V, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 100\Omega$.

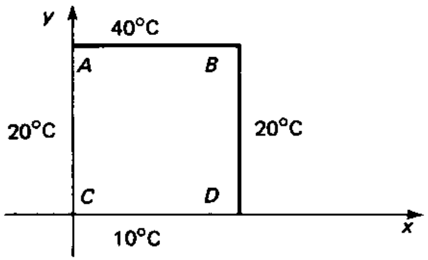
Dispõe-se de uma tabela de preços de vários tipos de resistências; assim como as correntes máximas que elas suportam sem queimar.

← resistências →

		20Ω	30Ω	40Ω	50Ω	100Ω
c m	0,5 A	10,00	10,00	15,00	15,00	20,00
o á r x	1,0 A	15,00	20,00	15,00	15,00	25,00
r i . m	3,0 A	20,00	22,00	20,00	20,00	28,00
a	5,0 A	30,00	30,00	34,00	34,00	37,00

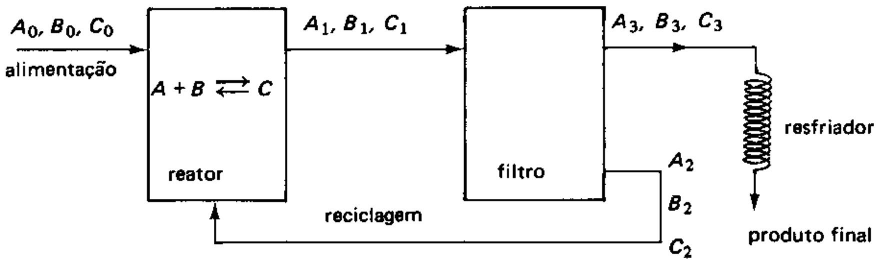
De que tipo devemos escolher cada resistência para que o circuito funcione com segurança e a sua fabricação seja a de menor custo possível?

28. Uma placa quadrada de material homogêneo é mantida com os bordos AC e BD à temperatura de 20°C, o bordo AB a 40°C e CD a 10°C, com o uso de isolantes térmicos em A, B, C e D (vide figura).



Após ser atingido o equilíbrio térmico, qual é a temperatura aproximada em cada ponto da placa?

29. Consideremos uma unidade de produção (muito simplificada) de um processo de produção industrial de um determinado composto C a partir de certos compostos A e B (segundo a reação química $A + B \rightleftarrows C$):



$A_0 = 100$ kg/h, $B_0 = 100$ kg/h, $C_0 = 10$ kg/h são os fluxos de alimentação, isto é, a quantidade de material jogada dentro da unidade de produção por hora, enquanto que A_i, B_i e C_i são os fluxos em cada estágio da produção. Sabe-se, ainda que:

i) No reator a reação processa-se em condições tais que a quantidade de A após a reação é 0,487 da sua quantidade antes da reação, enquanto a de B é 0,266 e a de C é 4,675 de suas respectivas quantidades antes da reação.

ii) Baseado no fato do ponto de ebulição de C ser inferior ao de A e B, o filtro constitui-se de um destilador. Dessa forma o vapor dentro do filtro tem maior concentração de C do que A e B, e é continuamente retirado do filtro, sendo levado para um resfriador do qual obtemos o produto final. Enquanto isso a parte não vaporizada no destilador é levada de volta ao reator para ser reciclada. Tem-se a informação de que a quantidade de A em forma de vapor dentro do filtro é, em um determinado instante, 0,5854 da quantidade de A presente naquele instante na parte não vaporizada, enquanto que para B e C estas relações são 1,50 e 1,07 respectivamente.

Deseja-se saber qual é o grau de concentração de C no produto final se a unidade opera em condição estacionária (isto é, os fluxos de A, B e C não mudam com o tempo em cada estágio), sabendo que a concentração de C_1 na mistura que passa do reator para o filtro é de 68%.

2.6.1 Respostas

1. $x = -1, \quad y = 2, \quad z = 5$

3. *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $x = \frac{7}{16}, \quad y = -\frac{1}{16}, \quad z = \frac{17}{8}$

7. $x_1 = 1 - 3x_2 - x_5$
$x_3 = 2 + x_5$
$x_4 = 3 + 2x_5$

9. *a*) Sejam x, y e z as quantidades de alimentos I, II e III respectivamente. Então

$$x = -5 + 3z, \quad y = 8 - 3z \quad \text{onde} \quad \frac{5}{3} \leqslant z \leqslant \frac{8}{3}$$

b) Sim. $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 2$

11. $x = \frac{17}{3} - \frac{7}{3}z, \quad y = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}z$
$p_a = 2 = p_c, \quad g.l. = 1$

13. $p_a = 2 = p_c, \quad g.l. = 1, x = 3z, y = 0$

15. $p_a = 3 = p_c, \quad g.l. = 0, x = y = z = 0$

19. *a*) $x_i = 0$ *b*) $k = 2$

21. *a*) $x = 0, \quad y = z = 1, \quad w = 0$

b) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$ *c*) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

23. *a*) $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4\,NO_2 + O_2$

b) $4\,HF + SiO_2 \longrightarrow SiF_4 + 2\,H_2O$

c) $(NH_4)_2CO_3 \longrightarrow 2\,NH_3 + H_2O + CO_2$

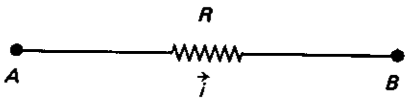
27. *Sugestão*: Calcule as várias correntes que circulam no circuito para depois fazer a escolha dos tipos de resistência. Para isto use as *Leis de Kirchoff*:

i) A soma das correntes que entram em um nó de um circuito é igual à soma das correntes que saem deste nó.

ii) A partir de um ponto qualquer de uma malha, se a percorrermos em um sentido qualquer, ao voltarmos ao mesmo ponto, a soma algébrica das quedas de potencial é nula.

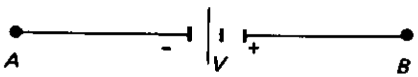
Leve em conta as observações:

i)



Neste caso, ao irmos do ponto A ao ponto B há uma queda de potencial dada por Ri. Se fôssemos do ponto B ao ponto A haveria uma queda de potencial de $-Ri$, ou seja, um aumento de potencial de Ri.

ii)



Neste caso, ao irmos do ponto A ao ponto B há um aumento de potencial de V, ou seja, uma queda de potencial de $-V$. Se fôssemos de B até A teríamos uma queda de potencial de V.

Aplique, então, as leis de Kirchoff ao circuito, obtendo um sistema linear. Generalizações do problema podem ser obtidas nas situações:

i) Circuitos de Corrente Alternada (obtemos sistemas com coeficientes complexos).

ii) Projetos de Circuito (cálculo das características dos componentes para que o circuito tenha certas especificações).

