Type theory

$\mathsf{Con}_{-} : \mathbb{N} \to \mathsf{Set}$
$\mathsf{Ty}_{-} : \mathbb{N} \to \mathsf{Con}_i \to \mathsf{Set}$
$\mathsf{Sub} : \mathsf{Con}_i \to \mathsf{Con}_j \to \mathsf{Set}$
$\mathsf{Tm} : (\Gamma : \mathsf{Con}_i) \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma \to \mathsf{Set}$

Substitution calculus

$\cdot : \mathsf{Con}_0$
$- \triangleright - : (\Gamma : \mathsf{Con}_i) \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma \to \mathsf{Con}_{i \sqcup j}$
$-[-] : \mathsf{Ty}_j\,\Delta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma$
$\mathsf{id} : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Gamma$
$- \circ - : \mathsf{Sub}\,\Theta\,\Delta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Theta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta$
$\epsilon : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\cdot$
$-,- : (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\sigma]) \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \triangleright A)$
$\pi_1 : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \triangleright A) \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta$
$\pi_2 : (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \triangleright A)) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\pi_1\,\sigma])$
$-[-] : \mathsf{Tm}\,\Delta\,A \to (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\sigma])$
$[\mathsf{id}] : A[\mathsf{id}] = A$
$[\circ] : A[\sigma \circ \delta] = A[\sigma][\delta]$
$\mathsf{ass} : (\sigma \circ \delta) \circ \nu = \sigma \circ (\delta \circ \nu)$
$\mathsf{idl} : \mathsf{id} \circ \sigma = \sigma$
$\mathsf{idr} : \sigma \circ \mathsf{id} = \sigma$
$\cdot\eta : (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\cdot) = \epsilon$
$\triangleright\beta_1 : \pi_1\,(\sigma, t) = \sigma$
$\triangleright\beta_2 : \pi_2\,(\sigma, t) = t$
$\triangleright\eta : (\pi_1\,\sigma, \pi_2\,\sigma) = \sigma$
$,\circ : (\sigma, t) \circ \delta = (\sigma \circ \delta, t[\delta])$

Function space

$\Pi : (A : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}_j\,(\Gamma \triangleright A) \to \mathsf{Ty}_{i \sqcup j}\,\Gamma$
$\mathsf{lam} : \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B)$
$\mathsf{app} : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \to \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright A)\,B$
$\Pi\beta : \mathsf{app}\,(\mathsf{lam}\,t) = t$
$\Pi\eta : \mathsf{lam}\,(\mathsf{app}\,t) = t$
$\Pi[] : (\Pi\,A\,B)[\sigma] = \Pi\,(A[\sigma])\,(B[\sigma^{\uparrow}])$
$\mathsf{lam}[] : (\mathsf{lam}\,t)[\sigma] = \mathsf{lam}\,(t[\sigma^{\uparrow}])$

Sigma

$\Sigma : (A : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}_j\,(\Gamma \triangleright A) \to \mathsf{Ty}_{i \sqcup j}\,\Gamma$
$-,- : (u : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle u \rangle]) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B)$
$\mathsf{proj}_1 : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A$
$\mathsf{proj}_2 : (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B)) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle \mathsf{proj}_1\,u \rangle])$
$\Sigma\beta_1 : \mathsf{proj}_1\,(u, v) = u$
$\Sigma\beta_2 : \mathsf{proj}_2\,(u, v) = v$
$\Sigma\eta : (\mathsf{proj}_1\,t, \mathsf{proj}_2\,t) = t$
$\Sigma[] : (\Sigma\,A\,B)[\sigma] = \Sigma\,(A[\sigma])\,(B[\sigma^{\uparrow}])$
$,[] : (u, v)[\sigma] = (u[\sigma], v[\sigma])$

Unit

$\top : \mathsf{Ty}_0\,\Gamma$
$\mathsf{tt} : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\top$
$\top\eta : (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\top) = \mathsf{tt}$
$\top[] : \top[\sigma] = \top$
$\mathsf{tt}[] : \mathsf{tt}[\sigma] = \mathsf{tt}$

Empty

$\bot : \mathsf{Ty}_0\,\Gamma$
$\mathsf{abort} : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\bot \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,C$
$\bot[] : \bot[\sigma] = \bot$
$\mathsf{abort}[] : (\mathsf{abort}\,t)[\sigma] = \mathsf{abort}\,(t[\sigma])$

