

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Объединенный институт высоких температур РАН (ОИВТ РАН)

На правах рукописи

Паршиков Анатолий Николаевич

**Численный метод SPH, использующий  
соотношения распада разрывов, и его применение в  
механике деформируемых гетерогенных сред**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук

Москва – 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
----------------------	----------

### **ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ РАСПАДА РАЗРЫВОВ В ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ SPH.....19**

1.1. Стандартная формулировка метода SPH .....	22
1.2. Модифицированные уравнения SPH .....	24
1.3. Уравнения SPH для упругой среды.....	27
1.4. Теплопроводность в SPH.....	30
1.5. Алгоритм решения трёхмерных упругопластических задач .....	32

### **ГЛАВА 2. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА SPH39**

2.1. Расчёт распада разрыва в упругопластической среде .....	39
2.2. Расчёт распада разрыва в газе.....	40
2.3. Расчёт взрывной волны .....	43
2.4. Расчёт сдвигового течения в жидкости .....	45
2.5. Расчёт распада температурного разрыва .....	47
2.6. Расчёт соударения резиновых цилиндров .....	49
2.7. Расчёт вращения упругой пластины .....	51
2.8. Расчёт разрушения хрупких материалов (стёкол) по волновой модели при ударном сжатии .....	52
2.9. Расчёт разрушения хрупких материалов по модели Джонсона-Холмквиста (JH-2).....	69
2.10. Сравнение натурных экспериментов и результатов моделирования, проведенного разработанным методом SPH .....	82

### **ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОВОЛНОВОГО НАГРУЖЕНИЯ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ .....98**

3.1. Формулировка задачи и исходные данные.....	99
3.2. Динамическая релаксация .....	101

3.3. Термическая релаксация.....	104
3.4. Эволюция структуры ударной волны .....	107
3.5. Расчетное построение адиабаты Гюгонио.....	111
<b>ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОВОЛНОВОГО НАГРУЖЕНИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД.....</b>	<b>118</b>
4.1. Постановка задачи.....	122
4.2. Твёрдая несущая фаза с жидкими включениями.....	125
4.3 Жидкая несущая фаза с твёрдыми включениями .....	130
4.4. Масштабный фактор .....	135
<b>ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТОНАЦИИ СМЕСЕВЫХ И ПОРИСТЫХ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ.....</b>	<b>139</b>
5.1. Моделирование детонации пористого взрывчатого вещества .....	139
5.2. Детонация взрывчатого вещества с включениями парафина.....	159
5.3. Моделирование скользящей детонации в мелкодисперсной смеси взрывчатых и инертных веществ.....	166
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>179</b>
<b>СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....</b>	<b>182</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>184</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ.....</b>	<b>200</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Численные методы решения уравнений динамики сплошных сред являются практически единственным инструментом для исследования процессов, происходящих в структуре гетерогенных сред при ударно-волновом нагружении, так как аналитического решения подобные задачи, как правило, не имеют. Перечень неоднородных сред, подвергаемых ударно-волновому воздействию, достаточно обширен – это керамики, материалы порошковой металлургии, пространственно-армированные композиционные материалы, компоненты конструкции перспективных энергетических реакторов, вспененные и волокнистые материалы, смеси взрывчатых веществ с инертными добавками. К неоднородным (пористым) средам можно отнести также и гомогенные материалы, находящиеся в режиме объемного вскипания.

Ударное воздействие на гетерогенный материал приводит к сложному силовому взаимодействию между компонентами, составляющими материал, к процессу волнообменов на масштабе структуры материала (или в *мезоструктуре*) и вызывает интегральный отклик, доступный для экспериментальной регистрации в виде профилей давления и перемещений свободных границ испытуемого образца. Адекватная трактовка результатов таких экспериментов затруднительна без математического моделирования процессов, происходящих в мезоструктуре гетерогенной среды. Альтернативными мезомеханическому рассмотрению гетерогенной среды являются два подхода: первый предполагает, что гетерогенная среда эквивалентна (в смысле физико-механических свойств) некоторой однородной среде [1,2], для которой вводятся эффективные упругие характеристики, связывающие усреднённые компоненты напряжений и деформаций через матрицу жёсткости. Компоненты матрицы жёсткости вычисляются через технические постоянные материалов, составляющих гетерогенную среду (через модули упругости, сдвига, коэффициенты Пуассона) в зависимости от объёмного коэффициента и схемы армирования. После вычисления

эффективных упругих характеристик расчёт напряжённо-деформированного состояния этой однородной анизотропной среды проводится в рамках обобщённого закона Гука. Основную трудность при данном подходе представляет проблема осреднения (то есть определение эффективных характеристик), которая решается различными способами: например, методом интегральных сечений [3], с использованием симметрии трансляционного элемента [4], дифференциальным и самосогласованным методами [5]. Подобный подход к моделированию гетерогенных сред справедлив только при низких уровнях ударной нагрузки, когда применимо односкоростное приближение.

При значительной разнице в скоростях компонент гетерогенной среды справедливо многоскоростное приближение. В этом случае гетерогенная среда представляется в виде нескольких взаимопроникающих континуумов, к каждому из которых применимы уравнения механики сплошных сред. Взаимодействие между континуумами учитывается с помощью обменных членов в правых частях этих уравнений. Сложность представляет построение обменных членов, хотя это бесспорно привлекательный подход к моделированию гетерогенных сред. Но в научной литературе отсутствуют примеры такого рода расчётов реальных материалов, приемлемые для практического использования. Обменные члены удаётся построить, как правило, только для простейших случаев взаимодействия компонент среды.

Мезомеханический подход к моделированию напряжённо-деформированного состояния гетерогенной среды заключается в явном определении внутренней структуры материала, что даёт возможность, используя уравнения механики сплошных сред, отказаться от осреднения и в вычислительном эксперименте рассчитать силовое взаимодействие между составными фазами материала [6], а также исследовать мелкомасштабные эффекты, обусловленные структурой фаз и межфазными взаимодействиями. Этот принцип мезомеханики заложен в основу диссертации.

Диссертация содержит описание разработанного автором численного метода «гладких частиц», или SPH (Smooth Particle Hydrodynamics), использующего соотношения распада разрывов, и результаты применения этого метода к решению задач механики гетерогенных сред. Показано успешное применение разработанного метода SPH к моделированию ударного воздействия на следующие материалы:

- на пористый однокомпонентный материал;
- на двухкомпонентный материал без пор;
- на материал, одной из компонент которого является взрывчатое вещество, детонирующее с выделением энергии.

Подобный выбор материалов объясняется тем, что к перечисленным типам материалов относится большинство гетерогенных сред, имеющих практическую значимость.

### **Актуальность темы.**

Поведение гетерогенных сред при динамическом нагружении описывается различными физическими моделями. Пористый материал, в частности, в области высоких давлений хорошо моделируется осредненными уравнениями сохранения с эффективным уравнением состояния [1], при этом прочность, а также теплофизические свойства должны определяться экспериментально. На атомистическом уровне молекулярная динамика является мощным инструментом для моделирования поведения пустот при нагрузке с большими напряжениями в материале [8]. Но из-за ограниченной производительности компьютера молекулярная динамика встречается с трудностями при моделировании течений на таких пространственных и временных масштабах, какие реализуются в эксперименте. Альтернативная методика, как отмечалось выше, состоит в использовании мезомеханического подхода к численному моделированию [9]–[11], то есть в рамках механики сплошных сред, но с учётом структуры материала. Структура гетерогенной среды задаётся (при лагранжевом формализме описания) такой конфигурацией

расчетных подобластей на поле мезочастиц (для метода частиц), какая соответствует реальной структуре моделируемого материала. Каждая из мезочастиц в этом случае является однокомпонентной, и границы раздела компонент отслеживаются автоматически. Для расчёта передачи импульса и энергии через контактные границы не требуется дополнительного описания. Если необходимо учитывать адгезионные явления и поверхностное натяжение на границах раздела компонент, то для описания взаимодействия мезочастиц необходимы соответствующие модели. Интегральное проявление всех упомянутых физико-механических процессов взаимодействия мезочастиц формирует специфику, характерную для отклика гетерогенной среды на ударно-волновое воздействие. Таким образом, при мезомеханическом описании среды реализуется многоуровневый подход [12] к моделированию процессов в гетерогенной среде.

Частным случаем гетерогенных сред, как уже сказано выше, являются пористые металлы. Интерес к ударному сжатию пористых металлов был изначально вызван потребностью в данных о термодинамических свойствах вещества при высоких давлениях и температурах [13]. Различные металлы были протестированы в ГПа-ТПа диапазонах давлений [14] и получены пористые адиабаты Гюгонио. В результате были построены и верифицированы широкодиапазонные уравнения состояния. Значительное внимание к пористым материалам проявляется в связи с защитой от высокоскоростного удара [15]–[17]. При этом представляет интерес выявить основные физические механизмы поглощения энергии в пористых материалах. Зельдович и Райзер [13] показали, что схлопывание пор отвечает за повышенную диссипацию энергии при сжатии пористого материала. В первых экспериментальных исследованиях Боуда [18]–[19] было установлено, что при слабой динамической нагрузке уплотнение пористых металлов происходит в многоволновом режиме, с одной или несколькими волнами-предвестниками. Эти предвестники являются упругими волнами и волнами разрушения. Адиабаты Гюгонио были определены в области неполного сжатия. Структура течения вещества за ударной волной в

алюминии наблюдалась экспериментально в работах [20]–[21]. Временные профили напряжений, измеренные за ударной волной, характеризуются затухающими осцилляциями, порожденными схлопыванием пор. Мезомеханическое моделирование в двумерном приближении, осуществленное Шуваловым [11] для смеси гранитных зерен и воздуха, показывает аналогичный эффект. Кумулятивные явления, развивающиеся в ходе схлопывания пор, вызывают сильные локальные неоднородности распределения температуры в уплотненном материале [22].

Одним из важных применений мезомеханического моделирования к ударно-волновому нагружению пористой среды является возможность построить расчётным путём адиабату Гюгонио в области неполного схлопывания пор, по известным ударным адиабатам сплошных веществ, которые измерены экспериментально для большого числа веществ и материалов [23]. В области высоких давлений, когда изначально пористый материал становится сплошным, расчёт ударной адиабаты достаточно проработан теоретически [24,25], но в области неполного схлопывания пор результат достигнут с помощью численного мезомеханического моделирования [26].

Моделирование прохождения ударных волн через многокомпонентные среды представляет собою другой обширный круг задач, решение которых важно для практического применения. В их число входит исследование процессов дисперсии ударных волн и диссиpации энергии ударного воздействия в композиционных материалах [27]-[31], являющихся основными конструкционными материалами в аэрокосмической технике. Эта задача своим формализмом постановки близка к задаче по моделированию прохождения ударной волны сквозь компоненты устройств перспективных термоядерных реакторов взрывного типа [33]-[37], где элементом конструкции является пористая стенка, насыщенная жидким металлическим теплоносителем.

Моделирование процессов, происходящих при детонации низкоплотных взрывчатых веществ и смесей из взрывчатого вещества с инертным материалом,

является крайне важным для технологии штамповки взрывом изделий из материалов порошковой металлургии, которые обрабатывать иным способом не представляется пока возможным. При изучении детонации неоднородных взрывчатых веществ (в частности – пористых и гранулированных) накоплен и обобщён значительный экспериментальный материал [38]. Получены эмпирические зависимости параметров детонации от плотности и состава взрывчатого вещества, которые пригодны в большинстве инженерных приложений. Для численного моделирования детонации гетерогенных взрывчатых веществ разработаны многоскоростные (множижидкостные) модели [39]-[41], теоретические основы которых хорошо развиты [42]. Но в последнее время вопрос интерес к изучению явления детонации на мезомасштабе взрывчатого вещества [43,44], что связано с необходимостью интерпретации экспериментов по детонации смесевых, насыпных, пористых, флегматизированных, агатированных и содержащих тяжёлые инертные добавки взрывчатых веществ [45].

Интерпретация результатов экспериментов по ударному воздействию на гетерогенные среды требует реалистичного моделирования с учётом мезоструктуры этих сред. Для успешного решения многих прикладных задач достаточно вычислять эффективные характеристики материала [46-48], но при изучении интенсивных процессов, соизмеримых по масштабу со структурными неоднородностями гетерогенной среды, необходимо использовать мезомеханический подход. Это позволяет исследовать непосредственно из результатов численного моделирования те физические особенности отклика гетерогенной среды на воздействие, какие не могут быть получены с помощью смесевых моделей, заменяющих структурно-неоднородную среду однородной средой с эффективными параметрами. Необходимо заметить также, что если ударное воздействие на неоднородную среду приводит к течениям с большими локальными относительными перемещениями компонент [27]-[30], это делает затруднительным даже применение лагранжевых конечно-разностных методов на треугольных адаптирующихся сетках. Аналогично, если рассматривается

детонация низкоплотной среды или газа в области со сложной геометрией [49,50], это также приводит к неприемлемым для сеточных методов локальным искажениям сетки.

Наиболее приемлемым для решения задач мезомеханики, в которых рассматриваются гидродинамические процессы на масштабе структуры среды, является метод «гладких частиц» SPH (Smoothened Particle Hydrodynamics) [51,52]. Метод SPH интенсивно применяется для решения многомерных задач гидродинамики, и к его бесспорным техническим достоинствам следует отнести высокую простоту алгоритмической реализации при минимальном размере программного кода. Отсутствие расчетной сетки позволяет методу (в рамках лагранжева формализма) естественным образом рассчитывать произвольные вращательные и сдвиговые течения, распад односвязных и слияние многосвязных расчетных областей. Более того, свободно-лагранжевы методы дают физически правильную картину эволюции течения в тех случаях, когда применение сеточных лагранжевых методов становится в принципе невозможным вследствие неприемлемых искажений расчётной сетки. Недостатком метода SPH, использующего искусственную вязкость (он называется ниже «стандартным методом»), является погрешность расчёта в окрестности контактных разрывов плотности и границ раздела компонент.

Таким образом, для задач мезомеханического моделирования ударно-волновых процессов в гетерогенных средах актуальной проблемой является повышение точности метода SPH в окрестности контактных границ [53].

В диссертационной работе рассматривается разработанный автором вариант численного метода SPH [54]-[59] и его тестирование на основе аналитических решений и данных экспериментов [60]-[62]. Показано применение разработанного метода к решению задач ударно-волнового нагружения пористого алюминия [22], задач ударно-волнового нагружения смеси из двух металлов [37], задач распространения детонации в пористом взрывчатом веществе (тэн) и во взрывчатом веществе с примесью инертного материала (парафин) [63]-[65].

**Целью работы** являлись модификация и применение вычислительного метода SPH к моделированию динамики ударно-волновых процессов в гетерогенных средах, задаваемых мезоструктурой среды и физико-механическими характеристиками твёрдых и жидких компонент. Исследовались процессы в мезоструктуре вышеперечисленных сред и их интегральный отклик на ударно-волновое воздействие.

### **Научная новизна работы.**

Впервые применено решение задач распада произвольного разрыва и температурного разрыва к среде из «гладких частиц» в методе SPH, с целью описания их механического и теплового взаимодействия. Впервые получена система уравнений численного метода SPH, основанная на решении задач распада разрывов. Разработанный метод обладает более высокой точностью в окрестностях контактных границ, чем стандартный метод SPH, использующий искусственную вязкость. Разработанный метод обеспечивает монотонность решения в окрестности контактных границ и предназначен для численного моделирования ударно-волновых процессов на масштабе мезоструктуры среды с большим числом контактных разрывов плотности. Созданы алгоритмы и программа, с помощью которой успешно проводилось мезомеханическое моделирование ударно-волновых явлений в гетерогенных средах, а также решалась задача волнового разрушения стекла. Были обнаружены двухволновые и трёхволновые структуры при разрушении стеклянных пластин, построена ударная адиабата пористого алюминия в области неполного схлопывания пор, по известной адиабате сплошного алюминия. В пористом взрывчатом веществе, при сопоставимых размерах пор и зоны разложения ВВ, наблюдалось инициирование детонации в горячих пятнах, образующихся на поверхности поры при ударе кумулятивной струи, состоящей из продуктов детонации или непрореагировавшего взрывчатого вещества. Получено хорошее согласование вычисленной скорости детонационной волны в пористом PETN (тэн) с результатами экспериментов. Была решена задача о скользящей

детонации в слое порошкообразного взрывчатого вещества насыпной плотности, смешанного с инертным порошком. Полученные из двумерного моделирования данные удовлетворительно описывают экспериментальные результаты.

### **Практическая значимость работы.**

Метод SPH, использующий соотношения распада разрывов, реализован в виде свободно распространяемого комплекта компьютерных программ для ЭВМ, с интерфейсом пользователя, на языке ФОРТРАН-90. Этот комплект может применяться:

- в учебных и исследовательских целях, для изучения отклика гетерогенных сред на ударно-волновое нагружение;
- для решения инженерных задач по оценке стойкости броневой защиты и стёкол к ударному воздействию;
- при проектировании низкоплотных взрывчатых веществ с заданными параметрами, необходимыми для решения технологических задач штамповки взрывом.

**Результаты исследований обобщены в виде следующих положений, выносимых на защиту:**

1. Получены уравнения численного метода SPH, основанные на решении задачи распада произвольного разрыва. Модифицированный метод не использует искусственной вязкости и обладает монотонностью и более высокой точностью в окрестности контактных разрывов по сравнению со стандартным методом.

2. Получено уравнение метода SPH, основанное на решении задачи о распаде температурного разрыва, обладающее более высокой точностью в окрестности контактных разрывов по сравнению со стандартным методом для сред с теплопроводностью.

3. Построена модель хрупкого разрушения стёкол в волне разрушения и расчётным путём обнаружены пространственные волновые конфигурации, состоящие из волн разрушения.

4. Разработан мезомеханический подход к моделированию гетерогенных сред с помощью метода SPH, позволяющий путём вычислительного эксперимента рассчитать ударную адиабату пористого материала в области неполного схлопывания пор, если известна ударная адиабата сплошного вещества, составляющего пространственную мезоструктуру данного материала.

5. Установлено, что при мезомеханическом подходе к описанию структуры среды распространение детонации в пористом взрывчатом веществе успешно моделируется с помощью макрокинетического уравнения горения и уравнения состояния для взрывчатого вещества нормальной плотности, составляющего пространственную мезоструктуру пористого вещества.

**Достоверность результатов** подтверждается их соответствием аналитическим решениям и экспериментальным данным.

**Личный вклад автора.** Автором впервые предложен и создан вариант численного метода SPH, основанный на решении задач распада разрывов (приоритет подтверждён публикациями в препринте ОИВТ РАН № 2-414 от 1998 года, в ЖВМиМФ, Т.39. №7 от 1999 года, в Journal of Computational Physics, V. 180, от 2002 года). Все представленные результаты получены автором лично.

**Апробация работы.** Основные результаты исследований были доложены и обсуждались на:

- международной конференции по гиперскоростному удару HyperVelocity Impact Symposium (Oct. 17-19, 1994, Santa Fe, New Mexico, USA);
- 24<sup>th</sup> International Symposium of Shock Waves (Beijing, China, July 11-16, 2004);
- международной конференции по гиперскоростному удару HyperVelocity Impact Symposium (Oct. 10-14, 2005, Lake Tahoe, USA);

- международной конференции «Физика экстремальных состояний вещества» (Эльбрус, март 1-5, 2007);
- 2-й, 3-й, 4-й и 5-й Всероссийских школах-семинарах «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем», АФМ-2008–АФМ-2011 (Москва, 2008-2011);
- X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (авг. 24-30, 2011, Нижний Новгород).
- международной конференции «Разностные схемы и их приложения», посвящённой 90-летию профессора В.С.Рябенького, 27-31 мая, 2013, Москва.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 27 печатных работ, из них 14 в ведущих научных рецензируемых журналах, рекомендованных Перечнем ВАК РФ для публикации результатов докторских диссертаций.

### **Структура и объём работы.**

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения; содержит 202 страницы, включая 85 рисунков, 13 таблиц, список литературы из 162 наименований и одно приложение.

### **Содержание работы.**

**Во введении** обоснованы актуальность, научная новизна и практическая значимость вопросов, рассмотренных в диссертационной работе. Сформулированы цели работы и положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** рассмотрена предложенная автором модификация метода «гладких частиц» SPH, использующая решение задачи распада произвольного разрыва и распада температурного разрыва. Метод обобщён на случай моделирования пространственных упругопластических течений, что позволило создать код без использования искусственной вязкости и обеспечить высокую точность и монотонность решения вблизи контактной границы раздела различных компонент гетерогенной среды.

В последующих главах рассматриваются результаты решений конкретных задач, проведенных с помощью полученного метода SPH.

**Во второй главе** приведены тестовые расчеты и сравнение разработанного метода со стандартным методом SPH, использующим искусственную вязкость. Как валидация метода представлены результаты исследований по моделированию разрушения хрупких материалов при ударном нагружении и результаты по численному моделированию взаимодействия ударников с препятствиями конечной толщины при средних и высоких скоростях соударения.

**В третьей главе** представлены результаты по мезомеханическому моделированию ударного нагружения пористого алюминия. Эта задача решена для термо-упруго-пластической среды в плоской геометрии. Периодическая структура пористого материала задавалась явно и обладала свойствами сплошного алюминия. Ударное сжатие моделировалось путем соударения пористой пластины и жесткой стенки. С помощью рассчитанных полей течений материала показаны основные моменты динамики нагружения: многоволновая ударная структура при низкой интенсивности удара, схлопывание пор в сильной ударной волне, формирование сжатия материала в два этапа во фронте, образование осцилляций давления за ударным фронтом и влияние теплопроводности на затухание колебаний. Вычисленная адиабата Гюгонио пористого алюминия хорошо согласуется с экспериментальными данными.

**В четвёртой главе** проведено численное моделирование структуры ударных волн, распространяющихся в гетерогенной среде, состоящей из двух компонент, несущей и примесной. В качестве компонент выбраны вольфрам, литий и свинец, чтобы рассмотреть поведение среды при разных сочетаниях плотности и акустической жёсткости несущей и примесной фаз. Металлическая несущая фаза образует ячеистую мезоструктуру, ячейки которой заполнены другим металлом. Задача решалась в плоской двумерной постановке в термо-упруго-пластическом приближении. Термодинамические свойства компонент описываются уравнением состояния Грюнайзена и адиабатой Гюгонио.

Проведенные расчеты показали, что течение за фронтом ударной волны характеризуется пульсациями в полях давления, температуры и скорости. Проанализирован физический эффект скоростной неравновесности, ответственный за релаксацию полей гидродинамических параметров к установившимся значениям на фронте ударного импульса, без возбуждения колебаний за фронтом.

**В пятой главе** представлены результаты численного моделирования мезоструктуры течения за фронтом детонационной волны, распространяющейся по гетерогенному взрывчатому веществу (тэн) и содержащему регулярные включения флегматизатора (парафин). Частицы флегматизатора рассматривались как инертные включения, не вступающие в химическую реакцию с продуктами детонации. В использованной расчётной модели был разрешен только обмен импульсом и механической энергией между продуктами детонации и включениями. Целью работы являлось моделирование на мелкомасштабном уровне гидродинамических процессов взаимодействия продуктов детонации взрывчатого вещества с частицами флегматизатора и определение влияния сжимаемой инертной добавки на распространение детонационной волны. Задача решалась в плоской двумерной постановке без рассмотрения кинетики разложения взрывчатого вещества в зоне реакции. Проведено также численное моделирование мезоструктуры течения в детонационной волне, распространяющейся в пористом взрывчатом веществе PETN (тэн). Задача решалась в плоской двумерной постановке. Для конденсированного состояния и продуктов детонации использовалось известное уравнение состояния Джонса-Уилкинса-Ли (JWL) с константами, взятыми для взрывчатого вещества нормальной плотности. Разложение взрывчатого вещества моделировалось с помощью макрокинетического уравнения «ignition and growth», согласованного с уравнениями состояния JWL. Для валидации метода было проведено также численное моделирование эффекта кумуляции продуктов взрыва в микроканале взрывчатого вещества (тэн). Получено согласие с экспериментами по вхождению детонационной

волны в микроканал взрывчатого вещества. Было установлено, что структура течения в детонационной волне, распространяющейся в пористом взрывчатом веществе, существенно зависит от масштаба пор. При сопоставимых размерах пор и зоны разложения взрывчатого вещества наблюдается инициирование детонации в горячих пятнах, образующихся на поверхности поры при ударе кумулятивной струи продуктов детонации или струи непрореагировавшего взрывчатого вещества. Получено хорошее согласование расчётных данных для зависимости скорости детонационной волны от средней плотности в пористом тэне с данными экспериментов, а также расчетов по модели Зельдовича-Неймана-Дёринга при различных начальных плотностях. Была решена задача о скользящей детонации в слоях гетерогенного взрывчатого вещества насыпной плотности, состоящем из частиц гексогена (RDX) и соли (NaCl). Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными.

**В заключении,** на основании обобщения проведенных вычислительных экспериментов излагаются вытекающие из них выводы о применимости разработанного метода SPH, использующего соотношения распада разрывов, к решению задач вычислительной мезомеханики. Сформулированы основные результаты, полученные при решении этих задач методом SPH, благодаря принятому в диссертационной работе подходу к определению мезоструктуры гетерогенной среды как совокупности пространственных областей, заполненных различными материалами.

**Благодарности.** Работа выполнена в Объединенном институте высоких температур РАН (ОИВТ РАН) в период с 1998 по 2013 г.г. при поддержке:

- программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Вещество при высоких плотностях энергии» (координатор – академик В.Е. Фортов);
- Межсекционной программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН «Интегрированные модели физической механики» (координатор – академик Д.М. Климов);
- программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» (координатор – академик С.В. Емельянов);
- U. S. Civilian Research and Development Foundation, Grant No. RE2-2481-MO-02.

# ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ РАСПАДА РАЗРЫВОВ В ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ SPH

Метод SPH (Smooth Particle Hydrodynamics, или метод сглаженных частиц) является свободно-лагранжевым численным методом для решения уравнений механики сплошной среды. Разностная сетка в методе SPH отсутствует, сплошная среда заменяется дискретной системой расположенных в пространстве сглаженных частиц, допускающих произвольную связность друг с другом. Переход от континуума к дискретному представлению среды в виде сглаженных частиц предполагает, что вместо непрерывной функции  $f(\vec{r})$ , характеризующей какую-либо полевую величину (давление, плотность, энергию, скорость), вводится в рассмотрение её дискретный аналог, то есть дискретная функция  $f_i$ . Кусочно-постоянная величина  $f_i$  определяется для каждой частицы  $i$  через сумму  $N$  величин  $f_j$  из частиц окружения  $j$ , лежащих вокруг частицы  $i$  в соответствии с дистанцией сглаживания  $h$ , по уравнению:

$$f_i = \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j}{\rho_j} W_{ij} \quad (1.1)$$

где  $W_{ij} = W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, h)$  есть весовая (сглаживающая) функция, или ядро;  $m_j$  есть масса частицы  $j$ ;  $\rho_j$  есть плотность вещества в частице  $j$ . Из (1.1) легко заметить, что

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (1.2)$$

то есть ядро имеет размерность, обратную объёму и на ядро накладывается ограничение  $\int W(\vec{r}, h) d\vec{r} = 1$ . При  $h \rightarrow 0$  сглаживающая функция превращается в  $\delta$ -функцию, то есть  $\lim_{h \rightarrow 0} \int W(\vec{r}, h) d\vec{r} = \delta(\vec{r})$ . Согласно свойствам  $\delta$ -функций, для вычисления производных от  $f(\vec{r})$  вместо непосредственного дифференцирования непрерывной функции  $f(\vec{r})$  нужно знать дискретное значение  $f_i$  в частице и дифференцировать функцию  $W_{ij}$  [66]:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i^s} = \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j}{\rho_j} W'_{ij} \frac{x_i^s - x_j^s}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad s = x, y, z \quad (1.3)$$

В этом заключается принцип бессеточного метода SPH. В практических применениях используют различные виды сглаживающих функций [51]. В диссертации в качестве ядра был выбран кубический сплайн [67]:

$$W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, h) = \begin{cases} (1 - 3\phi^2/2 + 3\phi^3/4)/N, & 0 < \phi < 1 \\ ((2 - \phi)^3/4)/N, & 1 \leq \phi < 2 \\ 0, & \phi \geq 2 \end{cases} \quad (1.4)$$

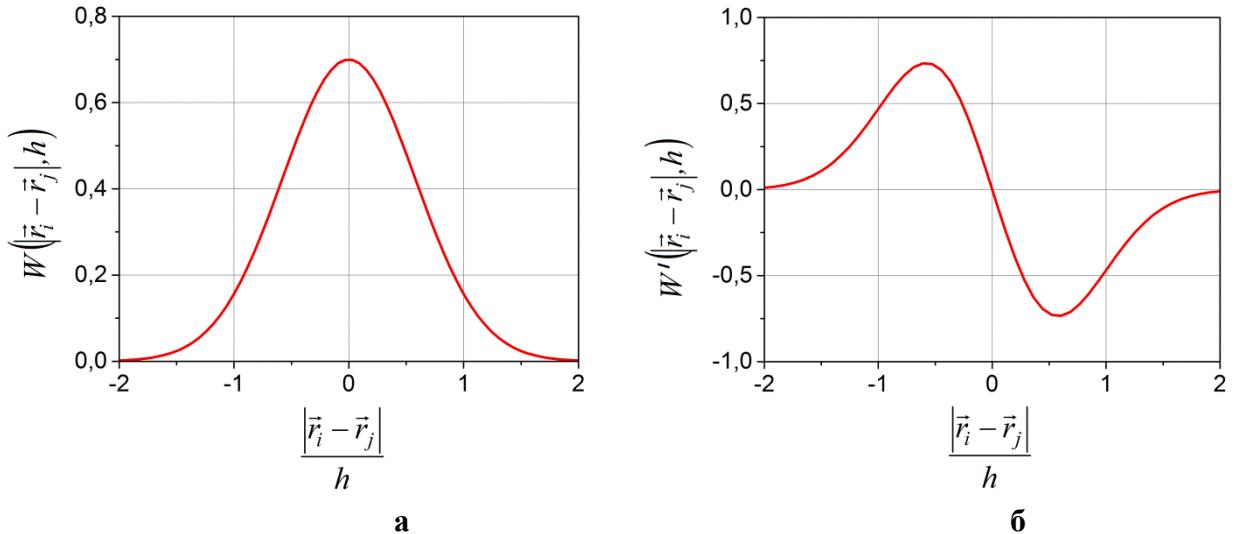
Здесь  $\phi = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|/h$  и  $N = 1.5h$  для одномерной геометрии,  $N = 0.7\pi h^2$  для двумерной (плоской и осесимметричной),  $N = \pi h^3$  для трёхмерной.

Производная от ядра запишется как:

$$W'(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, h) = \begin{cases} (-12\phi + 9\phi^2)/N_1, & 0 < \phi < 1 \\ (-3(2 - \phi)^2)/N_1, & 1 \leq \phi < 2 \\ 0, & \phi \geq 2 \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь  $N_1 = 6h^2$  для одномерной геометрии,  $N_1 = 28\pi h^3$  для двумерной (плоской и осесимметричной),  $N_1 = 4\pi h^4$  для трёхмерной.

Сглаживающая функция (1.4) и её производная показаны на рисунке 1а,б.



**Рисунок 1.1 – Сглаживающая функция (а) и её производная (б)**

Впервые идеи использовать в численном методе сглаживающую функцию для описания взаимодействия сглаженных частиц были высказаны в работах

[68] и [69], применительно к задачам астрофизики. Метод SPH быстро нашёл применение в вычислительной гидродинамике [70], преимущественно в задачах бронепробития [71], где необходимо рассматривать большие относительные перемещения вещества и одновременно отслеживать границы раздела областей, занятых разными материалами. Решение таких задач сеточными методами затруднительно по следующим причинам: в лагранжевых методах необходимо применять сложные алгоритмы для перекомпоновки разностной сетки, которая претерпевает неприемлемые искажения [72], и создавать алгоритмы для расчёта взаимного проскальзывания областей, занятых разными материалами по обе стороны контактного разрыва. Для мезомеханического моделирования гетерогенных сред предпочтительнее лагранжевые методы, так как движение контактных границ внутри деформируемой области и движение её внешних границ рассчитываются по тем же формулам, что и точки внутри области [73]. В эйлеровых методах сложно отслеживать границы раздела и необходимы специальные алгоритмы для расчёта смешанных ячеек, содержащих разные компоненты. Если для задач бронепробития эйлеров подход может дать приемлемые результаты, так как необходимо отслеживать, как правило, одну границу раздела между материалами ударника и мишени, то простейшая оценка показывает, что при мезомеханическом моделировании гетерогенной среды эйлеровыми методами количество смешанных ячеек может быть значительным и даже превысит количество однокомпонентных ячеек. Точность метода в этом случае будет зависеть, во-первых, от способа расчёта смешанных ячеек и, во-вторых, сопровождаться значительной численной диффузией импульса и энергии.

Бессеточный лагранжев метод SPH лишен перечисленных недостатков в силу своей природы. Попытки создать свободно-лагранжев численный метод, не отказываясь при этом от разностной сетки, предпринимались ещё в 70-х годах прошлого века («метод свободных точек», [74]), но успехом не увенчались.

Дальнейшее развитие метода SPH посвящалось учёту прочностных свойств среды [67],[75], использованию новых вариантов SPH-аппроксимации уравнений сохранения [76,77], обоснованию форм искусственной вязкости [78], включению в метод новых моделей, описывающих локальные физико-механические процессы, происходящие в материале SPH-частиц; например, разрушение материала [79].

## 1.1. Стандартная формулировка метода SPH

Рассмотрим стандартные SPH-уравнения на примере идеальной сжимаемой жидкости:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{U} \quad (1.6)$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1.7)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{U} \quad (1.8)$$

$$P = F(\rho, E) \quad (1.9)$$

Применим выражение (1.3) для

$$f = \begin{bmatrix} \rho \\ P \\ E \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Тогда для (1.6)-(1.8) можно получить следующую SPH-аппроксимацию:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\sum_j \frac{m_j \rho_i}{\rho_j} (\vec{U}_i - \vec{U}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (1.11)$$

$$\frac{d\vec{U}_i}{dt} = \sum_j \frac{m_j (P_i + P_j)}{\rho_i \rho_j} \nabla_i W_{ij} \quad (1.12)$$

$$\frac{dE_i}{dt} = -\sum_j \frac{m_j (P_i + P_j)}{2\rho_i \rho_j} (\vec{U}_i - \vec{U}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (1.13)$$

Градиент от  $W_{ij}$  запишется как:

$$\nabla_i W_{ij} \left( \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{h} \right) = W'_{ij} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (1.14)$$

В этом случае (1.11)–(1.13) представляются в виде

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\sum_j \frac{m_j \rho_i}{\rho_j} W'_{ij} (U_i^R - U_j^R) \quad (1.15)$$

$$\frac{d\vec{U}_i}{dt} = \sum_j \frac{m_j (P_i + P_j)}{\rho_i \rho_j} W'_{ij} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (1.16)$$

$$\frac{dE_i}{dt} = -\sum_j \frac{m_j (P_i + P_j)}{2\rho_i \rho_j} W'_{ij} (U_i^R - U_j^R) \quad (1.17)$$

где  $U^R = \vec{U} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$ .

Первоначально в уравнениях SPH вместо выражения  $\frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j}$

использовалось выражение  $\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2}$  [80]. Как показано в [81],

$$\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \rightarrow \frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \quad (1.18)$$

и потому в (1.15)–(1.17) применяется более точное выражение.

Система уравнений (1.15)–(1.17) приводит к погрешности при расчёте окрестности контактного разрыва, если частицы  $i$  и  $j$  расположены по разные его стороны и в веществе в одной из них расширяется, ускоряя и сжимая частицу по другую сторону контактного разрыва. Причину этой погрешности легко уяснить на примере формулы (1.15). Применим (1.15) для расчёта изменения плотности, поочерёдно к паре частиц  $i$  и  $j$ , расположенных по разные стороны контактной поверхности. Для простоты исключим из рассмотрения все остальные частицы, чтобы оценить взаимовлияние частиц  $i$  и  $j$  друг на друга. Из выражения в круглых скобках у правой части (1.15) следует, что частица  $i$  и частица  $j$  будут или сжиматься обе (сближаясь), или расширяться обе (удаляясь друг от друга). Таким образом, ударную волну или волну разрежения уравнения стандартного метода будут описывать верно. Но процесс, при котором SPH-частица  $i$  расширяется, сжимая SPH-частицу  $j$  (или наоборот)

рассчитать по уравнениям (1.15)–(1.17) не удается, хотя это довольно распространённый случай взаимодействия двух сред через контактную границу. Типичными задачами такого рода являются задачи детонации взрывчатых веществ, содержащих инертные примеси, задачи взаимодействия продуктов взрыва с оболочками, задачи лазерной абляции. Например, если SPH-частица  $i$  представляет собой расширяющиеся продукты детонации, они сжимают инертный материал в SPH-частице  $j$ . Если частица  $i$  поглощает лазерное излучение, расширяясь, она также будет сжимать частицу  $j$ , прозрачную для излучения.

С помощью уравнений (1.15)–(1.17) нельзя обеспечить монотонность распределения расчетных величин в окрестности контактного разрыва. Немонотонность решения обычно сглаживается введением искусственной вязкости. Этому вопросу (корректному подбору искусственной вязкости) уделено внимание в ряде работ; особенно следует отметить [71] и [78]. В последней работе сделана попытка построить искусственную вязкость на основе решения задачи о распаде произвольного разрыва.

## 1.2. Модифицированные уравнения SPH

Намерения использовать в методе SPH идеи С.К.Годунова [82], как отмечается в [83], высказывались рядом исследователей. В [83] отмечается также, что попытки применить решение задачи о распаде произвольного разрыва в методе SPH не имели под собой математического фундамента и не освещались детально в литературе. Как отмечалось выше, в работе [78] было предложено, например, усовершенствовать стандартный метод SPH, получив выражение для искусственной вязкости, использующее решение задачи Римана.

В работах [54]–[56] впервые была опубликована замкнутая система SPH-уравнений для среды из мягких частиц, построенная на решении задачи о распаде произвольного разрыва. Позже появились публикации и других авторов [84],[85], использующих решение Римана в уравнениях SPH.

Рассмотрим вывод модифицированной SPH-формы уравнений из уравнений (1.15)–(1.17). Пусть объем пространства  $V_0$  вместо непрерывной среды с плотностью  $\rho_0$  заполнен сферическими (для определенности) SPH-частицами (рисунок 1.2). Расположение частиц в пространстве допускает как частичное пересечение или непересечение, так и точечный контакт частиц. Каждая частица  $i$  в такой SPH-среде может обмениваться импульсом и энергией с любой из  $j$  частиц окружения в пределах максимальной дистанции взаимодействия  $(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)/h = 2$  только вдоль оси взаимодействия  $R$ , соединяющей центры частиц. Интенсивность этого обмена определяется видом сглаживающей функции. Значение  $h$  в диссертации определялось согласно [76] как:

$$h = \alpha(D_i + D_j)/2 \quad (1.19)$$

где величина  $\alpha$  выбиралась в диапазоне  $1 \leq \alpha \leq 1.4$ .

Введем теперь понятие точки касания частиц. Необходимо уточнить, что только в частном случае, когда  $(2|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)/(D_j + D_i) = 1$ , будет иметь место геометрическое касание сфер диаметрами  $D_j$  и  $D_i$  в точке  $A_{ij}$  на оси взаимодействия  $R$ . В общем случае под точкой касания частиц будем подразумевать точку  $A_{ij}$ , делящую отрезок  $|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$  на пропорциональные диаметрам взаимодействующих частиц части. Предположим далее, что указанная точка касания частиц в SPH-среде эквивалентна контактной поверхности в сплошной среде.

Тогда можно построить решение Римана для распада разрыва вдоль оси  $R$  и вычислить скорость точки касания  $U_{ij}^*$  и давление в ней  $P_{ij}^*$ . Для простоты ограничимся акустическим приближением [86]:

$$U_{ij}^{*R} = \frac{U_j^R \rho_j C_j^l + U_i^R \rho_i C_i^l - P_j + P_i}{\rho_j C_j^l + \rho_i C_i^l} \quad (1.20)$$

$$P_{ij}^* = \frac{P_j \rho_i C_i^l + P_i \rho_i C_j^l + \rho_j C_j^l \rho_i C_i^l (U_j^R - U_i^R)}{\rho_j C_j^l + \rho_i C_i^l} \quad (1.21)$$

где  $C^l$  есть скорость звука.

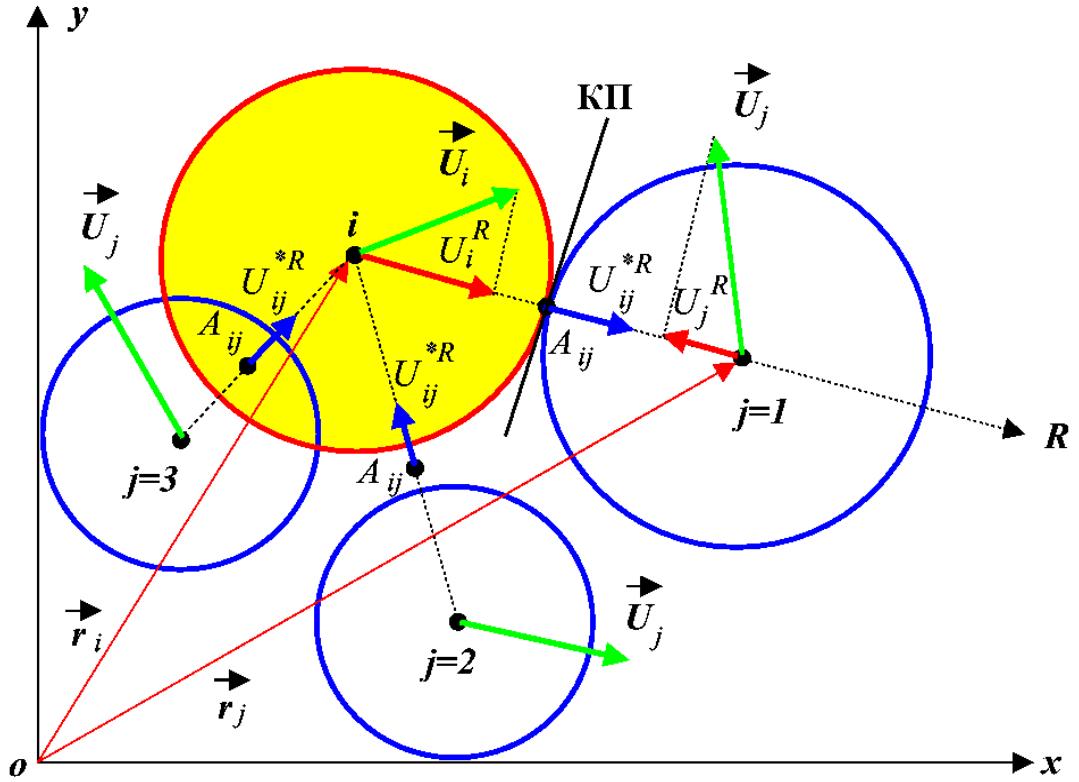


Рисунок 1.2 – Схема взаимодействия частиц в SPH-жидкости

Скорости  $U_i$ ,  $U_j$  и давления  $P_i$  и  $P_j$  будут стремиться к распадным значениям, вычисленным из (1.20)–(1.21). Выполним в уравнениях (1.15)–(1.17) замену

$$\frac{1}{2}(U_i^R + U_j^R) \rightarrow U_{ij}^{*R} \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{2}(P_i + P_j) \rightarrow P_{ij}^* \quad (1.23)$$

Тогда уравнения (1.15)–(1.17) преобразуются к иной SPH-форме и запишутся как [55],[56],[57]:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -2 \sum_j \frac{m_j \rho_i}{\rho_j} W'_{ij} (U_i^R - U_{ij}^{*R}) \quad (1.24)$$

$$\frac{d\vec{U}_i}{dt} = 2 \sum_j \frac{m_j P_{ij}^*}{\rho_i \rho_j} W'_{ij} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (1.25)$$

$$\frac{dE_i}{dt} = -2 \sum_j \frac{m_j P_{ij}^*}{2 \rho_i \rho_j} W'_{ij} (U_i^R - U_{ij}^{*R}) \quad (1.26)$$

Уравнение энергии предпочтительнее записать в форме уравнения сохранения полной энергии

$$\frac{d}{dt} \left( E + \frac{U^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (P \vec{U}) \quad (1.27)$$

и преобразовать (1.27) к виду:

$$\frac{d(E_i + 1/2U_i^2)}{dt} = -2 \sum_j \frac{m_j P_{ij}^* U_{ij}^{*R}}{2\rho_i \rho_j} W'_{ij} \quad (1.28)$$

### 1.3. Уравнения SPH для упругой среды

Перейдём от уравнений (1.24),(1.25),(1.28), описывающих изотропную жидкость, к уравнениям прочной сжимаемой среды. В характер взаимодействия частиц, показанный на рисунке 1.2, необходимо внести некоторые дополнения. Изотропные SPH-частицы обмениваются импульсом и энергией только в волнах сжатия (разрежения) вдоль оси  $R$ . Этот достаточно простой вид взаимодействия привёл к лаконичным по форме SPH-уравнениям.

В прочной сжимаемой среде такой обмен происходит как в волнах сжатия (разрежения), распространяющихся с продольной скоростью звука

$$C^l = \sqrt{(3K + 4G)/(3\rho)} \quad (1.29)$$

так и в волнах сдвига, распространяющихся с поперечной скоростью звука

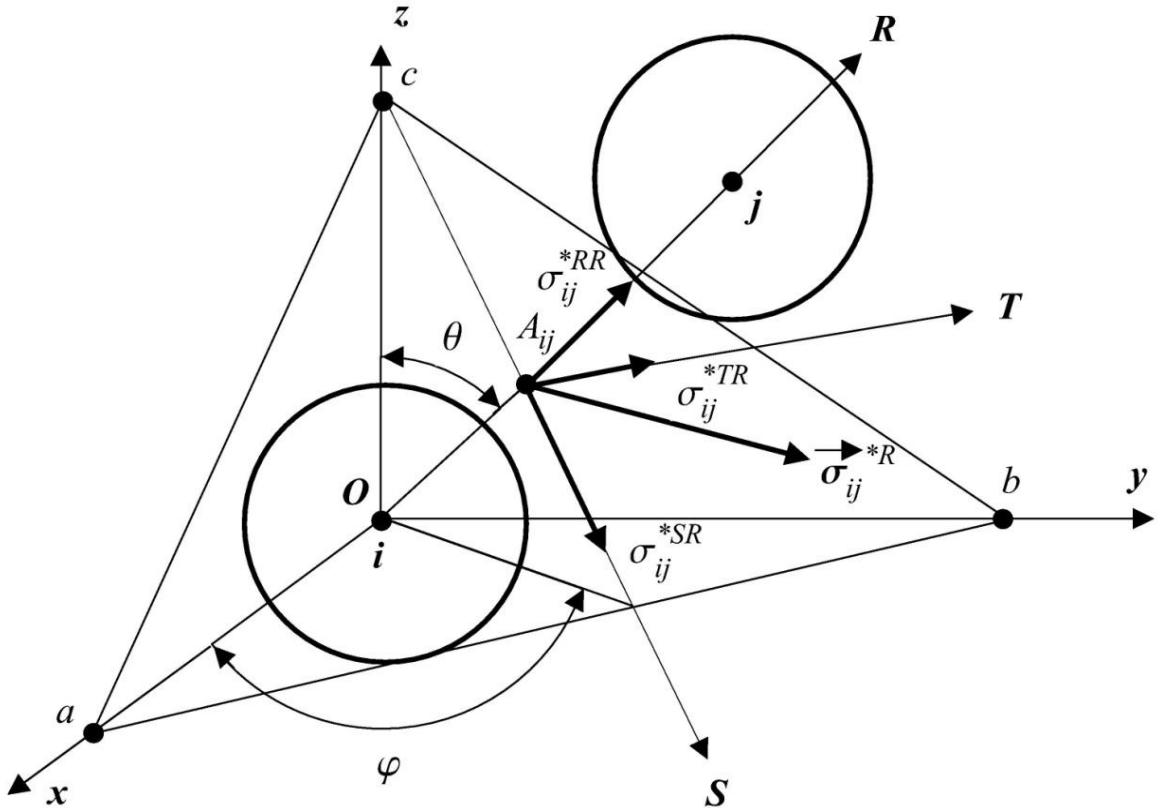
$$C^t = \sqrt{G/\rho} \quad (1.30)$$

Для разъяснения особенностей такого взаимодействия в прочной SPH-среде, позволяющих построить решения Римана для двух взаимодействующих частиц  $i$  и  $j$ , обратимся к рисунку 1.3, где и показаны эти частицы.

Если через точку касания частиц  $i$  и  $j$  (обозначенную как точка  $A_{ij}$ ) перпендикулярно оси взаимодействия  $O-R$  провести плоскость, она пересечет координатные оси системы  $XYZ$  в точках  $abc$ . Назовем плоскость  $abc$  плоскостью касания частиц. Участок этой плоскости в окрестности точки  $A_{ij}$  и

будет эквивалентен поверхности начального разрыва параметров в реальной среде.

Разрыв распадается в общем случае на продольную волну и волну сдвига, входящие в частицу  $i$  и две аналогичные волны, входящие в частицу  $j$ . В процессе распада разрыва напряженное состояние среды на площадке  $abc$  характеризуется вектором напряжений  $\vec{\sigma}^{*R}$ , имеющим нормальную к  $abc$  компоненту  $\sigma_{ij}^{*RR}$  и касательные компоненты  $\sigma_{ij}^{*SR}$  и  $\sigma_{ij}^{*TR}$ , лежащие в плоскости  $abc$ . Системы координат  $RST$  и  $XYZ$  связаны через углы  $\theta$  и  $\varphi$ .



**Рисунок 1.3 – Схема взаимодействия частиц в упругопластической SPH-среде**

Матрица направляющих косинусов частицы  $j$  относительно частицы  $i$  с использованием как традиционных, так и принятых на рисунке 1.3 обозначений записывается в виде:

$$A = \begin{bmatrix} \cos^{Rx} & \cos^{Ry} & \cos^{Rz} \\ \cos^{Sx} & \cos^{Sy} & \cos^{Sz} \\ \cos^{Tx} & \cos^{Ty} & \cos^{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^{Rx} & l^{Ry} & l^{Rz} \\ l^{Sx} & l^{Sy} & l^{Sz} \\ l^{Tx} & l^{Ty} & l^{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Матрица  $A$  обеспечивает переход из системы координат  $XYZ$  в систему  $RST$ . Обратный переход из системы  $RST$  в систему  $XYZ$  обеспечивает транспонированная матрица направляющих косинусов  $A^T$ .

Распадные значения компонент напряжений и скоростей легко вычисляются в системе координат  $RST$  в акустическом приближении:

для поперечной волны

$$U_{ij}^{*S} = \frac{U_j^S \rho_j C_j^t + U_i^S \rho_i C_i^t + \sigma_j^{SR} - \sigma_i^{SR}}{\rho_j C_j^t + \rho_i C_i^t}, \quad (1.32)$$

$$\sigma_{ij}^{*SR} = \frac{\sigma_j^{SR} \rho_i C_i^t + \sigma_i^{SR} \rho_j C_j^t + \rho_j C_j^t \rho_i C_i^t (U_j^S - U_i^S)}{\rho_j C_j^t + \rho_i C_i^t}, \quad (1.33)$$

$$U_{ij}^{*T} = \frac{U_j^T \rho_j C_j^t + U_i^T \rho_i C_i^t + \sigma_j^{TR} - \sigma_i^{TR}}{\rho_j C_j^t + \rho_i C_i^t}, \quad (1.34)$$

$$\sigma_{ij}^{*TR} = \frac{\sigma_j^{TR} \rho_i C_i^t + \sigma_i^{TR} \rho_j C_j^t + \rho_j C_j^t \rho_i C_i^t (U_j^T - U_i^T)}{\rho_j C_j^t + \rho_i C_i^t}, \quad (1.35)$$

для продольной волны

$$U_{ij}^{*R} = \frac{U_j^R \rho_j C_j^l + U_i^R \rho_i C_i^l + \sigma_j^{RR} - \sigma_i^{RR}}{\rho_j C_j^l + \rho_i C_i^l}, \quad (1.36)$$

$$\sigma_{ij}^{*RR} = \frac{\sigma_j^{RR} \rho_i C_i^l + \sigma_i^{RR} \rho_j C_j^l + \rho_j C_j^l \rho_i C_i^l (U_j^R - U_i^R)}{\rho_j C_j^l + \rho_i C_i^l}, \quad (1.37)$$

Для прочной сжимаемой среды уравнение неразрывности (1.24) не изменится; в уравнениях (1.25) и (1.28) вместо давления  $P^*$  следует использовать тензор напряжений

$$\sigma^{*\alpha\beta} = -P^* \delta^{\alpha\beta} + S^{*\alpha\beta} \quad (1.38)$$

где  $S^{*\alpha\beta}$  – девиатор напряжений в точке контакта и

$$\delta^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

есть символ Кронекера и  $\alpha=x,y,z$  и  $\beta=x,y,z$ .

Тогда уравнения (1.25) и (1.28) с учётом записи векторов в системе  $RST$  примут вид:

$$\frac{d\vec{U}_i}{dt} = 2 \sum_j \frac{m_j \vec{\sigma}_{ij}^{*R}}{\rho_i \rho_j} W'_{ij} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (1.39)$$

$$\frac{d(E_i + 1/2U_i^2)}{dt} = -2 \sum_j \frac{m_j \vec{\sigma}_{ij}^{*R} U_{ij}^{*R}}{\rho_i \rho_j} W'_{ij} \quad (1.40)$$

Уравнения (1.24),(1.39),(1.40) есть модифицированные уравнения SPH, позволяющие построить монотонную схему расчета без искусственной вязкости. В [57] приведен полный алгоритм для расчёта прочной сжимаемой среды, включая пересчёт напряжений из системы координат *XYZ* в систему *RST* и обратно.

## 1.4. Теплопроводность в SPH

Если уравнение энергии ограничить рассмотрением только механизма теплопроводности, то оно примет вид

$$\frac{dE}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q} \quad (1.41)$$

где  $\vec{q}$  есть вектор теплового потока. SPH-аппроксимация (1.41) запишется как:

$$\frac{dE_i}{dt} = \sum_j \frac{m_j W'}{\rho_i \rho_j} (q_i^R + q_j^R) \quad (1.42)$$

SPH-аппроксимация (1.42), полученная из уравнения энергии (1.41), соответствует закону Фурье. Для вычисления потоков  $q_i^R$  и  $q_j^R$  в [87] используется температура контакта частиц  $T_{ij}^*$ .

$$q_i^R = -\lambda \frac{T_{ij}^* - T_i}{\Delta r_i} \quad (1.43)$$

$$q_j^R = -\lambda \frac{T_j - T_{ij}^*}{\Delta r_j} \quad (1.44)$$

где  $\lambda$  есть теплопроводность.

Температура контакта  $T_{ij}^*$  и  $\Delta r_i$  и  $\Delta r_j$  определяются в [87] как

$$q_i^R = q_j^R \quad (1.45)$$

$$\Delta r_i = \Delta r_j = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|/2 \quad (1.46)$$

В этом случае  $T_{ij}^*$  можно найти как

$$T_{ij}^* = \frac{\lambda_i T_i + \lambda_j T_j}{\lambda_i + \lambda_j} \quad (1.47)$$

В соответствии с приведенными выше соотношениями в [87] получена следующая SPH-аппроксимация уравнения энергии для случая только механизма теплопроводности:

$$\frac{dE_i}{dt} = -\sum_j \frac{m_j W'_{ij}}{\rho_i \rho_j} \frac{4\lambda_i \lambda_j}{(\lambda_i + \lambda_j)} (T_j - T_i) \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (1.48)$$

В работе [87] проведено тестирование уравнения (1.48) и получено соответствие с аналитическим решением для контакта различных пар материалов. Интегрирование уравнения (1.48) в соответствии с работой [87] должно производиться с шагом

$$\Delta t^n = \beta \rho C_V h^2 / \lambda \quad (1.49)$$

где  $C_V$  есть теплоёмкость и  $\beta \leq 0.15$ .

Авторами работы [57] предложена иная аппроксимация уравнения теплопроводности, которая была получена на основе подхода, использующего решения распада разрывов. В этом случае температура в точке контакта частиц  $T_{ij}^*$  вычисляется следующим образом. Применим одномерное уравнение Фурье к расчёту эволюции первоначального разрыва температуры в точке  $x=0$  контакта двух частиц с различными (в общем случае) теплофизическими свойствами. Начальные условия следующие:  $T(x,0)=T_i$ ,  $x<0$  и  $T(x,0)=T_j$ ,  $x>0$ . Распределение температуры в этом случае определится как [88]

$$T - T_{ij}^* = \begin{cases} (T_{ij}^* - T_i) \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_i t}} & \text{при } x < 0 \\ (T_j - T_{ij}^*) \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_j t}} & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

где  $T_{ij}^*$  есть температура в точке контакта  $x=0$

$$T_{ij}^* = \frac{\lambda_i T_i + \lambda_j T_j \sqrt{a_i / a_j}}{\lambda_i + \lambda_j \sqrt{a_i / a_j}} \quad (1.51)$$

и

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_V} \quad (1.52)$$

есть температуропроводность. Комбинируя (1.50) с (1.42)–(1.44), получаем следующую форму уравнения энергии:

$$\frac{dE_i}{dt} = -\sum_j \frac{m_j W'_{ij}}{\rho_i \rho_j} \left[ 2\lambda_i \lambda_j \frac{1 + \sqrt{a_i/a_j}}{\lambda_i + \lambda_j \sqrt{a_i/a_j}} (T_j - T_i) \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right] \quad (1.53)$$

Следует заметить, что в случае теплового контакта частиц  $i$  и  $j$  из одного материала уравнения (1.53) и (1.48) полностью эквивалентны. Уравнение (1.53) точнее, как показано на примере тестовых расчётов в [57], определяет профиль температуры при контакте частиц из различных материалов.

## 1.5. Алгоритм решения трёхмерных упругопластических задач

Тензор напряжений представляется в виде суммы шаровой (давление) части и девиатора напряжений (1.38). Девиатор упругих напряжений определяется в соответствии с уравнением

$$\frac{dS_e^{*\alpha\beta}}{dt} = 2G \frac{de^{*\alpha\beta}}{dt} \quad (1.54)$$

Тензор-девиатор скоростей деформаций определяется как

$$\frac{de^{\alpha\beta}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha} \right) - \frac{1}{3} \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial U^\gamma}{\partial x^\gamma} \quad (1.55)$$

Получим SPH-аппроксимацию (1.54) с использованием (1.55)

$$\frac{dS_e^{*\alpha\beta}}{dt} = 2G \sum_j \frac{m_j W'_{ij}}{\rho_j} \left[ (U_i^\alpha - U_{ij}^{*\alpha})(x_j^\beta - x_i^\beta) + (U_i^\beta - U_{ij}^{*\beta})(x_j^\alpha - x_i^\alpha) - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} (U_i - U_{ij}^*) (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \right] \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}|} \quad (1.56)$$

Упругие напряжения должны быть скорректированы на поворот частицы среды. Частицы врачаются с угловой скоростью, определяемой уравнением

$$\vec{\omega} = (\nabla \times \vec{U})/2 \quad (1.57)$$

его аппроксимация есть

$$\begin{aligned} \omega_i^x &= \sum_j \frac{m_j W'_{ij}}{\rho_j} \left[ (U_i^x - U_{ij}^{*x})(y_j - y_i) - (U_i^y - U_{ij}^{*y})(z_j - z_i) \right] \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}|} \\ \omega_i^y &= \sum_j \frac{m_j W'_{ij}}{\rho_j} \left[ (U_i^x - U_{ij}^{*x})(z_j - z_i) - (U_i^z - U_{ij}^{*z})(x_j - x_i) \right] \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}|} \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\omega_i^z = \sum_j \frac{m_j W'_{ij}}{\rho_j} \left[ \left( U_i^y - U_{ij}^{*y} \right) (x_j - x_i) - \left( U_i^x - U_{ij}^{*x} \right) (y_j - y_i) \right] \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}|}$$

Скорость вращения  $\vec{\omega}$  определяет ориентацию новой системы координат  $x'y'z'$ , повернутой относительно старой системы  $xyz$ . Направляющие косинусы  $l^{\alpha'\alpha}$  нового собственного вектора  $\vec{e}^\alpha = l^{\alpha'\alpha} \vec{e}'^\alpha$  определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{dl^{\alpha'\alpha}}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{e}'^\alpha)^\alpha, \quad \alpha = x, y, z, \quad \alpha' = x', y', z' \quad (1.59)$$

и корректируют девиатор напряжений на поворот

$$S_\omega^{\alpha\beta} = l^{\alpha'\alpha} l^{\beta'\beta} S_e^{\alpha'\beta'} \quad (1.60)$$

Для описания упругопластического течения используется процедура Уилкинса [90]

$$S^{\alpha\beta} = K_p S_\omega^{\alpha\beta} \quad (1.61)$$

где корректирующий множитель  $K_p$  в соответствии с критерием Мизеса есть

$$K_p = \begin{cases} 1, & f \leq 2Y_0^2 \\ Y_0 \sqrt{2/f} & f > 2Y_0^2 \end{cases} \quad (1.62)$$

и  $f = 3S_\omega^{\alpha\beta} S_\omega^{\alpha\beta}$ . Уравнение состояния (1.9) принимается в форме Ми-Грюнайзена

$$P - P_r = \gamma_s \rho (E - E_r) \quad (1.63)$$

здесь  $P_r(\rho)$  и  $E_r(\rho)$  – опорные кривые.

Для инертных веществ опорными кривыми являются ударные адиабаты  $U_s = C_a + S_a U_p$  при плотности выше начальной и упругие кривые при плотности ниже начальной

$$P_r = \begin{cases} P_H, \rho > \rho_0 \\ P_c, \rho \leq \rho_0 \end{cases}, \quad E_r = \begin{cases} E_H, \rho > \rho_0 \\ E_c, \rho \leq \rho_0 \end{cases}, \quad (1.64)$$

где  $P_H = C_a^2 (v_0 - v) / [v_0 - S_a (v_0 - v)]^2$  (1.65)

$$E_H = P_H (v_0 - v) / 2 \quad (1.66)$$

$$P_c = K(v_0 - v)/v_0 \quad (1.67)$$

$$E_c = P_c(v_0 - v)/2, v=1/\rho \quad (1.68)$$

Уравнение состояния в форме (1.63), использующее в качестве опорной кривой ударную адиабату для нагружаемого материала, выбрано из тех соображений, что коэффициенты  $C_a$  и  $S_a$  ударной адиабаты вида  $U_s=C_a+S_aU_p$  измерены достаточно точно для большинства материалов. Они многократно проверены независимыми исследователями для различных материалов при давлениях до  $\approx 20 \div 500$  ГПа, что с избытком перекрывает диапазон давлений, реализуемых при ударном нагружении алюминия с неполным схлопыванием пор, а также диапазон давлений, реализуемых при детонации смеси насыпной плотности из взрывчатого вещества с инертной добавкой (решения этих задач представлены в главах 3 и 5 диссертации). Не менее важным аргументом в пользу уравнения (1.63) является и то, что решение задачи Римана с двучленным уравнением состояния (1.63) позволяет учитывать свойства среды достаточно общего вида [89].

Вычислительный алгоритм состоит из двух блоков. В первом блоке производятся вычисления сумм, входящих в правые части SPH-уравнений. В этом блоке используются вложенные циклы по  $i$  и по  $j$ . Второй блок представляет собой простой цикл и производит интегрирование по времени SPH-уравнений. Вычислительная область содержит  $N$  частиц массами  $m_i$  и диаметрами  $D_i$ . В вопросе определения массы SPH-частиц

$$m_i = \rho_i D_i^3 \quad (1.69)$$

следует сделать некоторые разъяснения. Величина связанной с SPH-частицей массы зависит от характера укладки частиц. Например, в двумерном случае возможны как квадратная, так и гексагональная укладка частиц. В пространственном случае невозможно построить гексагональную в трех плоскостях укладку сферических частиц равного диаметра и предпочтительнее кубическая укладка. Диаметр частицы есть лишь геометрический параметр для

определения соседей частицы. Он есть диаметр сферы, вписанной в куб со стороной

$$D_i = (m/\rho)_i^{1/3} \quad (1.70)$$

и потому масса частицы есть масса куба. В этом случае истинная физическая плотность среды и плотность SPH-среды равны. Для гексагональной укладки в двумерном случае массы SPH-частиц следует рассчитывать по иной зависимости, чем (1.70).

Для каждой базисной частицы и частицы окружения вычисляется сглаживающая дистанция

$$h = 0.5(D_i + D_j) \quad (1.71)$$

Величины  $W'_{ij}$ ,  $\vec{U}_{ij}^*$ ,  $\vec{\sigma}_{ij}^*$  вычисляются для каждой пары частиц. Расстояние между частицами

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (1.72)$$

используется для вычисления производной от сглаживающего ядра (1.5) и направляющих косинусов оси  $R$ :

$$l^{Rx} = \frac{x_j - x_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}, \quad l^{Ry} = \frac{y_j - y_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}, \quad l^{Rz} = \frac{z_j - z_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (1.73)$$

Матрица направляющих косинусов координатной системы  $RST$ , определяемая в соответствии с (1.72), обеспечивает переход между декартовой и сферической системами координат

$$\begin{bmatrix} l^{Rx} & l^{Ry} & l^{Rz} \\ l^{Sx} & l^{Sy} & l^{Sz} \\ l^{Tx} & l^{Ty} & l^{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \sin\theta & \sin\varphi \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\varphi \cos\theta & \sin\varphi \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

Преобразование векторов  $\vec{U}$  и  $\vec{\sigma}^R$  от координат  $x,y,z$  к координатам  $R,T,S$  происходит в соответствии с соотношениями

$$\begin{bmatrix} U^R \\ U^S \\ U^T \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} l^{Rx} & l^{Ry} & l^{Rz} \\ l^{Sx} & l^{Sy} & l^{Sz} \\ l^{Tx} & l^{Ty} & l^{Tz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^x \\ U^y \\ U^z \end{bmatrix}_k \quad (1.75)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{RR} \\ \sigma^{SR} \\ \sigma^{TR} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} l^{Rx} & l^{Ry} & l^{Rz} \\ l^{Sx} & l^{Sy} & l^{Sz} \\ l^{Tx} & l^{Ty} & l^{Tz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{xR} \\ \sigma^{yR} \\ \sigma^{zR} \end{bmatrix}_k \quad (1.76)$$

где

$$\begin{bmatrix} \sigma^{xR} \\ \sigma^{yR} \\ \sigma^{zR} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \sigma^{xx} & \sigma^{xy} & \sigma^{xz} \\ \sigma^{yx} & \sigma^{yy} & \sigma^{yz} \\ \sigma^{zx} & \sigma^{zy} & \sigma^{zz} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} l^{Rx} \\ l^{Ry} \\ l^{Rz} \end{bmatrix}$$

и  $k=i,j$ . Промежуточные величины  $\vec{U}_{ij}^*$  и  $\vec{\sigma}_{ij}^{*R}$  вычисляются в соответствии с (1.32)-(1.37) и преобразуются к координатам  $x,y,z$  как

$$\begin{bmatrix} U_{ij}^{*x} \\ U_{ij}^{*y} \\ U_{ij}^{*z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^{Rx} & l^{Ry} & l^{Rz} \\ l^{Sx} & l^{Sy} & l^{Sz} \\ l^{Tx} & l^{Ty} & l^{Tz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ij}^{*R} \\ U_{ij}^{*S} \\ U_{ij}^{*T} \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij}^{*xR} \\ \sigma_{ij}^{*yR} \\ \sigma_{ij}^{*zR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l^{Rx} & l^{Ry} & l^{Rz} \\ l^{Sx} & l^{Sy} & l^{Sz} \\ l^{Tx} & l^{Ty} & l^{Tz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{ij}^{*RR} \\ \sigma_{ij}^{*SR} \\ \sigma_{ij}^{*TR} \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

На приведенном выше этапе вычислений были определены правые части SPH-уравнений (1.24),(1.39),(1.40),(1.56) и (1.58).

