

MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907
NOTAS DE CLASE - SEMANA 07
INTERPOLACIÓN DE TRAZADORES CÚBICOS



Una forma de eliminar las oscilaciones al aumentar el número de puntos al interpolar una nube de puntos o al tomar muchos nodos para aproximar una función en un intervalo, es usar la interpolación *fragmentaria* o aproximación *fragmentaria*.

Consideremos $n+1$ puntos distintos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ donde $x_0 < \dots < x_n$. La interpolación fragmentaria consiste en encontrar una función S definida en $[x_0, x_n]$ que en cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ tiene una forma particular.

★ **Interpolación lineal a trozos**

El interpolante lineal a trozos S se construye por medio de las rectas $S_j(x)$ que pasan por los puntos (x_j, y_j) y (x_{j+1}, y_{j+1}) , $j = 0, \dots, n-1$.

Ejemplo Hallar el interpolante lineal a trozos para los valores de la tabla

x_j	1	3	5	9
y_j	2	4	3	8

Solución: Calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_j, y_j) y (x_{j+1}, y_{j+1}) , $j = 0, 1, 2$, encontramos las ecuaciones de las rectas con la ecuación punto-pendiente y obtenemos el interpolante lineal a trozos.

$$S(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [1, 3], \\ \frac{1}{2}(11 - x), & x \in (3, 5], \\ \frac{1}{4}(5x - 13), & x \in (5, 9]. \end{cases}$$

El interpolante lineal a trozos es una curva continua en $[x_0, x_n]$ y no diferenciable en los nodos interiores $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, por lo tanto, buscamos un interpolante polinomial fragmentario que en los nodos interiores sea diferenciable.

★ **Interpolación cúbica o Spline cúbico**

La interpolación fragmentaria más común es la que utiliza polinomios cúbicos y recibe el nombre de interpolación de spline cúbicos y en este caso podemos pedir que $S \in \mathcal{C}^2[x_0, x_n]$.

Definición. Dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de $n+1$ nodos $a = x_0 < \dots < x_n = b$, un interpolante de spline cúbico S para f es una función a trozos definida en $[x_0, x_n]$ por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n], \end{cases}$$

que cumple las siguientes condiciones:

- a. S_j es un polinomio de grado menor o igual a 3 definido en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, \dots, n-1$

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3.$$

- b. S es interpolante: $S(x_j) = f(x_j)$ para $j = 0, \dots, n$.

- c. S es continuo: $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para $j = 0, \dots, n-2$.

- d. S' es continua: $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para $j = 0, \dots, n-2$.

- e. S'' es continua: $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para $j = 0, \dots, n-2$.

Observaciones Notemos que de las condiciones:

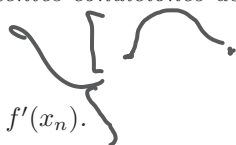
- los polinomios S_j son todos de grado menor o igual a 3, cada uno tiene 4 (incógnitas) coeficientes y generan un conjunto de $4n$ coeficientes,
- S es una función interpolante de la tabla, lo cual proporciona $n + 1$ ecuaciones, por los $n + 1$ nodos,
- la continuidad de S aporta $n - 1$ ecuaciones al sistema de ecuaciones, ya que S es continua en cada tramo por ser polinómica, así que la continuidad recae sobre los $n - 1$ nodos interiores,
- la continuidad de S' aporta también $n - 1$ ecuaciones al sistema de ecuaciones y
- la continuidad de S'' aporta las últimas $n - 1$ ecuaciones al sistema de ecuaciones.

Estos son los reglitos que definen el spline compuesto

En total hay $4n - 2$ ecuaciones y $4n$ incógnitas, lo que deja dos grados de libertad, esto es, nos faltan dos condiciones **extra** para tener un sistema cuadrado. Se acostumbra establecer las dos ecuaciones faltantes a partir de *restricciones en los extremos del intervalo*.

