

Univerzumok Típuselméletben

Kovács András^a

2021 április 8, EFOP Workshop

ELTE, Programozási Nyelvek és Fordítóprogramok tanszék

Informatikai logika kutatócsoport

Témavezető: Kaposi Ambrus

^aA szerzőt az Európai Unió támogatta, közös finanszírozásban az Európai Szociális Alappal (EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002).

Russell paradoxon és méret-problémák

Nincs olyan S halmaz egy konzisztens halmazelméletben, hogy $x \in S$ pontosan akkor, ha $x \notin x$.

Alternatív fogalmazás:

- Borbély paradoxon
- Összes halmaz halmaza

Kapcsolódó:

- Valós számok nem megszámlálhatóak
- Gödel első nem-teljességi tétele
- Megállási probléma

(Általánosításuk: [Lawvere fixpont tétele](#))

Csak **létező** halmaz részhalmazát definiálhatjuk logikai formulával.

De olykor szeretnénk kvantifikálni egy halmazelmélet **minden halmaza** fölött.

Univerzum: halmaz, ami tartalmazza egy halmazelmélet (pl. ZF) összes halmazát.

Gödel, Russell: ZF-ben nincs univerzum, ami az összes ZF halmazt tartalmazza.

Új univerzumokat axiómaként kell felvenni.

Típuselméletek:

- A halmazelméletek alternatívái.
- Tételbizonyító-rendszerek gyakori alapja.
- Bizonyításra és programozásra egyszerre alkalmas.

Formális vs. informális univerzum kezelés.

Létező bizonyító-rendszerekben: univerzum megvalósítások sokasága kisebb-nagyobb eltérésekkel.

Szeretnénk ezeket lefedni egy általános szemantikával.

Példa

Agda:

```
 $\mathbb{N}$            :  $\text{Set}_0$   
 $\text{Set}_0$         :  $\text{Set}_1$   
 $\text{Set}_1$         :  $\text{Set}_2$   
 $(\mathbb{N} \rightarrow \text{Set}_0)$  :  $\text{Set}_1$   
 $(\text{Set}_0 \rightarrow \text{Bool})$  :  $\text{Set}_1$ 
```

Identitás függvény minden “kis” halmazon:

```
id : (A :  $\text{Set}_0$ )  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  A  
id A x = x
```

Minden i -re $\text{Set}_i : \text{Set}_{i+1}$.

Ellentmondás lenne: $\text{Set}_i : \text{Set}_i$.

Az alap rendszer vesződéséges tud lenni:

```
id0 : (A : Set0) → A → A
```

```
id1 : (A : Set1) → A → A
```

```
...
```

Coq/Agda/Lean-ben extra feature-ök vannak. Pl. univerzum polimorfizmus Agda-ban:

```
id : (l : Level) (A : Set l) → A → A
```

```
id l A x = x
```

Variációk

Mennyi univerzum? Agda/Coq: megszámlálható.

Univerzumok teljesen rendezettek? Agda/Coq: igen.

Milyen univerzum polimorfizmus? Coq: korlátos polimorfizmus. Agda: nincsenek korlátok. Példa korláttal:

```
myId : (i : ℕ) → i < 3 → (A : Set i) → A → A
myId i p A x = x
```

Milyen műveletek vannak univerzum-szinteken? Az Agda liberálisabb a Coq-nál:

```
ℕtoLevel : ℕ → Level
```

Kumulativitás. Agda: nincs. Coq: van. Kumulativitás: ha $A : \text{Set } i$, akkor $A : \text{Set } (i + 1)$.

Szeretnénk belátni, hogy a különféle variációk mind jól viselkednek.

Jól viselkedés:

- Logikai konzisztencia.
- Igaz, hogy a típuselmélet egy programozási nyelv? Azaz: programok le kell, hogy fussanak elakadás nélkül. (Nincs jelenlegi munkában)
- Eldönthető a bizonyítások validálása? (Nincs jelenlegi munkában)

Egy általános rendszert használunk, ahol sok feature modellezhető, és egyszerre bizonyítjuk az összes konzisztenciáját.

Amit a rendszerünk lefed

Univerzum-szintek **bármilyen jól-rendezett halmazt** alkothatnak.

$$\text{Set } i : \text{Set } (i + 1) : \dots : \text{Set } \omega : \text{Set } (\omega + 1) : \dots$$

Szintek fölötti kvantifikáció, tetszőleges számítások szinteken.

$$\text{myId} : (i : \mathbb{N}) \rightarrow (j : \mathbb{N}) \rightarrow (A : \text{Set } (i + j)) \rightarrow A \rightarrow A$$
$$\text{myId } i \ j \ A \ x = x$$

Kumulativitás

$$\mathbb{N} : \text{Set}_0$$
$$\mathbb{N} : \text{Set}_1$$
$$\dots$$

Visszavezetjük az összes feature-t egy már ismert feature-re, az **induktív-rekurzív** definíciókra.

Az indukció-rekurzió egy típuselméleti változata a halmazelméleti **Mahlo kardinálisoknak**.

```
Univ   : Set
Nat     : Univ
Π      : (A : Univ) → (Interp Univ → Univ) → Univ
```

```
Interp : Univ → Set
Interp Nat      = ℕ
Interp (Π A B) = (x : Interp A) → Interp (B x)
```

“Generalized Universe Hierarchies and First-Class Universe Levels”

Elbírálás alatt FSCD 2021 konferenciára.

Köszönöm a figyelmet!