Type theory

$\mathsf{Con}_{\_}$	$: \mathbb{N} \to \mathsf{Set}$
$\mathsf{Ty}_{\_}$	$: \mathbb{N} \to \mathsf{Con}_i \to \mathsf{Set}$
Sub	$: \mathsf{Con}_i \to \mathsf{Con}_j \to \mathsf{Set}$
Tm	$: (\Gamma : \mathsf{Con}_i) \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma \to \mathsf{Set}$

Substitution calculus

$\cdot$	$: \mathsf{Con}_0$
$- \triangleright -$	$: (\Gamma : \mathsf{Con}_i) \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma \to \mathsf{Con}_{i \sqcup j}$
$-[-]$	$: \mathsf{Ty}_j\,\Delta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta \to \mathsf{Ty}_j\,\Gamma$
id	$: \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Gamma$
$- \circ -$	$: \mathsf{Sub}\,\Theta\,\Delta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Theta \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta$
ϵ	$: \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\cdot$
$-,-$	$: (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\sigma]) \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \triangleright A)$
π_1	$: \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \triangleright A) \to \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta$
π_2	$: (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Delta \triangleright A)) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\pi_1\,\sigma])$
$-[-]$	$: \mathsf{Tm}\,\Delta\,A \to (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(A[\sigma])$
$[\mathsf{id}]$	$: A[\mathsf{id}] = A$
$[\circ]$	$: A[\sigma \circ \delta] = A[\sigma][\delta]$
ass	$: (\sigma \circ \delta) \circ \nu = \sigma \circ (\delta \circ \nu)$
idl	$: \mathsf{id} \circ \sigma = \sigma$
idr	$: \sigma \circ \mathsf{id} = \sigma$
$\cdot\eta$	$: (\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\cdot) = \epsilon$
$\triangleright\beta_1$	$: \pi_1\,(\sigma, t) = \sigma$
$\triangleright\beta_2$	$: \pi_2\,(\sigma, t) = t$
$\triangleright\eta$	$: (\pi_1\,\sigma, \pi_2\,\sigma) = \sigma$
$,\circ$	$: (\sigma, t) \circ \delta = (\sigma \circ \delta, t[\delta])$

Function space

Π	$: (A : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}_j\,(\Gamma \triangleright A) \to \mathsf{Ty}_{i \sqcup j}\,\Gamma$
lam	$: \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright A)\,B \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B)$
app	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B) \to \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright A)\,B$
$\Pi\beta$	$: \mathsf{app}\,(\mathsf{lam}\,t) = t$
$\Pi\eta$	$: \mathsf{lam}\,(\mathsf{app}\,t) = t$
$\Pi[]$	$: (\Pi\,A\,B)[\sigma] = \Pi\,(A[\sigma])\,(B[\sigma^{\uparrow}])$
$\mathsf{lam}[]$	$: (\mathsf{lam}\,t)[\sigma] = \mathsf{lam}\,(t[\sigma^{\uparrow}])$

Sigma

Σ	$: (A : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}_j\,(\Gamma \triangleright A) \to \mathsf{Ty}_{i \sqcup j}\,\Gamma$
$-,-$	$: (u : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle u \rangle]) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B)$
proj_1	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A$
proj_2	$: (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Sigma\,A\,B)) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle \mathsf{proj}_1\,u \rangle])$
$\Sigma\beta_1$	$: \mathsf{proj}_1\,(u, v) = u$
$\Sigma\beta_2$	$: \mathsf{proj}_2\,(u, v) = v$
$\Sigma\eta$	$: (\mathsf{proj}_1\,t, \mathsf{proj}_2\,t) = t$
$\Sigma[]$	$: (\Sigma\,A\,B)[\sigma] = \Sigma\,(A[\sigma])\,(B[\sigma^{\uparrow}])$
$,[]$	$: (u, v)[\sigma] = (u[\sigma], v[\sigma])$

Unit

$\top$	$: \mathsf{Ty}_0\,\Gamma$
tt	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\top$
$\top\eta$	$: (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\top) = \mathsf{tt}$
$\top[]$	$: \top[\sigma] = \top$
$\mathsf{tt}[]$	$: \mathsf{tt}[\sigma] = \mathsf{tt}$

Empty

$\bot$	$: \mathsf{Ty}_0\,\Gamma$
abort	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\bot \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,C$
$\bot[]$	$: \bot[\sigma] = \bot$
$\mathsf{abort}[]$	$: (\mathsf{abort}\,t)[\sigma] = \mathsf{abort}\,(t[\sigma])$

