Type theory

November 16, 2018

We define type theory as a generalised algebraic theory (or quotient inductive-inductive type) in an extensional metatheory. This is an algebraic presentation of (predicative) CwFs with extra structure. The $_i$, $_j$ indices are metatheoretic universe levels.

Declaration

$$
\begin{array}{ll}
\mathsf{Con}_i & : \mathsf{Set} \\
\mathsf{Ty}_j & : \mathsf{Con}_i \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Sub} & : \mathsf{Con}_i \to \mathsf{Con}_j \to \mathsf{Set} \\
\mathsf{Tm} & : (\Gamma : \mathsf{Con}_i) \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma \to \mathsf{Set}
\end{array}
$$

Substitution calculus

$$
\begin{array}{ll}
\cdot & : \mathsf{Con}_0 \\
- \rhd - & : (\Gamma : \mathsf{Con}_i) \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma \to \mathsf{Con}_{\mathsf{max}\,i\,j} \\
-[-] & : \mathsf{Ty}_j\,\Delta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma \\
\mathsf{id} & : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Gamma \\
- \circ - & : \mathsf{Sub}\,\Theta\,\Delta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Theta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta \\
\epsilon & : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\cdot \\
-,- & : (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\sigma]) \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \rhd A) \\
\pi_1 & : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \rhd A) \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta \\
\pi_2 & : (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \rhd A)) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\pi_1\,\sigma]) \\
-[-] & : \mathsf{Tm}\,\Delta\,A \to (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\sigma]) \\
[\mathsf{id}] & : A[\mathsf{id}] = A \\
[\circ] & : A[\sigma \circ \delta] = A[\sigma][\delta] \\
\mathsf{ass} & : (\sigma \circ \delta) \circ \nu = \sigma \circ (\delta \circ \nu) \\
\mathsf{idl} & : \mathsf{id} \circ \sigma = \sigma \\
\mathsf{idr} & : \sigma \circ \mathsf{id} = \sigma \\
\cdot\eta & : (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\cdot) = \epsilon \\
\rhd\beta_1 & : \pi_1\,(\sigma, t) = \sigma \\
\rhd\beta_2 & : \pi_2\,(\sigma, t) = t \\
\rhd\eta & : (\pi_1\,\sigma, \pi_2\,\sigma) = \sigma \\
,\circ & : (\sigma, t) \circ \delta = (\sigma \circ \delta, t[\delta])
\end{array}
$$

Abbreviations

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{wk} & : \mathsf{Sub}\,(\Gamma \rhd A)\,\Gamma & := \pi_1\,\mathsf{id} \\
\mathsf{vz} & : \mathsf{Tm}\,(\Gamma \rhd A)\,(A[\mathsf{wk}]) & := \pi_2\,\mathsf{id} \\
\mathsf{vs} & : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Tm}\,(\Gamma \rhd B)\,(A[\mathsf{wk}]) & := \lambda t.t[\mathsf{wk}] \\
\langle - \rangle & : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Gamma \rhd A) & := \lambda t.(\mathsf{id}, t)
\end{array}
$$

$-^{\uparrow}$	$: (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) \to \mathsf{Sub}\,(\Gamma \rhd A[\sigma])\,(\Delta \rhd A)$	$:= \lambda\sigma.(\sigma \circ \mathsf{wk}, \mathsf{vz})$
$[\mathsf{id}]$	$: t[\mathsf{id}] = t$	$:= \ldots$
$[\circ]$	$: t[\sigma \circ \delta] = t[\sigma][\delta]$	$:= \ldots$
$\pi_1\circ$	$: (\pi_1\,\sigma) \circ \delta = \pi_1\,(\sigma \circ \delta)$	$:= \ldots$
$\pi_2[]$	$: (\pi_2\,\sigma)[\delta] = \pi_2\,(\sigma \circ \delta)$	$:= \ldots$

Coquand universes

U_i	$: \mathsf{Ty}_{i+1}\,\Gamma$
El	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{U}_i \to \mathsf{Ty}_i\,\Gamma$
c	$: \mathsf{Ty}_i\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{U}_i$
$\mathsf{U}\beta$	$: \mathsf{El}\,(\mathsf{c}\,A) = A$
$\mathsf{U}\eta$	$: \mathsf{c}\,(\mathsf{El}\,a) = a$
$\mathsf{U}[]$	$: \mathsf{U}_i[\sigma] = \mathsf{U}_i$
$\mathsf{El}[]$	$: (\mathsf{El}\,a)[\sigma] = \mathsf{El}\,(a[\sigma])$

Abbreviation

$\mathsf{c}[]$	$: (\mathsf{c}\,A)[\sigma] = \mathsf{c}\,(A[\sigma])$	$:= \ldots$

Function space

Π	$: (A : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}_j\,(\Gamma \rhd A) \to \mathsf{Ty}_{\mathsf{max}\,i\,j}\,\Gamma$
lam	$: \mathsf{Tm}\,(\Gamma \rhd A)\,B \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B)$
app	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \to \mathsf{Tm}\,(\Gamma \rhd A)\,B$
$\Pi\beta$	$: \mathsf{app}\,(\mathsf{lam}\,t) = t$
$\Pi\eta$	$: \mathsf{lam}\,(\mathsf{app}\,t) = t$
$\Pi[]$	$: (\Pi\,A\,B)[\sigma] = \Pi\,(A[\sigma])\,(B[\sigma^{\uparrow}])$
$\mathsf{app}[]$	$: (\mathsf{app}\,t)[\sigma^{\uparrow}] = \mathsf{app}\,(t[\sigma])$