Coquand universes

$\mathsf{U}_{-} : (i : \mathbb{N}) \to \mathsf{Ty}_{i+1}\,\Gamma$
$\mathsf{El} : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{U}_i \to \mathsf{Ty}_i\,\Gamma$
$\mathsf{c} : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{U}_i$
$\mathsf{U}\beta : \mathsf{El}\,(\mathsf{c}\,A) = A$
$\mathsf{U}\eta : \mathsf{c}\,(\mathsf{El}\,a) = a$
$\mathsf{U}[] : \mathsf{U}_i[\sigma] = \mathsf{U}_i$
$\mathsf{El}[] : (\mathsf{El}\,a)[\sigma] = \mathsf{El}\,(a[\sigma])$

Booleans

$\mathsf{Bool} : \mathsf{Ty}_0$
$\mathsf{true} : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}$
$\mathsf{false} : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}$
$\mathsf{if} : (P : \mathsf{Ty}_i\,(\Gamma \triangleright \mathsf{Bool})) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle \mathsf{true} \rangle]) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle \mathsf{false} \rangle]) \to (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle t \rangle])$
$\mathsf{Bool}\beta_{\mathsf{true}} : \mathsf{if}\,P\,u\,v\,\mathsf{true} = u$
$\mathsf{Bool}\beta_{\mathsf{false}} : \mathsf{if}\,P\,u\,v\,\mathsf{false} = v$
$\mathsf{Bool}[] : \mathsf{Bool}[\sigma] = \mathsf{Bool}$
$\mathsf{true}[] : \mathsf{true}[\sigma] = \mathsf{true}$
$\mathsf{false}[] : \mathsf{false}[\sigma] = \mathsf{false}$
$\mathsf{if}[] : (\mathsf{if}\,P\,u\,v\,t)[\sigma] = \mathsf{if}\,(P[\sigma^{\uparrow}])\,(u[\sigma])\,(v[\sigma])\,(t[\sigma])$

Abbreviations

$\mathsf{wk} : \mathsf{Sub}\,(\Gamma \triangleright A)\,\Gamma := \pi_1\,\mathsf{id}$
$\mathsf{vz} : \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright A)\,(A[\mathsf{wk}]) := \pi_2\,\mathsf{id}$
vs $(t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) : \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright B)\,(A[\mathsf{wk}]) := t[\mathsf{wk}]$
$\langle - \rangle$ $(t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Gamma \triangleright A) := (\mathsf{id}, t)$
$-^{\uparrow}$ $(\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) : \mathsf{Sub}\,(\Gamma \triangleright A[\sigma])\,(\Delta \triangleright A) := (\sigma \circ \mathsf{wk}, \mathsf{vz})$
$[\mathsf{id}] : t[\mathsf{id}] = t$
$[\circ] : t[\sigma \circ \delta] = t[\sigma][\delta]$
$\pi_1\circ : (\pi_1\,\sigma) \circ \delta = \pi_1\,(\sigma \circ \delta)$
$\pi_2[] : (\pi_2\,\sigma)[\delta] = \pi_2\,(\sigma \circ \delta)$
$\mathsf{app}[] : (\mathsf{app}\,t)[\sigma^{\uparrow}] = \mathsf{app}\,(t[\sigma])$
$- \Rightarrow - : (A\,B : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}_{i \sqcup j}\,\Gamma := \Pi\,A\,(B[\mathsf{wk}])$
$- \$ - : (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B))(u : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle u \rangle]) := (\mathsf{app}\,t)[\langle u \rangle]$
$\$\beta : (\mathsf{lam}\,t)\,\$\,u = t[\langle u \rangle]$
$\$\eta : \mathsf{lam}\,(t[\mathsf{wk}]\,\$\,\mathsf{vz}) = t$
$\mathsf{proj}_1[] : (\mathsf{proj}_1\,t)[\sigma] = \mathsf{proj}_1\,(t[\sigma])$
$\mathsf{proj}_2[] : (\mathsf{proj}_2\,t)[\sigma] = \mathsf{proj}_2\,(t[\sigma])$
$\mathsf{c}[] : (\mathsf{c}\,A)[\sigma] = \mathsf{c}\,(A[\sigma])$