

# Uvod v univerzalno algebro in Mal'cev pogoj

Andraž Kukovičič

Mentorica: izr. prof. dr. Ganna Kudryavtseva

Fakulteta za matematiko in fiziko

2. 12. 2024

# Definicija algebre

*Tip* ali *jezik* algebre  $\mathbf{A}$  je množica funkcij oziroma operacij  $\mathcal{F}$ ,  $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}$ . Vsaka funkcija  $f \in \mathcal{F}$  ima prirejeno nenegativno celo število  $n$ , ki ga imenujemo *arnost* ali *rang*  $f$ .

# Definicija algebre

*Tip ali jezik* algebre  $\mathbf{A}$  je množica funkcij oziroma operacij  $\mathcal{F}$ ,  $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}$ . Vsaka funkcija  $f \in \mathcal{F}$  ima prirejeno nenegativno celo število  $n$ , ki ga imenujemo *arnost* ali *rang*  $f$ .

*Algebra*  $\mathbf{A}$  tipa  $\mathcal{F}$  je urejeni par  $(A, F)$ , kjer je  $A$  neprazna množica in  $F$  družina operacij s končnim številom argumentov na  $A$ , indeksirana s tipom  $\mathcal{F}$  tako, da je vsakemu  $n$ -arnemu funkcijskemu simbolu  $f$  iz  $\mathcal{F}$  prirejena  $n$ -arna operacija  $f^{\mathbf{A}}$  na  $A$ , ki jo imenujemo fundamentalna operacija algebre  $\mathbf{A}$ .

# Definicija algebre

*Tip ali jezik* algebre  $\mathbf{A}$  je množica funkcij oziroma operacij  $\mathcal{F}$ ,  $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}$ . Vsaka funkcija  $f \in \mathcal{F}$  ima prirejeno nenegativno celo število  $n$ , ki ga imenujemo *arnost* ali *rang*  $f$ .

*Algebra*  $\mathbf{A}$  tipa  $\mathcal{F}$  je urejeni par  $(A, F)$ , kjer je  $A$  neprazna množica in  $F$  družina operacij s končnim številom argumentov na  $A$ , indeksirana s tipom  $\mathcal{F}$  tako, da je vsakemu  $n$ -arnemu funkcijskemu simbolu  $f$  iz  $\mathcal{F}$  prirejena  $n$ -arna operacija  $f^{\mathbf{A}}$  na  $A$ , ki jo imenujemo fundamentalna operacija algebre  $\mathbf{A}$ .

Množico  $A$  imenujemo univerzalna množica algebre  $\mathbf{A} = (A, F)$ .

- **Grupa  $G$**  je algebra  $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$  v kateri veljajo naslednje identitete:

$$G1 \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$G2 \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$G3 \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

- **Grupa  $G$**  je algebra  $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$  v kateri veljajo naslednje identitete:
  - G1  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  - G2  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
  - G3  $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$
- **Polgrupe** so algebre  $(G, \cdot)$
- **Monoidi** so algebre  $(M, \cdot, 1)$
- **Mreže** so algebre  $(L, \vee, \wedge)$

Neprazna množica  $M$  z dvema binarnima operacijama, ki ju označimo z  $\vee$  in  $\wedge$  je mreža, če zadošča:

$$M1 \quad x \vee y = y \vee x$$

$$M2 \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$M3 \quad x \vee x = x$$

$$M4 \quad x = x \vee (x \wedge y).$$

Neprazna množica  $M$  z dvema binarnima operacijama, ki ju označimo z  $\vee$  in  $\wedge$  je mreža, če zadošča:

$$M1 \quad x \vee y = y \vee x$$

$$M2 \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$M3 \quad x \vee x = x$$

$$M4 \quad x = x \vee (x \wedge y).$$

Ekvivalentno:

Delno urejena množica  $M$  je mreža natanko takrat, ko za vsaka  $a, b \in M$  obstajata  $\sup\{a, b\}$  in  $\inf\{a, b\}$ .

Primer:

$M = \mathbb{N}$ , z  $\vee$  označimo najmanjši skupni večkratnik, z  $\wedge$  pa največji skupni delitelj števil. Potem je  $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$  mreža.



