Чаплыгин Андрей Викторович

ВМК МГУ, группа 603.

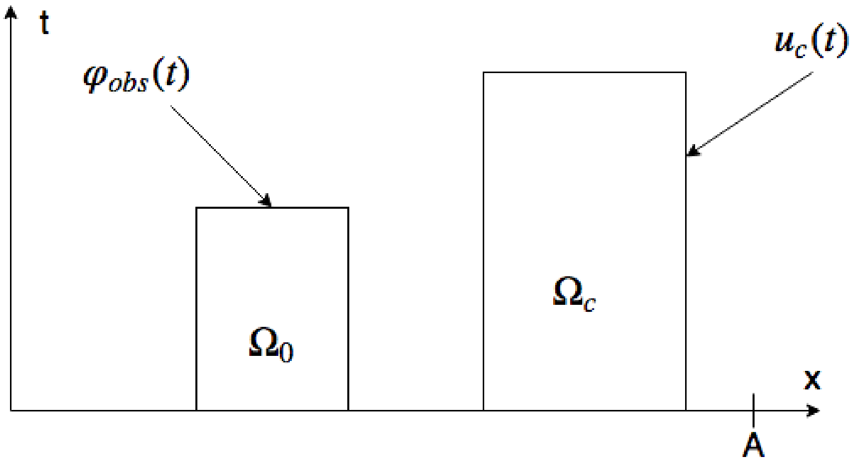
2018
Ноябрь

# 1 Постановка задачи

Найти $\varphi(t,x)$, $u_c(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b\varphi = \omega_c(x)u_c(t), \quad x \in (0,A), t \in (0,\tau) \\ \varphi(t,0) = \varphi(t,A) = 0, \quad \varphi(0,x) = \varphi_0(x) \\ \displaystyle\int_0^A g_{obs}(x)\varphi(t,x)dx = \varphi_{obs}(t)\int_0^A g_{obs}(x)dx \end{cases} \tag{1}$$

где $\varphi_{obs}(t)$ - задана, $g_{obs}(x)$ - характеристическая функция подмножества $\Omega_0 \subset (0,A)$, $\omega_c(x)$ - характеристическая функция подмножества $\Omega_c \subset (0,A)$, $\mu = const, b = const$, $\varphi_0(x)$ - задается явно.




Без ограничения общности можно положить $\varphi_0(x) = 0$, т.к. к этому можно прийти обычной заменой переменной в 1.

# 2 Операторная постановка задачи

Пусть $Q_\tau = (0,A) \times (0,\tau)$ Введем операторы:

1. Оператор $L$:

$$L\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b\varphi$$

где $L : L_2(Q_\tau) \mapsto L_2(Q_\tau)$, с областью определения:
$D(L) = \{C^2(0,A) \bigcap \overline{C(0,A)} \bigcap \overline{C^1(0,\tau)},\ u(0) = u(A) = 0\}$ (классическая постановка).

2. Оператор $B$:

$$Bu_c = \omega_c(x)u_c(t)$$

где $B : L_2(0,\tau) \mapsto L_2(Q_\tau)$, с областью определения: $D(B) = L_2(0,\tau)$.

3. Оператор $C$:

$$C\varphi = \int_0^A g_{obs}(x)\varphi(t,x)dx$$

где $C : L_2(Q_\tau) \mapsto L_2(0,\tau)$, с областью определения: $D(C) = D(L)$

Введем обозначение $\overline{\varphi_{obs}(t)} = \varphi_{obs}(t)\int_0^A g_{obs}(x)dx$. Таким образом для задачи 1 получаем операторную постановку задачи:

$$\begin{cases} L\varphi = Bu_c \\ C\varphi = \overline{\varphi_{obs}(t)} \end{cases} \tag{2}$$

Также введем сопряженные операторы для рассмотренных выше:

1. Оператор $L^*$:

$$L^*v = -\frac{\partial v}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bv$$

где $L^* : L_2(Q_\tau) \mapsto L_2(Q_\tau)$.

