

Uvod v univerzalno algebro in Mal'cev pogoj

Andraž Kukovičič

Mentorica: izr. prof. dr. Ganna Kudryavtseva

Fakulteta za matematiko in fiziko

2. 12. 2024

Definicija algebre

Tip ali *jezik* algebre \mathbf{A} je množica funkcij oziroma operacij \mathcal{F} , $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}$. Vsaka funkcija $f \in \mathcal{F}$ ima prirejeno nenegativno celo število n , ki ga imenujemo *arnost* ali *rang* f .

Definicija algebre

Tip ali jezik algebre \mathbf{A} je množica funkcij oziroma operacij \mathcal{F} , $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}$. Vsaka funkcija $f \in \mathcal{F}$ ima prirejeno nenegativno celo število n , ki ga imenujemo *arnost* ali *rang* f .

Algebra \mathbf{A} tipa \mathcal{F} je urejeni par (A, F) , kjer je A neprazna množica in F družina operacij s končnim številom argumentov na A , indeksirana s tipom \mathcal{F} tako, da je vsakemu n -arnemu funkcijskemu simbolu f iz \mathcal{F} prirejena n -arna operacija $f^{\mathbf{A}}$ na A , ki jo imenujemo fundamentalna operacija algebre \mathbf{A} .

Definicija algebre

Tip ali jezik algebre \mathbf{A} je množica funkcij oziroma operacij \mathcal{F} , $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}$. Vsaka funkcija $f \in \mathcal{F}$ ima prirejeno nenegativno celo število n , ki ga imenujemo *arnost* ali *rang* f .

Algebra \mathbf{A} tipa \mathcal{F} je urejeni par (A, F) , kjer je A neprazna množica in F družina operacij s končnim številom argumentov na A , indeksirana s tipom \mathcal{F} tako, da je vsakemu n -arnemu funkcijskemu simbolu f iz \mathcal{F} prirejena n -arna operacija $f^{\mathbf{A}}$ na A , ki jo imenujemo fundamentalna operacija algebre \mathbf{A} .

Množico A imenujemo univerzalna množica algebre $\mathbf{A} = (A, F)$.

- **Grupa G** je algebra $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ v kateri veljajo naslednje identitete:

$$G1 \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$G2 \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$G3 \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

- **Grupa G** je algebra $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ v kateri veljajo naslednje identitete:
 - G1 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
 - G2 $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
 - G3 $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$
- **Polgrupe** so algebre (G, \cdot)
- **Monoidi** so algebre $(M, \cdot, 1)$
- **Mreže** so algebre (L, \vee, \wedge)

Neprazna množica M z dvema binarnima operacijama, ki ju označimo z \vee in \wedge je mreža, če zadošča:

$$M1 \quad x \vee y = y \vee x$$

$$M2 \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$M3 \quad x \vee x = x$$

$$M4 \quad x = x \vee (x \wedge y).$$

Neprazna množica M z dvema binarnima operacijama, ki ju označimo z \vee in \wedge je mreža, če zadošča:

$$M1 \quad x \vee y = y \vee x$$

$$M2 \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$M3 \quad x \vee x = x$$

$$M4 \quad x = x \vee (x \wedge y).$$

Ekvivalentno:

Delno urejena množica M je mreža natanko takrat, ko za vsaka $a, b \in M$ obstajata $\sup\{a, b\}$ in $\inf\{a, b\}$.

Primer:

$M = \mathbb{N}$, z \vee označimo najmanjši skupni večkratnik, z \wedge pa največji skupni delitelj števil. Potem je $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$ mreža.

Naj bo \mathbf{A} algebra tipa \mathcal{F} in naj bo θ ekvivalenčna relacija na A . Tedaj je θ *kongruenca* na \mathbf{A} , če zadošča naslednjemu pogoju:

za vsak n -arni funkcijski simbol $f \in \mathcal{F}$ in elemente $a_i, b_i \in A$, če velja $a_i \theta b_i$ za vse $1 \leq i \leq n$, potem velja $f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)$.

Z $\text{Con}\mathbf{A}$ označimo množico vseh kongruenc algebre \mathbf{A} .

Naj bo \mathbf{A} algebra tipa \mathcal{F} in naj bo θ ekvivalenčna relacija na A . Tedaj je θ *kongruenca* na \mathbf{A} , če zadošča naslednjemu pogoju:

za vsak n -arni funkcijski simbol $f \in \mathcal{F}$ in elemente $a_i, b_i \in A$, če velja $a_i \theta b_i$ za vse $1 \leq i \leq n$, potem velja $f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)$.

Z $\text{Con}\mathbf{A}$ označimo množico vseh kongruenc algebre \mathbf{A} .

Če $\text{Con}\mathbf{A}$ opremimo z operacijama \wedge in \vee , ki sta definirani:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2 \text{ in}$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \dots$$

postane $\text{Con}\mathbf{A}$ mreža.

Pri tem je $\theta_1 \vee \theta_2$ najmanjša kongruenca, ki vsebuje θ_1 in θ_2 .

Primer:

Naj bo \mathbf{G} grupa.

Če je $\theta \in \text{Con}\mathbf{G}$ potem z $[1]_\theta$ označimo ekvivalenčni razred enote 1.

$[1]_\theta$ je univerzalna množica podgrupe edinke grupe \mathbf{G} .

Za poljubna $a, b \in G$ velja $(a, b) \in \theta \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in [1]_\theta$.

Če je $\mathbf{N} \triangleleft \mathbf{G}$, potem je relacija na G definirana z:

$(a, b) \in \theta \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in N$ kongruenca na \mathbf{G} in $[1]_\theta = N$.

Preslikava s predpisom $\theta \mapsto [1]_\theta$ je bijekcija med kongruencami na \mathbf{G} in edinkami grupe \mathbf{G} .

Identiteta

Identiteta tipa \mathcal{F} nad X je izraz oblike $p \approx q$, kjer sta $p, q \in T(X)$.

$T(X)$ je množica vseh termov tipa \mathcal{F} nad X , kjer je X množica spremenljivk.

Algebra \mathbf{A} tipa \mathcal{F} zadošča $p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n)$, če za vsako izbiro $a_1, \dots, a_n \in A$ velja: $p^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \approx q^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$.

Oznaka: $\mathbf{A} \models p \approx q$.

Razred algeber K zadošča $p \approx q$, če vsaka algebra iz K zadošča $p \approx q$.

Oznaka: $K \models p \approx q$.

Mal'cev izrek

Algebra **A** je *kongruenčno-permutabilna*, če vsak par kongruenc komutira:
 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.

Neprazen razred K algeber tipa \mathcal{F} imenujemo *raznoterost*, če je zaprt za podalgebre, slike homomorfizmov in direktne produkte.

Mal'cev izrek

Algebra **A** je *kongruenčno-permutabilna*, če vsak par kongruenc komutira:
 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.

Neprazen razred K algeber tipa \mathcal{F} imenujemo *raznoterost*, če je zaprt za podalgebre, slike homomorfizmov in direktne produkte.

Izrek: Naj bo V raznoterost tipa F . Raznoterost V je kongruenčno-permutabilna natanko takrat, ko obstaja term $p(x, y, z)$, da:

$$V \models p(x, x, y) \approx y$$

in

$$V \models p(x, y, y) \approx x.$$

Primeri: Grupe, kolobarji.