Definición (cont). S cumple una de las siguientes condiciones de frontera:

- Naturales:** $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.
- Sujetas:** $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$.
- Curvatura dada en los extremos:** $S''(x_0) = f''(x_0)$ y $S''(x_n) = f''(x_n)$.
- Terminación Parabólica:** S'' es constante en los intervalos extremos
- Extrapolada:** S'' se extrapola en los intervalos extremos



$$b + 2c(a-2) + 3d(x-2) = 3$$

Ejemplo Halle los valores de a , b , c y d para que la función siguiente sea un spline cúbico sujeta para una función f en $[1, 3]$ que cumple la condición $f'(1) = f'(3)$

$$S(x) = \begin{cases} 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2, \\ a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$3 + 4(x-1) - 3(x-1)^2$$

Solución: Verifiquemos que S cumple las condiciones (a. hasta la e.) de la definición de spline

a. Si denotamos

$$S_0(x) := 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3 \quad \text{y} \quad S_1(x) := a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$$

S_0 y S_1 son polinomios de grado menor o igual a 3. *Estas funciones entregan*

b. No hay función f conocida, así que solo podemos decir que S debe interpolar la tabla

x_j	1	2	3
$y_j = f(x_j)$	0	a	$a + b + c + d$

esto lo usamos

c. Continuidad de S : se debe cumplir que $S_0(2) = S_1(2)$

$$3 + 2 - 1 = a \rightarrow a = 4$$

d. Continuidad de S' : se debe cumplir que $S'_0(2) = S'_1(2)$

$$\left. \begin{array}{l} S'_0(x) := 3 + 4(x-1) - 3(x-1)^2 \\ S'_1(x) := b + 2c(x-2) + 3d(x-2)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S'_0(2) = 3 + 4 - 3 \\ S'_1(2) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

e. Continuidad de S'' : se debe cumplir que $S''_0(2) = S''_1(2)$

$$\left. \begin{array}{l} S''_0(x) := 4 - 6(x-1) \\ S''_1(x) := 2c + 6d(x-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S''_0(2) = 4 - 6 \\ S''_1(2) = 2c \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

f. Spline cúbico sujeto: esto es $S'(1) = f'(1)$ y $S'(3) = f'(3)$, nos dicen que $f'(1) = f'(3)$, así

$$S'(1) = S'(3) \Leftrightarrow S'_0(1) = S'_1(3) \Leftrightarrow 3 = 4 + 2(-1) + 3d \Leftrightarrow \boxed{d = \frac{1}{3}}$$

♣ Construcción del spline cúbico

Queremos construir de una manera eficaz el spline cúbico para la función f en los nodos $\{x_j\}_{j=0}^n$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) := a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3, & x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x) := a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3, & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \\ S_j(x) := a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3, & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ S_{j+1}(x) := a_{j+1} + b_{j+1}(x-x_{j+1}) + c_{j+1}(x-x_{j+1})^2 + d_{j+1}(x-x_{j+1})^3, & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}], \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) := a_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x-x_{n-1})^3, & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

• Denotamos por h_j la longitud de cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, n-1$ y las dos primeras derivadas de cada S_j estan dadas por

$$\begin{aligned} \boxed{h_j} &= x_{j+1} - x_j & j &= 0, \dots, n-1, \\ S'_j(x) &= b_j + 2c_j(x-x_j) + 3d_j(x-x_j)^2, & j &= 0, \dots, n-1, \\ S''_j(x) &= 2c_j + 6d_j(x-x_j), & j &= 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

• De la condición de interpolación

$$a_j = S_j(x_j) = f(x_j) \quad j = 0, \dots, n-1, n, \Rightarrow \boxed{a_j = f(x_j)} \quad j = 0, \dots, n-1, n$$

donde a_n aunque no es incógnita, la asociamos al valor de la función f en x_n .

• De la continuidad de S : $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$ para $j = 0, \dots, n-2$, así

$$a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = a_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n-2, n-1, \quad (1)$$

donde la igualdad es válida para $n-1$ gracias al valor de a_n ya definido.

• De la continuidad de S' : $S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$ para $j = 0, \dots, n-2$, así

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, \quad j = 0, \dots, n-1, n-1 \quad (2)$$

donde b_n aunque no es incógnita, está asociado al valor de $S'(x_n)$.

