

Type theory

$\text{Con}_- : \mathbb{N} \rightarrow \text{Set}$
 $\text{Ty}_- : \mathbb{N} \rightarrow \text{Con}_i \rightarrow \text{Set}$
 $\text{Sub} : \text{Con}_i \rightarrow \text{Con}_j \rightarrow \text{Set}$
 $\text{Tm} : (\Gamma : \text{Con}_i) \rightarrow \text{Ty}_j \Gamma \rightarrow \text{Set}$

Substitution calculus

$\cdot : \text{Con}_0$
 $- \triangleright - : (\Gamma : \text{Con}_i) \rightarrow \text{Ty}_j \Gamma \rightarrow \text{Con}_{i \sqcup j}$
 $-[-] : \text{Ty}_j \Delta \rightarrow \text{Sub} \Gamma \Delta \rightarrow \text{Ty}_j \Gamma$
 $\text{id} : \text{Sub} \Gamma \Gamma$
 $- \circ - : \text{Sub} \Theta \Delta \rightarrow \text{Sub} \Gamma \Theta \rightarrow \text{Sub} \Gamma \Delta$
 $\epsilon : \text{Sub} \Gamma \cdot$
 $-, - : (\sigma : \text{Sub} \Gamma \Delta) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (A[\sigma]) \rightarrow \text{Sub} \Gamma (\Delta \triangleright A)$
 $\pi_1 : \text{Sub} \Gamma (\Delta \triangleright A) \rightarrow \text{Sub} \Gamma \Delta$
 $\pi_2 : (\sigma : \text{Sub} \Gamma (\Delta \triangleright A)) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (A[\pi_1 \sigma])$
 $-[-] : \text{Tm} \Delta A \rightarrow (\sigma : \text{Sub} \Gamma \Delta) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (A[\sigma])$
 $[\text{id}] : A[\text{id}] = A$
 $[\circ] : A[\sigma \circ \delta] = A[\sigma][\delta]$
 $\text{ass} : (\sigma \circ \delta) \circ \nu = \sigma \circ (\delta \circ \nu)$
 $\text{idl} : \text{id} \circ \sigma = \sigma$
 $\text{idr} : \sigma \circ \text{id} = \sigma$
 $\cdot \eta : (\sigma : \text{Sub} \Gamma \cdot) = \epsilon$
 $\triangleright \beta_1 : \pi_1 (\sigma, t) = \sigma$
 $\triangleright \beta_2 : \pi_2 (\sigma, t) = t$
 $\triangleright \eta : (\pi_1 \sigma, \pi_2 \sigma) = \sigma$
 $, \circ : (\sigma, t) \circ \delta = (\sigma \circ \delta, t[\delta])$

Function space

$\Pi : (A : \text{Ty}_i \Gamma) \rightarrow \text{Ty}_j (\Gamma \triangleright A) \rightarrow \text{Ty}_{i \sqcup j} \Gamma$
 $\text{lam} : \text{Tm} (\Gamma \triangleright A) B \rightarrow \text{Tm} \Gamma (\Pi A B)$
 $\text{app} : \text{Tm} \Gamma (\Pi A B) \rightarrow \text{Tm} (\Gamma \triangleright A) B$
 $\Pi \beta : \text{app} (\text{lam } t) = t$
 $\Pi \eta : \text{lam} (\text{app } t) = t$

$\Pi [] : (\Pi A B)[\sigma] = \Pi (A[\sigma]) (B[\sigma^\uparrow])$
 $\text{lam} [] : (\text{lam } t)[\sigma] = \text{lam } (t[\sigma^\uparrow])$
Sigma
 $\Sigma : (A : \text{Ty}_i \Gamma) \rightarrow \text{Ty}_j (\Gamma \triangleright A) \rightarrow \text{Ty}_{i \sqcup j} \Gamma$
 $-, - : (u : \text{Tm} \Gamma A) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (B[\langle u \rangle]) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (\Sigma A B)$
 $\text{proj}_1 : \text{Tm} \Gamma (\Sigma A B) \rightarrow \text{Tm} \Gamma A$
 $\text{proj}_2 : (t : \text{Tm} \Gamma (\Sigma A B)) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (B[\langle \text{proj}_1 u \rangle])$
 $\Sigma \beta_1 : \text{proj}_1 (u, v) = u$
 $\Sigma \beta_2 : \text{proj}_2 (u, v) = v$
 $\Sigma \eta : (\text{proj}_1 t, \text{proj}_2 t) = t$
 $\Sigma [] : (\Sigma A B)[\sigma] = \Sigma (A[\sigma]) (B[\sigma^\uparrow])$
 $, [] : (u, v)[\sigma] = (u[\sigma], v[\sigma])$

