Tarea-Examen-1

April 27, 2020

1 André Marx Puente Arévalo

1.1 Respuestas:

Nota: Las preguntas están hasta el final

1.2 1.

a)

P.d. $\mathbb{E}(X_t) = X_0$

Primero partamos de que $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ y como $\phi_1 = 1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow X_t &= X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= X_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\vdots \\ &= X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\end{aligned}$$

Ahora tomemos en cuenta que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ruido blanco. Entonces, sacando esperanza de ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i) \\ &= \mathbb{E}(X_0) + \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i) \\ &= X_0 + \sum_{i=1}^{t} \mathbb{E}(\varepsilon_i) \\ &= X_0 + 0 \\ &= X_0\end{aligned}$$

$\blacksquare$

P.d. $V(X_t) = t\sigma^2$

Partiendo del desarrollo hecho en la demostración anterior, tenemos que: $X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$, sacamos varianza de ambos lados:

$$\begin{aligned} V(X_t) &= V(X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i) \\ &= V(X_0) + V(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{t} V(\varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^{t} \sigma^2 \\ &= t\sigma^2 \end{aligned}$$

■

b)

P.d. $Cov(X_t, X_{t-k}) = |t-k|\sigma^2$

Por otro lado, sabemos que por definición $Cov(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$ con X y Y variables aleatorias.

Utilizando ésto último y el desarrollo del inciso anterior tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t-k}) &= \mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t-k} - \mathbb{E}(X_{t-k}))) \\ &= \mathbb{E}((X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i - X_0)(X_0 + \sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i - X_0)) \\ &= \mathbb{E}((\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i)(\sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i)) \end{aligned}$$

Ahora, notemos que esa multiplicación de sumas se pueden escribir si contemplamos los casos en los que $i = j$ y los casos en los que $i \neq j$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Cov(X_t, X_{t-k}) &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i^2 + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t-k} \varepsilon_i \varepsilon_j) \\ &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{t-k} \varepsilon_i^2) + \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t-k} \varepsilon_i \varepsilon_j) \\ &= \sum_{i=1}^{t-k} \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t-k} \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) \end{aligned}$$

Observemos que los ruidos blancos son independientes, es decir, $\varepsilon_i \perp \varepsilon_j \; \forall i \neq j$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Cov(X_t, X_{t-k}) &= \sum_{i=1}^{t-k} \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) + \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t-k} \mathbb{E}(\varepsilon_i)\mathbb{E}(\varepsilon_j) \\ &= \sum_{i=1}^{t-k} \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) + 0 = \sum_{i=1}^{t-k} \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) \end{aligned}$$

Sabemos que dado que $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ entonces \$Var(ε

Finalmente, notemos que tenemos dos posibles casos, cuando $t > k$ y cuando $t < k$.

- Caso $t > k$

$$\Rightarrow Cov(X_t, X_{t-k}) = \sum_{i=1}^{t-k} \sigma^2 = (t-k)\sigma^2$$

- Caso $t < k$

$$\Rightarrow Cov(X_t, X_{t-k}) = \sum_{i=1}^{t-k} \sigma^2 = (k-t)\sigma^2 = -(t-k)\sigma^2$$

$\therefore$ Por definición de valor absoluto $\Rightarrow Cov(X_t, X_{t-k}) = |t-k|\sigma^2$
■
c)
Sabemos que las autocorrelaciones se calculan de la siguiente manera:

$$\rho(X_t, X_{t+k}) = \frac{\gamma(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{V[X_t]}\sqrt{V[X_{t+k}]}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

donde $\gamma(X_t, X_{t-k}) = E[(X_t - \mu_t)(X_{t-k} - \mu_{t-k})] = \gamma(k)$
Entonces tenemos las siguientes funciones de autocorrelación:

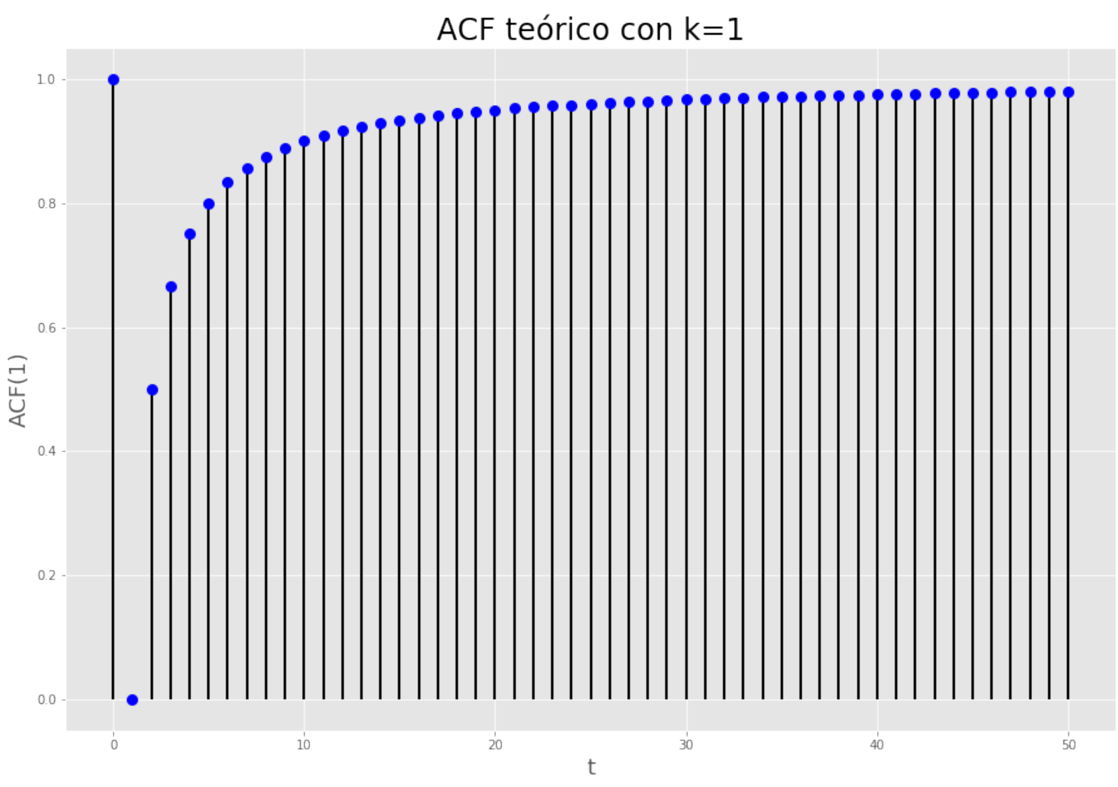
$$\rho(k) = \frac{|t-k|\sigma^2}{t\sigma^2} = \frac{|t-k|}{t}$$

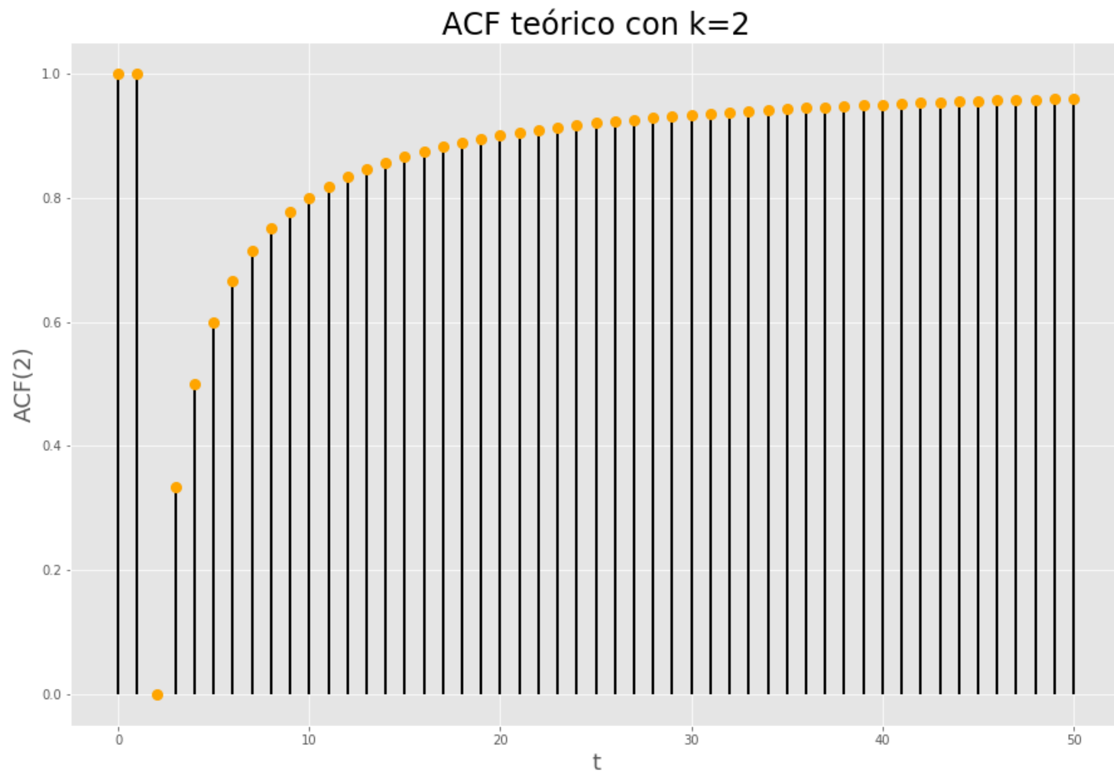
[1]:
```
# Importo las bibliotecas
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('ggplot')
```

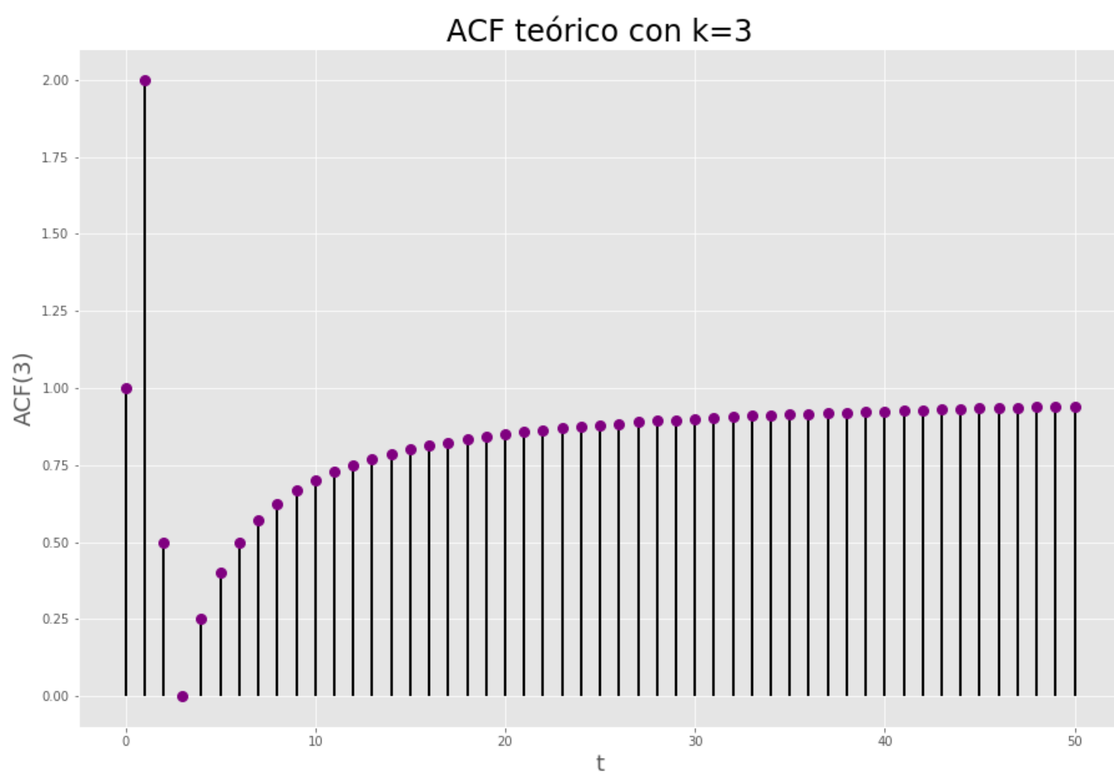
[2]:
```
# Ahora programaremos los la funcion de autocorrelacion
def ACF_teorico (k, t=50):

    # Defino una lista donde guardaré los valores generados
    acf = []

    # Ahora, iré llenando la lista
    for i in range(t+1):
        if i == 0:
            acf.append(1)

        elif i == k:
```