Второй блок алгоритма служит для интегрирования уравнений сохранения импульса (1.39) и уравнений (1.58) по явной схеме интегрирования по времени

$$f_i^{n+1} = f_i^n + F_i^n(\vec{r}_i^n) \Delta t \quad (1.79)$$

где  $f_i = \vec{U}_i, S_{ei}^{\alpha\beta}$  и  $F_i$  есть правая часть (1.39) и (1.58) соответственно. Изменение полной энергии вещества SPH-частицы  $i$  за шаг по времени вычисляется как

$$\Delta \left( E + \frac{1}{2} U^2 \right)_i^{n+1} = F_i^n(\vec{r}_i^n) \Delta t \quad (1.80)$$

где  $F_i$  есть сумма правых частей (1.40) и (1.53).

Внутренняя энергия на этом шаге вычисляется по схеме:

$$E_i^{n+1} = E_i^n + \Delta \left( E + \frac{1}{2} U^2 \right)_i^{n+1} - \left[ \frac{(U^2)_i^{n+1}}{2} - \frac{(U^2)_i^n}{2} \right] \quad (1.81)$$

Слагаемое в квадратных скобках есть изменение кинетической энергии частицы за шаг интегрирования по времени.

Уравнение неразрывности (1.24) интегрируется как

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n \left( \frac{2 - \dot{\varepsilon}_i \Delta t}{2 + \dot{\varepsilon}_i \Delta t} \right)^n \quad (1.82)$$

где

$$\dot{\varepsilon}_i = -2 \sum_j \frac{m_j W'_{ij}}{\rho_i} \left( U_i^R - U_{ij}^{*R} \right) \quad (1.83)$$

Необходимо заметить, что применение явной схемы интегрирования по времени (1.79) к уравнению (1.24) или непосредственное применение зависимости (1.2) для расчёта плотности не показали достаточной точности.

Поскольку на каждом шаге уравнение (1.59) необходимо интегрировать при одних и тех же начальных условиях  $l^{\alpha'\alpha} = \delta^{\alpha'\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ ,  $\alpha' = x', y', z'$ ), матрица направляющих косинусов может быть представлена в следующем виде

$$\begin{bmatrix} l^{x'x} & l^{x'y} & l^{x'z} \\ l^{y'x} & l^{y'y} & l^{y'z} \\ l^{z'x} & l^{z'y} & l^{z'z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_z \Delta t & -\omega_y \Delta t \\ -\omega_z \Delta t & 1 & \omega_x \Delta t \\ \omega_y \Delta t & -\omega_x \Delta t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

Корректировка девиатора напряжений на поворот осуществляется с помощью матрицы преобразования

$$[S_e^{\alpha\beta}] = [l^{\alpha'\alpha} [S_e^{\alpha'\beta'}] [l^{\beta'\beta}]]^T \quad (1.85)$$

Процедура (1.85) может быть организована встроенными функциями MATMUL и TRANSPOSE алгоритмического языка FORTRAN 90. Для идеально пластичных сред применяется корректировка (1.61) и (1.62). Давление вычисляется по уравнению состояния (1.9). Тензор напряжений определяется из (1.38). Новые координаты частиц вычисляются как

$$\vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^n + \frac{1}{2} (\vec{U}_i^{n+1} + \vec{U}_i^n) \Delta t^n \quad (1.86)$$

Глобальный шаг интегрирования вычисляется по критерию Куранта, как наименьшая величина шага из всех, вычисленных при  $i=1\dots N$ :

$$\Delta t = \min \left( \frac{KD_i}{\sqrt{C_i^2 + (4D_i \dot{\varepsilon}_i^{\alpha\alpha})^2}} \right)^n \quad (1.87)$$

Практика вычислений показала устойчивый счёт при  $K \leq 0.8$ .

## ГЛАВА 2. ТЕСТИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА SPH

### 2.1. Расчёт распада разрыва в упругопластической среде

Уравнение состояния для данного тестового расчёта примем в виде

$$P = K(\rho - \rho_0)/\rho \quad (2.1)$$

где изотермический модуль объёмного сжатия  $K=const$ . Расчёт проводится в одномерном приближении.

В соответствии с методологией Уилкинса [90] определим девиатор упругих напряжений  $S_{xx}$  через обобщённый закон Гука

$$\frac{dS^{xx}}{dt} = 2G \frac{de^{xx}}{dt} \quad (2.2)$$

Аппроксимация тензора деформаций задаётся в виде

$$\frac{de_i^{xx}}{dt} = \frac{4}{3} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W'_{ij} (U_i^x - U_{ij}^{*x}) \quad (2.3)$$

где  $U_{ij}^*$  определяется по формуле (1.36) с заменой  $R$  на  $x$ .

В пластическом течении в соответствии с критерием текучести Мизеса значения компоненты девиатора напряжений  $S^{xx}$  при выходе напряженного состояния материала за пределы цилиндра текучести корректируются множителем

$$\sqrt{2Y_0/3S^{xx}} \quad (2.4)$$

где  $Y_0$  есть предел текучести материала.

Начальный разрыв параметров напряженного состояния среды в точке  $x/L=0.5$  есть  $\sigma_1^{xx}=4$  ГПа и  $\sigma_2^{xx}=0$ , слева и справа от разрыва соответственно. Во всей области  $\rho_1=\rho_2=2700$  кг/м<sup>3</sup>. Это соответствует алюминию, и в расчёте принимались следующие его свойства:  $K=73$  ГПа,  $G=23$  ГПа,  $Y_0=0.3$  ГПа.

Длина расчётного интервала  $L=0.1\text{м}$  была разбита на 200 SPH-частиц. На рисунке 2.1 показаны результаты расчётов для момента времени 5 мкс. Сплошной линией показано аналитическое решение.

Скорости и амплитуды упругих и пластических волн, полученные в расчете, практически совпадают с аналитическим решением [13].

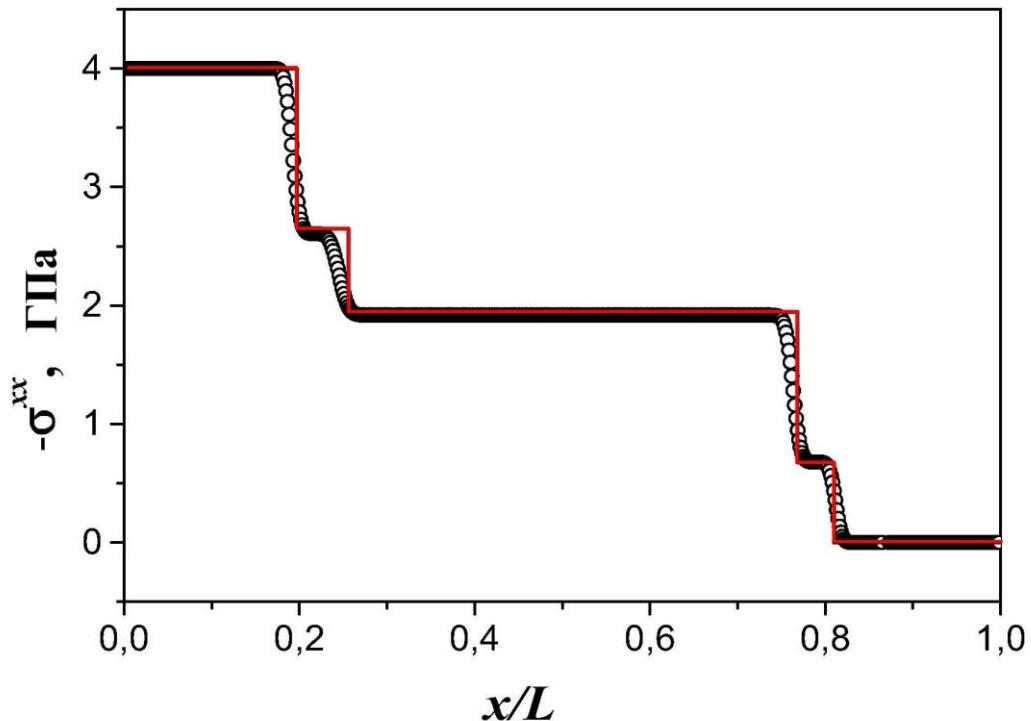


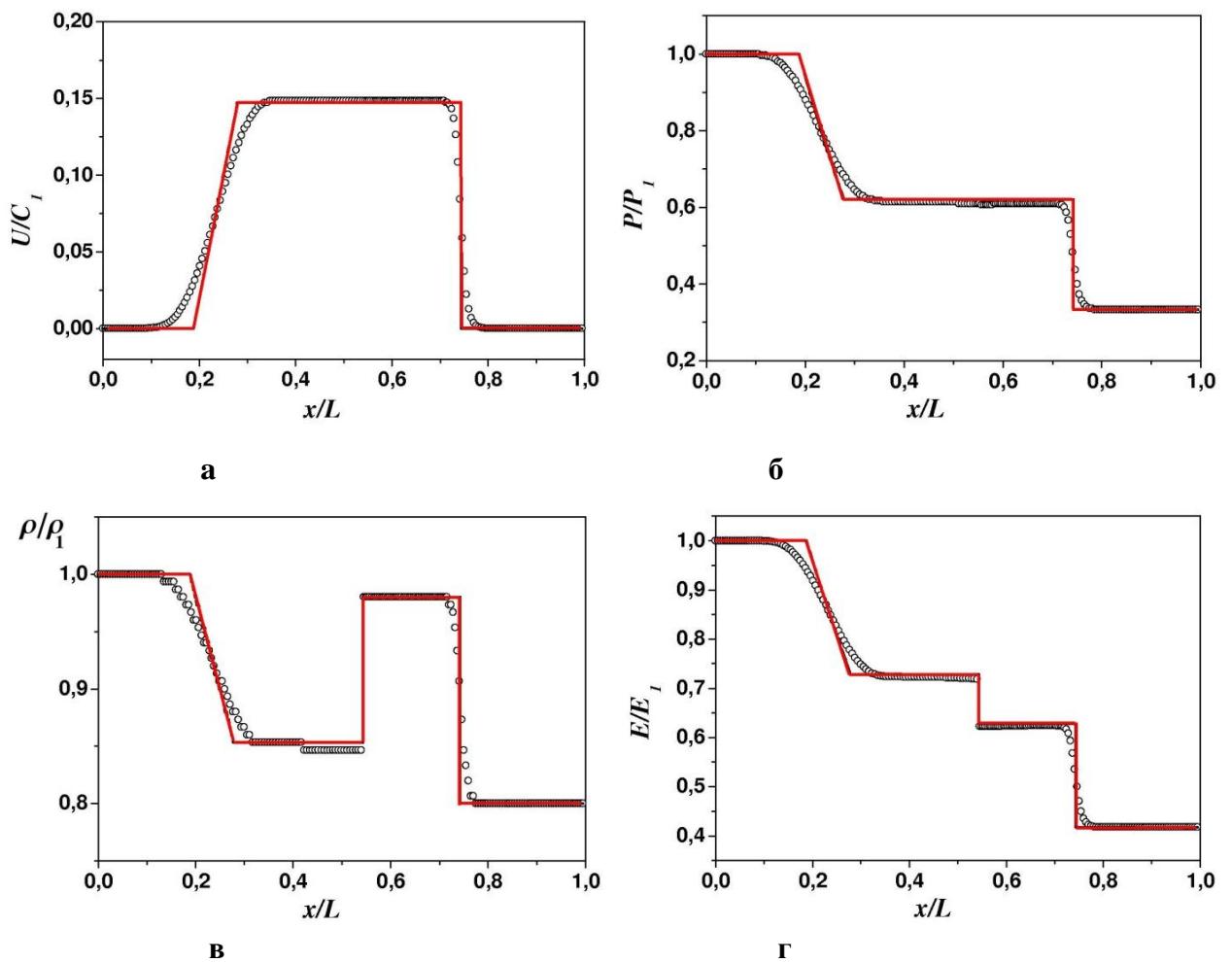
Рисунок 2.1 – Распад разрыва в упругопластической среде. Красной сплошной линией показано аналитическое решение

## 2.2. Расчёт распада разрыва в газе

Приведенный выше гидродинамический тестовый расчет был подобран из тех соображений, что разработанный метод SPH применяется в основном для решения задач соударения в упругопластическом режиме, который для большинства реальных конденсированных сред соответствует дозвуковому диапазону скорости взаимодействия примерно в  $1 \div 3$  км/с. Представляет интерес оценить возможности метода при расчете как сверхзвуковых течений с предельным сжатием, так и течений слабосжимаемых жидкостей при больших деформациях и перемещениях. Для иллюстрации вычислительных возможностей метода в этих режимах взаимодействия служат приведенные

ниже расчеты. Исходные данные для задачи распада разрыва следующие. Начальные параметры газа задаются на момент времени  $t=0$ . Исходное положение контактной поверхности  $x/L=0.5$ . Расчетная область размером  $L=0.1\text{м}$  содержит 200 расчетных частиц равных размеров. Слева от контактной поверхности:  $P_1=3\times10^4 \text{ Па}$ ,  $\rho_1=1500 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $U_1=0$ . Справа от контактной поверхности:  $P_2=10^4 \text{ Па}$ ,  $\rho_2=1200 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $U_2=0$ . Показатель адиабаты газа  $\gamma_1=\gamma_2=3$ .

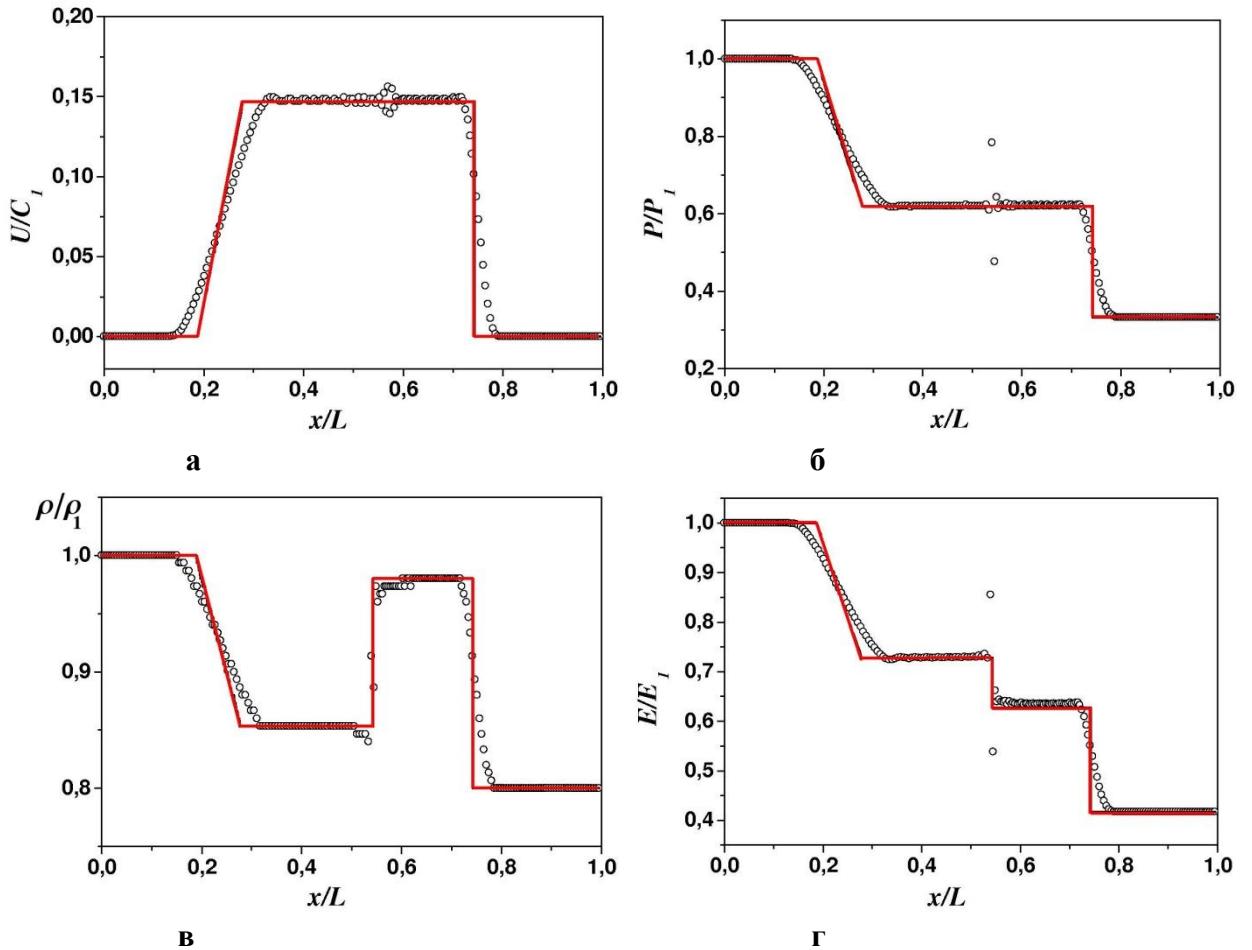
Уравнения (1.24)-(1.26) были дополнены уравнением состояния идеального газа  $P=(\gamma-1)\rho E$  и применены к решению задачи распада разрыва с приведенными выше исходными данными. На рисунке 2.2 проведено сравнение расчетных профилей  $U(x)$ ,  $E(x)$ ,  $P(x)$ ,  $\rho(x)$  с точным решением [55].



**Рисунок 2.2 – Распад разрыва в газе по модифицированному методу SPH.**  
Скорость (а), давление (б), плотность (в) и внутренняя энергия (г) относительно  
расстояния. Сплошная линия показывает аналитическое решение

На рисунке 2.3 показаны для сравнения результаты решения этой же задачи стандартным методом SPH с помощью уравнений (1.15)-(1.17), и с применением искусственной вязкости

$$q_i = 20D_i^2 \rho_i \dot{\varepsilon} |\dot{\varepsilon}| + 0.5 D_i \rho_i C_i^l \dot{\varepsilon} \quad (2.5)$$



**Рисунок 2.3 – Распад разрыва в газе по стандартному методу SPH. Скорость (а), давление (б), плотность (в) и внутренняя энергия (г) относительно расстояния.**

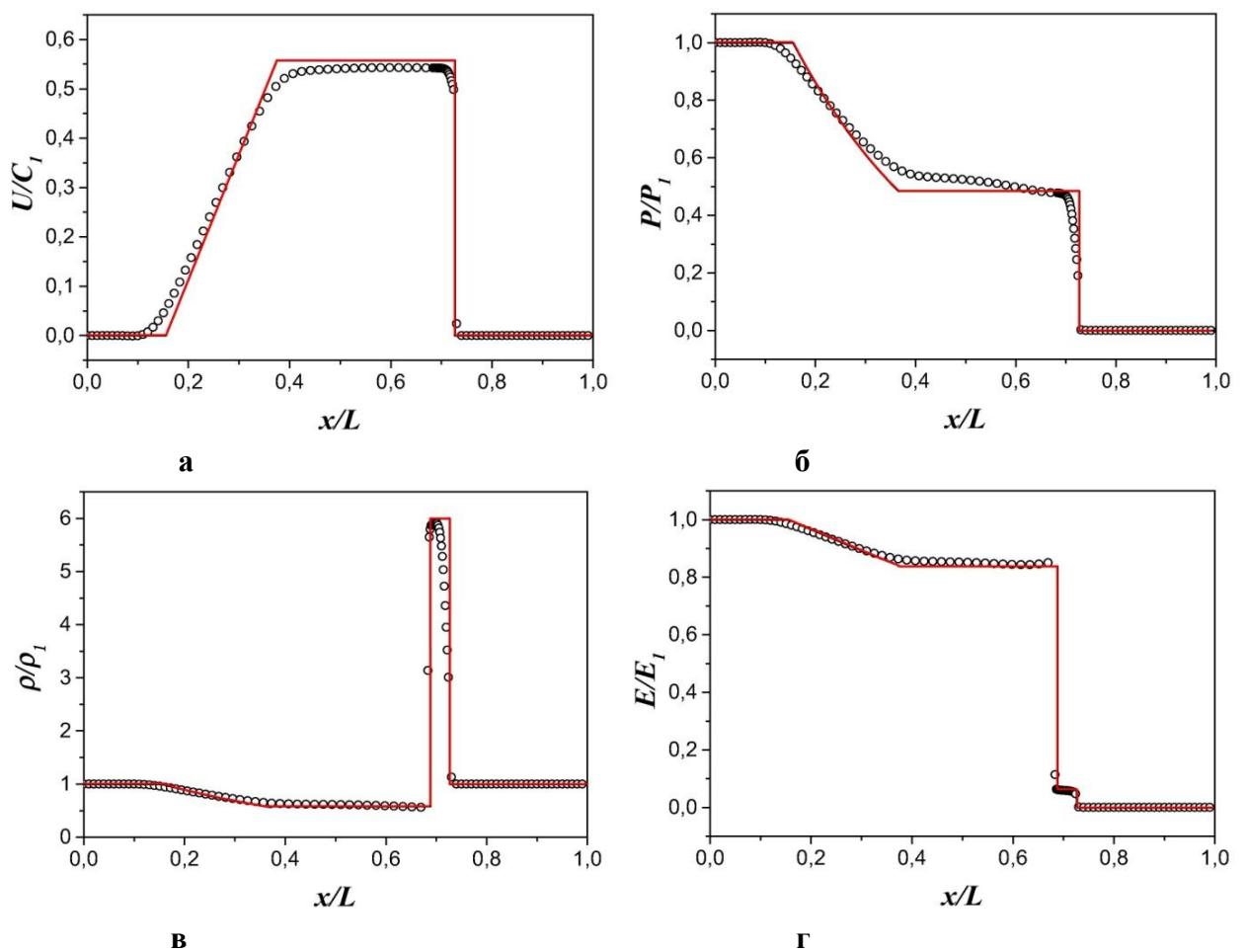
**Сплошная линия показывает аналитическое решение**

При решении задачи стандартным методом в окрестности контактного разрыва наблюдается значительная погрешность вычисления параметров течения газа, природа которой объяснялась ранее в разделе 1.1.

В работах [91,92] было произведено детальное сравнение разработанного автором диссертации метода SPH со стандартным методом. Показано, что в окрестности контактного разрыва модифицированный метод обладает меньшими погрешностями в расчёте полей давления и энергии.

## 2.3. Расчёт взрывной волны

Вторая тестовая задача о распаде разрыва называется в иностранной литературе «взрывная волна» (*blast wave*), так как контактирующие области содержат газы со значительным перепадом давлений, что приводит к формированию сильной ударной волны. В данном случае начальный скачок давления находится в точке  $x/L=0.5$ . Значения параметров газа слева (нижний индекс 1) и справа (нижний индекс 2) следующие:  $P_1=3\times10^{10}$  Па,  $P_2=1\times10^5$  Па,  $\rho_1=1.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2=1.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $U_1=U_2=0$ . Результаты расчетов показаны на рисунке 2.4.

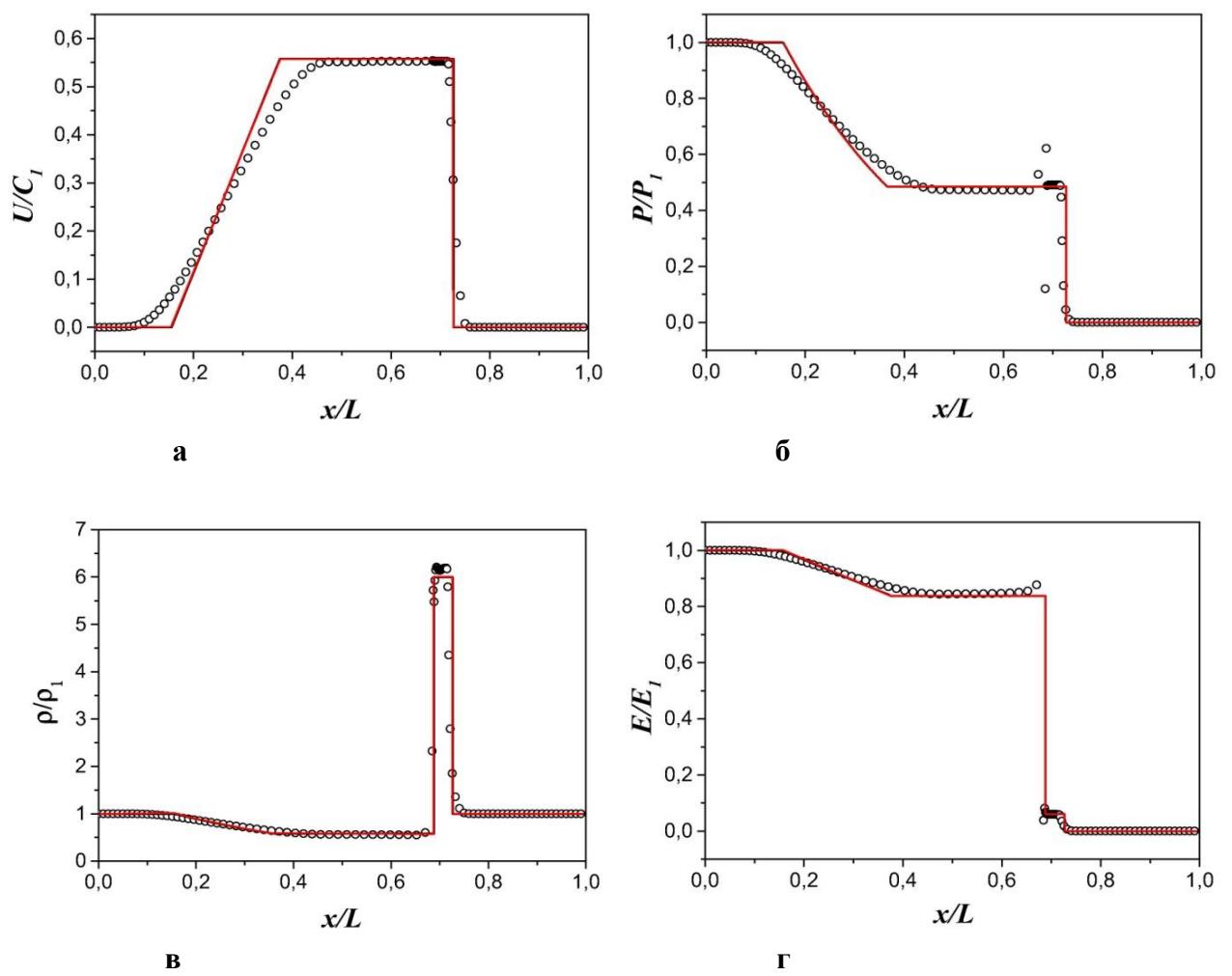


**Рисунок 2.4 – Распад разрыва в газе по модифицированному методу SPH.**  
**Скорость (а), давление (б), плотность (в) и внутренняя энергия (г) относительно**  
**расстояния. Сплошная линия показывает аналитическое решение**

Перепад давлений порождал сильную ударную волну и линеаризованные решения типа (1.20)-(1.21) не годились для расчета параметров распада разрыва. Предложенный в [82] неявный алгоритм расчета требует большого числа итераций, и вместо него использовалась безытерационная процедура решения задачи распада разрыва, детально описанная в [93].

Показатели адиабаты в этом случае  $\gamma_1=1.3$  (нагретый газ) и  $\gamma_2=1.4$ . Длина расчетного интервала составляет  $L=0.1$  м и содержит 200 частиц.

На рисунке 2.5 показаны результаты решения этой задачи по стандартному методу с искусственной вязкостью (2.5).



**Рисунок 2.5 – Распад разрыва в газе по стандартному методу SPH с использованием искусственной вязкости (1.65). Скорость (а), давление (б), плотность (в) и внутренняя энергия (г) относительно расстояния. Сплошная линия показывает аналитическое решение**

Следует отметить тот факт, что стандартный метод SPH (с искусственной вязкостью) потребовал в 7 раз больше расчетного времени.

В расчетах стандартным методом по обе стороны контактного разрыва наблюдается стационарный нефизический скачок параметров  $P$ ,  $E$  и  $\rho$ .

## 2.4. Расчёт сдвигового течения в жидкости

Рассмотрим интенсивное сдвиговое течение в воде. Значения параметров воды следующие:  $P=0$ ,  $\rho_0=1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $K=2\times10^9$  Н/м<sup>2</sup>. Воду при этом будем полагать баротропной средой, описываемую уравнением состояния (2.1).

В данном тестовом расчёте течение рассматривается как движение двух одинаковых сжимаемых сред, занимающих области  $y>0$  и  $y<0$  и находящихся в контакте вдоль плоскости  $y=0$ . Остальные границы областей полагаются свободными. Каждая область моделировалась  $20\times20\times1$  SPH-частицами диаметром  $3.85\times10^{-3}$  м каждая. В момент  $t=0$  обе области жидкости приводятся в равномерное и прямолинейное движение:

$$U_x = \begin{cases} 250\text{м/c}, & y > 0 \\ -250\text{м/c}, & y < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

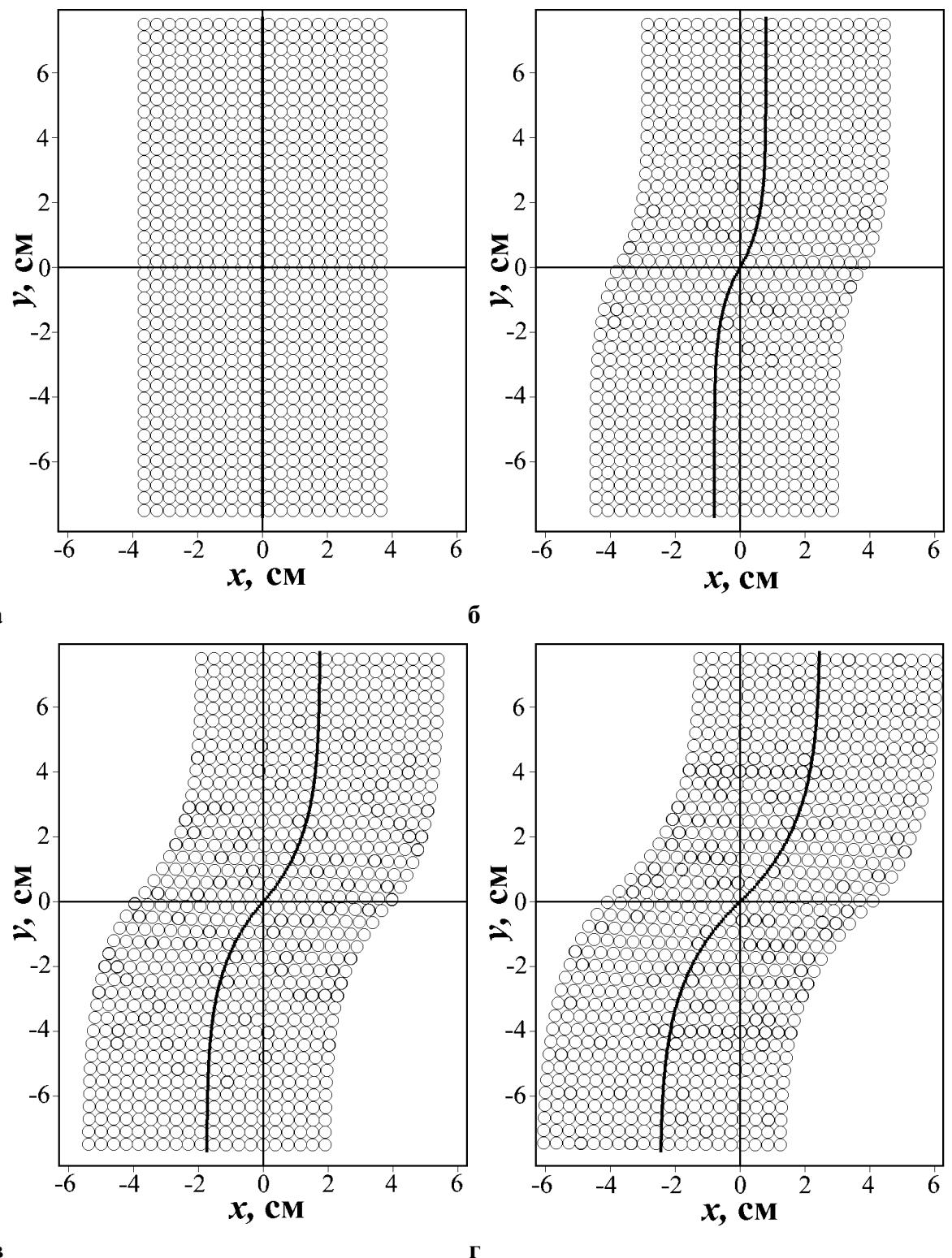
Для обеих областей  $U_y=U_z=0$ .

Диффузия на контактной поверхности в данном случае будет обусловлена только схемной вязкостью. На рисунке 2.6 показано рассчитанное сдвиговое течение в невязкой воде. Картина течения аналогична течению вязкой жидкости в первой задаче Стокса [94].

Если ввести для момента времени  $t=0$  контрольную лагранжеву поверхность  $X=0$ , то её эволюция в любой момент времени  $t$  будет определяться через скорость  $u_x(y,t)$  (согласно [94]) следующей зависимостью:

$$X(y,t) = \int_0^t u_x(y,t) dt = \int_0^t U_x \operatorname{Erf}\left(y/\sqrt{4\pi\nu}\right) dt \quad (2.7)$$

Здесь  $X(y,t)$  есть смещение частиц, принадлежащих контрольной поверхности, относительно своего первоначального значения.



**Рисунок 2.6 – Течение в невязкой жидкости при начальном тангенциальном разрыве скорости. Начальное расположение частиц (а) и их положения в моменты времени 50мкс (б), 100мкс (в) и 150мкс (г). Сплошной линией обозначена контрольная поверхность (2.7), показывающая отклонение частиц от первоначального положения**

$$x=0$$

Можно подобрать такую кинематическую вязкость  $\nu$  в аналитическом решении (2.7), чтобы  $X(y,t)$  хорошо совпадала с численным расчётом на рисунке 2.6.

Тогда это значение  $\nu$  можно поставить в соответствие схемной вязкости в численном расчёте. На рисунке 2.6 сплошной линией показана рассчитанная по (2.7) эволюция контрольной поверхности в жидкости. Аналитическое решение соответствует значению кинематической вязкости  $\nu=7 \text{ м}^2/\text{с}$ .

## 2.5. Расчёт распада температурного разрыва

Решение о распаде температурного разрыва (1.50) было использовано для тестирования SPH-аппроксимации (1.53). Этот тест был предложен в работе [87] и с успехом применен для проверки аппроксимации (1.48).

Расчётный интервал протяженностью в 0.1 м состоит из двух различных материалов, контактирующих при  $x/L=0.5$ . Термофизические свойства материалов представлены в таблице 2.1

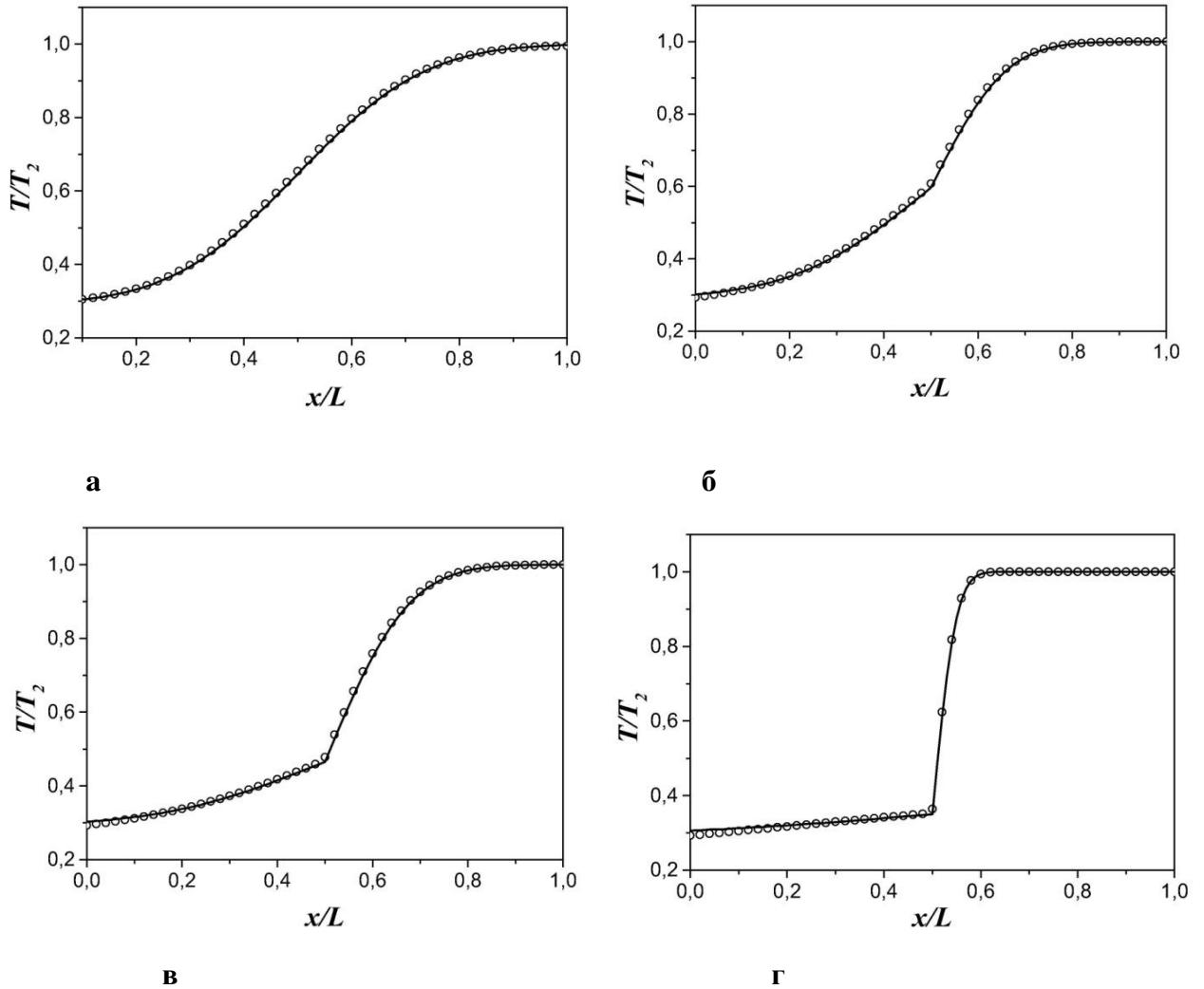
Число частиц в интервале составляет 100. Начальные условия:  $T(x,0)=T_1=300\text{K}$ ,  $x<0$  и  $T(x,0)=T_2=1000\text{K}$ ,  $x>0$ . Левая и правая границы интервала полагаются теплоизолированными и поток тепла через них отсутствует.

Таблица 2.1 – Термофизические свойства материалов

Свойство материала	Материал				
	алюминий	латунь	свинец	фарфор	газ
$\rho_0, \text{ кг}/\text{м}^3$	2700	8700	11350	2500	$3.75 \times 10^{-3}$
$C_V, \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$	880	380	130	920	$5.2 \times 10^3$
$\lambda, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	200	85.5	35	1.68	2.3

Расчёты проводились для четырёх пар контактирующих материалов: алюминий-алюминий, алюминий-латунь, алюминий-свинец, алюминий-фарфор. Результаты вычислений показаны на рисунке 2.7 и там же приведены

аналитические решения (сплошная линия) по (1.50). При расчете диффузии тепла в однородной среде ( $a_i=a_j$ ) уравнение (1.53) превращается в уравнение (1.48).



**Рисунок 2.7 – Профиль температуры при распаде температурного разрыва в (а) алюминий-алюминий при времени  $t=2\text{с}$ , (б) алюминий-латуни при времени  $t=3\text{с}$ , (в) алюминий-свинце при времени  $t=4\text{с}$ , (г) алюминий-фарфоре при времени  $t=10\text{с}$**

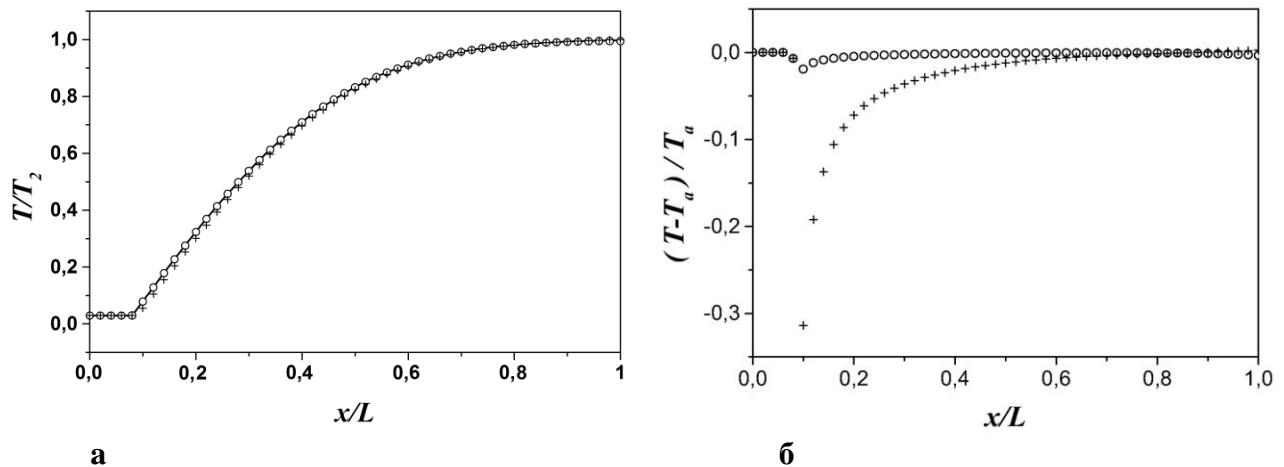
При расчете диффузии тепла через контактный разрыв различных материалов  $a_i \neq a_j$ , поэтому уравнения (1.53) и (1.48) дают различный результат в окрестности контактного разрыва. Расчеты потока тепла через контактный разрыв показали идентичность расчетов по (1.53) и (1.48) для широкого диапазона различных пар конденсированных материалов при градиентах температур вплоть до температуры кипения одного из материалов. Различие в

расчетах начинает проявляться с разницами в температуропроводности контактирующих материалов примерно в 8 порядков [57]. Значение параметра  $\beta$  из (1.49), обеспечивает, по утверждению авторов [87], стабильное интегрирование уравнения (1.48) при  $\beta = 0.15$ .

Для уравнения (1.53) этот параметр оказался равным  $\beta = 0.35$ .

Для сравнения разработанного метода (1.53) со стандартным [87] была решена задача теплового контакта фарфора с горячим газом высокой температуропроводности. Начальные условия:  $T(x,0)=T_1=300\text{K}$ ,  $x/L < 0.1$  (фарфор) и  $T(x,0)=T_2=10000\text{K}$ ,  $x/L > 0.1$  (горячий газ).

На рисунке 2.8,а показан профиль температуры в момент времени  $4 \times 10^{-9}\text{с}$  для области  $L=0.1\text{мм}$ , рассчитанный обоими методами. На рисунке 2.8,б сравниваются относительные ошибки методов с профилем температуры  $T_a$ , полученным из аналитического решения. Относительная ошибка в расчете температуры горячего газа вблизи стенки на порядок ниже для разработанного метода, чем для стандартного метода [87].

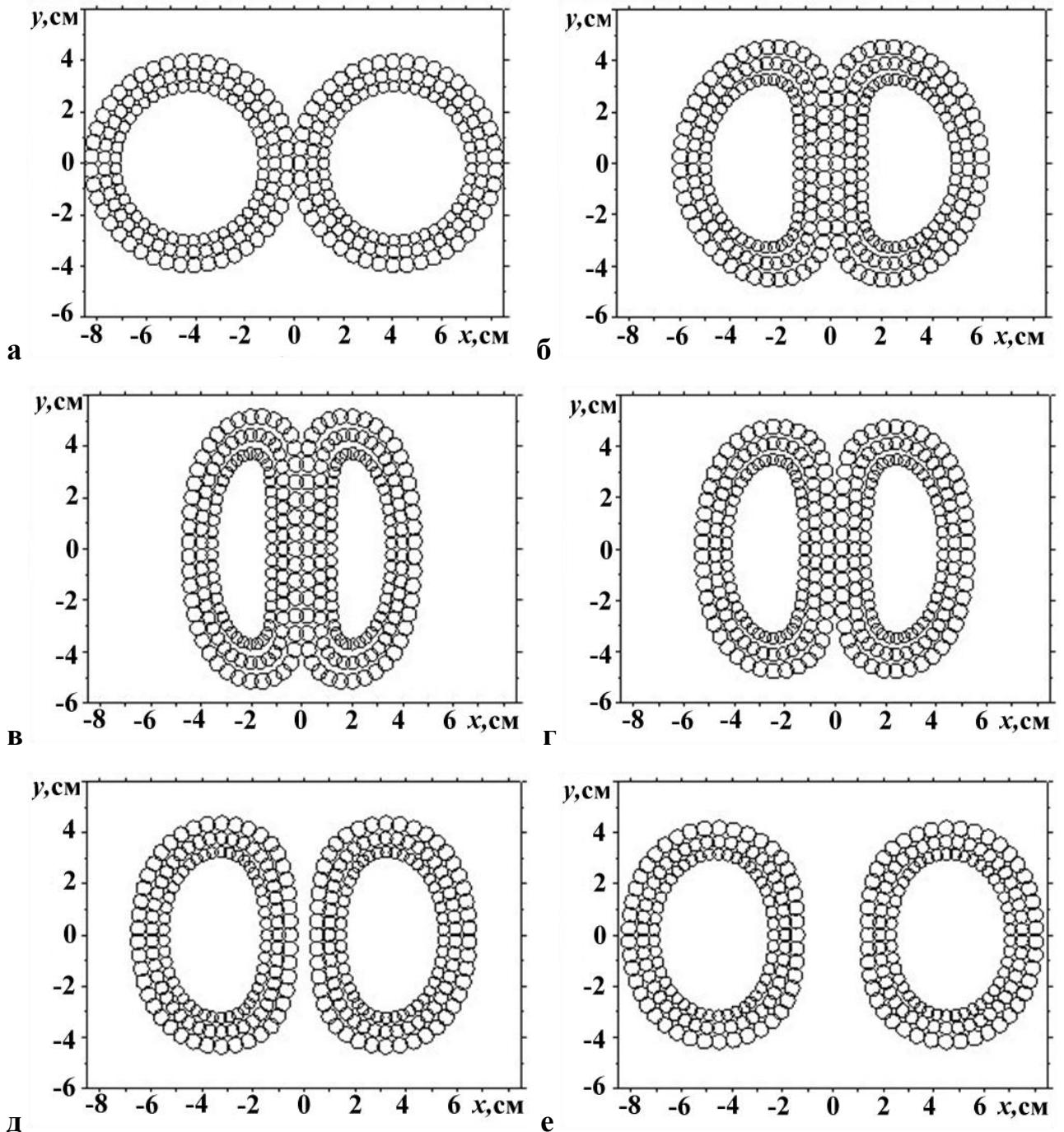


**Рисунок 2.8 – Профили температуры и относительная ошибка вычисления температуры с использованием уравнения (1.60) (○) и методики [87] (+)**

## 2.6. Расчёт соударения резиновых цилиндров

Методы SPH имеют недостатком то обстоятельство, что в силу своей свободно-лагранжевой природы допускают нефизическую фрагментацию расчётной области, или схемное разрушение. Целью теста является проверка,

обладает ли полученная расчётная схема подобным недостатком. Тест в плоской двумерной постановке по соударению резиновых цилиндров представлен в [95] и воспроизведен в [57]. Два резиновых цилиндра (рисунок 2.9а) соударяются, их исходные данные таковы: внешние радиусы цилиндров 4.25см, внутренние радиусы 2.75см, плотность  $\rho_0=1200$  кг/м<sup>3</sup>, модуль сдвига  $G=0.22$ МПа, скорость звука в материале  $C_0=850$ м/с.



**Рисунок 2.9 – Соударение и отскок резиновых цилиндров. Фазы сжатия и расширения показаны во времена  $t=0$  (а), 0.5 (б), 2 (в), 5 (г), 10 (д) 18(е) миллисекунд**

Уравнение состояния материала описывается зависимостью  $P = (\rho - \rho_0)C_0^2$ .

Каждый цилиндр перед соударением имеет скорость 50 м/с и состоит из 135 частиц.

Рисунки с 2.9а до 2.9е показывают моменты времени  $t=0, 0.5, 2.5, 10$  и  $18\text{мс}$  соответственно. Во время соударения цилиндры деформируются без разрушения. Затем они отскакивают друг от друга без последующих колебаний. Это может быть связано с большой численной вязкостью алгоритма. Увеличение числа частиц до 1080 не привело к перелому цилиндров.

## 2.7. Расчёт вращения упругой пластины

Целью теста является проверка, сохраняется ли в полученной численной схеме угловой момент.

Тонкий упругий диск радиусом 10 см вращается вокруг оси, пересекающей его центр и нормальной к его плоскости. Диск состоит из алюминиевых SPH-частиц, каждая диаметром  $2.55 \times 10^{-3}$  м. Упругие свойства алюминия приведены в разделе 2.1

В данном расчёте предел текучести полагался  $Y_0 = \infty$ . Поскольку диск считается тонким, радиальные и окружные напряжения по толщине диска полагаются равными нулю.

Расчеты выполнены при следующих начальных условиях: диск вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\Omega = 3 \times 10^3 \text{с}^{-1}$ , напряжения задаются аналитическим решением [96].

На рисунке 2.10 показано положение диска в различные моменты времени  $t=0(\text{а}), 0.33(\text{б}), 0.65(\text{в}), 1.74(\text{г})$  мс. Во времена (б), (в) и (г) угол поворота составляет  $\pi/4, \pi/2$ , и  $2\pi/3$ . При этом угловой момент уменьшается как  $L_z/L_0 = 0.64, 0.26$  и  $0.017$  соответственно.

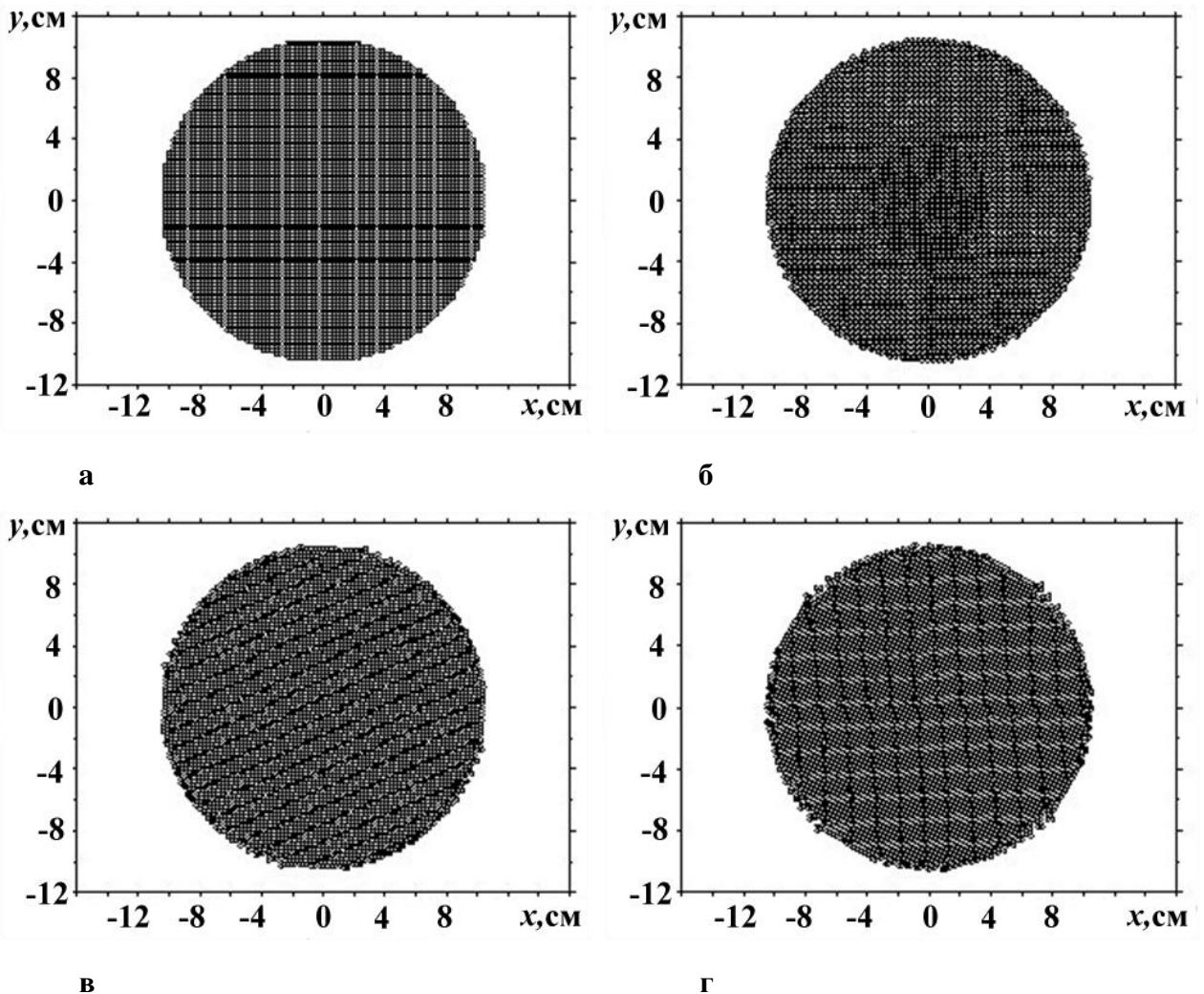


Рисунок 2.10 – Вращение тонкого диска, времена  $t=0$  (а),  $0.33$  (б),  $0.65$  (в),  $1.74$  (г) мс

## 2.8. Расчёт разрушения хрупких материалов (стёкол) по волновой модели при ударном сжатии

Целью данного теста является проверка, насколько правильно расчётная схема описывает процесс разрушения предварительно сжатого ударной волной материала (стекла). Разрушение материала происходит в волне разрушения, распространяющейся от поверхности нагруженного ударом образца.

Сжатие стекол и, возможно, других хрупких материалов ударной волной при условии превышения порогового напряжения сопровождается возникновением волны разрушения в материале. Она распространяется по сжатому ударной волной упругому хрупкому материалу со скоростью, меньшей скорости звука и близкой к предельной скорости роста трещин. Волна

разрушения имеет узкий фронт, в котором происходит нарушение сплошности материала в результате взрывного роста трещин.

Волна разрушения зарождается на поверхности нагружаемого тела. От расположенных на поверхности неоднородностей трещины прорастают внутрь материала. Энергия, необходимая для нарушения сплошности, черпается из потенциальной энергии упруго сжатого материала. Таким образом, имеет место самоподдерживающееся разрушение при сжатии.

Первые математические модели для описания процессов разрушения хрупких материалов в условиях, когда разрушение локализовано в тонком слое (фронте), распространяющемся по материалу, были предложены в конце 60-х годов прошлого века [94,98]. В работе [94] состояние разрушенного материала определялось дополнительным соотношением типа условия пластичности Мизеса, а разрушение материала допускалось при достижении перед фронтом предельной по прочности величины касательного напряжения. Принималось также, что в разрушенном материале модуль объемного сжатия имеет такое же значение, как и в неразрушенном материале. Скорость распространения волны разрушения определялась в результате решения задачи как функция критериев разрушения и упругих свойств. В работе [98] замыкающее соотношение на фронте разрушения задавалось введением допустимой величины разности значений удельной упругой энергии материала на фронте.

В экспериментах формирование волн разрушения было впервые обнаружено в работах [99,100]. Ударные волны генерировались в плоских стеклянных образцах и регистрировалась скорость их тыльной поверхности. На осциллограммах фиксировался приход импульса сжатия, отраженного от фронта волны разрушения. В последующих экспериментах других лабораторий [101] также наблюдались волны разрушения. Измеренные датчиками профили поперечного напряжения сжатия имели двухволновую структуру.

В ряде работ [101,102] наблюдалось распространение волн разрушения в стеклянных стержнях. В отличие от пластин, в стержнях скорость волны достигала высоких значений, приближаясь к скорости упругих волн. Это, по-

видимому, было связано с инициацией волн разрушения на боковых поверхностях непосредственно за фронтом головной ударной волны.

Математическое моделирование распространения волн разрушения основано на введении параметра разрушения, определяющего степень потери сплошности материала, и уравнений, описывающих его изменение в нагруженном материале. Для разрушающегося материала строятся реологические соотношения, функционально зависящие от параметра разрушения [103-106]. Существуют различные подходы при построении модельных уравнений для параметра разрушения. В [103,107] вводится кинетическое уравнение, описывающее изменение параметра разрушения. В работе [104] эволюция этого параметра описывается диффузионным уравнением. В статье [105] используется волновое уравнение. Феноменологический подход для определения параметра разрушения развит в [106]. Реология хрупкого материала (стекла) в процессе разрушения представлена семейством кривых в плоскости эквивалентное напряжение – давление, ограниченное предельными кривыми для неразрушенного материала и полностью разрушенного материала. Состояние частично разрушенного материала описывается промежуточной кривой, являющейся линейной комбинацией предельных кривых с коэффициентом пропорциональности, равным параметру разрушения. Величина параметра разрушения рассчитывается по эволюционному уравнению, связывающему скорость разрушения материала со скоростью эквивалентной пластической деформации.

В данной диссертационной работе используется модель, представленная в [108], где распределение параметра разрушения описывается нелинейным волновым уравнением, а реологические соотношения для разрушающегося материала представляются аналогично тому, как это предложено в [106]. Помимо тестирования кода, решена двумерная плоская задача о торцевом соударении стеклянной пластины с жесткой преградой.

**Математическая модель волнового разрушения стёкол в волне разрушения.** Для описания течения были использованы уравнения сохранения массы и импульса:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (2.8)$$

$$\rho \frac{du_x}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial y}, \quad \rho \frac{du_y}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x}, \quad (2.9)$$

содержащие следующие переменные: плотность  $\rho$ , компоненты вектора скорости  $u_\alpha$ , давление  $P$  и компоненты девиатора тензора напряжений  $S_{\alpha\beta}$ .

Уравнение состояния принято в простейшем виде (2.1) для шаровых компонент напряжений и деформаций:

$$P = K(1 - \rho_0 / \rho) \quad (2.10)$$

Компоненты девиатора тензора напряжений  $S_{\alpha\beta}$  удовлетворяют закону Гука с учетом поправки на вращение

$$\frac{dS_{xx}}{dt} = \frac{2}{3}G \left( 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\omega S_{xy} \quad (2.11)$$

$$\frac{dS_{yy}}{dt} = \frac{2}{3}G \left( 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - 2\omega S_{xy} \quad (2.12)$$

$$\frac{dS_{xy}}{dt} = G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \omega(S_{xx} - S_{yy}) \quad (2.13)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

где содержатся упругие константы – модуль объемного сжатия  $K$  и модуль сдвига  $G$  для неразрушенного материала. Система уравнений (2.8)-(2.14) описывает поведение упругого материала и является замкнутой. Уравнение сохранения энергии отделяется от уравнений сохранения массы и импульса (2.8)-(2.9) и здесь не приведено.

Степень разрушения материала описывается параметром разрушения  $D$  ( $0 \leq D \leq 1$ ). Для неразрушенного материала  $D=0$ , для полностью разрушенного

материала  $D=1$ . Следуя феноменологическим подходам работ [99,105,108], предложенным для определения эволюции параметра разрушения в нагруженном материале, будем считать, что разрушение материала представляет собой самораспространяющийся волновой процесс в теле, в котором до приложения нагрузки уже имелись локализованные зоны или поверхности поврежденного материала с заданным начальным распределением параметра  $D$ . Волны разрушения распространяются от поврежденных участков тела после того, как в них достигаются пороговые значения критериев нагружения. Скорость волны разрушения  $C_f$  при этом полагается заданной характеристикой материала, определяемой в эксперименте. Скорость накопления повреждения в лагранжевой частице принимается пропорциональной модулю градиента параметра разрушения  $D$ . Нелинейное волновое уравнение для параметра разрушения  $D$  записывается в виде

$$\frac{dD}{dt} = C_f \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2} \quad (2.15)$$

Предельное состояние материала в процессе разрушения описывается параметрической связью между эквивалентным напряжением

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + 2S_{xy}^2)} \quad (2.16)$$

и давлением  $P$ . Эта связь задается в следующей форме [108]

$$\sigma_e = \sigma_D \quad (2.17)$$

$$\sigma_D = (1 - D)\sigma_f + D\sigma_c \quad (2.18)$$

$$\sigma_c = \begin{cases} \sqrt{4.84 \cdot 10^{18} - (P - 2.2 \cdot 10^9)^2}, & P < 1.5 \cdot 10^9 \\ 1.5(1.1 \cdot 10^9 + 0.2P), & P \geq 1.5 \cdot 10^9 \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\sigma_f = 1.5(1.6 \cdot 10^9 + 0.5P) \quad (2.20)$$

где  $\sigma_f$  – пороговое значение эквивалентного напряжения, выше которого возможно разрушение неповрежденного материала; и  $\sigma_c$  – критериальное значение эквивалентного напряжения для полностью разрушенного материала (конус Друкера-Прагера с закругленной вершиной).

В уравнениях (2.19)-(2.20) числовые коэффициенты подобраны для силикатного стекла и давление  $P$  измеряется в паскалях. Давление  $P$  связано с плотностью  $\rho$  уравнением (2.10). Решение краевой задачи для волны разрушения справедливо с того момента, когда нарушается равенство (2.17), т.е. при  $\sigma_e > \sigma_D$ .

Для решения приведенной системы уравнений применялся описанный выше метод SPH, использующий при расчете взаимодействия частиц среды решение задачи распада разрыва. Для волнового уравнения (2.15) производные в правой части аппроксимировались стандартным образом

$$\frac{\partial D_i}{\partial x} = -\sum_j \frac{m_j W_{ij}'}{\rho_i \rho_j} D_j \frac{x_j - x_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}, \quad \frac{\partial D_i}{\partial y} = -\sum_j \frac{m_j W_{ij}'}{\rho_i \rho_j} D_j \frac{y_j - y_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (2.21)$$

Затем уравнение (2.15) решалось для SPH-частицы  $i$  в конечных разностях [61].

Для расчета компонент девиатора тензора напряжений  $S_{\alpha\beta}$  в разрушающемся материале применялся алгоритм с корректировкой напряжений, аналогичный методике Уилкинса [90], примененной для приведения упругих напряжений в упругопластическом материале на цилиндр текучести. В разрушающемся материале решались уравнения (2.11)-(2.15) с упругими константами для неповрежденного материала. Вычисленные значения компонент девиатора тензора напряжений  $S_{\alpha\beta}^e$  при условии  $\sigma_e > \sigma_D$  корректировались на поверхность разрушения (2.19) следующим образом [61]:

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^e (\sigma_D / \sigma_e)^D \quad (2.22)$$

Соотношение (2.22) обеспечивает согласование параметра разрушения и напряжённого состояния в зоне разрушения материала, заключённой между критериями (2.19) и (2.20). В отличие от случая упругопластического перехода, корректировка напряжений при разрушении возможна только после прихода волны разрушения, которая в двумерных течениях может сопрягаться с головной ударной волной. Упругое состояние в области между ударной волной и фронтом волны разрушения может иметь значения эквивалентного

напряжения  $\sigma_e$ , превышающее предел разрушения  $\sigma_f$ . В таблице 2.2 приведены свойства стекла, принятые в расчётах.

Таблица 2.2 Характеристики стекла.

Параметр	Величина
Плотность $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	2480
Модуль сдвига $G$ , ГПа	28.55
Изотермический модуль объемного сжатия $K$ , ГПа	43.36
Скорость волны разрушения $C_f$ , м/с	1600
Скорость продольной волны $C_l$ , м/с	5730
Скорость объемной волны $C_b$ , м/с	4181

**Аналитическое решение задачи о волновом разрушении и тестовые расчеты.** Рассмотрим одномерную задачу о нагружении упругого полупространства, граница которого в начальный момент времени начинает двигаться с постоянной скоростью  $u_f$ . Будем считать, что на границе для параметра разрушения выполняется условие  $D = 1$ , и при достаточно высокой интенсивности упругой волны сжатия за ней будет распространяться волна разрушения. Построим аналитическое решение для такой двухволновой конфигурации.

На фронте головной упругой волны, движущейся со скоростью  $C_l$ , выполняются условия сохранения массы и импульса

$$\rho(C_l - u) = \rho_0 C_l \quad (2.23)$$

$$\sigma_x + \rho u(C_l - u) = 0 \quad (2.24)$$

На фронте волны разрушения выполняются уравнения сохранения

$$\rho_f(C_f + u - u_f) = \rho C_f \quad (2.25)$$

$$\sigma_{xf} + \rho_f u_f(C_f + u - u_f) = \sigma_x + \rho u C_f \quad (2.26)$$

условие Друкера-Прагера (вторая строка уравнения (2.19)) и уравнение состояния (2.10)

$$-\sigma_{xf} = \frac{2}{3}\sigma_c + P_f = a + bP_f, \quad a = 1.1 \cdot 10^9 \text{Па}, \quad b = 1.2 \quad (2.27)$$

$$P_f = K(1 - \rho_0 / \rho_f) = \rho_0 C_b^2 (1 - \rho_0 / \rho_f) \quad (2.28)$$

Индекс  $f$  в уравнениях (2.25)-(2.28) относится к параметрам разрушенного материала. Уравнения (2.27)-(2.28) указывают на то, что в рассматриваемом случае разрушенный материал ведет себя как предварительно напряженное упругое тело с модулем объемного сжатия, равным модулю объемного сжатия неповрежденного материала  $K_f = K$ , и модулем сдвига  $G_f = 3K(b-1)/4$ .