28. *Sugestão*: Sabe-se que a equação que rege o fluxo de calor é dada por:

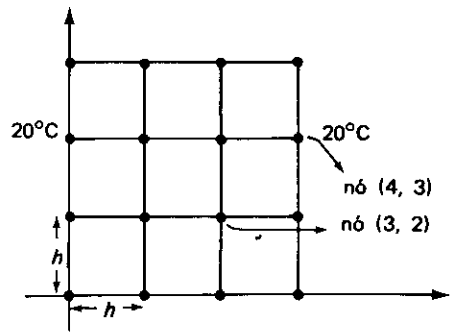
$$\text{(I)} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = c\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)}$$

onde T é a temperatura num ponto (x, y) e no instante de tempo t e $c > 0$ é uma constante característica do material de que é feita a placa. No equilíbrio térmico T não varia mais com o tempo e, portanto, $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$; a equação se torna

$$\text{(II)} \quad \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0}$$

e o problema se converte em achar $T(x, y)$ satisfazendo (II) e tal que T tem um valor pré-fixado no bordo da placa.

Modelo Aproximado: Substituímos a placa por uma "aproximação discreta" que consiste em uma malha (espera-se que quanto mais fina a malha melhor seja a aproximação — veja a figura abaixo)



e procuramos as temperaturas T_{ij} nos (i, j) da malha que devem satisfazer a condição dada nos bordos e uma equação que é uma aproximação de (II). Para obter a aproximação de (II) temos, num ponto (i, j) do interior da malha:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{(i,j)} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2\,T_{ij} + T_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{(i,j)} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2\,T_{ij} + T_{i,j-1}}{h^2}$$

substituindo em (II) e simplificando obtemos então:

$$\text{(III)}\quad T_{ij} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4}$$

(Observe que a temperatura num ponto do interior da malha deve ser a média aritmética das temperaturas dos seus vizinhos mais próximos.) Impondo a condição (III) nos pontos do interior da malha na figura acima, obtemos um sistema linear. Resolva-o!

O que seria modificado se a "abertura" da malha na vertical fosse diferente da "abertura" na horizontal? Seriam necessárias mais informações sobre a placa? E se o formato da placa fosse diferente?

Sugestão: O modelo teórico é construído baseado no seguinte fato: a massa que entra em um determinado estágio deve ser igual à massa que sai.

Usando este fato em cada estágio, assim como as informações dadas no problema, obtemos um sistema linear. Resolva-o e interprete os resultados. Você acredita neles? Os dados são reais?

2.7 DEMONSTRAÇÕES

Nesta seção, faremos com detalhes as provas dos teoremas 2.4.3 e 2.5.4, que omitimos anteriormente, para não prejudicar a seqüência de exposição do assunto. Estas demonstrações são apresentadas como matéria adicional, podendo ser estudadas ou não, dependendo de seu interesse.

2.7.1 Demonstração do Teorema 2.4.3: Toda matriz é linha equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.

Demonstração

1ª Parte: Seja **A** uma matriz $m \times n$ qualquer. Se todo elemento da primeira linha de **A** é zero então a condição (*a*) está satisfeita, no que diz respeito a esta linha. Se a primeira linha tem algum elemento não nulo, seja k o menor inteiro j tal que $a_{ij} \neq 0$. Multiplicamos a primeira linha por $1/a_{ij}$ e a condição (*a*) ficará satisfeita. Agora, para cada $i \geq 2$ somemos $(-a_{ik})$ vezes a primeira linha à i-ésima linha. Como resultado, teremos uma matriz cujo primeiro elemento da primeira linha é 1 e ocorre na coluna k. Além disto, todos os outros elementos da coluna k são nulos.

Consideremos agora a matriz **B** obtida acima. Se a segunda linha desta matriz for nula nada fazemos. Se houver elementos não nulos nesta linha, seja a coluna k' a primeira a conter um destes. Multiplicamos a segunda linha por $1/b_{2k'}$ e a seguir, somando múltiplos adequados desta nova segunda linha às demais linhas, obtemos uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1 e todos os outros elementos da coluna em que este elemento (1) se encontra são nulos. O importante é que neste processo não foram alterados os elementos b_{11}, b_{1k}, e nem a k-ésima coluna da matriz **B**. (Por quê).

Repetindo o procedimento acima em relação às demais linhas (3ª, 4ª, ..., m-ésima) obteremos no final uma matriz **M** que é linha equivalente à inicial **A**, e que satisfaz as condições (*a*) e (*b*) da definição 2.4.1.

As condições (*c*) e (*d*) serão satisfeitas através de um número finito de permutações de linhas da matriz **M**.

2ª Parte: Assim, mostramos nesta primeira parte que toda matriz **A** é linha equivalente a *uma* matriz-linha reduzida à forma escada. Para mostrarmos que só existe uma *única* matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a **A**, observamos primeiramente que *duas matrizes-linha reduzidas à forma escada que são linhas equivalentes só podem ser iguais.*

De fato, você pode observar que nenhuma das três operações com linhas (exceto a multiplicação de uma linha pela constante 1) pode ser efetuada numa matriz-linha reduzida à forma escada, sem que ela perca esta condição. (Pense nisto!)

Agora, suponhamos que por operações com linhas, partimos de uma matriz **M** e podemos chegar a duas matrizes-linha reduzidas à forma escada, **N** e **P**. Teremos então **M** $\sim$ **N** e **M** $\sim$ **P**. Como as operações com linhas são reversíveis, isto significará que **N** será linha-equivalente a **P**, e, portanto, da afirmação destacada acima, **N** = **P**.

2.7.2 Demonstração do Teorema 2.5.4

1ª Parte: Se o posto da matriz ampliada for maior que o da matriz dos coeficientes (menor não pode ser), então esta matriz reduzida à forma escada deve ter pelo menos uma linha do tipo $(0 0 \ldots 0 c_k)$, com $c_k \neq 0$. Isto significa que o sistema associado a esta matriz (que é equivalente ao inicial) tem uma equação do tipo:

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = c_k \neq 0$$

e portanto não admite solução.

2ª Parte: Por outro lado, se o posto da matriz ampliada, **P**, for igual ao da matriz dos coeficientes, temos dois casos a considerar:

a) se $p = n$, teremos a matriz-linha reduzida à forma escada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n \\ \hline 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A solução do sistema será $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, portanto o sistema admite uma única solução.

b) se $p \neq n$ então $p < n$ (pois p não pode ser maior que n, veja o Exercício 8 de 2.6)

Neste caso, devemos considerar as várias possibilidades para a matriz-linha reduzida à forma escada. Podemos analisar inicialmente quando esta matriz de posto $p < n$ tem a forma:

1.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & & \cdots & 0 & a_{1p+1} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{pp+1} & \cdots & a_{pn} & c_p \\ \hline 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Teremos, neste caso: $\begin{cases} x_1 = c_1 - a_{1p+1}x_{p+1} \quad \cdots \quad -a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_p = c_p - a_{pp+1}x_{p+1} \quad \cdots \quad -a_{pn}x_n \end{cases}$

e o sistema terá portanto infinitas soluções, sendo $x_{p+1}, \ldots, x_n$ variáveis livres.