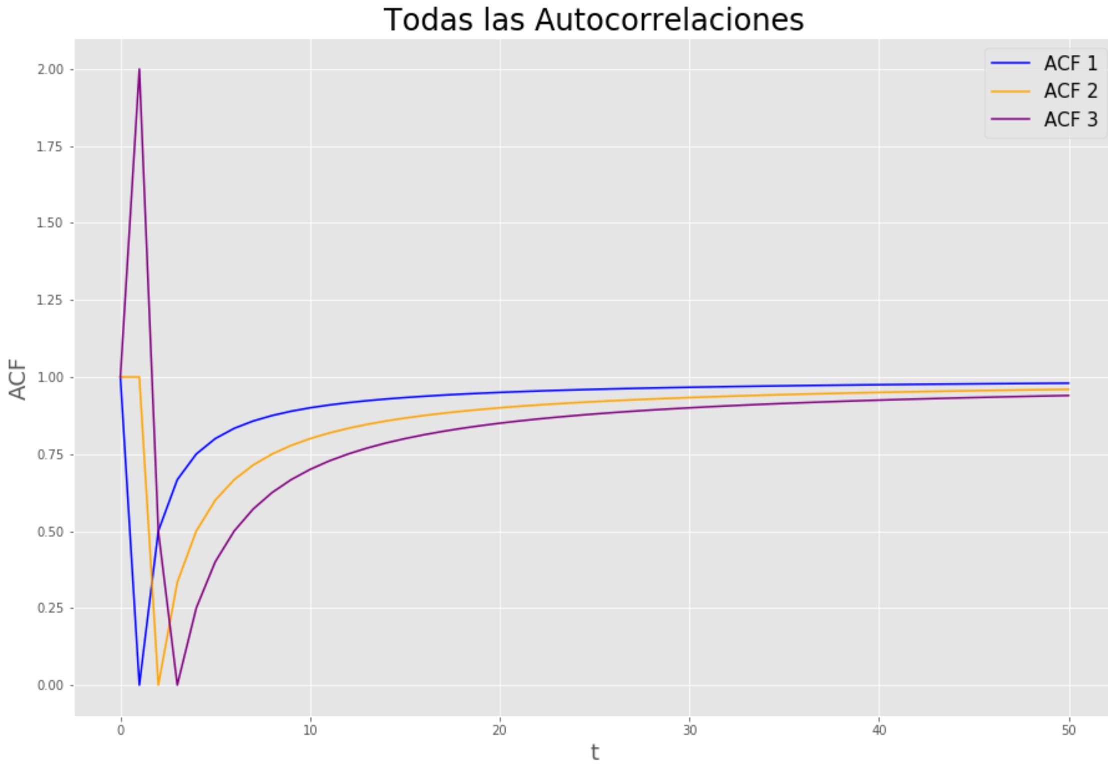
```
            acf.append(0)

        elif i<k:
            a = -(i-k)/i
            acf.append(a)

        elif i>k:
            a = (i-k)/i
            acf.append(a)
    return(acf)

# Tiempo
t = 50

# Obtenemos las autocorrelaciones para las diferentes k's
ACF1 = ACF_teorico(1)
ACF2 = ACF_teorico(2)
ACF3 = ACF_teorico(3)

# Graficamos el ACF1
plt.figure(figsize=(15,10))
plt.style.use('ggplot')
plt.figsize=(15,10)
plt.plot(list(range(0,t+1)), ACF1, 'bo', ms=8, label='binom pmf')
plt.vlines(list(range(0,t+1)), 0, ACF1, colors='black', lw=2)
plt.title("ACF teórico con k=1", fontsize = 24)
plt.ylabel("ACF(1)", fontsize=18)
plt.xlabel("t", fontsize=18)
plt.show()

# Graficamos el ACF2
plt.figure(figsize=(15,10))
plt.style.use('ggplot')
plt.figsize=(15,10)
plt.plot(list(range(0,t+1)), ACF2, 'bo', color='Orange', ms=8, label='binom␣
 ↪pmf')
plt.vlines(list(range(0,t+1)), 0, ACF2, colors='black', lw=2)
plt.title("ACF teórico con k=2", fontsize = 24)
plt.ylabel("ACF(2)", fontsize=18)
plt.xlabel("t", fontsize=18)
plt.show()

# Graficamos el ACF3
plt.figure(figsize=(15,10))
plt.style.use('ggplot')
plt.figsize=(15,10)
```

```
plt.plot(list(range(0,t+1)), ACF3, 'bo', color='purple', ms=8, label='binom␣
 ↪pmf')
plt.vlines(list(range(0,t+1)), 0, ACF3, colors='black', lw=2)
plt.title("ACF teórico con k=3", fontsize = 24)
plt.ylabel("ACF(3)", fontsize=18)
plt.xlabel("t", fontsize=18)
plt.show()

# Graficamos todas en un mismo plot
plt.figure(figsize=(15,10))
plt.style.use('ggplot')
plt.figsize=(15,10)
plt.plot(list(range(0,t+1)), ACF1, color = 'Blue', ms=8, label='binom pmf')
plt.plot(list(range(0,t+1)), ACF2, color='Orange', ms=8, label='binom pmf')
plt.plot(list(range(0,t+1)), ACF3, color='purple', ms=8, label='binom pmf')
plt.legend(('ACF 1', 'ACF 2', 'ACF 3'), prop = {'size': 15}, loc='upper right')
plt.title("Todas las Autocorrelaciones", fontsize = 24)
plt.ylabel("ACF", fontsize=18)
plt.xlabel("t", fontsize=18)
plt.show()
```




ACF teórico con k=2
ACF(2)
t
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50


ACF teórico con k=3
ACF(3)
t
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
10
20
30
40
50



d)

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

Por hipótesis $\sigma^2 = 1$ y $X_0 = 0$

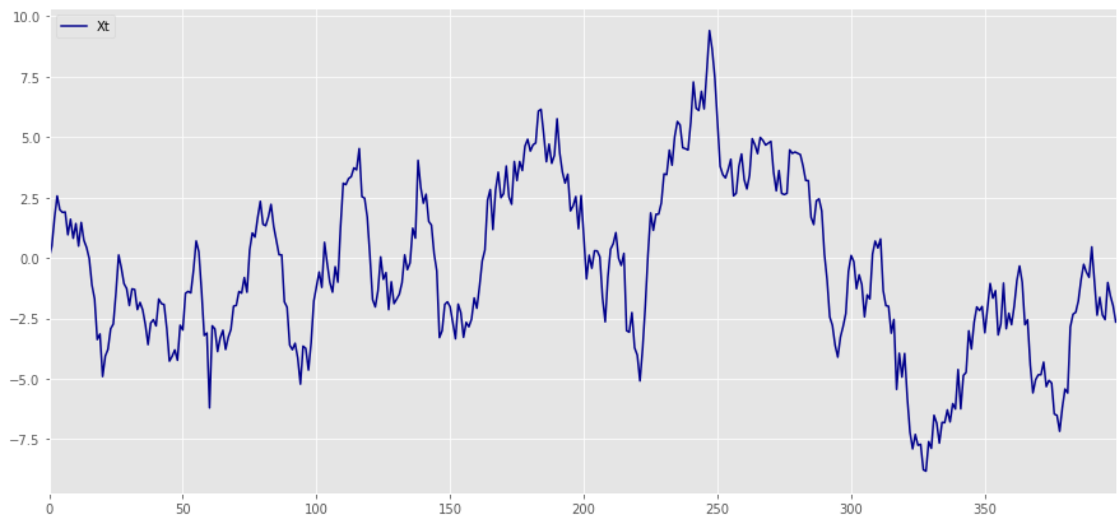
[3]:
```
# Importamos bibliotecas
import numpy as np
import pandas as pd
from statsmodels.graphics.tsaplots import plot_acf, plot_pacf
from statsmodels.tsa.stattools import acf, pacf
```

[4]:
```
run tsUtils.py
```

```
<Figure size 432x288 with 0 Axes>
```

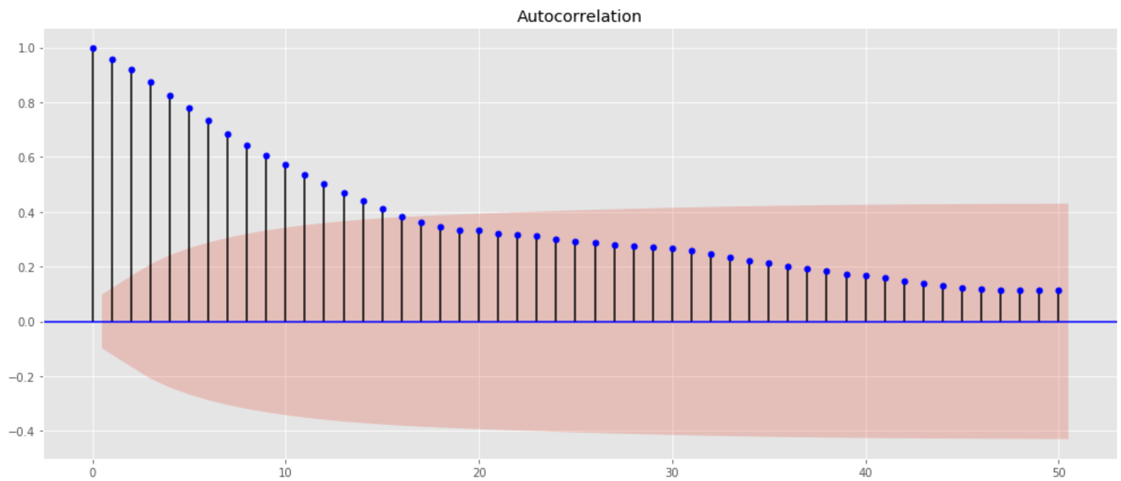
[5]:
```
# Generamos una función que nos genere la serie de tiempo
def AR1(n,sigma2=1,mu=0, phi=1,x0=0,c=0):
    Xt = [x0]
    et = np.random.normal(mu,sigma2,n)
```