Выразим  $\sigma_x$  и  $\sigma_{xf} - \sigma_x$  через  $\rho$  и  $\rho_f$ :

$$\sigma_x = -\rho_0 C_l u = -\rho_0 C_l^2 (1 - \rho_0 / \rho) \quad (2.29)$$

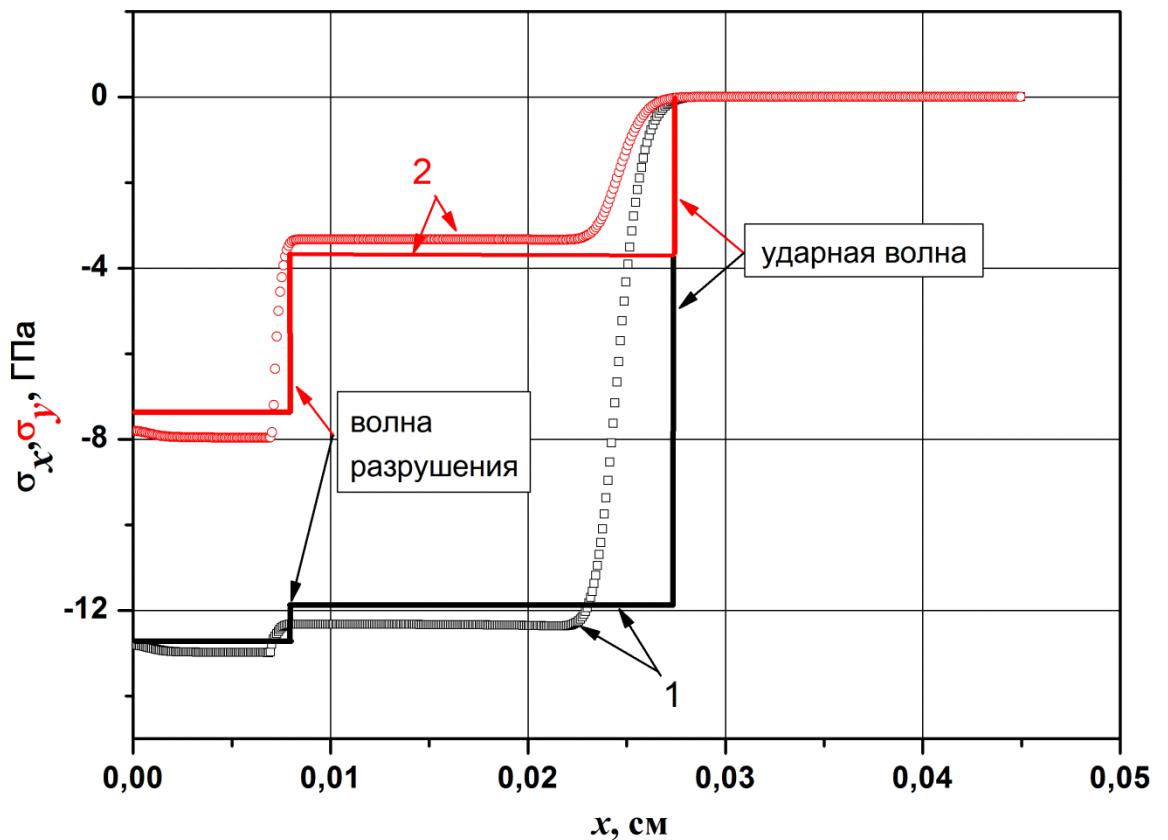
$$\sigma_{xf} - \sigma_x = -\rho C_f (u_f - u) = -\rho C_f^2 (1 - \rho / \rho_f) \quad (2.30)$$

Исключая  $\rho / \rho_f$  из уравнений (2.29)-(2.30), приходим к кубическому уравнению для определения  $\rho / \rho_0$

$$C_f (C_l - u_f) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^3 - (\rho_0 C_l^2 + \rho_0 C_f C_l - a - b\rho_0 C_b^2) \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 - \\ - \left[ \frac{bC_b^2}{C_f} (C_f - u_f + C_l) - C_l^2 \right] \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{bC_b^2 C_l}{C_f} = 0 \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) указывает на то, что значение плотности  $\rho$  за фронтом упругой волны является функцией скорости  $u_f$ , а также свойств материала и параметров критерия разрушения. Упругое состояние за фронтом головного скачка определяется в результате решения полной задачи в отличие от задачи для упругопластической волны, в которой состояние за фронтом упругого предвестника фиксировано заданием предела упругости. По вычисленному значению  $\rho / \rho_0$  определяются  $u$ ,  $\sigma_x$ ,  $\rho_f$  и  $\sigma_{xf}$ . На рисунке 2.11 показаны распределения продольного ( $\sigma_x$ , кривая 1) и поперечного ( $\sigma_y$ , кривая 2) напряжений за фронтом ударной волны и в волне разрушения при скорости границы  $u_f = 1000 \text{м/с}$ . Прямые линии – аналитический расчет, кривые – численное решение. Стрелками показано направление распространения волны

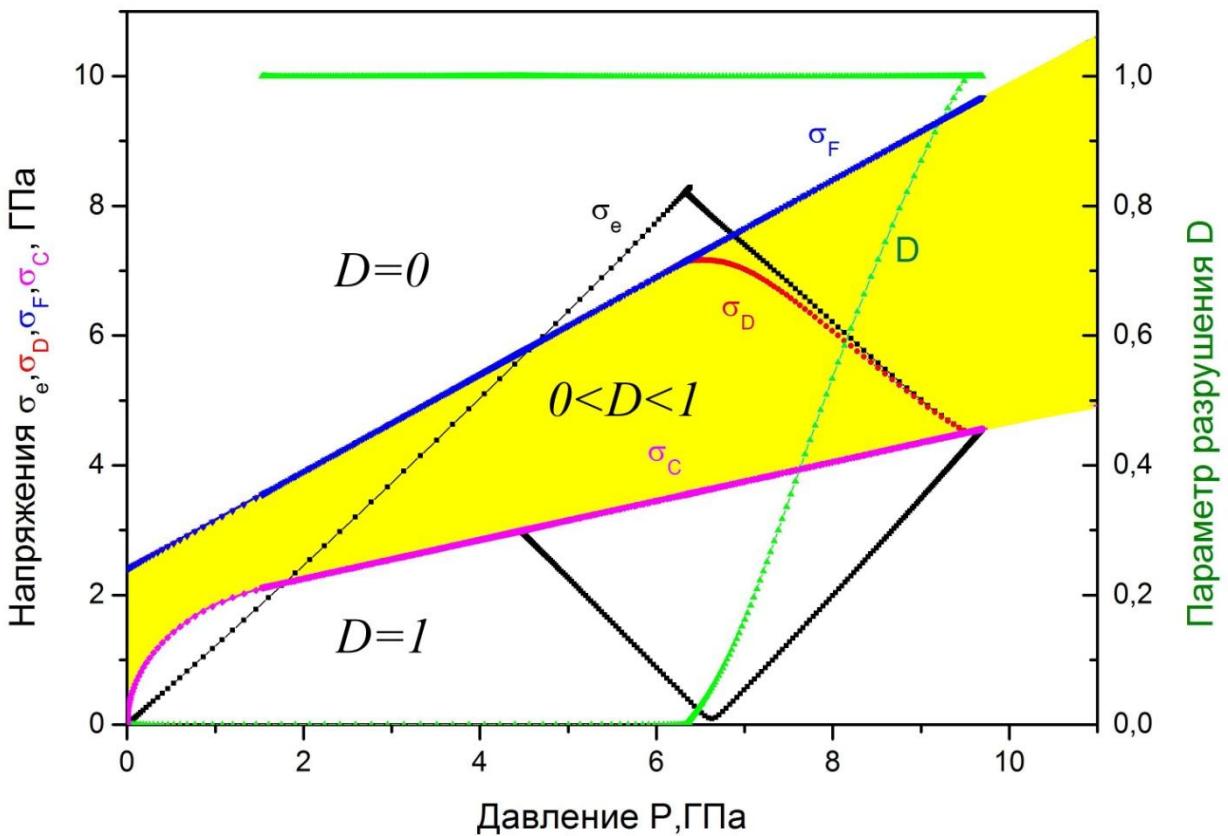
разрушения и ударной волны. Кривые получены в результате расчетов по двумерному коду SPH с граничными условиями, имитирующими одномерное приближение. Можно отметить совпадение амплитуд и скоростей фронтов и, в то же время, их сильное размазывание. Предложенное соотношение (2.22) обеспечивает плавное изменение напряжённого состояния между критериями (2.19) и (2.20) при разрушении материала.



**Рисунок 2.11 – Аналитическое и численное решения задачи о волновом разрушении стекла**

На рисунке 2.12 представлена рассчитанная эволюция напряженного состояния лагранжевой SPH-частицы на диаграмме давление – эквивалентное напряжение. Показаны изменения эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ , порога разрушения  $\sigma_f$ , напряжения на линии Друкера-Прагера  $\sigma_c$ , промежуточного порога разрушения  $\sigma_D$ , и параметра разрушения  $D$  в SPH-частице стекла вблизи жесткой стенки при скорости границы  $u_f = 1000$  м/с. Упругое нагружение

материала происходит вдоль линии  $\sigma_e(P)$  до значений  $\sigma_e = 8$  ГПа и  $P = 6.3$  ГПа. Эти значения лежат выше линии порога разрушения  $\sigma_f(P)$ .



**Рисунок 2.12 – Эволюция напряженного состояния лагранжевой точки в диаграмме давление – эквивалентное напряжение и кривая разрушения**

Пороговое эквивалентное напряжение, определяемое точкой пересечения линий упругого нагружения порогового напряжения, равно  $\sigma_f = 5.62$  ГПа и  $P = 4.29$  ГПа. Материал находится в упругом состоянии вплоть до прихода волны разрушения, после чего происходит релаксация к полностью разрушенному состоянию в соответствии с ростом параметра разрушения  $D$ . Полностью разрушенное состояние ( $D=1$ ) располагается на линии  $\sigma_c(P)$  и характеризуется значениями  $\sigma_e = 4.51$  ГПа и  $P = 9.67$  ГПа.

Решение одномерной задачи качественно отображает особенности зарегистрированных в экспериментах профилей напряжений [99-100]. Так, продольное напряжение несущественно изменяется на фронте волны разрушения, а поперечные напряжения испытывают сильный скачок.

Следует также отметить, что в аналитическом решении импеданс разрушенного материала  $[\rho_f Kb]^{1/2} = 12.89 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{м}^2\text{с}$  ниже импеданса материала в разрушенном состоянии  $[\rho(K+4G/3)]^{1/2} = 15.38 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{м}^2\text{с}$ , что соответствует наблюдаемой в экспериментах [99,100] волне сжатия, приходящей на свободную тыльную поверхность стеклянной пластины после переотражения упругой волны разрежения от фронта волны разрушения.

**Моделирование разрушения стёкланных пластин в двумерном приближении.** В плоском двумерном приближении решалась задача удара стеклянной пластины размерами  $h \times l = 40.4\text{мм} \times 3.2\text{мм}$  о жесткую стенку с начальной скоростью  $u_0=1000\text{м/с}$  (пластина движется справа налево). Стенка располагается в  $x=0$ .

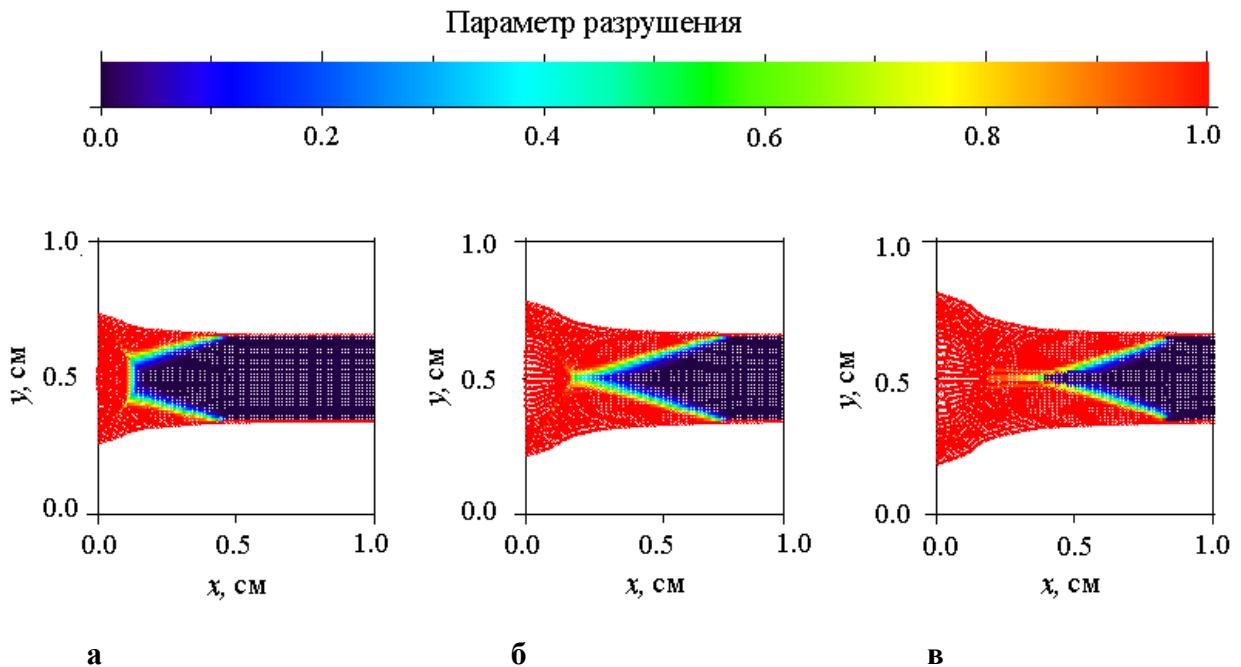
Условия на вертикальной жёсткой стенке задаются следующим образом: для каждой расчётной SPH-частицы  $i$  с параметрами  $\{m, \rho, D, x, y, U_x, U_y, P_i, T_i, S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}\}_i$  на каждом расчётном шаге создаётся виртуальная частица  $j$  с параметрами  $\{m, \rho, D, -x, y, -U_x, U_y, P_i, T_i, S_{xx}, S_{yy}, -S_{xy}\}_j$ . Взаимодействие расчётной  $i$  и виртуальной  $j$  частиц имитирует жёсткую стенку с проскальзыванием.

Расчётная область вмещала 12800 SPH-частиц размерами  $0.1\text{мм} \times 0.1\text{мм}$  каждая. Все частицы, расположенные на границах расчетной области, в момент времени  $t=0$  полагались полностью разрушенными ( $D=1$ ) и тем самым имитировались поверхностные дефекты стекла, являющиеся источником зарождения волны разрушения. Результаты расчетов иллюстрируются на рисунках 2.13–2.14, где построены двумерные распределения (уровни значений) двух переменных – параметра разрушения  $D$  и эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ . На рисунке 2.13 показано распределение параметра разрушения в стеклянной пластине в моменты времени 1 мкс (а), 1.6 мкс (б) и 2 мкс (в) при скорости удара о жесткую стенку  $u_0=1000\text{м/с}$ .

Рисунок 2.13а указывает на то, что в начальный момент времени в ударяющейся пластине формируются три волны разрушения: прямая

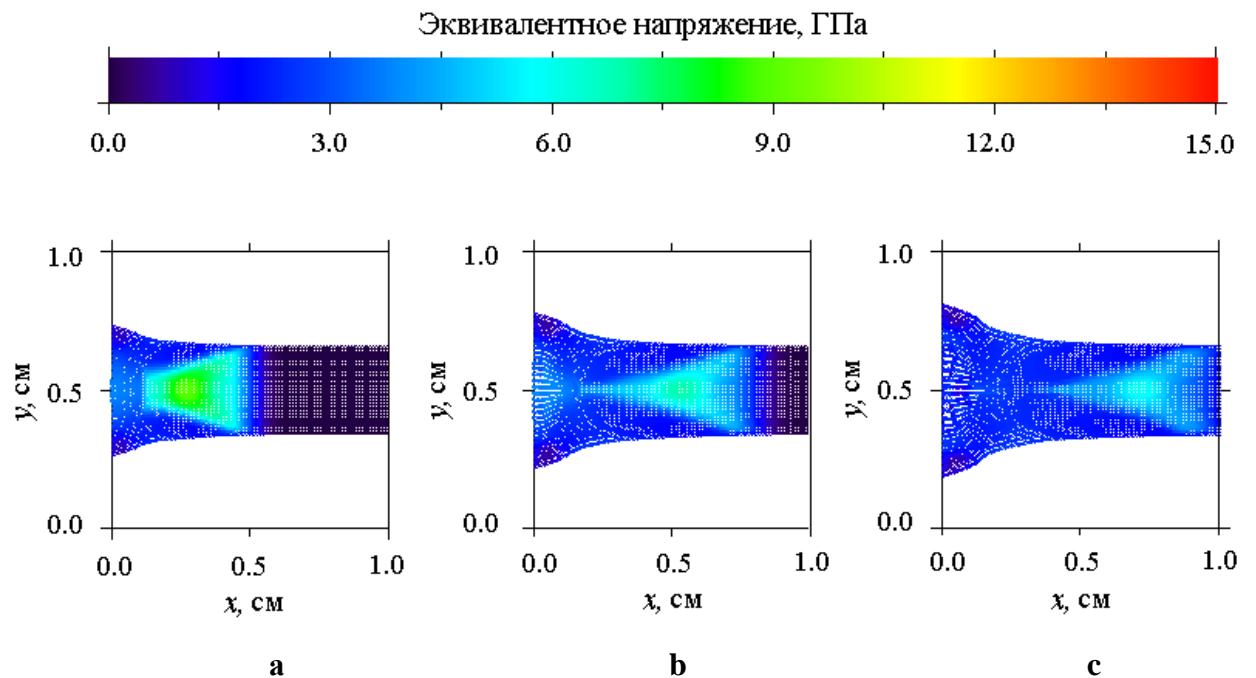
фронтальная, идущая от жесткой стенки, и две косых боковых, идущих от свободных поверхностей пластины внутрь материала, нагруженного ударной волной. Косые волны разрушения образуются за счет нагружения свободных поверхностей стекла скользящей ударной волной, и свободная поверхность становится источником волны разрушения после прохождения ударной волны. Одновременно от боковых поверхностей распространяются волны разгрузки. При этом происходит боковой разлет материала, начинающийся также после прохождения ударной волны. Вблизи жесткой стенки материал растекается вдоль ее поверхности, его внешняя поверхность имеет форму, характерную для течения разупрочненной среды.

Указанной конфигурации волн разрушения соответствует распределение интенсивности напряжений, показанное на рисунке 2.13а; очевидна корреляция между распределениями интенсивности упругих напряжений и параметра разрушения.



**Рисунок 2.13 – Распределение параметра разрушения в стеклянной пластине в моменты времени 1 мкс (а), 1,6 мкс (б) и 2мкс (в) при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000 \text{ м/с}$**

На рисунке 2.14 показано распределение интенсивности напряжений в стеклянной пластине в моменты времени 1 мкс (а), 1.6 мкс (б) и 2 мкс (в) при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000 \text{ м/с}$ .



**Рисунок 2.14. Распределение интенсивности напряжений в стеклянной пластине в моменты времени 1 мкс (а), 1.6 мкс (б) и 2 мкс (в) при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000 \text{ м/с}$**

По мере продвижения ударной волны по пластине геометрия волн разрушения изменяется (рисунок 2.13б и 2.13в). Точки пересечения прямой волны и боковых волн сближаются, и при их соединении участок прямой волны исчезает. В окрестности точки скольжения ударной волны по поверхности можно сделать оценку угла  $\alpha$  между плоскостями фронта боковой волны разрушения и поверхности разлетающегося материала, используя данные аналитического решения. Для этого удобно рассмотреть прямоугольный треугольник скоростей с вершиной в точке скольжения ударной волны и гипотенузой, расположенной на разлетающейся поверхности.

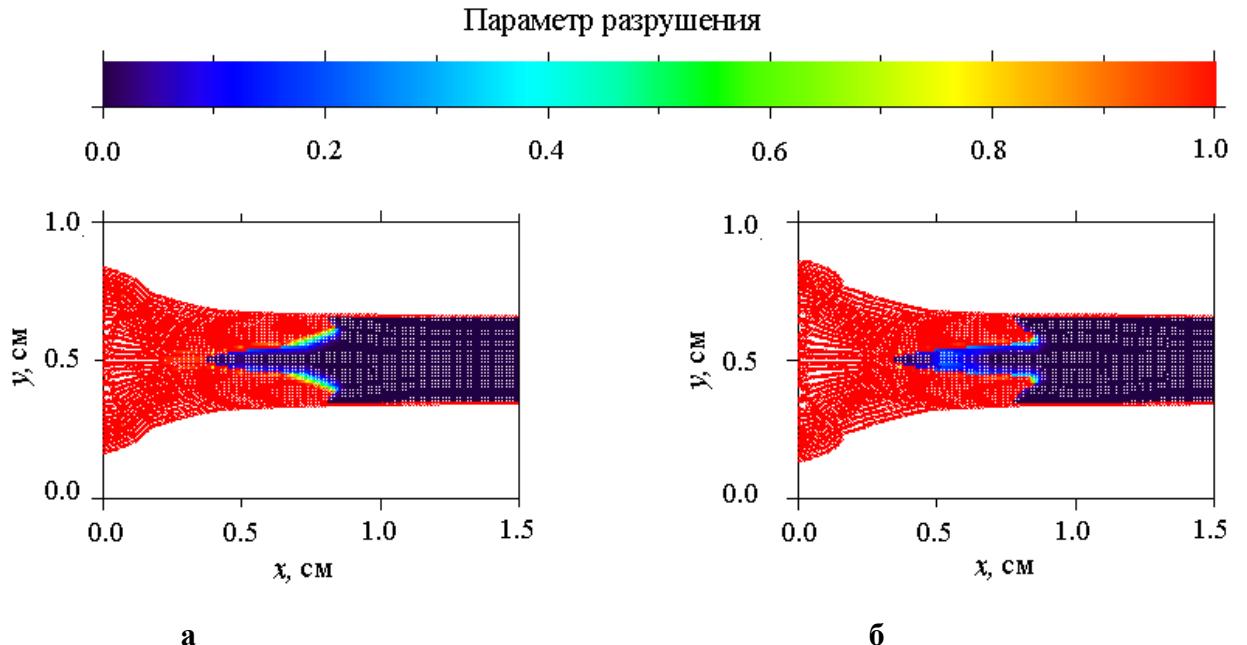
Вторую вершину треугольника на гипотенузе выберем в SPH частице, через которую на единицу времени ранее прошла ударная волна. Тогда длина гипотенузы определится как  $\left[(C_l + u_0 - u)^2 + v^2\right]^{1/2}$ , где  $v = \sigma_y / \rho C_l$  – скорость

бокового разлета. Волна разрушения за единицу времени переместится от выбранной SPH частицы на расстояние  $C_f$ . Величина  $C_f$  определяет длину катета треугольника, противолежащего углу  $\alpha$  и перпендикулярного к фронту волны разрушения. Таким образом,

$$\alpha = \arcsin \frac{C_f}{\sqrt{(C_l + u_0 - u)^2 + v^2}} \quad (2.32)$$

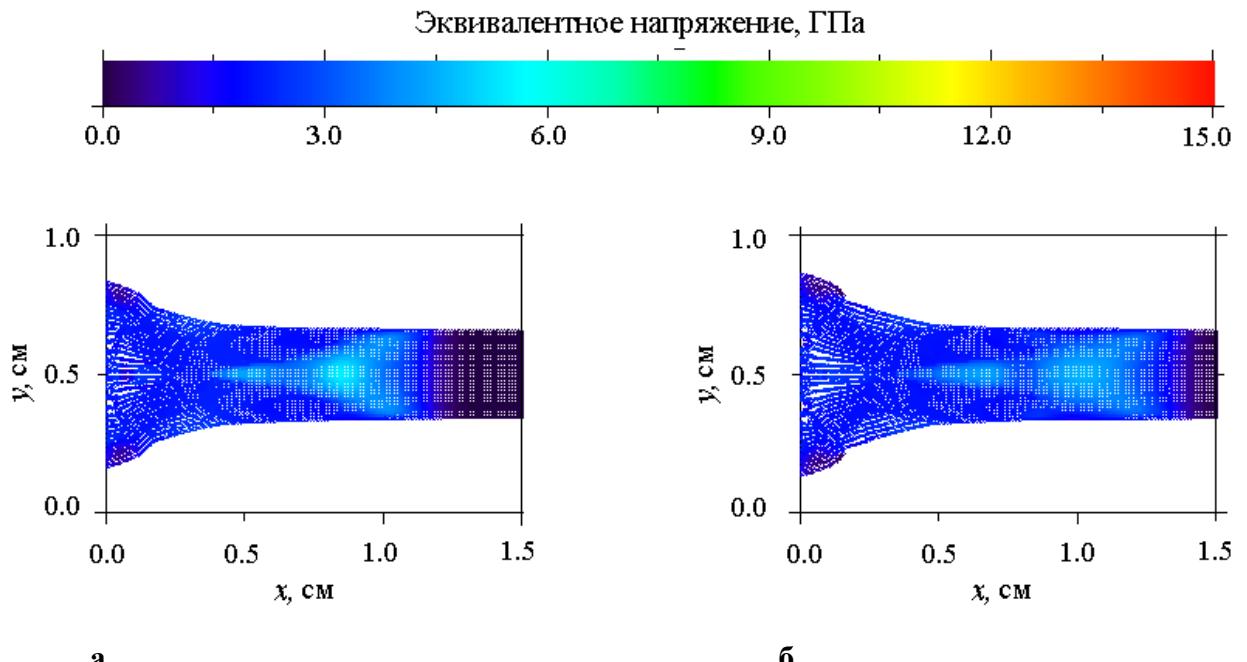
По данным предыдущего раздела получаем  $\alpha = 16.6^\circ$ , что на  $1.2^\circ$  меньше значения, непосредственно измеренного на рисунке 2.13б.

Из распределений интенсивности напряжений на рисунке 2.14а-в можно видеть, что ударная волна по мере ее продвижения по пластине затухает. В момент времени  $t=2$  мкс (рисунок 2.14в) интенсивность напряжений сравнивается с пороговым значением  $\sigma_f \approx 6$  ГПа. После этого распространение волны разрушения приостанавливается, и ударная волна отсоединяется от волны разрушения. На рисунках 2.15 и 2.16 наблюдается полное угасание волны разрушения.



**Рисунок 2.15 – Распределение параметра разрушения в стеклянной пластине в моменты времени 2,3 мкс (а) и 2,7 мкс (б) при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000$  м/с**

Наблюдающееся локальное разрушение пластины не связано с ударной волной. На рисунке 2.15 показано распределение параметра разрушения в стеклянной пластине в моменты времени 2.3 мкс (а) и 2.7 мкс (б) при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000 \text{ м/с}$ .



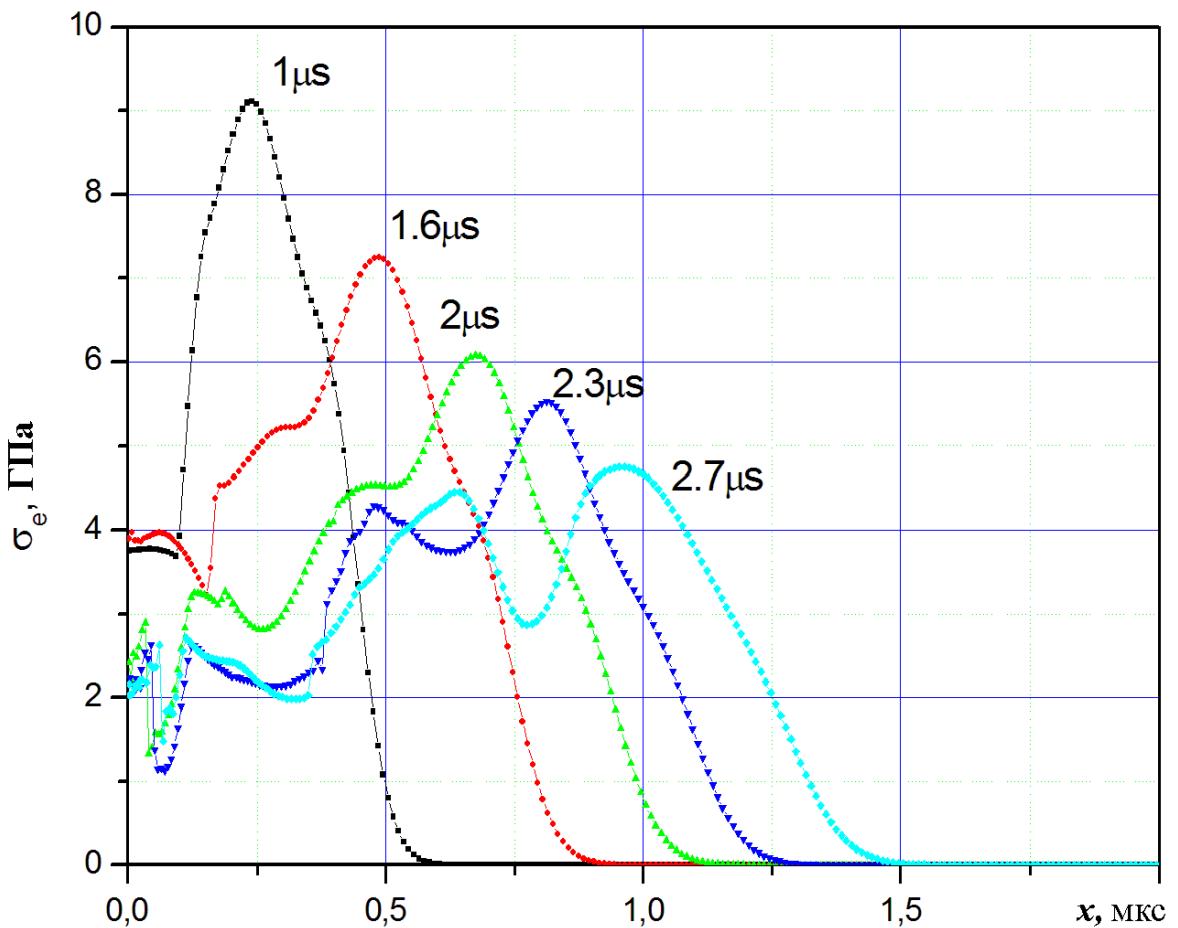
**Рисунок 2.16 – Распределение интенсивности напряжений в стеклянной пластине в моменты времени 2.3 мкс (а) и 2.7 мкс (б) при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000 \text{ м/с}$**

На рисунках 2.15а и 2.15б продолжается растекание разрушенного материала пластины по жесткой стенке и проникновение клиновидного острия из неразрушенного материала в область растекания.

На рисунке 2.16 показано распределение интенсивности напряжений в стеклянной пластине в моменты времени 2.3мкс (а) и 2.7мкс (б) при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000 \text{ м/с}$ .

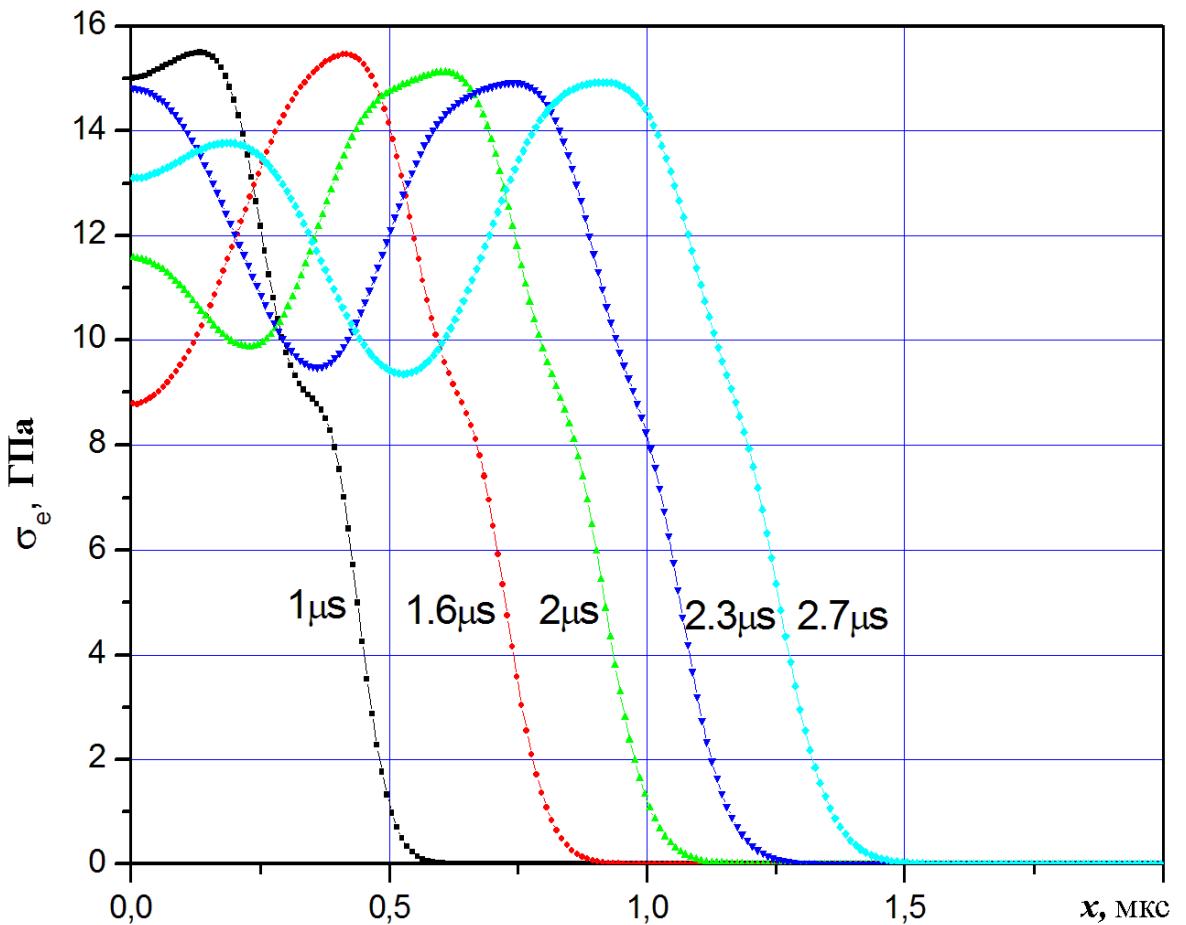
Затухание волн в разрушающейся пластине обусловлено догоняющей разгрузкой, распространяющейся из области растекания разрушенного материала. Для иллюстрации этого эффекта на рисунке 2.17 построены профили интенсивности напряжений на оси симметрии в разрушаемой стеклянной пластине для моментов времени  $t = 1 \text{ мкс}, 1.6 \text{ мкс}, 2 \text{ мкс}, 2.3 \text{ мкс}$  и  $2.7 \text{ мкс}$  при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000 \text{ м/с}$ . Можно видеть, что в

первом профиле ( $t=1\text{ мкс}$ ) интенсивность напряжений около жесткой стенки существенно ниже, чем за ударной волной. Волна разгрузки уже сформировалась, но еще не достигла фронта ударной волны. При  $t=1.6\text{ мкс}$  интенсивность напряжений на фронте ударной волны снизилась под воздействием волны разгрузки. В следующий момент времени  $t=2\text{ мкс}$  интенсивность напряжений на фронте ударной волны достигла порогового значения и далее происходит отсоединение ударной волны от лидирующих участков боковых волн разрушения на поверхностях пластины. Затухание ударной волны продолжается, а в неразрушенной части пластины за фронтом ударной волны возбуждаются упругие волны боковой разгрузки. У поверхности жесткой стенки значения интенсивности напряжений стабилизируются на уровне 2 ГПа.



**Рисунок 2.17 – Распределения интенсивности напряжений на оси симметрии в разрушаемой стеклянной пластине для различных моментов времени при скорости удара о жесткую стенку  $u_0=1000\text{м/с}$**

На рисунке 2.18 для сравнения представлены результаты расчета удара неразрушающейся пластины с одинаковыми упругими свойствами. При отсутствии разрушения за ударной волной наблюдаются ярко выраженные колебания интенсивности напряжений, обусловленные интерференцией и переотражением волн разгрузки, распространяющихся от боковых поверхностей пластины.



**Рисунок 2.18 – Распределения интенсивности напряжений на оси симметрии в неразрушающейся стеклянной пластине для различных моментов времени при скорости удара о жесткую стенку  $u_0 = 1000 \text{ м/с}$**

Затухание ударной волны несущественно, а интенсивность напряжений в упругой стеклянной пластине в 1.7 раз выше, чем в разрушающейся пластине в начальный момент времени.

Отмеченные в двумерных расчетах особенности распространения волн разрушения наблюдались в экспериментах со стеклянными стержнями [101-

102]. В частности, при определенных условиях скорость распространения волны разрушения достигает значений, сопоставимых со скоростью продольной упругой волны в неразрушенном материале, что может иметь место при генерации сходящейся к оси конической волны разрушения, зарождающейся на поверхности в момент прохождения упругой волны сжатия. В экспериментах также наблюдалось торможение и остановка волн разрушения [109].

Таким образом, применение для описания хрупкого разрушения материала в упругой волне сжатия условия типа Друкера-Прагера и заданной величины скорости распространения волны разрушения  $C_f$  позволяет получить аналитическое решение, имеющее двухволновую структуру со скоростями волн  $C_l$  и  $C_f$ . Напряженные состояния в упругой волне сжатия и волне разрушения жестко связаны и не определены до решения задачи. На фронте волны разрушения происходит скачок плотности. Характер изменения напряжений в упругой волне и волне разрушения соответствует данным эксперимента. Обобщение волновой модели разрушения, дополненной пороговыми критериями, на двумерные течения позволяет описывать течения в разрушающихся пластинах.

Моделирование соударения стеклянных пластин с жесткой стенкой показывает, что в пространственном случае нагружения волновая картина разрушения имеет сложную конфигурацию, образованную суперпозицией волн разрушения. Наблюдаются трёхволновые и двухволновые структуры. Головная упругая волна затухает под воздействием догоняющей разгрузки, распространяющейся из области растекания разрушенного материала у стенки, что приводит к остановке волны разрушения.

## **2.9. Расчёт разрушения хрупких материалов по модели Джонсона-Холмквиста (JH-2)**

Математическое моделирование разрушения в модели JH-2 также основано на введении параметра разрушения  $D$ , определяющего степень потери

сплошности материала, и уравнений, описывающих изменение параметра  $D$  в нагруженном материале [106]. Волновая модель разрушения описывает распределение параметра разрушения в образце хрупкого материала нелинейным волновым уравнением. В модели JH-2 вводится система уравнений, описывающих изменение параметра разрушения для локального объёма среды в зависимости от параметров напряжённо-деформированного состояния этого объёма, но, в первую очередь, от скорости неупругих деформаций в области разрушения (уравнение П.12 Приложения). Формально рост параметра разрушения связан с накоплением деформаций. В обеих моделях для разрушающегося материала строятся реологические соотношения, функционально зависящие от параметра разрушения. Предельное состояние материала в процессе разрушения описывается параметрической связью между эквивалентным напряжением  $\sigma_e$  и давлением  $P$ . Эта связь задается в форме (2.18). Хрупкая среда описывается уравнениями (2.8)-(2.14) и дополняется системой уравнений JH-2 [106], в которой дополнительные уравнения типа (2.15) отсутствуют и процессы разрушения рассматриваются как локальные.

Приведём систему уравнений модели разрушения JH-2 [106] для плоского двумерного случая.

Безразмерное эквивалентное напряжение в неразрушенном материале вычисляется по эмпирической зависимости

$$\sigma_i^* = A(P^* + T^*)^N \left(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*\right) \quad (2.33)$$

Безразмерное эквивалентное напряжение в разрушенном материале

$$\sigma_f^* = \begin{cases} B(P^*)^M \left(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*\right), & \sigma_f^* > \sigma_{f\max}^* \\ \sigma_{f\max}^*, & \sigma_f^* \leq \sigma_{f\max}^* \end{cases} \quad (2.34)$$

где безразмерное давление  $P^* = \frac{P}{P_{HEL}}$ , (2.35)

Эквивалентная скорость деформаций

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx}^2 + \dot{\varepsilon}_{yy}^2 - \dot{\varepsilon}_{yy}\dot{\varepsilon}_{xx} + 3\dot{\varepsilon}_{xy}^2)} \quad (2.36)$$

Безразмерная эквивалентная скорость деформаций

$$\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \quad (2.37)$$

Безразмерное эквивалентное напряжение в разрушающемся материале  $\sigma^*$  вычисляется аналогично (2.18):

$$\sigma^* = \sigma_i^* - D(\sigma_i^* - \sigma_f^*) \quad (2.38)$$

В области разрушения, при условии  $\sigma^e \geq \sigma^* \sigma_{HEL}$ , компоненты девиатора напряжений  $S_{ij}^e$  корректируются:

$$S_{ij} = k_p S_{ij}^e, \quad (2.39)$$

где

$$k_p = \begin{cases} \frac{\sigma^* \sigma_{HEL}}{\sigma^e}, & \text{если } \sigma^e \geq \sigma^* \sigma_{HEL} \\ 1, & \text{если } \sigma^e \leq \sigma^* \sigma_{HEL} \end{cases} \quad (2.40)$$

Расчёт параметра разрушения производится по уравнению

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_p^f} \frac{d\varepsilon_p}{dt} \quad (2.41)$$

где  $\varepsilon_p$  – эквивалентная пластическая (если следовать терминологии авторов модели JH-2) деформация, наблюдаемая при разрушении материала. Остальные параметры являются константами для выбранного материала.

Пластические деформации в области разрушения определяются как:

$$\dot{\varepsilon}_{ij,p} = \frac{1}{2G} (\dot{S}_{ij}^e - \dot{S}_{ij}) \quad (2.42)$$

Расчёт пластических деформаций является ключевым в модели JH-2, но техника их вычисления не представлена в [106] и зависимость (2.42) получена автором диссертации.

Эквивалентная пластическая деформация равна:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx,p}^2 + \dot{\varepsilon}_{yy,p}^2 - \dot{\varepsilon}_{yy,p} \dot{\varepsilon}_{xx,p} + 3\dot{\varepsilon}_{xy,p}^2)} \quad (2.43)$$

Уравнение состояния в упругой области ( $D=0$ ):

$$\mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \quad (2.44)$$

$$P = \begin{cases} K_1\mu + K_2\mu + K_3\mu, & \mu > 0 \\ K_1\mu, & \mu \leq 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Уравнение состояния в области разрушения ( $D \geq 0$ ):

$$P = K_1\mu + K_2\mu + K_3\mu + \Delta P \quad (2.46)$$

где

$$\Delta P = \Delta P^{n+1} = -K_1\mu + \sqrt{(K_1\mu + \Delta P^n)^2 + 2\beta K_1 \Delta U} \quad (2.47)$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 \quad (2.48)$$

где

$$U_2 = \frac{\sigma^2}{6G} = \frac{1}{6G} [\sigma_i - D_{t+\Delta t}(\sigma_i - \sigma_f)]^2 \quad (2.49)$$

$$U_1 = \frac{1}{6G} [\sigma_i - D_t(\sigma_i - \sigma_f)]^2 \quad (2.50)$$

$$\sigma = \sigma^* \sigma_{HEL} \quad (2.51)$$

Уравнения (2.33)-(2.51) составляют замкнутую систему уравнений для расчёта разрушения хрупкой среды с помощью модели JH-2 по безитерационному алгоритму, представленному в Приложении.

### **Результаты тестирования кода с моделью хрупкого разрушения JH-2.**

В работе [106] приведены результаты четырёх экспериментов по ударному нагружению керамики  $B_4C$  и сравнение их с результатом компьютерного моделирования. Эксперименты состояли в том, что пластина из  $B_4C$  разгонялась до скоростей 1633 м/с (рисунок 2.19), 2076 м/с (рисунок 2.20) и 3980 м/с (рисунок 2.22), после чего производилось соударение пластины с испытуемым образцом из  $B_4C$ . В эксперименте BC7 (рисунок 2.21) образец из  $B_4C$  нагружался ударом танталовой пластины при скорости 2059 м/с.

Тыльные стороны образцов во всех экспериментах контактировали с пластинами из фторида лития. Движение тыльной поверхности образца регистрировалось оптическим способом.

Были проведены расчёты ударного нагружения и разрушения керамик по модели (2.33)-(2.51), согласно исходным данным экспериментов BC4, BC5, BC7,

BC10 [106]. Сравнение результатов расчётов и экспериментов показано на рисунках 2.19-2.22.

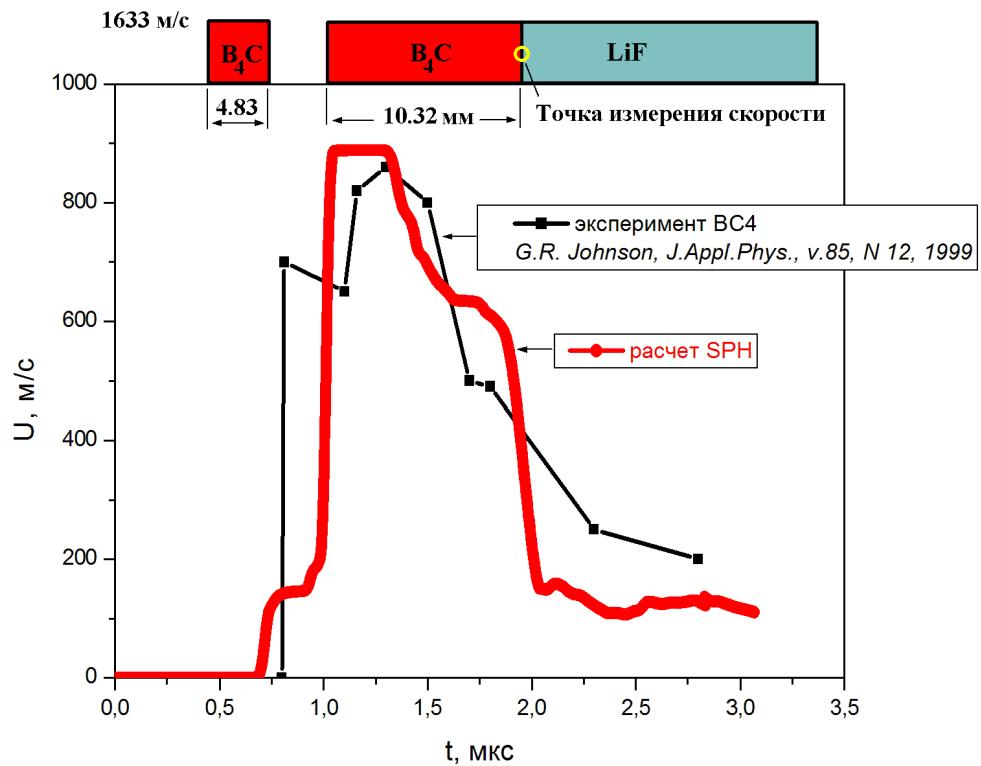


Рисунок 2.19 – Сравнение результатов расчета по (2.33)-(2.51) и эксперимента BC4

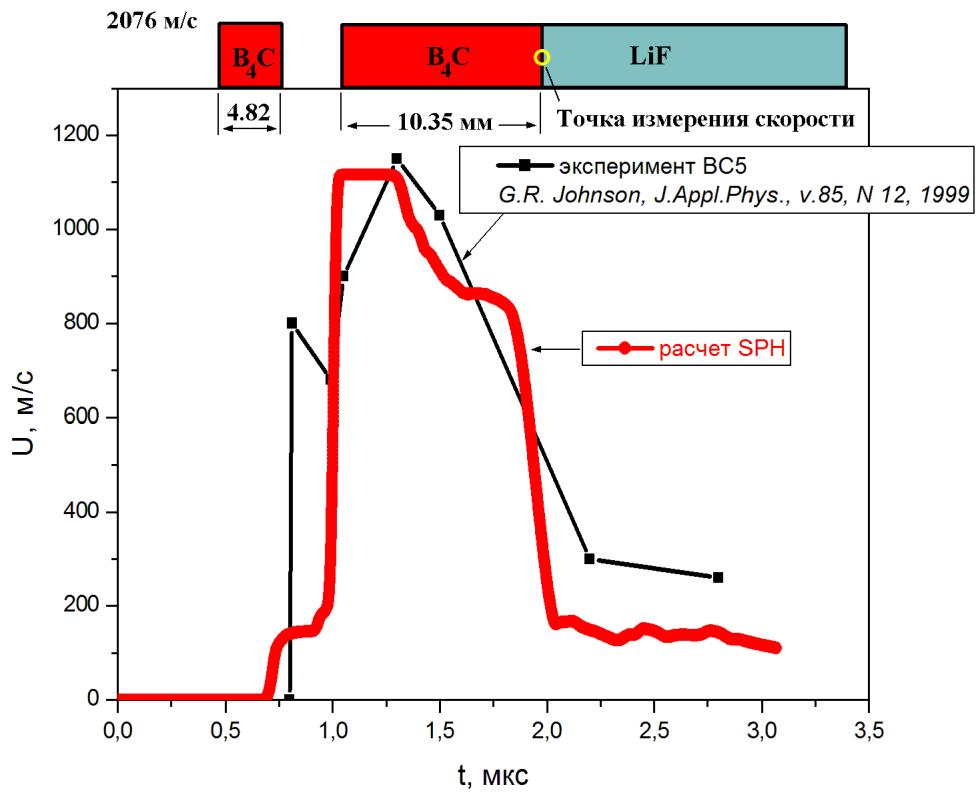


Рисунок 2.20 – Сравнение результатов расчета по (2.33)-(2.51) и эксперимента BC5

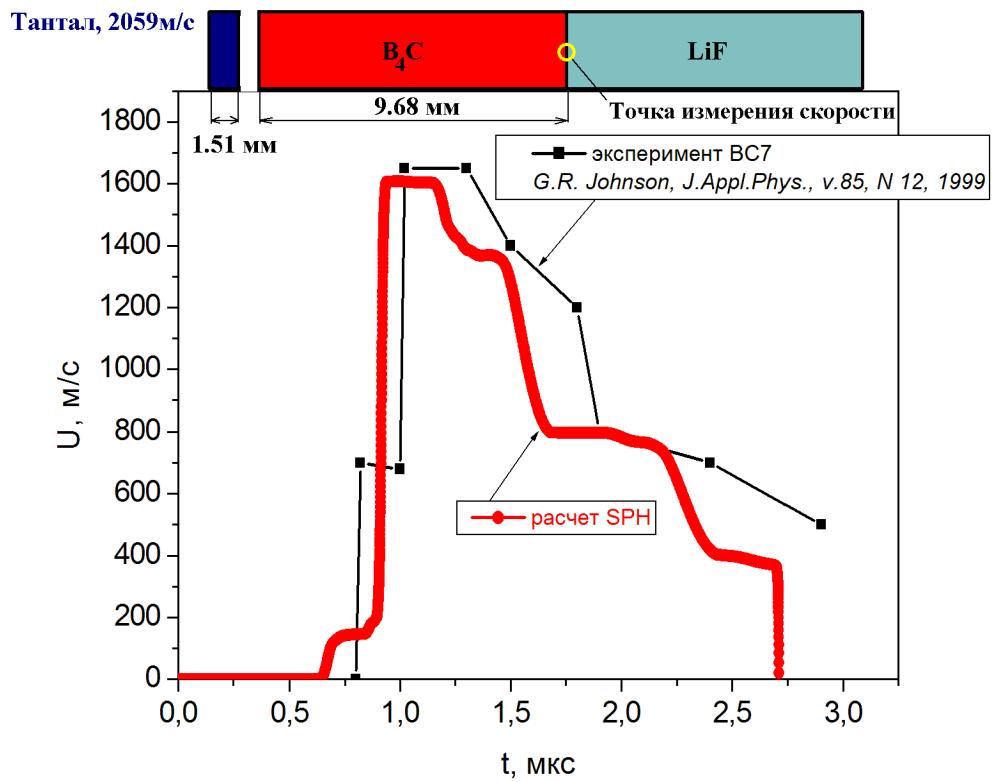


Рисунок 2.21 – Сравнение результатов расчета по (2.33)-(2.51) и эксперимента BC7

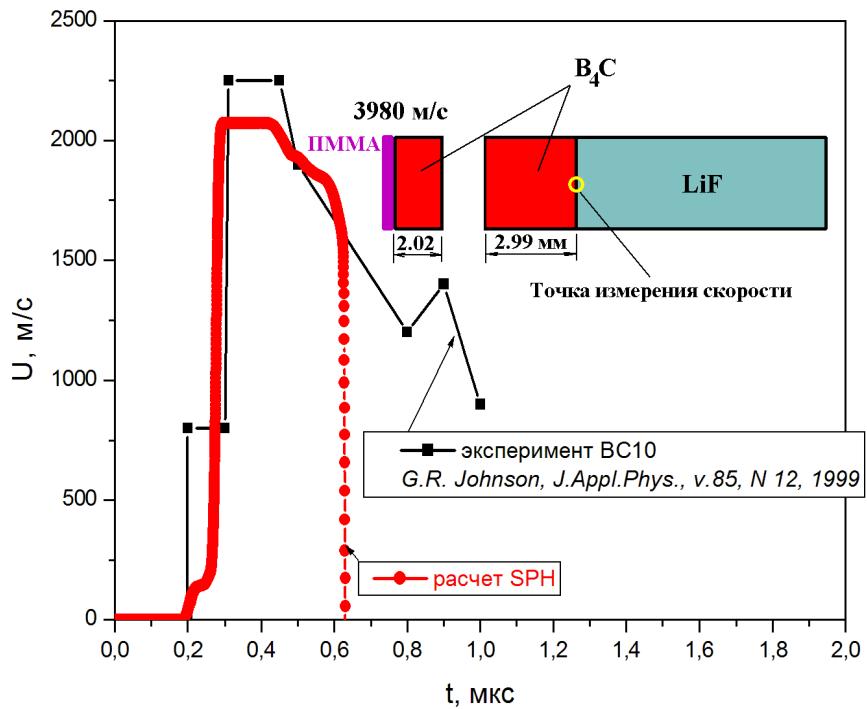


Рисунок 2.22 – Сравнение результатов расчета по (2.33)-(2.51) и эксперимента BC10

Во всех случаях расчётное время прихода волны в точку измерения скорости и профиль скорости хорошо коррелируют с экспериментальными

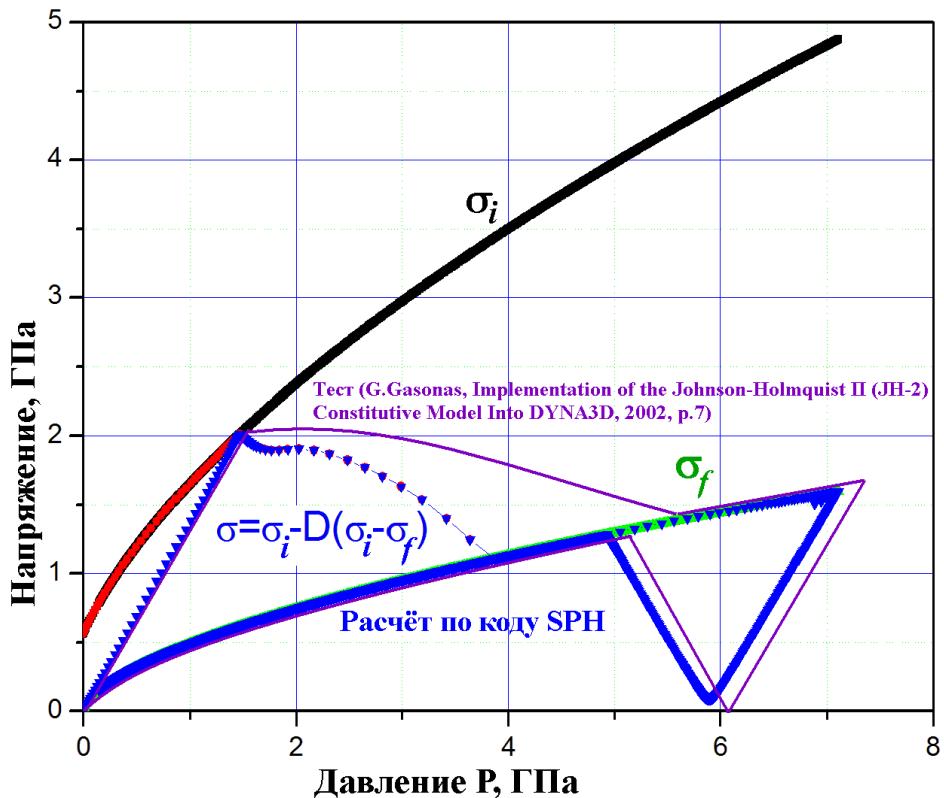
результатами. Наблюдается хорошее совпадение профиля скорости в контрольной точке с экспериментальным профилем, но занижена величина упругого предвестника, что требует дальнейшей работы по усовершенствованию модели разрушения.

Производились также расчеты разрушения керамики  $\text{Al}_2\text{O}_3$  и стекла при ударном нагружении. Разрушение стекла рассчитывалось по двум моделям: по модели JH-2 и по модели с волной разрушения. Целью такого исследования являлось сравнение обеих моделей для валидации разработанного кода SPH. Характеристики материалов и константы модели JH-2 приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3. Константы материалов в модели JH-2 [106,110,111]

Параметр	$\text{B}_4\text{C}$	$\text{Al}_2\text{O}_3$	Стекло
Плотность $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	2510	3890	2530
Модуль объёмного сжатия $K_1$ , ГПа	233	130.95	45.4
Модуль сдвига $G$ , ГПа	197	90.16	30.4
Напряжение $\sigma_{\text{HEL}}$ , ГПа	15.44	1.995	4.54
Давление $P_{\text{HEL}}$ , ГПа	8.71	1.46	2.92
Нормализованное напряжение $T^*$	0.03	0.137	0.05137
$A$	0.927	0.93	0.93
$N$	0.67	0.6	0.77
$C$	0.005	0	0.003
$B$	0.7	0.31	0.2
$M$	0.85	0.6	1
$\sigma_{f\max}^*$	0.2	1	0.5
$K_1$ , ГПа	233	130.95	45.4
$K_2$ , ГПа	-593	0	-138.0
$K_3$ , ГПа	2800	0	290.0
$B$	1	1	1
$D_1$	0.001	0.005	0.043
$D_2$	0.5	1	0.85

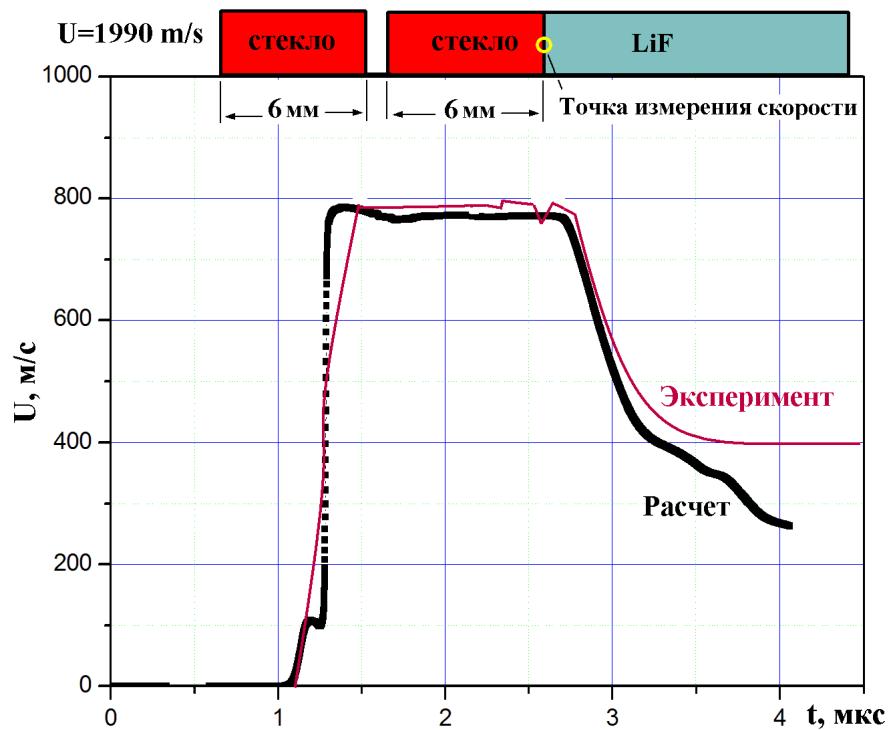
На рисунке 2.23 показаны две  $\sigma(P)$ -диаграммы разрушения керамики  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , рассчитанная по коду SPH и взятая из [111]. В одномерной постановке рассматривался удар керамическим ударником толщиной 4.8мм по керамической мишени толщиной 10мм со скоростью 633м/с. Расчет  $\sigma(P)$ -диаграммы производился в материале ударника на расстоянии 0.5мм от плоскости соударения.



**Рисунок 2.23 –  $\sigma(P)$ -диаграммы разрушения керамики  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , рассчитанные по коду SPH (скорость удара 633м/с) и взятая из [111]**

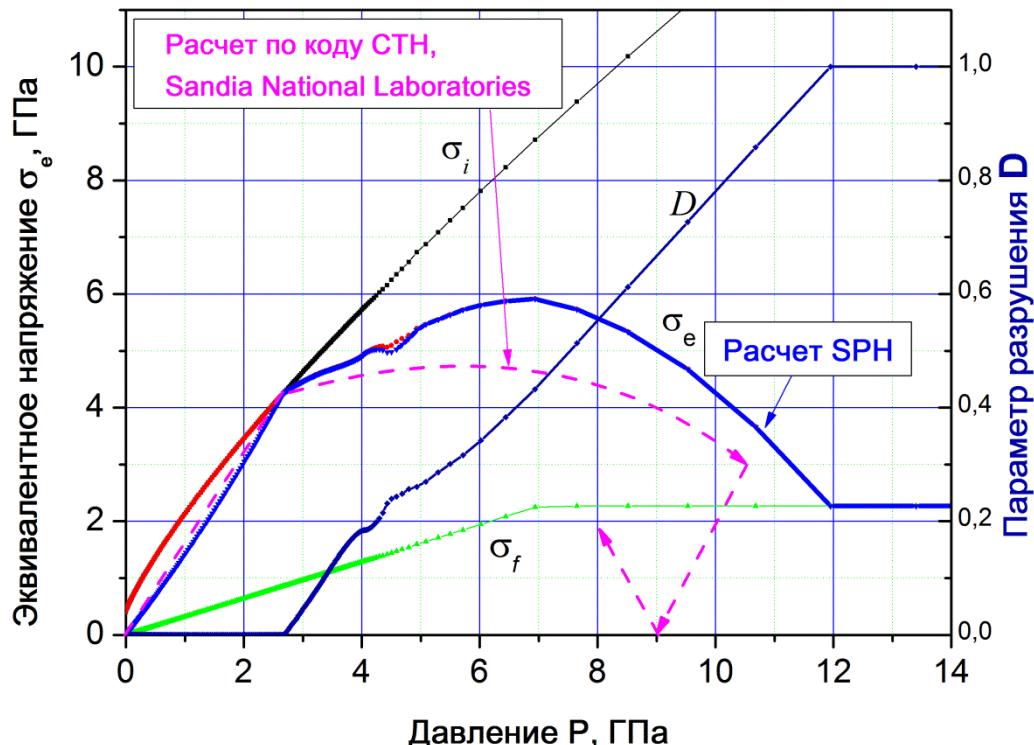
Наибольшее расхождение результатов расчёта наблюдается в зоне разрушения, в то время как процессы нагружения и разгрузки рассчитываются с приемлемой точностью. Отличие траекторий фазы разрушения может связано с тем, что расчеты по коду DYNA3D выполнялись в условиях квазистатического нагружения образца.

На рисунке 2.24 приведены результаты эксперимента [110] по измерению профиля скорости в стекле и соответствующий расчёт по коду SPH с моделью (2.28)-(2.46). Расчет показывает хорошую сходимость с результатами эксперимента.



**Рисунок 2.24 – Сравнение результатов расчета SPH и эксперимента [110] по ударному нагружению стекла**

На рисунке 2.25 приведены две  $\sigma(P)$ -диаграммы в точке измерения скорости (показанной на рисунке 2.24); рассчитанная по коду SPH и авторами [110] по коду CTH (Sandia National Laboratories).



**Рисунок 2.25 – Рассчитанные диаграммы  $\sigma(P)$  в точке измерения скорости при ударном нагружении стекла**

Максимальное расхождение между расчётами в эквивалентном напряжении составляет примерно 20%, при совпадении давлений и качественном сходстве обеих кривых.

Произведенные тестовые расчёты дают основания полагать, что разработанный код SPH, дополненный моделью JH-2, удовлетворительно описывает процессы разрушения хрупких материалов.

Было проведено сравнение модели JH-2 с моделью волнового разрушения стёкол. Моделировался удар стеклянной пластины о жёсткую стенку со скоростью  $U=1000\text{м/с}$ . Результаты приведены на рисунке 2.26, где левая колонка иллюстраций соответствует расчету по модели JH2, а правая колонка – расчету по модели с волной разрушения.

Из рисунка 2.26б,д видно, что обе модели (волновая и JH-2) предсказывают примерно одинаковое положение фронта волны разрушения при разрушении пластин. Но при одномерном моделировании характер разрушения стекла, рассчитанный по обеим методикам, различен и требует дальнейшего анализа.

Принципиальным различием описанных выше моделей разрушения является то, что скорость волны разрушения  $C_f$  уже содержится в волновой модели как характеристика материала и рассчитывается по уравнению (2.15), в то время как модель JH-2 рассматривает разрушение материала только как локальный процесс, определяемый напряжённо-деформированным состоянием и критериями разрушения. При одномерном моделировании по модели JH-2 ожидалось, что сформируется волна разрушения в стекле.

Наблюдаемые в двумерных расчетах особенности распространения волн разрушения регистрируются в экспериментах со стеклянными стержнями. В частности, при определенных условиях скорость распространения волны разрушения достигает значений, сопоставимых со скоростью продольной упругой волны в неразрушенном материале, что может иметь место при генерации сходящейся к оси конической волны разрушения, зарождающейся на поверхности в момент прохождения упругой волны сжатия, как показано в

расчётах раздела 2.8. В экспериментах также наблюдалось торможение и остановка волн разрушения.

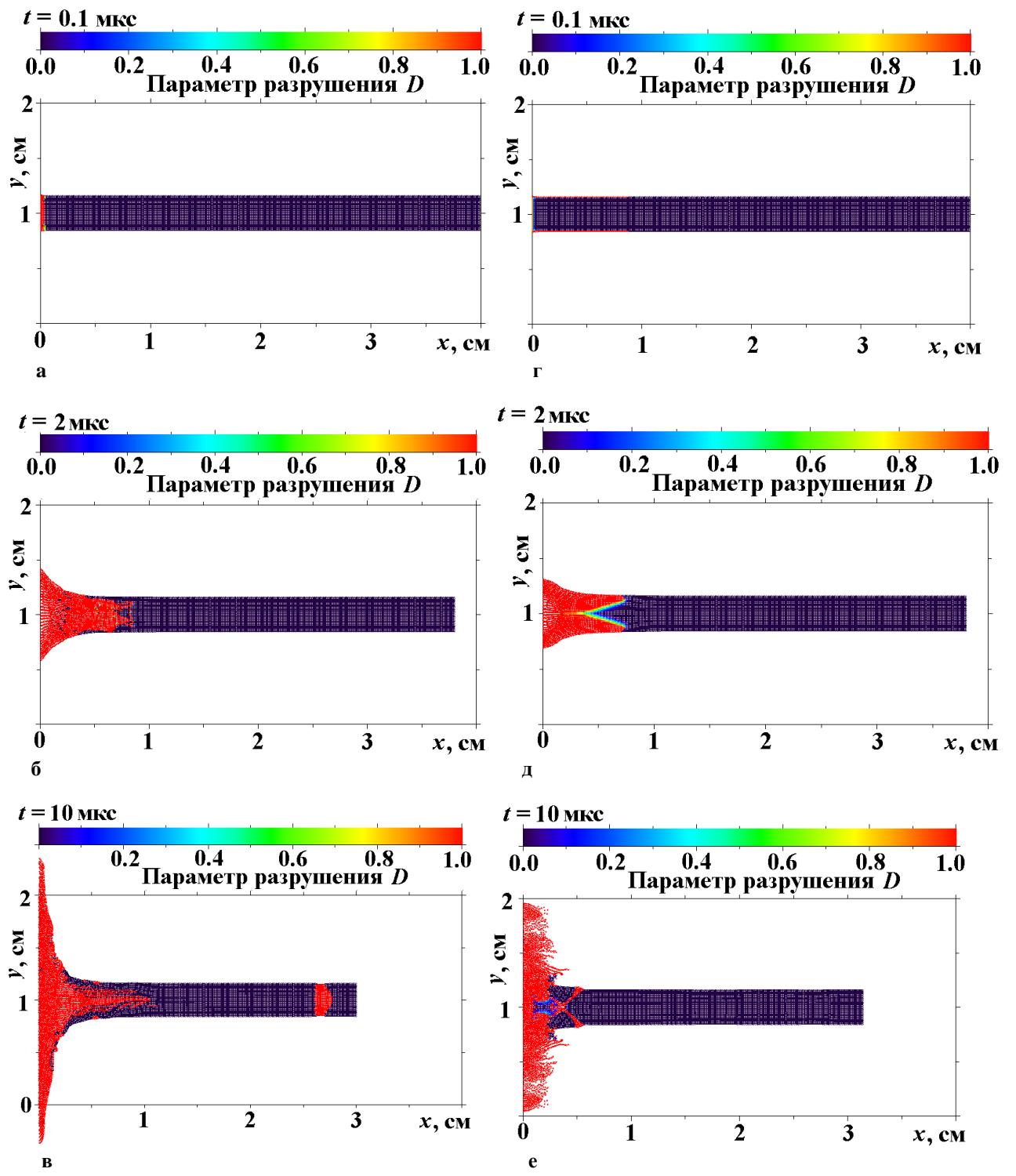


Рисунок 2.26 – Разрушение стеклянных пластин при ударе о жесткую стенку со скоростью  $U=1000 \text{ м/с}$ . Расчет по модели JH-2 (а-в) и по волновой модели разрушения (г-е)

Чтобы исключить из рассмотрения влияние свободных поверхностей, было произведено сравнение скорости волн разрушения в одномерной постановке. Слой стекла толщиной 4 см ударялся о жесткую стенку со скоростью 1000 м/с. На рисунке 2.27 показаны профили давления в стеклянной пластины при ударе о жесткую стенку, рассчитанные по модели JH-2 и по волновой модели. На рисунке 2.28 показаны распределения параметра разрушения, соответствующие этим профилям давления.

Очевидно, что в обоих случаях формируется волна разрушения. Из положения фронтов разрушения можно оценить скорость волны: она составляет 1670 м/с при расчетах по волновой модели и 4500 м/с при расчётах по модели JH-2.

