

СВТ. Отчет по заданию 2.3.

Чаплыгин Андрей

1 Вариант задания

Рассматривается нестационарное уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{b} \cdot \nabla C - \nabla \cdot D \nabla C = f(x, y, t)$$

в области $\Omega \in R^2$ с границей $\partial\Omega$. C — концентрация вещества, $f(x, y, t)$ — функция источников или стоков. На границе заданы граничные условия типа Дирихле

$$C|_{\partial\Omega} = g_D(x, y, t)$$

$D = \text{diag}(d_x, d_y)$ - тензор диффузии, поле конвективных потоков постоянное во времени и пространстве, для простоты будем считать $\bar{b} = (1, 0)$, система замыкается начальными условиями.

Область $\Omega = [0; 200] \times [-100; 100]$, граничные условия на границе $x = 0$:

$$C(0, y, t) = c_0, \quad |y| < a$$

$$C(0, y, t) = 0, \quad |y| > a$$

где $a = 10$, $c_0 = 1$ и $C(x, y, t) = 0$ на оставшейся границе $\partial\Omega$.

Вариант: по пространству МКЭ, по времени Кранк-Николсон.

Задание 2.3.: посчитать аналитическое решение, сравнить численные результаты с аналитическим решением.

2 Результаты

Case 1. $dx = 1$, $dy = 10^{-3}$. Сетки 200×200 и 400×400 . Числа Пекле $P_{eh} = 1$ и $P_{eh} = 0.5$ соответственно. Приведем результат вычисления аналитического решения на момент времени $T = 50$ для такой задачи:

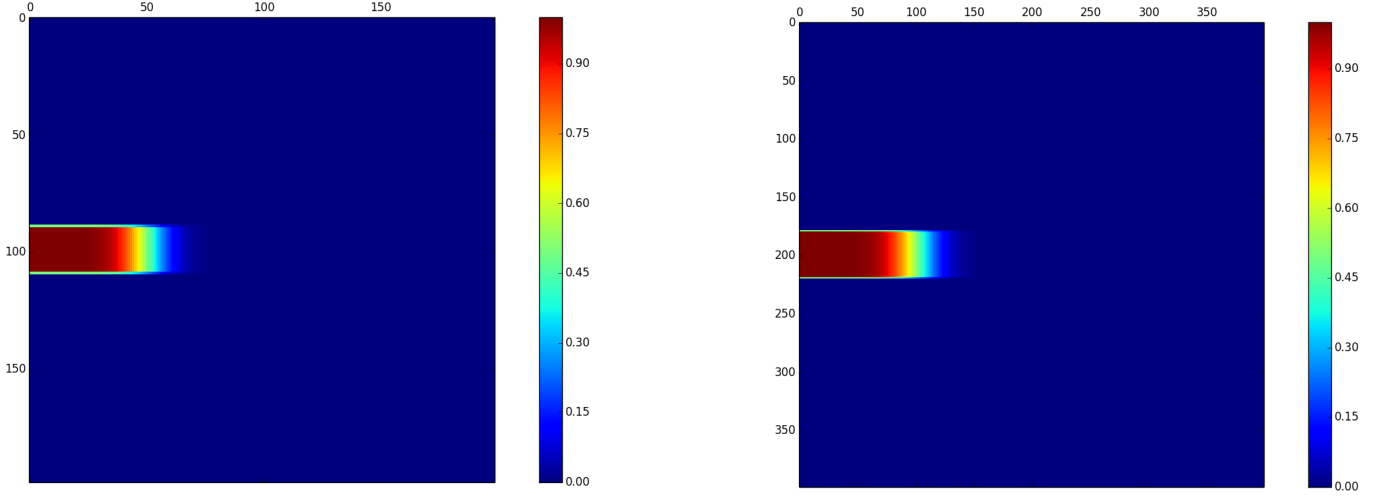


Рис. 1: Аналитическое решение на сетках 200x200 и 400x400

Приведем графики расчетов без использования SUPG, с шагом по времени 1, расчеты на момент времени $T = 50$:

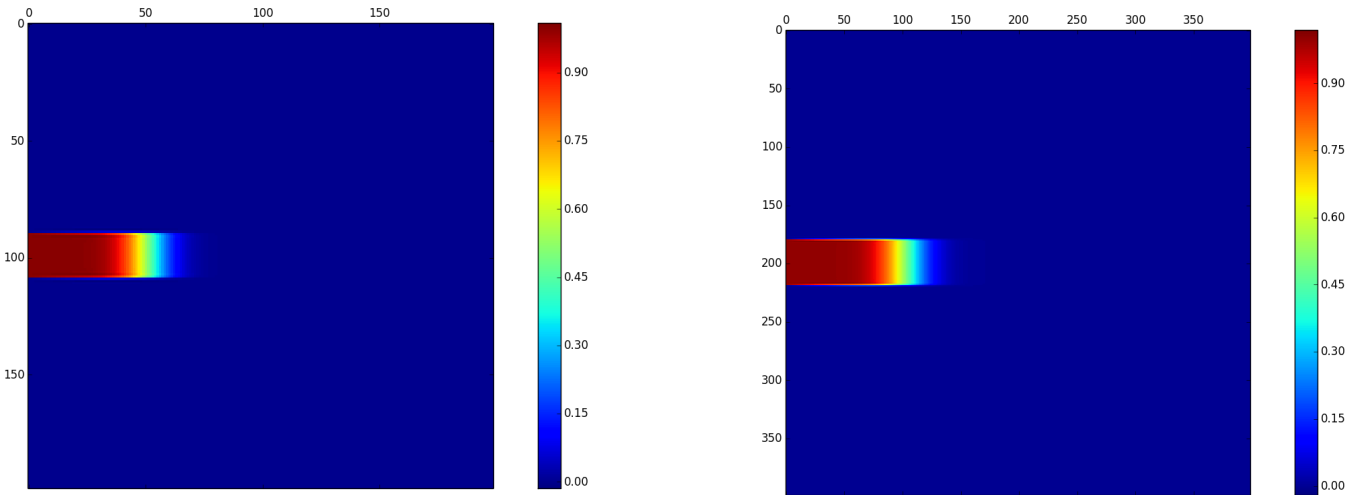


Рис. 2: Численное решение на сетках 200x200 и 400x400

Приведем результаты расчетов без SUPG, с разными шагами по времени:

grid	error norm, $dt = 2$	error norm, $dt = 1$	error norm, $dt = 0.5$	error norm, $dt = 0.25$
200x200	0.32354	0.3124847	0.3096043	0.3081219
400x400	0.19848	0.174413	0.268360	0.2608495