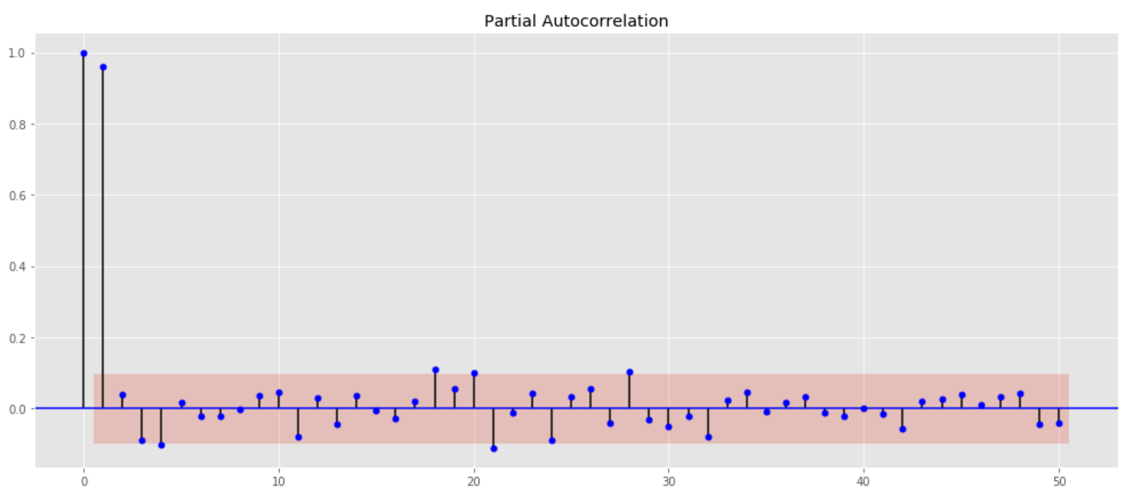
```
    for t in range(1,n):
        Xt.append(phi*Xt[t-1]+et[t])
    if c !=0:
        Xt = [x + c for x in Xt]
    ar1 = pd.DataFrame(Xt,columns=['Xt'])
    return ar1

# Fijo una semilla
np.random.seed(666)

SerieAR1 = AR1(400)

#Grafico la serie, apoyándome con el scrip del ayudante que realizó para esto
plotTimeSeries(SerieAR1)
```



[6]:
```
# Obtenemos las autocorrelaciones simples y parciales
lags=50
AR_1_CFS = pd.DataFrame([acf(SerieAR1['Xt'],nlags=lags),\
                         pacf(SerieAR1['Xt'],nlags=lags)]).transpose()
AR_1_CFS.columns = ['acf_AR_1','pacf_AR_1']

# Graficamos las autocorrelaciones
plt.style.use('ggplot')
plt.figsize=(15,10)
fig = plot_acf(SerieAR1['Xt'],lags=lags,c='b')
fig.set_figwidth(17)
fig.set_figheight(7)
fig = plot_pacf(SerieAR1['Xt'],lags=lags,c='b')
fig.set_figwidth(17)
fig.set_figheight(7)
```

```
plt.show()
```





Podemos observar en la gráfica de las autocorrelaciones parciales que la serie tiene un parámetro significativo, el cual, es positivo.

e)

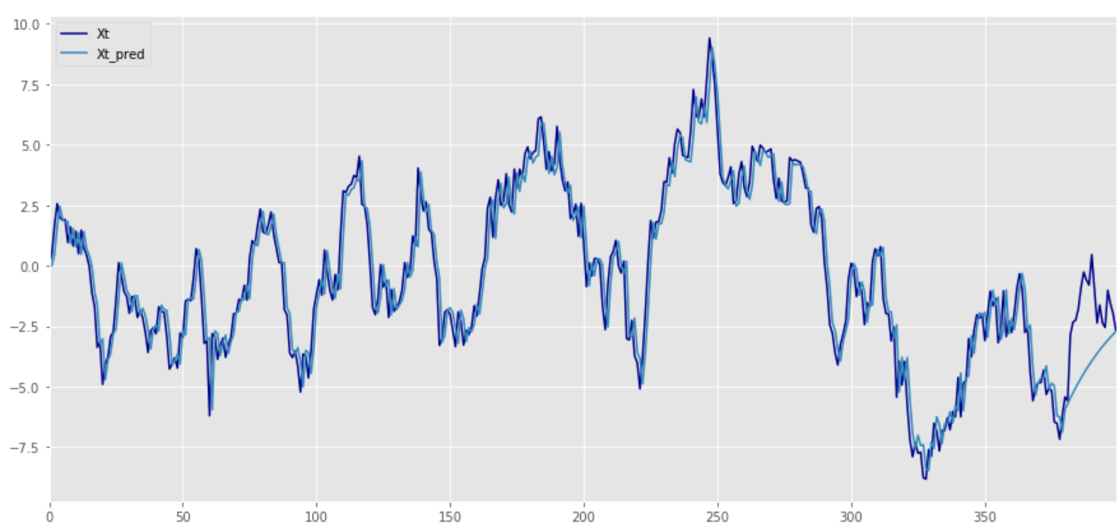
[7]:
```
# Importo otra biblioteca
from statsmodels.tsa.arima_model import ARMA
```

[8]:
```
# Separo la muestra
endog = 'Xt'
k = 380
Xt_train = SerieAR1[:k]
Xt_test = SerieAR1[k:]
```

```
# Ajustamos un modelo AR(1) a esta serie
modelo_AR1 = ARMA(Xt_train[endog],order=(1,0)).fit(trend = 'nc') # Con el nc le␣
 ↪quito la constante
modelo_AR1.summary()
```

[8]:
```
<class 'statsmodels.iolib.summary.Summary'>
"""
                              ARMA Model Results
==============================================================================
Dep. Variable:                     Xt   No. Observations:                  380
Model:                     ARMA(1, 0)   Log Likelihood                -540.988
Method:                       css-mle   S.D. of innovations              1.001
Date:                Mon, 27 Apr 2020   AIC                           1085.977
Time:                        15:56:54   BIC                           1093.857
Sample:                             0   HQIC                          1089.104

==============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
ar.L1.Xt       0.9597      0.014     67.423      0.000       0.932       0.988
                                    Roots
=============================================================================
                  Real          Imaginary           Modulus         Frequency
-----------------------------------------------------------------------------
AR.1            1.0420           +0.0000j            1.0420            0.0000
-----------------------------------------------------------------------------
"""
```

[9]:
```
# Graficamos el ajuste, la predicción y la original
SerieAR1[endog+'_pred'] = modelo_AR1.predict(start=0,end=len(SerieAR1))
plotTimeSeries(SerieAR1)
```



En **conclusión**, podemos notar que con este modelo ajustado, podemos observar que la $\phi_1 = 0.9597$ un valor muy cercano del original y esta sí sale significativa. Ahora, analizando la raíz obtenida en el ajuste, nos damos cuenta que es real pero que está fuera del círculo unitario (1.0420 > 1), esto quiere decir, que la serie generada por este modelo no es estacionaria y tiene sentido, ya que, desde un principio en la serie original $|\phi_1| \geq 1$, así que la ϕ_1 no cumple las condiciones para que X_t se estacionaria. Finalmente, observando la gráfica, nos damos cuenta que la predicción sirve sólo para pocos valores, ya que, a medida que avanza en el tiempo, no se va pareciendo nada a la serie original.

1.3 2.

a) P.d. $\mathbb{E}(X_t) = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + c + \varepsilon_t) \\ &= \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) + \phi_2 \mathbb{E}(X_{t-2}) + c + \mathbb{E}(\varepsilon_t)\end{aligned}$$

Como $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{E}(X_t) &= \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) + \phi_2 \mathbb{E}(X_{t-2}) + c + 0 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(X_t) - \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) - \phi_2 \mathbb{E}(X_{t-2}) &= c\end{aligned}$$

Como la serie es estacionaria, por hipótesis, esto quiere decir que ni su esperanza ni su varianza dependen del tiempo, por lo que son constantes $\forall t$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow (1 - \phi_1 - \phi_2)\mathbb{E}(X_t) &= c \\ \Rightarrow \mathbb{E}(X_t) &= \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}\end{aligned}$$

■

b) P.d. $V(X_t) = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}$

$$\begin{aligned}V(X_t) &= V(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + c + \varepsilon_t) \\ &= \phi_1^2 V(X_{t-1}) + \phi_2^2 V(X_{t-2}) + 2\phi_1\phi_2 Cov(X_{t-1}, X_{t-2})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(X_t) - \phi_1^2 V(X_{t-1}) - \phi_2^2 V(X_{t-2}) - 2\phi_1\phi_2 Cov(X_{t-1}, X_{t-2}) = \sigma^2$$

Cosiderando que es una serie estacionaria, entonces $V(X_t) = V(X_{t+k})$, por lo que podemos factorizar la $V(X_t)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow V(X_t)(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \frac{2\phi_1\phi_2 Cov(X_{t-1}, X_{t-2})}{V(X_t)}) &= \sigma^2 \\ \Rightarrow V(X_t)(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \frac{2\phi_1\phi_2\gamma(k)}{\gamma(0)}) &= \sigma^2 \\ \Rightarrow V(X_t)(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2\rho(k)) &= \sigma^2\end{aligned}$$

Y por lo visto en clase, para un modelo AR(2) estacionario $\rho(k) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$, sustituyendo esto en lo anterior.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \sigma^2 &= V(X_t)(1-\phi_1^2-\phi_2^2-2\phi_1\phi_2\frac{\phi_1}{1-\phi_2}) \\
&= V(X_t)(\frac{1(1-\phi_2)-\phi_1^2(1-\phi_2)-\phi_2^2(1-\phi_2)-2\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2}) \\
&= V(X_t)(\frac{1-\phi_2-\phi_1^2+\phi_1^2\phi_2-\phi_2^2+\phi_2^3-2\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2}) \\
&= V(X_t)(\frac{1-\phi_2-\phi_1^2-\phi_2^2+\phi_2^3-\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2}) \\
&= V(X_t)(\frac{1-2\phi_2-\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_2-2\phi_2^2-\phi_1^2\phi_2+\phi_2^3}{1-\phi_2}) \\
&= V(X_t)(\frac{(1+\phi_2)(1-2\phi_2-\phi_1^2+\phi_2^2)}{1-\phi_2}) \\
&= V(X_t)(\frac{(1+\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2-\phi_1-\phi_1^2+\phi_1\phi_2-\phi_2-\phi_1\phi_2+\phi_2^2)}{1-\phi_2}) \\
&= V(X_t)(\frac{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}{1-\phi_2})
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Despejando $V(X_t) \Rightarrow V(X_t) = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}$

■

1.4 3.

a)

Expresamos la serie de tiempo con el polinomio de retraso.

$X_t = 1.4X_{t-1} - 0.85X_{t-2} + \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t - 1.4X_{t-1} + 0.85X_{t-2} = \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t(1-1.4B+0.85B^2) = \varepsilon_t$

Por lo que para encontrar las raíces de B hacemos lo siguiente:

$0.85B^2 - 1.4B + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1.4 \pm \sqrt{(-1.4)^2-4(0.85)(1)}}{2(0.85)} = \frac{1.4 \pm \sqrt{-1.44}}{1.7} = \frac{1.4 \pm 1.2i}{1.7} = \frac{\frac{14\pm12i}{10}}{\frac{17}{10}} = \frac{14 \pm 12i}{17}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{14+12i}{17} \\ B_2 = \dfrac{14-12i}{17} \end{cases}$$

Hacemos un cambio de coordenadas a polares.

$$
\begin{aligned}
\theta &= tan^{-1}(\frac{\frac{12}{17}}{\frac{14}{17}}) = 0.7086 \\
r &= \sqrt{(\frac{14}{17})^2+(\frac{12}{17})^2} = \frac{2\sqrt{85}}{17} \\
\Rightarrow Z_1 &= \frac{2\sqrt{85}}{17}(cos(0.7086)+sin(0.7086)i)
\end{aligned}
$$

Calculamos la θ para B_2

$$\theta = tan^{-1}(\frac{-\frac{12}{17}}{\frac{14}{17}}) = -0.7086$$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{2\sqrt{85}}{17}(cos(-0.7086) + sin(-0.7086)i)$$

Ahora bien, sabemos que una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k Cos(\frac{2\pi k}{T} t) + b_k Sin(\frac{2\pi k}{T} t)]$$