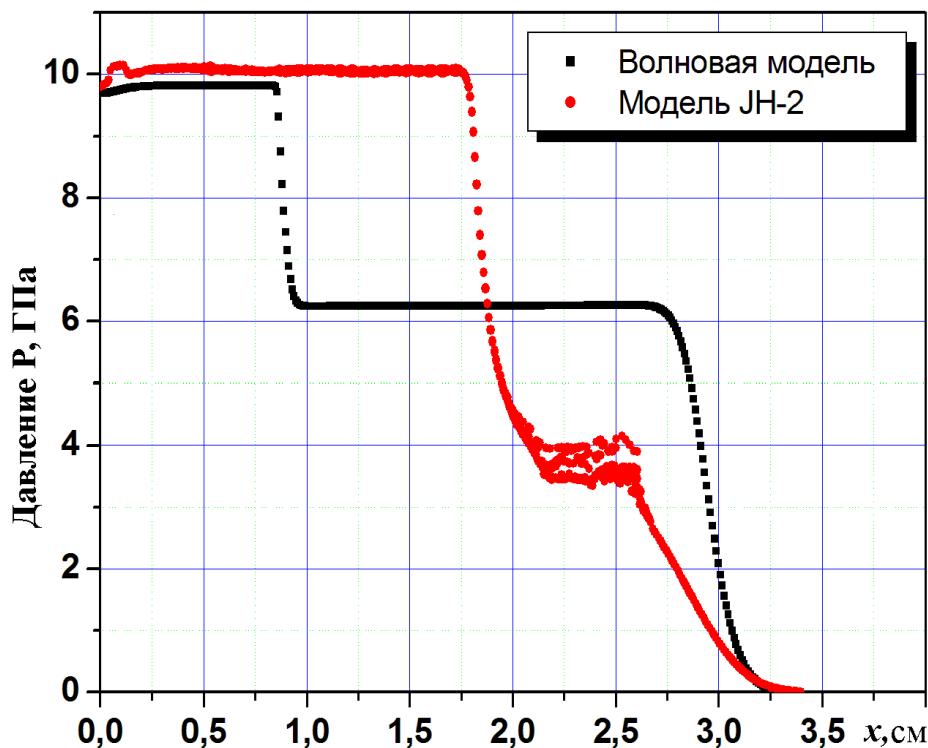
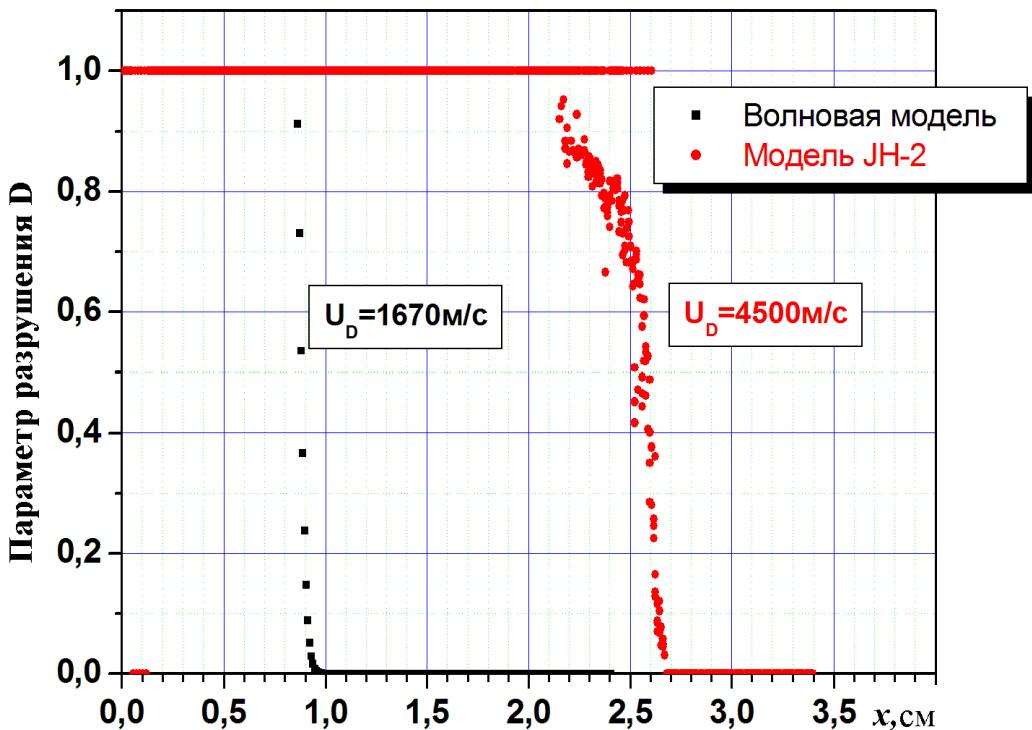


Рисунок 2.27 – Профили давления в стеклянной пластине при ударе о жесткую стенку, рассчитанные по модели JH-2 и по волновой модели на момент времени  $t=6\text{мкс}$  после удара. Скорость удара 1000 м/с. Жесткая стенка слева.

Эксперименты Г.И.Канеля с соавторами [108] показывают величину значения скорости волны разрушения  $U_D \approx 1600$  м/с. В цитированной выше работе [110] данные по скорости волны разрушения не приводятся. Существенное различие расчетных значений скоростей распространения

фронтов разрушения, определённых по разным моделям, требует специального анализа. Важным фактором здесь может явиться также и различие характеристик стекол, изготовленных в разных странах.



**Рисунок 2.28 – Профили разрушения в стеклянной пластине при ударе о жесткую стенку, рассчитанные по модели JH-2 и по волновой модели на момент времени  $t=6\text{мкс}$  после удара. Скорость удара 1000 м/с. Жесткая стенка слева**

Представленный в Приложении алгоритм расчета разрушения хрупких материалов по модели JH-2, основанный на безитерационной схеме решения многократно неявной системы уравнений (2.33)-(2.51), обеспечивает эффективную и устойчивую работу кода SPH. Было осуществлено успешное тестирование реализованной модели на диаграммах процесса нагружения, разрушения и разгрузки в переменных  $P, \sigma$ , и решена задача об ударе стеклянной пластины о жесткую стенку. Построены картины двумерных течений с волной разрушения. Одномерные расчеты демонстрируют хорошее совпадение с опубликованным экспериментом. Из одномерных расчетов была определена скорость волны разрушения. Код SPH с моделью JH-2 с удовлетворительной точностью моделирует разрушение керамики, но даёт завышенные значения скорости волны разрушения в стекле.

Вряд ли возможно объяснить расхождение расчётов по обеим моделям тем, что система уравнений (П.1-П.24), приведенных в Приложении, не соответствуют модели Джонсона-Холмквиста [106]. Нагружение стекла ударной волной и следующий за нею процесс разрушения, описанный в [106] и представленный в [110], соответствуют расчётом по алгоритму Приложения, показанным на рисунках 2.25 и 2.26б. Следовательно, алгоритм (П.1-П.24) и модель [106] примерно одинаково описывают процесс разрушения хрупкого материала за ударной волной. Расхождение результатов можно объяснить тем, что в модели JH-2 разрушение начинается согласно (2.41) сразу после достижения интенсивностью напряжений  $\sigma_e$  некоторого порогового значения  $\sigma_i$ , в то время как в волновой модели любая частица нагруженного ударной волной материала может пребывать в состоянии перенапряжения неограниченно долго, пока её не достигнет волна разрушения, описываемая уравнением (2.15).

В модели JH-2 начало разрушения определяется исключительно критериальными признаками, связанными с напряжённо-деформированным состоянием материала, в то время как волновая модель зависит ещё и от уравнения (2.15), которое моделирует движение волны разрушения от свободной поверхности, обладающей очагами инициирования волны, по расчётной области.

Построение модели, предсказывающей скорость волны разрушения и основанной только на описании напряжённо-деформированного состояния стекла, без привлечения дополнительного уравнения (2.15), остаётся на сегодня нерешённой проблемой для моделирования волн разрушения в стёклах.

## **2.10. Сравнение натурных экспериментов и результатов моделирования, проведенного разработанным методом SPH**

Для проверки адекватности разработанного метода SPH результатам натурного эксперимента было выбрано моделирование соударения ударника с

мишенью на высокой и средней скорости удара, при этом физико-механические свойства соударяющихся материалов были различны.

### **Взаимодействие ударника с преградой при высоких скоростях удара.**

Эта задача является традиционной для проверки работоспособности методов SPH [112]. Моделировалось пробитие ударниками из поликарбоната алюминиевых преград [60] при скорости соударения  $U_s = 4700 \text{ м/с}$ . Ударниками являлись цилиндры высотой 12мм и диаметром 16мм. Полная масса ударника составляла  $M_s = 0.0026 \text{ кг}$ . При осесимметричном 2D-моделировании на площадь сечения  $0.5 \times 0.5 \text{ мм}^2$  ударника приходилось 384 SPH-частицы. Мишенями являлись алюминиевые цилиндры толщиной 40мм и диаметрами 80 мм и 100мм, они моделировались с помощью 6400 и 8000 SPH-частиц соответственно. Характеристики материалов ударника и мишени приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Свойства материалов ударника и мишени [113]–[115]

Обозначение и размерность	Алюминий (мишень)	Поликарбонат (ударник)
$\rho, \text{ кг/м}^3$	2700	1200
$C^t, \text{ м/с}$	6300	1740
$C^r, \text{ м/с}$	3000	840
$\gamma_s$	2.17	0.746
$C_V, \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$	880	1260
$K, \text{ ГПа}$	73	5.83
$G, \text{ ГПа}$	23	0.8
$\nu$	0.3	0.35
$E, \text{ ГПа}$	70	2.5
$Y_0, \text{ МПа}$	400	60
$\sigma_b, \text{ МПа}$	600	1200
$\lambda, \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$	200	0.21
$C_a, \text{ м/с}$	5350	1.35
$S_a$	1740	1.72

Даже при такой простой модели (2.47)-(2.49) метод SPH, основанный на решении задачи распада разрыва, даёт реалистичные картины разрушения [60].

В расчётах использовалась простая пороговая модель разрушения. Вычисленные из решения задачи распада разрыва напряжения сравнивались с прочностью материала  $\sigma_b$  на отрыв и сдвиг. При превышении пределов прочности на растяжение распадные значения напряжений полагались равными нулю. Нормальная и касательная компоненты скорости в точке взаимодействия частиц полагались равными соответствующим компонентам скоростей в самой частице.

В общем 3D-случае модель запишется для поперечной волны:

$$U_{ij}^{*S} = U_i^S - \frac{\sigma_i^{SR}}{\rho_i C_i^t}, \quad \sigma_{ij}^{*SR} = 0, \quad (2.52)$$

$$U_{ij}^{*T} = U_i^T - \frac{\sigma_i^{TR}}{\rho_i C_i^t}, \quad \sigma_{ij}^{*TR} = 0, \quad (2.53)$$

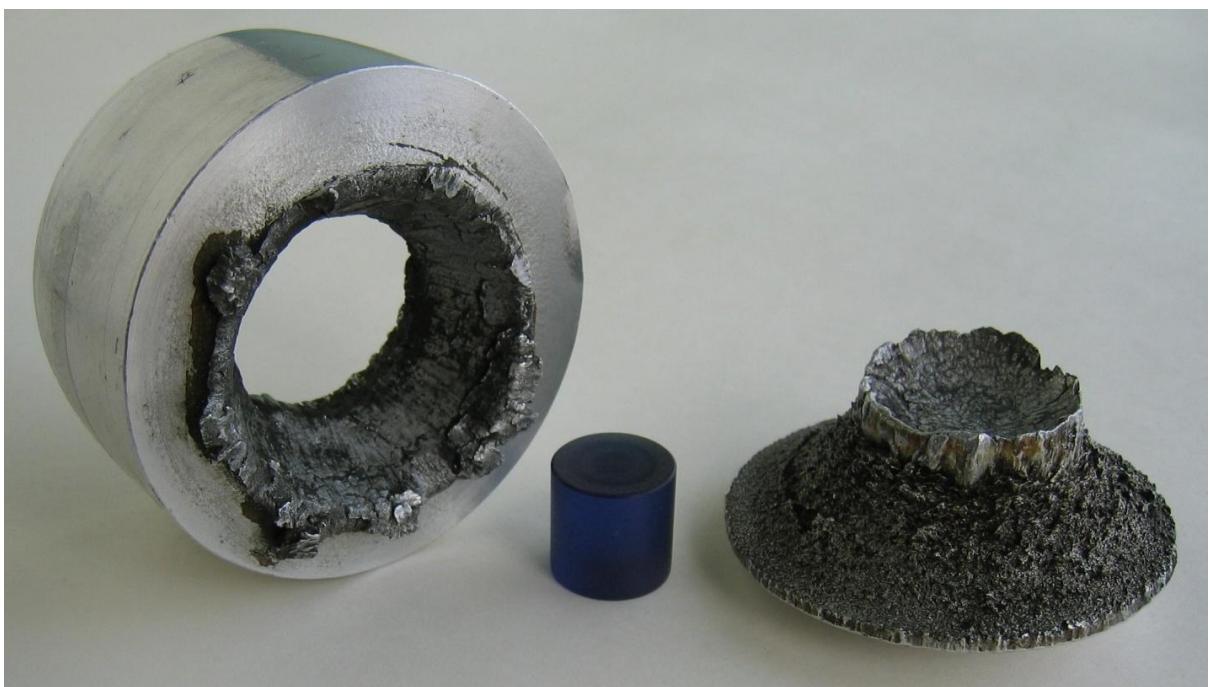
и для продольной волны:

$$U_{ij}^{*R} = U_i^R - \frac{\sigma_i^{RR}}{\rho_i C_i^l}, \quad \sigma_{ij}^{*RR} = 0, \quad (2.54)$$

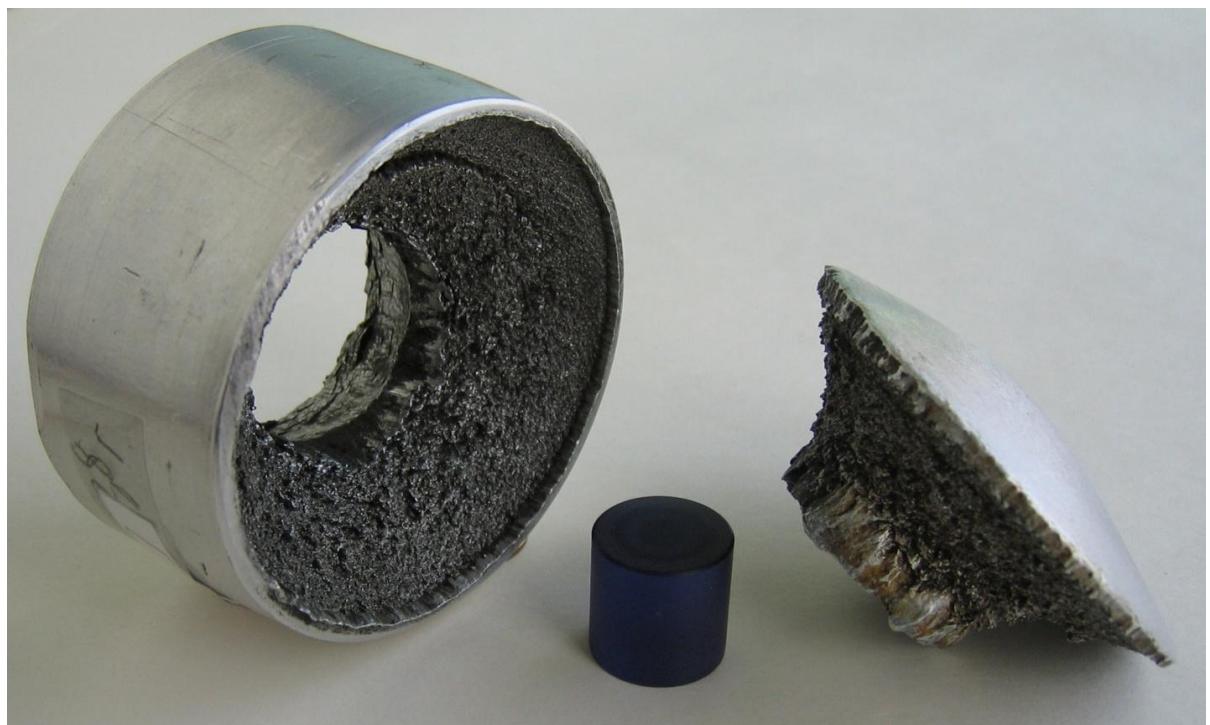
На рисунках 2.29 и 2.30 показана мишень диаметром 80мм после обстрела её в эксперименте ударником из поликарбоната со скоростью 4550м/с.

На рисунке 2.31 показаны результаты моделирования этого эксперимента. Расчётный диаметр и глубина кратера составляют  $d_c=43.5\text{мм}$  и  $h_c=25.3\text{мм}$  соответственно. В экспериментах эти значения были равны  $d_c=56\text{мм}$  и  $h_c=28\text{мм}$ .

На рисунке 2.32 и 2.33 показана мишень диаметром 100мм после обстрела её ударником из поликарбоната на скорости 4700м/с.



**Рисунок 2.29 – Фронтальная сторона алюминиевой мишени диаметром 80мм после удара со скоростью 4500м/с. Показан ударник из поликарбоната и пробка, выбитая в результате удара**



**Рисунок 2.30 – Тыльная сторона алюминиевой мишени диаметром 80мм после удара со скоростью 4500м/с. Показан ударник из поликарбоната и пробка, выбитая в результате удара**

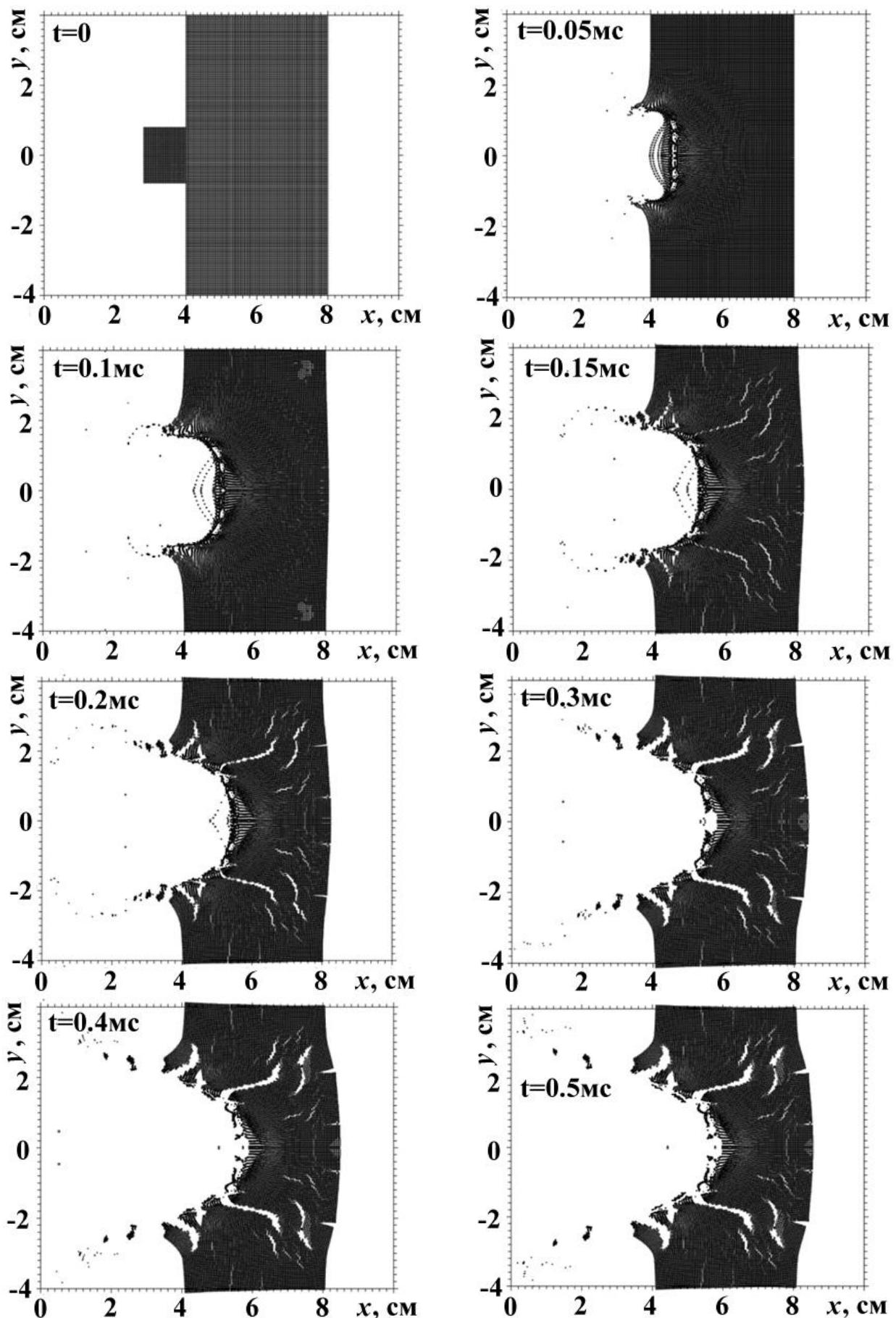


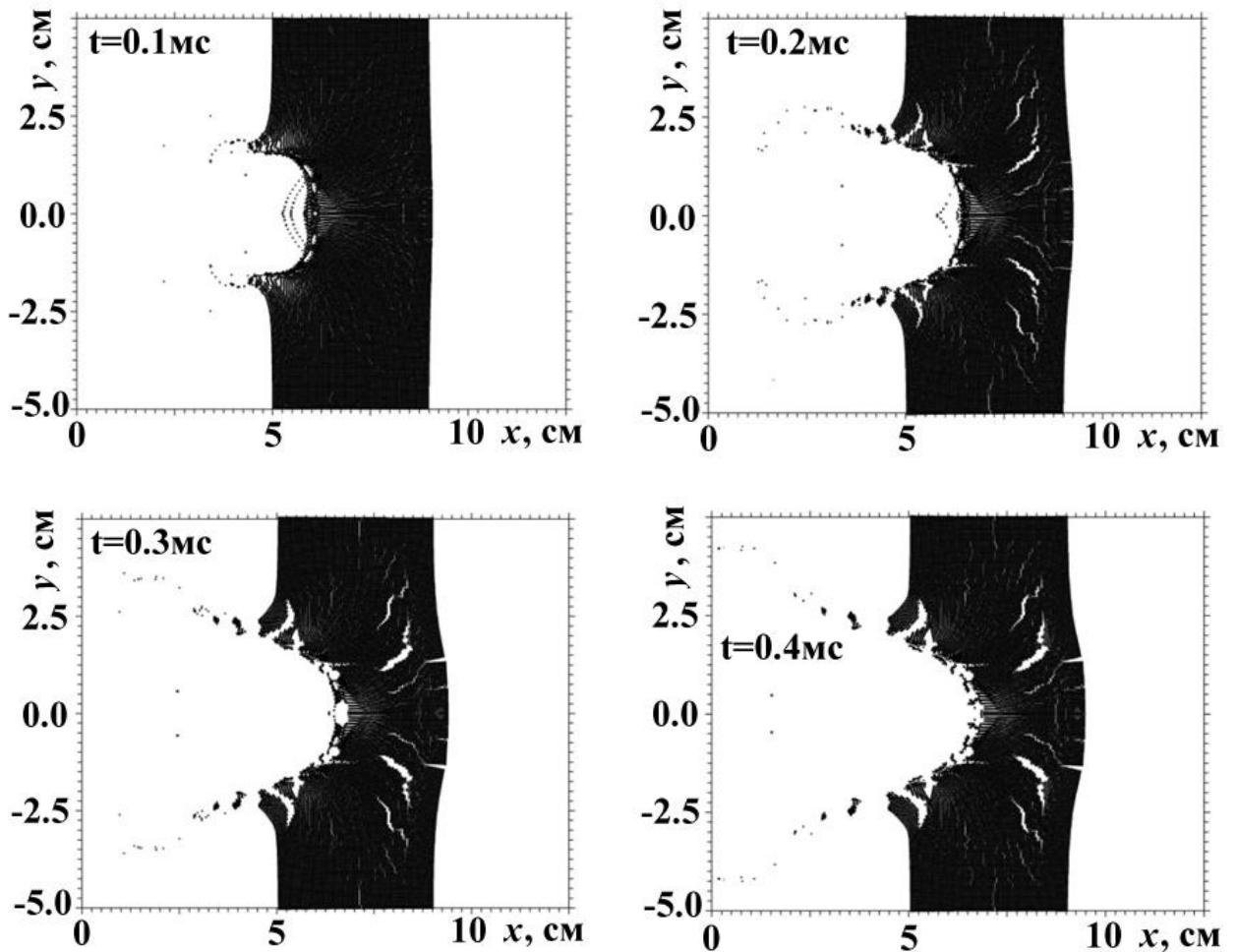
Рисунок 2.31 – Процесс соударения ударника из поликарбоната с алюминиевой мишенью диаметром 80мм со скоростью 4550м/с



**Рисунок 2.32 – Кратер в алюминиевой мишени диаметром 100мм после удара со скоростью 4500м/с. Показан ударник из поликарбоната и откол, образованный в результате удара**



**Рисунок 2.33 – Тыльная сторона алюминиевой мишени диаметром 100мм после удара со скоростью 4500м/с. Показан ударник из поликарбоната и откол, образованный в результате удара**



**Рисунок 2.34 – Процесс соударения ударника из поликарбоната с алюминиевой мишенью диаметром 100мм со скоростью 4700м/с**

Эксперимент в этом случае не выявляет сквозного пробития мишени и её разрушение является частичным, в виде откола пластины с тыльной стороны. В расчётах наблюдается (рисунок 2.34) тенденция концентрации трещин у тыльной поверхности (и параллельно ей), но завершённый откол не был сформирован ни в одном расчёте. Расчётные значения диаметра и глубины кратера составляют  $d_c=43$  мм и  $h_c=24$  мм соответственно. В экспериментах эти значения равны  $d_c=55$  мм и  $h_c=24$  мм.

Во всех расчётах наблюдается удовлетворительное согласие с экспериментом в размерах и форме кратеров. Диаметр и глубина кратеров несколько занижены относительно экспериментов. Удовлетворительное согласие с экспериментом наблюдается и в расчёте деформации тыльной стороны мишени, то есть величины прогиба и его площади.

Принятая в расчётах модель разрушения предсказывает появление большего числа трещин, чем наблюдается в экспериментах. Характер и конфигурация трещин имеет тенденцию к согласию с экспериментом. Следует отметить, что в расчётах не применялись искусственные методики программного характера, позволяющие выделять только определённую трещину и подавить избыточное трещинообразование.

**Пробитие преград при средних скоростях удара.** Моделировалось пробитие стальных преград [56] в диапазоне скоростей соударения  $U_0 < 1000$  м/с. Ударниками являлись остроконечные пули в латунной оболочке со свинцовыми или стальными сердечниками. Полная масса ударника составляла  $M_s = 9.6$  г. В экспериментах определялись  $U_{psp}$  (минимальная скорость соударения, при которой ещё наблюдается пробитие ударником мишени) и  $U_{pkp}$  (максимальная скорость соударения, при которой еще не наблюдается пробитие). Согласно принятой на практике методике, скорости  $U_{psp}$  и  $U_{pkp}$  определяются как средние значения по 5 экспериментам с пробитием или непробитием преграды, соответственно. Все преграды представляли квадратные пластины с длиной стороны  $h=50$  см. Характеристики материалов пули и преграды представлены в таблице 2.5.

В экспериментах контроль пробития достаточно очевиден: в прочных преградах наблюдается, как правило, либо сквозное пробитие, либо непробитие. В вычислительных экспериментах возникает необходимость устанавливать данный факт из некоторых числовых результатов и для этой цели использовались баллистические кривые  $U_{rel} = f(t)$ , показывающие скорость центра масс (ЦМ) ударника относительно скорости центра масс преграды в процессе ее пробития.

$$U_{rel}(t) = \left( \frac{\sum_{i=1}^{Np} m_i U_i(t)}{\sum_{i=1}^{Np} m_i} \right) - \left( \frac{\sum_{j=1}^{Nt} m_j U_j(t)}{\sum_{j=1}^{Nt} m_j} \right) \quad (2.50)$$

где  $N_p$  – количество расчетных частиц, имитирующих ударник,  $N_t$  – количество расчетных частиц, имитирующих преграду.

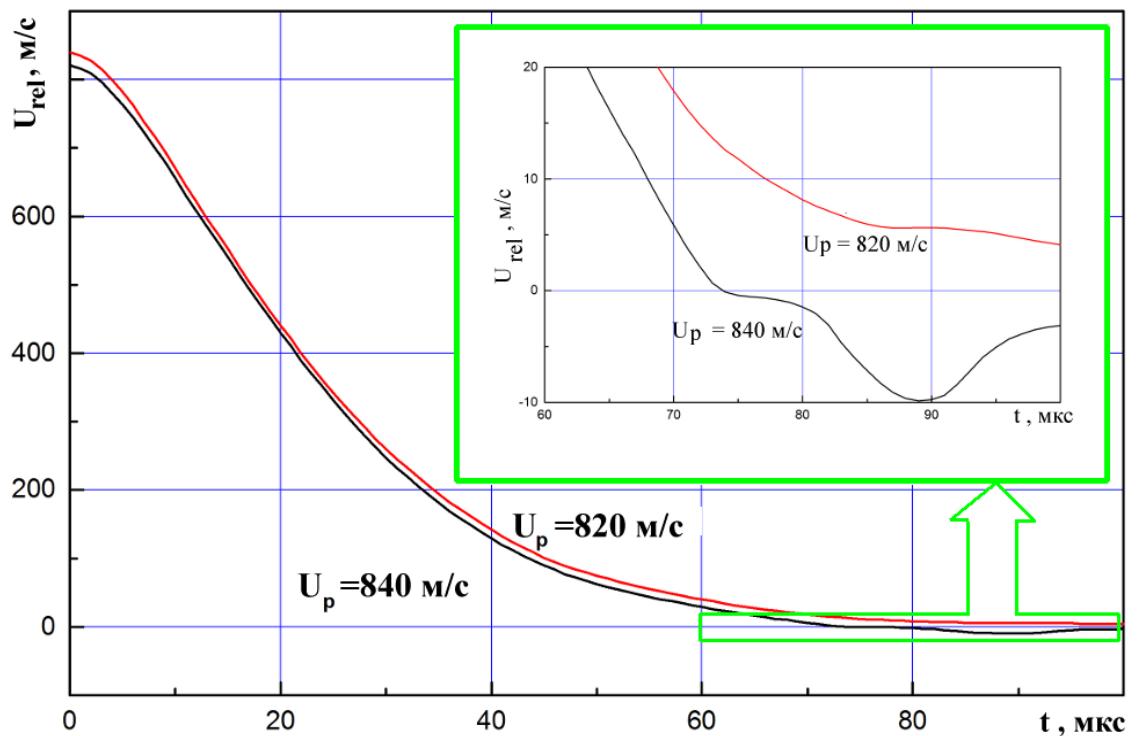
Таблица 2.5 – Свойства материалов пули и преграды

Параметр	Оболочка ударника (латунь)	Сердечник Ударника (свинец)	Преграда (сталь)	Сердечник ударника (сталь)
$\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	8700	11350	7900	7900
$G$ , ГПа	34	0.1	83	100
$v$	0.37	1.517	0.27	0.28
$Y_0$ , МПа	300	10	1760	1400
$C'$ , м/с	4400	3600	6100	5800
$C^t$ , м/с	2100	1600	3300	3200
$\gamma$	1.87	2.8	1.7	1.7
$K$ , ГПа	115	43.5	156	156

На рисунке 2.35 показана зависимость  $U_{rel} = f(t)$  при взаимодействии свинцового ударника со стальной преградой толщиной  $d=9\text{мм}$  для скоростей соударения  $U_0=840\text{м/с}$  (кривая 1, пробитие преграды) и  $U_0=820\text{м/с}$  (кривая 2, непробитие преграды). При  $U_0=840\text{м/с}$  всегда  $U_{rel} > 0$  и ударник пробивает преграду. Во втором случае при  $t > 74$  мкс имеет место обратное движение ( $U_{rel} < 0$ ) ударника, что делает невозможным его проникновение в запретное пространство.

Если в эксперименте наблюдается некоторый разброс скоростей пробития, то при численном моделировании возможно единственное значение критической скорости соударения  $U_0^*$ , выше которой будет наблюдаться пробитие преграды, т.е. в каждом расчете  $U_{psp} = U_{pkp}$ . Чисто теоретически, при идеальной повторяемости экспериментов, следовало бы и в реальных экспериментах также ожидать  $U_{psp} = U_{pkp}$ . Реально в экспериментах наблюдается

интервал  $U_{psp} - U_{pkp} \approx 20\text{м/с}$  и результат конкретного эксперимента в диапазоне скоростей соударения  $U_{50} \pm 10 = 0.50 \cdot (U_{psp} + U_{pkp}) \pm 10$  непредсказуем; можно судить лишь о вероятности пробития преграды. В указанном диапазоне скоростей проявляются эффекты индивидуальных особенностей преград и ударников (микроструктурные неоднородности, разброс механических характеристик и т. п.). Этот диапазон разграничивает зоны непробития ( $U_{rel} < 0$ ) и сквозного пробития ( $U_{rel} > 0$ ) преград. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов наиболее логично производить в предположении  $U_0^* = U_{50}$ , и такое сравнение показано на рисунке 2.36. Очевидно, что результаты расчетов и экспериментов достаточно близки и с точки зрения практических задач прогнозирования подобная точность предсказания результатов эксперимента является очень хорошей. Для исчерпывающего анализа в таблице приведены значения физико-механических характеристик материалов ударника и преграды.



**Рисунок 2.35 – Баллистическая кривая взаимодействия ударника со стальной преградой толщиной 9мм. Отдельно показан конечный участок баллистической кривой**

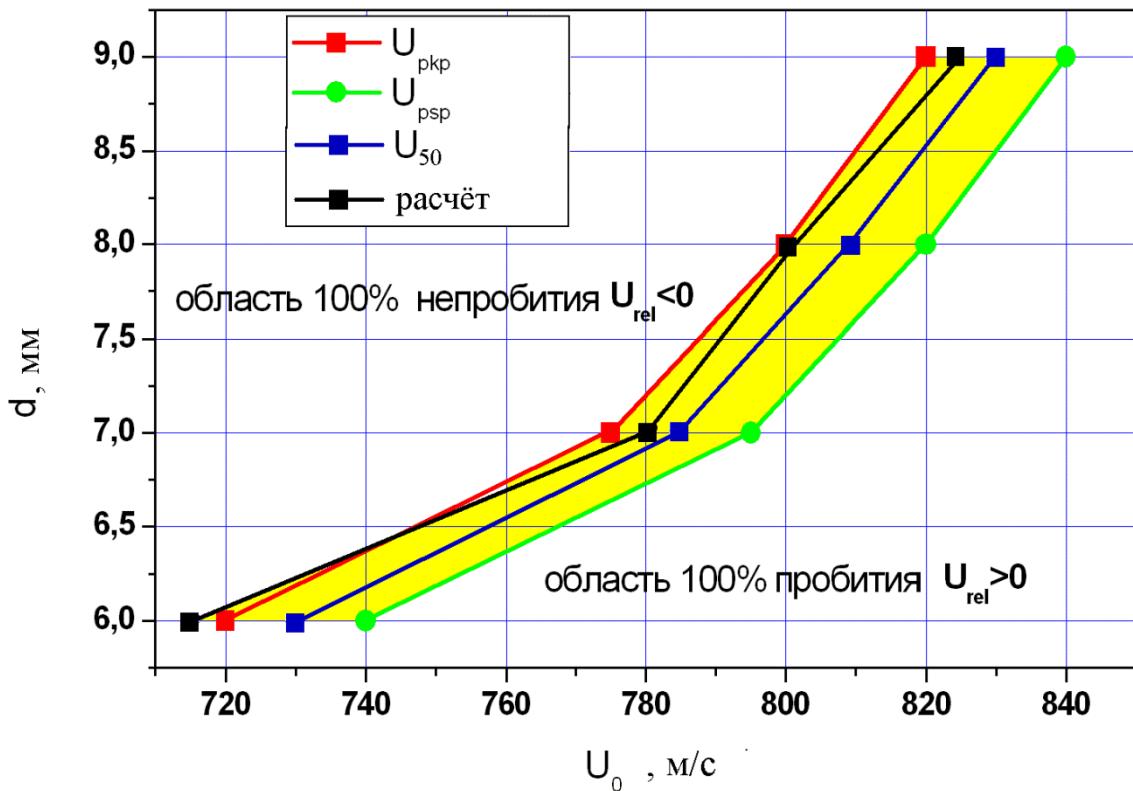


Рисунок 2.36 – Сравнение расчетных и экспериментальных [56] результатов по пробитию преград пулями со стальным сердечником

Использование реалистичных моделей пуль позволяет уточнить локальные особенности картины бронепробития; например, наблюдать эффект «среза пробки» [116,117], как показано на рисунке 2.37.

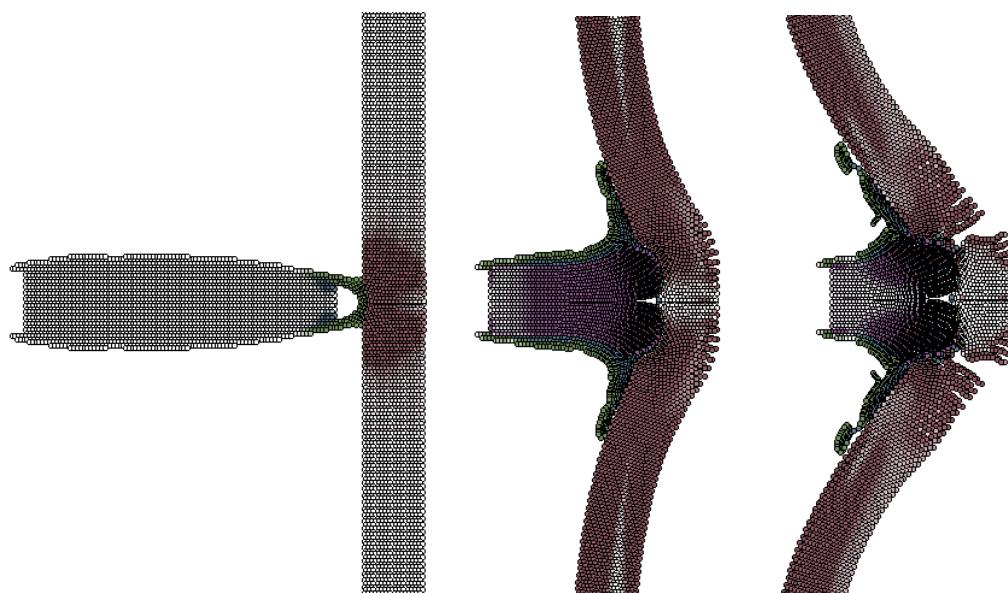


Рисунок 2.37 – Взаимодействие пули СТ-М2.020 калибра 7.62 мм и стальной преграды толщиной 5 мм. Скорость соударения 800 м/с

Применение вместо акустического приближения (1.32)–(1.37) безитерационной процедуры [93] решения задачи распада разрыва (с использованием параметров ударной адиабаты) не меняет кардинально результатов расчетов, что можно объяснить относительно низкими скоростями соударения.

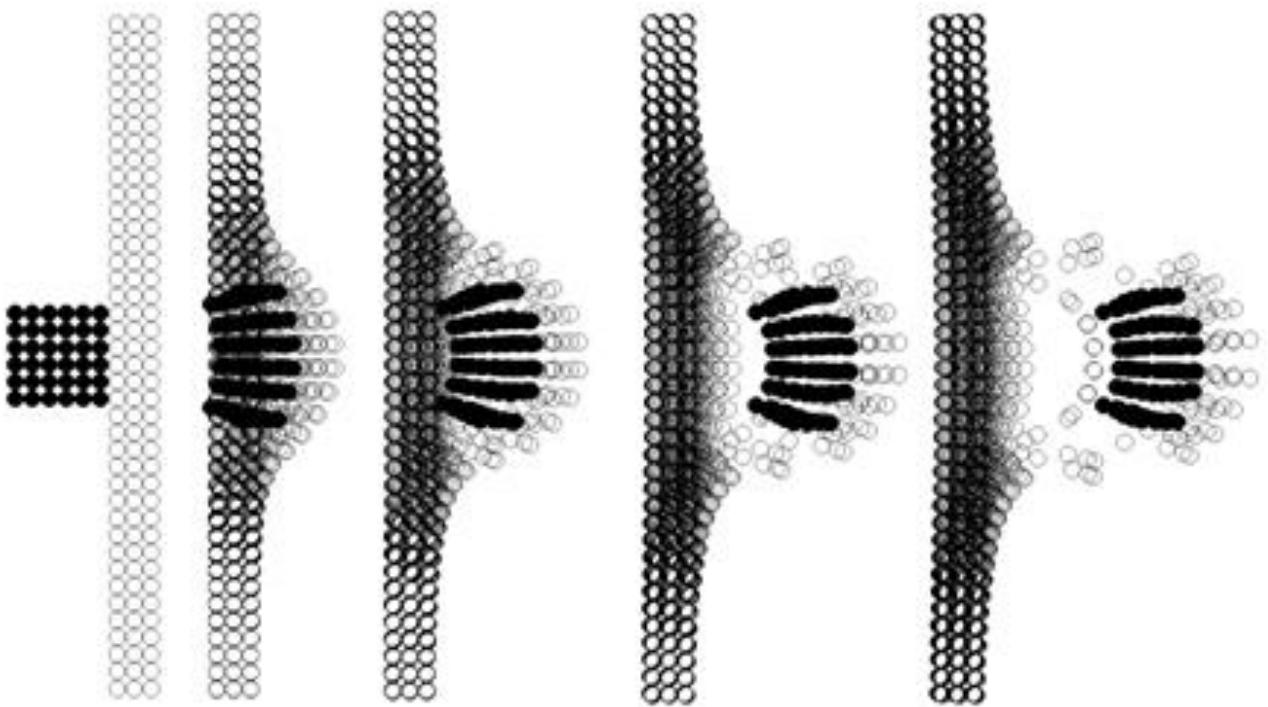
Необходимо заметить, что разработанный метод SPH не требует дополнительных физических или алгоритмических методик при решении пространственной задачи взаимодействия ударника и мишени под углом к нормали.

Как пример, в случае 3D-моделирования [56] решалась задача рикошета на примере удара стального куба по стальной пластине при различных углах соударения. До момента соударения кубический ударник не вращается и его ударяющая грань параллельна поверхности пластины. Поверхности контакта соударяющихся материалов предполагаются абсолютно гладкими без наличия адгезионных сил, то есть тангенциальные напряжения на поверхности контакта отсутствуют.

Свойства материала ударника:  $K=176$  ГПа,  $G=83$  ГПа,  $\rho=7900$  кг/м<sup>3</sup>,  $Y_0=1.9$  ГПа; мишени:  $K=176$  ГПа,  $G=83$  ГПа,  $\rho_0=7900$  кг/м<sup>3</sup>,  $Y_0=0.5$  ГПа.

Размер ребра кубического ударника составляет 0.01м, размеры пластины есть 0.005м×0.0667м×0.0667м. Ударник моделируется числом частиц 6×6×6, пластина моделируется 3×40×40 частицами. Полная скорость ударника составляет 2000м/с. Толщина пластины и скорость ударника были выбраны из соображений моделирования всех возможных сценариев взаимодействия, от сквозного пробития до рикошета.

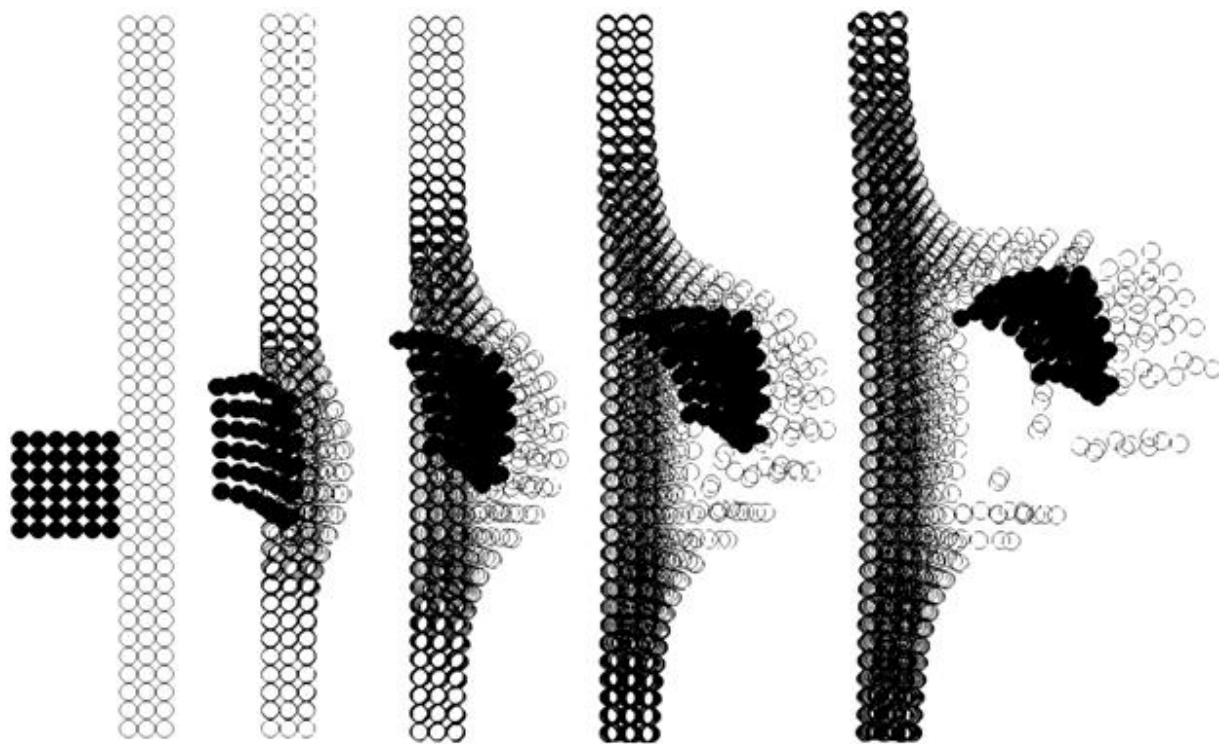
На рисунке 2.38 показан удар под углом 0° от нормали. В трёхмерном случае представляет сложность визуализация результатов моделирования. На рисунке 2.38 показаны все SPH-частицы, участвовавшие в расчёте. Несмотря на частичное перекрытие и наложение частиц, такая визуализация, тем не менее, даёт полную картину взаимодействия ударника и мишени. Наблюдается сквозное пробитие мишени.



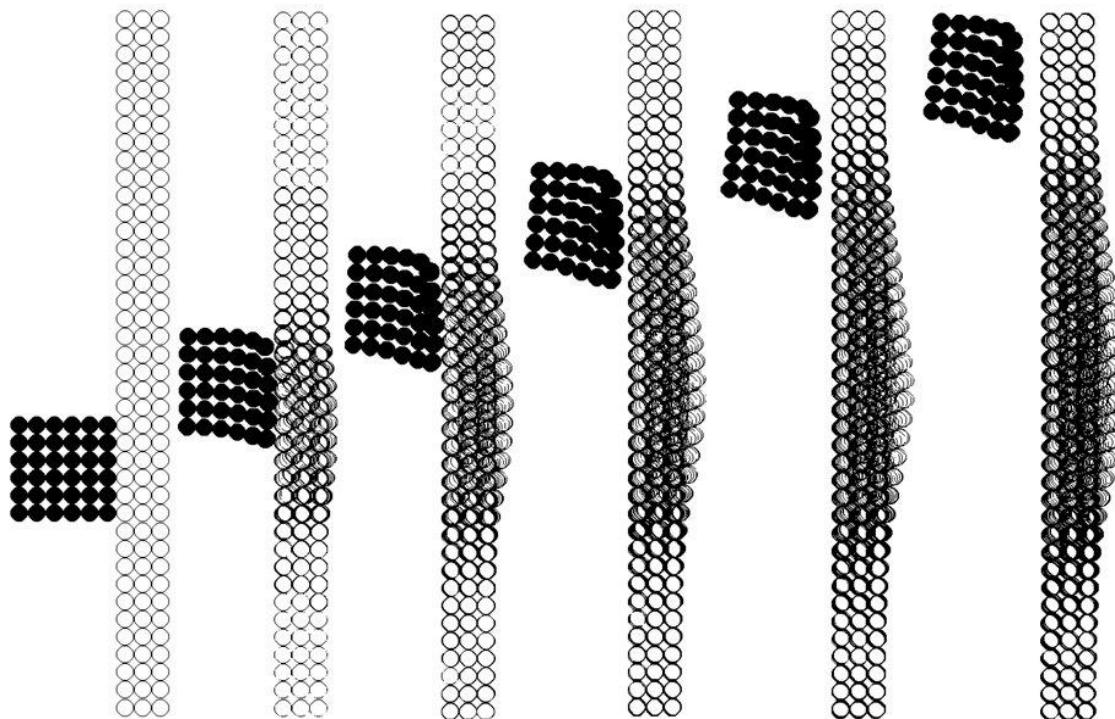
**Рисунок 2.38 – Расчет взаимодействия кубического ударника (●) и пластины (○) при ударе под углом  $0^\circ$  от нормали. Показаны фазы соударения во времена 0;20;40;60 и 80мкс соответственно**

На рисунке 2.39 показан удар под углом в  $30^\circ$  от нормали. Помимо сквозного пробития с несимметричным отрывом материала мишени четко прослеживается изменение траектории движения ударника и его вращение при пробитии.

При ударе под углом  $80^\circ$  от нормали наблюдается рикошет ударника (рисунок 2.40), причём углы падения и отражения приблизительно равны. Вычисления показывают наличие упругопластических деформаций как ударника, так и мишени. Инерционное движение в последней наблюдается и после рикошетирования ударника, что связано с возбуждением упругих колебаний в пластине после удара.



**Рисунок 2.39 – Расчет взаимодействия кубического ударника (●) и пластины (○) при ударе под углом  $30^\circ$  от нормали. Показаны фазы соударения во времена 0;20;40;60;80 и 120мкс соответственно**



**Рисунок 2.40 – Расчет взаимодействия кубического ударника (●) и пластины (○) при ударе под углом  $80^\circ$  от нормали. Показаны фазы соударения во времена 0;20;40;60;80 и 120мкс соответственно**

Представленные результаты свидетельствуют об адекватности качественных характеристик процесса соударения трехмерному моделированию упругопластических течений на основе модифицированного метода SPH. Контроль свободных границ не был реализован, так как для рассмотренных задач вносимая этим погрешность оказалась несущественной. Основные особенности пробития преграды удалось воспроизвести при очень грубой исходной дискретизации.

Моделирование пробития преград, приведенное в разделе 2.10, показало пригодность разработанного метода к интерпретации результатов экспериментов по ударному воздействию на материалы.

Приведенные в разделах 2.2–2.3 сравнения численных решений с аналитическими показали более высокую точность разработанного метода в области контактных границ по сравнению со стандартным методом, что подтверждается исследованием, проведенным авторами [91,92] при сравнении разработанного метода SPH со стандартным методом. В работе [91], в частности, погрешность стандартного метода принята за 1 и произведено сравнение погрешностей в дискретных аналогах чебышевской  $C$  и  $L_2$  норм. Часть результатов исследования [91] показана в таблице 2.6, взятой из [91].

Таблица 2.6 – Относительная ошибка погрешности в области контактного разрыва [91]; все данные таблицы представлены в соответствии с [91]

	Стандартный метод SPH	Вариант А.Н.Паршикова
$\ \rho\ _C$	1	0.415
$\ E\ _C$	1	0.248
$\ P\ _C$	1	0.151
$\ \rho\ _{L2}$	1	0.601
$\ E\ _{L2}$	1	0.470
$\ P\ _{L2}$	1	0.314

Авторы [91] тестировали представленный в диссертации метод SPH на основе акустического решения задачи Римана, использованный авторами [56] для решения задач пробития преград при средних скоростях. Авторы [91] справедливо утверждают и показывают, что применение более точного решения задачи Римана улучшает решение, полученное методом SPH, использующим соотношения распада разрывов.

Ранее это утверждение уже было проверено авторами [57] на примере тестовой задачи *blast wave*, приведенной в разделе 2.3 диссертации. Интуитивно очевидно, что использование в разработанном методе SPH более точного решения задачи о распаде произвольного разрыва, взятого, например, из [118]-[122], должно улучшать решение.

Тем не менее, как следует из таблицы 2.6, даже использование простейшего акустического приближения (1.20)-(1.21) существенно повышает точность разработанного метода SPH в окрестности контактных разрывов по сравнению со стандартным методом.

**Выводы к главе 2.** Тестирование метода SPH, основанного на соотношениях распада разрывов, подтвердило справедливость положенных в его основу предположений. Метод продемонстрировал монотонность в окрестностях контактных разрывов. Тестирование показало преимущества разработанного метода SPH по сравнению со стандартным в точности расчётов и не обнаружило алгоритмических или схемных дефектов нового метода. Валидация разработанного метода SPH путём моделирования разрушения керамики и пробития преград ударниками, представленная в разделах 2.9 и 2.10, показала пригодность разработанного метода к интерпретации результатов экспериментов по ударному воздействию на материалы.

## ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОВОЛНОВОГО НАГРУЖЕНИЯ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

В данной главе рассматривается 2D-моделирование ударного сжатия пористого алюминия с явным описанием поля течения деформирующейся мезоструктуры. Поле течения представлено решением полной системы термоупруго-пластических уравнений с использованием механических и теплофизических свойств твердого алюминия.

Распространение ударной волны в пористом материале описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии для термоупругопластической среды. В области пластического течения удовлетворяется критерий текучести Мизеса. Моделирование течения вещества было выполнено с помощью SPH-кода, использующего решения задачи о распаде произвольного разрыва в аппроксимации уравнений сохранения [22].

В математической модели используется уравнение состояния НОМ [123]. Уравнение состояния НОМ использует в качестве опорной кривой адиабату Гюгонио (1.63)-(1.68). Температура на адиабате Гюгонио вычисляется по Уолшу и Кристиану [124] для плотности вещества выше начальной. Для плотности ниже начальной температура материала вычисляется с использованием упругой части внутренней энергии  $E_c$ . Вводится поправка, предполагающая, что при  $\rho \leq \rho_0$  упругое давление  $P_c$  равно

$$P_c = K(1 - \rho_0 / \rho) \quad (3.1)$$

соответствующая упругая составляющая внутренней энергии равняется

$$E_c = K(1 - \rho_0 / \rho)^2 / (2\rho_0) \quad (3.2)$$

и температура определяется как

$$T = T_0 + (E - E_c) / C_v \quad (3.3)$$

В уравнениях (3.1) и (3.2)  $K$  – это изотермический модуль объёмного сжатия,  $C_v$  – это удельная теплоемкость,  $T_0 = 293\text{K}$ . Все физические свойства, в том числе параметры адиабаты Гюгонио, взяты для сплошного вещества.

Моделирование осуществляется на заданной регулярной мезоструктуре материала.

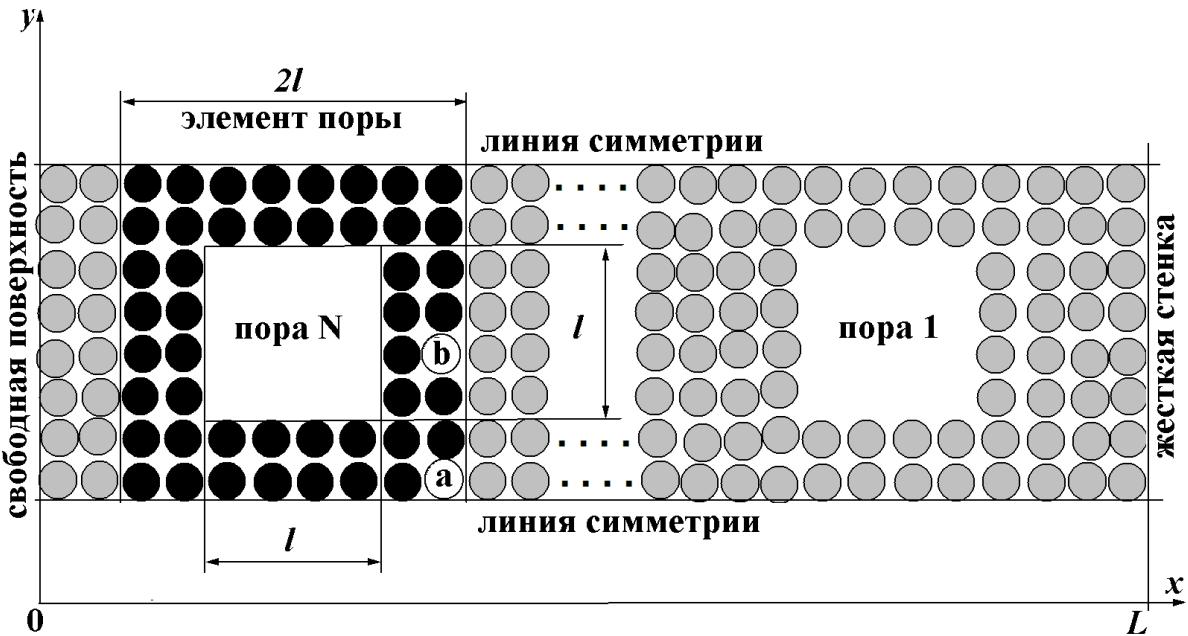
### **3.1. Формулировка задачи и исходные данные**

Моделирование ударной волны в пористом алюминии [22,31,32] выполняется при решении 2D уравнений для случая одномерного удара пористой пластины о жесткую стенку. Алюминий выбран для моделирования, поскольку его физические свойства хорошо известны и адиабаты Гюгонио определены экспериментально как для сплошных, так и для пористых веществ.

Набор параметров вещества для моделирования следующий: начальная локальная плотность  $\rho_0=2700\text{кг}/\text{м}^3$ , изотермический модуль объемного сжатия  $K=73\text{ГПа}$ , модуль сдвига  $G=23\text{ГПа}$ , предел текучести  $Y_0=0.4$  ГПа, удельная теплоемкость  $C_v=880\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , коэффициент Грюнайзена  $\gamma=2.17$ , константы адиабаты Гюгонио  $C_a=5350$  м/с и  $S_a=1.35$ , теплопроводность  $\lambda=200$  Вт/(м К), объемный коэффициент теплового расширения  $\beta=23\times10^{-6}\text{K}^{-1}$ .

Для того, чтобы применить 2D-код, пористая пластина считается перфорированной квадратными отверстиями по нормали к плоскости расчета. Поры расположены в этой плоскости регулярно, с равными интервалами вдоль горизонтального и вертикального направлений. На рисунке 3.1 представлен один горизонтальный слой, вырезанный из бесконечной в вертикальном направлении пластины. Этот слой представляет собой расчетную область.

Один структурный элемент, с помощью которого создается периодическая мезоструктура пористого вещества, выполнен как квадратная рамка с внешними размером  $2l$ , заполненная SPH-частицами. Структурный элемент содержит квадратную пору площадью  $l\times l$ . Это определяет коэффициент пористости, как  $m = \rho_0/\rho_{00} = 4/3$ , где  $\rho_{00}$  – это средняя плотность материала. Длина перфорированного образца равна  $L$  и он содержит  $N$  пор. На рисунке 3.1 показана начальная укладка SPH частиц.



**Рисунок 3.1 – Начальная расчетная область и расположение SPH частиц**

Восемь частиц располагаются вертикально. Общее число SPH частиц составляет 1232 на 25 пор в ряду. В некоторых расчётах использовалось 4928 SPH частиц на 25 пор. Размеры и массы частиц были различными в зависимости от различных размеров пор  $l = 0.04, 0.4, 4, 40$  и  $400$  мкм. В частицах  $a$  и  $b$ , выбранных контрольными точками, расчетные параметры сохранялись в отдельных файлах для каждого шага интегрирования, чтобы выявить характер релаксации материала после прохождения ударной волны. Эти частицы расположены на расстоянии  $L/4$  от жесткой стенки.

На всех границах расчетной области (кроме свободной поверхности), задаются условия для жесткой стенки с проскальзыванием.

Вертикальная жесткая стенка в  $x=L$  означает, что для каждой расчётной SPH-частицы  $i$  с параметрами  $\{m, \rho, D, x, y, U_x, U_y, P_i, T_i, S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}\}_i$  создаётся на каждом расчёмном шаге виртуальная частица с параметрами  $\{m, \rho, D, 2L-x, y, -U_x, U_y, P_i, T_i, S_{xx}, S_{yy}, -S_{xy}\}_i$ .

Для горизонтальной стенки в  $y=0$  и  $y=2l$  создаются виртуальные частицы с  $\{m, \rho, D, x, -y_i, U_x, -U_y, P_i, T_i, S_{xx}, S_{yy}, -S_{xy}\}_i$  и  $\{m, \rho, D, x, 4l-y_i, U_x, -U_y, P_i, T_i, S_{xx}, S_{yy}, -S_{xy}\}_i$  соответственно.

Взаимодействие SPH-частиц из расчётной области и виртуальных частиц, расположенных вне расчётной области, имитирует жёсткие стенки с проскальзыванием.

В начальный момент времени при  $t = 0$  все SPH-частицы расчётной области приобретают скорость  $U_x = U_0$ .

Когда пористый материал начинает взаимодействовать с жесткой стенкой, в нём формируется ударная волна, распространяющаяся от жесткой стенки к свободной поверхности. На некотором расстоянии за фронтом ударной волны прекращаются колебательные процессы, обусловленные структурной неоднородностью, и параметры вещества приходят к значениям, определяемым адиабатой Гюгонио для пористого материала. Явление релаксации в пористом материале, нагруженном ударной волной, рассматриваются ниже.

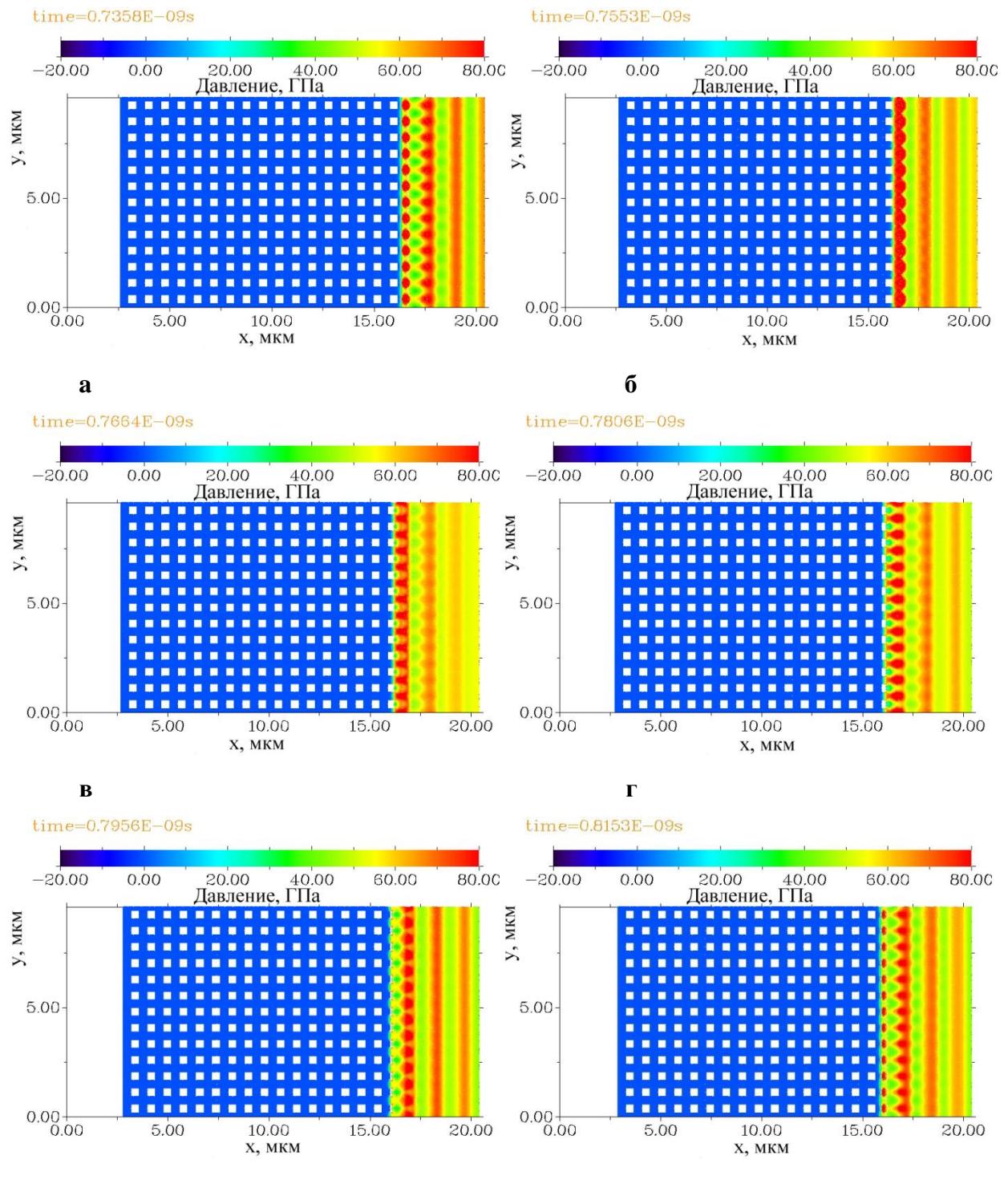
### **3.2. Динамическая релаксация**

Динамическая релаксация в основном проявляется в эволюции колебаний давления, которые наблюдаются за ударной волной. Рисунок 3.2 иллюстрирует удар пористой пластины о жесткую стенку. Расчет проведен для размера пор  $l=0.4\text{мкм}$  и скорости пластины  $U_0=3500\text{м/сек}$ . На рисунке 3.2 приведено распределение давления в пластине для различных моментов времени. Временной интервал соответствует прохождению ударной волны через одну пору. Видно, что распределение давления стратифицируется. Вертикальные страты двигаются в направлении жесткой стенки (она справа). Скорость страт обсуждается ниже, в разделе 3.4.

На рисунке 3.2а изображен момент времени, когда ударная волна входит в новый поровый элемент. За ударной волной видны пятна высокого давления, образовавшиеся в результате схлопывания предыдущего ряда пор.

На рисунке 3.2б ударная волна достигает передней поверхности пор и пятна повышенного давления начинают сливаться в вертикальную страту.

На рисунке 3.2в фронт ударной волны разделен на фрагменты: на локальную ударную волну, бегущую вдоль горизонтальной перегородки поры и на поток вещества в пустоту поры.



**Рисунок 3.2 – Поля давления во времена  $t = 0.7358$ (а),  $0.7553$ (б),  $0.7664$ (в),  $0.7806$ (г),  $0.7956$ (д) и  $0.8153$ (е) нс после удара пористой пластины о жесткую стенку (правая граница) при скорости пластины  $U_0=3500$  м/с (размер пор  $l = 0.4$ мкм)**

На рисунке 3.2г закрытие поры продолжается, в то время как наблюдается перераспределение давления в страте: максимум давления перемещается из середины вертикальной перемычки к оси горизонтальной перемычки. Видно также смещение страт давления к жесткой стенке. Рисунок 3.2д показывает, что закрытие пор завершилось.

На рисунке 3.2е давление в схлопнувшейся поре продолжает расти за счёт кумуляции вещества и цикл ударной нагрузки порового элемента должен повториться (начиная с рисунка 3.2а).

Пространственное распределение давления в пластине показано на рисунке 3.3. Каждая SPH частица проецируется на плоскость  $P-x$  в момент времени  $t=4\text{нс}$  после удара пластины шириной 40.8мкм (50 поровых элементов) со скоростью  $U_0=3500 \text{ м/с}$ . Тыльная свободная поверхность и фронт ударной волны расположены на расстоянии 14 и 18.5мкм, соответственно. За ударной волной видны колебания давления. Максимумы и минимумы кривой соответствуют стратификации давления на рисунке 3.2.