• De la continuidad de S'' : $S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$ para $j = 0, \dots, n-2$, así

$$2c_{j+1} = 2c_j + 6d_j h_j, \quad j = 0, \dots, n-2, n-1, \quad (3)$$

Las derivadas primeras en los extremos del polinomio que define el spline y la función interpolada

Intervalo

Esta función de aquí

donde c_n aunque no es incógnita, está definida por $c_n := \frac{1}{2}S''(x_n)$.

Despejamos d_j de (3)

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} \quad j = 0, \dots, n-1,$$

esta es la formula!

y reemplazando el valor de d_j en (1) y (2)

formulas \Rightarrow $a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} h_j^3 \Rightarrow a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{c_{j+1} + 2c_j}{3} h_j^2$ (4)

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3 \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} h_j^2 \Rightarrow b_{j+1} = b_j + (c_{j+1} + c_j) h_j$$
 (5)

encontramos una expresión para b_j de (4)

$$b_j = \frac{1}{h_j} (a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3} (2c_j + c_{j+1})$$

despejando para b_j

Handwritten derivation:

$$b_j h_j^2 + 3c_j h_j^2 - 3c_j h_j^2 = \frac{c_j h_j^2 + c_{j+1} h_j^2}{h_j}$$

y reemplazando en (5); pero con un subíndice menos, es decir, reemplazamos en la expresión $b_j = b_{j-1} + h_{j-1}(c_j + c_{j-1})$ y obtenemos el sistema

De donde sale este concepto.

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2c_j(h_{j-1} + h_j) + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad j = 1, \dots, n-1.$$

despejando este concepto.

Handwritten derivation:

$$= \frac{c_j h_j^2 + c_{j+1} h_j^2}{h_j} = (c_j + c_{j+1}) h_j$$

Del procedimiento anterior, reducimos el sistema de $4n$ incógnitas al sistemas en las incógnitas c_0, \dots, c_n ya que los valores de los h_j y a_j son conocidos. Pero, tenemos un sistema con $n+1$ incógnitas y $n-1$ ecuaciones, las dos ecuaciones faltantes se obtienen de las condiciones de frontera. Una vez se introducen las condiciones de frontera, resolvemos el sistema, recuperamos los valores de d_j y b_j , $j = 0, \dots, n-1$, construimos los S_j , $j = 0, \dots, n-1$, y por ende el spline cúbico S .

En el caso de tener condición de frontera natural, se debe cumplir que $S''(x_0) = 0$ y $S''(x_n) = 0$, que en términos de las incógnitas se traducen en $c_0 = 0$ y $c_n = 0$ (ya que $S''(x_j) = 2c_j$, $j = 0, \dots, n$) y el sistema de ecuaciones a resolver es $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{A}_{(n-1) \times (n-1)}$

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) - \frac{3}{h_{n-3}}(a_{n-2} - a_{n-3}) \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \end{bmatrix}$$

Notemos que la matriz \mathbf{A} es e.d.d. y por ende invertible, lo cual garantiza el spline cúbico natural existe y es único.

En el caso de tener condición de frontera con curvatura conocida, se debe cumplir que $S''(x_0) = f''(x_0)$ y $S''(x_n) = f''(x_n)$, que en términos de las incógnitas se traduce en $c_0 = \frac{1}{2}f''(x_0)$ y $c_n = \frac{1}{2}f''(x_n)$ y el sistema de ecuaciones a resolver es $\mathbf{A}\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{b}}$ con la misma matriz $\mathbf{A}_{(n-1) \times (n-1)}$, el vector de incógnitas \mathbf{c} y el vector $\tilde{\mathbf{b}}$ es el resultado de modificar la primera y última componente de \mathbf{b}