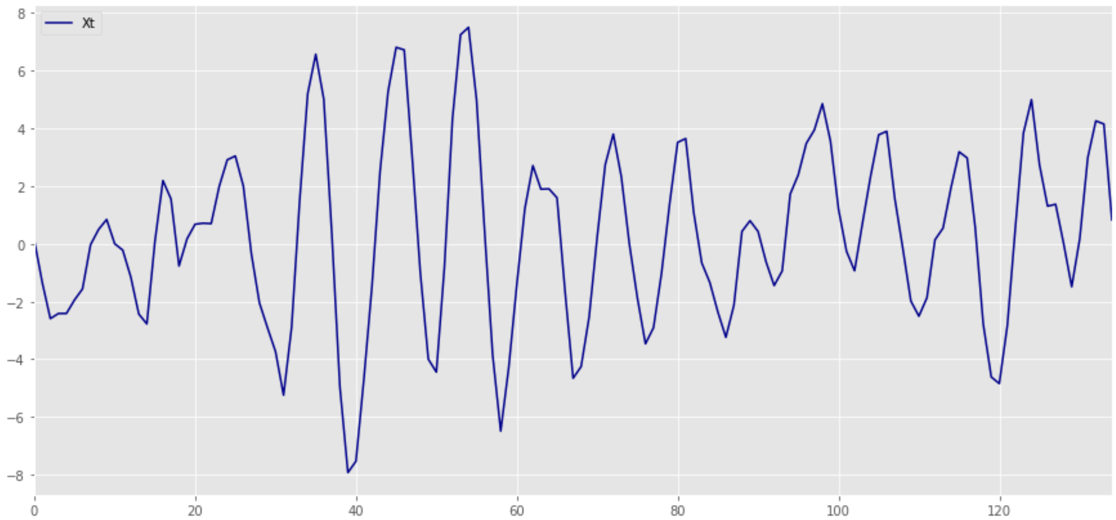
Donde:
a_k: Coeficiente constante
b_k: Coeficiente constante
T: Periodo
Analicemos que tenemos cuando $t = 1$ y $k = 1$, basta con analizar el coseno:

$$cos(\frac{2\pi}{T}) = cos(0.7086)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = 0.7086$$
$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{0.7086}$$
$$\Leftrightarrow T = 8.8667 \approx 9$$

b)

[10]:
```
# Importo otra biblioteca
import statsmodels.api as sm
```

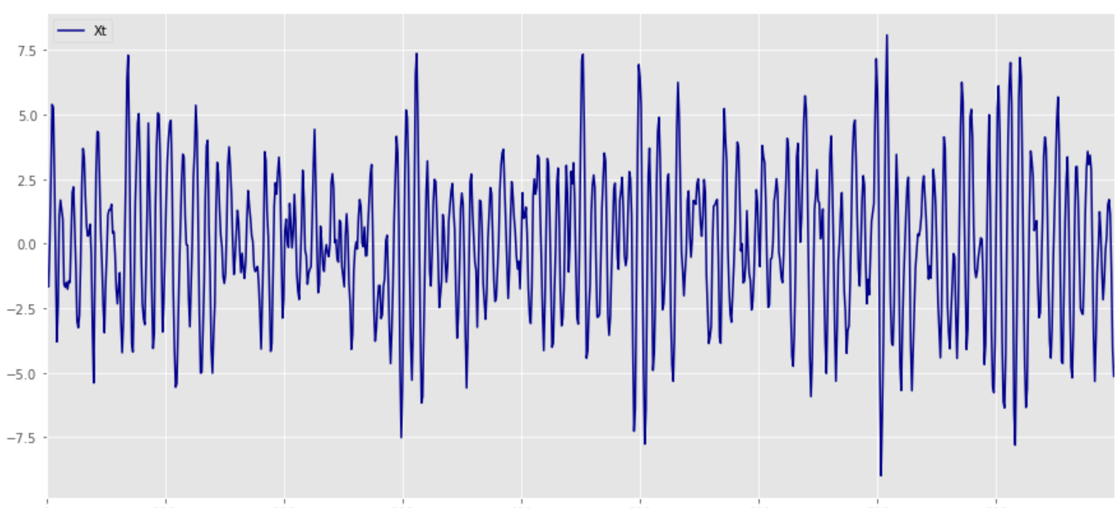
[11]:
```
# Genero el modelo AR(2)
ar = np.array([1.4,-0.85])
n = 135
lags=50
np.random.seed(16)

Xt = sm.tsa.arma_generate_sample(np.r_[1, -ar],np.r_[1, np.array([0, 0])],n,1)
AR2_serie = pd.DataFrame(Xt,columns=['Xt'])
plt.style.use('ggplot')
plotTimeSeries(AR2_serie)
```



Observando la gráfica, notamos que tiene 15 ciclos la serie, que tiene sentido, ya que, $\frac{135}{9} = 15$

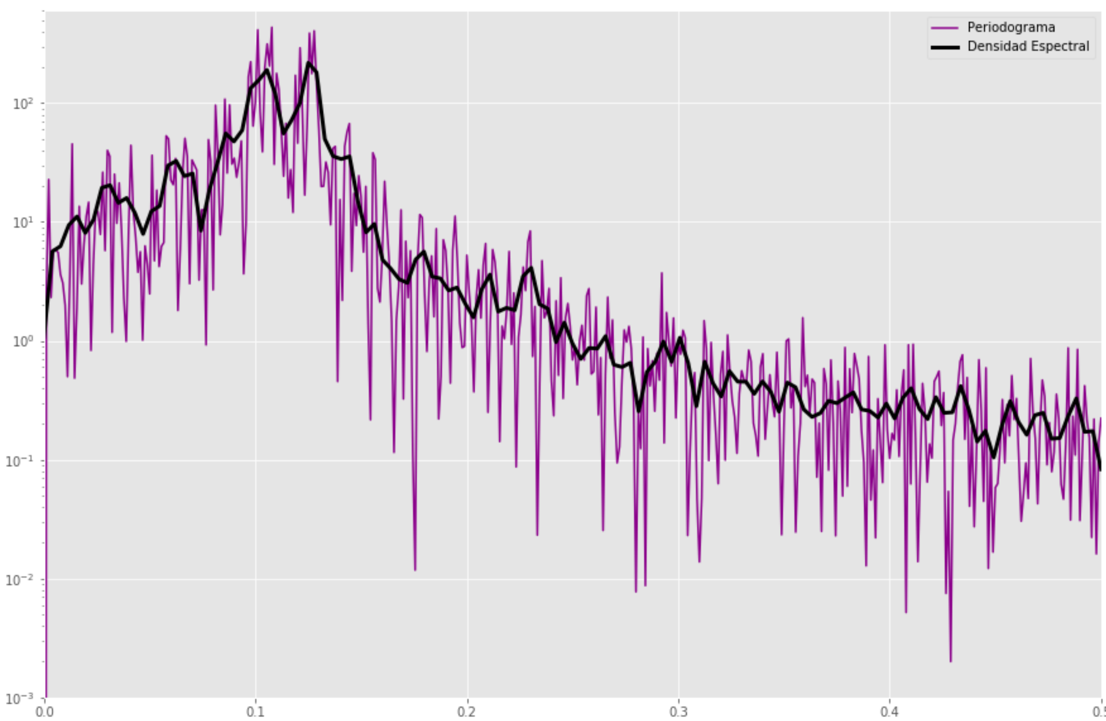
c)

[12]:
```
# Genero una serie que contenga 100 ciclos
n = 900

# Fijamos semilla
np.random.seed(17)

Xt = sm.tsa.arma_generate_sample(np.r_[1, -ar],np.r_[1, np.array([0, 0])],n,1)
AR2_serie = pd.DataFrame(Xt,columns=['Xt'])
plt.style.use('ggplot')
plotTimeSeries(AR2_serie)
```



[13]:
```python
# Importo las bibliotecas pra obtener el periodograma y la densidad espectral
from scipy import signal
```

[14]:
```python
# Obtengo el periodograma
P = signal.periodogram(AR2_serie["Xt"].values)

# Obtengo la densidad espectral
DE = signal.welch(AR2_serie["Xt"].values)

# Graficamos lo obtenido
plt.figure(figsize=(15,10))
plt.semilogy(P[0],P[1],label="Periodograma", color = "darkmagenta")
plt.semilogy(DE[0], DE[1],label="Densidad Espectral", color = "black", lw = 3)
plt.legend()
plt.ylim((0.001, 600))
plt.xlim((0, 0.5))
plt.show()
```



d)

[15]:
```python
# Obtenemos la tabla con los datos del periodograma
tablaPeriodograma = pd.DataFrame({"fi":P[0],"I(fi)":P[1]})

# Obtenemos el periodo de la serie
T_p = 1/tablaPeriodograma.iloc[tablaPeriodograma["I(fi)"].idxmax(),0]
```

```python
# De manera análoga obtengo la densidad espectral
tablaDensidad = pd.DataFrame({"fi":DE[0], "f(w)":DE[1]})

# Obtenemos el periodo de la serie
T_DE = 1/tablaDensidad.iloc[tablaDensidad["f(w)"].idxmax(),0]

print(f"La estimación de la periodicidad de la serie utilizando el periodograma␣
 ↪es: {T_p.round(4)}")
print("")
print(f"La estimación de la periodicidad de la serie utilizando la Densidad␣
 ↪Espectral es: {T_DE.round(4)}")
print("")
print(f"La diferencia entre la teórica y la estimada con el periodograma es:␣
 ↪{abs(9-T_p).round(4)}")
print("")
print(f"La diferencia entre la teórica y la estimada con la Densidad Espectral␣
 ↪es: {abs(9-T_DE).round(4)}")
```

```
La estimación de la periodicidad de la serie utilizando el periodograma es:
9.2784

La estimación de la periodicidad de la serie utilizando la Densidad Espectral
es: 8.0

La diferencia entre la teórica y la estimada con el periodograma es: 0.2784

La diferencia entre la teórica y la estimada con la Densidad Espectral es: 1.0
```

1.5 4.

Procederé por el método de máxima verosimilitud y como sabemos X_t se distribuye normal, pero no conocemos la media ni la varianza.

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})$$

Recordemos que ε_t son variables aleatorias $N(0, \sigma^2)$ e independientes

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t) - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0$$

Ahora obtenemos la varianza

$$Var(X_t) = Var(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$$

Por lo tanto, $X_t \sim N(0, (1 + \theta_1^2)\sigma^2)$.

Es preciso mencionar que $X_t \perp X_{t+k}$, ya que, X_t es una combinación lineal de ruidos blancos, los cuales, por definición son independientes.

