taller # 8 $\qquad f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ ①

3) $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{x}{x^2+4}\, dx$

exactamente: $I = \left(\dfrac{\ln(x^2+4)}{2} \right]_1^3 = \dfrac{\ln(13) - \ln(5)}{2}$

$I \simeq 0.4777557$

Fórmula trapezoidal simple

$$I \simeq \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = \frac{3-1}{2}\left(f(1) + f(3)\right)$$

$$I \simeq \frac{1}{5} + \frac{3}{13} = 0.4307692$$

Fórmula de Simpson $\frac{1}{3}$:

$$I \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$I \simeq \frac{2}{6}\left(f(1) + 4f(2) + f(3)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + 4\left[\frac{2}{8}\right] + \frac{3}{13}\right)$$

$$I \simeq 0.4769238$$

Calculemos una mejor aproximación usando la regla del trapecio compuesto, procurando un error menor o igual que 10^{-5}.

término del error: $-\frac{h^2}{12}(b-a)\,f''(\xi)$

$$f''(x) = -\frac{2x(12-x^2)}{(x^2+4)^3}$$

{ estimativo de el máx $|f''(x)|$

gráficamente: $|f''(x)| \le 0.177 \quad x\in[1,3]$

Así consideramos la desigualdad

$$\frac{h^2}{12}(2)\,0.177 \le 10^{-5}$$

$$h^2 \le \frac{6}{0.177}10^{-5} \quad \text{y} \quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}$$

$$\frac{2^2}{n^2} \le \frac{6}{0.177}\,\frac{1}{10^5}$$

$$n^2 \ge \frac{0.177(10^5)(8)}{6} = 23\,600$$

$n \ge 153,6 \longrightarrow$ escogemos $\boxed{n=154}$

Calculemos otra opción usando la regla de Simpson compuesta ③

término del error

$$-\frac{h^4 (b-a)}{180} f^{(4)}(\xi)$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{24\left(-x^4+40x^2-80\right)}{\left(x^2+4\right)^5}$$

gráficamente $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 0.32$.

Consideramos entonces la desigualdad.

$$\frac{h^4}{180}(2)0.32 \leq 10^{-5}$$

$$h = \frac{2}{n}$$

$$h^4 \leq \frac{10^{-5}(90)}{0.32}$$

$$\frac{2^4}{n^4} \leq \frac{10^{-5}(90)}{0.32}$$

$$n^4 \geq \frac{16(0.32)10^5}{90} = 5688,88$$

$n \geq 8.68 \longrightarrow$ escogemos $\boxed{n=10}$

exacto: $I = 0.4777557$

Regla Compuesta del trapecio 0.4777536

Regla Compuesta de Simpson 0.4777553

Usemos ahora cuadratura de Gauss-Legendre

<u>Primer paso:</u> hacer un cambio de variables para integrar sobre $[-1, 1]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}\right) dy$$

en el ejemplo: $a=1$, $b=3$

$$\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}\right) dy = \boxed{\int_{-1}^{1} f(y+2)\,dy}$$

Sigue que $\qquad f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ 5

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{y+2}{(y+2)^2+4}\, dy \quad \Bigg| \quad g(y) = \frac{y+2}{(y+2)^2+4}$$

fórmula de gauss-Legendre dos nodos

$$I \simeq g\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$I \simeq \frac{\frac{-\sqrt{3}}{3}+2}{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+2\right)^2+4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)^2+4}$$

$$I \simeq 0.2361663 + 0.2421699$$

$$I \simeq 0.4783362$$

fórmula de Gauss-Legendre, tres nodos

$$I \simeq \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{y+2}{(y+2)^2 + 4}\, dy$$

$$I \simeq \frac{5}{9}(0.2227358) + \frac{8}{9}(0.25) \cdots$$

$$+ \frac{5}{9}(0.2371777)$$

$$I \simeq 0.4777294$$

Ejemplo: Integral impropia

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Sen}(x)}{x^4}\, dx$$

$\boxed{\text{Paso 1:}}$ Cambio de variable: $y = \frac{1}{x}$

$$\frac{\operatorname{Sen}(x)}{x^4} = y^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$dy = -x^{-2}\, dx \Longrightarrow dx = -x^2\, dy$$

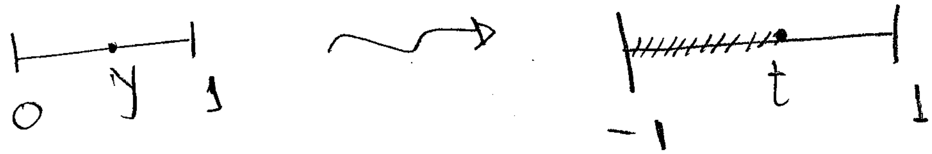
$$dx = -\frac{1}{y^2}\, dy$$

$$I = \int_{1}^{0} y^4 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{-1}{y^2}\right) dy$$

$$I = \int_{0}^{1} y^2 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{y}\right) dy$$

integral impropia Convergente

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Otro cambio de variable.



$$\frac{t+1}{2} = \frac{y-0}{1} \rightarrow \boxed{t = 2y-1}$$

$$\int_0^1 y^2 \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{y}\right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 \operatorname{Sen}\left(\frac{2}{t+1}\right) \frac{dt}{2}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{8} \operatorname{Sen}\left(\frac{2}{t+1}\right) dt = \int_{-1}^{1} g(t)\, dt$$

Paso 3 Cuadratura Gauss-Legendre (tres nodos)

$$I \approx \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$I \approx 0.3003929$$

usando Symbolab: $I \approx 0.28652$