Uma segunda forma a ser considerada para a matriz reduzida é

2.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \; \cdots & 0 & a_{1p+2} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{pp+2} & \cdots & a_{pn} & c_p \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

então
$$\begin{aligned} x_2 &= c_1 - a_{1p+2}\,x_{p+2} + \ldots + - a_{1n}x_n \\ x_3 &= c_2 - a_{2p+2}\,x_{p+2} + \ldots + - a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_{p+1} &= c_p - a_p\,x_{p+2} + \ldots + - a_{p,n}x_n \end{aligned}$$

sendo $x_1, x_{p+2}, \ldots, x_n$ variáveis livres.

E assim podemos prosseguir de uma maneira sistemática e ver que em todas as possibilidades para a matriz-linha reduzida à forma escada de posto $p < n$, teremos um sistema com infinitas soluções e $n - p$ variáveis livres.

Observe que na 1ª parte mostramos, usando contra-recíproca, que a igualdade de postos entre as matrizes ampliada e dos coeficientes é uma condição necessária para a existência de solução do sistema. Na 2ª parte mostramos que esta condição também é suficiente, considerando as possibilidades *a*) e *b*). Ficou assim demonstrada a afirmação (*i*) de 2.5.4. Note ainda que também as condições (*ii*) e (*iii*) foram demonstradas em *a*) e *b*) respectivamente.

Leituras Sugeridas e Referências

[1] Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*; McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971.

[2] SMSG; *Matemática: Curso Colegial*, vol. 3; Yale University Press, New Haven, 1965.

3

DETERMINANTE E MATRIZ INVERSA

3.1 INTRODUÇÃO

Já em 250 A.C. havia exemplos da resolução de sistemas de equações através de matrizes, no livro chinês *Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*, cujo autor é desconhecido. Também algumas noções ligadas a determinantes, o assunto que será objeto de estudo neste Capítulo, já eram conhecidas na China antiga.

Mas, se por um lado já se utilizava a noção de determinantes no mundo Oriental há tanto tempo, no Ocidente este assunto começou a ser tratado esporadicamente a partir do século XVII. Nesta época surgem trabalhos de G. W. Leibniz (1646-1716), de G. Cramer (1704-1752) que desenvolveu um método de resolução de sistemas através de determinantes, conhecido por "Regra de Cramer" e foi publicado em 1750 (provavelmente já conhecido por C. Maclaurin (1698-1746) em 1729, e alguns resultados simétricos de J. L. Lagrange (1736-1813).

Só no século XIX é que os determinantes passaram a ser estudados mais sistematicamente, a começar pelo longo tratado de A. L. Cauchy (1789-1857) em 1812, tendo sido realizados, em seguida, trabalhos de C. G. Jacobi (1804-1851).

A partir de então, o uso de determinantes difundiu-se muito e este conceito de um número associado a uma matriz quadrada mostrou-se extremamente útil para caracterizar muitas situações, como a de saber se uma matriz é inversível, se um sistema admite ou não solução, o que veremos nas próximas secções.

3.2 CONCEITOS PRELIMINARES

Consideremos o sistema $ax = b$ com $a \neq 0$. A solução deste sistema é $x = \frac{b}{a}$.

Observe que o denominador está associado à matriz dos coeficientes do sistema, ou seja, $[a]$.

Num sistema 2×2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

resolvendo (desde que sejam possíveis as operações), encontramos

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Observe que os denominadores são iguais e estão associados à matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Num sistema 3×3

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

(desde que sejam possíveis as operações), ao procurarmos os valores de x_1, x_2 e x_3, vemos que eles têm o mesmo denominador $a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$, que também está associado à matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vamos rever estes números que aparecem nos denominadores associados às matrizes (quadradas). Estes números são casos particulares do que é chamado determinante de uma matriz quadrada.

3.3 DETERMINANTE

Quando nos referirmos ao determinante, isto é, ao número associado a uma matriz quadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ como na secção anterior, escreveremos:

$$\det \mathbf{A} \quad \text{ou} \quad |\mathbf{A}| \quad \text{ou} \quad \det [a_{ij}]$$

Então

$\det [a] = a$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{31}$$

Talvez seja conveniente avisá-lo de que o conceito de determinante no caso geral envolve muitos símbolos, o que dificulta a leitura. Para tornar a discussão mais simples e organizada, vamos introduzir algumas definições necessárias. Comecemos lembrando o que significa uma *permutação*. Dados n objetos distintos $a_1, ..., a_n$, uma permutação destes objetos consiste em dispô-los em uma determinada ordem. Por exemplo, $(1 \ 2 \ 3)$ é uma permutação dos números 1, 2 e 3, $(2 \ 1 \ 3)$ é outra permutação etc. A quantidade de permutações de n objetos é dada por $n!$, que é lido n fatorial e $n! = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (se $n > 0$). Por exemplo $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Define-se ainda $0! = 1$.

3.3.1 Definição: Dada uma permutação dos inteiros 1, 2, ..., n, existe uma *inversão* quando um inteiro precede outro menor que ele.

Consideremos as permutações de 1, 2, 3 e vejamos em cada permutação o número de inversões.

Permutação	*Número de inversões*
(1 2 3)	0
(1 3 2)	1
(2 1 3)	1
(2 3 1)	2
(3 1 2)	2
(3 2 1)	3

Como um outro exemplo, podemos tomar duas das $4! = 24$ permutações de 1, 2, 3, 4. Assim, $(3 \ 2 \ 1 \ 4)$ tem 3 inversões e $(4 \ 3 \ 2 \ 1)$ possui 6 inversões.

Voltemos ao determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Observe que aparecem todos os produtos $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, onde $(j_1 \ j_2 \ j_3)$ são as permutações de 1, 2 e 3. Além disso, vemos que o sinal do termo é negativo, se a permutação tiver um número ímpar de inversões. (Veja a tabela acima para verificar os sinais.)

Como generalização, o determinante de uma matriz quadrada $[a_{ij}]_{n \times n}$ é dado pela definição a seguir.

3.3.2 Definição: $\det [a_{ij}] = \sum\limits_{\rho} (-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ onde $J = J(j_1 \ \dots, j_n)$

é o número de inversões da permutação $(j_1 j_2 \dots j_n)$ e ρ indica que a soma é estendida a todas as $n!$ permutações de $(1 \ 2 \ \dots \ n)$.

Em relação a esta definição podemos fazer três observações:

i) Se a permutação $(j_1 \ j_2 \ \dots \ j_n)$ tem um número par de inversões, o coeficiente $(-1)^J$ do termo correspondente na somatória terá sinal positivo; caso contrário, terá sinal negativo.

ii) Em cada termo da somatória, existe um e apenas um elemento de cada linha, e um e apenas um elemento de cada coluna da matriz.

iii) Através de uma reordenação conveniente dos termos, mostra-se que também é possível definir um determinante por

$$\det [a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$$

variando os primeiros e deixando fixos os segundos índices. Verifique isto no caso 3×3.

Propriedades

i) Se todos os elementos de uma linha (coluna) de uma matriz **A** são nulos, det **A** = 0.