2. Оператор $B^*$:

$$B^*v = \int_0^A w_C(x)v(x,t)dx$$

где $B^* : L_2(Q_\tau) \mapsto L_2(0,\tau)$.

3. Оператор $C^*$:

$$C^*v = g_{obs}(x)v(t)$$

где $C^* : L_2(0,\tau) \mapsto L_2(Q_\tau)$.

Форму и свойства приведенных сопряженных операторов можно найти в [1] и [2].

# 3 Обобщенная постановка задачи

Рассмотрим обобщенную постановку задачи. Для этого расширим область определения операторов $L$ и $C$:

$$D(C) = D(L) = \{L_2(0,\tau; \mathring{W}_2^1(0,A)\}$$

И поставим обобщенную формулировку задачи (2):

$$\begin{cases} L\varphi = Bu_c \\ J(\varphi(u_C)) = \inf\limits_{v\in D(B)} J(\varphi(v)) \end{cases} \tag{3}$$

где

$$J(\varphi) = ||C\varphi - \overline{\varphi_{obs}}||^2_{L_2(0,\tau)}$$

Далее, задачу (3) включаем в семейство задач с параметром $a \geq 0$:

$$\begin{cases} L\varphi = Bu_c \\ J_a(u_C, \varphi(u_C)) = \inf\limits_{v\in D(B)} J_a(v, \varphi(v)) \end{cases} \tag{4}$$

где

$$J_a(v,\varphi) = a||v||^2_{L_2(0,\tau)} + ||C\varphi - \overline{\varphi_{obs}}||^2_{L_2(0,\tau)}$$

В свою очередь система (4) эквивалента системе вариационных уравнений (см. [1]):

$$\begin{cases} L\varphi = Bu_c \\ L^*q = C^*(C\varphi - \overline{\varphi_{obs}}) \\ au_C + B^*q = 0 \end{cases} \tag{5}$$

или подставив полную форму операторов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b\varphi = \omega_c(x)u_c(t) \\ -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} + bq = g_{obs}(x)(\displaystyle\int_0^A g_{obs}(x)\varphi(t,x)dx - \overline{\varphi_{obs}}) \\ au_C + \displaystyle\int_0^A w_C(x)q(x,t)dx = 0 \end{cases} \tag{6}$$

# 4 Единственность

Исследуем задачу (5) на единственность. Рассмотрим для этого задачу:

$$\begin{cases} L\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + b\varphi = \omega_c(x)u_C(t) = Bu_C \\ C\varphi = \displaystyle\int_0^A g_{obs}(x)\varphi(x,t)dx = \int_0^A \varphi(x,t)dx = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Тогда умножив первое уравнение в (7) на характеристическую функцию $g_{obs}(x)$ и взяв интеграл от 0 до $A$, также беря в расчет второе уравнение, получим:

$$u_C(t)mes(\Omega_0 \bigcap \Omega_C) = \mu(\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{\Omega_0})$$

Будем исследовать на единственность в некоторых предположениях.

1. Пусть $\mu = 0$ и $\Omega_0 \bigcap \Omega_C \neq \varnothing$. Тогда получаем:

$$mes(\Omega_0 \bigcap \Omega_C)u_C(t) = 0 => u_C(t) = 0$$

Значит $Ker(A) = \{0\}$ откуда и получаем единственность.

2. Пусть $\mu \neq 0$ и $\Omega_0 = (0, A)$. Тогда получаем:

$$u_C(t)mes(\Omega_0 \bigcap \Omega_C) = \mu(\frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x=A} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}|_{x=0})$$

Отсюда, вообще говоря, следует, что $Ker(A) \neq \{0\}$ откуда получаем, что единственности нет.

