Univerzumok Típuselméletben

Kovács András[a]

2021 április 8., EFOP Workshop

[a] A szerzőt az Európai Unió támogatta, közös finanszírozásban az Európai Szociális Alappal (EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002).

Russell paradoxon és méret-problémák

Nincs olyan S halmaz egy konzisztens halmazelméletben, hogy $x \in S$ pontosan akkor, ha $x \notin x$.

Alternatív fogalmazás:

- Borbély paradoxon
- Összes halmaz halmaza

Kapcsolódó:

- Valós számok nem megszámlálhatóak
- Gödel első nem-teljességi tétele
- Megállási probléma

(Általánosításuk: Lawvere fixpont tétele)

Megoldás univerzumokkal

Csak **létező halmaz részhalmazát** definiálhatjuk logikai formulával.

De olykor szeretnénk kvantifikálni egy halmazelmélet **minden halmaza** fölött.

Univerzum: halmaz, ami tartalmazza egy halmazelmélet (pl. ZF) összes halmazát.

Gödel, Russell: ZF-ben nincs univerzum, ami az összes ZF halmazt tartalmazza.

Új univerzumokat axiómaként kell felvenni.

Típuselméletben

Típuselméletek:

- A halmazelméletek alternatívái.
- Tételbizonyító-rendszerek gyakori alapja.
- Bizonyításra és programozásra egyszerre alkalmas.

Formális vs. informális univerzum kezelés.

Létező bizonyító-rendszerekben: univerzum megvalósítások sokasága kisebb-nagyobb eltérésekkel.

Szeretnénk ezeket lefedni egy általános szemantikával.

Példa

Agda:

```
ℕ            : Set₀
Set₀         : Set₁
Set₁         : Set₂
(ℕ → Set₀)   : Set₁
(Set₀ → Bool) : Set₁
```

Identitás függvény minden “kis” halmazon:

```
id : (A : Set₀) → A → A
id A x = x
```

Minden i-re $\mathrm{Set_i} : \mathrm{Set_{i+1}}$.

Ellentmondás lenne: $\mathrm{Set_i} : \mathrm{Set_i}$.

Kiterjesztések

Az alap rendszer vesződséges tud lenni:

```
id₀ : (A : Set₀) → A → A
id₁ : (A : Set₁) → A → A
...
```

Coq/Agda/Lean-ben extra feature-ök vannak. Pl. univerzum polimorfizmus Agda-ban:

```
id : (l : Level)(A : Set l) → A → A
id l A x = x
```

Variációk

Mennyi univerzum? Agda/Coq: megszámlálható.

Univerzumok teljesen rendzettek? Agda/Coq: igen.

Milyen univerzum polimorfizmus?. Coq: korlátos polimorfizmus. Agda: nincsenek korlátok. Példa korláttal:

```
myId : (i : ℕ) → i < 3 → (A : Set i) → A → A
myId i p A x = x
```

Milyen műveletek vannak univerzum-szinteken? Az Agda liberálisabb a Coq-nál:

```
ℕtoLevel : ℕ → Level
```

Kumulativitás. Agda: nincs. Coq: van. Kumulativitás: ha `A : Set i`, akkor `A : Set (i + 1)`.

Kutatási célok

Szeretnénk belátni, hogy a különféle variációk mind jól viselkednek.

Jól viselkedés:

- Logikai konzisztencia.
- Igaz, hogy a típuselmélet egy programozási nyelv? Azaz: programok le kell, hogy fussanak elakadás nélkül. (Nincs jelenlegi munkában)
- Eldönthető a bizonyítások validálása? (Nincs jelenlegi munkában)

Egy általános rendszert használunk, ahol sok feature modellezhető, és egyszerre bizonyítjuk az összes konzisztenciáját.

Amit a rendszerünk lefed

Univerzum-szintek **bármilyen jól-rendezett halmazt** alkothatnak.

```
Set i : Set (i + 1) : ... : Set ω : Set (ω + 1) : ...
```

Szintek fölötti kvantifikáció, tetszőleges számítások szinteken.

```
myId : (i : ℕ) → (j : ℕ) → (A : Set (i + j)) → A → A
myId i j A x = x
```

Kumulativitás

```
ℕ : Set₀
ℕ : Set₁
...
```

Megvalósítás

Visszavezetjük az összes feature-t egy már ismert feature-re, az **induktív-rekurzív** definíciókra.

Az indukció-rekurzió egy típuselméleti változata a halmazelméleti **Mahlo kardinálisoknak**.

```
Univ   : Set
Nat    : Univ
Π      : (A : Univ) → (Interp Univ → Univ) → Univ

Interp : Univ → Set
Interp Nat     = ℕ
Interp (Π A B) = (x : Interp A) → Interp (B x)
```

Publikáció

“Generalized Universe Hierarchies and First-Class Universe Levels”

Elbírálás alatt FSCD 2021 konferenciára.

Köszönöm a figyelmet!