La función de verosimilitud es:

$$
\begin{aligned}
L(\theta_1^2) &= f(x_1, x_2, ..., x_t; \sigma^2, \theta_1) \\
&= f(x_1; \sigma^2, \theta_1) \cdot ... \cdot f(x_t; \sigma^2, \theta_1) \\
&= \prod_{i=1}^{t} f(x_i; \sigma^2, \theta_1) \\
&= \prod_{i=1}^{t} (2\pi(1+\theta_1^2)\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-(x_i)^2}{2(1+\theta_1^2)\sigma^2}} \\
&= (2\pi(1+\theta_1^2)\sigma^2)^{-\frac{t}{2}} e^{\frac{-1}{2(1+\theta_1^2)\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2}
\end{aligned}
$$

Aplicando logaritmo natural de ambos lados de la igualdad.

$$
\begin{aligned}
ln(L(\theta_1^2)) &= ln((2\pi(1+\theta_1^2)\sigma^2)^{-\frac{t}{2}} e^{\frac{-1}{2(1+\theta_1^2)\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2}) \\
&= -\frac{t}{2} ln(2\pi(1+\theta_1^2)\sigma^2) - \frac{1}{2(1+\theta_1^2)\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2 \\
&= -\frac{t}{2} ln((1+\theta_1^2)) - \frac{t}{2} ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2(1+\theta_1^2)\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2
\end{aligned}
$$

Derivando respecto a θ_1 obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta_1^2} ln(L(\theta_1^2)) &= -\frac{t}{2(1+\theta_1^2)} - 0 - \frac{-(2\sigma^2)}{4(1+\theta_1^2)^2(\sigma^2)^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2 \\
&= -\frac{t}{2(1+\theta_1^2)} + \frac{1}{2(1+\theta_1^2)^2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2
\end{aligned}
$$

Igualando la derivada a 0 y despejando θ_1^2.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{d}{d\theta_1^2} ln(L(\theta_1^2)) = 0 \\
&\Rightarrow -t(1+\theta_1^2)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2 = 0 \\
&\Rightarrow -t(1+\theta_1^2)\sigma^2 = -\sum_{i=1}^{t} (x_i)^2 \\
&\Rightarrow \theta_1^2 = \frac{1}{t\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2 - 1
\end{aligned}
$$

Obtengamos la segunda derivada para comprobar que es un máximo.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{d(\theta_1^2)^2} ln(L(\theta_1)) &= \frac{t(2\theta_1^2)}{2^2(1+\theta_1^2)^2} - \frac{2\sigma^2 2(1+\theta_1^2)}{2^2(1+\theta_1^2)^4(\sigma^2)^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2 \\
&= \frac{t\theta_1^2}{2(1+\theta_1^2)^2} - \frac{1}{(1+\theta_1^2)^3\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{t} (x_i)^2
\end{aligned}
$$

Notemos que como:

$$\frac{1}{(1+\theta_1^2)^3\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{t}(x_i)^2 > \frac{t\theta_1^2}{2(1+\theta_1^2)^2} \Rightarrow \frac{d^2}{d(\theta_1^2)^2} ln(L(\sigma^2,\theta_1)) < 0$$

$\therefore$ La estimación encontrada es un máximo.

Utilizando la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud tenemos que el estimador por el método de máxima verosimilitud de θ_1 está dado por:

$$\hat{\theta_1} = \sqrt{\frac{1}{t\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{t}(x_i)^2 - 1}$$

1.6 5.

a)

Como sabemos, la función de autocorrelación se calcula de la siguiente manera:

$$\rho(X_t, X_{t+k}) = \frac{\gamma(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{V[X_t]}\sqrt{V[X_{t+k}]}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Donde $\gamma(k) = Cov(X_t, X_{t-k})$

Primero, notemos que como X_t es estacionaria, su esperanza y varianza son constantes.

Recordemos que como las ε_t's son ruidos blancos intependientes, entonces $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X_t) = \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}) + \phi_2\mathbb{E}(X_{t-2}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})\\
&\Rightarrow \mathbb{E}(X_t) - \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}) - \phi_2\mathbb{E}(X_{t-2}) = 0\\
&\Rightarrow \mathbb{E}(X_t)(1-\phi_1-\phi_2) = 0\\
&\Rightarrow \mathbb{E}(X_t) = 0
\end{aligned}$$

Notemos que por la estacionalidad \$ ϕ_1 + ϕ_2 < 1\$

Procedemos al cáclculo de la $\gamma(k)$

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= \mathbb{E}(X_tX_{t-k}) - \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-k}) = \mathbb{E}(X_tX_{t-k})\\
&= \mathbb{E}(\phi_1X_{t-1}X_{t-k} + \phi_2X_{t-2}X_{t-k} + \varepsilon_tX_{t-k} - \theta_1\varepsilon_{t-1}X_{t-k})\\
&= \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-k}) + \phi_2\mathbb{E}(X_{t-2}X_{t-k}) + \mathbb{E}(\varepsilon_tX_{t-k}) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_{t-k})
\end{aligned}$$

Ahora, le iré asignando valores a k para obtener una recursión y saber cuánto vale realmente, consideremos que $k \in \mathbb{N}$.

- Para $k = 0$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}X_t) + \phi_2 \mathbb{E}(X_{t-2}X_t) + \mathbb{E}(\varepsilon_t X_t) - \theta_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_t) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \mathbb{E}(\varepsilon_t(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \phi_1\mathbb{E}(\varepsilon_t)\mathbb{E}(X_{t-1}) + \phi_2\mathbb{E}(\varepsilon_t)\mathbb{E}(X_{t-2}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_t)\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}) - \theta_1(\phi_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_{t-1}) + \phi_2 \\
&\quad + \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})\mathbb{E}(\varepsilon_t) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2)) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \phi_1(0) + \phi_2(0) + \sigma^2 - \theta_1(0) - \theta_1(\phi_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_{t-1}) + \phi_2(0) + (0) - \theta_1\sigma^2) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_{t-1}) - \theta_1\sigma^2) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}(\phi_1 X_{t-2} + \phi_2 X_{t-3} + \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2})) - \theta_1\sigma^2) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1(\phi_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})\mathbb{E}(X_{t-2}) + \phi_2\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})\mathbb{E}(X_{t-3}) + \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1})\mathbb{E}(\varepsilon_{t-2})) - \theta \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1(\phi_1(0) + \phi_2(0) + \sigma^2 - \theta_1(0)) - \theta_1\sigma^2) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1(\sigma^2) - \theta_1\sigma^2) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

- Para $k = 1$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(1) &= \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-1}) + \phi_2\mathbb{E}(X_{t-2}X_{t-1}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t X_{t-1}) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_{t-1}) \\
&= \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) - \theta_1\sigma^2
\end{aligned}
$$

- Para $k = 2$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(2) &= \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-2}) + \phi_2\mathbb{E}(X_{t-2}X_{t-2}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t X_{t-2}) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_{t-2}) \\
&= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(0)
\end{aligned}
$$

- Para $k = 3$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(3) &= \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-3}) + \phi_2\mathbb{E}(X_{t-2}X_{t-3}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t X_{t-3}) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_{t-3}) \\
&= \phi_1\gamma(2) + \phi_2\gamma(1)
\end{aligned}
$$

- Para $k = 4$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(4) &= \phi_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-4}) + \phi_2\mathbb{E}(X_{t-2}X_{t-4}) + \mathbb{E}(\varepsilon_t X_{t-4}) - \theta_1\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}X_{t-4}) \\
&= \phi_1\gamma(3) + \phi_2\gamma(2)
\end{aligned}
$$

Podemos notar que para $k > 2$ tenemos la siguiente recursión:

$$\gamma(k) = \phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2)$$

Ahora, para expresar a $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ y $\gamma(2)$ en función de ϕ_1, ϕ_2, θ_1 y σ^2, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\Rightarrow \begin{cases}
\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma^2 & \text{...(1)} \\
\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1) - \theta_1\sigma^2 & \text{...(2)} \\
\gamma(2) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(0) & \text{...(3)}
\end{cases}
$$

En la ecuación dos, despejamos a $\gamma(1)$ en (2) y sustituimos el valor de $\gamma(0)$

$$\begin{aligned}
&\gamma(1) - \phi_2\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) - \theta_1\sigma^2 \\
&\Rightarrow (1-\phi_2)\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) - \theta_1\sigma^2 \\
&\Rightarrow \gamma(1) = \frac{\phi_1\gamma(0) - \theta_1\sigma^2}{(1-\phi_2)}
\end{aligned}$$

Sustituyo $\gamma(1)$ en (3)

$$\begin{aligned}
\gamma(2) &= \phi_1(\frac{\phi_1\gamma(0) - \theta_1\sigma^2}{(1-\phi_2)}) + \phi_2\gamma(0) \\
&= \frac{\phi_1^2\gamma(0) - \phi_1\theta_1\sigma^2}{(1-\phi_2)} + \phi_2\gamma(0)
\end{aligned}$$

Sustituyo a $\gamma(1)$ y $\gamma(2)$ en (1)

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \phi_1(\frac{\phi_1\gamma(0) - \theta_1\sigma^2}{(1-\phi_2)}) + \phi_2(\frac{\phi_1^2\gamma(0) - \phi_1\theta_1\sigma^2}{(1-\phi_2)} + \phi_2\gamma(0)) + \sigma^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma^2 \\
&= \frac{\phi_1^2\gamma(0) - \phi_1\theta_1\sigma^2 + \phi_1^2\phi_2\gamma(0) - \phi_1\phi_2\theta_1\sigma^2}{(1-\phi_2)} + \phi_2^2\gamma(0) + \sigma^2 - \phi_1\theta_1\sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 \\
&= \frac{1}{1-\phi_2}(\phi_1^2\gamma(0) - \phi_1\theta_1\sigma^2 + \phi_1^2\phi_2\gamma(0) - \phi_1\phi_2\theta_1\sigma^2 + (1-\phi_2)(\phi_1^2\gamma(0) + \sigma^2 - \phi_1\theta_1\sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2)) \\
&= \frac{1}{1-\phi_2}(\phi_1^2\gamma(0) - \phi_1\theta_1\sigma^2 + \phi_1^2\phi_2\gamma(0) - \phi_1\phi_2\theta_1\sigma^2 + \phi_2^2\gamma(0) + \sigma^2 - \phi_1\theta_1\sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 - \phi_2^3\gamma(0) - \phi_2\sigma^2 + \phi_1\phi_2\theta_1 \\
&= \frac{1}{1-\phi_2}(\phi_1^2\gamma(0) - 2\phi_1\theta_1\sigma^2 + \phi_1^2\phi_2\gamma(0) + \phi_2^2\gamma(0) + \sigma^2 - \phi_1\theta_1\sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 - \phi_2^3\gamma(0) - \phi_2\sigma^2 - \phi_2\theta_1^2\sigma^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (1-\phi_2)\gamma(0) - \phi_1^2\gamma(0) - \phi_1^2\phi_2\gamma(0) - \phi_2^2\gamma(0) + \phi_2^3\gamma(0) = -2\phi_1\theta_1\sigma^2 + \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 - \phi_2\sigma^2 - \phi_2\theta_1^2\sigma^2 \\
&\Rightarrow \gamma(0)(1 - \phi_2 - \phi_1^2 - \phi_1^2\phi_2 - \phi_2^2 + \phi_2^3) = -2\phi_1\theta_1\sigma^2 + \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 - \phi_2\sigma^2 - \phi_2\theta_1^2\sigma^2 \\
&\Rightarrow \gamma(0) = \frac{-2\phi_1\theta_1\sigma^2 + \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 - \phi_2\sigma^2 - \phi_2\theta_1^2\sigma^2}{1 - \phi_2 - \phi_1^2 - \phi_1^2\phi_2 - \phi_2^2 + \phi_2^3} \\
&\Rightarrow \gamma(0) = \frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1 + (\phi_1 - 1)(\theta_1^2 + 1))}{(\phi_2 + 1)(\phi_1^2 - \phi_2^2 + 2\phi_2 - 1)}
\end{aligned}$$

Sustituyo $\gamma(0)$ en $\gamma(1)$

$$\gamma(1) = \frac{1}{(1-\phi_2)}(\phi_1\frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1 + (\phi_1 - 1)(\theta_1^2 + 1))}{(\phi_2 + 1)(\phi_1^2 - \phi_2^2 + 2\phi_2 - 1)} - \theta_1\sigma^2)$$

Sustituyo $\gamma(0)$ en $\gamma(2)$

$$\gamma(2) = \frac{1}{(1-\phi_2)}(\phi_1^2\frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1 + (\phi_1 - 1)(\theta_1^2 + 1))}{(\phi_2 + 1)(\phi_1^2 - \phi_2^2 + 2\phi_2 - 1)} - \phi_1\theta_1\sigma^2) + \phi_2(\frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1 + (\phi_1 - 1)(\theta_1^2 + 1))}{(\phi_2 + 1)(\phi_1^2 - \phi_2^2 + 2\phi_2 - 1)})$$