Coquand universes

U	$: (i : \mathbb{N}) \to \mathsf{Ty}_{i+1}\,\Gamma$
El	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{U}_i \to \mathsf{Ty}_i\,\Gamma$
c	$: \mathsf{Ty}_i\,\Gamma \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{U}_i$
$\mathsf{U}\beta$	$: \mathsf{El}\,(\mathsf{c}\,A) = A$
$\mathsf{U}\eta$	$: \mathsf{c}\,(\mathsf{El}\,a) = a$
$\mathsf{U}[]$	$: \mathsf{U}_i[\sigma] = \mathsf{U}_i$
$\mathsf{El}[]$	$: (\mathsf{El}\,a)[\sigma] = \mathsf{El}\,(a[\sigma])$

Booleans

Bool	$: \mathsf{Ty}_0$
true	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}$
false	$: \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}$
if	$: (P : \mathsf{Ty}_i\,(\Gamma \triangleright \mathsf{Bool})) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle \mathsf{true} \rangle]) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle \mathsf{false} \rangle]) \to (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,\mathsf{Bool}) \to \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(P[\langle t \rangle])$
$\mathsf{Bool}\beta_{\mathsf{true}}$	$: \mathsf{if}\,P\,u\,v\,\mathsf{true} = u$
$\mathsf{Bool}\beta_{\mathsf{false}}$	$: \mathsf{if}\,P\,u\,v\,\mathsf{false} = v$
$\mathsf{Bool}[]$	$: \mathsf{Bool}[\sigma] = \mathsf{Bool}$
$\mathsf{true}[]$	$: \mathsf{true}[\sigma] = \mathsf{true}$
$\mathsf{false}[]$	$: \mathsf{false}[\sigma] = \mathsf{false}$
$\mathsf{if}[]$	$: (\mathsf{if}\,P\,u\,v\,t)[\sigma] = \mathsf{if}\,(P[\sigma^{\uparrow}])\,(u[\sigma])\,(v[\sigma])\,(t[\sigma])$

Abbreviations

wk	$: \mathsf{Sub}\,(\Gamma \triangleright A)\,\Gamma := \pi_1\,\mathsf{id}$
vz	$: \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright A)\,(A[\mathsf{wk}]) := \pi_2\,\mathsf{id}$
vs	$(t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) : \mathsf{Tm}\,(\Gamma \triangleright B)\,(A[\mathsf{wk}]) := t[\mathsf{wk}]$
$\langle - \rangle$	$(t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,(\Gamma \triangleright A) := (\mathsf{id}, t)$
$\_^{\uparrow}$	$(\sigma : \mathsf{Sub}\,\Gamma\,\Delta) : \mathsf{Sub}\,(\Gamma \triangleright A[\sigma])\,(\Delta \triangleright A) := (\sigma \circ \mathsf{wk}, \mathsf{vz})$
$[\mathsf{id}]$	$: t[\mathsf{id}] = t$
$[\circ]$	$: t[\sigma \circ \delta] = t[\sigma][\delta]$
$\pi_1\circ$	$: (\pi_1\,\sigma) \circ \delta = \pi_1\,(\sigma \circ \delta)$
$\pi_2[]$	$: (\pi_2\,\sigma)[\delta] = \pi_2\,(\sigma \circ \delta)$
$\mathsf{app}[]$	$: (\mathsf{app}\,t)[\sigma^{\uparrow}] = \mathsf{app}\,(t[\sigma])$
$- \Rightarrow -$	$: (A\,B : \mathsf{Ty}_i\,\Gamma) \to \mathsf{Ty}_{i \sqcup j}\,\Gamma := \Pi\,A\,(B[\mathsf{wk}])$
$- \$ -$	$: (t : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(\Pi\,A\,B))(u : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,A) : \mathsf{Tm}\,\Gamma\,(B[\langle u \rangle]) := (\mathsf{app}\,t)[\langle u \rangle]$
$\$\beta$	$: (\mathsf{lam}\,t)\,\$\,u = t[\langle u \rangle]$
$\$\eta$	$: \mathsf{lam}\,(t[\mathsf{wk}]\,\$\,\mathsf{vz}) = t$
$\mathsf{proj}_1[]$	$: (\mathsf{proj}_1\,t)[\sigma] = \mathsf{proj}_1\,(t[\sigma])$
$\mathsf{proj}_2[]$	$: (\mathsf{proj}_2\,t)[\sigma] = \mathsf{proj}_2\,(t[\sigma])$
$\mathsf{c}[]$	$: (\mathsf{c}\,A)[\sigma] = \mathsf{c}\,(A[\sigma])$