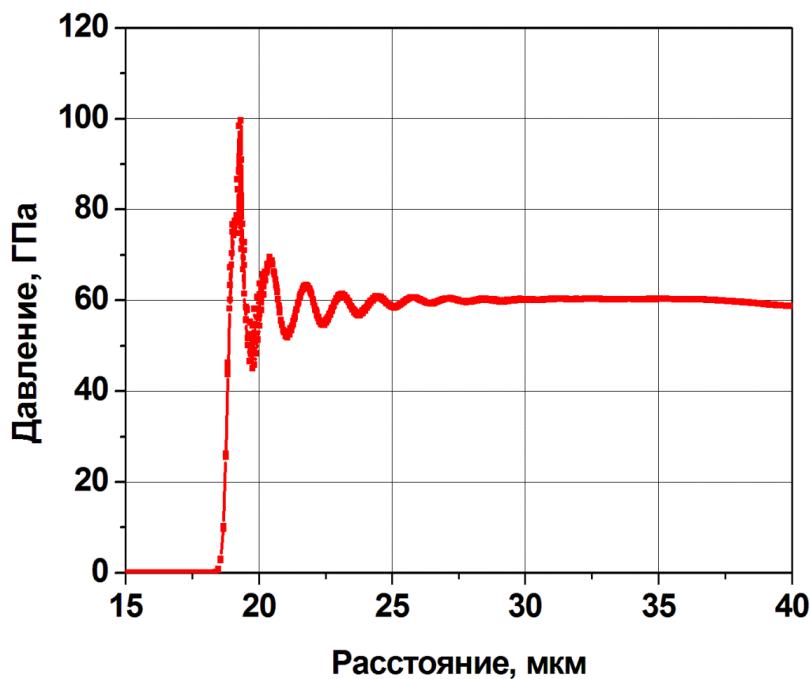


Рисунок 3.3 – Профиль полного давления, построенный для всех SPH частиц в момент времени  $t=4\text{нс}$  после удара пластины толщиной 40.8 мкм со скоростью  $U_0 = 3500 \text{ м/с}$  (размер пор  $l = 0.4 \text{ мкм}$ )

Частоты колебаний анализируются в разделе 3.5. Поскольку в этом расчете теплопроводность не принимается во внимание, затухание колебаний давления может быть отнесено к диссипативному механизму пластической деформации. Численная вязкость, появляющаяся в результате SPH-дискретизации дифференциальных уравнений, также может внести свой вклад в затухание колебаний. Значение численного коэффициента вязкости в SPH-схеме оценено в [57].

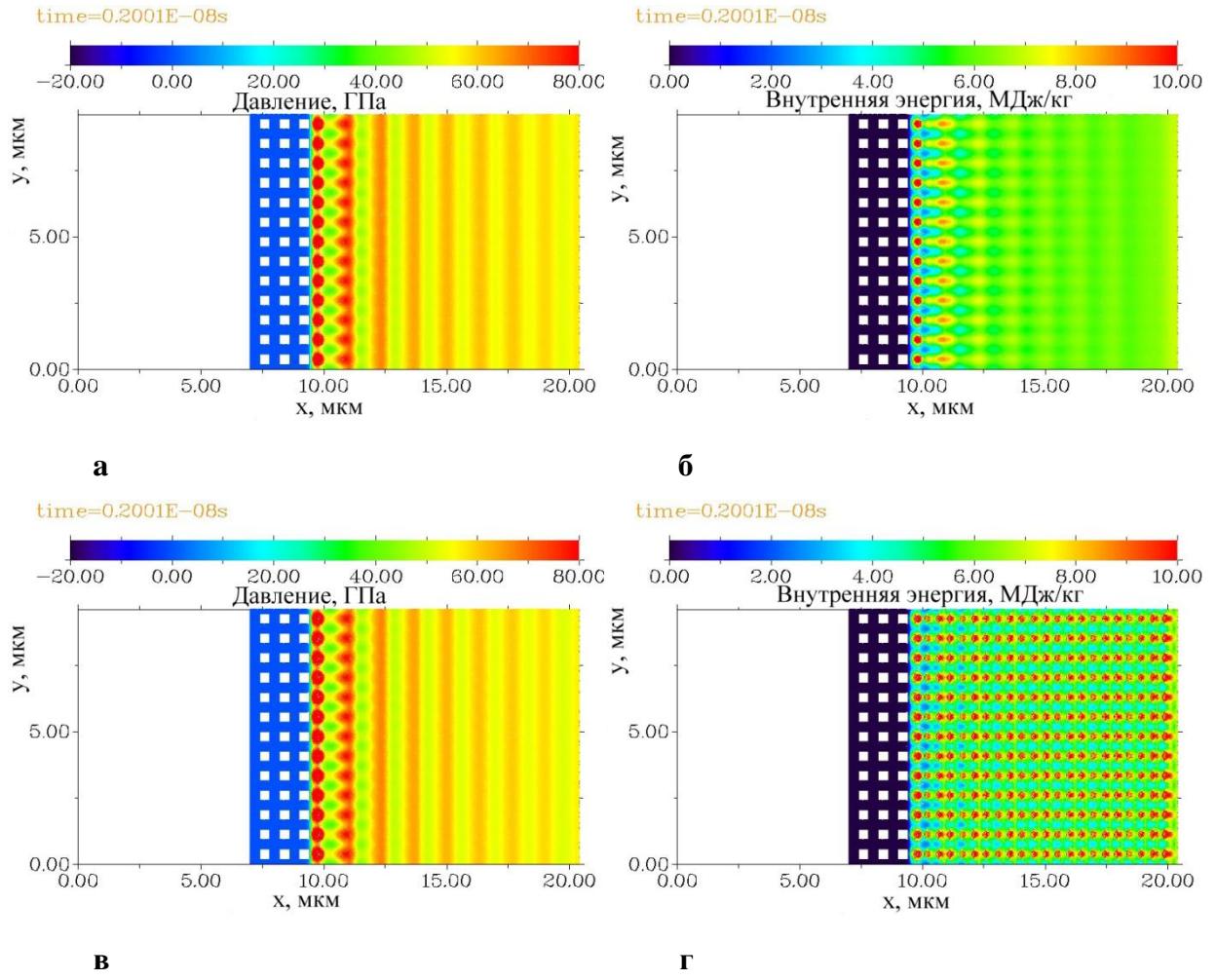
### **3.3. Термическая релаксация**

Термическая релаксация вызывается теплопроводностью и приводит к выравниванию температурных неоднородностей в материале за ударной волной. Для алюминия термическая релаксации ожидается значительной при достаточно малых размерах структурных поровых элементов. Расчеты при различных значениях размера элемента свидетельствуют о том, что при  $l=0.4\text{мкм}$  теплопроводность существенно влияет на процесс динамичной релаксации. На рисунке 3.4а,б распределения давления и внутренней энергии изображены в момент времени  $t=2\text{нс}$  для скорости удара  $U_0=3500\text{ м/с}$  при учете теплопроводности.

Видно, что горячие пятна, возникшие после схлопывания пор, затухают. Вертикальные страты внутренней энергии совпадают со стратами давления. Для сравнения на рисунке 3.4в,г показаны результаты расчетов, в которых теплопроводность выключена. Горячие пятна на месте схлопнувшихся пор практически не изменяются.

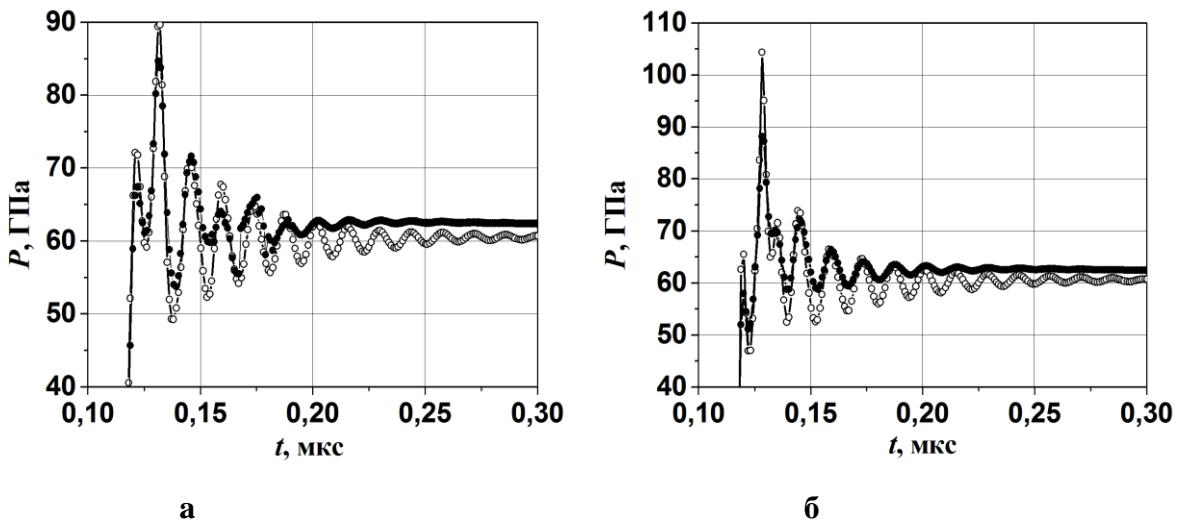
Влияние температуры на динамическую релаксацию представлено на рисунке 3.5, где колебания давления во времени построены для SPH-частицы *a* (рис.3.5а) и *b* (рис.3.5б) в случаях, когда теплопроводность учитывается или отключена. Для этого варианта расчётов были приняты прежние параметры: размер поры  $l=40\text{нм}$ , скорость удара  $U_0=3500\text{м/с}$ . Видно, что ударное нагружение пористого материала осуществляется в два этапа: во-первых,

плоской ударной волной, которая отвечает за первый пик давления, а во-вторых, при схлопывании пор, что порождает второй пик. Последующие квазигармонические колебания хорошо синхронизированы в обеих частицах, *a* и *b*. В обоих случаях теплопроводность приводит к более быстрому затуханию пульсаций давления и достижению стационарного состояния.

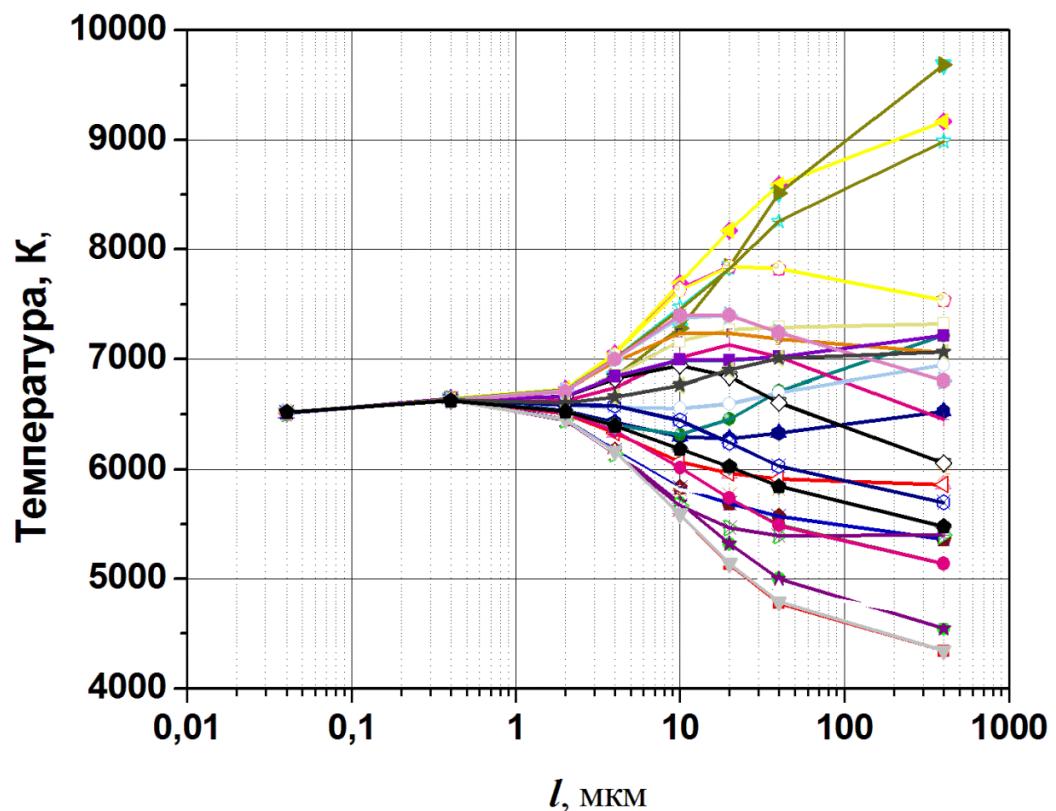


**Рисунок 3.4 – Поля давления и внутренней энергии, вычисленные с учетом теплопроводности (а,б) и без учета теплопроводности (в,г).  $U_0 = 3500\text{м/c}$ , (размер пор  $l=0.4 \text{ мкм}$ )**

В целях установления масштаба пор, при котором оба релаксационных процесса (динамический и термический) имеют равную продолжительность, расчеты были проведены для различных размеров пор. На рисунке 3.6 температура всех 48 SPH-частиц поровых элементов представлена для того момента времени, когда колебания давления фактически угасли.



**Рисунок 3.5 – Профили давления в выделенных частицах; (а) – для частицы *a*, расположенной в середине крестовины; (б) – для частицы *b*, расположенной в середине вертикальной перемычки, с учётом теплопроводности (●) и без учёта теплопроводности (○). Скорость удара  $U_0 = 3500$  м/с (пора размером  $l=0.04$  мкм)**



**Рисунок 3.6 – Температура для 48 SPH-частиц, образующих один поровый элемент, в зависимости от размера поры  $l$ , после завершения динамической релаксации. Значки относятся к отдельным SPH-частицам порового элемента**

При малых величинах поровых элементов, вплоть до  $l = 0.4$  мкм, тепловое равновесие достигается, пока динамическая релаксация еще продолжается. Это отображается совпадением температур всех SPH-частиц.

При больших размерах пор наблюдается увеличение температурных неоднородностей, в то время как распределение давления уже равномерно.

### **3.4. Эволюция структуры ударной волны**

Эволюция структуры ударной волны в пористом алюминии для различных скоростей удара пластины о жесткую стенку, иллюстрируется на рисунке 3.7, где профили давления для всех SPH-частиц построены в разные моменты времени. Рисунок 3.7а соответствует скорости удара 100м/с. Видно, что волна сжатия характеризуется сильной неоднородностью давления по направлению ее распространения. Интенсивность волны уменьшается, а ширина фронта увеличивается. В головной части волны возникают две пульсации. Уровень нагрузки материала достаточно низок и упругая деформация преобладает в течении материала.

Когда скорость удара о стенку возрастает, становится существенной пластическая деформация пористой структуры. Это проявляется на рисунке 3.7б, где при скорости удара 300м/с ясно видна двухволновая структура. Структура упругого предвестника и его эволюция, аналогичны тем, которые показаны на рисунке 3.7а. Амплитуда упругого предвестника равна 0.2 ГПа. Фронт пластической волны еще неоднороден, но его ширина намного меньше, чем для упругих волн.

На рисунках 3.7в и 3.7г, при скорости  $U_0=500$ м/с и 1000м/с соответственно, интенсивность пластической волны увеличивается, а ее ширина продолжает сокращаться. Упругий предвестник постепенно сокращается, тогда как скорость пластической волны растет.

На скоростях удара 2000 м/с и 3500 м/с (рис.3.7д и рис.3.7е соответственно) образуется ударная волна. За фронтом ударной волны возникают колебания в результате схлопывания пор.

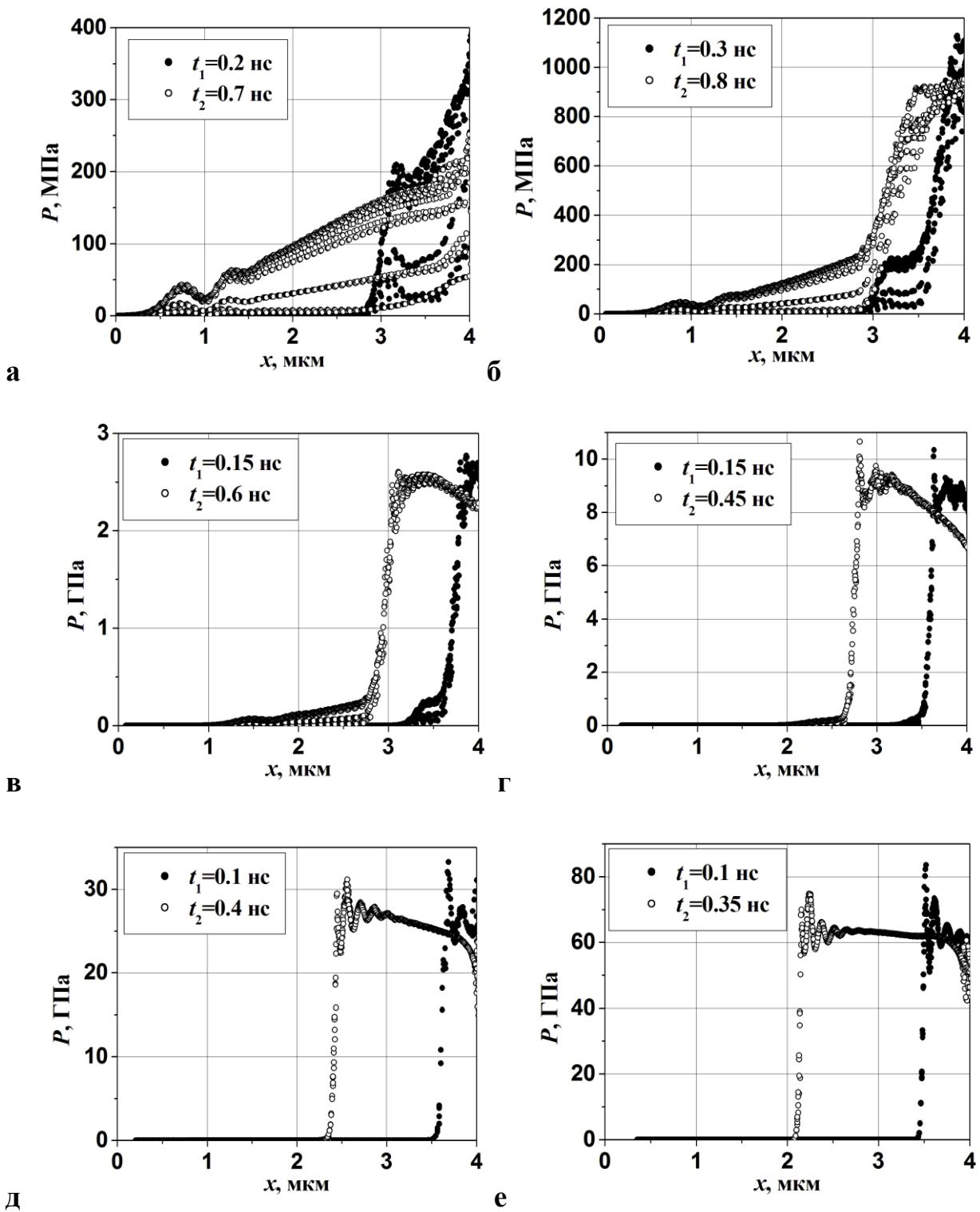


Рисунок 3.7 – Профили давления при скорости удара  $U_0=100\text{м/c}$  (а),  $300\text{м/c}$  (б),  $500\text{м/c}$  (в),  $1000\text{м/c}$  (г),  $2000\text{м/c}$  (д),  $3500\text{м/c}$  (е). Размер поры  $l=0.04 \text{ мкм}$

Профили давления на рисунке 3.7а–е были использованы для определения фазовых скоростей: скорости ударной волны и скорости перемещения страт

давления. В системе координат, привязанной к жесткой стенке, скорость ударной волны определяется как

$$U_{s0} = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1) \quad (3.4)$$

Координаты  $x_1$  и  $x_2$  приняты для полуамплитуды скачка давления во время  $t_1$  и  $t_2$  соответственно. Ударная волна распространяется от жесткой стенки в отрицательном направлении оси  $X$ , поэтому значение  $U_{s0}$  отрицательно. Скорость ударной волны  $U_s$  и скорость частиц  $U_p$  в системе координат, движущейся со скоростью удара пластины  $U_0$ , равняются

$$U_s = U_0 - U_{s0}, \quad U_p = U_0 \quad (3.5)$$

Профили давления в  $P-x$  координатах позволяют найти длины волн страт  $\lambda_{str}$  за ударной волной, предполагая, что колебания являются квазигармоническими. Частота колебаний в стратах  $\lambda_{str}$ , определяемая из временных профилей давления, показана на рисунке 3.5а,б. Эти два значения дают скорость распространения вертикальных страт давления

$$C = \lambda_{str} v_{str} \quad (3.6)$$

Поскольку амплитуда стратов невелика, величина  $C$  близка к эффективной скорости звука в сжатом материале. Движение ударной волны в пористом образце алюминия определяет частоту схлопывания пор как соотношение скорости ударной волны  $U_s$  к периоду  $2l$ , с которым расположены поровые элементы.

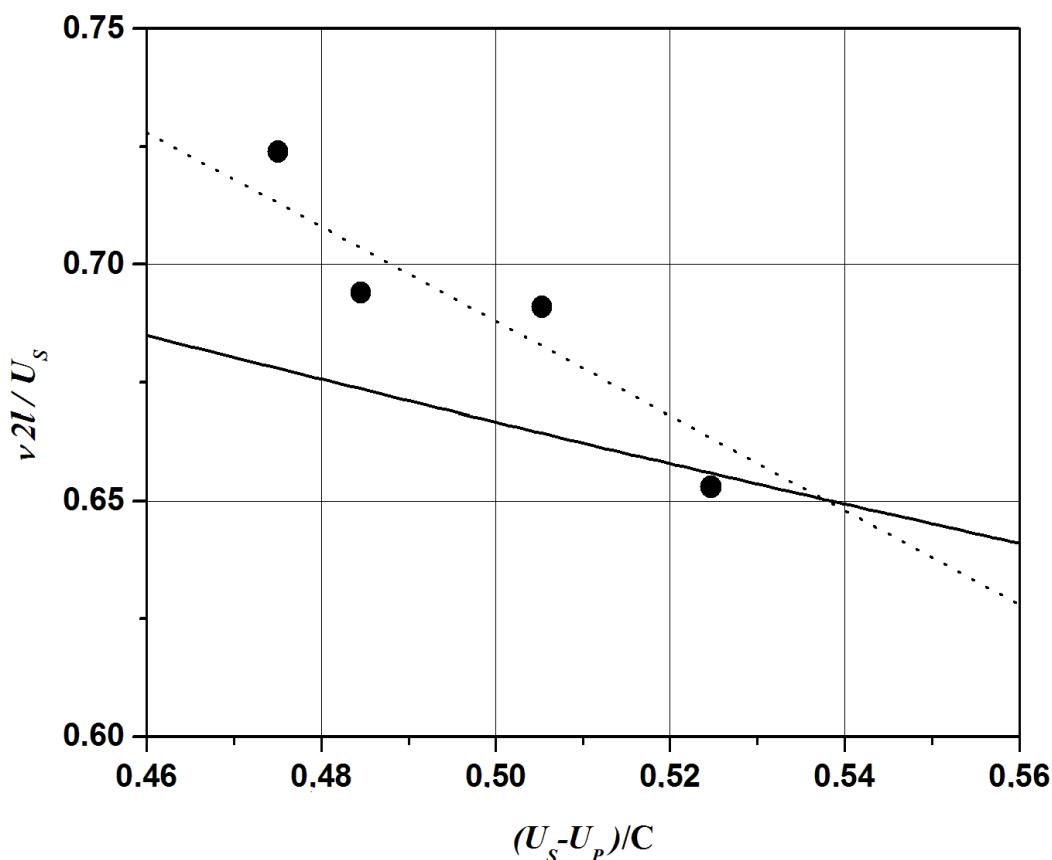
$$v_{col} = U_s / 2l \quad (3.7)$$

Сравнение частоты страт  $v_{str}$  с частотой схлопывания пор  $v_{col}$  показывает, что  $v_{str} < v_{col}$ . Это свидетельствует о том, что  $v_{str}$  может быть связано с  $v_{col}$  эффектом Доплера. Ударная волна, которая производит схлопывания пор и является источником колебаний, движется по отношению к сжатому материалу со скоростью  $U_s - U_p$  и доплеровское соотношение для  $v_{str}$  и  $v_{col}$  записывается как

$$v_{str} / v_{col} = 1 / [1 + (U_s + U_p) / C] \quad (3.8)$$

Правая часть (3.8) показана на рисунке 3.8 сплошной линией.

Непосредственно определяемое из рисунков 3.5 и 3.7 соотношение  $v_{str}/v_{col}$  представлено точками, которые аппроксимированы пунктирной линией. Представленные на рисунке 3.8 данные являются серьёзным аргументом в пользу трактовки сдвига наблюданной частоты как эффекта Доплера. Теоретическая линия и полученная обработкой 2-D моделирования имеют разные наклоны, но лежат достаточно близко. Причин для погрешности может быть много, но систематическая ошибка обработки данных маловероятна. Возможно, точная кривая требует корректировки для пористой упругопластической теплопроводящей среды.



**Рисунок 3.8 – Отношение частоты стравления давления к частоте схлопывания пор по отношению скорости ударной волны к скорости звука в сжатом пористом алюминии. Данные моделирования (•) интерполированы пунктирной линией, отношение Доплера (8) представлено сплошной линией**

### 3.5. Расчетное построение адиабаты Гюгонио

Адиабата Гюгонио в координатах  $U_p$ ,  $U_s$  представлена на рисунке 3.9 сплошными треугольниками ( $\blacktriangle$ ). Экспериментальные данные [125] для  $m=1.43$  и  $m=1.25$  также показаны значками ( $\bullet$ ) и ( $\blacksquare$ ), соответственно. Расчетная кривая Гюгонио 1 располагается между экспериментальными кривыми. При низких значениях скорости частицы,  $U_p < 1000$  м/с, вычисляемая Гюгонио отклоняется от линейной интерполяции  $U_s=1850+1.97U_p$  (штрихпунктирная линия 2). Это отражает преобладание пластичного поведения материала в процессе уплотнения. На скорости частиц менее 200 м/с, когда при уплотнении материала упругая деформация преобладает, волновая скорость возрастает до звуковой скорости ( $\approx 5200$  м/с).

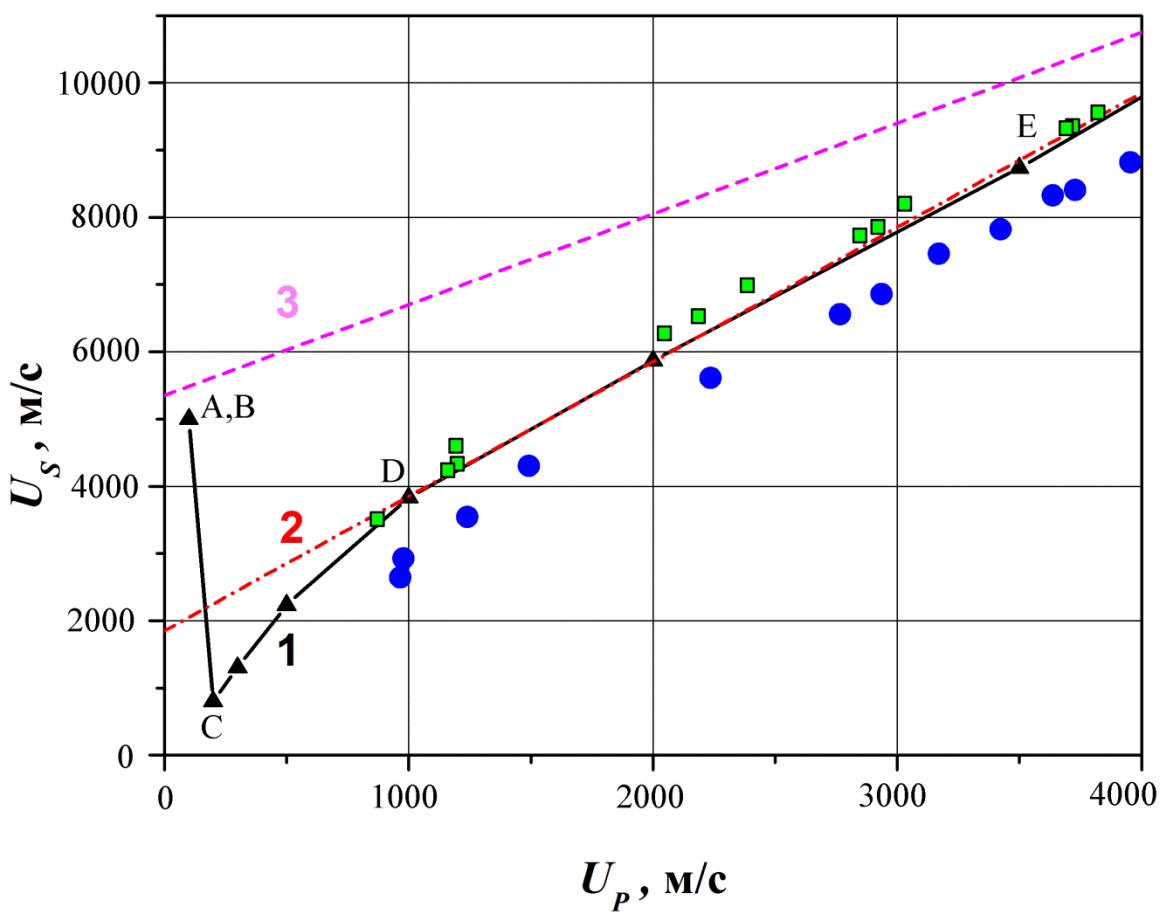


Рисунок 3.9 – Вычисленные значения  $U_p$ ,  $U_s$  для адиабаты Гюгонио ( $\blacktriangle$ , кривая 1) в алюминии для пористости  $m=1.333$ , линейная экстраполяция  $U_s=1850+1.9U_p$  для  $m=1.333$  (штрихпунктирная линия 2) и  $U_s=5350+1.35U_p$  для  $m=1$  (пунктирная линия 3). Экспериментальные данные для  $m=1.43$  ( $\bullet$ ) и для  $m=1.25$  ( $\blacksquare$ ) взяты из [125]

Упругий режим сжатия пористого материала наблюдался в работах [26] и [19]. Точки А,В соответствуют чисто упругому отклику материала на слабое ударное нагружение. Структура материала не претерпевает существенных деформаций, и слабое возмущение распространяется со скоростью звука. Участок В-С соответствует процессу нагружения с разрушением перемычек между порами.

На участке адиабаты С-Д происходит частичное компактирование материала в пластических деформациях. Участок адиабаты Д-Е соответствует достаточно сильному ударноволновому сжатию, при котором процесс схлопывания пор уже не оказывает существенного влияния на линейный характер зависимости  $U_s = f(U_p)$ .

Таким образом, участок А-В-С-Д отображает режимы нагружения пористого материала с неполным закрытием пор.

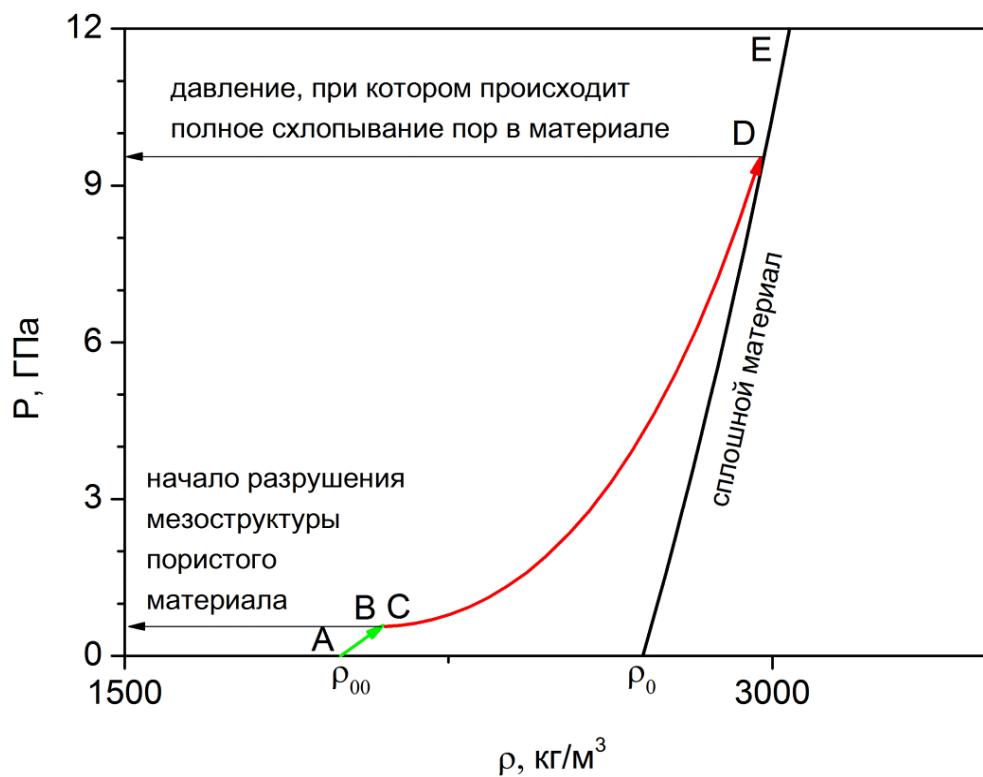
В работе [21] при помощи интерферометра VISAR и датчиков давления были получены экспериментальные профили волн сжатия в образце из пористого алюминия с  $m=1.1$  при ударе по нему алюминиевым ударником со скоростью  $U_0=314\text{ м/с}$ . Экспериментальные профили из [21] хорошо согласуются с представленными на рисунке 3.7.

На расчётной ударной адиабате выделяются три участка: упругого, упругопластического и ударно-волнового сжатия, что согласуется с теоретическими представлениями [26] о ходе адиабат для пористых материалов и смесей в области низких нагрузок, когда нельзя пренебречь упругопластической составляющей течения. Ход расчётной адиабаты, представленной на рисунке 3.9, имеет смысл пояснить следующими рассуждениями на примерной схеме  $P=f(\rho)$  для пористого алюминия, показанной на рисунке 3.10.

На линейном участке А-В происходит только упругая деформация каркаса пористого материала. Возмущения передаются по каркасу со скоростью упругих волн, что соответствует точкам А,В на рисунке 3.9. Участок В-С-Д на рисунках 3.9 и 3.10 представляет собой область компактирования

материала с пластическими деформациями, где происходит частичное или полное (точка D) схлопывание пор. На участке D-E происходит сжатие материала ударной волной достаточно большой интенсивности, и процесс схлопывания пор не оказывает существенного влияния на характер её распространения.

Все описанные выше процессы воспроизводятся в вычислительном эксперименте, осуществляя с помощью разработанного численного метода SPH, основанного на решении задачи о распаде произвольного разрыва.



**Рисунок 3.10 – Компактирование пористого материала при ударном воздействии:**  
участок А-В соответствует распространению акустических волн по упругой структуре материала; участок В-С-Д соответствует упругопластическому компактированию пористого материала; участок Д-Е идентичен ударноволновому сжатию сплошного материала

Мезомеханическое описание среды позволяет успешно моделировать все особенности распространения ударной волны в пористых материалах и получать правильный интегральный отклик на ударное воздействие. При этом

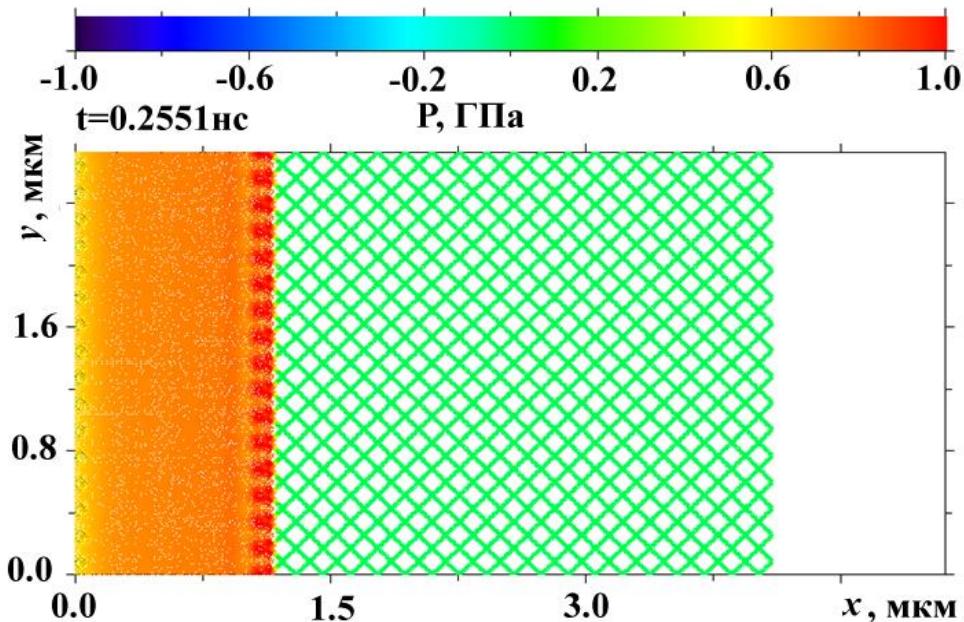
расчетная адиабата Гюгонио для пористого алюминия, нагруженного ударом пластины о жесткую стенку, совпадает с полученной в эксперименте.

Визуализация течения материала раскрывает характерные особенности его нагружения при различных значениях интенсивности ударной волны. В частности, при высокой интенсивности ударной волны, каждая SPH-частица материала нагружается в две отдельные стадии: плоской ударной волной и кумулятивным схлопыванием пор соответственно. За ударной волной колебания давления в сжатом материале определяются периодической структурой пор. Их частота связана с частотой схлопывания пор посредством эффектом Доплера. Затухание этих колебаний происходит в зоне релаксации, размер которой составляет порядка нескольких волновых периодов. Протяженность зоны релаксации существенно зависит от теплопроводности. Для алюминия уменьшаются тепловые и динамические неоднородности в зоне релаксации, когда размер порового элемента составляет порядка 1 мкм. При низкой интенсивности нагрузки, соответствующей скоростям удара менее 1000 м/с, происходит взаимодействие упругого предвестника и последующей волны уплотнения. При этом кривая Гюгонио (в координатах скорость частиц – скорость волны) отклоняется вниз от линейной интерполяции, соответствующей большим скоростям удара.

При численном моделировании не представляет труда следить за величинами давления и плотности в любой из SPH-частиц. Это даёт возможность получать значения ударной адиабаты пористого материала в координатах  $P$ - $\rho$  непосредственно из двумерных расчётов. На рисунке 3.11 показано, например, соударение пористого образца алюминия с жесткой стенкой, находящейся в  $x=0$ . Рассматривалась плоская задача, поры расположены регулярно,  $m = \rho_0/\rho_{00} = 2.91$ . Размер ромбовидных пор выбирался из нанометрового диапазона. В расчётах были приняты следующие физико-механические характеристики алюминия:  $\rho_0 = 2689 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $\gamma_s = 2.17$ ,  $C_a = 5350 \text{ м}/\text{с}$ ,  $S_a = 1.35$ ,  $C_V = 880 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $K = 73 \text{ ГПа}$ ,  $G = 23 \text{ ГПа}$ ,  $Y_0 = 0.4 \text{ ГПа}$ . Расчёты

проводились для случая удара пористой пластины толщиной  $L = 5\text{ мкм}$  о жёсткую стенку.

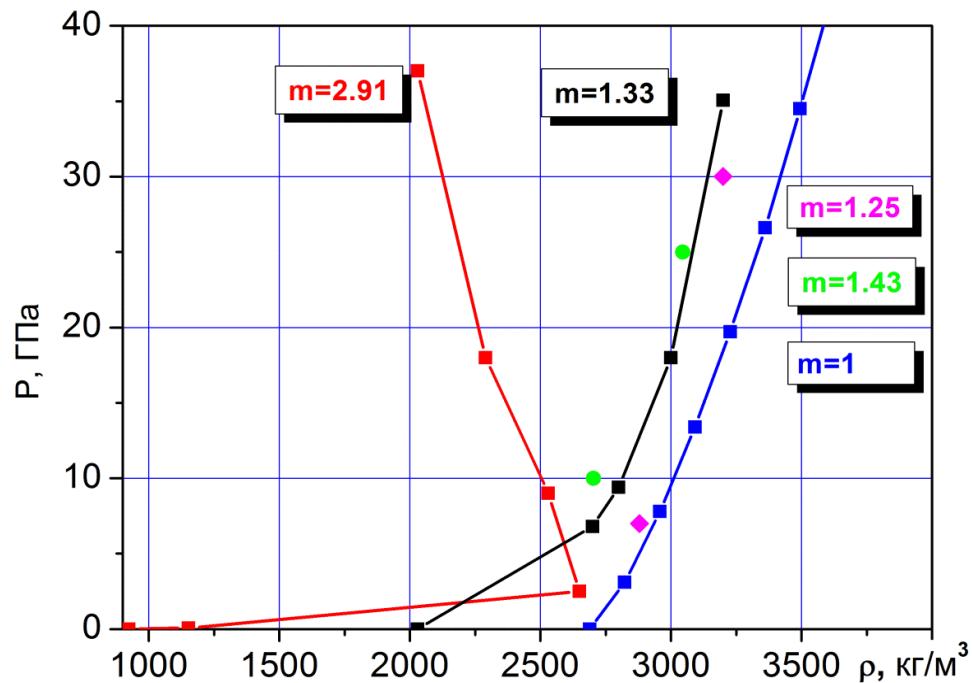
При выбранной величине пористости  $m=2.91$  в экспериментах для высоких параметров нагружения наблюдается аномальный ход адиабаты  $dP/d\rho < 0$ . Рассчитанная ударная адиабата также имеет аномальный ход с  $dP/d\rho < 0$  (рисунок 3.12). Следует заметить, что при расчётах соударения высокопористого алюминия с нанометровым масштабом пор колебательные процессы за фронтом ударной волны практически не проявляются. На рисунке 3.12 показаны также ударные адиабаты, ранее представленные на рисунке 3.9 в координатах  $U_s - U_p$ . Во всех случаях для описания материала SPH-частиц использовалась ударная адиабата  $U_s=5350+1.35U_p$ , приведенная в [114] для сплошного алюминия нормальной плотности.



**Рисунок 3.11 – Распределение давления за фронтом ударной волны при ударе образца пористого алюминия с  $m=2.91$  о жёсткую стенку на скорости 4000м/с**

Применение развитого выше подхода к моделированию ударного нагружения высокопористых материалов (аэрогелей) представляется многообещающим, но требует применения широкодиапазонного уравнения состояния, то есть вместо опорной кривой в виде ударной адиабаты

$U_s = C_a + S_a U_p$ , справедливой в сравнительно узком диапазоне давлений и температур, должна быть выбрана зависимость более общего вида. При ударном нагружении высокопористых материалов необходимо также учитывать процессы плавления и испарения вещества, что является серьёзной перспективой для дальнейших исследований с помощью разработанного кода SPH.



**Рисунок 3.12. Ударные адиабаты алюминия различной пористости. Расчётные значения для  $m=1.33$  и  $m=2.91$ . Экспериментальные данные для  $m=1.43$  (●) и для  $m=1.25$  (■) взяты из [125]**

**Выводы к главе 3.** При мезомеханическом описании среды разработанный метод SPH позволяет:

- моделировать релаксационные процессы, протекающие за фронтом ударного импульса и обусловленные структурной неоднородностью материала;
- реализовать многоуровневый подход [12] к моделированию гетерогенной среды и выявлять физические макроэффекты в отклике среды на ударное нагружение (такие, как эффект Доплера для возмущений, вызванных схлопыванием пор, или аномальный ход ударной адиабаты);

– рассчитывать ударную адиабату пористого материала в области низких нагрузок, при неполном схлопывании пор, используя ударную адиабату и физико-механические характеристики сплошного материала нормальной плотности

– моделировать сжатие материала с высокой пористостью и получить ударную адиабату с  $dP/d\rho < 0$ . Это позволяет предположить, что разработанный метод в состоянии рассчитывать ударные адиабаты материалов с нанометровым масштабом неоднородностей и пористостью, пока недостижимой практически.

## ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОВОЛНОВОГО НАГРУЖЕНИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

В настоящей главе приведены результаты численного моделирования ударно-волновых процессов в гетерогенной среде, состоящей из двух различных металлов, один из которых находится в жидком, а второй – в твёрдом состояниях. Среда нагружается ударом о жёсткую стенку. Эта модельная задача решалась разными авторами в различных её аспектах; например, для решения проблем геофизики в [126] рассматривалось прохождение ударных волн от жесткой стенки по смеси жидкого железа с мелкими кристаллами молибдена, чтобы изучить возможность компактирования частиц примеси у стенки.

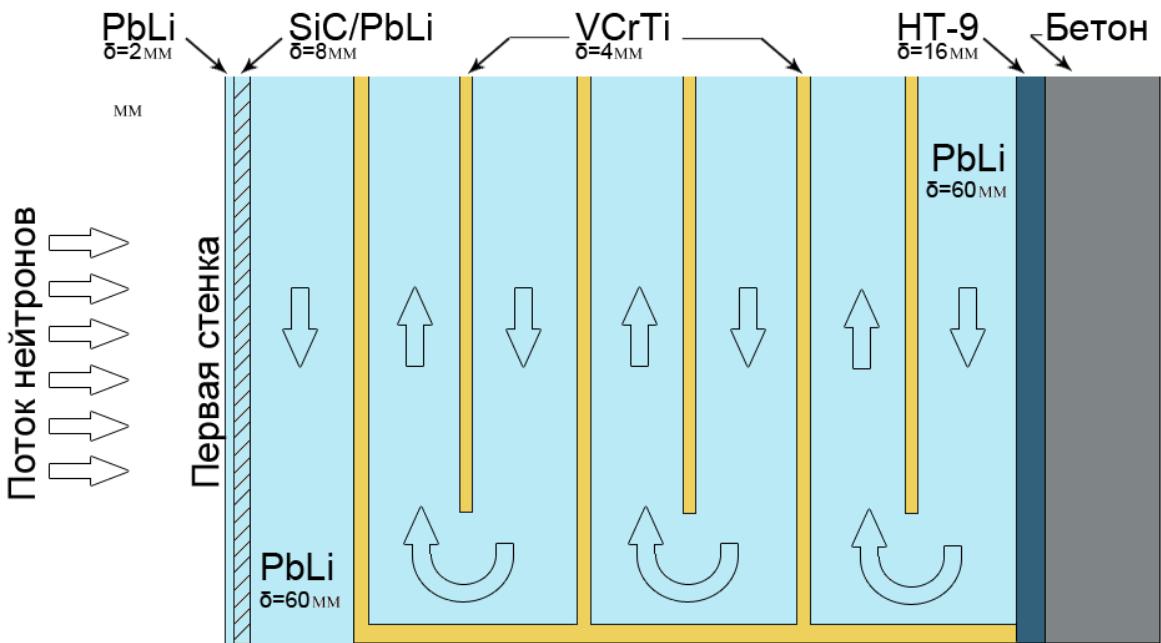
Задача, решаемая в данной главе, была поставлена для изучения ударного нагружения пористой первой стенки бланкета термоядерного реактора, насыщенной жидким теплоносителем, а также для изучения релаксационных процессов за ударной волной в смеси теплоносителя и мелкодисперсных металлических частиц.

Сама схема термоядерного реактора в рамках концепции FIHIF тяжелоионного синтеза на цилиндрических мишениях, принципы и особенности его функционирования изложены в [33]-[36]. Энерговыделение в камере реактора ИТС, происходящее в результате циклически повторяющихся микровзрывов термоядерной мишени, определяется высокоэнергетичными потоками заряженных частиц, нейtronов и излучения. Распределение полной энергии единичного микровзрыва между этими потоками зависит от конструкции мишени, в первую очередь, ее массы, которая, в свою очередь, определяется способом сжатия и поджига термоядерного горючего. Энергия, переносимая потоком нейtronов, обычно составляет 70-75% от полной энергии микровзрыва. Воздействие энергетических потоков на стенки камеры определяется также величинами пробегов ионов, протонов и фотонов в

атмосфере и стенках камеры и длительностью импульса энерговыделения. Пробеги рентгеновских фотонов и высокоэнергетических ионов малы и составляют по порядку величины 1-10 мкм в конденсированных средах. Порядок величины пробегов нейтронов, как правило, превышает 10 см. Такое значительное различие в порядках величин пробегов позволяет рассматривать независимо проблемы защиты первой стенки и обеспечения прочности конструкции бланкета.

Бланкет реактора имеет цилиндрическую геометрию. На рисунке 4.1 представлены структура бланкета и схема движения теплоносителя. Первая стенка бланкета выполнена из пористого карбида кремния, и ее поверхность защищается жидкой пленкой эвтектики  $\text{Li}_{17}\text{Pb}_{83}$ , продавливаемой через пористую стенку. Свинцово-литиевый теплоноситель движется по вертикальным каналам из ванадиевого сплава V-4Cr-4Ti. Корпус бланкета выполнен из хромистой стали типа НТ9. При каждом единичном микровзрыве энерговыделение от потока ионов в первой стенке возбуждает интенсивные температурные волны и волны напряжений, вызывающие разрушение защитного слоя [127]. При защите первой стенки жидкой пленкой тепловое излучение продуктов взрыва вызывает абляцию пленки и возбуждает волны сжатия и разрежения, распространяющиеся внутрь пленки [128,129]. Масса испарившейся жидкости составляет 1-10 кг в зависимости от энергии импульса излучения.

Расчет нестационарных полей переменных в реальной конструкции стенок и бланкета реактора представляет собой многомерную задачу термоупруго-пластичности, сопряженную с расчетом теплогидравлики теплоносителя. Однако оценочные расчеты проводились в [33]-[36] в одномерной осесимметричной постановке, преполагающей, что конструкция бланкета состоит из цилиндрических оболочек конечной толщины, пространство между которыми заполнено жидким теплоносителем.



**Рисунок 4.1 – Структура бланкета и схема движения теплоносителя;  $\delta$  есть толщина указанного слоя**

Отклик бланкета реактора ИТС определяется формой и величиной нейтронного импульса от микровзрыва. Расчет потока нейtronов для рассматриваемой мишени был сделан М.М.Баско по программе DEIRA [130,131]. Средняя мощность нейтронного потока, воспринимаемого первой стенкой, равна  $5.7 \text{ МВт}/\text{м}^2$ , полное энерговыделение за один микровзрыв составляет в данной концепции  $818 \text{ МДж}$ . Нейтронное энерговыделение является практически мгновенным, длительностью около  $5 \text{ нс}$ .

Из расчетов работы реактора был определён динамический отклик конструкции бланкета на нейтронный импульс и рассчитана эволюция волн напряжений в конструкционных материалах и давление в теплоносителе. Было установлено, что на короткое время в теплоносителе возникают большие отрицательные давления, которые могут вызвать кавитацию (гомогенное вскипание).

Как уже было сказано выше, отдельной сложной задачей является моделирование ударноволнового нагружения первой стенки импульсом отдачи паров теплоносителя, так как при полной постановке задачи необходимо

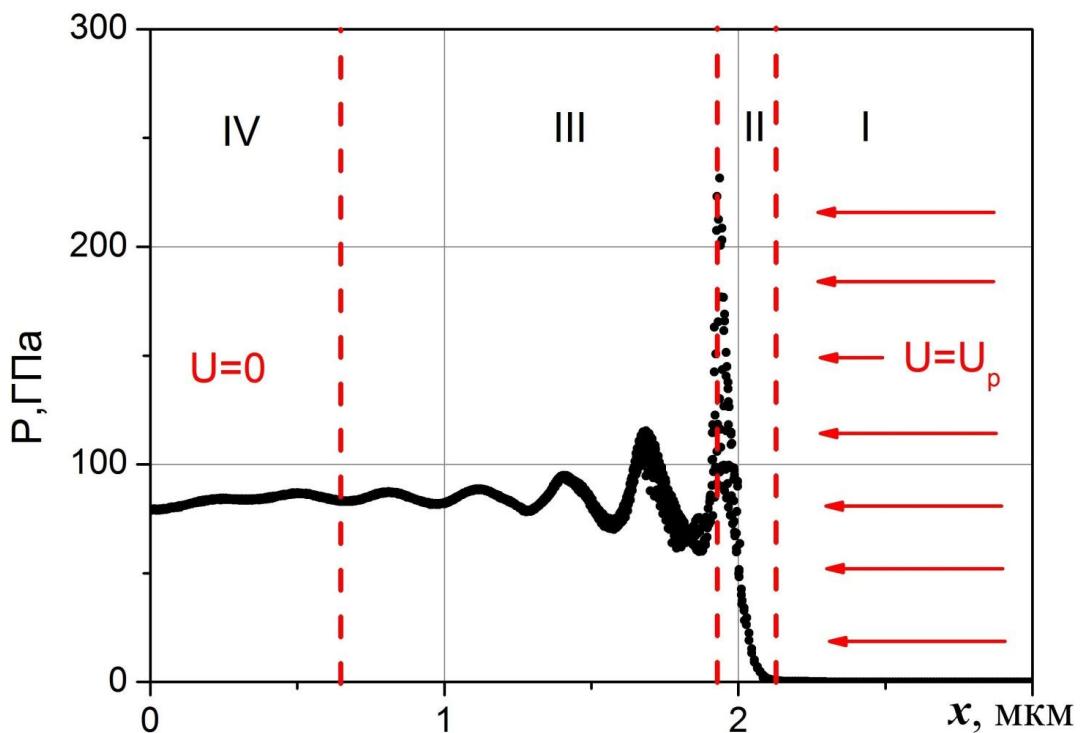
рассматривать поглощение рентгеновских фотонов и высокоэнергетических ионов, испарение теплоносителя и формирование ударной волны внутри первой стенки.

Таким образом, моделирование прохождения ударной волны через пористые и двухкомпонентные среды является важной задачей для расчёта функционирования реактора ИТС. При моделировании прохождения ударной волны через двухкомпонентные среды целесообразно не усложнять постановку задачи расчётом объёмного энерговыделения и ограничиться ударной генерацией волны сжатия.

Ранее в диссертации было проведено численное моделирование ударно-волнового нагружения гетерогенных упруго-пластичных сред [30,31,37] и пористых материалов [22]. Были получены данные о структуре ударной волны, распространяющейся в таких средах. Структура ударной волны имеет характерные особенности, обусловленные дифракцией ударной волны на неоднородностях и релаксаций параметров неоднородностей к стационарным значениям. На рисунке 4.1 представлена характерная структура ударной волны в пористом вольфраме  $\rho_0/\rho_{00} = 1.882$  с регулярным ортогонально-цепочечным расположением пор. Расчет проведен для плоской пористой пластины ( $x > 0$ ), ударяющейся о жесткую стенку ( $x=0$ ) со скоростью  $U_p = 2000$  м/с. Пунктирные вертикальные линии разделяют расчетную область на четыре зоны: I – зона невозмущенного течения; II – фронт ударной волны, в котором происходит сжатие среды до максимального давления; III – зона релаксации, в которой наблюдаются затухающие пульсации гидродинамических переменных; IV – зона установившихся значений гидродинамических переменных.

В профилях других гидродинамических параметров выделяются аналогичные зоны. Характерные размеры зон релаксации в общем случае различны для профилей давления, температуры и скорости. В частности в пористых материалах длина зоны динамической релаксации (затухания пульсаций давления) строго пропорциональна шагу пористой решетки, в то

время как зона тепловой релаксации (для температуры) не совпадает с зоной динамической релаксации.



**Рисунок 4.1 - Структура ударной волны в пористом вольфраме ( $\rho_0/\rho_{00} = 1.882$ ,  $U_p = 2000$  м/с).** I - зона невозмущенного течения, II - фронт ударной волны, III - зона релаксации, IV - зона покоя

При малой теплопроводности материала (или большом шаге решетки) однородное распределение температуры устанавливается позднее, чем заканчивается динамическая релаксация. Наблюдается взаимное влияние процессов динамической и тепловой релаксации. В случае многокомпонентной среды каждая из компонент среды может иметь собственные распределения давления, температуры и скорости. В этом случае отсутствует динамическое, тепловое и скоростное равновесие между компонентами.

#### 4.1. Постановка задачи

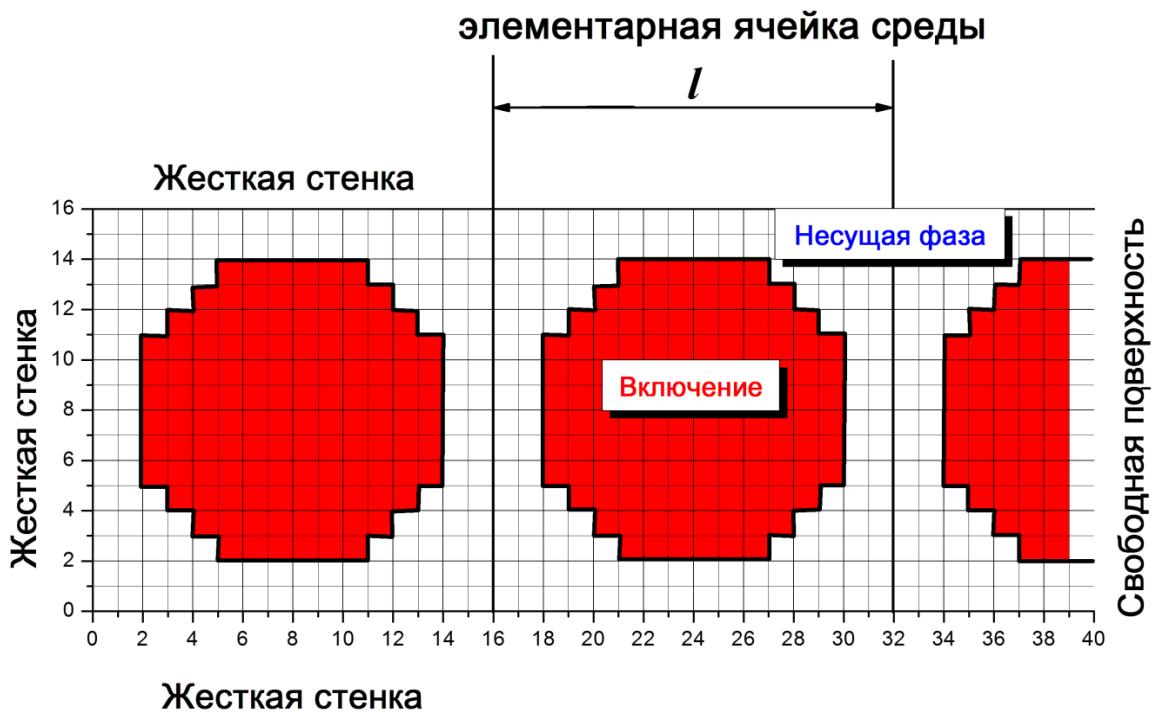
Решалась плоская двумерная задача удара плоского образца из гетерогенного материала о жесткую стенку. В качестве жидкой составляющей компоненты для гетерогенной среды были выбраны жидкие свинец и литий. В

качестве твердой компоненты был выбран вольфрам. Характеристики материалов приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Свойства материалов компонент гетерогенной среды

Вещество	Свинец	Литий	Вольфрам
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	11350	534	19300
$C_V$ , Дж/(кг·К)	130	4400	140
$\lambda$ , Вт/(м·К)	35.3	84.7	174
$\alpha \times 10^6$ , 1/К	29.1	56	4.59
$K$ , ГПа	42.353	11.8	300
$G$ , ГПа	0	0	155
$\eta \times 10^3$ , Па·с	2.6	0.53	0
$C_a$ , м/с	2580	4760	4029
$S_a$	1.26	1.065	1.237
$Y_0$ , ГПа	0	0	2.4

Неоднородность среды задавалась включением в несущую фазу (скелет) цепочки восьмиугольных включений примесной фазы. Каждый восьмиугольник примесной фазы содержал 120 SPH-частиц и был окружён 136 частицами несущей фазы, что составляло элементарную квадратную ячейку размером  $16 \times 16$  частиц. Отношение объемных долей несущей фазы и примеси составляет в этом случае  $136:120 = 1.13$ , т.е. близкую к единице величину. Элементарная квадратная ячейка имеет площадь  $l \times l$ . Расчетная область ограничена единичным слоем высотой  $l$  с жесткими горизонтальными и вертикальной левой стенками. Расчетная область имеет начальную протяженность от соударяемой жесткой стенки до свободной поверхности  $L=321$ , то есть содержит 32 элементарных ячейки. На рисунке 4.2 показан фрагмент расчётной области в начальный момент времени.



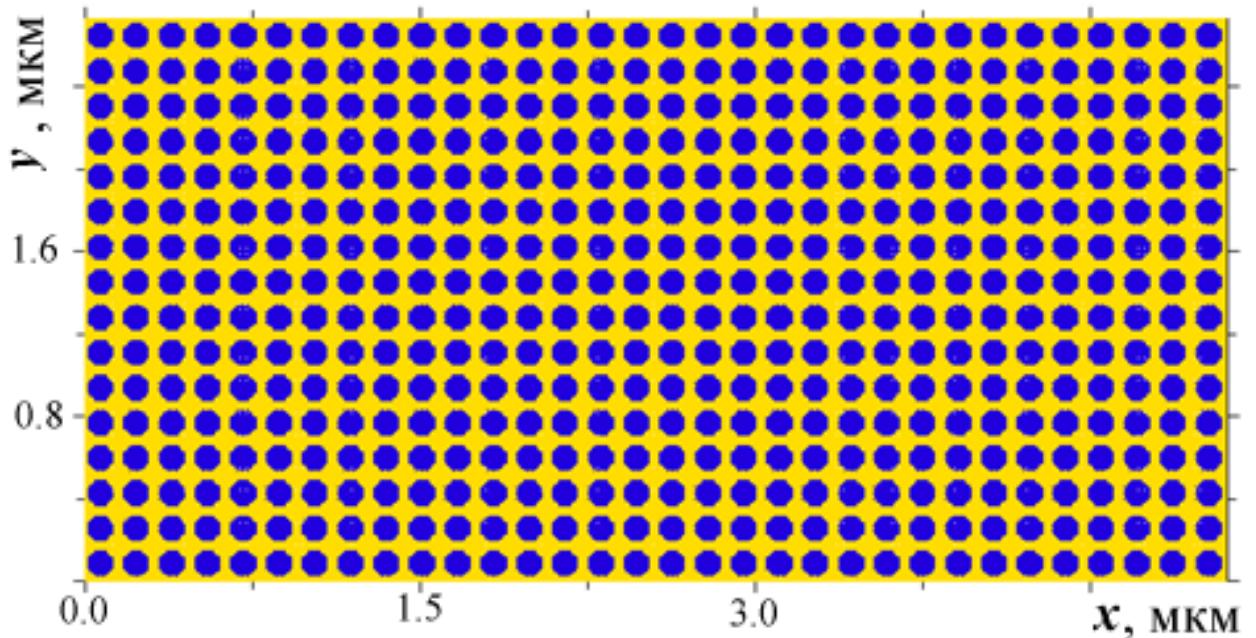
**Рисунок 4.2 – Схема расчётной области**

Число SPH-частиц для области протяжённостью  $L$  составляет 8192. Размер элементарной ячейки среды принимался различным с целью исследовать влияние на характер релаксации масштабного фактора:  $l \times l = 0.16 \times 0.16$  мкм ( $L = 5.12$  мкм),  $l \times l = 1.6 \times 1.6$  мкм ( $L = 51.2$  мкм) и  $l \times l = 16 \times 16$  мкм ( $L = 512$  мкм). В расчёте на каждом шаге по времени запоминаются значения термодинамических и кинематических параметров для каждой SPH-частицы, что позволяет построить профиль давления, температуры и скорости после прохождения ударноволнового фронта по материалу.

Моделируемый образец материала в момент времени  $t = 0$  приобретает скорость  $U_p = 2000$  м/с в направлении начала координат. Ударно-волевой фронт при этом движется от жесткой стенки к свободной поверхности, слева направо со скоростью  $U_s - U_p$ .

Условия на горизонтальных жестких стенках, ограничивающих единичный слой (рисунок 4.2), эквивалентны периодическому повторению этого слоя вдоль оси  $y$ . Таким образом, численное моделирование единичного слоя (рисунок 4.2) эквивалентно моделированию образца произвольной

протяженности, образованного периодическим повторением единичного слоя вдоль оси  $y$  (рисунок 4. 3).

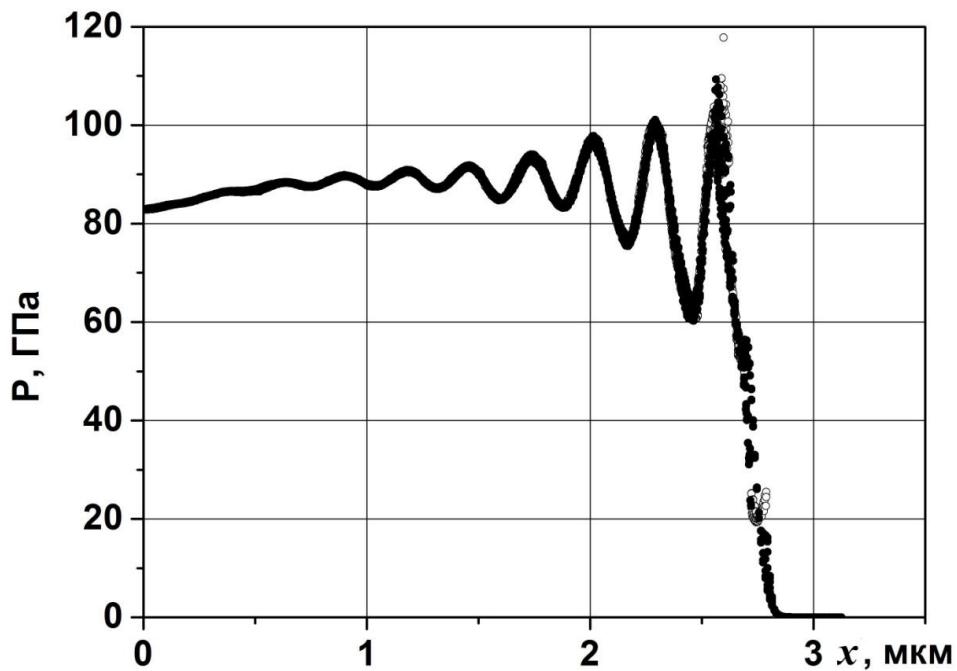


**Рисунок 4.3 – Моделируемый слой двухкомпонентного образца шириной  $L = 5.12\text{мкм}$ , состоящий из несущей фазы и включений. Размер ячейки  $l \times l = 160 \times 160\text{нм}$**

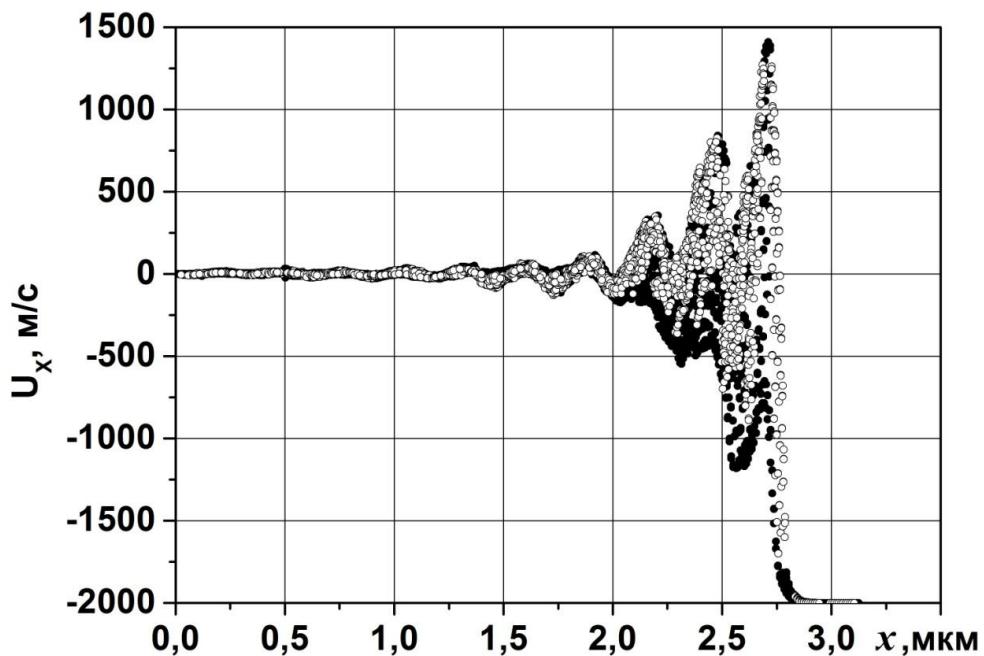
Производилось моделирование двух вариантов гетерогенной среды: «тяжелая» несущая фаза + «легкие» включения и «легкая» несущая фаза + «тяжелые» включения.

## 4.2. Твёрдая несущая фаза с жидкими включениями

Рассмотрим удар о жесткую стенку твёрдого вольфрама, содержащего включения жидкого лития,  $l = 0.16$  мкм. Скорость удара равна  $U_p = 2000$  м/с. На рисунках 4.4-4.6 представлены расчетные профили давления, скорости и температуры. Ширина ударного фронта, как показано на рисунке 4.4, составляет примерно 0.2 мкм, а зона релаксации давления примерно 2 мкм. Зона релаксации скорости (рисунок 4.5) несколько меньше и составляет 1.5 мкм.