A razão disto é que, pela observação (*ii*), em cada termo que aparece no cálculo do determinante há um dos elementos da linha (coluna) nula e, portanto, todos os termos se anulam, e o determinante é zero.

ii) det **A** = det **A**$'$

Daí inferimos que as propriedades que são válidas para linhas também o são para colunas.

A prova desta propriedade é a seguinte: se **A** = $[a_{ij}]$, sabemos que **A**$'$ = $[b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ji}$. Então, pela definição de determinante, temos

$$\det[b_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$$

$= \det[a_{ij}]$ pela observação (*iii*).

iii) Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

Para verificarmos isto, chamemos de **A** a matriz original e **B** a matriz obtida de **A**, multiplicando uma linha de **A** por uma constante k. Então, ao calcularmos o determinante de **B**, pela observação (*ii*), em cada termo aparece um elemento daquela linha que foi multiplicada por k. Podemos colocar k em evidência, e o que permanece é exatamente o cálculo do determinante de **A**. Portanto, det **B** = k det **A**.

iv) Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.

A razão disto é imediata se observarmos que ao trocar duas linhas de uma matriz, alteramos a paridade do número de inversões dos índices e, portanto trocamos o sinal dos termos.

v) O determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero.

Isto é verdade porque se trocarmos as posições das linhas que são iguais, a matriz e, portanto, o determinante permanecerão os mesmos. Por outro lado, pela propriedade anterior, o determinante deve trocar de sinal e, portanto, a única possibilidade é que o determinante seja nulo.

vi)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para mostrar esta propriedade, usamos a definição de determinante e a distributividade. Mas cuidado! Observe que aqui temos a soma numa linha, e não uma soma de matrizes. De um modo geral, o determinante de uma soma de duas matrizes não é igual à soma dos determinantes das matrizes. Ou seja, det(**A** + **B**) $\neq$ det **A** + det **B**. Veja o Exercício 4 da secção 3.10.

vii) O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.

Exemplo:
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aqui, à terceira linha, somamos a primeira linha multiplicada por 2. Para provar esta propriedade usamos as propriedades (*vi*), (*iii*) e (*v*).

viii) det (**A** · **B**) = det **A** · det **B**

Mostre, inicialmente, esta propriedade para matrizes 2 × 2. Sinta a dificuldade que se teria para demonstrá-la já em matrizes 3 × 3. A demonstração deste resultado para matrizes $n \times n$ é bem mais elaborada, mas você terá condições de fazê-la usando matrizes elementares (veja a seção 3.8).

A próxima propriedade é tão importante e útil no cálculo de um determinante que destacamos sua importância apresentando-a numa seção separada.

3.4 DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE

Na seção 3.2 vimos que:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Mas, podemos escrever esta soma como:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ou ainda:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observe que o determinante da matriz inicial 3×3 pode ser expresso em função dos determinantes de submatrizes 2×2, isto é,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}|\mathbf{A}_{13}|$$

onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz da inicial, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso, se chamarmos

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$$

obtemos a expressão

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

Esta propriedade continua sendo válida para matrizes de ordem n[1], e assim podemos expressar:

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = a_{i1}\Delta_{i1} + \ldots + a_{in}\Delta_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Ao número Δ_{ij} (que é o determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz $\mathbf{A}_{ij}$, obtida de $\mathbf{A}$ retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna), chamamos *cofator* ou complemento algébrico *do elemento* a_{ij}. Observe que na fórmula dada, o determinante foi "desenvolvido" pela i-ésima linha. Uma forma análoga é válida para as colunas.

3.4.1 Exemplos

Exemplo 1:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\Delta_{12} + 1\Delta_{22} + (-1)\Delta_{32}$$

[1] Para uma demonstração, veja por exemplo Lipschutz, S.; *Álgebra Linear*, McGraw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971.

onde

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

Portanto

$$|\mathbf{A}| = (-2)(-2) + 1 \cdot 8 + (-1)7 = 5$$

O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n, a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n - 1$. Em grande parte dos casos ele simplifica muito o cálculo de determinantes, principalmente se for utilizado um conjunto com outras propriedades dos determinantes.

Exemplo 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(vii)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 + 4) = 5$$

O índice acima da igualdade indica o número da propriedade usada. Neste caso, somamos a segunda linha à terceira.

Exemplo 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(vii)}{=} \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(iii)}{=} -2\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 8 & -3 & -1 \end{vmatrix} \overset{(vii)}{=} -2\begin{vmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 13 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)(3)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = -6(-10 - 52) = 372$$

Note que na primeira passagem usamos a sétima propriedade ao somarmos a segunda coluna multiplicada por 2 à primeira coluna. Nosso intuito foi o de obter uma segunda linha com apenas um elemento não nulo, e então abaixar a ordem do determinante, usando menos cálculos. Seguindo este raciocínio, você pode também obter o determinante inicial, por exemplo, igualando o último elemento da primeira linha a zero.

3.5 MATRIZ ADJUNTA — MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz **A**, lembramos que o cofator Δ_{ij} do elemento a_{ij} da matriz é $(-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}$, onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz de **A**, obtida extraindo-se a *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna. Com estes cofatores podemos formar uma nova matriz **A**, denominada *matriz dos cofatores* de **A**.

$$\bar{\mathbf{A}} = [\Delta_{ij}]$$

Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19, \ldots \text{ etc.}$$

$$\text{Então, } \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

3.5.1 Dada uma matriz quadrada **A**, chamaremos de *matriz adjunta* de **A** à transposta da matriz dos cofatores de **A**.

$$\text{adj } \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}'$$

No exemplo anterior

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos efetuar, neste exemplo, $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}'$.

$$\begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -19\, \mathbf{I}_3$$

Além disto, podemos verificar que $\det \mathbf{A} = -19$. Então $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}' = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_3$. Este resultado não foi obtido por acaso, mas é válido para toda matriz quadrada **A** de ordem *n*.

3.5.2 Teorema: $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}' = \mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_n$

Para demonstrarmos esta proposição, usamos a propriedade (v), segundo a qual o determinante de uma matriz que tem duas linhas (colunas) iguais é zero, e o desenvolvimento de Laplace. Vamos fazê-la esquematicamente, para matrizes 3×3. A demonstração é a mesma para matrizes $n \times n$.

Prova: ($n = 3$)

$$\mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = [c_{ij}]$$

Calculando os elementos c_{ij}, achamos que

$$c_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = \det \mathbf{A}.$$
$$c_{12} = a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23}.$$

Usando o desenvolvimento de Laplace em relação à segunda linha, temos:

$$c_{12} \ \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 0$$

pois duas linhas são iguais. Analogamente,

$$c_{ii} = \det \mathbf{A} \quad \text{e} \quad c_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

Então:

$$\mathbf{A} \cdot (\text{adj } \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det \mathbf{A} \end{bmatrix} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_3$$

3.5.3 Definição: Dada uma matriz quadrada **A** de ordem *n*, chamamos de inversa de **A** a uma matriz **B** tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos $\mathbf{A}^{-1}$ para a inversa de **A**.

3.5.4 Exemplos

Exemplo 1:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Então $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

pois $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_2$ e $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$ (Verifique!)