Notemos que para $k > 2$ se obtienen las $\gamma(k)$ en función de ϕ_1, ϕ_2, θ_1 y σ^2 de manera recursiva. Las correlaciones están dadas por:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{(1-\phi_2)}(\phi_1 \frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1+(\phi_1-1)(\theta_1^2+1))}{(\phi_2+1)(\phi_1^2-\phi_2^2+2\phi_2-1)} - \theta_1\sigma^2)}{\frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1+(\phi_1-1)(\theta_1^2+1))}{(\phi_2+1)(\phi_1^2-\phi_2^2+2\phi_2-1)}} & k = 1 \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{(1-\phi_2)}(\phi_1^2 \frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1+(\phi_1-1)(\theta_1^2+1))}{(\phi_2+1)(\phi_1^2-\phi_2^2+2\phi_2-1)} - \phi_1\theta_1\sigma^2) + \phi_2(\frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1+(\phi_1-1)(\theta_1^2+1))}{(\phi_2+1)(\phi_1^2-\phi_2^2+2\phi_2-1)})}{\frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1+(\phi_1-1)(\theta_1^2+1))}{(\phi_2+1)(\phi_1^2-\phi_2^2+2\phi_2-1)}} & k = 2 \\[2ex] \dfrac{\phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2)}{\frac{\sigma^2(2\phi_1\theta_1+(\phi_1-1)(\theta_1^2+1))}{(\phi_2+1)(\phi_1^2-\phi_2^2+2\phi_2-1)}} & k > 2 \end{cases}$$

b)

Para lograr reducir este modelo, voy a obtener la raíces de los polinomios de restraso, con el objetivo de encontrar dos que sean iguales.

$$\begin{aligned} &X_t = X_{t-1} - 0.27X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1} \\ &\Rightarrow X_t - X_{t-1} + 0.27X_{t-2} = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1} \\ &\Rightarrow X_t(1 - B + 0.27B^2) = \varepsilon_t(1 - 0.7B) \end{aligned}$$

Resolvemos primero para la parte de MA

$$1 - 0.7B = 0 \Rightarrow B = \frac{10}{7}$$

Ahora, para la parte de AR

$$\begin{aligned} &1 - B + 0.27B^2 = 0 \\ &\Rightarrow B = \frac{1\sqrt{(-1)^2 - 4(\frac{21}{100})(1)}}{2(\frac{21}{100})} = \frac{1\sqrt{\frac{4}{25}}}{2(\frac{21}{100})} \\ &\qquad\Rightarrow \begin{cases} B_1 = \dfrac{10}{3} \\[2ex] B_2 = \dfrac{10}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Observemos que como dos raíces son iguales, esto quiere decir que se pueden reducir el número de parámetros escribiendo las raíces del polinomio de retraso de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&(B-\frac{10}{3})(B-\frac{10}{7}) = (B-\frac{10}{7}) \\
&\Rightarrow (B-\frac{10}{3}) = 1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Es un modelo AR(1).

Nota: A partir de aquí, los siguientes ejercicios se realizaron en R.

```r
# Cargamos las librería que vamos a utilizar
library(forecast)
library(mltest)
library(tseries)
library(TSA)
library(knitr)
library(descomponer)
```

6.

a)

```r
# Ingresamos los datos que nos proporcionan
simple <- c(0.5, 0.2, 0.04, -0.15, -0.02, -0.14, 0.12, 0.1)
parciales <- c(0.5, 0.45, -0.15, 0.18, 0.12, -0.21, 0.1, 0.05)
k <- seq(1, length(simple))
n=80

argumentoSuma_s <-c(rep(0,8))
for (i in 1:8){
  argumentoSuma_s[i]<-(simple[i]^2)/(n-i)
}

apoyo_s <- argumentoSuma_s<-n*(n+2)*argumentoSuma_s

Qk_s<-c(rep(0,8))

for (i in 1:8){
  Qk_s[i]<-sum(apoyo_s[1:i])
}

cuantil_s<-c(rep(0,8))

for (i in 1:8){
  cuantil_s[i]<-dchisq(Qk_s[i],i)
}

tabla_s <- cbind(k, simple, argumentoSuma_s, apoyo_s, Qk_s, cuantil_s)
tabla_s
```

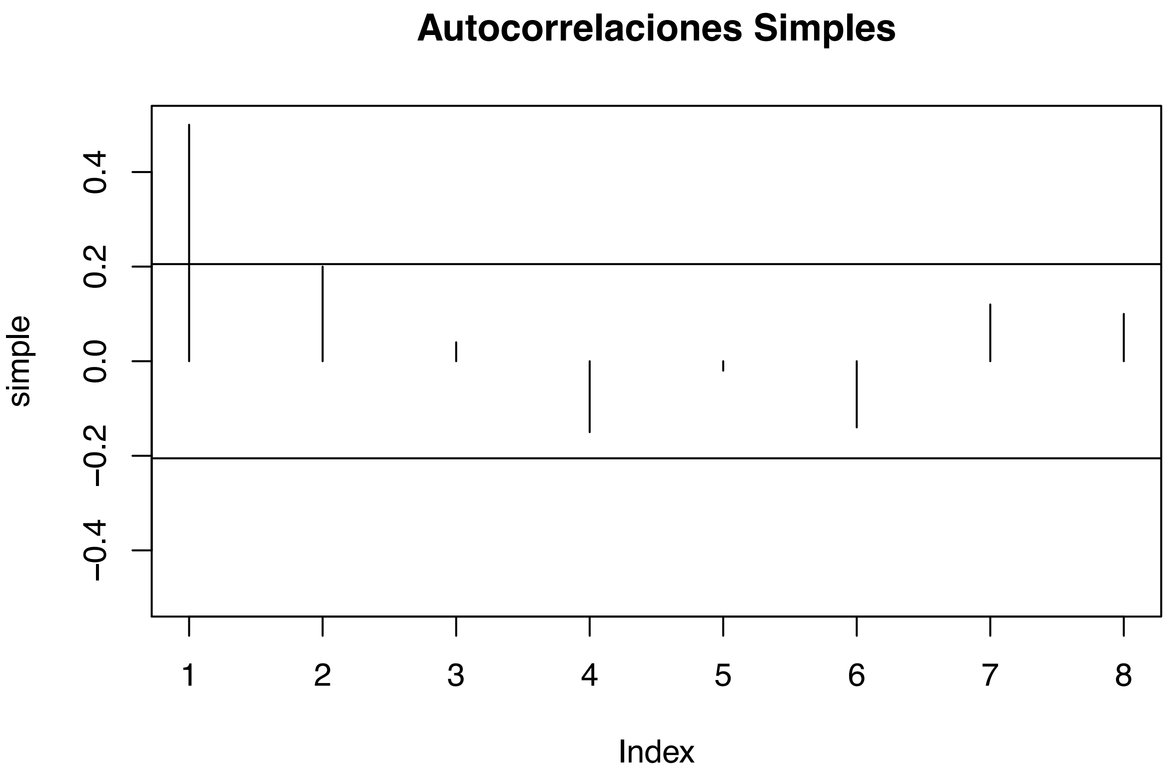
```
##      k simple argumentoSuma_s     apoyo_s     Qk_s    cuantil_s
## [1,] 1   0.50     20.75949367 20.75949367 20.75949 2.719161e-06
```

```
## [2,] 2   0.20      3.36410256  3.36410256 24.12360 2.888003e-06
## [3,] 3   0.04      0.13631169  0.13631169 24.25991 1.060187e-05
## [4,] 4  -0.15      1.94210526  1.94210526 26.20201 1.338381e-05
## [5,] 5  -0.02      0.03498667  0.03498667 26.23700 3.588128e-05
## [6,] 6  -0.14      1.73751351  1.73751351 27.97451 4.119236e-05
## [7,] 7   0.12      1.29402740  1.29402740 29.26854 5.435489e-05
## [8,] 8   0.10      0.91111111  0.91111111 30.17965 8.006511e-05
```

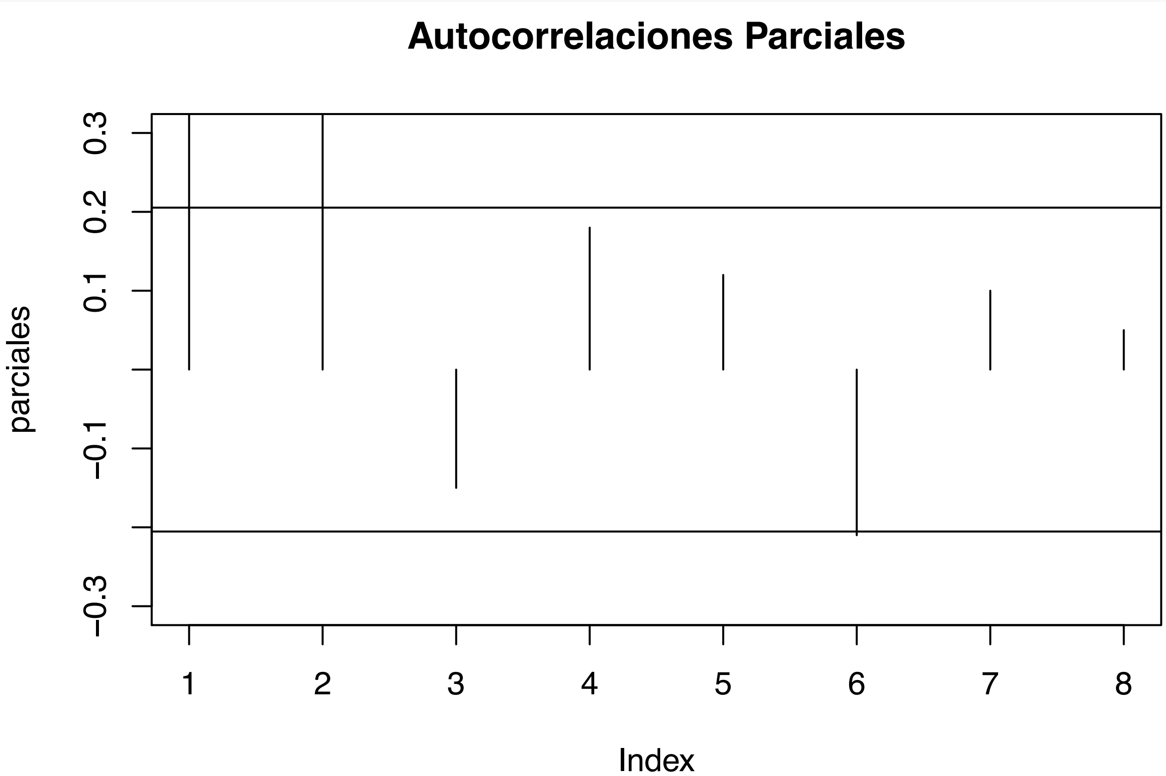
```
# Ahora, calculo todo para las parciales
argumentoSuma_p <-c(rep(0,8))
for (i in 1:8){
  argumentoSuma_p[i]<-(parciales[i]^2)/(n-i)
}

apoyo_p <- argumentoSuma_p<-n*(n+2)*argumentoSuma_p

Qk_p<-c(rep(0,8))

for (i in 1:8){
  Qk_p[i]<-sum(apoyo_p[1:i])
}

cuantil_p<-c(rep(0,8))

for (i in 1:8){
  cuantil_p[i]<-dchisq(Qk_p[i],i)
}

tabla_p <- cbind(k, parciales, argumentoSuma_p, apoyo_p, Qk_p, cuantil_p)
tabla_p
```

```
##      k parciales argumentoSuma_p    apoyo_p     Qk_p    cuantil_p
## [1,] 1      0.50      20.7594937 20.7594937 20.75949 2.719161e-06
## [2,] 2      0.45      17.0307692 17.0307692 37.79026 3.111134e-09
## [3,] 3     -0.15       1.9168831  1.9168831 39.70715 5.998563e-09
## [4,] 4      0.18       2.7966316  2.7966316 42.50378 6.263102e-09
## [5,] 5      0.12       1.2595200  1.2595200 43.76330 1.208856e-08
## [6,] 6     -0.21       3.9094054  3.9094054 47.67270 6.315731e-09
## [7,] 7      0.10       0.8986301  0.8986301 48.57133 1.240617e-08
## [8,] 8      0.05       0.2277778  0.2277778 48.79911 3.064589e-08
```

```
# Finalmente obtenemos los intervalos de confianza y graficamos
inferior<--qnorm(0.975)*sqrt((1/n)*((n-length(k))/(n+2)))
superior<-qnorm(0.975)*sqrt((1/n)*((n-length(k))/(n+2)))

# Graficamos
plot(simple,type='h',main="Autocorrelaciones Simples", ylim=c(-0.5,0.5))
abline(h=inferior)
abline(h=superior)
```




```r
plot(parciales,type='h',main="Autocorrelaciones Parciales",ylim=c(-0.3,0.3))
abline(h=inferior)
abline(h=superior)
```



b)