# 5 Плотная разрешимость

Исследуем задачу (5) на плотную разрешимость. Рассмотрим для этого задачу:

$$\begin{cases} L^*q = -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} + bq = g_{obs}(x)w(t) = C^*w \\ B^*q = \displaystyle\int_0^A w_C(x)q(x,t)dx = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Видно, что плотная разрешимость исследуется аналогично единственности. Следовательно при тех же предположениях для единственности, у задачи будет и плотная разрешимость:

1. Пусть $\mu = 0$ и $\Omega_0 \bigcap \Omega_C \neq \varnothing$. Тогда у задачи будет плотная разрешимость, т.к. $Ker(A^*) = \{0\}$.

2. Пусть $\mu \neq 0$ и $\Omega_0 = (0, A)$. Тогда у задачи не будет плотной разрешимости, т.к. $Ker(A^*) \neq \{0\}$

Интересен также случай, когда управление ищется в виде $v(t, x)$ и область определения оператора $B$ задается как $D(B) = L_2(Q_\tau)$, $B : L_2(Q_\tau) \mapsto L_2(Q_\tau)$. Тогда сопряженный оператор для $B$ выглядит следующим образом:

$$B^*v = w_C(x)v(x,t)$$

где $B^* : L_2(Q_\tau) \mapsto L_2(Q_\tau)$. Именно с таким предположением на область определения оператора $B$ исследуется семейство задач в работе [2] и показывается, что при некоторых условиях на характеристические функции и множества $\Omega_0, \Omega_C$ у задачи (5) будет плотная разрешимость (работа [2] пункт 1.3, теорема 3). Покажем это и в нашем частном случае. Перепишем задачу (8) в новых предположениях на область определения оператора $B$ и пусть $\Omega_C = (0, A)$:

$$\begin{cases} L^*q = -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} + bq = g_{obs}(x)w(t) = C^*w \\ B^*q = w_C(x)q(x,t) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

из второго уравнения следует, что $q(x,t) = 0$ во всей области $\Omega_C = (0, A)$. Умножим первое уравнение на $w_C(x)$ и проинтегрируем по области $(0, A)$. Получим следующее:

$$mes(\Omega_0 \bigcap \Omega_C)w(t) = 0 => w(t) = 0$$

Получаем, что $Ker(A^*) = \{0\}$ и, следовательно, у задачи (5) будет плотная разрешимость. Подытожим этот результат:

3. Пусть $D(B) = L_2(Q_\tau)$, $B : L_2(Q_\tau) \mapsto L_2(Q_\tau)$ и $\Omega_C = (0, A)$. Тогда в задаче (5) будет плотная разрешимость, как и следует также из теоремы 3, представленной в работе [2].

## 6 Итерационный метод

Запишем итерационный метод для задачи (5) [1]:

$$\begin{cases} L\varphi^k = Bu_c^k \\ L^*q^k = C^*(C\varphi^k - \overline{\varphi_{obs}}) \\ u_C^{k+1} = u_C^k - \tau_k(au_C^k + B^*q^k) \end{cases} \tag{10}$$

Или в полной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi^k}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2\varphi^k}{\partial x^2} + b\varphi^k = \omega_c(x)u_c^k(t) \\ \varphi^k(t,0) = \varphi^k(t,A) = 0, \quad \varphi^k(0,x) = 0 \\ -\dfrac{\partial q^k}{\partial t} - \mu\dfrac{\partial^2 q^k}{\partial x^2} + bq^k = g_{obs}(x)(\displaystyle\int_0^A g_{obs}(x)\varphi^k(t,x)dx - \overline{\varphi_{obs}}) \\ q^k(t,0) = q^k(t,A) = 0, \quad q^k(0,x) = 0 \\ u_C^{k+1} = u_C^k - \tau_k(au_C^k + \displaystyle\int_0^A w_C(x)q^k(x,t)dx) \end{cases} \tag{11}$$

При дискретизации уравнений будем использовать разностную схему первого порядка по времени и второго порядка по пространству.

## 7 Литература


[1] Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнения в задачах математической физики. Москва, 2016.

[2] Агошков В.И., Асеев Н.А., Новиков И.С. Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях. Москва, 2015.