Exemplo 2:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

Procuremos sua inversa, isto é,

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_2$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$

Impondo a primeira condição,

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{I}_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 6a + 2c & 6b + 2d \\ 11a + 4c & 11b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 6a + 2c = 1 \\ 11a + 4c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 6b + 2d = 0 \\ 11b + 4d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, temos

$$a = 2 \qquad b = -1$$
$$c = -\frac{11}{2} \qquad d = 3$$

Teremos então,

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$. Também

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ e, portanto,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

é a inversa da matriz **A**. ($\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$).

Observações:

i) Se **A** e **B** são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (isto é, existem $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$), então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é inversível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

De fato, basta observar que $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ e que, analogamente $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$.

ii) Se **A** é uma matriz quadrada e existe uma matriz **B** tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, então **A** é inversível, ou seja $\mathbf{A}^{-1}$ existe e, além disso, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Em outras palavras, basta verificar uma das condições para a inversa de uma matriz, e esta será única.

A prova da primeira parte, ou seja, de que $\mathbf{A}^{-1}$ existe, será feita em 3.8.6. Por ora, mostraremos apenas que $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. De fato, se $\mathbf{A}^{-1}$ existe, temos a seguinte seqüência: $\mathbf{B} = \mathbf{BI} = \mathbf{B}(\mathbf{AA}^{-1}) = (\mathbf{BA})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{IA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$.

iii) Nem toda matriz tem inversa.

Por exemplo, para mostrar que $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não tem inversa, é suficiente mostrar que a equação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não tem solução. Isto é verdade, pois

$$\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

implica que $2c = 1$ e $c = 0$, e não podemos ter estas igualdades simultaneamente.

Suponhamos agora que $\mathbf{A}_{n\times n}$ tenha inversa, isto é, existe $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}_n$. Usando o determinante temos

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1})=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{A}^{-1}\quad\text{e}\quad\det\mathbf{I}_n=1$$

Então:

$$\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{A}^{-1}=1$$

Desse produto concluímos que se $\mathbf{A}$ tem inversa,

i) $\det\mathbf{A}\neq 0$

e *ii)* $\det\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}$

Ou seja, $\det\mathbf{A}\neq 0$ é uma condição necessária para que $\mathbf{A}$ tenha uma inversa. Vamos ver que esta condição também é suficiente. Já vimos em 3.5.2 que $\mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{A}}'=(\det\mathbf{A})\mathbf{I}$. Se $\det\mathbf{A}\neq 0$, $\mathbf{A}\cdot\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{A}}'=\mathbf{I}$ e como a inversa é única, então $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{A}}'$.

Em resumo:

3.5.5 Teorema: Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ admite uma inversa se, e somente se $\det\mathbf{A}\neq 0$.

Neste caso:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}(\operatorname{adj}\mathbf{A})$$

Este resultado nos fornece um novo método de calcular a inversa de uma matriz. Consideremos a matriz do Exemplo 2 anterior:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 11 & 4\end{bmatrix}$$

$\det\mathbf{A}=24-22=2\neq 0$ e, portanto, existe a inversa de $\mathbf{A}$. Calculemos sua inversa pela relação $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}(\operatorname{adj}\mathbf{A})$.

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}4 & -11\\ -2 & 6\end{bmatrix}\quad\text{e}\quad\operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -11 & 6\end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}(\operatorname{adj}\mathbf{A})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -11 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{11}{2} & 3\end{bmatrix}$$

3.6 REGRA DE CRAMER

O cálculo da inversa de uma matriz fornece um outro método de resolução de sistemas lineares de equações. Este só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Suponhamos que desejássemos resolver o sistema linear de n-equações e n-incógnitas.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ \quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\quad\;\vdots\\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$$

onde

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$ é a matriz dos coeficientes e

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$ é a matriz dos termos independentes, e $$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

a matriz das incógnitas. Para esta equação suponhamos que $\det\mathbf{A}\neq 0$ e portanto, que $\mathbf{A}$ tenha a inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Então

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{X})&=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}&=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{I}_n\mathbf{X}&=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{X}&=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\end{aligned}$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

Usando a relação para matriz inversa dada em 3.5.4, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Então

$$x_1 = \frac{b_1\Delta_{11} + \dots + b_n\Delta_{n1}}{\det \mathbf{A}}$$

Mas note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz que obtemos de **A**, substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes. De fato, usando o desenvolvimento de Laplace, obtemos:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1\Delta_{11} + \dots + b_n\Delta_{n1}$$

Ou seja

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Fazendo deduções análogas, obtemos

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Observe que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes ($\det \mathbf{A} \neq 0$), e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de **A**,

substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Este método de resolução de um sistema linear de n equações e n incógnitas, que só pode ser aplicado quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo, é chamado *Regra de Cramer*.

3.6.1 Exemplo

Dado o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

temos

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Portanto, podemos usar a Regra de Cramer.
Então:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 18$$

Cabe aqui um comentário sobre a Regra de Cramer. Embora seja muito útil, pois dá uma forma explícita das soluções de um sistema, ela não é muito usada para cálculos numéricos. Isto porque o número de operações que ela envolve é muito grande, quando trabalhamos com muitas equações. No cálculo do determinante de uma matriz de ordem n, temos que calcular $n!$ produtos de n fatores, e depois somá-los. (Veja a definição.) Efetuamos então $n!(n - 1) + (n! - 1) = n!n - 1$ operações. Como para resolver um sistema $n \times n$ pela

Regra de Cramer precisamos calcular $n + 1$ determinantes de ordem n, o número de operações se elevaria a $(n + 1)(n!n - 1)$, que é maior que $n^2 n!$.

Como um exemplo, para resolvermos um sistema de 10 equações e 10 incógnitas, pela Regra de Cramer teríamos um número de operações superior a $10^2\, 10! = 362.880.000$ operações, enquanto que pelo método de redução de linhas não chegaríamos a 14.000.

Muitos dos problemas que aparecem em Engenharia, Economia, Biologia etc., costumam envolver um grande número de incógnitas, de ordem 100 ou 1.000, por exemplo. Nestes casos, mesmo os métodos de eliminação e redução por linhas podem não ser adequados. Então nos meios computacionais prefere-se usar métodos numéricos iterativos (como, por exemplo, o de Gauss-Seidel). Estes processos iterativos serão nosso objeto de estudo no capítulo 13.

3.7 CÁLCULO DO POSTO DE UMA MATRIZ ATRAVÉS DE DETERMINANTES

Muitas vezes, é suficiente saber apenas se um sistema de equações lineares tem solução sem precisar resolvê-lo, isto é, sem explicitar as soluções. Por exemplo, ao estudar a posição relativa de duas retas no plano, dadas pelas equações $y - 2x = 3$ e $y - 3x = 2$, podemos estar interessados em saber apenas se elas se interceptam ou não, sem determinar seu ponto de intersecção. Ou seja, queremos saber se o sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$$

admite ou não solução.

Como já vimos em 2.5, a existência e o número de soluções estão relacionados com o posto da matriz dos coeficientes e o posto da matriz ampliada. Vamos ver agora uma maneira de obter o posto de uma matriz usando determinantes.