Observando las gráficas obtenidas de las autocorrelaciones, nos damos cuenta que las autocorrelaciones simples no nos dicen nada, por lo que descartamos que sea un MA(q). Ahora, analizando las autocorrelaciones parciales, nos podemos percatar que los primeros dos valores de las autocorrelaciones, pasan la banda de confianza, por lo que propongo un modelo **AR(2)**, por lo que nuestro mdoelo es:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

Por otro lado, para calcular los coeficientes de nuestro modelo, hacemos lo siguiente:

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{(1-\rho_1^2)} = \frac{0.5(1-0.2)}{1-0.5^2} = \frac{8}{15}$$

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{0.2-0.5^2}{1-0.5^2} = -\frac{1}{15}$$

$\therefore$ Nuestro modelo es: $X_t = \frac{8}{15}X_{t-1} - \frac{1}{15}X_{t-2} + \varepsilon_t$

c)

Notemos que como sabemos que es un AR(2), tenemos la siguiente fórmula:

$$Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2}$$

Sustituyendo valores, obtenemos:

$Var(X_t) = \frac{0.9^2}{1-0.5(\frac{8}{15})-0.2(\frac{-1}{15})} = \frac{243}{224}$

d) Según lo visto en clase, tenemos que la función de autocovarianza de un modelo AR(2) Está dada de la siguiente manera:

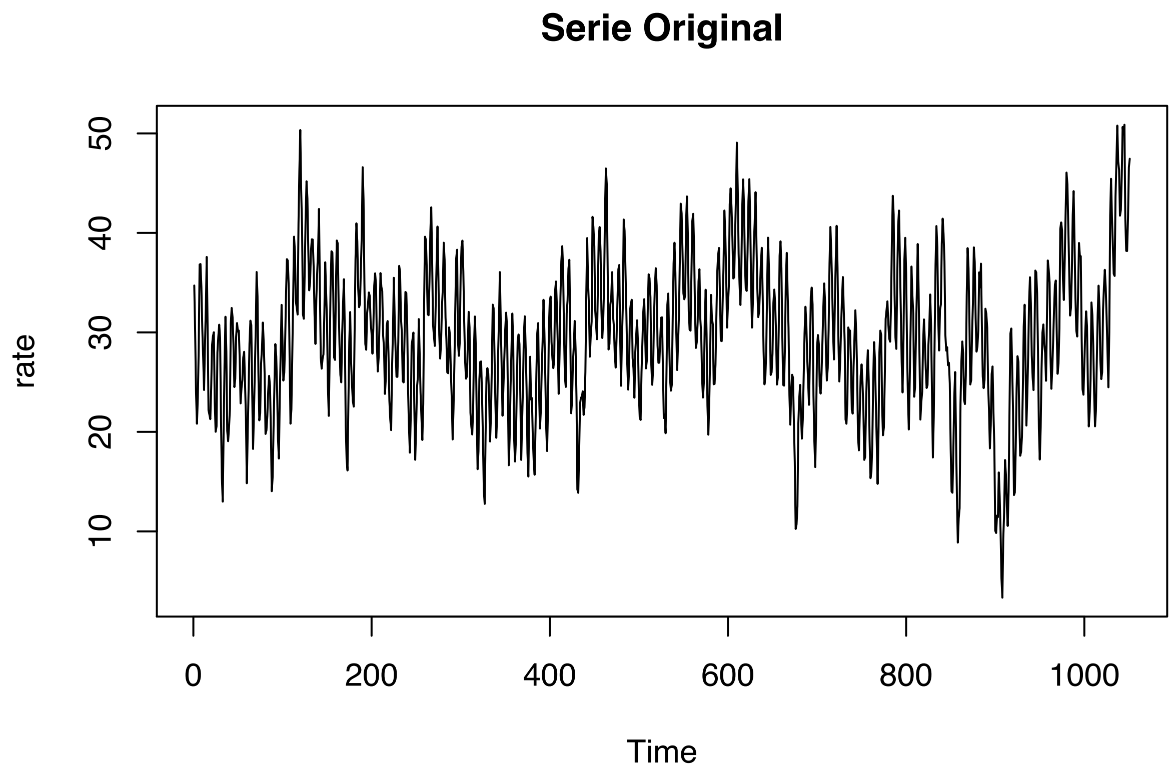
$$\gamma(k) = (\phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma^2)\cdot 1_{(k=0)} + (\phi_1\gamma(k-1) + \phi_2\gamma(k-2))\cdot 1_{(k>0)}$$

$$\gamma(k) = (\frac{8}{15}\gamma(1) - \frac{1}{15}\gamma(2) + (0.9)^2)\cdot 1_{(k=0)} + (\frac{8}{15}\gamma(k-1) - \frac{1}{15}\gamma(k-2))\cdot 1_{(k>0)}$$

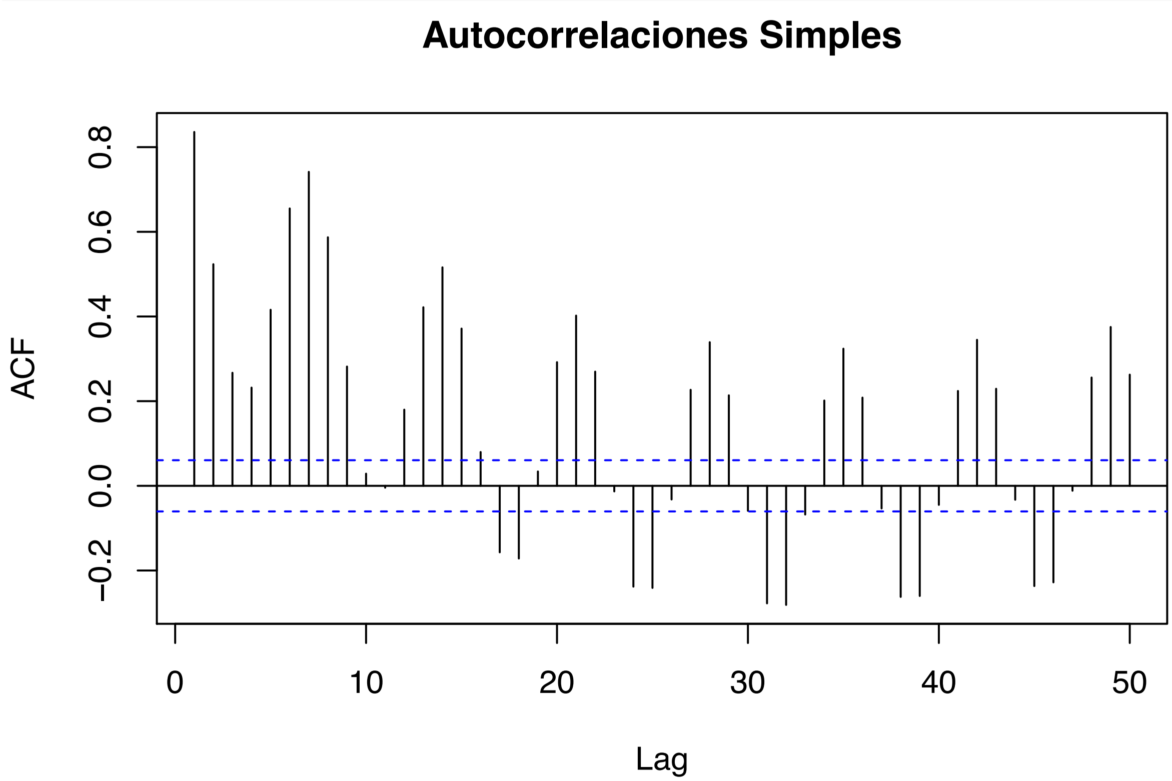
7.

a)

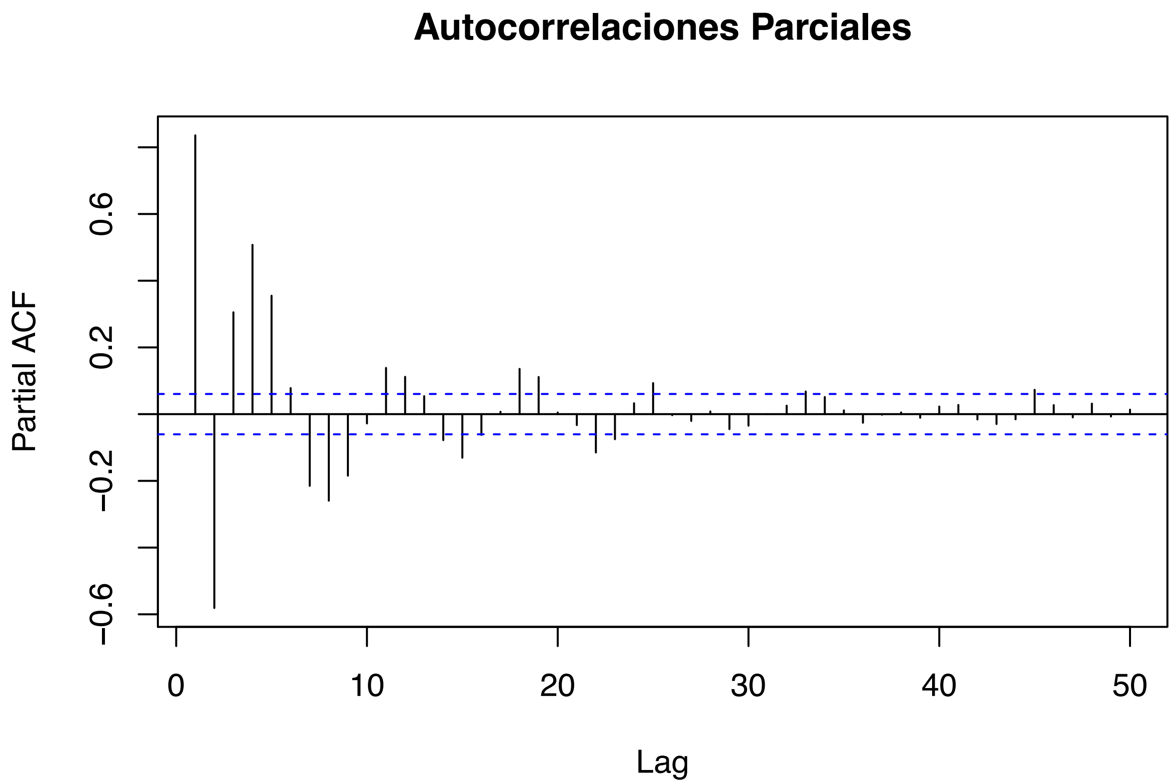
```r
# Cargamos los datos
rates <- ts(read.csv("rates.csv"))

# Graficamos nuestra serie
plot(rates, main = "Serie Original")
```




```r
# Obtenemos las autocorrelaciones simples y parciales
acf(rates, lag.max = 50, main = "Autocorrelaciones Simples")
```




```r
pacf(rates, lag.max = 50, main = "Autocorrelaciones Parciales")
```