Naj bo  $\mathbf{A}$  algebra tipa  $\mathcal{F}$  in naj bo  $\theta$  ekvivalenčna relacija na  $A$ . Tedaj je  $\theta$  *kongruenca* na  $\mathbf{A}$ , če zadošča naslednjemu pogoju:

za vsak  $n$ -arni funkcijski simbol  $f \in \mathcal{F}$  in elemente  $a_i, b_i \in A$ , če velja  $a_i \theta b_i$  za vse  $1 \leq i \leq n$ , potem velja  $f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)$ .

Z  $\text{Con}\mathbf{A}$  označimo množico vseh kongruenc algebre  $\mathbf{A}$ .

Naj bo  $\mathbf{A}$  algebra tipa  $\mathcal{F}$  in naj bo  $\theta$  ekvivalenčna relacija na  $A$ . Tedaj je  $\theta$  *kongruenca* na  $\mathbf{A}$ , če zadošča naslednjemu pogoju:

za vsak  $n$ -arni funkcijski simbol  $f \in \mathcal{F}$  in elemente  $a_i, b_i \in A$ , če velja  $a_i \theta b_i$  za vse  $1 \leq i \leq n$ , potem velja  $f^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)$ .

Z  $\text{Con}\mathbf{A}$  označimo množico vseh kongruenc algebre  $\mathbf{A}$ .

Če  $\text{Con}\mathbf{A}$  opremimo z operacijama  $\wedge$  in  $\vee$ , ki sta definirani:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2 \text{ in}$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \dots$$

postane  $\text{Con}\mathbf{A}$  mreža.

Pri tem je  $\theta_1 \vee \theta_2$  najmanjša kongruenca, ki vsebuje  $\theta_1$  in  $\theta_2$ .

### Primer:

Naj bo  $\mathbf{G}$  grupa.

Če je  $\theta \in \text{Con}\mathbf{G}$  potem z  $[1]_\theta$  označimo ekvivalenčni razred enote 1.

$[1]_\theta$  je univerzalna množica podgrupe edinke grupe  $\mathbf{G}$ .

Za poljubna  $a, b \in G$  velja  $(a, b) \in \theta \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in [1]_\theta$ .

Če je  $\mathbf{N} \triangleleft \mathbf{G}$ , potem je relacija na  $G$  definirana z:

$(a, b) \in \theta \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in N$  kongruenca na  $\mathbf{G}$  in  $[1]_\theta = N$ .

Preslikava s predpisom  $\theta \mapsto [1]_\theta$  je bijekcija med kongruencami na  $\mathbf{G}$  in edinkami grupe  $\mathbf{G}$ .

# Identiteta

*Identiteta* tipa  $\mathcal{F}$  nad  $X$  je izraz oblike  $p \approx q$ , kjer sta  $p, q \in T(X)$ .

$T(X)$  je množica vseh termov tipa  $\mathcal{F}$  nad  $X$ . Kjer je  $X$  množica spremenljivk.

Algebra  $\mathbf{A}$  tipa  $\mathcal{F}$  zadošča  $p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n)$ , če za vsako izbiro  $a_1, \dots, a_n \in A$  velja:  $p^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) \approx q^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)$ .

Oznaka:  $\mathbf{A} \models p \approx q$ .

Razred algeber  $K$  zadošča  $p \approx q$ , če vsaka članica  $K$  zadošča  $p \approx q$ .

Oznaka:  $K \models p \approx q$ .

# Mal'cev izrek

Algebra **A** je *kongruenčno-permutabilna*, če vsak par kongruenc komutira:  
 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ .

Neprazen razred  $K$  algeber tipa  $\mathcal{F}$  imenujemo *raznoterost*, če je zaprt za podalgebre, slike homomorfizmov in direktne produkte.

# Mal'cev izrek

Algebra **A** je *kongruenčno-permutabilna*, če vsak par kongruenc komutira:  
 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ .

Neprazen razred  $K$  algeber tipa  $\mathcal{F}$  imenujemo *raznoterost*, če je zaprt za podalgebre, slike homomorfizmov in direktne produkte.

**Izrek:** Naj bo  $V$  raznoterost tipa  $F$ . Raznoterost  $V$  je kongruenčno-permutabilna natanko takrat, ko obstaja term  $p(x, y, z)$ , da:

$$V \models p(x, x, y) \approx y$$

in

$$V \models p(x, y, y) \approx x.$$

**Primeri:** Grupe, kolobarji.