3.7.1 Teorema: O posto (característica) de uma matriz **A** (quadrada ou não) é dado pela maior ordem possível das submatrizes quadradas de **A**, com determinantes diferentes de zero.

(Para uma demonstração, deste teorema veja os exercícios 18, 19 e 20 da seção 3.10.)

3.7.2 Exemplos

Exemplo 1: Dada a matriz 4×5

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & -15 & 19 & 14 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 25 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos verificar que cada submatriz de ordem 4 (há 5) tem determinante 0. Também o determinante de cada submatriz de ordem 3 (há 40) é zero. Mas

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} = 8 \neq 0.$$

Então, o posto é 2.

Exemplo 2: Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ 6x - 3y - 3z = -1 \end{cases}$$

vamos dizer se ele é possível ou não, sem resolvê-lo.
A matriz dos coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

tem determinante 0, pois a terceira linha é igual à segunda multiplicada por -3. Portanto, o posto de **A** é menor que 3. (Se $\det \mathbf{A} \neq 0$, o posto seria 3, pois **A** é submatriz dela mesma.) Como $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 5$, **A** tem uma submatriz quadrada de ordem 2, com determinante diferente de zero; portanto, seu posto é 2.

Tomemos agora a matriz ampliada do sistema

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1$, o posto de **B** é 3. Concluímos assim, que o sistema não admite solução, pois o posto da matriz dos coeficientes é diferente do posto da matriz ampliada.

Observação:
Num sistema de n equações e n incógnitas, onde o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de 0, existe uma única solução.

* 3.8 MATRIZES ELEMENTARES
Um processo de inversão de matrizes

O cálculo da inversa de uma matriz usando determinante, envolve um número muito grande de operações. O processo prático de inversão que vamos apresentar nesta seção é baseado nas operações com as linhas de uma matriz e, em termos de cálculos, é muito vantajoso. O conceito de matrizes elementares que introduziremos aqui será utilizado para mostrar a validade deste processo e ainda para demonstrar vários resultados já enunciados em seções anteriores.

Observemos, inicialmente, que cada operação com as linhas de uma matriz corresponde a uma multiplicação dessa matriz por uma matriz especial.

3.8.1 Exemplos

Exemplo 1: Ao multiplicarmos a primeira linha da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

por 2, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

que é exatamente o produto

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Ao trocarmos a primeira e a segunda linha da matriz **A** acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Este resultado é o mesmo que o produto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Ao somarmos à primeira linha da matriz **A** a segunda linha multiplicada por 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

que é o mesmo que o produto

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Observando mais cuidadosamente estes exemplos, vemos que aplicar uma operação elementar nas linhas da matriz **A** é o mesmo que aplicar esta operação elementar na matriz identidade e, em seguida, multiplicar esta nova matriz por **A**. Vejamos isto em outros exemplos.

Exemplo 4: Se tomarmos a matriz identidade I_3 e trocarmos a primeira e a terceira linha, obteremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se multiplicarmos esta matriz pela matriz **A** do exemplo 1, teremos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

cujo resultado é exatamente a troca da primeira e terceira linha da matriz **A**.

Exemplo 5: Se tomarmos $\mathbf{I}_3$ e somarmos à terceira linha a segunda multiplicada por -3, obteremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Se multiplicarmos esta matriz pela matriz **A** do Exemplo 1, teremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

Este resultado é exatamente aquele que obtemos se somarmos à terceira linha de **A** a segunda multiplicada por -3.

Através desses exemplos podemos perceber que existe uma relação íntima entre as operações com linhas de uma matriz e certas matrizes especiais construídas a partir da matriz identidade. Estas matrizes serão denominadas matrizes elementares.

3.8.2 Definição: Uma *matriz elementar* é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas.

O relacionamento entre matrizes elementares e operações com linhas é dado pelo teorema abaixo.

3.8.3 Teorema: Se **A** é uma matriz, o resultado da aplicação de uma operação com as linhas de **A** é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar **E** correspondente à operação com linhas pela matriz **A**.

A prova deste resultado poderá ser feita por você. Consiste apenas em escrever a matriz **E**, efetuar o produto $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$ e verificar que o resultado obtido é o esperado. Este procedimento deve ser efetuado para cada tipo de operação com linhas. Uma conseqüência importante da proposição anterior é:

3.8.4 Corolário: Uma matriz elementar $\mathbf{E}_1$ é inversível e sua inversa é a matriz elementar $\mathbf{E}_2$, que corresponde à operação com linhas inversa da operação efetuada por $\mathbf{E}_1$.

Por exemplo, se $\mathbf{E}_1$ é a matriz elementar cuja operação consiste em multiplicar uma determinada linha por k, a matriz inversa de $\mathbf{E}_1$ será a matriz elementar $\mathbf{E}_2$ que corresponde à operação de multiplicar a mesma linha por $\frac{1}{k}$. A prova deste corolário é deixada a seu encargo.

Como conseqüência do resultado anterior, podemos mostrar agora o teorema 2.3.1.

3.8.5 Teorema: Sistemas associados a matrizes linha equivalentes são equivalentes.

Prova: Sejam **A** e **A'** matrizes-linha equivalentes. Por 3.8.3 $\mathbf{A}' = \mathbf{MA}$, onde **M** é um produto de matrizes elementares e, portanto, inversível (veja 3.8.4 e (*i*) de 3.5.4). Os sistemas (I) e (II) que têm **A** e **A'** como matrizes ampliadas podem ser escritos respectivamente:

$\mathbf{N} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{N}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$, onde **N** é a submatriz de **A** da qual se retirou a última coluna e **B** é esta coluna. (Idem para **N'**, **A'** e **B'**.) Além disto, você pode verificar que

$$\mathbf{N}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}.$$

Portanto, $\mathbf{NX} = \mathbf{B} \Longleftrightarrow \mathbf{MNX} = \mathbf{MB} \Longleftrightarrow \mathbf{N}'\mathbf{X} = \mathbf{B}'$.

Isto significa que os sistemas (I) e (II) são equivalentes pois toda matriz

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ que seja a solução do I será solução de II e vice-versa.

3.8.6 Usando os resultados 3.8.3 e 3.8.4 podemos também completar agora a demonstração da observação (*ii*) de 3.5.4. Repetindo-a da maneira como foi enunciada: Se **A** é uma matriz quadrada e existe uma matriz **B** tal que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, então **A** é inversível, ou seja, $\mathbf{A}^{-1}$ existe e $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Já havíamos mostrado que se **A** é inversível, então $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Mostremos agora que **A** é realmente inversível.

