METODOS NUMERICOS 3006907
TALLER 8 Integración - Fórmulas de Newton-Cotes

1. Práctica a mano con los métodos de integración numérica.

   Calcule las siguientes integrales por los métodos solicitados.

   En cada caso compare la cota que proporciona la fórmula teórica del error con el error exacto, puesto que ambas integrales se pueden resolver analíticamente.

Integral	T. S.	T. C. 2	S. S.	S. C. 4
$\int_{0.5}^{1} x^4 dx$				
$\int_{0}^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$				

   Las abreviaturas significan:
   T.S. Trapezoidal simple
   T.C. 2 Trapezoidal compuesta con 2 subintervalos
   S.S. Simpson simple
   S.C. 4 Simpson compuesta con 4 subintervalos (dos dobles.)

2. Rutinas disponibles:

   En la colección de rutinas de nuestra clase están `traprl.m` y `simprl.m`.
   En MATLAB están `integral.m`, `quadgk.m` y `trapz.m`. La primera es una excelente rutina general de integración numérica que permite intervalos infinitos y otras integrales impropias. La segunda es la cuadratura adaptativa de Gauss Kronrod y la tercera es la regla trapezoidal.

3. Práctica con las rutinas de la clase `traprl.m` y `simprl.m`. Recuerden que en la regla de Simpson, el número de subintervalos debe ser un número par. Utilice ambas rutinas para aproximar las siguientes integrales con el número de subintervalos dado:

   a) $\int_1^3 \frac{x}{x^2+4} dx, \quad n = 8$

   b) $\int_e^{e+2} \frac{1}{x \ln x} dx, \quad n = 8$

4. Un carro recorre un trayecto E de carretera en $84s$. La velocidad del carro se mide cada 6 segundos por medio de una pistola-radar y está dada en las siguientes tablas en metros/segundos:

Tiempo	0	6	12	18	24	30	36	42
Velocidad	37	40	44	46	44	39	36	32

Tiempo	48	54	60	66	72	78	84
Velocidad	29	25	23	26	31	34	36

   Aproxime la longitud del trayecto E o sea la integral $\int_0^{90} v(t)dt$ por medio de la regla de Simpson.

5. Encuentre el grado de precisión para cada una de las siguientes reglas de integración para la integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

a) $f(-1)+f(1)$

b) $\frac{2}{3}\left(f(-1)+f(0)+f(1)\right)$

c) $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

6. Calcule un valor aproximado para $\ln 2$ aplicando las fórmulas del ejercicio anterior a

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+1}$$

Nota: Se necesita hacer un cambio de variable y por tanto un cambio de integral, ya que las fórmulas de la pregunta anterior son válidas únicamente en el intervalo $[-1,1]$.

7. Al aplicar la regla del trapecio para aproximar $\int_0^2 f(x)\,dx$ se obtiene el valor 4 y al aplicar la regla de Simpson se obtiene el valor 2. ¿Cuánto vale $f(1)$?

8. Se desea aproximar la integral $\int_0^1 f(x)dx$. Determine las constantes w_0, w_1 y x_1 de manera que la regla de cuadratura

$$Q[f]=w_0 f(0)+w_1 f(x_1)$$

sea exacta en el intervalo $[0,1]$ para polinomios de grado ≤ 2. El punto x_1 está en el intervalo $[0,1]$.

9. Determine valores de A, B y C que hagan que la expresión

$$Af(0)+Bf(1)+Cf(2)$$

sea una fórmula de cuadratura para la integral

$$\int_0^2 xf(x)\,dx$$

que es exacta para todos los polinomios de grado tan alto como sea posible. ¿Cuál es el grado máximo?

10. La regla del punto medio con que se aproxima $\int_{-1}^1 f(x)dx$ da el valor 12, la regla compuesta del punto medio con $n=2$ da 5 y la regla compuesta de Simpson con $n=2$ da 6. Aplique el hecho de que $f(-1)=f(1)$ y $f(-0.5)=f(0.5)-1$ para determinar $f(-1), f(-0.5), f(0), f(0.5)$y $f(1)$.

11. En cada caso determine el mínimo número n de subintervalos que se requieren para aproximar

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

con un error menor a 10^{-5} y calcule la aproximación.

a) La regla del trapecio.

b) La regla de Simpson.

c) La regla del punto medio.

12. Compruebe que la siguiente regla de integración numérica es exacta para polinomios de grado ≤ 4 :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \text{ se aproxima con } \frac{1}{90}\left[7f(0)+32f\left(\frac{1}{4}\right)+12f\left(\frac{1}{2}\right)+32f\left(\frac{3}{4}\right)+7f(1)\right].$$

13. Calcule un valor aproximado para $\ln 2$ aplicando la fórmula del ejercicio anterior a

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+1}$$

14. Encuentre la fórmula de cuadratura

$$A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

que es exacta para calcular $\int_0^1 f(x)\, dx$, donde $f(x) = ae^x + b\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

15. Ejercicio de programación. Usamos la notación de Burden y Faires, es decir, la fórmula abierta de Newton-Cotes para $n = 2$ junto con el error está dada por

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)dx = \frac{4h}{3}\left(2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)\right) + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(z)$$

donde z está entre x_{-1} y x_3. Además, $x_{-1} = a, x_3 = b, h = \frac{b-a}{4}$.

Prepare una rutina para aproximar el valor de la integral $\int_0^1 x^{1/3}dx$ utilizando la fórmula abierta de Newton-Cotes para $n = 2$.