

# Algebrai elméletek és induktív típusok specifikációja típuselméleti szignatúrákkal

A PH.D. DISSZERTÁCIÓ TÉZISEI

*Szerző:*

Kovács András

*Témavezető:*

Kaposi Ambrus

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Informatika Doktori Iskola

Doktori iskola vezetője: Csuha-Varjú Erzsébet

Doktori program: Az informatika alapjai és módszertana

Programvezető: Horváth Zoltán



2022 március



# 1. Bevezető

A tézis fő célja az, hogy kidolgozza bizonyos típuselméletek használatát algebrai elméletek és induktív típusok leírásához. Minden ilyen típuselméletben a típuskörnyezeteket értelmezzük algebrai szignatúraként, ami felsorolja egy algebrai elmélet szortjait, műveleteit és egyenleteit.

A függő típuselméletek kifejezőereje nagyban elősegíti a tömör és általános specifikációkat, és lehetővé teszi, hogy a szignatúrák szemantikáját és meta-elméletét olyan eszközökkel vizsgáljuk, amelyek korábbról ismertek a típuselméletben.

Három szignatúra-elméletet mutatunk be. Mindhárom esetben lehetőség van az elméletek kisebb változtatásaira.

A jelenlegi kutatás kiegészíti és általánosítja az induktív szignatúrák korábbi irodalmát a típuselmélet kontextusában. A kutatásunk egyik fontos motivációja az volt, hogy nagy kifejezőerejű induktív típusokat fejlesszünk jövőbeli tételbizonyító-rendszerekhez. Ebből kifolyólag a szignatúráink szintaxisa és szemantikája közel van ahhoz, ami praktikus rendszerekben lenne szükséges. Ugyanakkor az eredményeink felhasználhatók általánosabb matematikai kontextusban, az algebrai elméletek kutatásában.

# 2. Eredmények

A fő eredményeket a következőkben foglaljuk össze.

## 1. Tézis

A harmadik fejezetben kifejtjük, hogy a kétszintű típuselmélet [ACKS19] hogyan használható metanyelvként az algebrai szignatúrák szemantikájához. Ez lehetővé teszi, hogy a szemantikát általánosan adjuk meg, internálisan tetszőleges strukturált kategóriákban, és ugyanakkor tömör típuselméleti nyelvben dolgozzunk. Például a természetes szám objektumok szignatúrája értelmezhető tetszőleges olyan kategóriában, ami rendelkezik véges szorzatokkal.

## 2. Tézis

A tézis negyedik fejezetében bemutatjuk a véges aritású kvóciens induktív-induktív (FQII, „finitary quotient inductive-inductive”) szignatúrák szinta-

xisát és szemantikáját. Ezek a szignatúrák közel vannak kifejezőerő tekintetében Cartmell általánosított algebrai elméleteihez [Car86], viszont jelentős különbségek vannak a formalizációban és a szemantikai konstrukciókban és eredményekben.

- Az FQII szignatúrák képesek leírni szinte az összes típuselméletet, és így modell-elméletet kapunk hozzájuk, a szignatúrák szemantikáján keresztül.
- Az FQII szignatúrák elmélete tömören specifikált mint típuselmélet, és maga is algebrai elmélet.
- Minden szignatúrához egy véges limitekkel rendelkező kategóriát rendelünk, amelynek az objektumai algebraik. Ezt a kategóriát egy családos kategóriaként [CCD19] prezentáljuk, ami lehetővé teszi, hogy precízen kiszámoljuk az indukció fogalmát. Megmutatjuk, hogy az indukció ekvivalens az inicialitással minden szignatúra esetén.
- Megmutatjuk, hogy az iniciális algebraikat meg lehet konstruálni az FQII szignatúrák szintaxisából, egy term modell konstrukcióval. Továbbá megmutatjuk, hogy az FQII szignatúrák szintaxisának bizonyos töredékei megkonstruálhatók egyszerűbb típusokból.
- Megmutatjuk, hogy a szignatúrák közötti párhuzamos helyettesítésekre modell konstrukciókként lehet gondolni, mivel a szemantikában funktorok lesznek algebraik kategóriái között. Továbbá, feltéve hogy minden iniciális FQII-algebra létezik, minden ilyen funktor jobb adjungált.

### 3. Tézis

Az tézis ötödik fejezetében módosítjuk az FQII szignatúrákat úgy, hogy végtelenül elágazó fa struktúrákat is le tudjunk írni az iniciális algebraikban. Így kapjuk a végtelen aritású QII szignatúrák elméletét (IQII röviden, „infinitary quotient inductive-inductive”).

- Valós számok, szürreális számok, ordinálisok és a kumulatív halmazhierarchiák leírhatók IQII szignatúrák segítségével [Uni13], ami a véges aritású esetben nem volt lehetséges.