Comecemos analisando o sistema de equações lineares que corresponde a $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, onde **X** é um vetor coluna e **0** é o vetor-coluna cujos elementos são nulos. Observamos que a única solução possível para esse sistema é $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ pois, multiplicando $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ por **B**, temos $\mathbf{0} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{B}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{BA})\mathbf{X} = \mathbf{IX} = \mathbf{X}$. Por outro lado, se resolvermos o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ através de operações com linhas, obteremos um sistema equivalente $\mathbf{RX} = \mathbf{0}$, onde **R** é a forma escada linha reduzida de **A** e, portanto, $\mathbf{R} = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1} \ldots \mathbf{E}_1\mathbf{A}$. Mas, como o sistema $\mathbf{RX} = \mathbf{0}$ é equivalente a $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, a sua única solução é $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, e como **R** está na forma escada linha reduzida, a única possibilidade é $\mathbf{R} = \mathbf{I}$. Então $\mathbf{I} = \mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1} \ldots \mathbf{E}_1\mathbf{A}$, e, multiplicando sucessivamente por $\mathbf{E}_k^{-1}$, $\mathbf{E}_{k-1}^{-1}$, ..., $\mathbf{E}_1^{-1}$ (que são matrizes elementares, como vimos na seção 3.8.4), teremos $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1} \ldots \mathbf{E}_k^{-1}$, ou seja, **A** é um produto de matrizes elementares e, pela observação (*i*) de 3.5.4, é inversível.

* 3.9 PROCEDIMENTO PARA A INVERSÃO DE MATRIZES

Com argumentos análogos aos usados em 3.8.5 você pode provar o teorema enunciado a seguir.

3.9.1 Teorema: Se **A** é uma matriz inversível, sua matriz-linha reduzida à forma escada, **R**, é a identidade. Além disso, **A** é dada por um produto de matrizes elementares.

A recíproca deste resultado irá fornecer um novo processo para se calcular a inversa de uma matriz **A**. Suponhamos que, ao reduzir **A** à forma escada linha reduzida, a matriz identidade seja obtida como resultado. Neste caso, como a cada operação com linhas corresponde uma multiplicação por uma matriz elementar, $\mathbf{E}_i$, teremos então:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I})\mathbf{A} \end{aligned}$$

Mas isto quer dizer que

$$\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$$

que podemos colocar em palavras através do teorema abaixo.

3.9.2 Teorema: Se uma matriz **A** pode ser reduzida à matriz identidade, por uma seqüência de operações elementares com linhas, então **A** é inversível e a matriz inversa de **A** é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma seqüência de operações com linhas.

Na prática, operamos simultaneamente com as matrizes **A** e **I**, através de operações elementares, até chegarmos à matriz **I** na posição correspondente à matriz **A**. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz **I** será a inversa de **A**.

$$(\mathbf{A} \ \vdots\ \mathbf{I}) \longrightarrow (\mathbf{I} \ \vdots\ \mathbf{A}^{-1})$$

Vejamos como este procedimento pode ser colocado em prática.

3.9.3 Exemplos

Exemplo 1: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Coloquemos a matriz junto com a matriz identidade e apliquemos as operações com linhas, para reduzir a parte esquerda (que corresponde a **A**) à forma escada linha reduzida, lembrando que cada operação deve ser efetuada simultaneamente na parte direita.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trocando a primeira e segunda linhas, obtemos

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agora, somamos à quarta a primeira e à segunda, a primeira linha multiplicada por -2.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Subtraímos a segunda linha da terceira, obtendo

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trocamos o sinal da terceira linha e, subseqüentemente, anulamos o resto da terceira coluna.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente, obtemos a identidade à esquerda e a inversa de **A** à direita.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Partimos de

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e fazemos operações com linhas, para converter a parte esquerda (que corresponde a **A**) à forma escada linha reduzida. Obtemos então

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como a forma escada não é a identidade, a matriz **A** não tem inversa.

3.9.4 Agora, iremos demonstrar a propriedade

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

conforme nos propusemos a fazer em 3.3 (*viii*).

Para isso, queremos que você descubra qual é o determinante de uma matriz elementar **E** nos seguintes casos:

i) **E** é obtida de **I** por uma permutação de linhas.

ii) **E** é obtida de **I** pela multiplicação de uma das linhas por uma constante k ($k \neq 0$).

iii) **E** é obtida de **I** pela substituição da i-ésima linha por k vezes a j-ésima, mais a i-ésima linha.

Agora você deverá provar o seguinte resultado.

3.9.5 Teorema: Se **E** for uma matriz elementar e **A** uma matriz qualquer da mesma ordem que **E**, então $\det \mathbf{EA} = \det \mathbf{E} \cdot \det \mathbf{A}$.

Para provar este teorema, considere as três possibilidades para a matriz **E** (*i*), (*ii*) e (*iii*) dadas acima. Tudo ficará realmente simples se você tiver chegado à conclusão que, em (*i*) temos $\det \mathbf{E} = -1$, em (*ii*) $\det \mathbf{E} = k$ e em (*iii*) $\det \mathbf{E} = 1$.

Finalmente, podemos demonstrar a propriedade do determinante do produto.

3.9.6 Teorema: Se **A** e **B** são matrizes $n \times n$ quaisquer, então $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

Prova:

1º caso: Se **A** ou **B** são não inversíveis, temos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ não inversível (veja o Exercício 10 da seção 3.10). Neste caso, $\det(\mathbf{AB}) = 0$, e como $\det \mathbf{A} = 0$ ou $\det \mathbf{B} = 0$, a igualdade se verifica.

2º caso: Se **A** e **B** são inversíveis, usando 3.9.1 temos:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{E}_1 \ldots \mathbf{E}_k\mathbf{B})$$

Após sucessivas aplicações do teorema 3.9.5 chegamos a:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det \mathbf{E}_1 \cdot \det(\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_k\mathbf{B}) \\ &= \ldots = \det \mathbf{E}_1 \cdot \det \mathbf{E}_2 \cdot \ldots \cdot \det \mathbf{E}_k \cdot \det \mathbf{B} \\ &= \det \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \det(\mathbf{E}_{k-1} \cdot \mathbf{E}_k) \cdot \det \mathbf{B} \\ &= \ldots = \det(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k) \cdot \det \mathbf{B} \\ &= \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \end{aligned}$$

3.10 EXERCÍCIOS

1. Dê o número de inversões das seguintes permutações de 1, 2, 3, 4, 5:

   a) 3 5 4 1 2
   b) 2 1 4 3 5
   c) 5 4 3 2 1
   d) No determinante de uma matriz 5 X 5, que sinal (negativo ou positivo) precederia os termos $a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$ e $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$?