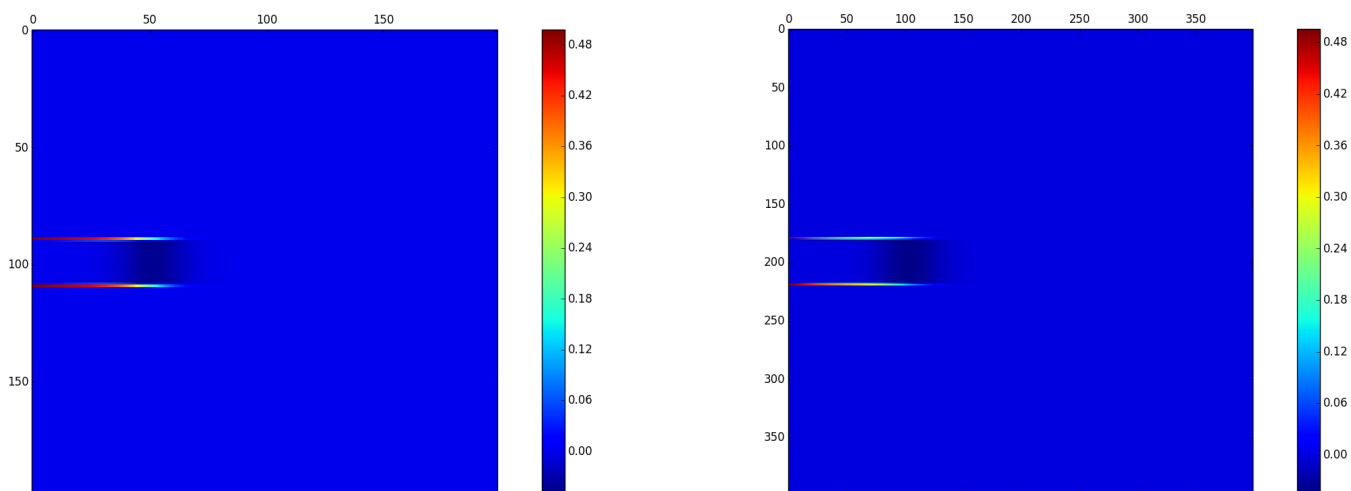


Рис. 3: Ошибка на сетках 200x200 и 400x400

Если ставить на границу посчитанное аналитическое решение, как граничное условие, то результат такой же. Потому что аналитика на границе почти везде равна нулю.

Case 2. $dx = 10^{-2}$, $dy = 10^{-3}$. Сетки 200×200 и 400×400 . Числа Пекле $P_{eh} = 100$ и $P_{eh} = 50$ соответственно. Приведем результат вычисления аналитического решения на момент времени $T = 50$ для такой задачи:

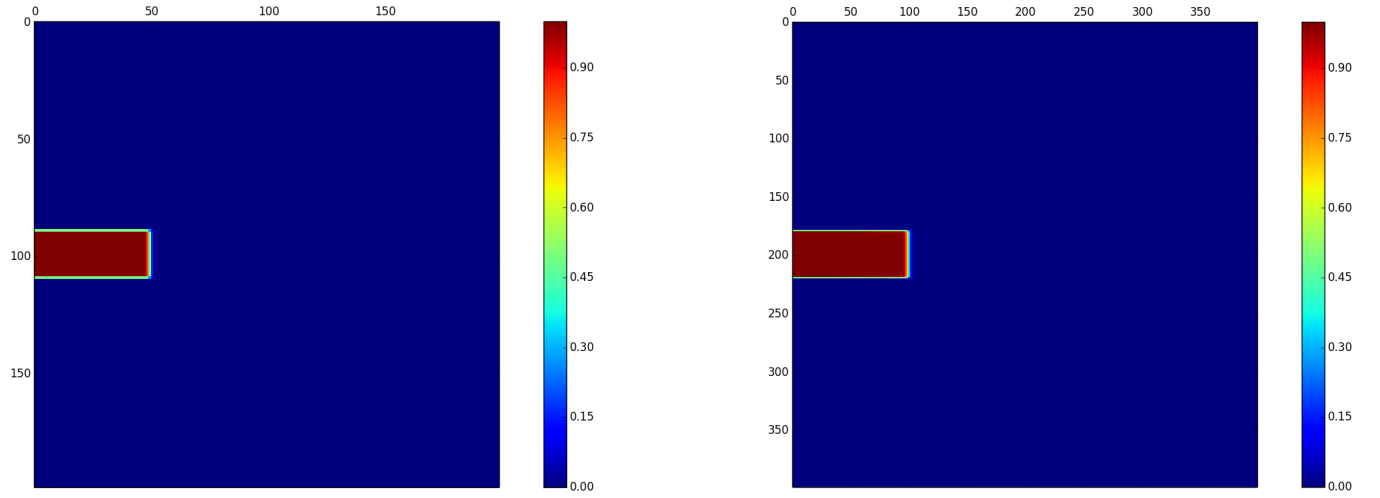


Рис. 4: Аналитическое решение на сетках 200x200 и 400x400

Приведем графики расчетов без использования SUPG, с шагом по времени 1, расчеты на момент времени $T = 50$:

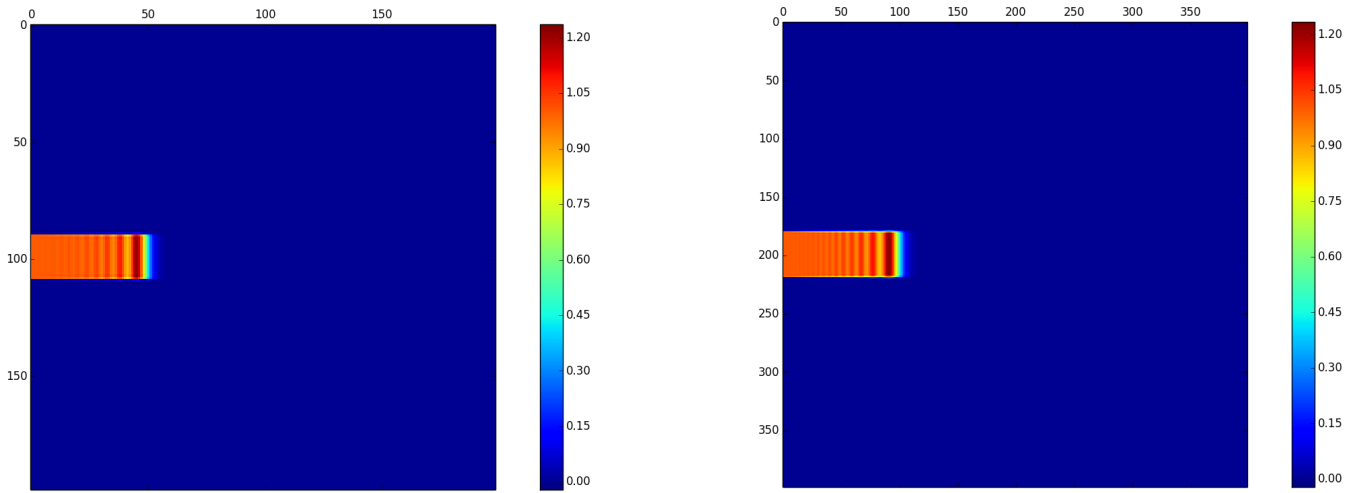


Рис. 5: Численное решение без SUPG на сетках 200x200 и 400x400

Приведем графики расчетов без использования SUPG на сетке 400x400 с шагом по времени 0.5 и 0.25, расчеты на момент времени $T = 50$:

Видно, что с измельчением шага по времени осцилляции в численном решении без SUPG пропадают. Приведем результаты без SUPG с разными шагами по времени: Приведем результаты расчетов без SUPG, с разными шагами по времени:

grid	error norm, $dt = 1$	error norm, $dt = 0.5$	error norm, $dt = 0.25$
200x200	0.363319	0.337237	0.329643
400x400	0.366583	0.30234	0.284003