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)h_0 \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) - \frac{3}{h_{n-3}}(a_{n-2} - a_{n-3}) \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) - \frac{1}{2}f''(x_n)h_{n-1} \end{bmatrix}$$

que se obtiene de la relación $h_{j-1}c_{j-1} + 2c_j(h_{j-1} + h_j) + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$ con $j = 1$

$$\begin{aligned} h_0c_0 + 2c_1(h_0 + h_1) + h_1c_2 &= \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \Updownarrow \\ \frac{1}{2}f''(x_0)h_0 + 2c_1(h_0 + h_1) + h_1c_2 &= \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \end{aligned}$$

y con $j = n - 1$

$$\begin{aligned} h_{n-2}c_{n-2} + 2c_{n-1}(h_{n-2} + h_{n-1}) + h_{n-1}c_n &= \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ \Updownarrow \\ h_{n-2}c_{n-2} + 2c_{n-1}(h_{n-2} + h_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(x_n)h_{n-1} &= \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}). \end{aligned}$$

La matriz \mathbf{A} es la misma e.d.d. garantizando que el spline cúbico con curvatura conocida existe y es único.

• En el caso de tener condición de frontera con terminación parabólica, se debe cumplir que S'' sea constante en los intervalos extremos, esto es, en los intervalos $[x_0, x_1]$ y $[x_{n-1}, x_n]$. Dado que $S''_j(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$ en $(x_j, x_{j+1}]$, la condición se traduce en que los polinomios S''_0 y S''_{n-1} sean constantes y esto se cumple siempre que $d_0 = 0$ y $d_{n-1} = 0$

$$\begin{aligned} 0 = d_0 = \frac{c_1 - c_0}{3h_0} &\Rightarrow c_0 = c_1, \\ 0 = d_{n-1} = \frac{c_n - c_{n-1}}{3h_{n-1}} &\Rightarrow c_n = c_{n-1}. \end{aligned}$$

Así el sistema de ecuaciones a resolver es $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ con la matriz $\tilde{\mathbf{A}}_{(n-1) \times (n-1)}$ dada por

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3h_0 + 2h_1 & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & \\ & & h_{n-2} & 2h_{n-2} + 3h_{n-1} & \end{bmatrix}$$

el vector de incógnitas \mathbf{c} y el vector \mathbf{b} dados antes. La matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ es matriz e.d.d. garantizando que el spline cúbico con terminación parabólica existe y es único.

Ejemplo Hallar el spline cúbico que interpola la nube de puntos

x_k	-3	-1	2	3	7
y_k	5	4	12	6	0

★ Spline natural ★ Spline tal que $S''(-3) = -1$ y $S''(7) = 2$ (curvatura conocida) ★ Spline con terminación parabólica.

Solución: Queremos hallar el spline cúbico de la forma

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x + 3) + c_0(x + 3)^2 + d_0(x + 3)^3, & x \in [-3, -1], \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x + 1) + c_1(x + 1)^2 + d_1(x + 1)^3, & x \in [-1, 2], \\ S_2(x) = a_2 + b_2(x - 2) + c_2(x - 2)^2 + d_2(x - 2)^3, & x \in [2, 3], \\ S_3(x) = a_3 + b_3(x - 3) + c_3(x - 3)^2 + d_3(x - 3)^3, & x \in [3, 7]. \end{cases}$$

Vamos a construir el sistema de ecuaciones en las variables c_0, c_1, c_2, c_3 y c_4 dado por la relación

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) \quad j = 1, 2, 3.$$

esto es

$$\begin{aligned} j = 1 & \rightarrow h_0 c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ j = 2 & \rightarrow h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2 c_3 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ j = 3 & \rightarrow h_2 c_2 + 2(h_2 + h_3)c_3 + h_3 c_4 = \frac{3}{h_3}(a_4 - a_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} h_0 = x_1 - x_0 &= -1 - (-3) = 2 & a_0 = f(x_0) &= y_0 = 5 \\ h_1 = x_2 - x_1 &= 2 - (-1) = 3 & a_1 = f(x_1) &= y_1 = 4 \\ h_2 = x_3 - x_2 &= 3 - 2 = 1 & a_2 = f(x_2) &= y_2 = 12 \\ h_3 = x_4 - x_3 &= 7 - 3 = 4 & a_3 = f(x_3) &= y_3 = 6 \\ & & a_4 = f(x_4) &= y_4 = 0 \end{aligned}$$

así el sistema de ecuaciones esta dado por

$$\begin{aligned} 2c_0 + 10c_1 + 3c_2 &= \frac{19}{2} \\ 3c_1 + 8c_2 + c_3 &= -26 \\ c_2 + 10c_3 + 4c_4 &= \frac{27}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

Hasta acá el procedimiento es el mismo para cada una de las diferentes condiciones de frontera.