- Az FQII és IQII szignatúrák elméletei egyaránt leírhatók IQII szignatúrával. A IQII szignatúrák tehát a saját elméletüket is specifikálják, és ezt arra használjuk, hogy minimalizáljuk a szükséges feltételezéseket az IQII szignatúrák metaelméletének kidolgozásánál.
- A szignatúrák szemantikáját kibővítjük a *izo-fibrálás* tulajdonsággal a szignatúra-típusokban. Ez azt jelenti, hogy a szignatúrák elméletében minden konstrukció megőrzi a leírt algebraik izomorfizmusait.
- Adaptáljuk a term algebra konstrukciót és a bal adjungált funktorok konstrukcióját a végtelen aritású esetre.
- Megmutatjuk, hogy a szignatúrákat lehet szemantikusán értelmezni magában a szignatúrák elméletének szintaxisában is. Egy példát hozva, ez azt eredményezi, hogy minden szignatúrához megkapjuk az algebra-homomorfizmusok specifikációját is szignatúráként.

## 4. Tézis

A hatodik fejezetben leírjuk a magasabb induktív-induktív szignatúrákat. Ezek elsősorban a szemantikában különböznek a korábbi szignatúráktól: a meta-nyelv most a homotópia típuselmélet [Uni13]. Míg korábban kizárólag egy-dimenziós egyenleteket adhattunk szignatúrákhoz, most tetszőleges magasabb-dimenziós utakat tudunk specifikálni, az iniciális algebraik pedig szabadon generált omega-groupoidokat adnak meg. A magasabb-dimenziós általánosítás jelentősen bonyolítja a szemantikát, ezért éppen csak annyi szemantikát adunk meg, amiből az iniciálitás és indukció fogalmai következnek (minden szignatúrához). Továbbá, az algebra-morfizmusok két változatát kezeljük: az első szigorúan őrzi meg a struktúrákat, azaz definícionális egyenletekkel, míg a másik gyengén, azaz a belső intenzionális egyenlőségekkel.

## 3. Publikációk

A fenti eredmények a következő publikációk tartalmára építenek, amelyek társszerzője a jelenlegi tézis szerzője.

1. *A Syntax for Higher Inductive-Inductive Types* [KK18].

2. *Signatures and Induction Principles for Higher Inductive-Inductive Types* [KK20a].
3. *Constructing Quotient Inductive-Inductive Types* [KKA19].
4. *Large and Infinitary Quotient Inductive-Inductive Types* [KK20b].
5. *For Finitary Induction-Induction, Induction is Enough* [KKL19].

## Hivatkozások

- [ACKS19] Danil Annenkov, Paolo Capriotti, Nicolai Kraus, and Christian Sattler. Two-level type theory and applications. *ArXiv e-prints*, may 2019. URL: <http://arxiv.org/abs/1705.03307>.
- [Car86] John Cartmell. Generalised algebraic theories and contextual categories. *Annals of Pure and Applied Logic*, 32:209–243, 1986.
- [CCD19] Simon Castellan, Pierre Clairambault, and Peter Dybjer. Categories with families: Untyped, simply typed, and dependently typed. *CoRR*, abs/1904.00827, 2019. URL: <http://arxiv.org/abs/1904.00827>, [arXiv:1904.00827](https://arxiv.org/abs/1904.00827).
- [KK18] Ambrus Kaposi and András Kovács. A syntax for higher inductive-inductive types. In Hélène Kirchner, editor, *3rd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2018)*, volume 108 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 20:1–20:18, Dagstuhl, Germany, 2018. Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik. doi:10.4230/LIPIcs.FSCD.2018.20.
- [KK20a] Ambrus Kaposi and András Kovács. Signatures and induction principles for higher inductive-inductive types. *Log. Methods Comput. Sci.*, 16(1), 2020. doi:10.23638/LMCS-16(1:10)2020.
- [KK20b] András Kovács and Ambrus Kaposi. Large and infinitary quotient inductive-inductive types. In Holger Hermanns, Lijun Zhang,

- Naoki Kobayashi, and Dale Miller, editors, *LICS '20: 35th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Saarbrücken, Germany, July 8-11, 2020*, pages 648–661. ACM, 2020. doi:10.1145/3373718.3394770.
- [KKA19] Ambrus Kaposi, András Kovács, and Thorsten Altenkirch. Constructing quotient inductive-inductive types. *Proc. ACM Program. Lang.*, 3(POPL):2:1–2:24, 2019. doi:10.1145/3290315.
- [KKL19] Ambrus Kaposi, András Kovács, and Ambroise Lafont. For finitary induction-induction, induction is enough. In Marc Bezem and Assia Mahboubi, editors, *25th International Conference on Types for Proofs and Programs, TYPES 2019, June 11-14, 2019, Oslo, Norway*, volume 175 of *LIPIcs*, pages 6:1–6:30. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2019. doi:10.4230/LIPIcs.TYPES.2019.6.
- [Uni13] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. <https://homotopytypetheory.org/book>, Institute for Advanced Study, 2013.