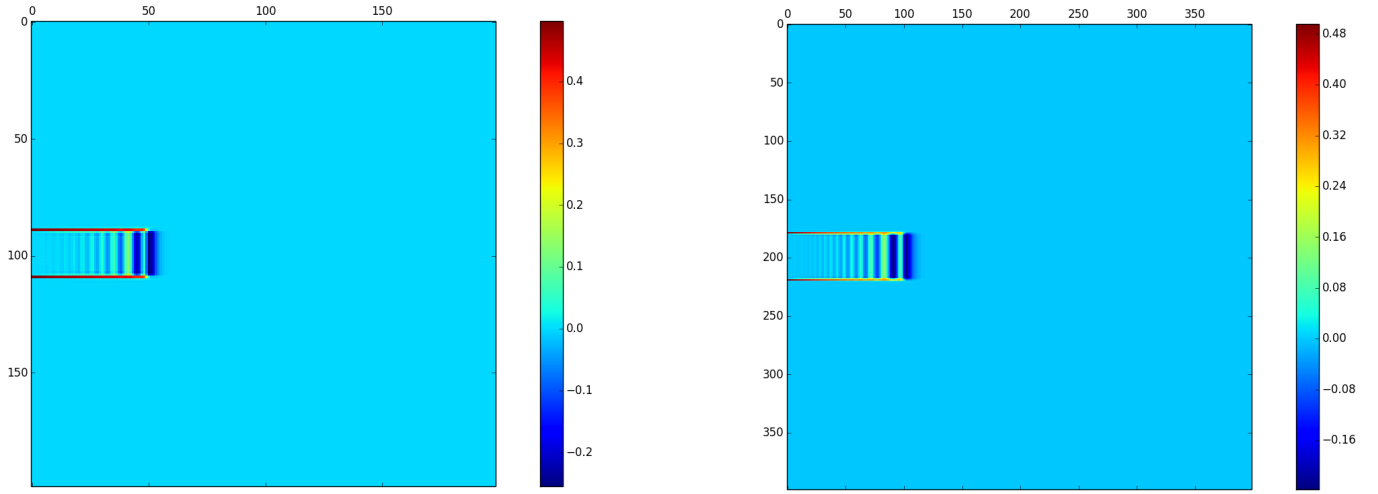


Рис. 6: Ошибка без SUPG на сетках 200x200 и 400x400

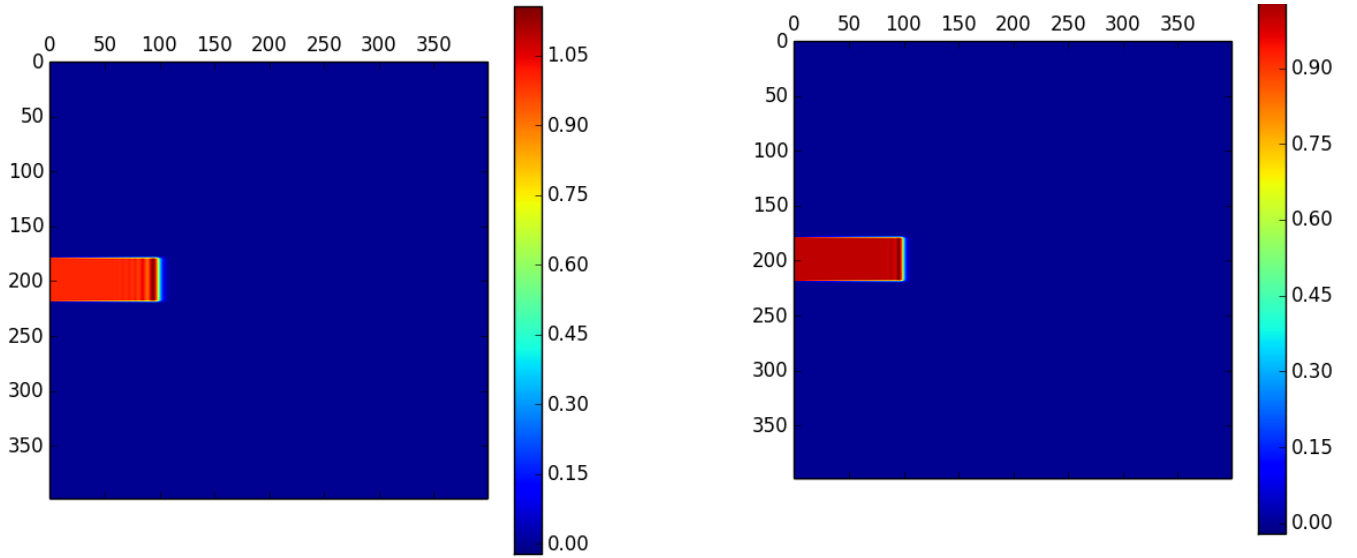


Рис. 7: Численное решение без SUPG на сетке 400x400, шаги по времени 0.5 и 0.25

Приведем графики расчетов с использованием SUPG, с шагом по времени 1, расчеты на момент времени $T = 50$:

Приведем результаты расчетов с использованием SUPG, с разными шагами по времени:

grid	error norm, $dt = 1$	error norm, $dt = 0.5$	error norm, $dt = 0.25$
200x200	0.323039	0.315219	0.311884
400x400	0.229345	0.218509	0.21012

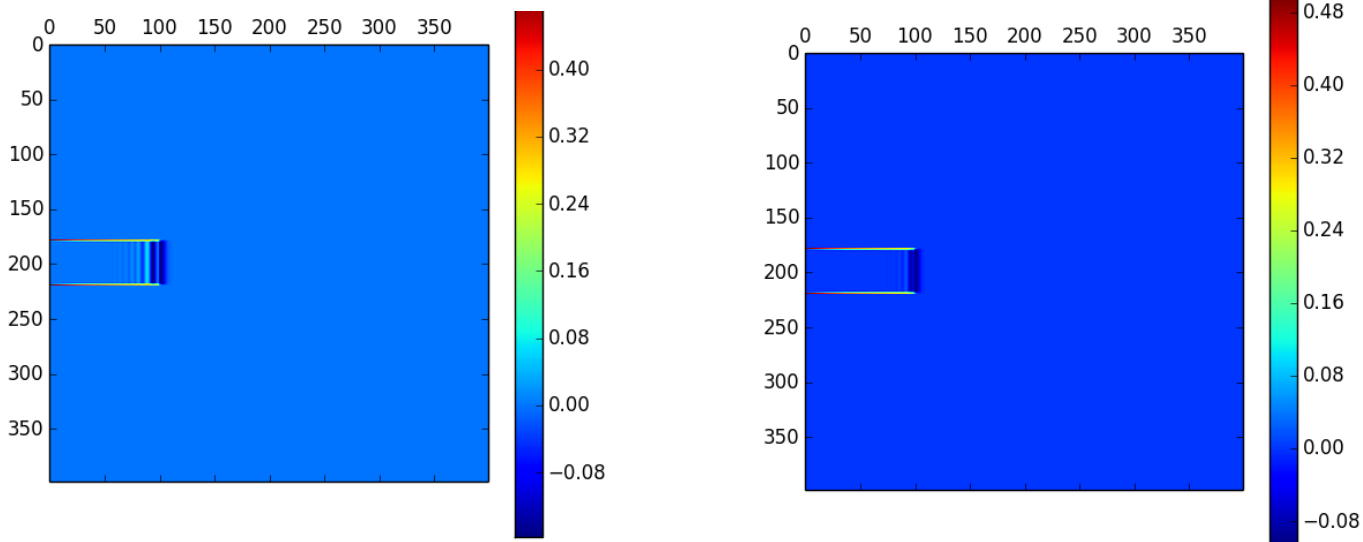