★ Spline natural: debe cumplir que $S'''(-3) = 0$ y $S'''(7) = 0$, que se traduce en $c_0 = 0$ y $c_4 = 0$, así (6) se convierte en el sistema

$$\left. \begin{aligned} 10c_1 + 3c_2 &= \frac{19}{2} \\ 3c_1 + 8c_2 + c_3 &= -26 \\ c_2 + 10c_3 &= \frac{27}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &\approx 2.2443 \\ c_2 &\approx -4.3143 \\ c_3 &\approx 1.7814 \end{aligned}$$

reemplazamos en la relación para d_j y b_j , $j = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} d_0 &= \frac{c_1 - c_0}{3h_0} \approx \frac{2.2443}{6} \approx 0.374 \\ d_1 &= \frac{c_2 - c_1}{3h_1} \approx \frac{-4.3143 - 2.2443}{9} \approx -0.7287 \\ d_2 &= \frac{c_3 - c_2}{3h_2} \approx \frac{1.7814 - (-4.3143)}{2} \approx 2.0319 \\ d_3 &= \frac{c_4 - c_3}{3h_3} \approx \frac{0 - 1.7814}{8} \approx -0.1485 \end{aligned} \right. \\ b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) \approx \frac{1}{2}(4 - 5) - \frac{2}{3}(2.2443) \approx -1.9962 \\ b_1 &= \frac{1}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2) \approx \frac{1}{3}(12 - 4) - \frac{3}{3}(2(2.2443) - 4.3143) \approx 2.4924 \\ b_2 &= \frac{1}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{h_2}{3}(2c_2 + c_3) \approx (6 - 12) - \frac{1}{3}(2(-4.3143) + 1.7814) \approx -3.7176 \\ b_3 &= \frac{1}{h_3}(a_4 - a_3) - \frac{h_3}{3}(2c_3 + c_4) \approx \frac{1}{4}(0 - 6) - \frac{4}{3}(2(1.7814)) \approx -6.2505 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

por lo tanto, el spline cúbico natural para los puntos es

$$S(x) = \begin{cases} 5 - 1.9962(x + 3) + 0.374(x + 3)^3, & x \in [-3, -1], \\ 4 + 2.4924(x + 1) + 2.2443(x + 1)^2 - 0.7287(x + 1)^3, & x \in [-1, 2], \\ 12 - 3.7176(x - 2) - 4.3143(x - 2)^2 + 2.0319(x - 2)^3, & x \in [2, 3], \\ 6 - 6.2505(x - 3) + 1.7814(x - 3)^2 - 0.1485(x - 3)^3, & x \in [3, 7]. \end{cases}$$

★ Spline con curvatura conocida: debe cumplir que $S''(-3) = -1$ y $S''(7) = 2$, que se traduce en $2c_0 = -1$ y $2c_4 = 2$, así (6) se convierte en el sistema

$$\left. \begin{aligned} 10c_1 + 3c_2 &= \frac{19}{2} + 1 \\ 3c_1 + 8c_2 + c_3 &= -26 \\ c_2 + 10c_3 &= \frac{27}{2} - 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &\approx 2.34 \\ c_2 &\approx -4.3 \\ c_3 &\approx 1.38 \end{aligned}$$

procediendo como antes para obtener b_j y d_j , $j = 0, 1, 2, 3$, así el spline cúbico con curvatura conocida para los puntos es

$$S(x) = \begin{cases} 5 - 1.3933(x+3) - 0.5(x+3)^2 + 0.4733(x+3)^3, & x \in [-3, -1], \\ 4 + 2.2867(x+1) + 2.34(x+1)^2 - 0.7378(x+1)^3, & x \in [-1, 2], \\ 12 - 3.5933(x-2) - 4.3(x-2)^2 + 1.8933(x-2)^3, & x \in [2, 3] \\ 6 - 6.5133(x-3) + 1.38(x-3)^2 - 0.0317(x-3)^3, & x \in [3, 7]. \end{cases}$$

