Uvod v univerzalno algebro in Mal'cev pogoj

Andraž Kukovičič
Mentorica: izr. prof. dr. Ganna Kudryavtseva

Fakulteta za matematiko in fiziko

2. 12. 2024

Definicija algebre

Tip ali *jezik* algebre $\mathbf{A}$ je množica funkcij oziroma operacij $\mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$. Vsaka funkcija $f \in \mathcal{F}$ ima prirejeno nenegativno celo število n, ki ga imenujemo *arnost* ali *rang* f.

Definicija algebre

Tip ali *jezik* algebre $\mathbf{A}$ je množica funkcij oziroma operacij $\mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$. Vsaka funkcija $f \in \mathcal{F}$ ima prirejeno nenegativno celo število n, ki ga imenujemo *arnost* ali *rang* f.

Algebra $\mathbf{A}$ tipa $\mathcal{F}$ je urejeni par (A, F), kjer je A neprazna množica in F družina operacij s končnim številom argumentov na A, indeksirana s tipom $\mathcal{F}$ tako, da je vsakemu n-arnemu funkcijskemu simbolu f iz $\mathcal{F}$ prirejena n-arna operacija $f^{\mathbf{A}}$ na A, ki jo imenujemo fundamentalna operacija algebre $\mathbf{A}$.

Definicija algebre

Tip ali *jezik* algebre $\mathbf{A}$ je množica funkcij oziroma operacij $\mathcal{F}$, $f \in \mathcal{F}, f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$. Vsaka funkcija $f \in \mathcal{F}$ ima prirejeno nenegativno celo število n, ki ga imenujemo *arnost* ali *rang* f.

Algebra $\mathbf{A}$ tipa $\mathcal{F}$ je urejeni par (A, F), kjer je A neprazna množica in F družina operacij s končnim številom argumentov na A, indeksirana s tipom $\mathcal{F}$ tako, da je vsakemu n-arnemu funkcijskemu simbolu f iz $\mathcal{F}$ prirejena n-arna operacija $f^{\mathbf{A}}$ na A, ki jo imenujemo fundamentalna operacija algebre $\mathbf{A}$.

Množico A imenujemo univerzalna množica algebre $\mathbf{A} = (A, F)$.

Primeri algeber

- Grupa **G** je algebra $\left(G, \cdot, ^{-1}, 1\right)$ v kateri veljajo naslednje identitete:
  - G1 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  - G2 $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
  - G3 $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$

Primeri algeber

- Grupa **G** je algebra $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ v kateri veljajo naslednje identitete:
  - G1 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  - G2 $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
  - G3 $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$
- Polgrupe so algebre $(G, \cdot)$
- Monoidi so algebre $(M, \cdot, 1)$
- Mreže so algebre $(L, \vee, \wedge)$

Mreže

Neprazna množica M z dvema binarnima operacijama, ki ju označimo z $\vee$ in $\wedge$ je mreža, če zadošča:

M1 $x \vee y = y \vee x$

M2 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

M3 $x \vee x = x$

M4 $x = x \vee (x \wedge y)$.

Mreže

Neprazna množica M z dvema binarnima operacijama, ki ju označimo z $\vee$ in $\wedge$ je mreža, če zadošča:

M1 $x \vee y = y \vee x$

M2 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

M3 $x \vee x = x$

M4 $x = x \vee (x \wedge y)$.

Ekvivalentno:

Delno urejena množica M je mreža natanko takrat, ko za vsaka $a, b \in M$ obstajata $sup\{a, b\}$ in $inf\{a, b\}$.

Primer:

$M = \mathbb{N}$, z $\vee$ označimo najmanjši skupni večkratnik, z $\wedge$ pa največji skupni delitelj števil. Potem je $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$ mreža.

Kongruence

Naj bo $\mathbf{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ in naj bo θ ekvivalenčna relacija na A. Tedaj je θ *kongruenca* na $\mathbf{A}$, če zadošča naslednjemu pogoju:
za vsak n-arni funkcijski simbol $f \in \mathcal{F}$ in elemente $a_i, b_i \in A$, če velja $a_i \theta b_i$ za vse $1 \leq i \leq n$, potem velja $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\, \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)$.

Z $Con\mathbf{A}$ označimo množico vseh kongruenc algebre $\mathbf{A}$.

Kongruence

Naj bo $\mathbf{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ in naj bo θ ekvivalenčna relacija na A. Tedaj je θ *kongruenca* na $\mathbf{A}$, če zadošča naslednjemu pogoju:
za vsak n-arni funkcijski simbol $f \in \mathcal{F}$ in elemente $a_i, b_i \in A$, če velja $a_i \theta b_i$ za vse $1 \leq i \leq n$, potem velja $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\, \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)$.

Z $Con\mathbf{A}$ označimo množico vseh kongruenc algebre $\mathbf{A}$.
Če $Con\mathbf{A}$ opremimo z operacijama $\wedge$ in $\vee$, ki sta definirani:
$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$ in
$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \ldots$
postane $Con\mathbf{A}$ mreža.
Pri tem je $\theta_1 \vee \theta_2$ najmanjša kongruenca, ki vsebuje θ_1 in θ_2.

Primer:

Naj bo **G** grupa.
Če je $\theta \in Con\mathbf{G}$ potem z $[1]_\theta$ označimo ekvivalenčni razred enote 1.
$[1]_\theta$ je univerzalna množica podgrupe edinke grupe **G**.

Za poljubna $a, b \in G$ velja $(a, b) \in \theta \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in [1]_\theta$.

Če je $\mathbf{N} \lhd \mathbf{G}$, potem je relacija na G definirana z:
$(a, b) \in \theta \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in N$ kongruenca na **G** in $[1]_\theta = N$.

Preslikava s predpisom $\theta \mapsto [1]_\theta$ je bijekcija med kongruencami na **G** in edinkami grupe **G**.

Identiteta

Identiteta tipa $\mathcal{F}$ nad X je izraz oblike $p \approx q$, kjer sta $p, q \in T(X)$.

$T(X)$ je množica vseh termov tipa $\mathcal{F}$ nad X, kjer je X množica spremenljivk.

Algebra $\mathbf{A}$ tipa $\mathcal{F}$ zadošča $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$, če za vsako izbiro $a_1, \ldots, a_n \in A$ velja: $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \approx q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$.
Oznaka: $\mathbf{A} \models p \approx q$.

Razred algeber K zadošča $p \approx q$, če vsaka algebra iz K zadošča $p \approx q$.
Oznaka: $K \models p \approx q$.

Mal'cev izrek

Algebra $\mathbf{A}$ je *kongruenčno-permutabilna*, če vsak par kongruenc komutira: $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.
Neprazen razred K algeber tipa $\mathcal{F}$ imenujemo *raznoterost*, če je zaprt za podalgebre, slike homomorfizmov in direktne produkte.

Mal'cev izrek

Algebra $\mathbf{A}$ je *kongruenčno-permutabilna*, če vsak par kongruenc komutira: $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.
Neprazen razred K algeber tipa $\mathcal{F}$ imenujemo *raznoterost*, če je zaprt za podalgebre, slike homomorfizmov in direktne produkte.

Izrek: Naj bo V raznoterost tipa F. Raznoterost V je kongruenčno-permutabilna natanko takrat, ko obstaja term $p(x, y, z)$, da:

$$V \models p(x, x, y) \approx y$$

in

$$V \models p(x, y, y) \approx x.$$

Primera: Grupe, kolobarji.