2. Quantas inversões tem a permutação (n $n-1$ ... 2 1) dos números 1, 2, ..., $n-1$, n?

3. Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

   a) pela definição
   b) em relação à segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

4. Dadas as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule

   a) $\det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$
   b) $\det (\mathbf{A} + \mathbf{B})$

5. Sejam **A** e **B** matrizes do tipo $n \times n$. Verifique se as colocações abaixo são verdadeiras ou falsas.

   a) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$
   b) $\det(\mathbf{A}') = \det \mathbf{A}$
   c) $\det(2\mathbf{A}) = 2 \det \mathbf{A}$
   d) $\det(\mathbf{A}^2) = (\det \mathbf{A})^2$
   e) $\det \mathbf{A}_{ij} < \det \mathbf{A}$
   f) Se **A** é uma matriz 3 X 3, então
   $a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$

6. Dada $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ calcule

   a) $\mathbf{A}_{23}$
   b) $|\mathbf{A}_{23}|$
   c) Δ_{23}
   d) $\det \mathbf{A}$

7. *Propriedade*: O determinante de uma matriz triangular $\mathbf{A}_{n \times n}$ é igual ao produto dos elementos de sua diagonal.

   a) Prove esta propriedade no caso em que **A** é uma matriz triangular superior (genérica) 5 X 5. (Sugestão: Use e abuse do desenvolvimento de Laplace.)
   b) O que você pode dizer sobre o número de soluções dos sistemas abaixo?

$$(i)\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ \quad -3x_2 + 9x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \\ \quad\quad -2x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad\quad x_4 = 1 \end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases} 3x_5 + 2x_4 + x_1 = 0 \\ \quad - x_3 + x_2 - x_1 = 5 \\ \quad - 9x_3 - x_2 + 9x_1 = 0 \\ \quad\quad -3x_2 + x_1 = 0 \\ \quad\quad\quad x_1 = 0 \end{cases}$$

8. Calcule det **A**, onde

   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

   c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 3 & 2 & -i \\ 3 & -i & 1 & i \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -i & i & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Encontre $\mathbf{A}^{-1}$, onde

   a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -i & -2 & i \\ 1 & -1 & i & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -i \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$

10. Se **A** ou **B** é uma matriz não inversível, então **A** · **B** também não é. Prove isto, sem usar determinantes.

11. Mostre que

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe atentamente a igualdade acima e enuncie a propriedade que ela ilustra.

12. Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule

a) adj **A**
b) det **A**
c) $\mathbf{A}^{-1}$

13. Mostre que $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

14. Dizemos que **A** e **B** são matrizes semelhantes se existe uma matriz **P** tal que $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. Mostre que det **A** = det **B** se **A** e **B** são semelhantes.

15. Verdadeiro ou falso?

a) Se det **A** = 1, então $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.
b) Se **A** é uma matriz triangular superior e $\mathbf{A}^{-1}$ existe, então também $\mathbf{A}^{-1}$ será uma matriz triangular superior.
c) Se **A** é uma matriz escalar $n \times n$ da forma $k\mathbf{I}_n$, então $\det \mathbf{A} = k^n$.
d) Se **A** é uma matriz triangular, então $\det \mathbf{A} = a_{11} + \ldots + a_{nn}$.

16. Resolva o sistema, usando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \\ y - 5z = 4 \end{cases}$$

17. Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y - w = 0 \\ x - z + w = 2 \\ y + z - w = -3 \\ x + y - 2w = 1 \end{cases}$$

a) Calcule o posto da matriz dos coeficientes.
b) Calcule o posto da matriz ampliada.
c) Descreva a solução deste sistema.
d) Considere um sistema homogêneo **AX** = **0**, onde **A** é uma matriz $n \times n$. Que condição você deve impor sobre **A**, para que o sistema admita soluções diferentes da solução trivial (**X** = **0**)? Compare com 3.6 e o Exercício 18 do Capítulo 2.

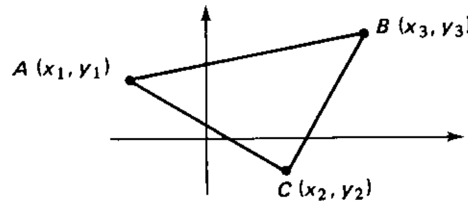
18. Prove que: Uma matriz **A**, com ordem n, tem posto n se, e somente se **A** é inversível.

19. **A partir do exercício acima, você pode concluir que uma matriz A, de** ordem n, possui determinante diferente de zero se, e somente se **A** tem n linhas linearmente independentes. Por quê? (Veja o final da secção 2.4.)

20. Agora prove a propriedade 3.7.1, usando o exercício anterior.

21. Mostre que a área do triângulo na figura é dada pelo determinante

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



22. *a*) Mostre que $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$

b) Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números, mostre por indução finita que

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

O símbolo à direita significa o produto de todos os termos $x_j - x_i$ com $i < j$ e i, j inteiros variando de 1 a n.

Sugestão: Para efetuar facilmente a indução, multiplique cada coluna por x_1 e subtraia o mesmo da coluna imediatamente à direita, partindo do lado esquerdo, obtendo, então: $V_n = (x_n - x_1) \dots (x_2 - x_1) V_{n-1}$.
Tal determinante é chamado determinante de Vandermonde.

23. Uma maneira de codificar uma mensagem é através de multiplicação por matrizes. Vamos associar as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Suponhamos que a nossa mensagem seja "PUXA VIDA". Podemos formar uma matriz 3 X 3 assim:

$$\begin{bmatrix} P & U & X \\ A & - & V \\ I & D & A \end{bmatrix}, \text{ que usando a}$$

correspondência numérica fica:

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}$$

Agora seja **C** uma matriz qualquer 3 X 3 *inversível*, por exemplo:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos nossa matriz da mensagem por **C**, obtendo **M** · **C**.

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 83 & 58 \\ 1 & 21 & 22 \\ 5 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

Transmitimos esta nova matriz (na prática, envia-se a cadeia de números -5 83 58 1 21 22 5 13 14). Quem recebe a mensagem decodifica-a através da multiplicação pela inversa ($(\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{M}$) e posterior transcrição dos números para letras. **C** é chamada *matriz chave* para o código.

a) Você recebeu a mensagem:
-12 48 23 -2 42 26 1 42 29
Utilizando a mesma chave traduza a mensagem.

b) Aconteceu que o inimigo descobriu sua chave. O seu comandante manda você substituir a matriz chave por $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Você transmite a mensagem "CRETINO..." a ele (codificada, naturalmente!). Por que não será possível a ele decodificar sua mensagem?

c) Escolha uma matriz-chave que dê para codificar palavras até 16 letras. Codifique e descodifique à vontade!

3.10.1 Respostas

1. *a*) 5 *b*) 2 *c*) 10 *d*) - e +

3. *a*) 21 *b*) 21

5. *a*) V *b*) V *c*) F *d*) V *e*) F *f*) V

7. *a*) Seja **A** uma matriz triangular superior e desenvolva-se o determinante através da primeira coluna.
$|\mathbf{A}| = a_{11} |\mathbf{A}_{11}|$ mas $\mathbf{A}_{11}$ é triangular superior também $|\mathbf{A}_{11}| = a_{22} |\mathbf{A}_{11_{11}}|$ etc.
Então $|\mathbf{A}| = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$.

b) (*i*) única, (*ii*) nenhuma.

9. *a*) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix}$

b) $\dfrac{-1}{2+i} \begin{bmatrix} -1-i & -1 & -1 & -1-i \\ -i & i & 1-i & -i \\ 1+2i & 1-i & i & -1+i \\ 3-i & -2-i & 3-i & 2+i \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-2}{x} & \dfrac{1}{x} \\ -1 & \dfrac{-1+2}{x} & \dfrac{1-1}{x} \\ 1 & \dfrac{2}{x^2} & \dfrac{-1}{x^2} \end{bmatrix}$