★ Spline con terminación parabólica: se debe cumplir que S'' es constante en los intervalos extremos, esto es, en los intervalos $[-3, -1]$ y $[3, 7]$, esto es, que S''_0 es constante en $[-3, -1]$ y S''_3 es constante en $[3, 7]$, que se traduce en que $c_0 = c_1$ y $c_4 = c_3$, así (6) se convierte en el sistema

$$\left. \begin{aligned} 12c_1 + 3c_2 &= \frac{19}{2} \\ 3c_1 + 8c_2 + c_3 &= -26 \\ c_2 + 14c_3 &= \frac{27}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &\approx 1.8134 \\ c_2 &\approx -4.0871 \\ c_3 &\approx 1.2562 \end{aligned}$$

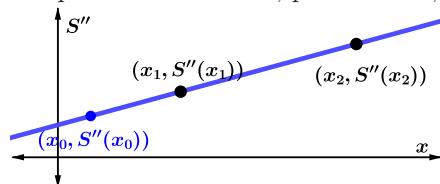
procediendo como antes para obtener b_j y d_j , $j = 0, 1, 2, 3$, así el spline cúbico con terminación parabólica para los puntos es

$$S(x) = \begin{cases} 5 - 4.1269(x+3) + 1.8134(x+3)^2, & x \in [-3, -1], \\ 4 + 3.1269(x+1) + 1.8134(x+1)^2 - 0.6556(x+1)^3, & x \in [-1, 2], \\ 12 - 3.6940(x-2) - 4.0871(x-2)^2 + 1.7811(x-2)^3, & x \in [2, 3], \\ 6 - 6.5249(x-3) + 1.2562(x-3)^2, & x \in [3, 7]. \end{cases}$$

▲ En el caso de tener condición de frontera sujeta, se debe cumplir que $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$, que en términos de las incógnitas se traducen en $b_0 = f'(x_0)$ y $b_n = f'(x_n)$, y por (5) $b_n = b_{n-1} + (c_n + c_{n-1})h_{n-1}$. Así, de la relación obtenida para los b_j se tiene

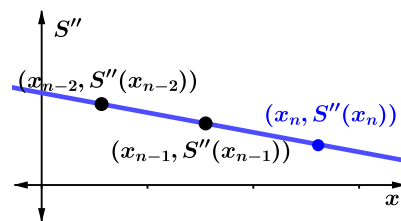
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1) \Rightarrow h_0 c_0 = \frac{3}{2h_0}(a_1 - a_0) - \frac{3}{2}f'(x_0) - \frac{1}{2}h_0 c_1 \\ f'(x_n) &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + (c_n + c_{n-1})h_{n-1} \Rightarrow h_{n-1}c_n = -\frac{3}{2h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) + \frac{3}{2}f'(x_n) - \frac{1}{2}h_{n-1}c_{n-1} \end{aligned}$$

▲ En el caso de tener condición de frontera extrapolada, se debe cumplir que $S''(x_0)$ y $S''(x_n)$ se extrapolan de los valores de $S''(x_1)$, $S''(x_2)$ y $S''(x_{n-2})$, $S''(x_{n-1})$, respectivamente. Dado que cada S_j es un polinomio de grado a lo más 3, S''_j son polinomios lineales, por lo tanto, al extrapolar (igualando pendientes) obtenemos



$$\frac{S''(x_2) - S''(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{S''(x_1) - S''(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow \frac{2c_2 - 2c_1}{h_1} = \frac{2c_1 - 2c_0}{h_0}$$

$$\frac{S''(x_{n-1}) - S''(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} = \frac{S''(x_n) - S''(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \Rightarrow \frac{2c_{n-1} - 2c_{n-2}}{h_{n-2}} = \frac{2c_n - 2c_{n-1}}{h_{n-1}}$$



Ejercicios Identificar los sistemas de ecuaciones $\hat{A}\mathbf{c} = \hat{\mathbf{b}}$ y $\check{A}\mathbf{c} = \check{\mathbf{b}}$ necesarios para obtener el spline cúbico sujeto y extrapolado, respectivamente.