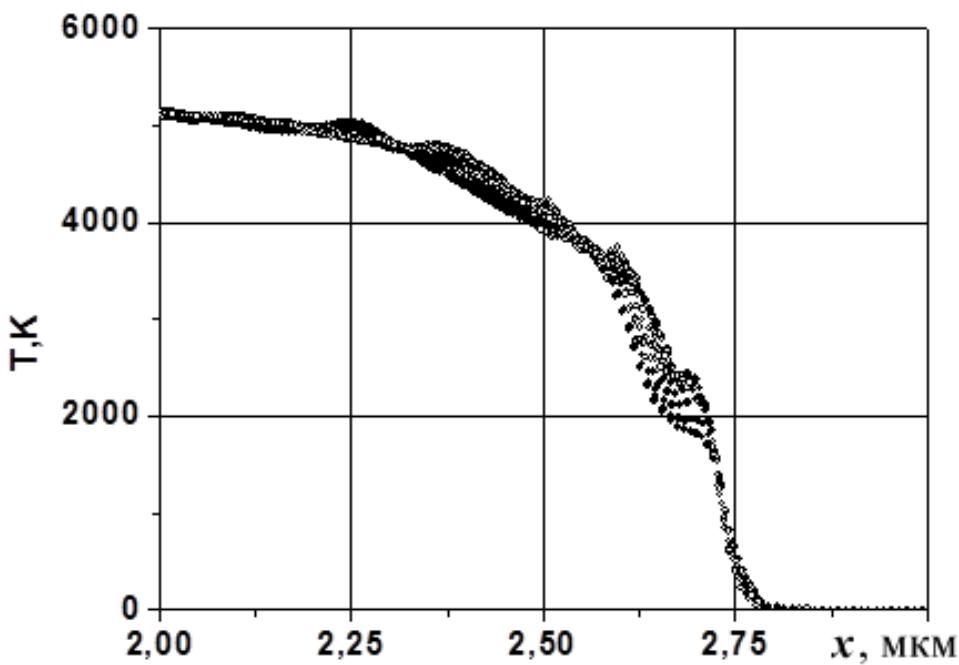


**Рисунок 4.4 – Профиль давления в вольфраме, содержащем изолированные литиевые включения ( $l=0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс (● – вольфрам, ○ – литий)**



**Рисунок 4.5 – Профиль скорости в вольфраме, содержащем изолированные литиевые включения ( $l=0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс (● – вольфрам, ○ – литий)**

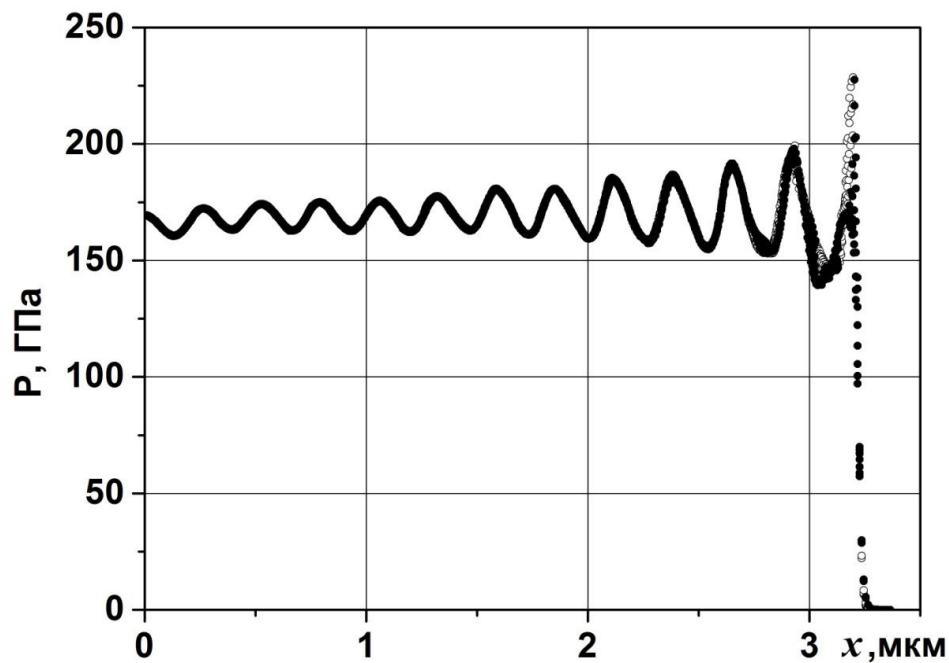
В распределении скорости явно выражена скоростная неравновесность компонент. Профиль температуры существенно отличается от профилей давления и скорости (рисунок 4.6). Практически отсутствуют пульсации температуры, а зона фронта сильно размыта и составляет около 0.5 мкм.



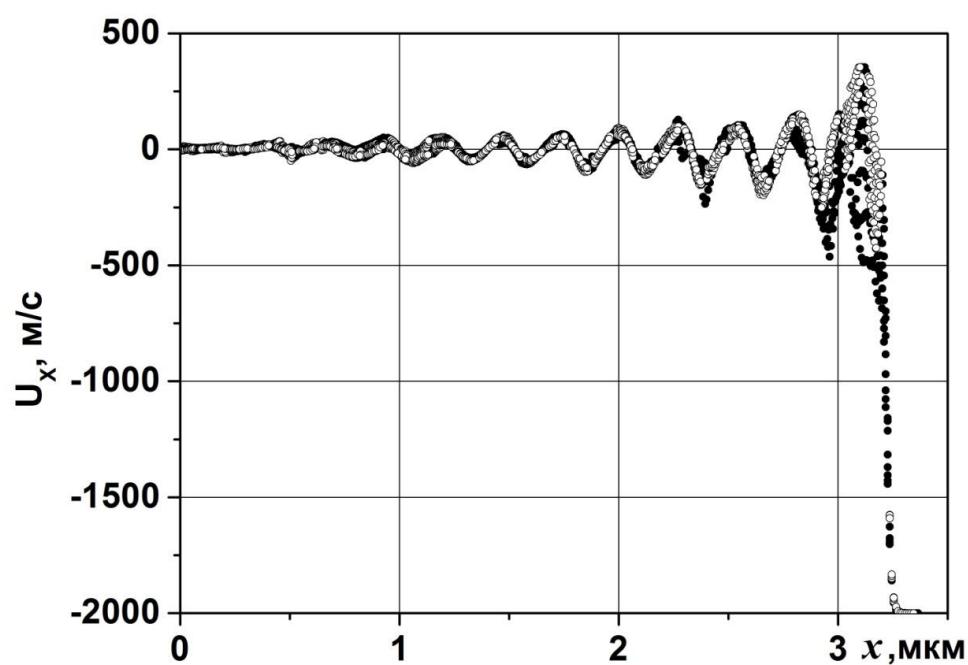
**Рисунок 4.6 – Профиль температуры в вольфраме, содержащем изолированные литиевые включения ( $l = 0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс (● – вольфрам, ○ - литий)**

Имеет место тепловое равновесие между компонентами. На рисунках 4.7-4.9 приведены профили давления, скорости и температуры для образца из вольфрамового скелета и свинцовых включений.

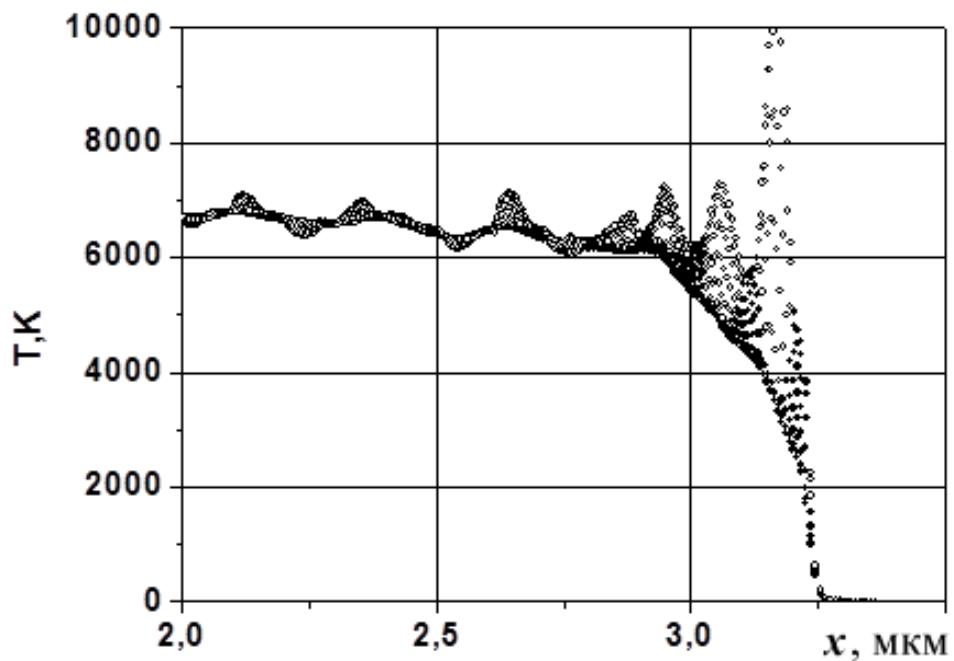
Более тяжёлые включения с примерно на порядок большим акустическим импедансом привели к тому, что ширина фронта сократилась, а протяжённость зоны релаксации давления и скорости возросла. При этом примерно вдвое увеличилась установившаяся величина давления. Скоростная неравновесность стала незначительной. В профиле температуры появились пульсации, а также температурная неравновесность компонент, что можно объяснить низкой теплопроводностью свинца. Установившееся значение температуры возросло, что может быть связано с более низкой теплоёмкостью свинца. Но качественно структура зон релаксации не изменилась.



**Рисунок 4.7 – Профиль давления в вольфраме, содержащем изолированные включения свинца ( $l=0.16 \text{ мкм}$ ) на момент времени  $t=1 \text{ нс}$  (● – вольфрам, ○ – свинец)**

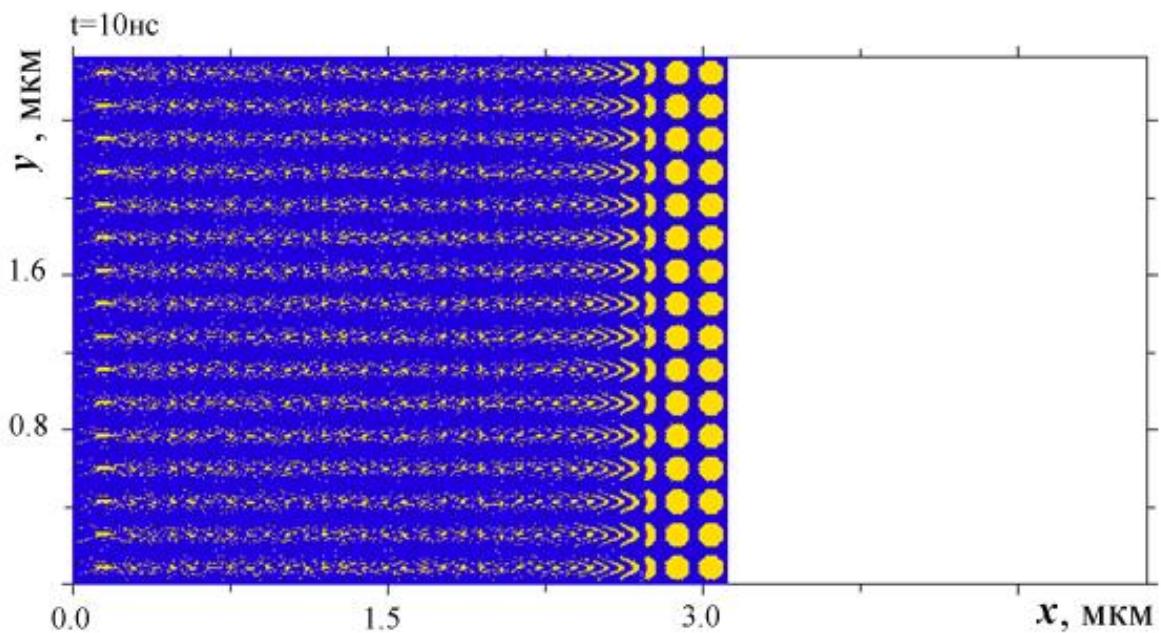


**Рисунок 4.8 – Профиль скорости в вольфраме, содержащем изолированные включения свинца ( $l=0.16 \text{ мкм}$ ) на момент времени  $t=1 \text{ нс}$  (● – вольфрам, ○ - свинец)**



**Рисунок 4.9 – Профиль температуры в вольфраме, содержащем изолированные включения свинца на момент времени ( $l=0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс (● – вольфрам, ○ – свинец)**

Кинематика поля течения для материала, содержащего включения жидкого лития в твёрдом вольфраме, показана на рисунке 4.10.



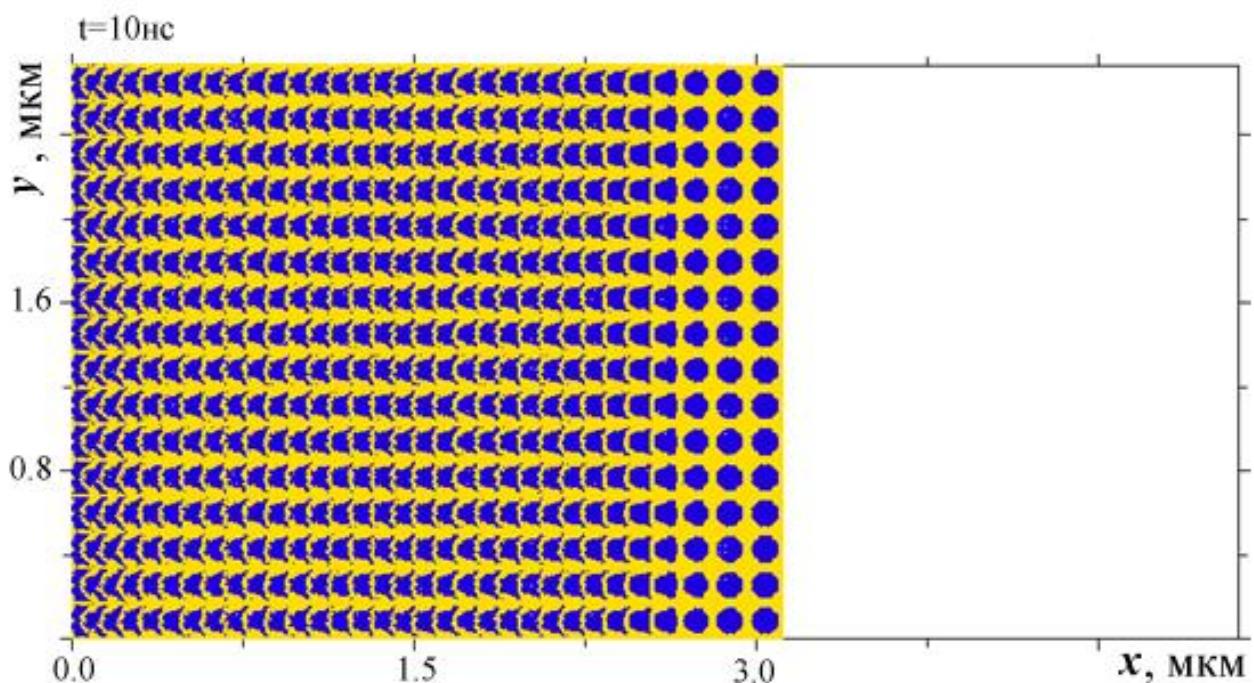
**Рисунок 4.10 – Характер течения вольфрама, содержащего изолированные литиевые включения ( $l=0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс**

Включения лития деформируются во фронте ударного импульса, приобретают подковообразную форму и разрушаются в зоне релаксации на более мелкие включения.

Расчёты, проведенные для несущей фазы без прочности ( $Y_0=0$ ), показали незначительные отличия от приведенных расчётов. Можно с уверенностью утверждать, что эффекты прочности (в данных вычислительных экспериментах) мало влияли на релаксацию полей давления, скорости и температуры.

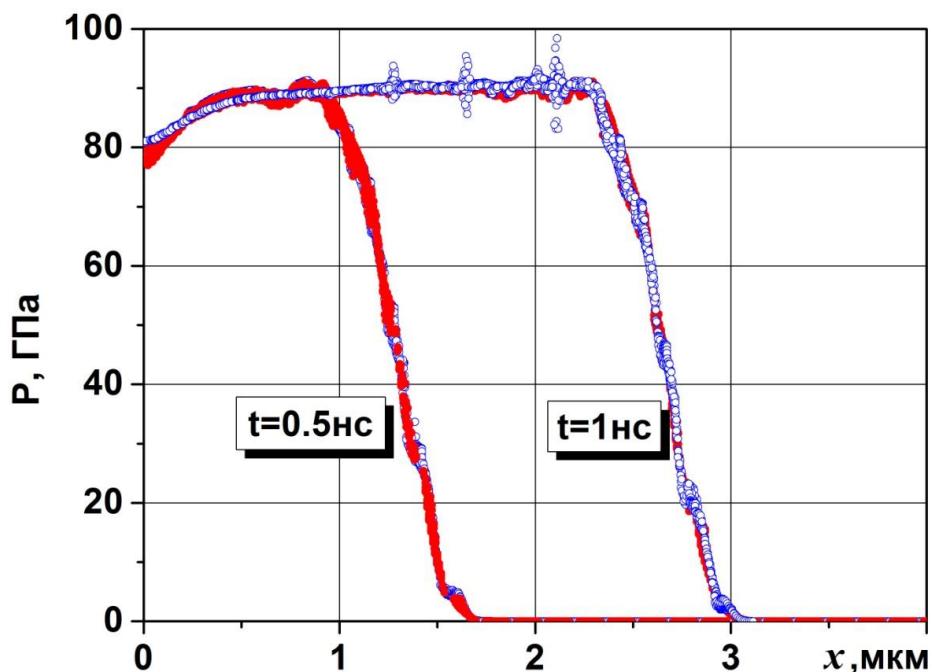
#### 4.3 Жидкая несущая фаза с твёрдыми включениями

Рассмотрим теперь среду, состоящую из жидкой литиевой несущей фазы с упругопластическими включениями вольфрама. Характер течения такой среды показан на рисунке 4.11 и отличается от течения упругопластической несущей фазы с включениями жидкого лития, показанного на рисунке 4.10. Включения вольфрама не разрушаются и приобретают серповидную форму, противоположного предыдущему случаю направления лучей.



**Рисунок 4.11 – Характер течения лития, содержащего изолированные включения вольфрама ( $l=0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс**

На рисунках 4.12 – 4.14 представлены результаты расчёта удара о жесткую стенку слоя лития, содержащего изолированные включения твердого вольфрама. В таком материале ширина фронта увеличивается в 3-4 раза по сравнению с образцом с твёрдым скелетом и жидкими включениями, пульсации давления за фронтом импульса практически отсутствуют. Как видно из рисунка 4.12, где показан профиль давления для двух моментов времени, профиль близок к стационарному.



**Рисунок 4.12 – Профиль давления в литии с изолированными включениями вольфрама ( $l = 0.16$  мкм) на моменты времени  $t=0.5$ нс и  $t=1$ нс (● – вольфрам, ○ – литий)**

Скорость части несущей фазы во фронте при этом направлена от жесткой стенки и достигает величины 4000 м/с, что вдвое выше скорости соударения со стенкой (рисунок 4.13). Чтобы детально показать структуру распределения температуры между включениями и несущей фазой, этот параметр показан на рисунке 4.14 в малом масштабе, только для зоны релаксации, а не всего ударяющегося о стенку образца. Сравнение профилей давления, скорости и температуры в вольфраме, содержащем включения лития (рисунки 4.4-4.6) с профилями давления, скорости и температуры в литии, содержащем включения

вольфрама, показывают качественное различие в процессах релаксации для обоих материалов.

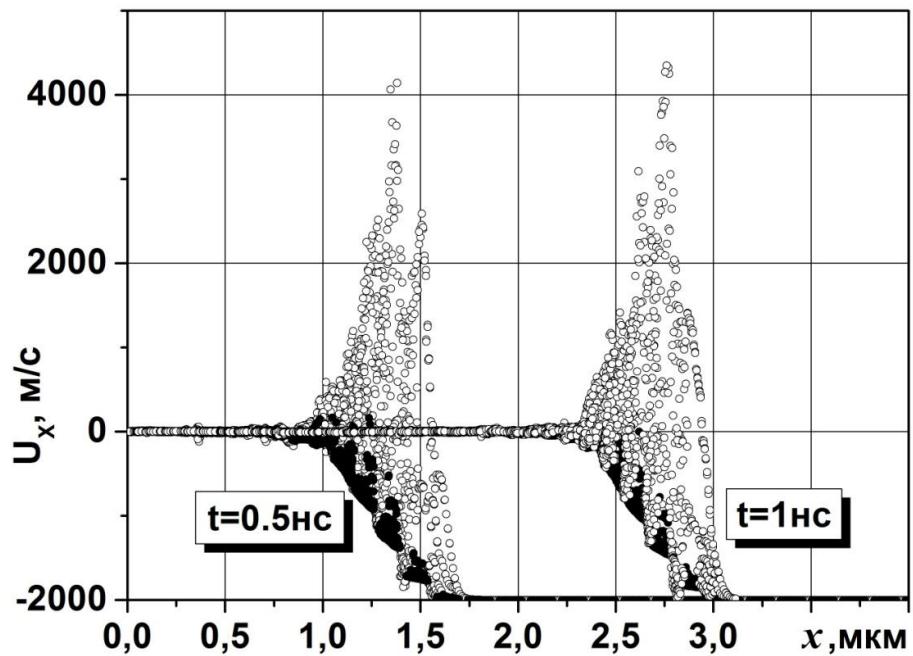


Рисунок 4.13 – Профиль скорости в смеси лития с изолированными включениями вольфрама ( $l = 0.16$  мкм) на моменты времени  $t=0.5$  нс и  $t=1$  нс ( $\bullet$  – вольфрам,  $\circ$  – литий)

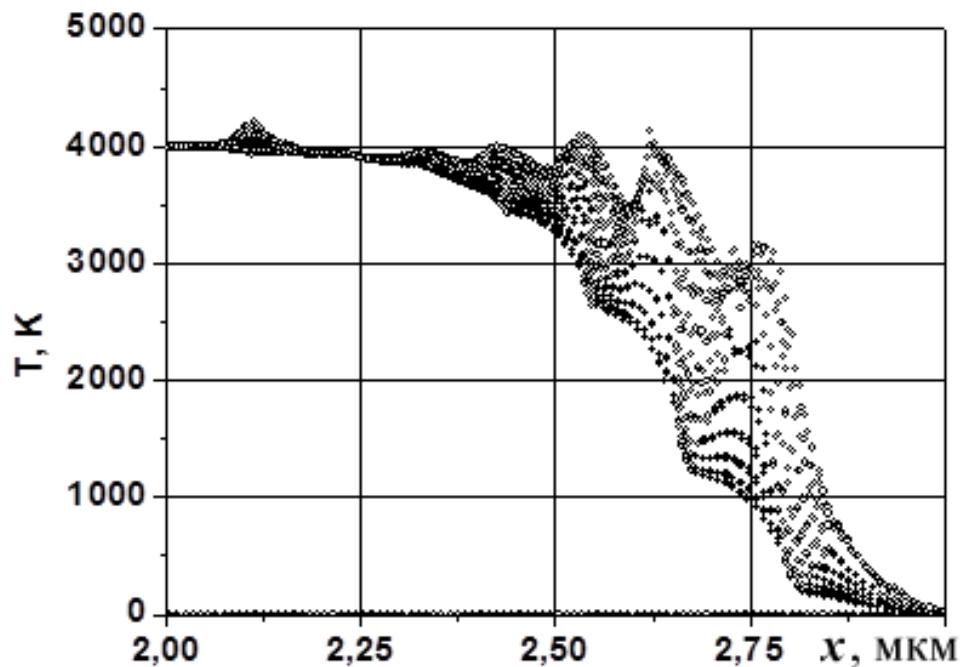
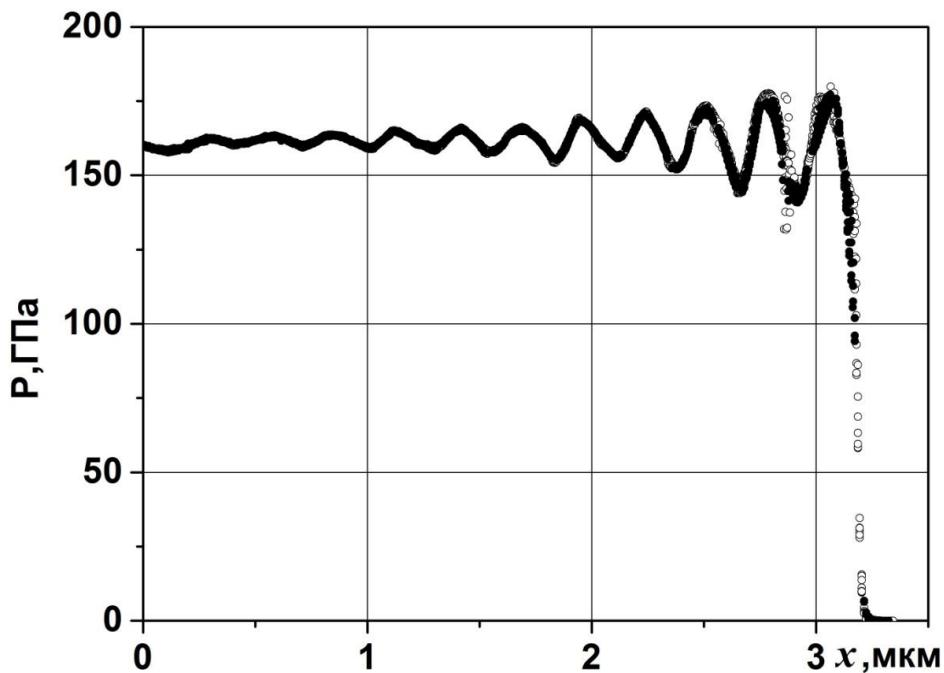


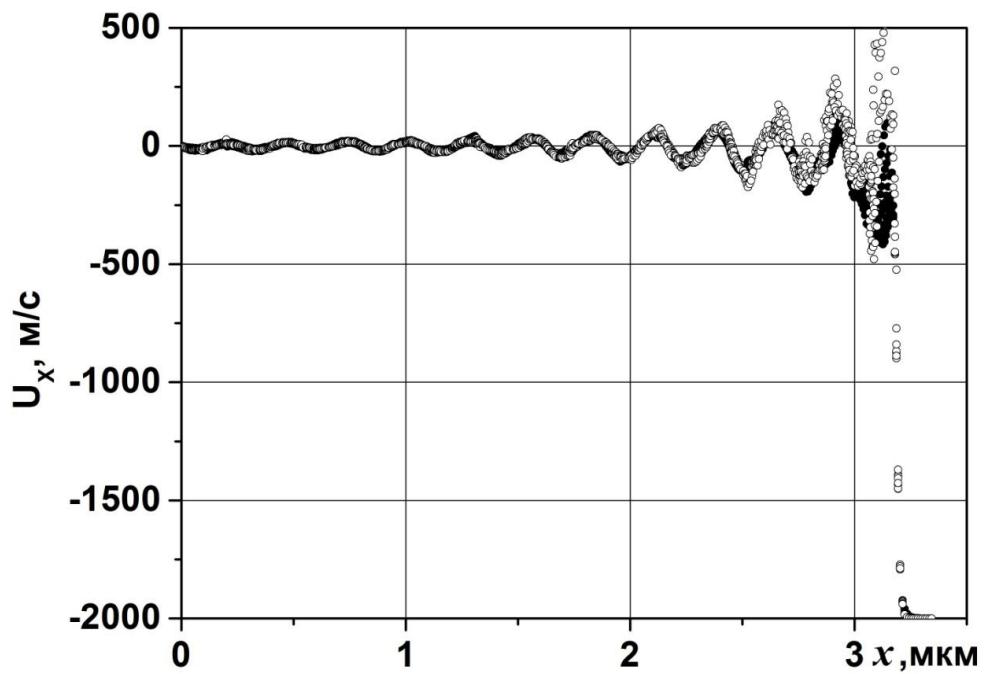
Рисунок 4.14 – Профиль температуры в литии, содержащем изолированные включения вольфрама ( $l = 0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс ( $\bullet$  – вольфрам,  $\circ$  – литий)

В первом случае за ударным фронтом имеется зона релаксации, во втором случае релаксация происходит в ударном фронте, имеющем большую протяжённость.

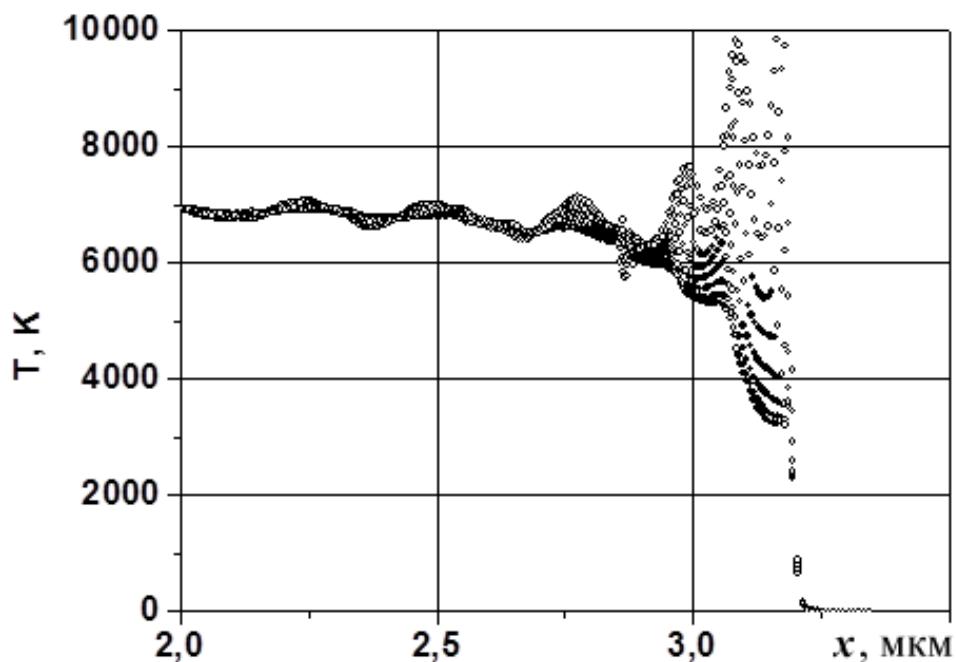
Температура также приобретает стационарное значение во фронте, примерно равное значению на рисунке 4.6. Таким образом, релаксационные процессы завершаются уже во фронте импульса, имеющем протяжённость около 0.6 мкм. Причину такого различия в отклике материалов на ударное нагружение можно объяснить скоростной неравновестностью между составляющими второй материал компонентами. Этот вывод подтверждается анализом расчёта удара о жёсткую стенку слоя свинца, содержащего изолированные включения твёрдого вольфрама. Профили давления (рисунок 4.15), скорости (рисунок 4.16) и температуры (рисунок 4.17) для такого материала схожи с профилями давления (рисунок 4.5), скорости (рисунок 4.6) и температуры (рисунок 4.7) для вольфрама, содержащего включения свинца.



**Рисунок 4.15 – Профиль давления в свинце, содержащем изолированные включения вольфрама ( $l=0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс (● – вольфрам, ○ – свинец)**



**Рисунок 4.16 – Профиль скорости в свинце, содержащем изолированные включения вольфрама ( $l=0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс (● – вольфрам, ○ – свинец)**

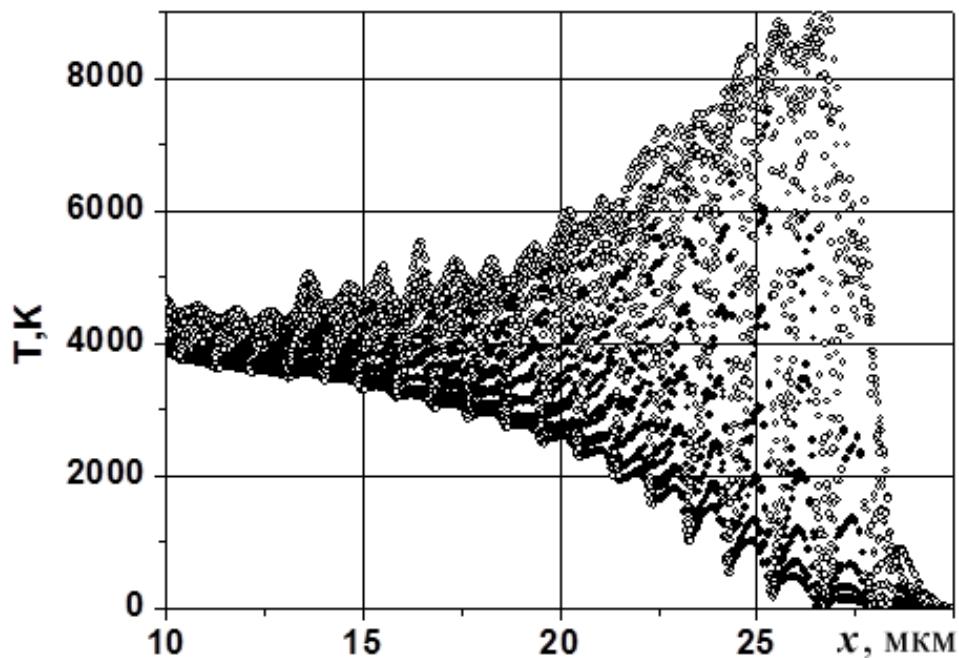


**Рисунок 4.17 – Профиль температуры в свинце, содержащем изолированные включения вольфрама ( $l=0.16$  мкм) на момент времени  $t=1$  нс (● – вольфрам, ○ – свинец)**

Таким образом, если нагружаемая ударным импульсом среда состоит из свинца и вольфрама, то релаксационные процессы за фронтом импульса протекают схожим образом, независимо от того, какой из материалов является несущей фазой.

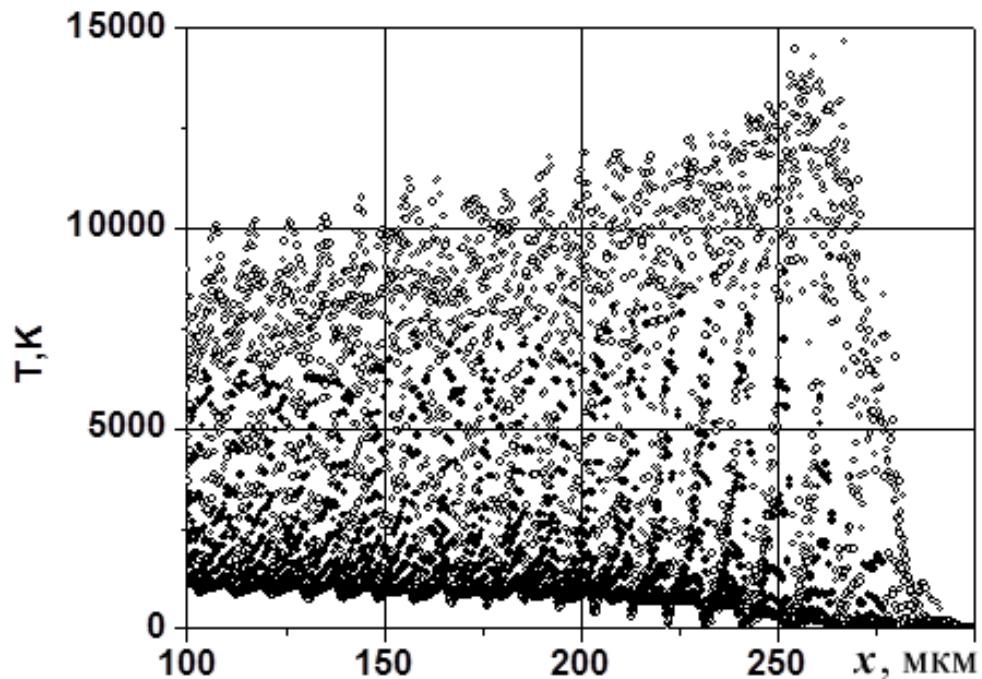
#### 4.4. Масштабный фактор

Как было установлено в [22] для пористого металла, при различных масштабах неоднородности построенные вдоль безразмерной координаты  $x/L$  профили давления мало изменяются, но зона релаксации температуры чувствительна к изменению масштаба неоднородности. Расчеты показали, что это правило имеет место и для гетерогенных сред. На рисунках 4.18 и 4.19 показаны расчёты удара слоя лития с включениями вольфрама о жесткую стенку при разных масштабах неоднородности.



**Рисунок 4.18 – Профили температуры в литии, содержащем изолированные включения вольфрама ( $l=1.6$  мкм) в момент времени  $t=10$  нс (● – вольфрам, ○ – литий)**

При субмикронных размерах неоднородностей среды ( $l=0.16$  мкм) механизм теплопроводности обеспечивает выравнивание температур компонент вблизи фронта ударной волны.



**Рисунок 4.19 – Профиль температуры в литии, содержащем изолированные включения вольфрама ( $l=16$  мкм) в момент времени  $t=100$ нс (● – вольфрам, ○ – литий)**

Как следует из рисунков 4.6, 4.9, 4.14 и 4.17, при любом сочетании металлов для несущей фазы и включений, зона тепловой релаксации мала. При размерах ячейки в  $l=1.6$ мкм (рисунок 4.18) зона тепловой релаксации охватывает уже значительную часть образца за ударным фронтом, а при  $l=16$ мкм (рисунок 4.19) релаксация поля температур незначительна. При этом наблюдается сильная температурная неравновесность компонент.

Аналогичная картина релаксации поля температур наблюдается при ударе о жесткую стенку слоя свинца, содержащего вольфрамовые включения (рисунок 4.20 и рисунок 4.21). Проведенные расчеты подтверждают ранее сделанный в [22] вывод о влиянии масштабного фактора на зону тепловой релаксации.

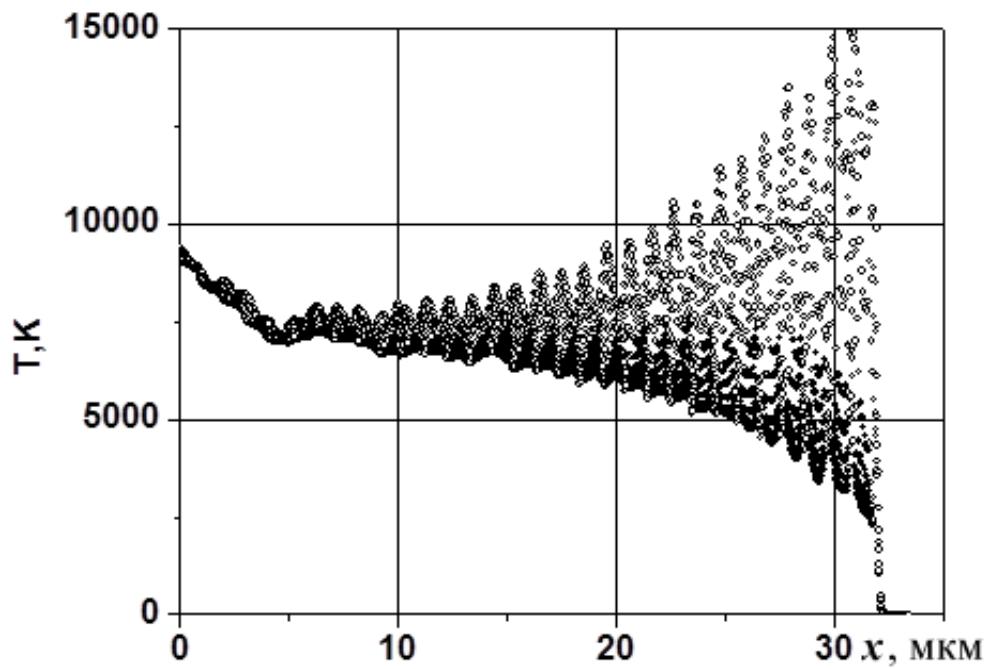


Рисунок 4.20 – Профили температуры в свинце, содержащем изолированные частицы вольфрама при  $l=1.6$  мкм на момент времени  $t=10$  нс (● – вольфрам, ○ – свинец)

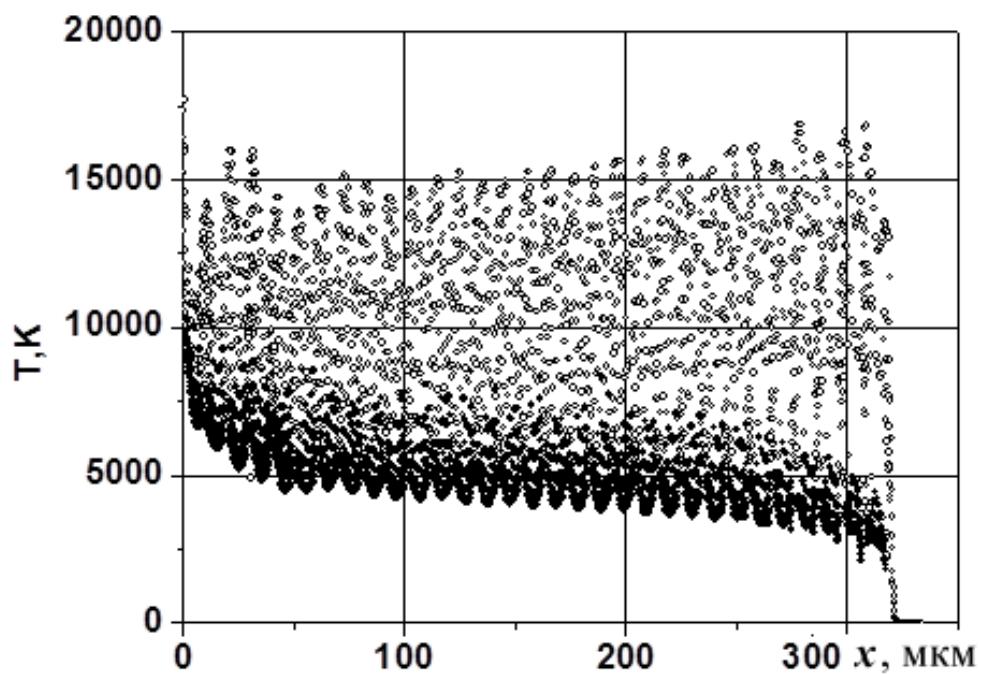


Рисунок 4.21 – Профиль температуры в свинце, содержащем изолированные частицы вольфрама при  $l=16$  мкм на момент времени  $t=100$  нс (● – вольфрам, ○ – свинец)

**Выводы к главе 4.** Численное моделирование распространения ударных волн в металлических гетерогенных средах выполнено для материалов двух типов:

- твердая решетка с жидкими включениями (W/Li или W/Pb),
- жидкость с твердыми включениями (Li/ W или Pb/W).

Структура ударной волны в материалах первого типа имеет узкий фронт шириной порядка периода решетки и протяженную зону релаксации. Для пары компонент W/Li в зоне релаксации наблюдается скоростная неравновесность.

В материалах второго типа скоростная неравновесность является доминирующим фактором в формировании структуры ударной волны. Для пары Li/W скольжение жидкой фазы относительно твердых включений существенно увеличивает ширину фронта, так что релаксация параметров среды к установившимся значениям завершается в ударном фронте.

При вариации масштаба решетки распределения давления и скорости в ударной волне сохраняют подобие в продольном направлении. При субмикронных величинах периода решетки имеет место тепловое равновесие между компонентами среды. При больших значениях периода решетки возникает температурная неравновесность с пульсирующим пространственно неоднородным полем температур.

## ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТОНАЦИИ СМЕСЕВЫХ И ПОРИСТЫХ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ

### **5.1. Моделирование детонации пористого взрывчатого вещества**

Распространению детонации в неоднородных взрывчатых веществах посвящено большое число работ [132-140]. В данной главе представлены результаты численного моделирования детонации пористого взрывчатого вещества PETN (тэн). Различная величина исходной макроскопической плотности обеспечивалась неоднородностью среды, а именно вакуумированными пустотами, пространство между которыми полагалось заполненным взрывчатым веществом нормальной ( $1750 \text{ кг}/\text{м}^3$ ) плотности. Таким образом, меняя размер и концентрацию пор, можно обеспечить произвольную макроскопическую плотность образца взрывчатого вещества, подлежащего численному моделированию. При моделировании учитывались структурные неоднородности порядка  $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ м}$ .

При численном моделировании процесса детонации пористого взрывчатого вещества выделяется расчетная область, в которой размещаются вакуумированные поры, не содержащие ВВ. Пространство между порами заполняется SPH-частицами, содержащими взрывчатое вещество нормальной плотности. Частицы не обязательно равны по массе. При таком алгоритме заполнения расчетной области SPH-частицами все поры во взрывчатом веществе формируются естественным образом, как пустые подобласти, в которых SPH-частицы отсутствуют. Форму и количество пор необходимо задавать на этапе подготовки исходных данных, исходя из представлений о мезоструктуре пористого ВВ. Допускается наличие трёх типов SPH-частиц:

- частицы, содержащие взрывчатое вещество;
- частицы, содержащие продукты детонации;
- «смешанные» частицы, содержащие одновременно ВВ и ПД.

В последнем случае обе фазы (ВВ и ПД) перемешаны по всему объему SPH-частицы и находятся в равновесии по давлению, скорости и температуре.

Для расчета взрывчатого разложения ВВ к «смешанным» SPH-частицам применимы макрокинетические уравнения горения, а также уравнения состояния, позволяющие корректно описать обе фазы.

Для расчета параметров смеси ВВ и ПД было выбрано уравнение состояния JWL [142] и макрокинетическое уравнение горения ВВ [143]. Оба уравнения используются в разработанном коде SPH и взрывчатое вещество полагается средой с нулевой прочностью.

Течение такой среды описывается уравнениями сохранения массы, импульса и энергии

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{U} \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = \nabla \cdot P \quad (5.2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( E + \frac{1}{2} U^2 \right) = \nabla \cdot (\vec{U} \cdot P) \quad (5.3)$$

SPH-аппроксимация уравнений (5.1)-(5.3) представлена уравнениями (1.24), (1.25) и (1.28). Выполнение условий на контактных и свободных поверхностях осуществляется автоматически при сквозном расчете течения. Уравнения SPH решаются по явной разностной схеме. Система (5.1)-(5.3) замыкается уравнением состояния JWL [142]. Для непрореагировавшего ВВ и продуктов детонации имеем калорические уравнения состояния,

$$\frac{E_s}{v_{s0}} = \frac{P_s \tilde{v}_s}{\omega_s} - F_s(\tilde{v}_s) + F_s(1) \quad (5.4)$$

$$\frac{E_g}{v_{s0}} = \frac{P_g \tilde{v}_g}{\omega_g} - F_g(\tilde{v}_g) - Q \quad (5.5)$$

термические уравнения состояния

$$P_s = \omega_s \tilde{v}_s [C_s T_s + G_s(\tilde{v}_s) + F_s(\tilde{v}_s)] \quad (5.6)$$

$$P_g = \omega_g \tilde{v}_g [C_g T_g + G_g(\tilde{v}_g) + F_g(\tilde{v}_g)] \quad (5.7)$$

аддитивные соотношения для внутренней энергии и удельного объема смеси

$$\nu = (1 - \lambda) \nu_s + \lambda \nu_g \quad (5.8)$$

$$E = (1 - \lambda) E_s + \lambda E_g \quad (5.9)$$

и условия термодинамического равновесия

$$P_s = P_g = P \quad (5.10)$$

$$T_s = T_g = T \quad (5.11)$$

В уравнениях (5.4)-(5.7) введены следующие функции:

$$F_i(\tilde{\nu}_i) = A_i \left( \frac{\tilde{\nu}_i}{\alpha_i} - \frac{1}{R_{1i}} \right) e^{-R_{1i}\tilde{\nu}_i} + B_i \left( \frac{\tilde{\nu}_i}{\alpha_i} - \frac{1}{R_{2i}} \right) e^{-R_{2i}\tilde{\nu}_i}$$

$$G_i(\tilde{\nu}_i) = \frac{A_i}{R_{1i}} e^{-R_{1i}\tilde{\nu}_i} + \frac{B_i}{R_{2i}} e^{-R_{2i}\tilde{\nu}_i},$$

где  $\tilde{\nu}_i = \nu_i / \nu_{s0}$ ,  $i=s,g$ .

Нижний индекс принимает значения  $i=s,g$  для конденсированной и газообразной фазы соответственно. При задании  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $E$  неизвестными величинами в уравнениях (5.4)-(5.11) являются:

$$\nu_s, \nu_g, T_s, T_g, P_s, P_g, E_s, E_g$$

В таблице 5.1 даны константы уравнения JWL для PETN (тэн). Решение системы (5.4)-(5.11) в работе [142] производится методом простой итерации в безразмерных переменных и критерием сходимости является достижение невязки в  $10^{-8}$  при соблюдении ряда рекомендаций о горении в волне разрежения, если детонационная волна выходит на свободную поверхность и продукты детонации истекают в пустоту.

В работе [65] система (5.4)-(5.11) решается в размерных переменных методом дихотомии на интервале  $0.5\nu_N < \nu_i < 1.5\nu_{CJ}$ , при этом итерируется удельный объем ВВ  $\nu_s$  или удельный объем ПД  $\nu_g$  с использованием соотношения (5.8). Поиск решения не вызывал трудностей при выходе

детонационной волны на свободную поверхность поры. Макрокинетическое уравнение для массовой доли продуктов детонации  $\lambda$ , образующихся при химических реакциях, также заимствовано из [143]:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -I(1-\lambda)^{2/9} \left( \frac{v_{0s}}{v_s} - 1 \right)^4 - J(1-\lambda)^{2/9} \lambda^{2/3} P^z \quad (5.12)$$

с константами для PETN (тэн)  $I=20 \text{ мкс}^{-1}$ ,  $J=400 \text{ мкс}^{-1} \text{ Мбар}^{-Z}$ ,  $Z=1.4$ .

Таблица 5.1. Константы уравнения состояния JWL для PETN (тэн) [143]

Параметр	Продукты детонации, индекс (g)	Непрореагировавшее ВВ, индекс (s)
$\rho_{s0}, \text{ кг/м}^3$	-	1750
$C, \text{ МПа/К}$	1.0·	2.263
$Q, \text{ ГПа}$	10.1	-
$A, \text{ ГПа}$	617	3756
$B, \text{ ГПа}$	16.926	-131.3
$R_1,$	4.4	7.2
$R_2,$	1.2	3.6
$\omega$	0.25	1.173

**Тестирование уравнения состояния JWL.** Проведем расчеты детонационной волны по модели Зельдовича-Неймана-Дёринга (ЗНД). Определим параметры в точках Чепмена-Жуге и Неймана для монолитного ВВ. Параметры в точке Чепмена-Жуге определяются при  $\lambda=1$  в результате решения уравнений сохранения и уравнений (5.5) и (5.7). Для этого строим адиабату продуктов детонации

$$P \left\{ \left( \frac{2+\omega_g}{2\omega_g} \right) \frac{v_g}{v_{s0}} - \frac{1}{2} \right\} - F \left( \frac{v_g}{v_{s0}} \right) = Q \quad (5.13)$$

Затем из условия касания линии Релея к адиабате (5.13) определяем параметры в точке Чепмена-Жуге и скорость детонационной волны  $D$ . Условие пересечения линии Релея с адиабатой непрореагированного ВВ

$$P \left\{ \left( \frac{2+\omega_s}{2\omega_s} \right) \frac{v_s}{v_{s0}} - \frac{1}{2} \right\} + F_s(1) - F_s \left( \frac{v_s}{v_{s0}} \right) = 0 \quad (5.14)$$

позволяет получить параметры в точке Неймана. В таблице 5.2 представлены для сравнения результаты расчета параметров детонационной волны, произведенных в [143], по модели ЗНД, а также в одномерных расчетах по методу SPH.

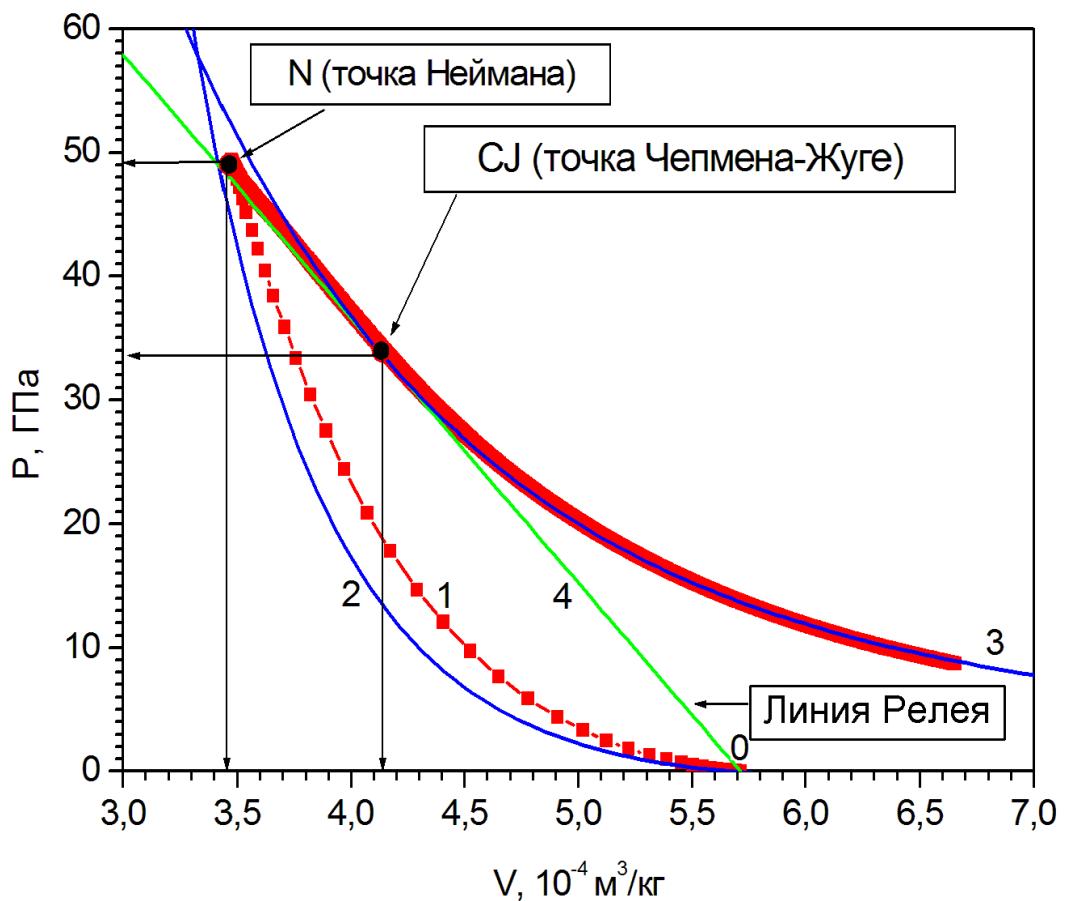
Для тестирования кода SPH в одномерном приближении решалась задача удара пластины ВВ о жесткую стенку.

Таблица 5.2. Параметры детонационной волны

Параметр	Из [143]	Расчёт по ЗНД-модели	Расчёт SPH (1D)
$D$ , м/с	8210	8348	8450
$U_{CJ}$ , м/с	2280	2294	2609
$P_{CJ}$ , ГПа	33.5	33.51	33.52
$v_{CJ}/v_{s0}$	0.7253	0.7252	0.7295
$P_N$ , ГПа	45.2	48.89	47.43
$v_N/v_{s0}$	0.6068	0.5992	0.6147
$U_N$ , м/с	3188	3345.5	3661

Толщина пластины составляла величину 10 мм, а скорость удара 1600 м/с. С момента удара пластины о жесткую стенку процессы ударного сжатия, разложение ВВ и расширение продуктов детонации в волне Тейлора рассчитывались сквозным образом. На рисунке 5.1 представлена термодинамическая диаграмма указанных стадий течения. Линиями (-■-) показана эволюция взрывчатого вещества в SPH-частице, полученная непосредственно из расчёта. Сначала происходит нагружение непрореагировавшего взрывчатого вещества ударной волной из начального состояния (точка 0) до состояния в точке Неймана, вдоль линии 1. При численном расчёте мгновенный переход вещества для SPH-частицы  $i$  из начального состояния 0 в состояние  $N$  на ударной адиабате невозможен, даже

при отсутствии схемной вязкости, так как согласно критерию Куранта  $\Delta t \approx K D_i / C_s$ , где  $K < 0.5$ ,  $D_i$  есть размер SPH-частицы,  $C_s$  – скорость ударной волны. Состояние  $N$  для вещества SPH-частицы сможет реализоваться, когда ударная волна пройдёт всю SPH-частицу. И если  $K=0.1$ , например, то для перехода из состояния 0 в состояние  $N$  потребуется  $1/K=10$  расчётных шагов, что даст 10 точек на кривой нагружения 1 (-■-). Здесь же, на рисунке 5.1, показаны сплошными линиями ударные адиабаты непрореагированного взрывчатого вещества (кривая 2), продуктов детонации (кривая 3) и линия Релея (прямая 4), рассчитанная по модели ЗНД.



**Рисунок 5.1 – Одномерный расчет методом SPH (-■-) эволюции вещества для одной SPH-частицы в процессе его нагружения, горения и расширения; ударные адиабаты непрореагированного взрывчатого вещества (кривая 2), продуктов детонации (кривая 3) и линия Релея (прямая 4)**

При мгновенном ударном переходе из точки 0 в точку  $N$  (называемой в зарубежной литературе точкой Неймана) вещество SPH-частицы приобретает

энергию  $E_N = P_N (V_0 - V_N)/2$ . В численном расчёте, при замене мгновенного ударного перехода из состояния 0 в состояние  $N$  последовательностью переходов через ряд состояний вдоль кривой нагружения 1, вещества SPH-частицы получит энергию, величина которой меньше  $E_N$  на величину  $E_k$ , численно равную площади сегмента между линией Релея 4 и кривой нагружения 1 вещества SPH-частицы. Кривая нагружения заранее не известна, но известна адиабата ВВ, потому можно оценить величину  $E_k$ , приняв адиабату ВВ и кривую нагружения примерно совпадающими. Энергия, соответствующая площади между линией Релея и адиабатой 2 есть [144]:

$$E_k = \frac{1}{3} C_a^2 S_a \left( \frac{V_0 - V_N}{V_0} \right)^3 \quad (5.15)$$

где  $C_a$  и  $S_a$  есть коэффициенты ударной адиабаты непрореагированного ВВ. Для тэна, например, величина  $E_k$  составит  $\approx 0.1 \text{ МДж/кг}$ , в то время как в процессе горения этого взрывчатого вещества (линия  $N-CJ$ ) выделится  $\approx 5.8 \text{ МДж/кг}$ . Таким образом, замена в численном расчёте мгновенного ударного перехода 0- $N$  кривой нагружения 1 приводит к незначительному отклонению расчётной энергии продуктов детонации от точной величины  $E_N$ , примерно на 2%.

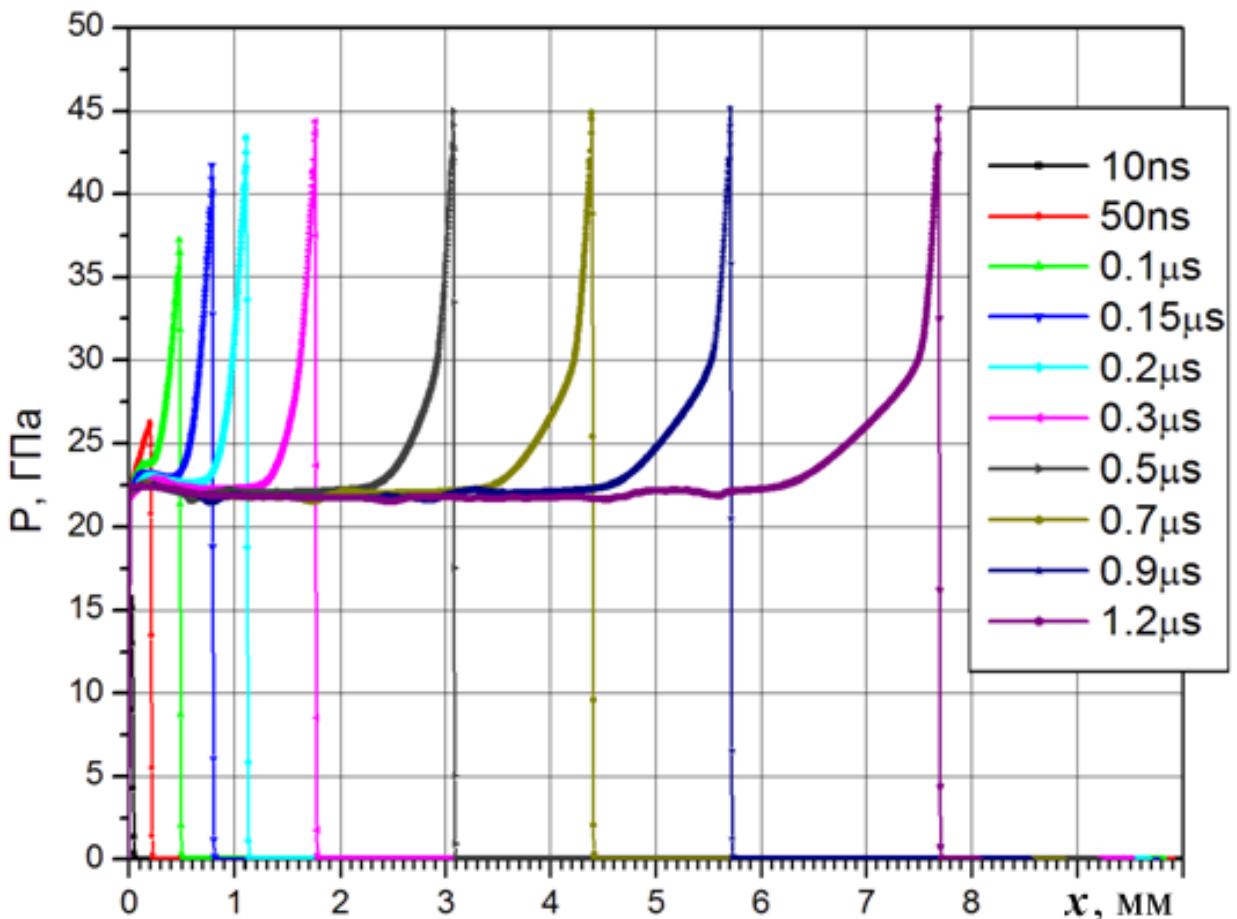
Формирование и распространение детонационной волны в установившемся режиме представлены на рисунке 5.2.

В установившемся режиме, при  $x > 3 \text{ мм}$ , четко выделяются химпик, зона горения и волна Тейлора. Ширина зоны горения в установившемся режиме составляет величину  $\approx 120 \text{ мкм}$ .

Важным при моделировании детонации пористых взрывчатых веществ является корректный расчёт истечения продуктов детонации в поры. Явление образования высокоскоростных струй газа при детонации пористого ВВ упоминается в литературе как «канальный эффект» [145]. Движение этих струй в порах ВВ опережает движение фронта ДВ по перемычкам между порами. Предполагается, что струи продуктов взрыва могут инициировать детонацию

ВВ при соударении с перемычками, находящимися на пути движения этих струй. Явление получило в [146] название «опережающей детонации».

Впервые скорость распространения продуктов взрыва в микроканале ВВ определялась экспериментально в работе [147] и для ВВ с  $D=7800\text{м/с}$  (тэн) были зарегистрированы скорости до  $15600\text{м/с}$ .



**Рисунок 5.2 – Выход на стационарный режим детонационной волны при ударе образца ВВ (тэн) о жесткую стенку. Расчет методом SPH в одномерном приближении. Скорость удара  $1600\text{ м/с}$**

Из оценок [148] известно, что при выходе ДВ на свободную поверхность скорость истечения продуктов детонации достигает (для типичных ВВ) величины  $12000\text{м/с}$ . Это ниже значений скорости, полученной в экспериментах и авторы работы [147] объясняют свои результаты кумуляцией продуктов детонации в микроканале ВВ. В диссертации для моделирования распространения детонационной волны по взрывчатому веществу, содержащему микроканал, решалась плоская двумерная задача о движении

детонационной волны, инициированной ударом металлической пластины толщиной 0.6 мм. Скорость удара составляла 3200 м/с. Пластина спустя 1 мкс после соударения принудительно останавливалась и на протяжении всей оставшейся стадии расчета скорости всех частиц пластины полагались равными нулю. Размер пластины составлял  $x \times y = 60 \times 120$  SPH-частиц с размерами  $\Delta x \times \Delta y = 10 \text{ мкм} \times 10 \text{ мкм}$  каждая. Детонационная волна перемещалась от поверхности соударения по прямоугольной области, заполненной ВВ и содержащей прямоугольную полость. Размер расчетной области, заполненной ВВ, составлял  $x \times y = 240 \times 120$  SPH-частиц, а полость в расчетной области была образована изъятием участка размером  $x \times y = 200 \times 20$  SPH-частиц. Необходимые для численного моделирования характеристики материалов приведены в таблицах 4.1, 5.2 и 5.3.

Таблица 5.3. Характеристики PETN (тэн)

Параметр	Тэн $C_5H_8(OHO_2)_4$
$\rho_0, \text{ кг/м}^3$	1770
$K, \text{ ГПа}$	6
$C_a, \text{ м/с}$	2830
$S_a$	1.910
$D, \text{ м/с}$	8300
$P_{CJ}, \text{ ГПа}$	33.5
$V_{CJ} \times 10^{-4}, \text{ м}^3/\text{кг}$	4.098
$\gamma_s$	2.64

Описанная конфигурация расчетной области соответствует эксперименту [147] и схема которого показана на рисунке 5.3. В экспериментах [147] использовалось взрывчатое вещество с несколько меньшей скоростью детонации, нежели в выполненных расчетах. Это связано с тем, что набор констант уравнения JWL (таблица 5.1) определён для тэна, приведенного в [143].

В экспериментах [147] оптическим методом фиксировались моменты времени  $t_1$  (выход ДВ в микроканал) и  $t_2$  (удар ПД о торцевую поверхность световода); по известной глубине микроканала  $h$  определялась скорость ПД в микроканале. Вычислительный эксперимент соответствовал натурному и результаты показаны на рисунке 5.4.