Abbreviations

$- \Rightarrow -$	$: \mathsf{Ty}_i\,\Gamma \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma \to \mathsf{Ty}_{\mathsf{max}\,i\,j}\,\Gamma$	$:= \lambda A\,B.\Pi\,A\,(B[\mathsf{wk}])$
$- \$ -$	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \to (u : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle u\rangle])$	$:= \lambda t\,u.(\mathsf{app}\,t)[\langle u\rangle]$
$\mathsf{app}[]$	$: (\mathsf{app}\,t)[\sigma^{\uparrow}] = \mathsf{app}\,(t[\sigma])$	$:= \ldots$

Sigma

Σ	$: (A : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}_j\,(\Gamma \rhd A) \to \mathsf{Ty}_{\mathsf{max}\,i\,j}\,\Gamma$
$-,-$	$: (u : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle u\rangle]) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B)$
proj_1	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A$
proj_2	$: (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B)) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle \mathsf{proj}_1\,u\rangle])$
$\Sigma\beta_1$	$: \mathsf{proj}_1\,(u, v) = u$
$\Sigma\beta_2$	$: \mathsf{proj}_2\,(u, v) = v$
$\Sigma\eta$	$: (\mathsf{proj}_1\,t, \mathsf{proj}_2\,t) = t$
$\Sigma[]$	$: (\Sigma\,A\,B)[\sigma] = \Sigma\,(A[\sigma])\,(B[\sigma^{\uparrow}])$
$,[]$	$: (u, v)[\sigma] = (u[\sigma], v[\sigma])$

Abbreviations

$\mathsf{proj}_1[]$	$: (\mathsf{proj}_1\,t)[\sigma] = \mathsf{proj}_1\,(t[\sigma])$	$:= \ldots$
$\mathsf{proj}_2[]$	$: (\mathsf{proj}_2\,t)[\sigma] = \mathsf{proj}_2\,(t[\sigma])$	$:= \ldots$

Unit

$$
\begin{aligned}
&\top &&: \mathsf{Ty}_0\,\Gamma\\
&\mathsf{tt} &&: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\top\\
&\top[] &&: \top[\sigma] = \top\\
&\mathsf{tt}[] &&: \mathsf{tt}[\sigma] = \mathsf{tt}
\end{aligned}
$$

Booleans

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Bool} &&: \mathsf{Ty}_0\\
&\mathsf{true} &&: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}\\
&\mathsf{false} &&: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}\\
&\mathsf{if} &&: (P : \mathsf{Ty}_i\,(\Gamma \rhd \mathsf{Bool})) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle\mathsf{true}\rangle]) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle\mathsf{false}\rangle]) \to\\
& &&\ (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle t\rangle])\\
&\mathsf{Bool}\beta_{\mathsf{true}} &&: \mathsf{if}\,P\,u\,v\,\mathsf{true} = u\\
&\mathsf{Bool}\beta_{\mathsf{false}} &&: \mathsf{if}\,P\,u\,v\,\mathsf{false} = v\\
&\mathsf{Bool}[] &&: \mathsf{Bool}[\sigma] = \mathsf{Bool}\\
&\mathsf{true}[] &&: \mathsf{true}[\sigma] = \mathsf{true}\\
&\mathsf{false}[] &&: \mathsf{false}[\sigma] = \mathsf{false}\\
&\mathsf{if}[] &&: (\mathsf{if}\,P\,u\,v\,t)[\sigma] = \mathsf{if}\,(P[\sigma^{\uparrow}])\,(u[\sigma])\,(v[\sigma])\,(t[\sigma])
\end{aligned}
$$

Identity

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Id} &&: (A : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A \to \mathsf{Ty}_i\,\Gamma\\
&\mathsf{refl} &&: (u : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\mathsf{Id}\,A\,t\,t)\\
&\mathsf{J} &&: (P : \mathsf{Ty}_i\,(\Gamma \rhd A \rhd \mathsf{Id}\,(A[\mathsf{wk}])\,(u[\mathsf{wk}])\,\mathsf{vz})) \to\\
& &&\ \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\mathsf{id}, u, \mathsf{refl}\,(u[\mathsf{wk}])]) \to (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\mathsf{Id}\,A\,u\,v)) \to\\
& &&\ \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\mathsf{id}, v, t[\mathsf{wk}]])\\
&\mathsf{Id}\beta &&: \mathsf{J}\,P\,w\,(\mathsf{refl}\,u) = w\\
&\mathsf{Id}[] &&: (\mathsf{Id}\,A\,u\,v)[\sigma] = \mathsf{Id}\,(A[\sigma])\,(u[\sigma])\,(v[\sigma])\\
&\mathsf{refl}[] &&: (\mathsf{refl}\,u)[\sigma] = \mathsf{refl}\,(u[\sigma])\\
&\mathsf{J}[] &&: (\mathsf{J}\,P\,w\,t)[\sigma] = \mathsf{J}\,(P[\sigma^{\uparrow\uparrow}])\,(w[\sigma])\,(t[\sigma])
\end{aligned}
$$