Unit

$\top : \text{Ty}_0 \Gamma$
 $\text{tt} : \text{Tm} \Gamma \top$
 $\top \eta : (t : \text{Tm} \Gamma \top) = \text{tt}$
 $\top [] : \top[\sigma] = \top$
 $\text{tt} [] : \text{tt}[\sigma] = \text{tt}$

Empty

$\perp : \text{Ty}_0 \Gamma$
 $\text{exfalso} : \text{Tm} \Gamma \perp \rightarrow \text{Tm} \Gamma C$
 $\perp [] : \perp[\sigma] = \perp$
 $\text{exfalso} [] : (\text{exfalso } t)[\sigma] = \text{exfalso } (t[\sigma])$

Coquand universes

$\text{U}_- : (i : \mathbb{N}) \rightarrow \text{Ty}_{i+1} \Gamma$
 $\text{El} : \text{Tm} \Gamma \text{U}_i \rightarrow \text{Ty}_i \Gamma$
 $\text{c} : \text{Ty}_i \Gamma \rightarrow \text{Tm} \Gamma \text{U}_i$
 $\text{U} \beta : \text{El} (\text{c } A) = A$
 $\text{U} \eta : \text{c} (\text{El } a) = a$
 $\text{U} [] : \text{U}_i[\sigma] = \text{U}_i$
 $\text{El} [] : (\text{El } a)[\sigma] = \text{El } (a[\sigma])$

Booleans

$\text{Bool} : \text{Ty}_0$
 $\text{true} : \text{Tm} \Gamma \text{Bool}$
 $\text{false} : \text{Tm} \Gamma \text{Bool}$
 $\text{if} : (P : \text{Ty}_i (\Gamma \triangleright \text{Bool})) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (P[\langle \text{true} \rangle]) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (P[\langle \text{false} \rangle]) \rightarrow (t : \text{Tm} \Gamma \text{Bool}) \rightarrow \text{Tm} \Gamma (P[\langle t \rangle])$
 $\text{Bool}^{\beta_{\text{true}}} : \text{if } P u v \text{ true} = u$
 $\text{Bool}^{\beta_{\text{false}}} : \text{if } P u v \text{ false} = v$
 $\text{Bool} [] : \text{Bool}[\sigma] = \text{Bool}$
 $\text{true} [] : \text{true}[\sigma] = \text{true}$
 $\text{false} [] : \text{false}[\sigma] = \text{false}$
 $\text{if} [] : (\text{if } P u v t)[\sigma] = \text{if } (P[\sigma^\uparrow]) (u[\sigma]) (v[\sigma]) (t[\sigma])$

Abbreviations

$\text{wk} : \text{Sub} (\Gamma \triangleright A) \Gamma := \pi_1 \text{id}$
 $\text{vz} : \text{Tm} (\Gamma \triangleright A) (A[\text{wk}]) := \pi_2 \text{id}$
 $\text{vs} : (t : \text{Tm} \Gamma A) : \text{Tm} (\Gamma \triangleright B) (A[\text{wk}]) := t[\text{wk}]$
 $\langle - \rangle : (t : \text{Tm} \Gamma A) : \text{Sub} \Gamma (\Gamma \triangleright A) := (\text{id}, t)$
 $-^\uparrow : (\sigma : \text{Sub} \Gamma \Delta) : \text{Sub} (\Gamma \triangleright A[\sigma]) (\Delta \triangleright A) := (\sigma \circ \text{wk}, \text{vz})$
 $[\text{id}] : t[\text{id}] = t$
 $[\circ] : t[\sigma \circ \delta] = t[\sigma][\delta]$
 $\pi_1 \circ : (\pi_1 \sigma) \circ \delta = \pi_1 (\sigma \circ \delta)$
 $\pi_2 [] : (\pi_2 \sigma)[\delta] = \pi_2 (\sigma \circ \delta)$
 $\text{app} [] : (\text{app } t)[\sigma^\uparrow] = \text{app } (t[\sigma])$
 $- \Rightarrow - : (A B : \text{Ty}_i \Gamma) \rightarrow \text{Ty}_{i \sqcup j} \Gamma := \Pi A (B[\text{wk}])$
 $- \$ - : (t : \text{Tm} \Gamma (\Pi A B))(u : \text{Tm} \Gamma A) : \text{Tm} \Gamma (B[\langle u \rangle]) := (\text{app } t)[\langle u \rangle]$
 $\$ \beta : (\text{lam } t) \$ u = t[\langle u \rangle]$
 $\$ \eta : \text{lam } (t[\text{wk}] \$ \text{vz}) = t$
 $\text{proj}_1 [] : (\text{proj}_1 t)[\sigma] = \text{proj}_1 (t[\sigma])$
 $\text{proj}_2 [] : (\text{proj}_2 t)[\sigma] = \text{proj}_2 (t[\sigma])$
 $\text{c} [] : (\text{c } A)[\sigma] = \text{c } (A[\sigma])$