Рисунок 5.3 – Схема эксперимента [147]

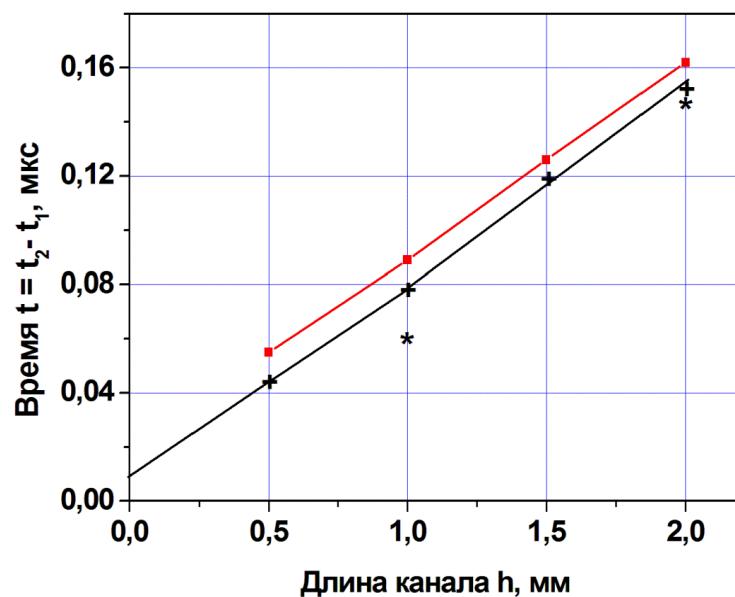


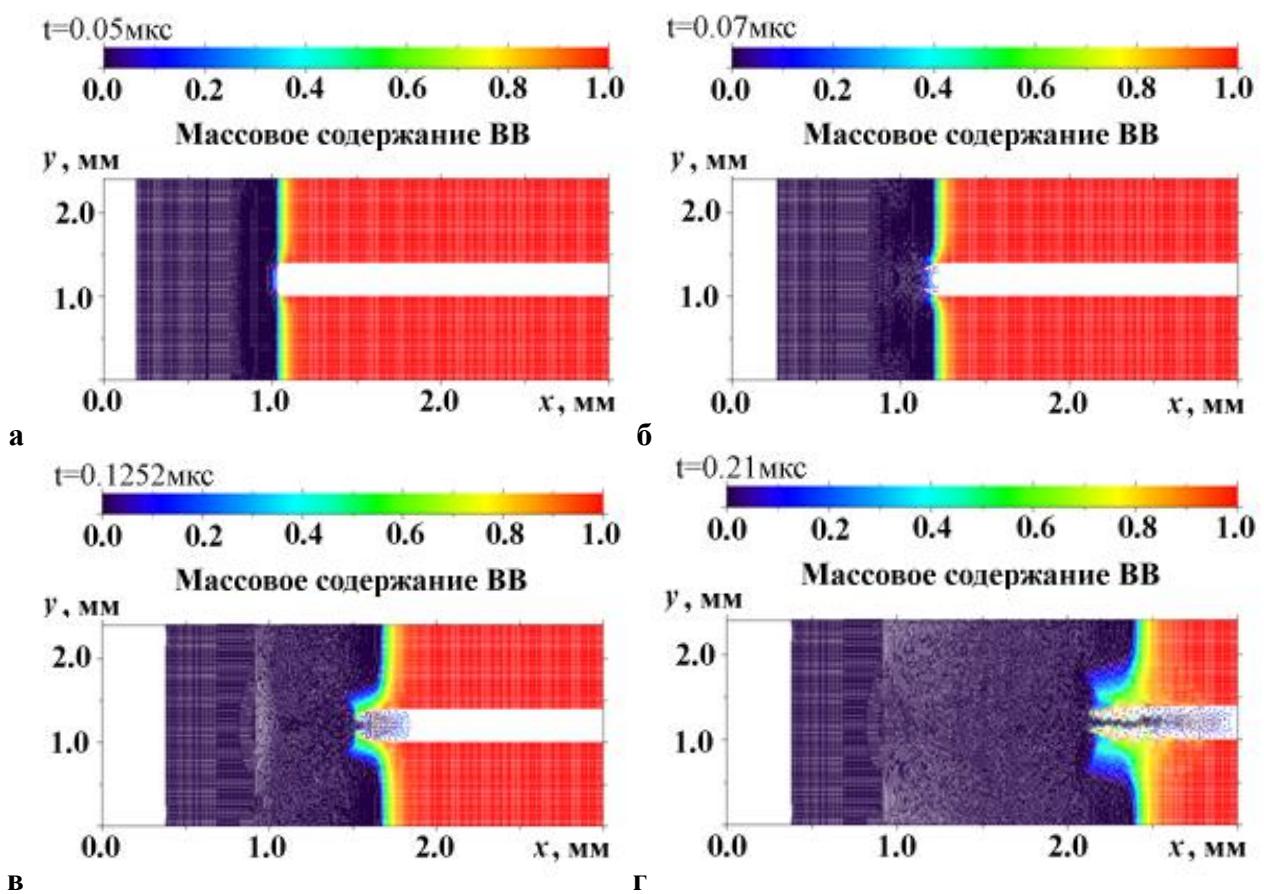
Рисунок 5.4 – Результаты расчета (●) и экспериментов в вакуумированном микроканале (\*) и экспериментов с воздухом в микроканале (+)

Во всех расчетах микроканал полагался вакуумированным.

В расчете скорость продуктов детонации в микроканале достигала значения 14000 м/с, что несколько ниже экспериментально зарегистрированной скорости (этот факт можно объяснить численным моделированием явления в плоской двумерной постановке).

Чтобы обнаружить признаки эффекта кумуляции ПД в микроканале, обратимся к рисунку 5.5, представляющему визуализацию течения в различные моменты времени и визуализацию массовой доли взрывчатого вещества во всей расчетной области. На рисунке 5.6 представлена визуализация удельной энергии в расчетной области для тех же моментов времени.

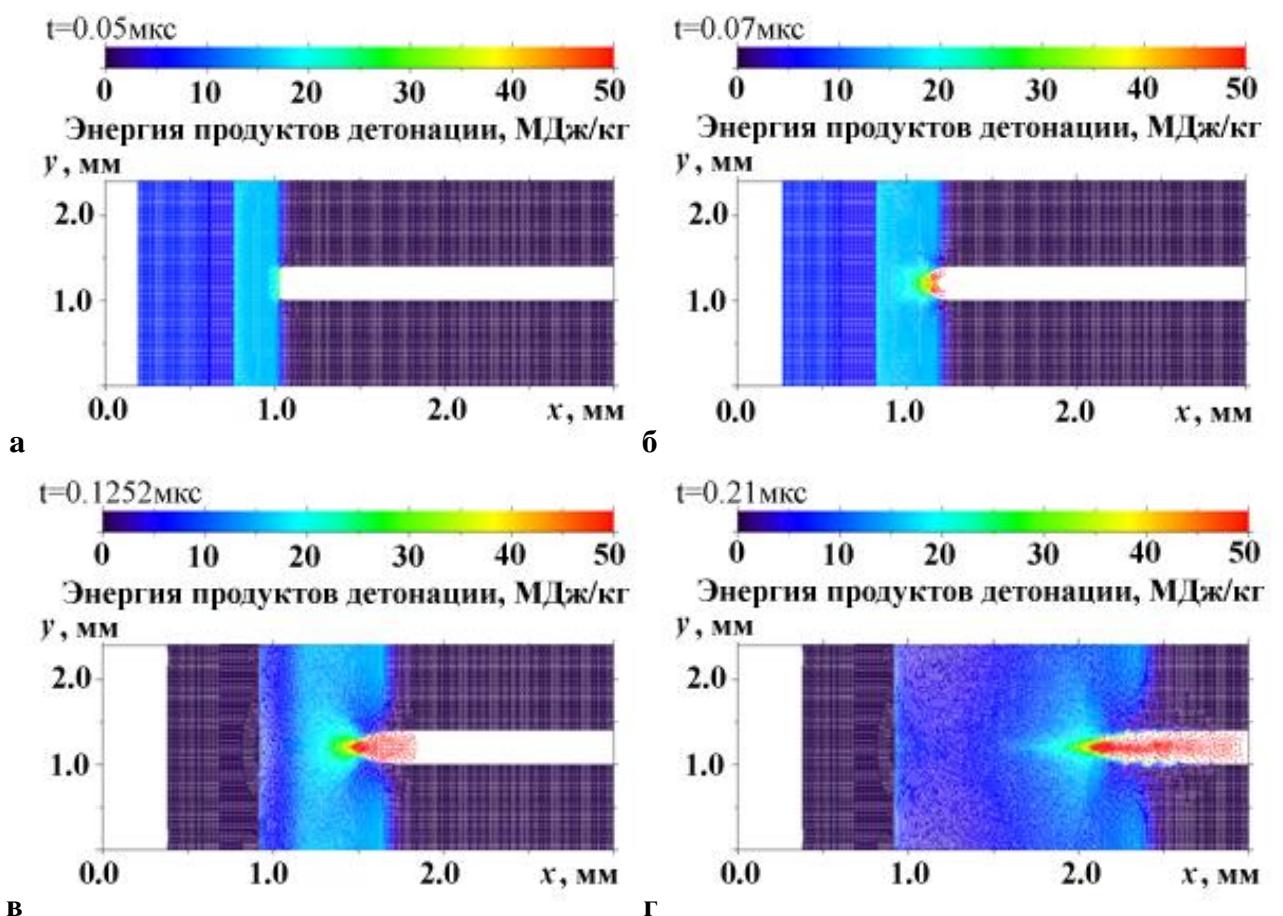
На рисунках 5.5а и 5.6а показан момент выхода детонационной волны в микроканал. Существенных изменений в распределении энергии нет и течение близко к одномерному. На рисунках 5.5б и 5.6б наблюдаются выбросы струй продуктов детонации из угловых областей микроканала.



**Рисунок 5.5 – Визуализация течения ПД в микроканале ВВ и распределение массовой доли взрывчатого вещества в моменты времени  $t=0.05; 0.07; 0.125$  и  $0.21$  мкс**

Эти струи имеют плотность энергии большую, чем при начале их истечения в микроканал. Образованная угловыми струями область продуктов детонации заполняет микроканал и имеет скорость в направлении оси канала порядка 10000м/с. На рисунках 5.5в и 5.6в противоположные стенки микроканала смыкаются и наблюдается начало формирования струи ПД высокой плотности.

Скорость истечения ПД из зоны смыкания возрастает до 12000м/с. В момент времени  $t=0.2$  мкс (рисунки 5.5г и 5.6г) устанавливается стационарная конфигурация течения в области смыкания стенок микроканала.



**Рисунок 5.6 – Визуализация течения в микроканале взрывчатого вещества и распределение удельной энергии продуктов детонации в моменты времени  $t=0.05; 0.07; 0.125$  и  $0.21$  мкс**

Скорость истечения ПД из этой области составляет 14000м/с. Истекающие ПД имеют плотность энергии около 50МДж/кг, что на порядок

превышает плотность энергии продуктов взрыва при детонации. По мере истечения струя ПД расширяется и взаимодействует со стенками микроканала. Показанный на рисунках 5.5-5.6 и описанный выше процесс является типичным процессом газовой кумуляции. Остаётся открытым вопрос о кумулятивных эффектах в микроканалах, размеры которых существенно меньше ширины зоны реакции (что является предметом дальнейших исследований).

**Постановка задачи о детонации пористого ВВ.** Как показано выше, модифицированный метод SPH позволяет реалистично моделировать кумулятивное истечение продуктов детонации в пустоту и движение детонационной волны по взрывчатому веществу.

Исходя из этого, решалась плоская двумерная задача о движении детонационной волны от жесткой стенки по прямоугольной области, заполненной взрывчатым веществом, содержащем вакуумные пустоты. Верхняя и нижняя границы области являлись жесткими стенками. Инициирование детонации осуществляется коротким ударом по левой границе взрывчатого вещества пластиною из вольфрама со скоростью 1600м/с, для чего всем SPH-частицам ударника через некоторое время после удара (обычно это время составляло в расчете 0.05мкс) приписывалась скорость, равная нулю. Расчетная область, вертикальный период которой представлен на рисунке 5.7, составляла  $x \times y = 1000 \times 40 d^2$  (где  $d$ -диаметр SPH-частицы), а толщина пластины равнялась  $50d$ . В расчетной области располагалось от 10000 до 20000 SPH-частиц. Изменение средней плотности ВВ при таком задании расчетной области осуществляется изменением диаметра пор. Детонационная волна распространялась вправо.

Поры моделировалась регулярной по координате  $X$  цепочкой окружностей. Располагались поры в шахматном порядке, что достигалось сдвигом каждой чётной (по координате  $Y$ ) цепочки пор на  $\frac{1}{2}$  периода по координате  $X$ . В расчетах изменялся размер пор  $\delta$ .

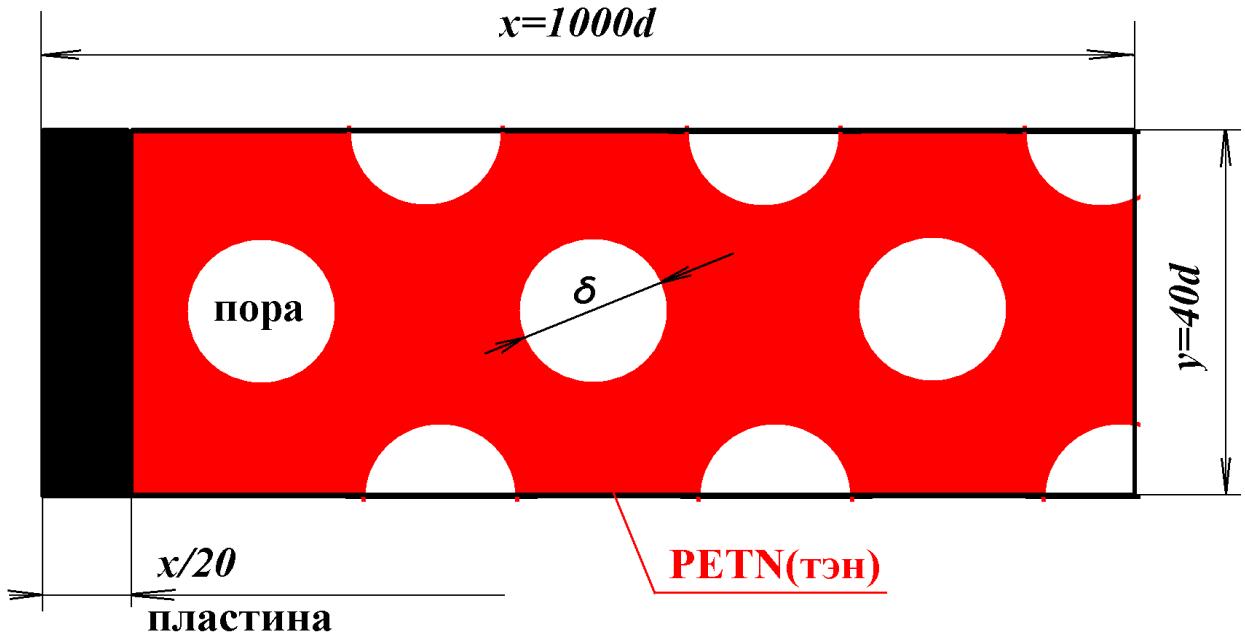
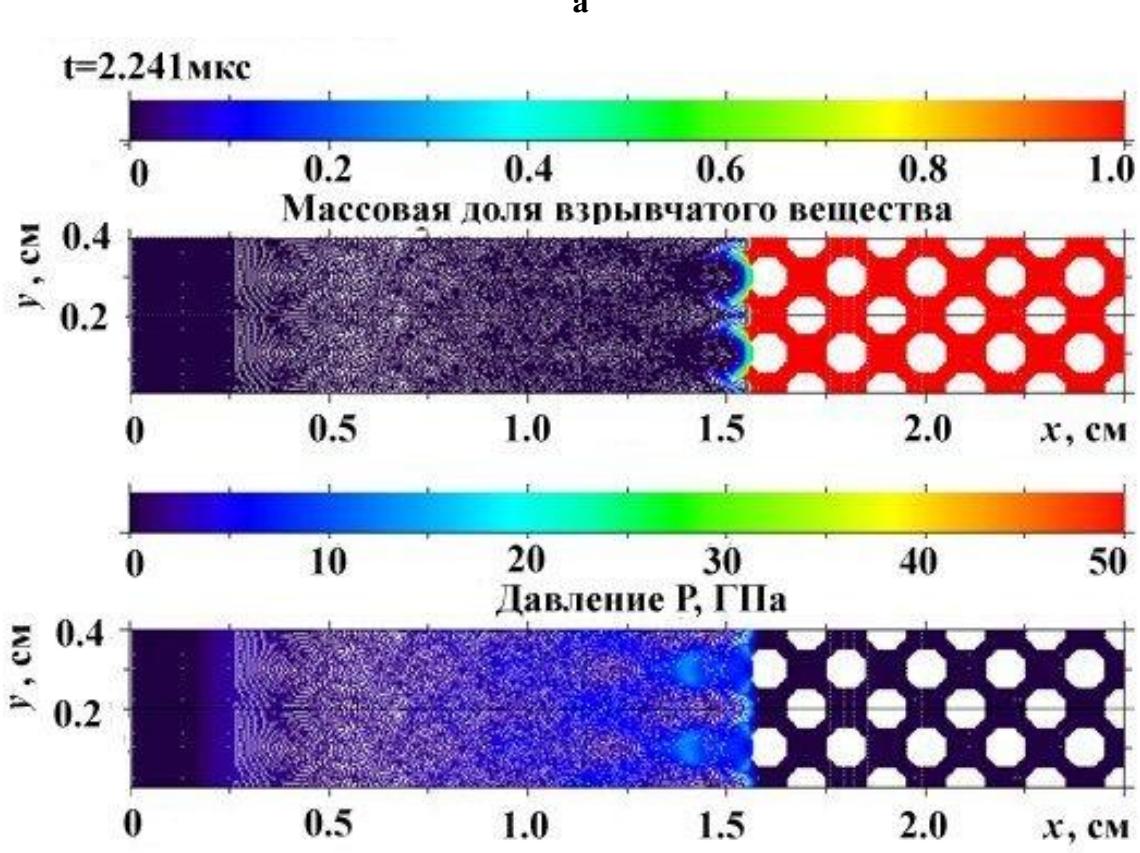
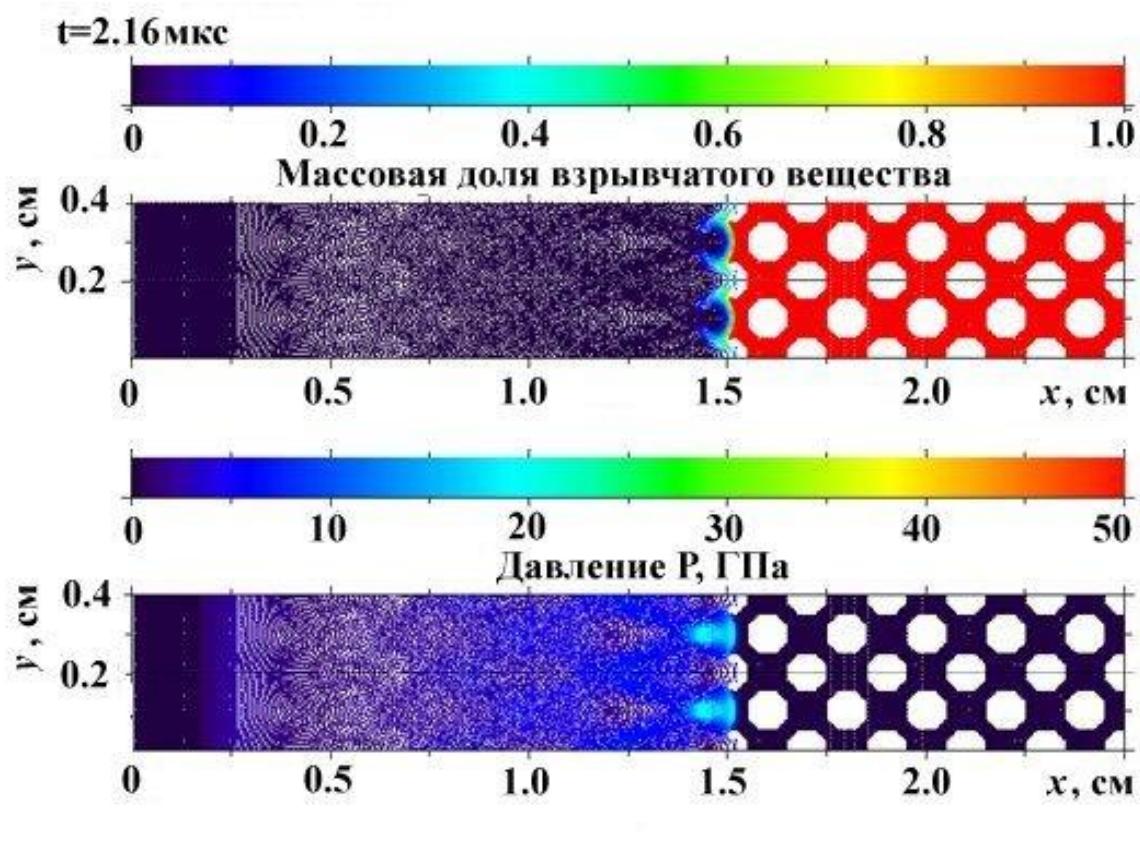


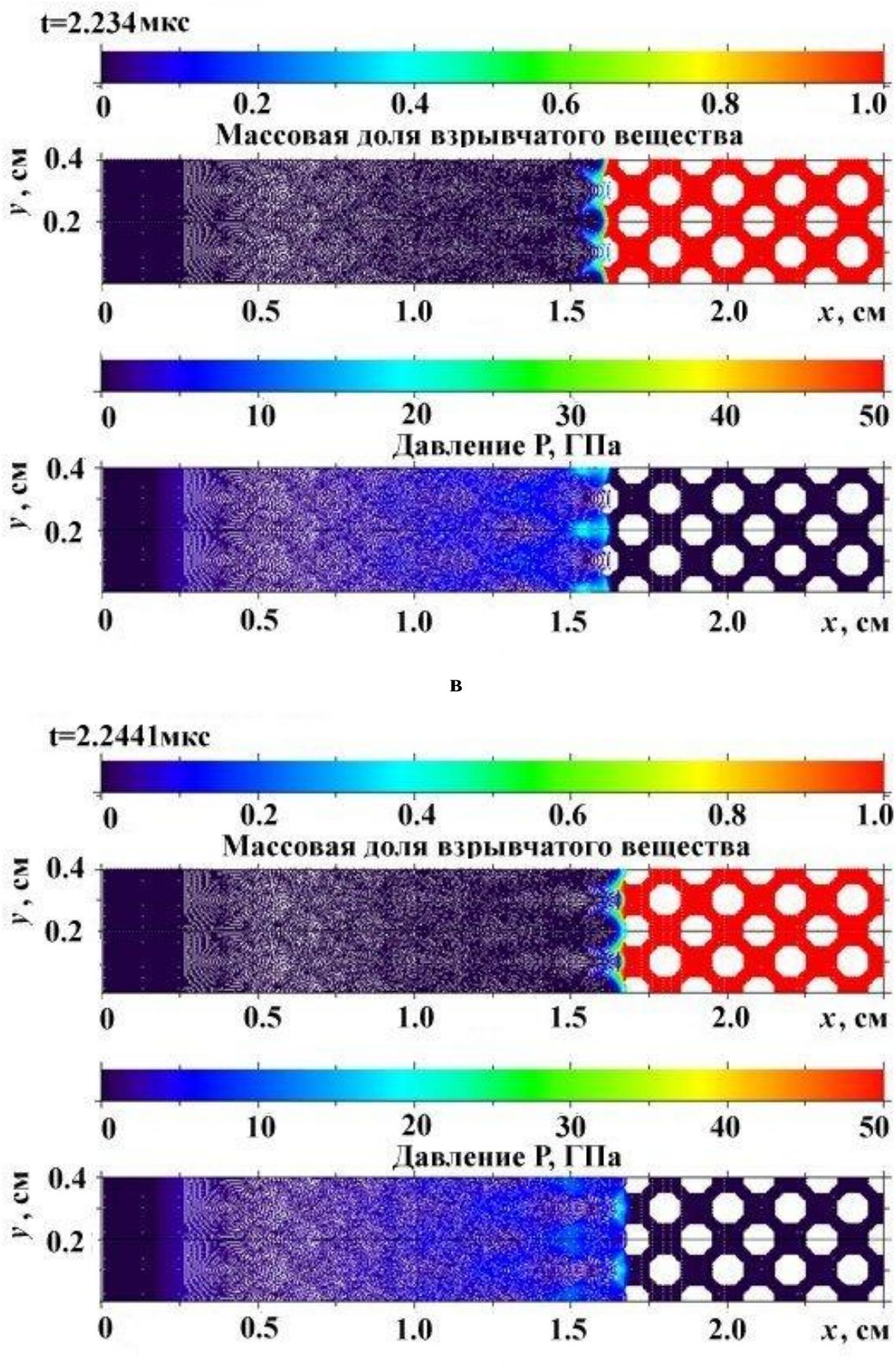
Рисунок 5.7 – Расчетная область ( $d$  – диаметр SPH-частицы)

### Моделирование распространения детонационной волны.

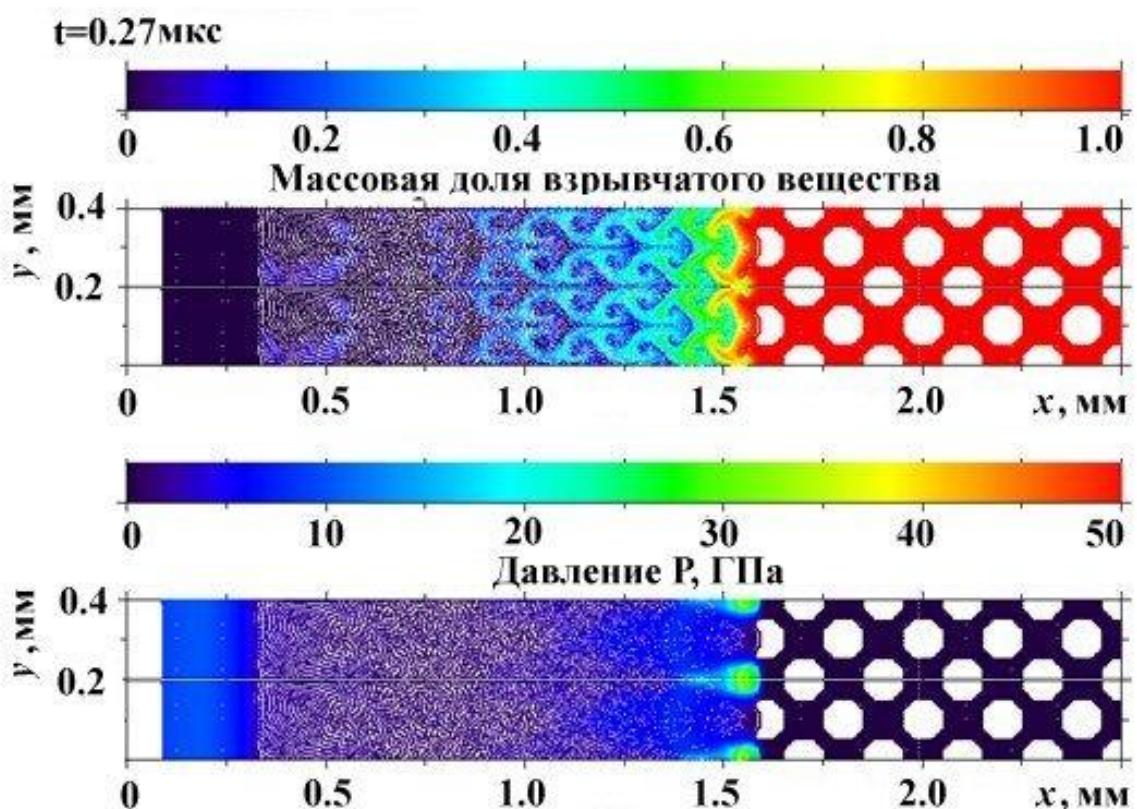
Рассматривалось распространение детонационной волны в пористой мезоструктуре при изменении диаметра поры, но при одинаковой средней плотности образца ВВ. На рисунках 5.8 и 5.9 представлены картины одного цикла движения детонационной волны для двух диаметров пор, 1мм и 0.1мм, при средней плотности взрывчатого вещества  $\rho_0=1006\text{кг}/\text{м}^3$ .

Движение детонационном волны при большом размере пор (рисунок 5.8) имеет преимущественно дифракционный характер: детонационная волна перемещается по вертикальным перемычкам (рисунок 5.8а). При выходе фронта детонационной волны на поверхность поры наблюдается кумулятивное истечение продуктов детонации в пору (рисунок 5.8б,в), в то время как фронт детонационной волны распространяется по горизонтальным перемычкам. Далее происходит встреча фронтов, исходящих из горизонтальных перемычек и струи продуктов детонации, ударяющей в вертикальную перемычку (рисунок 5.8г). Цикл завершается схлопыванием поры и выходом детонационной волны на поверхность следующей поры.

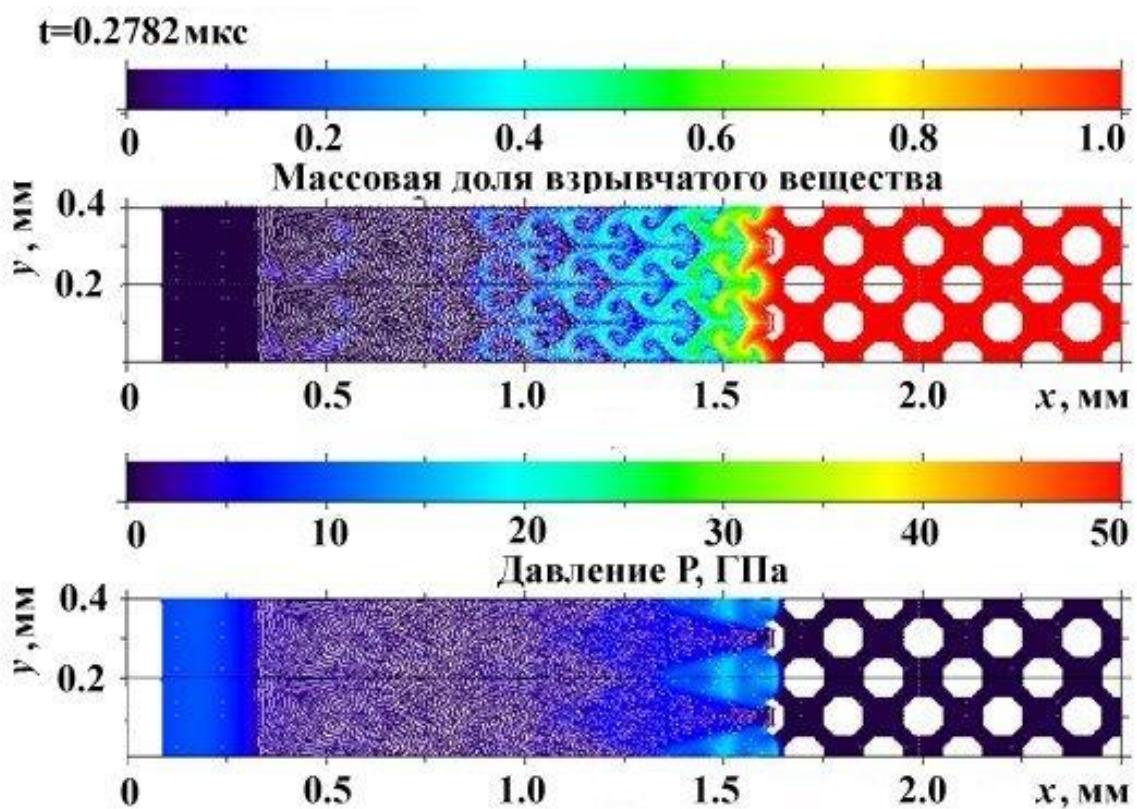




**Рисунок 5.8 – Процесс движения детонационной волны по взрывчатому веществу (тэн с начальной плотностью  $\rho_0=1006 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Размер пор  $\delta=1 \text{ мм}$ .**



a



6

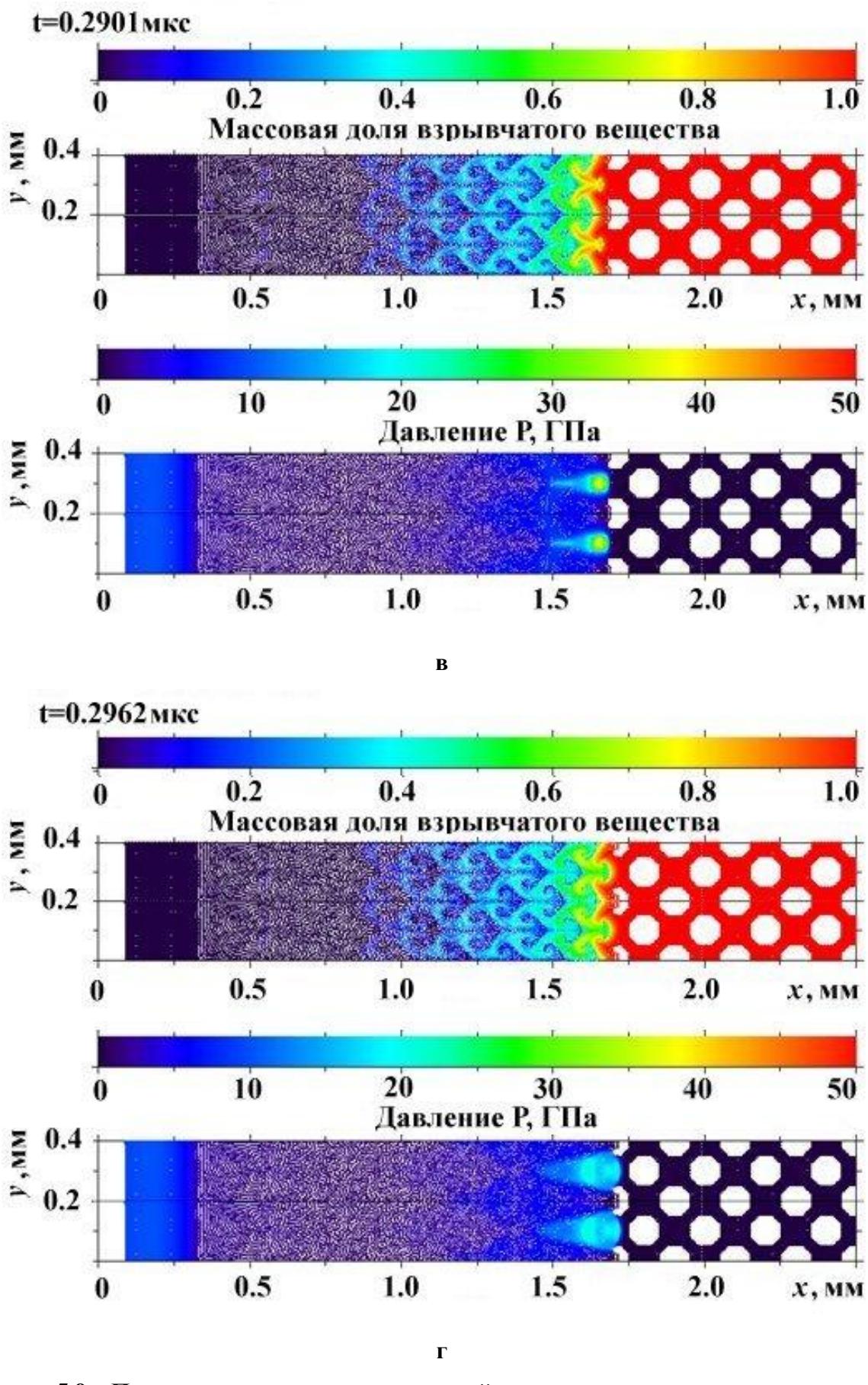


Рисунок 5.9 – Процесс движения детонационной волны по взрывчатому веществу (тэн) с начальной плотностью  $\rho_{00}=100 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Размер пор  $\delta=0.1 \text{ мм}$

Уменьшение диаметра пор на порядок (при неизменности структуры их расположения) не меняет начальной плотности ВВ, но характер распространения детонационной волны становится иным. В этом случае размер диаметра поры сопоставим с шириной зоны реакции при нормальной плотности ВВ. На рисунке 5.9а показано начало схлопывания поры. Четкого фронта детонационной волны в перемычке не наблюдается. Прорыв в пору продуктов детонации отсутствует и потому пора во взрывчатом веществе (рисунок 5.9б) деформируется и схлопывается, подобно схлопыванию пор в инертном материале. Такое схлопывание поры приводит к большему росту давления, нежели в предыдущем случае, при диаметре пор в 1мм.

При ударе струи о противоположную стенку поры наблюдается возникновение «горячего пятна» и начинается разложение ВВ в нём (рисунок 5.9в). Горение ВВ распространяется в вертикальные перемычки (рисунок 5.9г) и описанный процесс повторяется. Структура зоны течения продуктов детонации за фронтом волны в этом случае имеет ярко выраженный вихревой характер. При этом горение взрывчатого вещества затягивается и наблюдается увеличение эффективной ширины зоны реакции.

Приведенные на рисунках 5.8-5.9 иллюстрации распространения детонационной волны в пористом ВВ хорошо согласуются с современными представлениями о механизме поддержания детонации путем возникновения «горячих» пятен [149]. Впервые численное подтверждение механизму развития детонации в «горячих» пятнах было дано Ч.Мейдером на примере 3-Д моделирования детонации в нитрометане, содержащем кубические полости [123]. Но сама идея о том, что самораспространяющая детонация возможна лишь при возникновении во взрывчатом веществе центров локализации энергии, высказана и обоснована Ю.Б. Харитоном в [150].

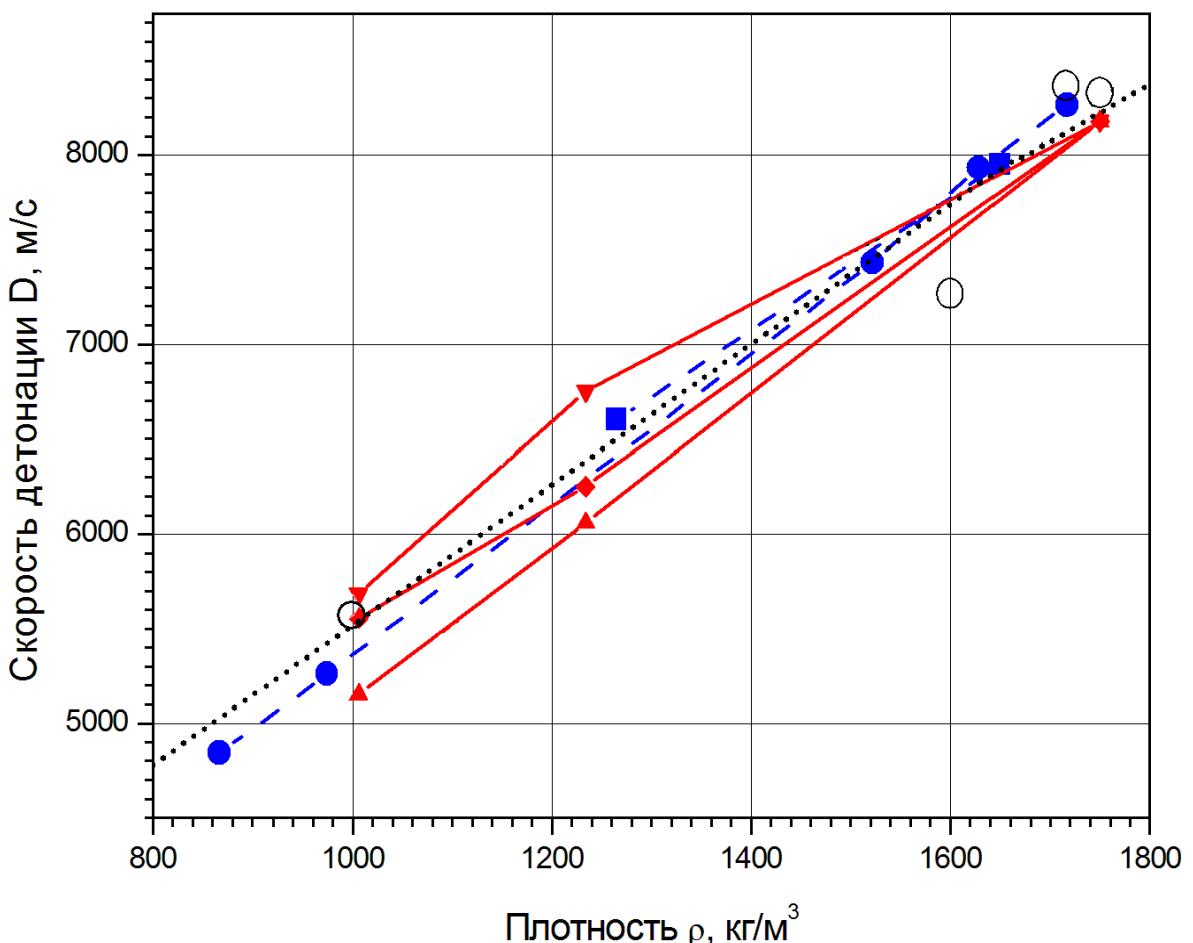
Для определения зависимости скорости детонации PETN (тэн) от средней плотности были проведены расчеты для ВВ с размерами пор  $\delta=0.1\text{мм}$ ,  $\delta=0.4\text{мм}$  и  $\delta=1\text{мм}$  при неизменной расчетной области. Результаты расчетов

представлены на рис.6. Там же нанесены экспериментальные значения из [38] и [151] для ВВ (тэн).

В работе [38] приведена эмпирическая зависимость скорости детонации от плотности ВВ (тэн), полученная обработкой большого числа опытов:

$$D = \begin{cases} 4780 + 3.7(\rho_0 - 800), & \rho_0 \leq 1650 \\ 7920 + 3.05(\rho_0 - 1650), & \rho_0 > 1650 \end{cases} \quad (5.16)$$

Из рисунка 5.10 можно видеть, что результат двумерного моделирования по коду SPH (расчет при диаметре пор 0.4мм) практически совпадает с (5.16) и другими экспериментальными данными.



**Рисунок 5.10 – Скорость детонации пористого PETN (тэн) в зависимости от плотности ВВ;** ○ – расчет по модели ЗНД с константами JWL из [143], ▲ – расчет SPH для пор диаметром 0.1мм, ◆ – расчет SPH для пор диаметром 0.4мм, ▼ – расчет SPH для пор диаметром 1мм, ● - эксперимент [151], ■ - эксперимент [38], ..- расчет по соотношению (5.16)

Учитывая то, что созданный вычислительный код хорошо предсказывает результаты экспериментов с детонацией пористых взрывчатых веществ, представляет интерес смоделировать явление «опережающей» детонации [146], то есть изучить возможность поддержания детонации кумулятивными струями ПД, формируемыми в микроканалах ВВ. Такой процесс был смоделирован в [63] и показал скорость передачи детонации 9600 м/с при средней плотности пористого ВВ 1309 кг/м<sup>3</sup>. Однако следует заметить, что полуэмпирическое уравнение макрокинетики (5.12) может не учитывать особенностей инициирования взрывчатого вещества скоростными струями горячих газов, и потому необходима экспериментальная проверка результатов моделирования, изложенных в [63].

## **5.2. Детонация взрывчатого вещества с включениями парафина**

Проведено численное моделирование мезоструктуры течения за фронтом детонационной волны, распространяющейся по гетерогенному взрывчатому веществу (тэн) и содержащему регулярные включения флегматизатора (парафин). Частицы флегматизатора рассматриваются как инертные включения, не вступающие в химическую реакцию с продуктами детонации. Взрывчатое вещество детонирует по модели Чепмена-Жуге [123,64]. Задача решалась в плоской двумерной постановке.

Целью данной работы являлось изучение влияния на распространение детонационной волны гидродинамических эффектов в продуктах детонации, обусловленных мезоструктурой гетерогенных ВВ, содержащих инертные включения. При этом учитывается только механическое взаимодействие инертных включений с продуктами детонации. Процесс детонации гетерогенных и пористых ВВ интенсивно изучается и завершенной теории, исчерпывающей все особенности описания детонации таких ВВ, пока ещё нет. В монографиях [38] и [45] приведен большой массив обширных экспериментальных и теоретических результатов разных авторов по детонации флегматизированных ВВ. Термодинамические расчёты из упомянутых работ

основаны на рассмотрении гетерогенного ВВ как однородной среды, состоящей из двух взаимопроникающих континуумов (ВВ и парафин). Это смесевые модели, не учитывающие мезоструктуры ВВ. В термодинамических моделях предполагается, что при распространении детонационной волны флегматизирующие добавки частично разлагаются между химическим пиком и плоскостью Чепмена-Жуге и взаимодействуют с продуктами детонации. Предполагается, что в этой зоне с продуктами детонации реагируют до 20% парафина и тем самым изменяют параметры детонации; ещё 20% флегматизатора разлагается и реагирует с продуктами детонации за плоскостью Чепмена-Жуге. Установившегося мнения о подобной модели детонации флегматизированного ВВ нет. В [38] приводится ряд ссылок на работы, предполагающие значительное влияние динамической сжимаемости флегматизатора.

Для моделирования пористого ВВ часто применяется широко распространённое полуэмпирическое уравнение состояния Джонса-Уилкинса-Ли (JWL) с коэффициентами, подобранными для данной плотности ВВ. Детонация пористого взрывчатого вещества хорошо описывается в рамках гомогенной среды со средней плотностью  $\rho_{00}$ , для которой известны коэффициенты уравнения состояния JWL [152-153].

В диссертации моделирование распространения детонации проводится в мезоструктуре, заданной явно в виде областей ВВ и включений парафина. Подобный подход позволяет использовать одно уравнение состояния для взрывчатого вещества стандартной плотности [154]. Расчеты проводились с достаточным уровнем пространственного разрешения распространения детонационной волны по ВВ, содержащему изолированные включения парафина. Это позволило хорошо визуализировать двумерную гидродинамику и выявить основные эффекты, влияющие на распространение детонационной волны.

Теплофизические свойства и константы уравнения состояния компонент гетерогенного взрывчатого вещества, используемые в расчетах, представлены в таблицах 5.2, 5.3 и 5.4 [38].

Таблица 5.4. Характеристики инертной компоненты ВВ [38]

Параметр	Парафин C <sub>19</sub> H <sub>40</sub> -C <sub>35</sub> H <sub>72</sub>
ρ <sub>0</sub> , кг/м <sup>3</sup>	910
K, ГПа	0.73
C <sub>a</sub> , м/с	3320
S <sub>a</sub>	1.24
γ <sub>s</sub>	0.146

Уравнение состояния для парафина принималось в виде (1.63)-(1.68), Для продуктов детонации используется уравнение состояния Джонса-Уилкинса-Ли (JWL) [38], в котором опорными кривыми являются изэнтропы P<sub>r</sub>=P<sub>S</sub>, E<sub>r</sub>=E<sub>S</sub>, проходящие через точку Чепмена-Жуге

$$P_S = A \exp(-R_1 \rho_0 / \rho) + B \exp(-R_2 \rho_0 / \rho) + C (\rho / \rho_0)^{\omega+1} \quad (5.17)$$

$$E_S = \frac{A}{R_1} \exp(-R_1 \rho_0 / \rho) + \frac{B}{R_2} \exp(-R_2 \rho_0 / \rho) + \frac{C}{\omega} (\rho / \rho_0)^\omega \quad (5.18)$$

В данной модели применяется следующий алгоритм расчета фронта детонационной волны. Головная часть фронта рассчитывается с использованием уравнений состояния (1.63)-(1.68). На этом участке фронта идет адиабатическое нагружение нереагирующего исходного ВВ. При достижении некоторого порогового уровня сжатия, определяемого условием

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_{CJ}} \geq \frac{1}{2} \quad (5.19)$$

происходит переход от уравнений (1.63)-(1.68) к уравнениям (1.63), (5.17), (5.18), т.е. при заданном значении удельного объема происходит мгновенное разложение ВВ. При этом на следующем временном шаге Δt в правую часть разностного уравнения энергии добавляется слагаемое ρQ/Δt, содержащее

удельную теплоту разложения ВВ  $Q$ . Далее эволюция продуктов детонации во фронте рассчитывается адиабатически при  $\gamma_s=\omega$ .

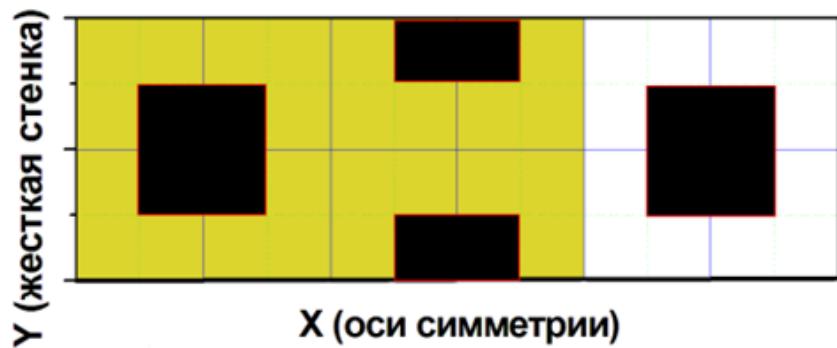
Расчетная область представляет собой прямоугольник, левая вертикальная и горизонтальная стенки которого считаются жесткими, а правая стенка – свободной. Размер расчетной области при разной степени дискретизации составлял:  $x \times y = 32 \times 423$  (13536 SPH-частиц с размером  $\Delta x = \Delta y = 1 \cdot 10^{-4}$  м каждая),  $x \times y = 64 \times 400$  (25600 SPH-частиц с  $\Delta x = \Delta y = 10.5 \cdot 10^{-4}$  м каждая) и  $x \times y = 128 \times 512$  (65536 SPH-частиц с  $\Delta x = \Delta y = 10.25 \cdot 10^{-4}$  м каждая). Дискретизация расчётной области на SPH-частицы варьировалась, чтобы исключить в расчётах эффекты численных погрешностей.

Примеси парафина задавались регулярной по координате  $x$  цепочкой квадратных включений, причём включения располагались в шахматном порядке (что достигалось сдвигом каждого чётного включения из линейной цепочки на  $\frac{1}{2}$  периода по координате  $y$ ). На рисунке 5.11 желтым цветом выделена ячейка мезоструктуры, периодическое повторение которой вдоль осей  $x$  и  $y$  определяет мезоструктуру ВВ. Расчетная область делилась на квадраты  $x \times y$  (их размеры приведены выше) и в каждый такой квадрат помещалось одно включение парафина размером  $20 \times 20$ ,  $18 \times 18$ ,  $14 \times 14$  и  $10 \times 10$  SPH-частиц (для  $x \times y = 32 \times 423$ ),  $40 \times 40$ ,  $36 \times 36$ ,  $28 \times 28$  и  $20 \times 20$  SPH-частиц (для  $x \times y = 64 \times 400$ ),  $80 \times 80$ ,  $72 \times 72$ ,  $56 \times 56$  и  $40 \times 40$  SPH-частиц (для  $x \times y = 128 \times 512$ ).

Предполагалось, что инициирование детонации осуществляется мгновенным разложением слоя ВВ, примыкающего к жёсткой стенке ( $x=0$ ). Этот слой ВВ протяжённостью в 4 SPH-частицы (или  $0.1 \div 0.4$  мм) в момент времени  $t=0$  приобретал параметры изохорического разложения и являлся детонатором для остального ВВ расчётной области. Детонационная волна распространялась от жёсткой стенки вправо. Была проведена серия расчетов детонации смеси тэна с добавками включений парафина (при различных весовых долях ВВ в смеси ВВ/парафин) и для различного характера расположения включений парафина. В [38] приведены результаты

экспериментов для смеси ВВ/парафин при массовых долях ВВ в 75; 80; 90; 95. Эти соотношения и были выбраны для моделирования.

На рисунке 5.12 можно видеть расчетное распространение детонационной волны от жесткой стенки по составу Е-25 (тэн/парафин 75/25).



**Рисунок 5.11 – Ячейка тэн/парафин (жёлтый/чёрный цвета), образующая мезоструктуру взрывчатого вещества с включениями**

Приведенные на рисунке 5.12 кадры отображают динамику распространения детонационной волны, взаимодействие компонент ВВ и дифракцию детонационной волны на включениях.

На рисунке 5.12а показана исходная мезоструктура ВВ, флегматизированного парафином.

Рисунок 5.12б отвечает моменту выхода детонационной волны из центральной горизонтальной перегородки ВВ. Фронт детонационной волны плоский. Видна разгрузка детонационной волны в парафин. В парафине ударная волна сильно искривлена вследствие разницы скоростей распространения волн в компонентах.

На рисунке 5.12в показано начало развития дифракции детонационной волны при огибании угловой части включения. Видно продвижение фронта по вертикальной линии контактной поверхности компонент. Внутри компонент наблюдается сильное повышение давления.

На рисунке 5.12г показан момент столкновения встречных дифрагирующих детонационных волн.

Рисунок 5.12д иллюстрирует выход детонационной волны на вертикальную контактную поверхность тэн-парафин.

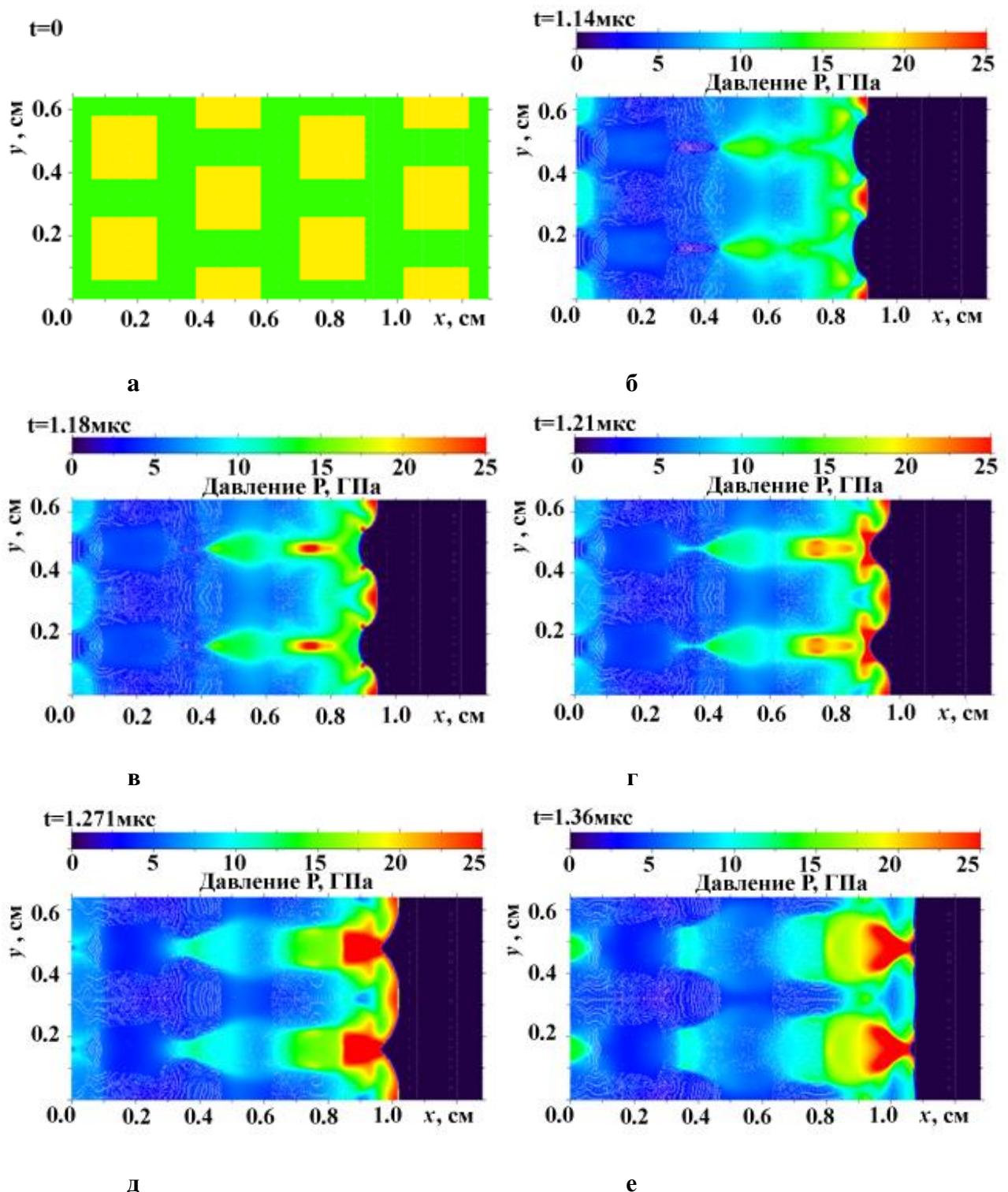
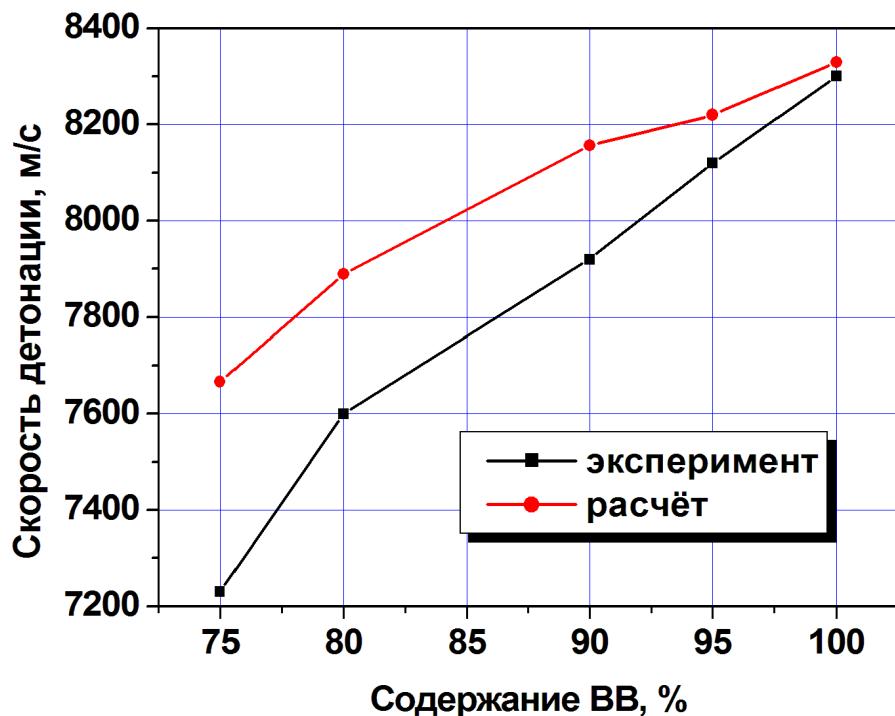


Рисунок 5.12 – Мезоструктура взрывчатого вещества  $E=25$  (а) и поле давления для моментов времени  $t=1.14\text{ мкс}$  (б),  $1.18\text{ мкс}$  (в),  $1.21\text{ мкс}$  (г),  $1.27\text{ мкс}$  (д),  $1.36\text{ мкс}$  (е)

Видно также продвижение ударной волны в парафин. На рисунке 5.12e показано, как сплошной фронт детонационной волны снова распался на отдельные волны, двигающиеся по горизонтальным перегородкам, разделяющим включения парафина. После выхода детонационной волны из перегородки повторяется описанный выше цикл.

Расчетная скорость детонационной волны определялась по положениям её фронта в два различных момента времени. На рисунке 5.13 показаны результаты расчёта скорости детонации для массовых долей ВВ/парафин 75/25; 80/20; 90/10; 95/5 (при различной мезоструктуре смеси) и сравнение этих расчётов с экспериментальными данными [38], [45].

При моделировании было установлено, что детонационная волна распространяется по мезоструктурам различных вариантов (при равном содержании парафина) с одинаковой скоростью независимо от степени дискретизации расчетной области (максимальное расхождение результатов при изменении дискретизации составило 130 м/с).



**Рисунок 5.13 – Рассчитанные и экспериментальные скорости детонации тэна с различным содержанием парафина**

Завышенные значения расчётной скорости детонации относительно экспериментальных данных объясняется тем, что в модели детонации не учитывается химическое взаимодействие компонент смеси. На рисунке 5.13 отражено влияние на скорость детонации только эффекта дифракции, связанного с мезоструктурой смеси взрывчатого вещества и парафина, и эффекта потерь энергии продуктов детонации на деформирование инертных включений. Исходя из результатов моделирования, можно предположить, что влияние химического взаимодействия парафина и разлагающегося ВВ имеет место.

### **5.3. Моделирование скользящей детонации в мелкодисперсной смеси взрывчатых и инертных веществ**

Исследования скользящей детонации обусловлены развитием и совершенствованием взрывных технологий уплотнения и упрочнения материалов, штамповки и сварки взрывом. На начальных этапах таких исследований решались задачи метания пластин слоем взрывчатого вещества. При построении теоретических моделей основное внимание уделялось описанию течения продуктов детонации и расчету распределения давления на поверхности метаемой пластины. Первыми примерами расчёта двумерного течения продуктов взрыва за скользящей детонационной волной в стационарной постановке на основе простых моделей можно считать [155] и [156]. Для описания расширения продуктов детонации использовались соотношения Прандтля-Майера. Были получены соотношения для угла разлёта и кривизны границы расширяющихся продуктов детонации. В такой же постановке задача о течении ПД при скользящей детонации решена аналитически в [148]. Для построения численных решений применялся метод характеристик [157].

Одно из важных направлений современного развития взрывных технологий связано с использованием новых типов низкоплотных ВВ,

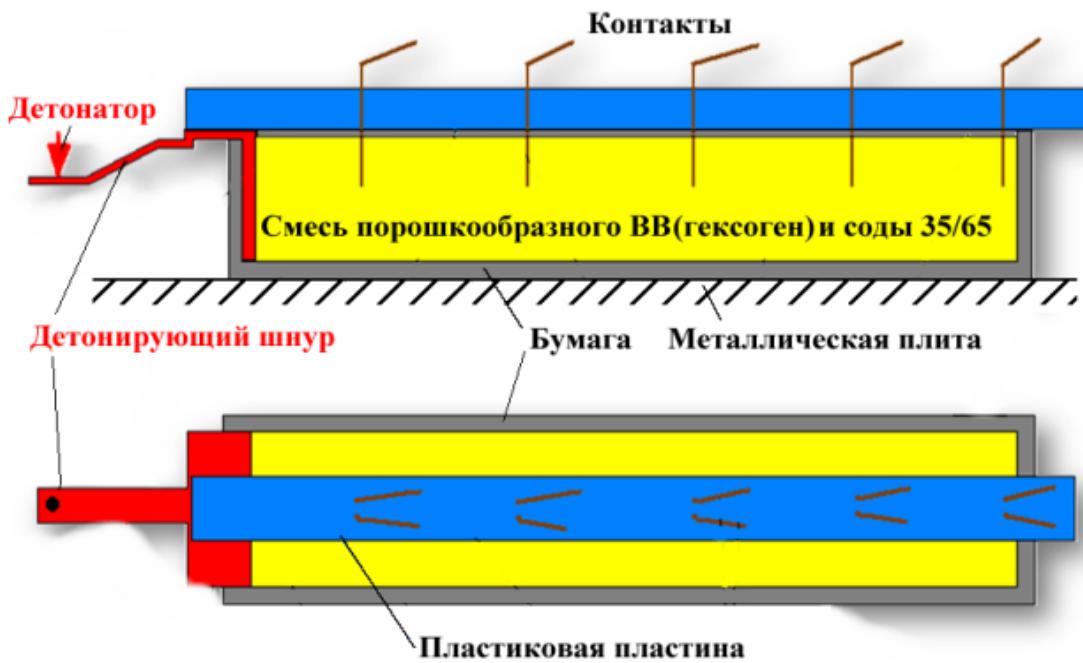
листовых [158] или насыпных [159]. За счет вариации соотношения долей инертного материала и ВВ, а также дисперсности гранул и толщины слоя, в широких пределах контролируется скорость детонационной волны.

Как уже отмечалось выше, для численного моделирования детонации гетерогенных ВВ разработаны многоскоростные (множижидкостные) модели [40-41]. Для описания разложения реагирующей компоненты в этих моделях необходимо задание глобального закона химической реакции горения дисперсной частицы. В отличие от континуальных моделей для гетерогенных реагирующих течений при мезомеханическом описании достаточно знать макрокинетическое уравнение горения для индивидуального ВВ нормальной плотности. При этом взрывное разложение ВВ происходит локально в каждой SPH-частице в соответствии с внутренними распределениями термодинамических параметров и массовых долей реагента и продуктов реакции. Важным преимуществом такого подхода является, например, возможность описания механизмов образования горячих пятен и установление их влияния на распространение детонационных волн. Моделирование гетерогенных ВВ на мезомасштабном уровне осуществлено в [160,64].

В работе [161] постановка задачи по моделированию скользящей детонации формулируется для условий, близких к экспериментам, выполненных в РФЯЦ ВНИИЭФ и ИСМАН [159]. В экспериментах измерялась скорость детонационной волны в слоях порошкообразной смеси гексоген/сода при массовой долях 35/65 и плотности смеси около  $0.93 \text{ г}/\text{см}^3$  для различных значений толщины слоя. Схема эксперимента показана на рисунке 5.14. Приготовленная смесь размещалась в картонной коробке на толстой металлической плите.

После подрыва детонатора на некотором расстоянии от точки подрыва формировалась детонационная волна и в процессе её перемещения по смеси замыкались электрические контакты.

По известному расстоянию между контактами и измеренным моментам времени замыкания определялась скорость детонационной волны.



**Рисунок 5.14 – Схема эксперимента [159] по измерению скорости детонационной волны контактным способом**

В отличие от условий эксперимента в диссертационной работе представлено численное моделирование для смеси гексогена (RDX) и соли (хлорида натрия) для тех же самых массовых долей компонентов и средней плотности среды. При этом решалась плоская двумерная задача о движении детонационной волны в смеси гранул ВВ и гранул NaCl. При численном моделировании инициирование детонации осуществляется коротким ударом по левой границе ВВ пластииной из алюминия (или вольфрама) со скоростью 2500 м/с. Для моделирования задачи использовались уравнения (5.1)-(5.12).

В таблице 5.5 даны константы уравнения JWL для взрывчатого вещества C-4, содержащего 91% гексогена и 9% добавки. В расчетах эти константы для C-4 использовались вместо констант чистого RDX. Макрокинетическое уравнение (5.12) для массовой доли продуктов детонации  $\lambda$  использовалось с константами для гексогена  $I=40 \text{ мкс}^{-1}$ ,  $Z=1.4$ ,  $J=200 \text{ мкс}^{-1} \text{ Мбар}^{-Z}$ .

Уравнение состояния для инертных включений принимается в форме Ми-Грюнайзена (1.63).

Таблица 5.5 – Константы УРС JWL для С-4 (91% RDX и 9% добавки) [143]

Параметр	ПД, индекс ( $g$ )	Непрореагировавшее ВВ, индекс ( $s$ )
$\rho_{s0}$ , кг/м <sup>3</sup>	-	1601
$C$ , МПа/°К	1.0	2.505
$Q$ , ГПа	10.2	-
$A$ , ГПа	609.77	77810
$B$ , ГПа	12.95	-5.031
$R_1$ ,	4.5	11.3
$R_2$ ,	1.4	1.13
$\omega$	0.38	0.8938

Для инертных включений опорными кривыми являются ударные адиабаты при плотности выше начальной и упругие кривые при плотности ниже начальной (1.64)-(1.68). Значения констант уравнения состояния в форме Ми-Грюнайзена для NaCl приведены в таблице 5.6. Для гексогена принимались значения  $C_a = 2870 \text{ м/с}$  и  $S_a = 1.61$  согласно [162].

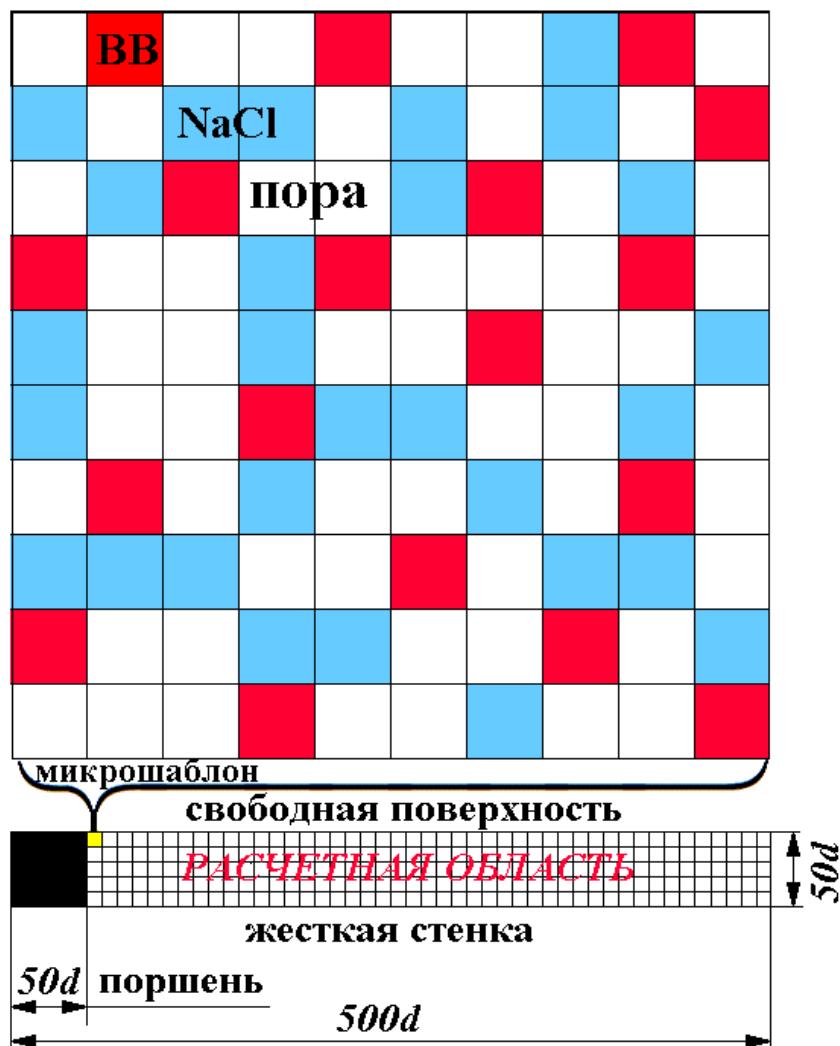
Таблица 5.6 – Константы равнения состояния Ми-Грюнайзена для добавки (NaCl) [162].