Рис. 8: Ошибка без SUPG на сетке 400x400, шаги по времени 0.5 и 0.25

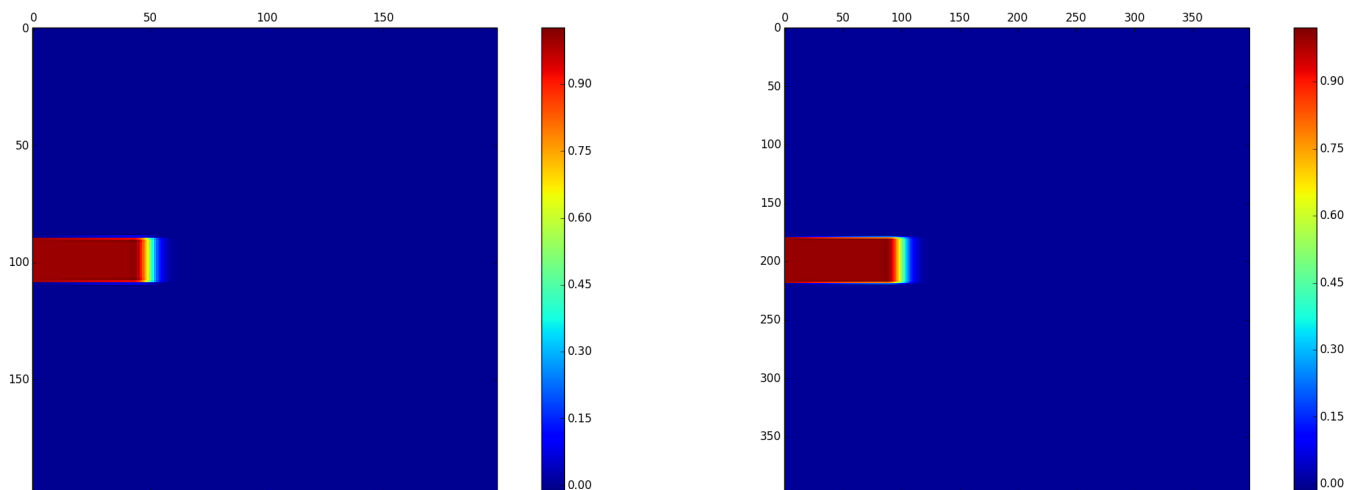


Рис. 9: Численное решение с SUPG на сетках 200x200 и 400x400

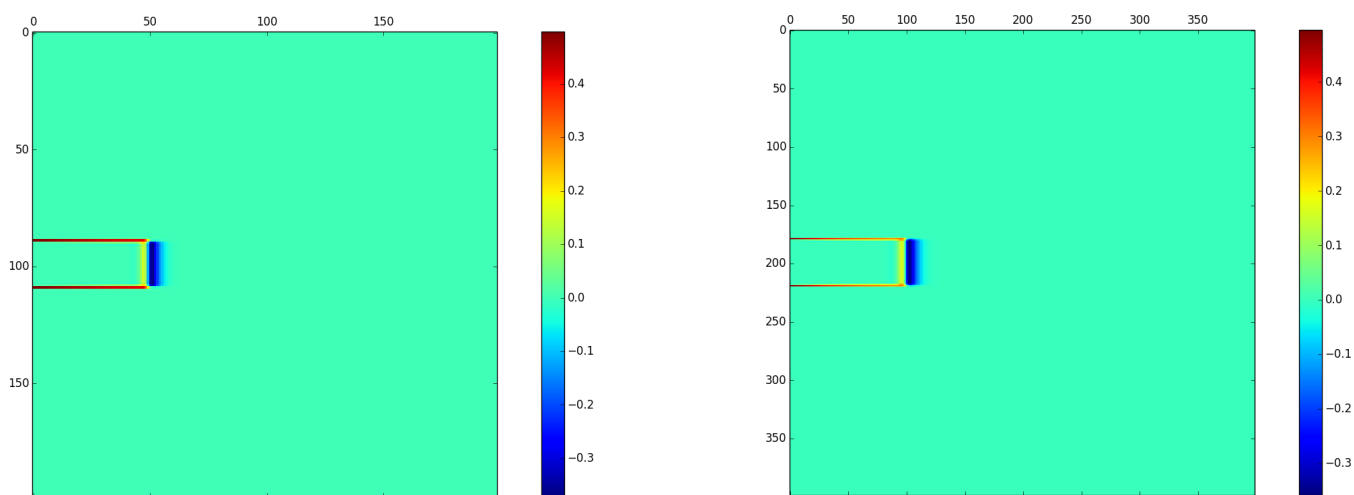


Рис. 10: Ошибка с SUPG на сетках 200x200 и 400x400