Uvod v univerzalno algebro in Mal'cev pogoj

Andraž Kukovičič

Mentorica: izr. prof. dr. Ganna Kudryavtseva

Fakulteta za matematiko in fiziko

2. 12. 2024

Definicija algebre

Tip ali *jezik* algebre je množica F funkcijskih simbolov. Vsak simbol $f \in \mathcal{F}$ ima prirejeno nenegativno celo število n, ki ga imenujemo *-arnost* ali *rang* f.
Algebra $\mathbf{A}$ tipa $\mathcal{F}$ je urejeni par (A, F), kjer je A neprazna množica in F družina operacij s končnim številom argumentov na A indeksirana z jezikom $\mathcal{F}$ tako, da je vsakemu n-arnemu funkcijskemu simbolu f iz $\mathcal{F}$ prirejena n-arna operacija $f^{\mathbf{A}}$ na A, ki jo imenujemo fundamnetalna operacija algebre $\mathbf{A}$
Množico A imenujemo univerzalna množica algebre $\mathbf{A} = (A, F)$.

Primeri algeber

Grupe Grupa **G** je algebra $\left(G, \cdot, ^{-1}, 1\right)$ v kateri veljajo naslednje identitete:

- **G1** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- **G2** $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- **G3** $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$

Polgrupe so algebre $(G, \cdot)$

Monoidi so algebre $(M, \cdot, 1)$

Mreže so algebre $(L, \vee, \wedge)$

Mreže

Neprazna množica M z dvema binarnima operacijama, ki ju označimo z $\vee$ in $\wedge$ je mreža, če zadošča:

M1 $x \vee y = y \vee x$

M2 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

M3 $x \vee x = x$

M4 $x = x \vee (x \wedge y)$.

Ekvivalentno:
Delno urejena množica M je mreža natanko takrat ko za vsaka $a, b \in M$ obstajata $sup\{a, b\}$ in $inf\{a, b\}$.
Primer:
$M = \mathbb{N}$, z $\vee$ označimo najmanjši skupni večkratnik, z $\wedge$ pa največji skupni delitelj števil. Potem je $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$ mreža.

Kongruence

Naj bo $\mathbf{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ in naj bo $\theta \in Eq(A)$. Tedaj je θ *kongruenca* na $\mathbf{A}$, če zadošča naslednjemu pogoju:
Za vsak n-arni funkcijski simbol $f \in \mathcal{F}$ in elemente $a_i, b_i \in A$, če velja $a_i \theta b_i$ za vse $1 \leq i \leq n$, potem velja $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\, \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, , b_n)$.
Z $ConA$ označimo množico vseh kongruenc algebre A.
Če $ConA$ opremimo z operacijama $\wedge$ in $\vee$, ki sta definirani:
$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$ in $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup \ldots$
postane $ConA$ mreža.

Primer:
Naj bo **G** grupa.
Če je $\theta \in Con\mathbf{G}$ potem je $1/\theta$ univerzalna množica podgrupe edinke grupe **G** in velja $a, b \in G$ velja $(a, b) \in \theta \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in 1/\theta$.
Če je $\mathbf{N} \lhd \mathbf{G}$, potem je relacija na G definirana:
$(a, b) \in \theta \Leftrightarrow a \ldots b^{-1} \in N$ kongruenca na **G** in $1/\theta = N$
. Preslikava s predpisom $\theta \mapsto 1/\theta$ je bijekcija med kongruencami na **G** in edinkami grupe **G**.

Mal'cev izrek

Algebra **A** je *kongruenčno-permutabilna*, če vsak par kongruenc permutira:
$\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$
Neprazen razred K algeber tipa $\mathcal{F}$ imenujemo *raznoterost*, če je zaprt za podalgebre, slike homomorfizmov in direkten produkte.

Izrek : Naj bo V raznoterost tipa F. Raznoterost V je kongruenčno-permutabilna natanko takrat, ko obstaja pogoj $p(x,y,z)$, da:

$$V \models p(x,x,y) = y$$

in

$$V \models p(x,y,y) = x.$$