Параметр	Величина
$\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	2165
$K$ , ГПа	26.4
$C_a$ , м/с	3315
$S_a$	1.456

**Постановка задачи о скользящей детонации в насыпной смеси ВВ и инертной добавки.** При численном моделировании процесса детонации смеси гексоген/NaCl выделяется расчетная область, в которой располагаются SPH-

частицы, содержащие гексоген или NaCl. Верхняя граница области полагается свободной, нижняя граница является жесткой стенкой.

Расчетная область представляется в виде периодического повторения квадратной подобласти, называемой шаблоном (рисунок 5.15). Шаблон в свою очередь разбивается на пространственные ячейки, каждая из которых заполняется (полностью или частично) SPH-частицами. При частичном заполнении ячеек поры в смеси формируются естественным образом как пустые подобласти, в которых SPH-частицы отсутствуют.



**Рисунок 5.15 – Расчетная область ( $t=0$ ) при использовании шаблона, задающего мезоструктуру смеси из 18 SPH-частиц гексогена и 28 SPH-частиц NaCl ( $d$  – размер ячейки шаблона)**

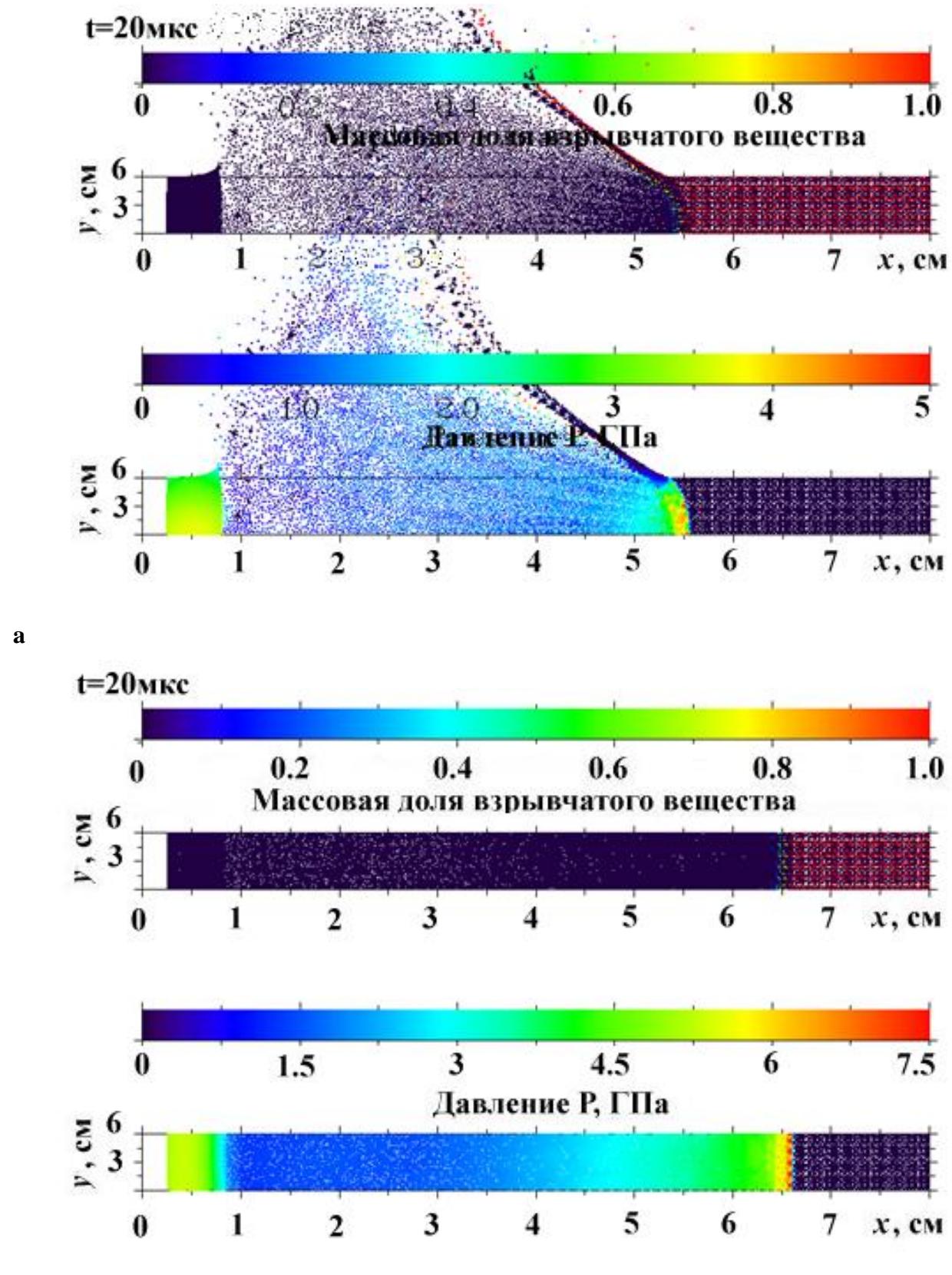
Форму и количество пор, а также форму и количество гранул компонент необходимо задавать на этапе подготовки шаблона, исходя из представлений о мезоструктуре смеси. Алгоритм заполнения расчетной области SPH-частицами в описанном подходе сводится к периодическому повторению шаблона вдоль каждой из координат.

Шаблон представляет собой подобласть пространства из  $10 \times 10$  квадратных ячеек (рисунок 5.15), в каждой из которых размещается одна SPH-частица, соответствующая ВВ или NaCl (либо ячейка остаётся пустой и соответствует вакууму). Геометрические размеры SPH-частицы, содержащей ВВ или NaCl, равны геометрическим размерам ячейки. Расчетная область содержит, таким образом,  $45 \times 5 = 225$  шаблонов. Все SPH-частицы (как содержащие ВВ, так и содержащие NaCl) имеют одинаковые размеры.

При начале расчета пластина-ударник имеет заданную скорость 2500м/с. Через некоторое время  $t^*$  после удара (обычно в расчете  $t^*$  принималось от 0.5 до 1мкс) всем SPH-частицам пластины-ударника приписывается скорость, равная нулю. Таким образом, металлический поршень инициирует детонацию и останавливается в момент  $t^*$ . На рисунке 5.15 толщина пластины-ударника равняется  $50d$ . Детонационная волна распространяется вправо.

Из рисунка 5.15 можно видеть, что практически все SPH-частицы инертной примеси взаимодействуют с SPH-частицами продуктов детонации, то есть реализуется случай, описанный в главе 1, когда одна из частиц расширяется, сжимая вещество другой. Моделировать смесь насыпной плотности, представленную на рисунке 5.15, не представляется возможным с помощью стандартного метода SPH или конечно-разностным способом.

**Результаты моделирования скользящей детонации.** Была проведена серия расчетов скорости детонации в слоях тех же толщин  $H$ , что использовались в экспериментах [159]. На рисунке 5.16 показано распространение детонационной волны в смеси ВВ (гексоген) с инертной добавкой (NaCl) толщиной  $H=6\text{мм}$ .



б

**Рисунок 5.16 – Скользящая детонационная волна в смеси взрывчатого вещества (гексоген) с инертной добавкой (NaCl) при начальной плотности смеси  $\rho_0=0.93\text{ г}/\text{см}^3$  в случае свободной верхней границы (а) и нормальная детонационная волна в случае жесткой стенки сверху (б) на момент времени  $t=20\text{ мкс}$**

Для объяснения причины снижения скорости детонации в слоях с толщиной, близкой к критической, на рисунке 5.16 показаны два расчёта, различающиеся только отсутствием или наличием верхней жесткой стенки (рисунок 5.16а и 5.16б соответственно).

Ширина зоны горения рассчитывается с использованием макрокинетического уравнения (5.12), она составляет  $\approx 2\text{мм}$  и сопоставима по величине с толщиной детонирующего слоя смеси.

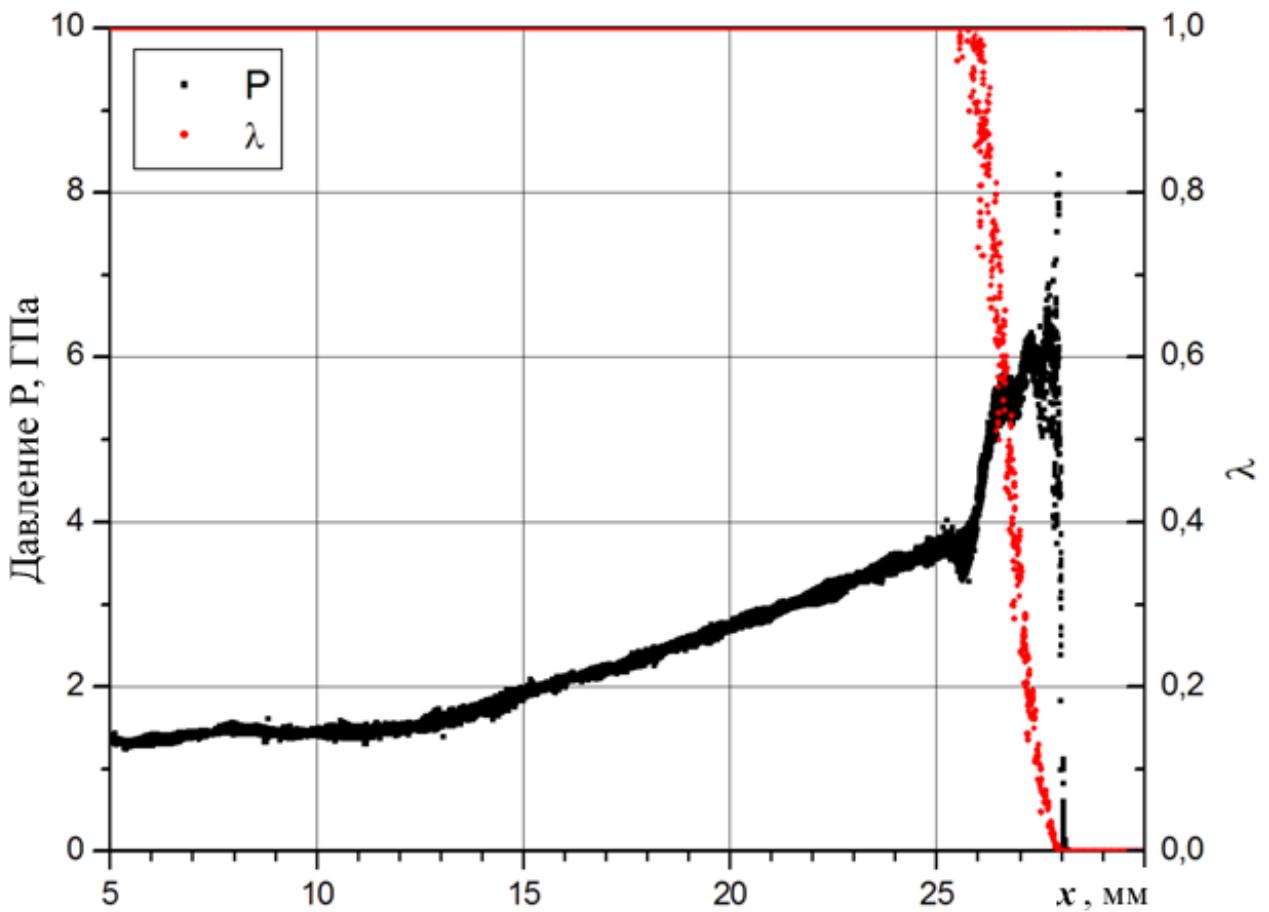
При боковом истечении ПД боковая волна разрежения проникает в зону реакции и величина давления в зоне реакции падает. Второй член в правой части (5.12) зависит от давления и приводит к меньшей скорости горения ВВ и, соответственно, к меньшей скорости детонации по сравнению с детонацией слоя, который ограничен сверху жесткой стенкой, препятствующей боковому истечению ПД. Можно видеть, что в смеси с  $H=6\text{мм}$  скорость скользящей детонации ниже, чем скорость нормальной детонации.

Модель (5.4)-(5.12), основанная на уравнении состояния JWL и макрокинетическом уравнении горения ВВ, позволяет находить критические толщины ВВ непосредственно из вычислительного эксперимента.

Структуру течения при детонации смеси ВВ и инертного материала можно проиллюстрировать следующим обобщением из вычислительных экспериментов. Ударная волна компактирует гранулированную смесь в монолитную среду и затем сжимает каждую из компонент среды до некоторого нового значения плотности. В смеси из инертных частиц и частиц ВВ процесс компактирования и последующего сжатия происходит в узкой зоне протяженностью  $\sim 0.3\text{мм}$  (рисунок 5.17). Адиабатический разогрев при сжатии смеси запускает химическую реакцию горения ВВ, которое описывается уравнением (5.12) и первый член в правой части уравнения ответственен за старт горения. Протяженность всей зоны горения для сжатой смеси составляет  $\sim 2\text{мм}$ , как видно по изменению параметра  $\lambda$ .

На рисунке 5.18 показана  $P$ - $V$ -диаграмма описанного выше процесса сжатия и детонации смеси.

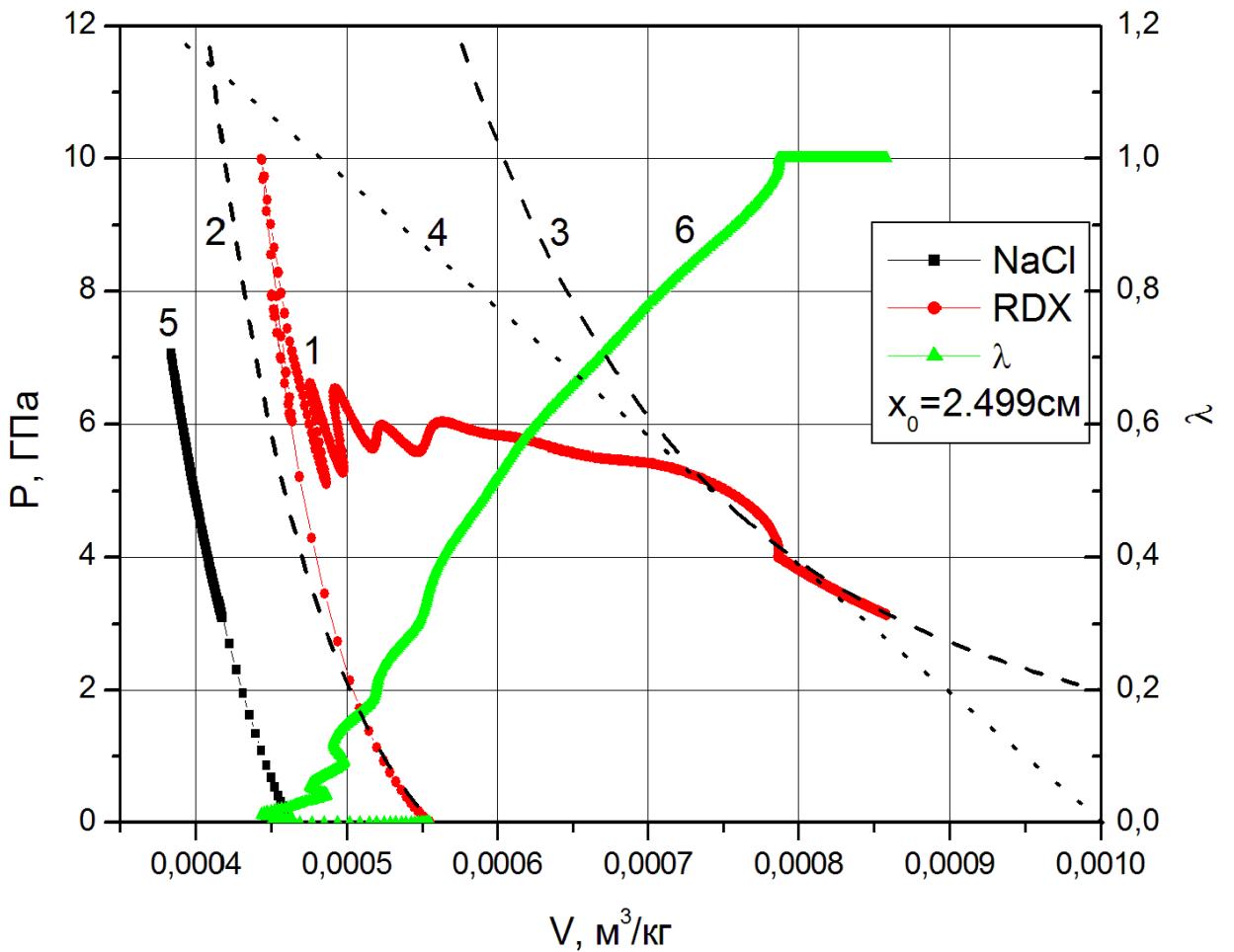
Расчёт  $P$ - $V$ -диаграммы производился для соседних частиц RDX и NaCl размером 60мкм каждая, расположенных на расстоянии  $x_0=2.499\text{см}$  от тыльной поверхности ударника. На этом расстоянии скорость детонационной волны принимала постоянное значение. Слой смеси толщиной 3мм ограничивался верхней и нижней жесткими стенками. Частица RDX сжимается без горения до давления  $P=10\text{GPa}$ .



**Рисунок 5.17 – Структура нормальной детонационной волны в смеси взрывчатого вещества (гексоген) с инертной добавкой (NaCl) при начальной плотности смеси  $\rho_0=0.93\text{г}/\text{см}^3$ . Размер частиц ВВ и NaCl составляет 60 мкм**

Воспламенение взрывчатого вещества происходит вблизи точки пересечения адиабаты непрореагированного ВВ (кривая 2) и линии Релея (прямая 4), то есть вблизи точки Неймана. После воспламенения взрывчатого вещества наблюдаются колебания давления в SPH-частице, вызванные переотражением ударных волн от поверхностей раздела вследствие ударного компактирования пористой смеси в сплошную смесь. Горение частицы RDX

происходит с понижением давления и завершается в точке Чепмена-Жуге на изэнтропе. Касательная (линия 4) из точки  $\rho_0=930\text{кг}/\text{м}^3$  к изэнтропе ПД есть линия Релея для смеси RDX/NaCl.

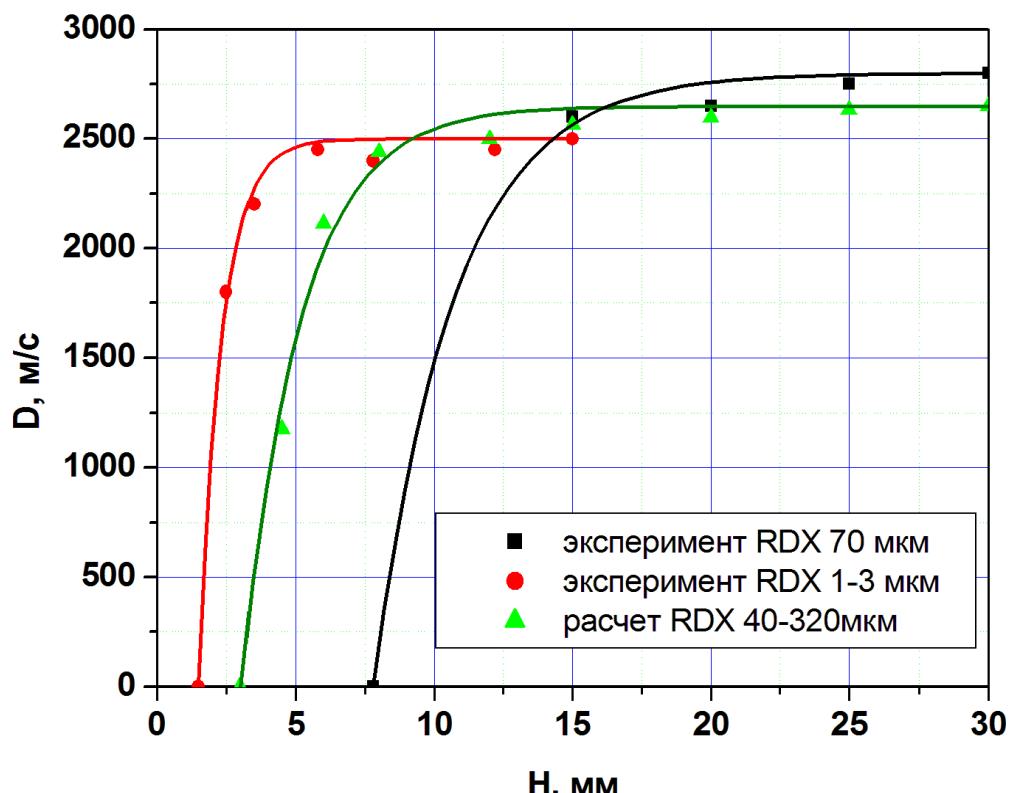


**Рисунок 5.18 – Структура нормальной детонационной волны в смеси ВВ (гексоген) с инертной добавкой (NaCl) при начальной плотности смеси  $\rho_0=930\text{кг}/\text{м}^3$  ( $V_0=0.00108\text{м}^3/\text{кг}$ ); расчет методом SPH (-•-) эволюции состояния ВВ для одной SPH-частицы в процессе нагружения ВВ, его горения и расширения ПД; ударные адиабаты непрореагировавшего ВВ (кривая 2), продуктов детонации (кривая 3), линия Релея (прямая 4), расчет методом SPH (-■-) эволюции состояния инертной добавки для одной SPH-частицы в процессе нагружения, массосодержание продуктов детонации в SPH-частице**

Несмотря на то, что кривая давления при горении взрывчатого вещества (кривая 1) отклоняется от линии Релея, процесс образования продуктов взрыва происходит без значительных колебаний (кривая 6) и завершается в точке

касания линии Релея с изоэнтропой разгрузки продуктов детонации (линия 3). Следовательно, показанный на рисунке 5.18 процесс детонации соответствует теории Зельдовича-Неймана Дёринга.

**Сопоставление результатов численного моделирования с экспериментальными данными.** В работе [159] экспериментально были измерены скорости детонации в смеси ВВ (гексоген) и соды для различных толщин слоя смеси и различных размерах гранул ВВ, входящих в смесь. В эксперименте использовались порошки гексогена с размером частиц  $1\div 3$  мкм или с размером частиц  $\approx 70$  мкм. Первый случай достаточно сложен для численного моделирования на уровне мезомасштаба, так как требует чрезмерных вычислительных затрат. В показанных выше расчётах минимальный размер SPH-частицы при моделировании полагался 40 мкм. Результаты численного моделирования оказались близки к данным эксперимента (рисунок 5.19).



**Рисунок 5.19 – Скорость детонации в смеси ВВ (гексоген) и инертной добавки (NaCl) в зависимости от толщины слоя смеси  $H$ ; ● – расчет с использованием при размере частиц ВВ  $40\div 320$  мкм, ■ – эксперимент (смесь гексоген/сода при размерах частиц ВВ  $1\div 3$  мкм).**

Расхождение расчётных и экспериментальных результатов составило  $\pm 150\text{м/с}$ , или примерно 5% от установившегося значения скорости детонации. При этом достаточно точно определены критическая толщина слоя смеси ( $\approx 2\text{мм}$ ) и ход изменения скорости детонации в зависимости от роста толщины слоя  $H$ .

Расчеты детонации смеси ВВ с инертным материалом проводились с использованием единого шаблона для описания мезоструктуры смеси (рисунок 5.15), в различных расчётах изменялись только абсолютные размеры шаблона. Таким образом, каждый из слоёв смеси толщиной  $H$  содержал одинаковое число частиц  $\approx 13000$  независимо от величины  $H$  и с увеличением  $H$  изменялись исходные размеры частиц.

**Выводы к главе 5.** Проведено численное моделирование мезоструктуры течения в детонационной волне, распространяющейся в пористом взрывчатом веществе PETN (тэн). Проведен анализ эволюции структуры течения при распространении детонационной волны по пористой среде в зависимости от размера пор при одинаковой средней плотности. При достаточно большом размере пор распространение детонационной волны определяется ее дифракцией на перегородках пористой структуры. Установлено, что структура течения в детонационной волне существенно зависит от масштаба пор. При сопоставимых размерах пор и зоны разложения ВВ наблюдается инициирование детонации в горячих пятнах, образующихся на поверхности поры при ударе кумулятивной струи. Получено хорошее согласование данных по скорости детонационной волны в пористом PETN (тэн), полученных в двумерных расчетах, с данными экспериментов и расчетов по модели ЗНД.

Установлено, что сжимаемость парафина не является единственным фактором, ответственным за уменьшение скорости детонации в парафиносодержащих взрывчатых веществах. Учёта сжимаемости недостаточно для согласования расчётных и экспериментальных данных при высоком содержании добавки парафина. Возможно, в зоне реакции происходит

химическое взаимодействие промежуточных продуктов разложения взрывчатого вещества и продуктов разложения парафина.

Выявлены эффекты дифракции детонационной волны на инертных включениях и получены зависимости скорости детонации от количества инертной добавки в составе гетерогенного ВВ.

Проведено моделирование скользящей детонации, распространяющейся в смеси насыпной плотности из порошкообразного взрывчатого вещества с инертной добавкой. Установлено влияние толщины насыпного слоя ВВ и примеси на скорость детонации смеси. Получено качественное и количественное согласие с экспериментом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрено применение решения задач распада разрывов (гидродинамического и температурного) к среде из «гладких частиц» в численном методе SPH, для описания взаимодействия SPH-частиц. Впервые были получены новые уравнения численного метода SPH, основанные на решении задач распада разрывов. Показано, что разработанный метод обладает более высокой точностью в окрестностях контактных границ, чем стандартный метод SPH, использующий искусственную вязкость. Разработанный метод обеспечивает монотонность решения в окрестности контактных границ и показал свою эффективность при мезомеханическом моделировании ударно-волновых процессов в гетерогенных средах с большим числом контактных разрывов плотности. Рассчитанные интегральные характеристики отклика среды на ударное воздействие находятся в хорошем соответствии с результатами экспериментов. При этом получены следующие результаты:

1. При решении тестовых задач проведено моделирование волн разрушения в стеклянных пластинах и обнаружены двухволновые и трёхволновые конфигурации волн разрушения.

2. Проведено исследование влияния масштаба мезоструктуры пористого алюминия в диапазоне изменения размера пор 40нм-400мкм на динамическую и тепловую релаксацию за фронтом ударной волны. Определены характерные значения размера пор, при которых динамическая и тепловая релаксация происходит независимо, а также диапазон размера пор, в котором оба типа релаксации реализуются одновременно. В последнем случае обнаружено взаимное влияние динамической и тепловой релаксации на установление равновесного состояния пористого материала, сжатого ударной волной. Предложена методика определения ударных адиабат пористого материала в переменных «скорость частиц – скорость ударной волны» по расчётным распределениям параметров течения. Построена ударная адиабата для пористого алюминия в килобарном диапазоне давлений, для которого

отсутствуют экспериментальные данные. Получены картины расщепления фронта ударной волны и формирования псевдоскачка при малой интенсивности сжатия материала. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают, что моделирование отклика пористой среды на ударное воздействие можно производить, зная характеристики сплошного материала при нормальных условиях, без привлечения эффективных характеристик пористого материала. При этом в расчётах воспроизводятся такие особенности интегрального отклика материала на ударное воздействие, как аномальный ход ударной адиабаты при высокой пористости или вид адиабаты в области неполного схлопывания пор при низких уровнях нагружения материала.

3. Проведено численное моделирование распространения ударных волн в металлических гетерогенных средах, а именно в твёрдом металле с жидкими включениями и в жидком металле с твёрдыми включениями. Установлено, что в материалах второго типа скоростная неравновесность является доминирующим фактором в формировании структуры ударной волны. Скольжение жидкой фазы относительно твердых включений существенно увеличивает ширину фронта, так что релаксация параметров среды к установившимся значениям завершается в ударном фронте.

4. Разработан SPH-код для моделирования распространения детонационных волн в гетерогенных взрывчатых веществах. Осуществлено усовершенствование математической модели с помощью алгоритмов расчета термодинамических свойств по уравнению состояния JWL и процесса разложения взрывчатых веществ по согласованному с ним макрокинетическому уравнению.

5. Проведено численное моделирование мезоструктуры течения в детонационной волне, распространяющейся в пористом взрывчатом веществе. Проведен анализ эволюции структуры течения при распространении детонационной волны по пористой среде в зависимости от размера пор при одинаковой средней плотности. Установлено, что при достаточно большом размере пор распространение детонационной волны определяется ее

дифракцией на перегородках пористой структуры. При сопоставимых размерах пор и зоны разложения ВВ наблюдается инициирование детонации в горячих пятнах, образующихся на поверхности поры при ударе кумулятивной струи. Достигнуто хорошее согласование данных по скорости детонационной волны в пористом взрывчатом веществе PETN (тэн), полученных в двумерных расчетах, с данными экспериментов и расчетов по модели Зельдовича-Неймана-Дёринга.

6. Решена задача по распространению скользящей детонации в смеси насыпной плотности из порошкообразного взрывчатого вещества с инертной добавкой. Получено качественное и количественное согласие результатов моделирования с данными экспериментов.

Результаты работы указывают на то, что методы мезомеханики в сочетании с разработанным методом SPH позволяют прогнозировать отклики гетерогенных сред на ударное воздействие, используя при этом индивидуальные свойства веществ, составляющих компоненты такой среды.

## СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- ВВ – взрывчатое вещество;
- ЗНД – Зельдович-Нейман-Дёринг;
- КП – контактная поверхность;
- ПД – продукты детонации;
- Нижний индекс  $s$ (для ВВ),  $g$ (для ПД);
- ЧЖ (CJ) – Чепмен-Жуге (Chapman-Jouguet);
- JWL – уравнение состояния Джонса-Уилкинса – Ли (Jones-Wilkins-Lee);
- SPH – Smooth Particle Hydrodynamics, или «метод сглаженных частиц»;
- $A_i, B_i, R_{1i}, R_{2i}, \omega_i$  – эмпирические константы в уравнении состояния JWЛ;
- $a$  – температуропроводность,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;
- $C_a$  – коэффициент ударной адиабаты  $U_s = C_a + S U_p$  ;
- $C_i$  – теплоемкость вещества,  $\text{Па}^0\text{К}$ ;
- $D$  – скорость детонации ВВ,  $\text{м}/\text{с}$ ;
- $E$  – внутренняя энергия,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;
- $E_C$  – энергия на нулевой изотерме,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;
- $E_H$  – энергия на адиабате Гюгонио,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;
- $h$  – дистанция сглаживания;
- $K$  – изотермический модуль объемного сжатия,  $\text{Па}$ ;
- $m$  – масса SPH-частицы;
- $P$  – давление,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;
- $P_C$  – давление на нулевой изотерме,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;
- $P_{CJ}$  – давление в точке Чепмена-Жуге,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;
- $P_H$  – давление на адиабате Гюгонио,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;
- $P_N$  – давление в точке Неймана,  $\text{Н}/\text{м}^2$  ;
- $Q$  – теплота разложения ВВ,  $\text{Н}/\text{м}^2$  ( $\text{Дж}/\text{м}^3$ );
- $S_a$  – коэффициент ударной адиабаты  $U_s = C_a + S U_p$  ;
- $v$  – удельный объем,  $\text{м}^3/\text{кг}$ ;
- $v_{CJ}$  – удельный объем в точке Чепмена-Жуге,  $\text{м}^3/\text{кг}$ ;

$v_N$  – удельный объем в точке Неймана, м<sup>3</sup>/кг;

$v_{s0}$  – начальный удельный объем ВВ, м<sup>3</sup>/кг;

$U$  – массовая скорость, м/с;

$U_{CJ}$  – массовая скорость в точке Чепмена-Жуге, м/с;

$U_{ij}^*$  – массовая скорость в плоскости касания SPH-частиц  $i$  и  $j$ ,

определенная из решения задачи Римана, м/с;

$U_N$  – массовая скорость в точке Неймана, м/с;

$W$  – сглаживающая функция, или ядро;

$W_{ij}'$  – производная сглаживающей функции для расчета взаимодействия SPH-частиц  $i$  и  $j$ , 1/м;

$\lambda$  – массовая доля продуктов детонации;

$\rho$  – текущая плотность материала SPH-частицы, кг/м<sup>3</sup>;

$\rho_0$  – начальная плотность материала, кг/м<sup>3</sup>;

$\rho_{00}$  – средняя плотность пористого материала, кг/м<sup>3</sup>;

$\sigma_{ij}^*$  – вектор напряжений в плоскости касания SPH-частиц  $i$  и  $j$ ,  
определенный из решения задачи Римана, Н/м<sup>2</sup>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно армированные композиционные материалы. – М.: Машиностроение, 1987. 2232с.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
3. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. 248с.
4. Григолюк Э.И., Фильшинский Л.А. Периодические кусочно-однородные упругие структуры. – М.: Наука, 1992. 287с.
5. Cristensen R.M. A Critical Evaluation for a Class of Micromechanics models. // J. Mech. Phys. Solids. 1990. V.38. No. 38. P. 379-404.
6. Brockenbrough J.R., Suresh S., Wienecke H.A. Deformation of Metal-Matrix Composites with Continuons Fibers: Geometrical Effects of Fiber Distribution and Shape. // Acta Met. 1991. V.39. No. 5. P. 735-752.
7. Herrmann W.A. Constitutive Equation for the Dynamic Compaction of Ductile Porous Materials // J.Appl. Phys. 1969. V.40. P. 2490.
8. Erhart P. et al. Atomistic mechanism of shock-induced void collapse in nanoporous metals // Phys. Rev. 2005. B 72, P. 052104.
9. Kanel G.I. et al. Computer simulation of the heterogeneous materials response to the impact // Int. J. Impact Eng. 1995. V.17. P. 455
10. Riedel W., Wicklein M., Thoma K. Shock properties of conventional and high strength concrete: Experimental and mesomechanical analysis // Int. J. Impact Eng. 2008. V. 35. P. 155-171.

11. Shuvalov V.V. Numerical Simulations of Shock Wave Propagation in Porous Targets // Int. J. Impact Eng. 2003. V.29. P. 639
12. Клинов Д.М., Котов Д.В., Суржиков С.Т. Многоуровневое описание процессов физической механики // В кн.: Актуальные проблемы механики. Механика жидкости, газа и плазмы.– М.: Наука. 2008. С.6-19.
13. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Физматлит, 2008. 656с.
14. Трунин Р.Ф., Крупников К.К., Симаков Г.В., Фунтиков А.И. Ударно-волновое сжатие пористых металлов // Ударные волны и экстремальные состояния вещества / Под ред. В.Е.Фортова, Л.В.Альтшулер, Р.Ф. Трунина, А.И.Фунтикова. – М.: Наука, 2000. С. 121.
15. Seitz M.W., Skews B.W. Effect of compressible foam properties on pressure amplification during shock wave impact // Shock Waves. 2006. V. 15. P. 177.
16. Zhao H. et al. Perforation of aluminium foam core sandwich panels under impact loading // Int. J. Impact Eng. 2007. V. 34. P. 1147.
17. Ioilev A.G. et al. Numerical model of ductile fracture kinetics: comparison of results of 2-D simulations to experimental data // Int. J. Impact Eng. 2003. V.29. P. 369.
18. Boade R.R. Compression of porous copper by shock waves // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. P. 5693
19. Boade R.R. Dynamic Compression of Porous Tungsten // J. Appl. Phys. 1969. V. 40. P. 3781
20. Radford D.D. et al. The use of metal foam projectiles to simulate shock loading on a structure // Int. J. Impact Eng. 2005. V.31. P.1152
21. Bonnan S. et al. Experimental characterization of quasi static and shock wave behavior of porous aluminum // J. Appl. Phys. 1998. V. 83. P. 5741

22. Паршиков А.Н., Медин С.А. Релаксационные процессы при ударно-волновом нагружении пористых материалов // Физика экстремальных состояний вещества-2007 / Под ред. Фортова В.Е. и др. – Черноголовка: ИПХФ РАН, 2007. 340 с.
23. Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию и адиабатическому расширению конденсированных веществ. / Под ред. Трунина Р.Ф. – Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2001. 446 с.
24. Кормер С.Б., Фунтиков А.И., Урлин В.Д., Колесникова А.Н. Динамическое сжатие пористых металлов с переменной теплоёмкостью при высоких температурах // Свойства конденсированных веществ при высоких давлениях и температурах / Под ред. Р.Ф.Трунина – Арзамас-16: ВНИИЭФ, 1992. 398 с.
25. Бушман А.В., Жерноклетов М.В., Ломоносов И.В., Сутулов Ю.Н. и др. Исследование плексигласа и тефлона в волнах повторного ударного сжатия и изэнтропической разгрузки. Уравнение состояния полимеров при высоких плотностях энергии / ДАН. 1993. т. 329. № 5. с. 581-584.
26. Thoma K., Riedel W., Hiermaier S. Mesomechanical Modeling of Concrete Shock Response Experiments and Linking to Macromechanics by Numerical Analysis // ECCM'99. Munich. Germany. 1999. URL: <http://hsrlab.gatech.edu/AUTODYN/papers/paper104.pdf>
27. Иванов М.Ф., Паршиков А.Н., Влияние микроструктуры композиционного материала на дисперсию ударных волн // Препринт ФИАН им. П.Н.Лебедева №68. Москва, 1992. 22с.
28. Иванов М.Ф., Паршиков А.Н., Моделирование микромеханики композиционного материала при импульсном нагружении // Препринт ФИАН им. П.Н.Лебедева №69. Москва, 1992. 31с.
29. Иванов М.Ф, Паршиков А.Н. Численное моделирование распространения ударных волн в композиционных материалах при импульсном нагружении

- // В сб. «Воздействие мощных потоков энергии на вещество» / Под ред. Фортова В.Е., Кузьменкова Е.А. – М.: Научное объединение ИВТАН (РАН), 1992. С.210.
30. Иванов М.Ф, Паршиков А.Н. Численное моделирование динамики ударных волн в композиционном материале // ТВТ. 1993. Т.31. №1. С.92-96.
  31. Kanel G.I, Ivanov M.F, Parshikov A.N. Computer simulation of the heterogeneous materials response to the impact loading // Int. J. Impact Engng. 1995. V.17. P. 455-464.
  32. Медин С.А., Паршиков А.Н. Применение соотношений распада разрывов в методе SPH // Сб. тр. Международной конференции «Разностные схемы и их приложения». Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша. С.85.
  33. Медин С.А., Орлов Ю.Н., Паршиков А.Н., Суслин В.М. Моделирование отклика первой стенки камеры и бланкета реактора ИТС на микровзрыв // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша № 41. Москва, 2004. С. 32.
  34. Basko M., Churazov M., Ivanov P., Koshkarev D. et al. Power plant conceptual design for fast ignition heavy-ion fusion // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. 2005. V.544. P.300-309.
  35. Orlov Yu.N., Basko M.M., Churazov M.D., Ivanov P.P. et al. Energy conversion in a reactor chamber for fast в ignition heavy ion fusion // Nucl. Fusion. 2005.V.45. P.531-536.
  36. Медин С.А., Паршиков А.Н., Орлов Ю.М, Лозицкий И.М., Термомеханические процессы в бланкете реактора ИТС при циклическом воздействии нейтронного флюенса // Атомная энергия. 2011. Т.110, вып.2. С.92-100.
  37. Медин С.А, Паршиков А.Н. Численное моделирование структуры ударных волн в гетерогенных двухкомпонентных средах // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Т.7. URL: <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-015.pdf>

38. Физика взрыва / Под ред. Л.П.Орленко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – Т.1 – 832с.
39. Massoni J., Saure R., Baudin G., Demol G. A mechanistic model for shock initiation of solid explosives // Phys. Fluids. V.11. No 3. 1999. P.710-736.
40. Bdzhil J. B., Menikoff R., Son S. F., A. K. Kapila et al. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: A critical examination of modeling issues // Phys. Fluids. V.11. No 2. 1999. P.378-402.
41. Gonthier K. A., Powers J.M. A High-Resolution Numerical Method for a Two-Phase Model of Deflagration-to-Detonation Transition // J. Comput. Phys. V. 163. 2000. P.376.
42. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред – М.: Наука, 1978.- 336с.
43. Menikoff R. Interfaces and Reactive Flow // Los Alamos National Laboratory Report . LA-UR-06-7005. 2006.
44. Najjar F.M., Howard W.M., Fried L. E. Grain-scale simulation of hot-spot initiation for shocked TATB // 16th ASP Topical Conference on Shock Compression of Condensed Matter. June 28 – Jule 3. Nashville, Tennessee. 2009.
45. Ударные волны и экстремальные состояния вещества. / Под ред. В.Е.Фортова и др. – М.: Наука, 2000. 425с.
46. Димитриенко Ю.И. Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечных элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. №2. 2002. С.95-108.
47. Димитриенко Ю.И. Численное моделирование ударно-волновых процессов в броневых композиционных материалах // Вопросы оборонной техники. №2. 2002.
48. Каракулов В.В., Смолин И. Ю. , Скрипняк В. А. Численная методика прогнозирования эффективных механических свойств стохастических

- композитов при ударно-волновом нагружении с учётом эволюции структуры // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2013. № 4. С. 70–77.
49. Минеев В.Н., Набоко И.М., Паршиков А.Н. и др. Горение и взрыв в замкнутой конической полости. Физический эксперимент // ТВТ. 1999. Т.37. №2. С.313-318.
  50. Минеев В.Н., Набоко И.М., Паршиков А.Н. и др. Горение и взрыв в замкнутой конической полости. Численный эксперимент // ТВТ. 1999. Т.37. №3. С.457-463.
  51. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics // Rep. Prog. Phys. 2005. V. 68. P.1703-1759 .
  52. Hu X.Y., Adams N.A. A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows // J. Comp. Phys. 2006. V.213. P.844-861.
  53. Герасимов А.В., Черепанов Р.О., Разработка алгоритма расчета условий на свободной и контактной границах для моделирования деформирования материалов методом SPH // Физическая мезомеханика. 2010. Т.13. № 2. С.69-75.
  54. Паршиков А.Н. Метод SPH на основе решения задачи Римана / Препр. ИВТАН № 2-414. Москва, 1998. 18с.
  55. Паршиков А.Н. Применение решения задачи Римана в методе частиц // ЖВМ и МФ. 1999. т.39. №7. С.1216-1225.
  56. Parshikov A.N., Medin S.A., Loukashenko I.I., Milekhin V.A., Improvements in SPH Method by means of Interparticle Contact Algorithm and Analysis of Perforation Tests at Moderate Projectile Velocities // Int. J. Impact Eng. V.24. 2000. P.779.
  57. Parshikov A.N., Medin S.A. Smoothed Particle Hydrodynamics Using Interparticle Interparticle Contact Algorithms // J. Comp. Phys. 2002. V.180. P. 358.

58. Паршиков А.Н., Медин С.А. Применение решений распада разрывов в методе SPH // Математическое моделирование: проблемы и результаты / Под ред. О.М.Белоцерковского и В.А.Гущина – М.: Наука, 2003. С.320-358.
59. Медин С.А., Паршиков А.Н., Развитие метода SPH и его применение в задачах гидродинамики конденсированных сред // ТВТ. 2010. Т.48. № 6. С. 973-980.
60. Fortov V.E., Lebedev E.F., Luzganov S.N., Kozlov A.V. et al. Railgun experiment and computer simulation of hyper-velocity impact of lexan projectile on aluminum target // Int. J. Impact Engng, 2006. V. 33. P.254.
61. Медин С.А., Паршиков А.Н. Моделирование распространения волн разрушения при ударном сжатии хрупких материалов (стекол) // Механика Твердого Тела. 2012. №2. С.102-113.
62. Паршиков А.Н., Медин С.А. Численное моделирование волн разрушения при ударном сжатии стекол // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4. Т.5. С.2417-2418.
63. Паршиков А.Н., Лозицкий И.М., Численное моделирование кумулятивного эффекта в микроканале взрывчатого вещества // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2011. Т.11. URL: [http://www.chemphys.edu.ru/media/files/2011-02-01-019\\_Parshikov\\_Lozitskii.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/media/files/2011-02-01-019_Parshikov_Lozitskii.pdf)
64. Медин С.А., Паршиков А.Н., Моделирование мезоструктуры течения при распространении детонации в гетерогенных ВВ // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т.9. URL: <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-008.pdf>.
65. Медин С.А, Паршиков А.Н. Использование уравнения состояния JWL и макроскопического уравнения разложения ВВ в методе SPH // Всероссийская школа-семинар «Аэрофизика и физическая механика

классических и квантовых систем»: Сборник научных трудов. – М.: ИПМех РАН. 2011. С.97-102.

66. Бом Д. Квантовая теория. – М.: ГИФМЛ. 1961. 728с. С.260.
67. Wingate C.A., Fisher H.N. Strength Modeling in SPHC / Los Alamos National Laboratory Report. LA-UR-93-3942. 1993.
68. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Mon.Not. R.astr. Soc. 1977. V.181, P.375-389.
69. Lucy L.R. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // The Astronomical Journal. 1977. V.82. No. 12. P. 1013-1024.
70. Gingold R.A., Monaghan J.J. Kernel Estimates as a Basis for General Particle Methods in Hydrodynamics // J. Comp. Phys. 1982. V.46. , P. 429.
71. Monaghan J.J. On the Problem of Penetration in Particle Methods // J. Comp. Phys. 1989. V.82. P.1-15.
72. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. – М.: Мир, 1990. 660с.
73. Глушак Б.Л., Куропатенко В.Ф., Новиков С.А., Исследование прочности материалов при динамических нагрузках – Новосибирск: Наука, 1992. 295с.
74. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К.И.Бабенко – М.: Наука, 1979. 295 с.
75. Petschek A.G., Libersky L.D. Cylindrical Smooted Particle Hydrodynamics // J. Comp. Phys. 1993, V.109, P.76-83.
76. Johnson G.R., Petersen E.H., Stryk R.A. Incorporation of an SPH option into the EPIC code for a Wide Range of High Velocity Impact Computations // Int. J. Impact Eng. 1993, V.14. P. 385.

77. Libersky L.D., Randles P.W., Carney T.C., Dickinson D.L. Recent Improvements in SPH Modeling of Hypervelocity Impact // Int. J. Impact Eng. 1997. V.7. P. 525.
78. Monaghan J.J. SPH and Riemann Solvers // J. Comp. Phys. 1997. V.136. P. 298.
79. Johnson G.R. Numerical algorithms and material models for high-velocity impact computations // Int. J. Impact Eng. 2011. V.38. P.456-472.
80. Monaghan J.J. Particle methods for hydrodynamics // Comput. Phys. Rep. 1985. V.3. No. 2. P.71.
81. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics and Its Diverse Applications // Annu. Rev. Fluid Mech. 2012. V.44. P. 323-346.
82. Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений гидродинамики // Мат. Сборник. 1959. Т. 47(89), №3, С.271-306.
83. Molteni D., Bilello C. Riemann solver in SPH // Mem.S.A.It. Suppl. 2003. V.1 No. 36. P.36-44.
84. Shu-ichiro Inutsuka, Reformulation of Smoothed Particle Hydrodynamics with Riemann Solver // J. Comp. Phys. 2002. V.179. P. 238-267.
85. Cha S.H., Whitworth A. P. Implementations and tests of Godunov-type particle hydrodynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2003. V.340 (1), P.73-90.
86. Рихтмайер Р., Мортон Л., Разностные методы решения краевых задач, – М.: Мир, 1972. 418с.
87. Cleary P.W., Monaghan J.J. Conduction Modeling Using Smoothed Particle Hydrodynamics // J. Comp. Phys. 1999. V.148, P. 227.
88. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964.
89. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семёнов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608с.

90. Уилкинс М.Л., Расчёт упруго-пластических течений.// Вычислительные методы в гидродинамике. / Под ред. Б.Олдера, С.Фернбаха, М.Ротенберга.– М.: Мир, 1967. С.212-263.
91. Соколовская В.Л., Зубов А.Д., Лебедев А.М. Модификация SPH-метода на основе решения задачи Римана // Восьмая международная научная конференция по физике высоких плотностей энергии. Сент. 5-9. Снежинск. 2005.
92. Zubov F.D., Lebedev A.M., Sokolovskaya V.L. SPH Modification Based on the Riemann Solver // AIP Conference Proceedings. 2006. Vol. 849, V. 1. P.89.
93. Ducowicz J.K. A General, Non-Iterative Riemann Solver for Godunov's Method // J. Comput. Phys.1985. V. 61. P. 119.
94. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: ГИТТЛ, 1947. 928с.
95. Monaghan J.J. SPH without a tensile instability // J. Comput. Phys. 200. V.159. P. 290.
96. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. 560с.
97. Григорян С.С. О некоторых работах по разрушению хрупких тел в динамических условиях // МТТ. 1977. №1. С.173-181.
98. Слепян Л.И. О моделях в теории волн хрупкого разрушения // МТТ. 1977. №1. С.181-186.
99. Канель Г.И., Разоренов С.В., Фортов В.Е., Абахезов М.М. Влияние волны разрушения на динамику импульса сжатия в стекле // 4-е Всесоюзное совещание по детонации – Черноголовка: ИФХ АН СССР, 1988. Т.2. С.104-110.
100. Kanel G.I., Rasorenov S.V., Fortov V.E. The failure waves and spallation in homogeneous brittle materials // Shock Compression of Condensed Matter. / Eds. Shmidt S.C. et al.– Amsterdam: Elsevier, 1992. P. 451-454.

101. Brar N.S., Bless S.J., Rosenberg Z. Impact-induced failure waves in glass bars and Plates // Appl. Phys. Lett. 1991. V.59. No.26. P.3396-3398.
102. Willmott G.R., Radford D.D. Taylor impact of glass rods // J. Appl. Phys. 2005. V.97. No. 9. P. 093522.
103. Кондауров В.И. Об особенностях волн разрушения в высокооднородных хрупких материалах // ПММ. 1998. Т.62. вып.4. С.707-714.
104. Chen Z., Feng R., Xin X., Shen L. A computational model for impact failure with shear-induced dilatancy // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2003. V.56. No. 14. P.1979-1997.
105. Partom Y. Modeling failure waves in glass // Int. J. Impact Engng. 1998. V.21. No.9. P. 791-799.
106. Johnson G.R., Holmquist T.J. Response of boron carbide subjected to large strain, high strain rates, and high pressures // J. Appl. Phys. 1999. V.85. No.12. P. 8060-8073.
107. Resnyansky A.D., Romensky E.I., Bourne N.K. Constitutive modeling of fracture waves // J. Appl. Phys. 2003. V.93. No.3. P.1537-1545.
108. Канель Г.И., Разоренов С.В., Фортов В.Е. Волны разрушения в ударно-сжатом стекле // Успехи механики. 2005. Т.3. №3. С.9-57.
109. Bless S.J. and Brar N.S. Failure waves and their effects on penetration mechanics in glass and ceramics / In Shock Wave Science and Technology Reference Library, V.2: Solids I (Shock Waves Handbook), Horie Y. (ed.) – Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. P.105-141.
110. Holmquist T.J. High strain rate properties and constitutive modeling of glass // 15<sup>th</sup> International Symposium on Ballistics – Jerusalem, Israel, 21-24 May, 1995.
111. Gasonas G.A. Implementation of the Johnson-Holmquist (JH-2) Constitutive Model Into DYNA3D // ARL-TR-2699, March 2002. 17 P.

112. Ю.В. Блажевич, В.Д. Иванов, И.Б. Петров, И.В. Петвиашвили, Моделирование высокоскоростного соударения методом гладких частиц // Математическое моделирование. 1999. Т.11. № 1. с. 88-100
113. Strength and shock waves / Ed. by S.A.Novikov. – Sarov: RFNC-VNIIEF, 1996. 573р.
114. Физика взрыва / под ред. Станюковича К.П. – Наука, Москва. 1975. 704с
115. Физические величины: справочник / Под ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. – М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232с.
116. Hohler V., Stilp A.J. Long-Rod Penetration Mechanics // High Velocity Impact Dynamics / Edited by Jonas A. Zukas – John Wiley & Sons, Inc., 1990. p. 321-404.
117. Ударные волны и явления высокоскоростной деформации металлов / Под ред. Мейерса М.А., Мурра Л.Е. – М.: Металлургия, 1984. 512с.
118. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. – М.: Издательство иностранной литературы, 1950. 426с.
119. Алалыкин Г.Б., Годунов С.К., Киреева И.Л., Плинер Л.А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. – М.: Наука, 1970. 112с.
120. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики – М.: Наука, 1976. 400 с.
121. Glaister P. An Approximate Linearised Riemann Solver for the Euler Equations for Real Gases // J. Comp. Phys. 1988. V.74. P.382-408.
122. Menikoff R., Plohr B.J. The Riemann problem for fluid flow of real materials // Reviews of Modern Physics. 1989. V.61. No.1. p. 75.
123. Мейдер Ч. Численное моделирование детонации. – М.: Мир, 1985. 384 с.
124. Walsh L.M. and Christian R.H. Equation of State of Metals from Shock Wave Measurements // Phys.Rev. 1955. V. 97. No. 6. P. 1544

125. Мак-Кuin Р. и др. Уравнение состояния твердых тел по результатам исследований ударных волн // В сб. «Высокоскоростные ударные явления» / Под ред. Кинслоу Р. – М.: Мир, 1973. 533 с.
126. Жилин А.А., Фёдоров А.В. Отражение волны от жёсткой стенки в смеси металла и твёрдых частиц // ФГВ. 2000. Т 36. № 4. С. 97-107.
127. Blanchard J.B. and Raffray A.R. Laser fusion chamber design. // Fusion Science and Technology. 2007. V. 52. P. 440-444.
128. Zaghloul M.R. and Raffray A.R. IFE liquid wall response to the prompt X-ray energy deposition: investigation of physical processes and assessment of ablated material // Fusion Science and Technology. 2005. VI. 47. P. 27-45.
129. Medin S.A., Basko M.M., Orlov Yu.N. and Suslin V.M. X-ray and ion debris impact on the first wetted wall of IFE reactor. // 33rd EPS Conference on Plasma Phys. – Rome, June 19 – 23. 2006. ECA. V.30I. O-2.012. P.1-4.
130. Basko M.M., DEIRA. A 1-D3-T hydrodynamic code for simulating ICF targets driven by fast ion beams. Version 4 // Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow. 2001. P.44.
131. Баско М.М., Медин С.А., Орлов Ю.Н., Суслин В.М. Сквозной расчет термоядерного горения и разлета плазмы в реакторе ИТС на тяжелых ионах. // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша №18. 2010. С.36.
132. Fried L.E., Tarver C., Molecular dynamics simulation of shocks in porous TATB crystals // AIP Conf. Proc. -- May 5. 1996. V. 370. P. 179-182.
133. Kapila A. K., Menikoff R., Bdzhil J. B., Son S. F. et al. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: Reduced equations // Phys. Fluids. 2001. V. 13. P.3002.
134. Tarver C. M. Detonation Reaction Zones in Condensed Explosives // AIP Conf. Proc. -- July 28. 2006. V. 845. P. 1026-1029.

135. Lubyatinsky S. N, Loboiko B. G. Density effect on detonation reaction zone length in solid explosives // AIP Conf. Proc. -- July 10, 1998. V. 429. P. 743-746.
136. Reed E.J., Fried L.E., Henshaw W.D., Tarver C.M. Analysis of simulation technique for steady shock waves in materials with analytical equations of state // Phys. Rev. 2006. E. V.74.
137. Urtiew P.A., Vandersall K.S., Tarver C.M., Carsia F. et al. Shock initiation of composition B and C-4 explosives; experiments and modeling // International Conference on Shock Waves in Condensed Matter – Sep. 3-8. Saint Petersburg. 2006.
138. Bernecker R.R., Price D. Studies in the transition from deflagration to detonation in granular explosives // Combustion and Flame. 1974. V. 22. P. 119-129.
139. Baer M.R. Modeling heterogeneous energetic materials at the mesoscale // Thermochimica Acta. 2002. V. 384. P. 351-367.
140. Wixom R.R., Tappan A.S., Long G.T. Mesoscale simulations of shock initiation in energetic materials characterized by three-dimensional nanotomography // AIP Conf. Proc. – December 28. 2009. V.1195. P 315-318.
141. Lu X., Hamate Y., Horie Y., Physics-based reactive burn model: grain size effects // AIP Conf. Proc. – December 12. 2007. V. 955. P. 397-400.
142. Kapila A.K., Schwendeman D.W., Bdil J. B., Henshaw W.D. A study of detonation diffraction in the ignition-and-growth model // Combust. Theory and Modeling. 2007. V. 11. P. 781.
143. Lee E.L., Tarver C.M., Phenomenological model of shock initiation in heterogeneous explosives // Phys. Fluids. 1980. V.23(12). P. 2362.
144. Grady D. E., Asay J.R. Calculation of Thermal Trapping in Shock Deformation of Aluminum. //J. Appl. Phys. 1982. V.53. P.7340-7354.

145. Дубнов А.В., Хотина Л.Д. О механизме канального эффекта при детонации конденсированных ВВ. // Физика горения и взрыва. 1966. №4. С.352.
146. Woodhead D.W. Advance detonation in a tubular charge of explosive // Nature. 1959. V.183. No. 4677. P.1756-1757.
147. Тарасов М. Д., Толшмяков А. И., Петушкин В. С., Судовцов В. А. и др. Кумулятивные струи в микроканалах взрывчатого вещества // Физика горения и взрыва. 1999. Т.35. №3. С.140-142.
148. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды – М.: Наука, 1971. 856с.
149. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. – М.: «Янус-К», 1996. 408с
150. Андреев К.К., Харитон Ю.Б. Некоторые соображения о механизме самораспространяющихся реакций // ДАН СССР, 1934. т.7. с.1
151. Куропатенко В.Ф. Модели механики сплошных сред – Челябинск: Челяб. Гос. Ун-т, 2007. 302с
152. Whitworth N. Mathematical and Numerical Modelling of Shock Initiation in Heterogeneous Solid Explosives – Cranfield University, 2008. 245 P.
153. Кузьмицкий И.В. О зависимости пространственно-временной структуры зоны химической реакции от начальной плотности взрывчатого вещества // Физика горения и взрыва. 2004. Т.40. №4, С.106
154. Lee J. Detonation mechanisms in a condensed-phase porous explosive – Universite de Sherbrooke, 1997. 104 P.
155. Taylor G.I. Blast impulse and fragment velocities from cases // Scientific Papers of G.I.Taylor. V.III. No. 40. Cambridge Univ.Press.1963. P.363-369.
156. Abarbanel S. The deflection of confining walls by explosive loads // Isr. Journal Technology. 1966. V.4. No. 1. P.77-81.

157. Hoskin N.E., Allan J.W.S. et all. The Motion of Plates and Cylinders Driven by Detonation Waves at Tangential Incidence // Proceedings of the IVth Symposium on Detonation – Oct. 12-15. USA. 1965. P. 14-26.
158. Голубев В.К., Медведкин В.А. О нагружении преград взрывом низкоплотного листового взрывчатого вещества // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т.41. №3. С.43-47.
159. Andreevskikh L.A., Deribas A.A., Drennov O.B., Mikhailov A.L. et al. Mixed Explosives for Explosive Welding of Thin Materials // X International Symposium on EPNM-2010 – Sep. 7-11, Bechichi, Montenegro. 2010.
160. Baer M.R. Computational modeling of heterogeneous reactive materials at the mesoscale // Shock Compression of Condensed Matter-1999 / Ed. by Furnish M.D., Chhabildas L.C., Hixson R.S. // AIP. 2000. P. 27-33
161. Медин С.А., Паршиков А.Н. Моделирование скользящей детонации в мелкодисперсной смеси взрывчатых и инертных веществ. // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Т.15. URL: <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-04-29-024.pdf>
162. Физика взрыва / Под ред. Л.П.Орленко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – Т.2. – 656 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Алгоритм расчёта хрупкого разрушения по модели JH-2

В Приложении представлен алгоритм для расчета разрушения хрупких материалов по модели Джонсона-Холмквиста (JH-2). Законченный алгоритм модели JH-2 в литературе, как правило, не приводится. Изложенный в Приложении алгоритм является безитерационным и представлен в виде последовательности пронумерованных шагов расчёта. Логика вычислений и обозначения переменных соответствуют приведенным в [106] авторами модели JH-2.

Перед началом расчета разрушения материала в каждой SPH-частице из решения уравнений гидродинамики (раздел 1.5) на  $n+1$  шаге интегрирования по времени определяются величины  $\dot{\varepsilon}_{xx}^{n+1}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{yy}^{n+1}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{xy}^{n+1}$ ,  $\rho^{n+1}$ ,  $\dot{e}_{xx}^{n+1}$ ,  $\dot{e}_{yy}^{n+1}$ ,  $\dot{e}_{xy}^{n+1}$ ,  $\omega^{n+1}$ , после чего расчёт собственно разрушения ведётся по представленному ниже алгоритму.

1. Вычисляются скорости изменения компонент девиатора упругих напряжений на текущем шаге, без учёта разрушения материала

$$\frac{dS_{xx}^e}{dt}^{n+1} = 2G\dot{e}_{xx}^{n+1}, \quad \frac{dS_{yy}^e}{dt}^{n+1} = 2G\dot{e}_{yy}^{n+1}, \quad \frac{dS_{xy}^e}{dt}^{n+1} = 2G\dot{e}_{xy}^{n+1} \quad (\text{П.1})$$

2. Вычисляются значения компонент девиатора упругих напряжений без учёта разрушения материала за время текущего шага  $\Delta t$  и без учёта поворота элемента среды за время текущего шага  $\hat{S}_{ij}^{e,n+1} = S_{ij}^n + \Delta t \dot{S}_{ij}^{e,n+1}$  (П.2)

3. Вычисляется угол поворота элемента среды за текущий шаг по времени  $\Delta\phi = \Delta t \omega^{n+1}$  (П.3)

4. Производится корректировка компонент девиатора упругих напряжений на поворот элемента среды

$$S_{xx}^{e,n+1} = \hat{S}_{xx}^{e,n+1} - \left( \hat{S}_{xx}^{e,n+1} - \hat{S}_{yy}^{e,n+1} \right) \sin^2 \Delta\phi - 2\hat{S}_{xy}^{e,n+1} \sin \Delta\phi \cos \Delta\phi \quad (\text{П.4})$$

$$S_{yy}^{e \ n+1} = \widehat{S}_{yy}^{e \ n+1} + (\widehat{S}_{xx}^{e \ n+1} - \widehat{S}_{yy}^{e \ n+1}) \sin^2 \Delta\phi + 2\widehat{S}_{xy}^{e \ n+1} \sin \Delta\phi \cos \Delta\phi \quad (\text{П.5})$$

$$S_{xy}^{e \ n+1} = \widehat{S}_{xy}^{e \ n+1} - (\widehat{S}_{xx}^{e \ n+1} - \widehat{S}_{yy}^{e \ n+1}) \sin \Delta\phi \cos \Delta\phi - 2\widehat{S}_{xy}^{e \ n+1} \sin^2 \Delta\phi \quad (\text{П.6})$$

5. Вычисляются интенсивность напряжений и нормализованная интенсивность напряжений. Обе величины вычисляются без учёта тех изменений компонент девиатора напряжений, которые произошли на текущем шаге  $\Delta t$  вследствие процесса разрушения среды

$$\sigma_e^{n+1} = \left[ \sqrt{3(S_{xx}^{e \ 2} + S_{yy}^{e \ 2} + S_{xx}^e S_{yy}^e + S_{xy}^{e \ 2})} \right]^{n+1} \text{ и } \sigma_e^* = \frac{\sigma_e^{n+1}}{\sigma_{HEL}} \quad (\text{П.7})$$

6. Вычисляются интенсивность скорости деформаций и нормализованная интенсивность скорости деформаций

$$\dot{\varepsilon}^{n+1} = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx}^2 + \dot{\varepsilon}_{yy}^2 - \dot{\varepsilon}_{yy} \dot{\varepsilon}_{xx} + 3\dot{\varepsilon}_{xy}^2)} \right]^{n+1} \text{ и } \dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\varepsilon}^{n+1}}{\dot{\varepsilon}_0} \quad (\text{П.8})$$

7. Вычисляются компоненты тензора скорости пластических деформаций, то есть неупругих деформаций, обусловленных процессами разрушения

$$\dot{\varepsilon}_{ij \ p}^{n+1} = \frac{1}{2G} \left( \dot{S}_{ij}^{e \ n+1} - \dot{S}_{ij}^n \right) \quad (\text{П.9})$$

8. Вычисляется интенсивность скорости пластических деформаций

$$\dot{\varepsilon}_p^{n+1} = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx \ p}^2 + \dot{\varepsilon}_{yy \ p}^2 - \dot{\varepsilon}_{yy \ p} \dot{\varepsilon}_{xx \ p} + 3\dot{\varepsilon}_{xy \ p}^2)} \right]^{n+1} \quad (\text{П.10})$$

9. Вычисляются величины  $P^{*n} = \frac{P^n}{P_{HEL}}$  и  $\varepsilon_p^{f \ n+1} = D_1(P^{*n} + T^*)^{D_2}$

10. Вычисляется величина параметра разрушения  $D^{n+1} = D^n + \Delta t \frac{\dot{\varepsilon}_p^{n+1}}{\dot{\varepsilon}_p^{f \ n+1}}$

11. Вычисляется  $\sigma_i^* = A(P^{*n} + T^*)^N (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^{*n+1})$

12. Вычисляется  $\sigma_f^* = \begin{cases} B(P^{*n})^M (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^{*n+1}), & \text{если } \sigma_f^* > \sigma_{f \ max}^* \\ \sigma_{f \ max}^*, & \text{если } \sigma_f^* \leq \sigma_{f \ max}^* \end{cases}$

13. Вычисляется интенсивность напряжений с учётом того, что девиатор напряжений изменился вследствие процессов разрушения.

$$\sigma^{*n+1} = \sigma_i^* - D^{n+1} (\sigma_i^* - \sigma_f^*)^{n+1} \quad (\text{П.15})$$

14. Если  $D^{n+1} > 0$  (это означает, что начался и продолжается процесс разрушения), то производится корректировка ранее вычисленных

компонент девиатора упругих напряжений на поверхность разрушения, если

$$\sigma_e^* > \sigma^* : S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^{e\ n+1} \left[ \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_e^*} \right) \right]^{n+1} \quad (\text{П.16})$$

затем вычисляется скорость изменения компонент девиатора напряжений в процессе разрушения материала

$$15. \dot{S}_{ij}^{n+1} = \frac{S_{ij}^{n+1} - S_{ij}^n}{\Delta t} \quad (\text{П.17})$$

16. Из двух интенсивностей напряжений выбирается истинная, в зависимости от того, происходило разрушение материала или нет

$$\sigma^{n+1} = \begin{cases} \sigma_e & \text{если } D = 0 \\ \sigma^* \sigma_{HEL} & \text{если } D > 0 \end{cases} \quad (\text{П.18})$$

$$17. \text{Вычисляются } U_2 = \frac{\sigma^{n+1^2}}{6G} = \frac{1}{6G} [\sigma_i^{n+1} - D^{n+1}(\sigma_i^{n+1} - \sigma_f^{n+1})]^2 \quad (\text{П.19})$$

$$18. \quad U_1 = \frac{1}{6G} [\sigma_i^{n+1} - D^n(\sigma_i^{n+1} - \sigma_f^{n+1})]^2 \quad (\text{П.20})$$

19. Вычисляется изменение упругой энергии в разрушающемся материале

$$\Delta U = U_1 - U_2 \quad (\text{П.21})$$

$$20. \mu = \frac{\rho^{n+1}}{\rho_0} - 1 \quad (\text{П.22})$$

$$21. \text{Вычисляется } \Delta P^{n+1} = -K_1 \mu + \sqrt{(K_1 \mu + \Delta P^n)^2 + 2\beta K_1 \Delta U} \quad (\text{П.23})$$

22. Вычисляется новая величина давления в материале согласно уравнению

$$\text{состояния } P^{n+1} = \begin{cases} K_1 \mu + K_2 \mu + K_3 \mu + \Delta P^{n+1}, & \mu > 0 \\ K_1 \mu, & \mu \leq 0 \end{cases} \quad (\text{П.24})$$

Уравнения (П.1)-(П.24) представляют собой замкнутую систему уравнений, основанную на модели JH-2, и позволяют рассчитать напряженно-деформированное состояние разрушающегося материала.