Analizando las autocorrelaciones, nos damos cuenta que las simples no nos dicen mucho, tienen un decaemiento geométrico. Por otro lado, las autocorrelaciones parciales, aun que presentan ciclos, nos damos cuenta que las dos primes son "las más significantes", por lo que podría proponer un modelo ARMA(2,0). Para obtener una mejor modelo, usaremos una función de la librería forecast (auto.arima()), la cual, recibirá de parámetro nuestros datos y nos regresará la mejor modelo que ajusta a los datos.

```
mejorModelo <- auto.arima(rates)
mejorModelo
```

```
## Series: rates
## ARIMA(2,0,4) with non-zero mean
##
## Coefficients:
##          ar1     ar2     ma1     ma2     ma3     ma4     mean
##       1.1999  -0.903  0.0342  0.5391  0.4103  0.4305  29.3934
## s.e.  0.0198   0.025  0.0458  0.0350  0.0305  0.0310   0.2946
##
## sigma^2 estimated as 7.801:  log likelihood=-2569.52
## AIC=5155.04   AICc=5155.18   BIC=5194.7
```

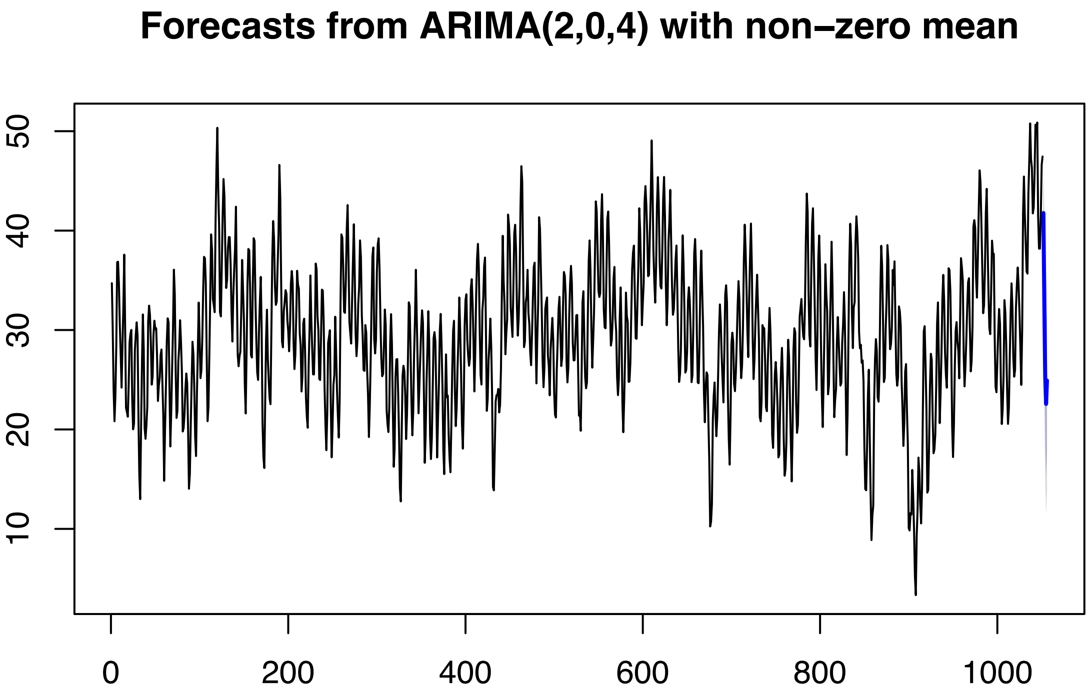
Como podemos observar, el análisis que hicimos a las autocorrelaciones fue correcto, obtuvimos un modelo que en la parte auto regresiva tiene 2 parámetros y según lo obtenido anteriormente, en la parte de medias móviles tiene 4 parámetros. Por lo que el modelo que mejor ajusta a nuestros datos es:

$$ARMA(2,4)$$

Ahora, pronosticaremos las siguientes 5 observaciones.

```
pronostico <- forecast(mejorModelo, h=5)
```

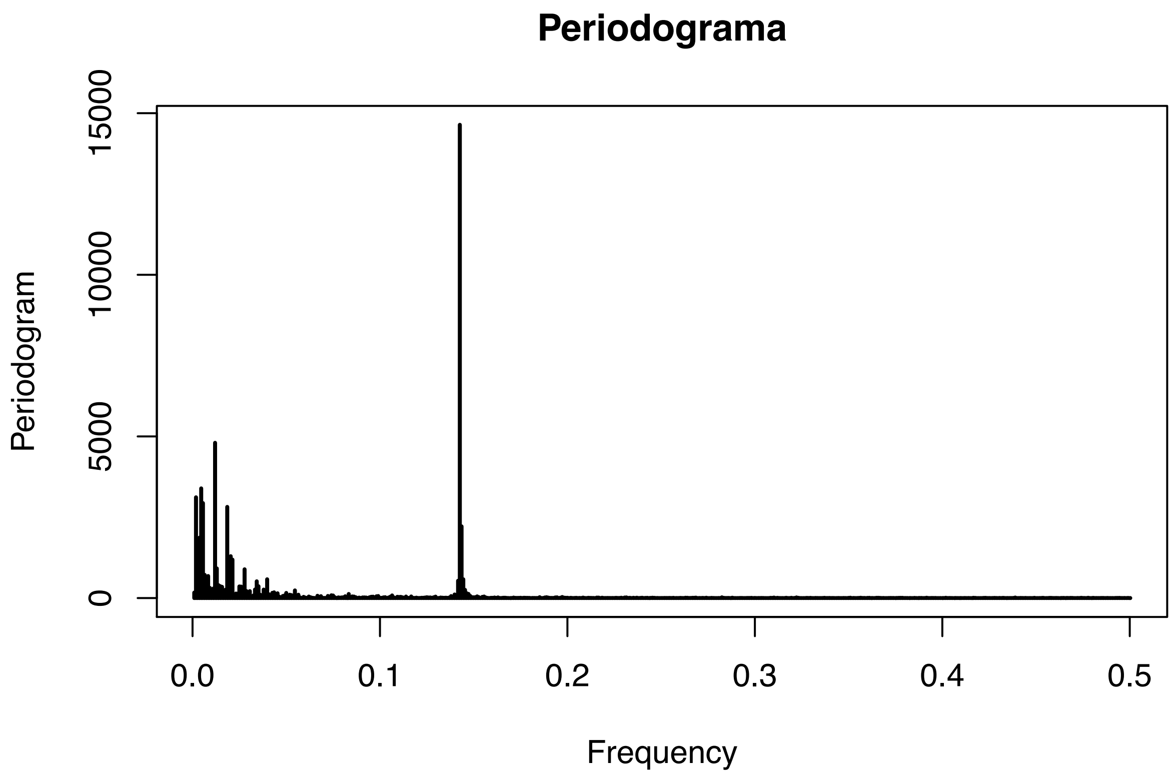
```r
# Realizamos la grafica del pronostico
plot(pronostico)
```



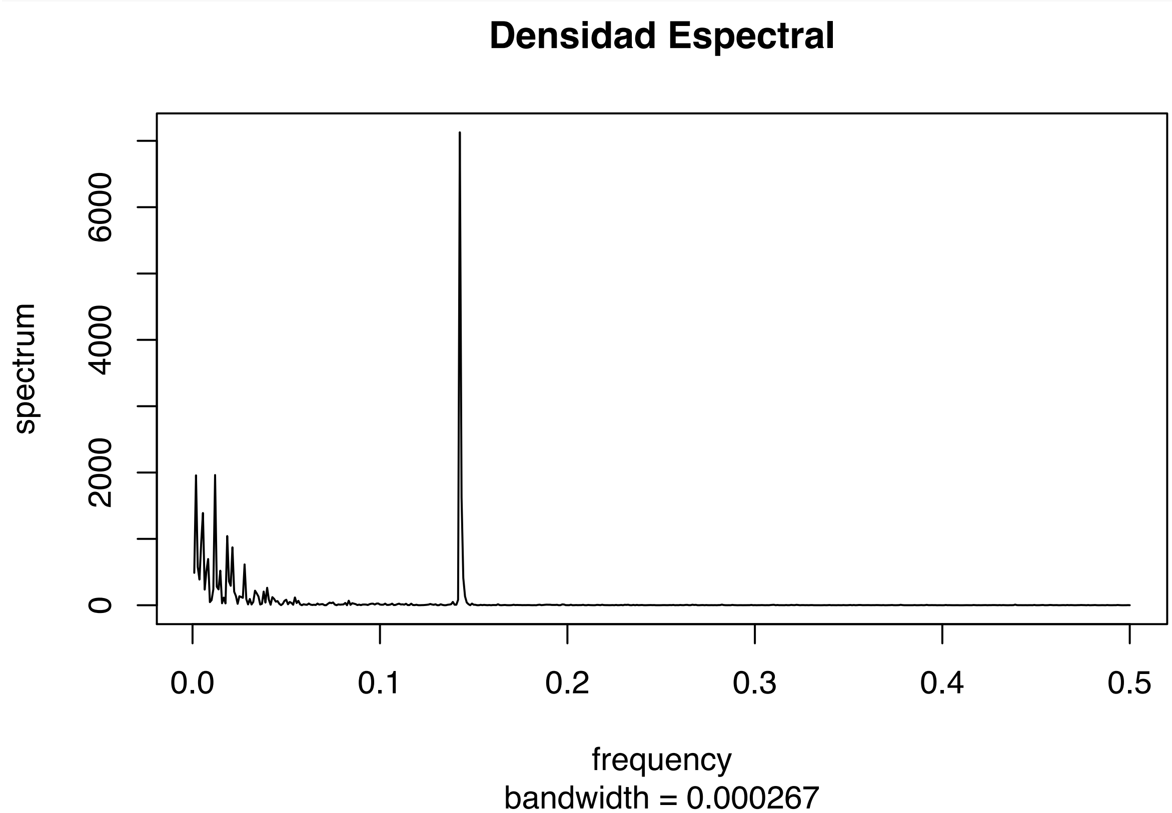
Podemos notar que aparentemente el pronóstico es correcto, ya que, sigue la tendencia que estuvo marcando la serie en tiempos anteriores, pero no podemos estar 100% seguros, porque no hay manera de compararlos con algunos reales.

b)

```r
# Obtengo el periodograma
periodograma <- periodogram(rates, main = "Periodograma")
```




```
# Obtenemos la Densidad Espectral
DensidadEspectral <- spectrum(rates, main = "Densidad Espectral", log = "no")
```



c)

Dado que sabemos que el $Periodo = T = \frac{1}{f}$ donde f es la frecuencia.

```r
# Obtenemos el periodo utilizando la densidad espectral
p <- periodograma(rates)
# Obtengo el máximo
maxp <- max(p$densidad)

# Notemos que el máximo se encuentra en el renglón 150
periodo <- p$periodos[150]

print("El periodo de la serie es:")
```

```
## [1] "El periodo de la serie es:"
```

```r
print(round(periodo, 0))
```

```
## [1] 7
```

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias
Series de Tiempo / 2020-II
Primera Evaluación
Lunes 20 de Abril del 2020
Act. Ma. Susana Barrera Ocampo, Mat. Erick Eduardo Aguilar Hernández

---

Instrucciones:

La elaboración de dicha evaluación es **individual**, además en todos los ejercicios deberá añadir los cálculos correspondientes en Latex asi como gráficas, código y explicación de que es lo que se esta realizando en cada paso, es importante que sea claro y ordenado durante la realización de esta evaluación. El entregable consta de un único archivo .pdf que contendrá la elaboración de su examen y que deberá subir a la plataforma del google classroom en el grupo asignado a esta materia antes del día lunes 27 de Abril del 2020, como máximo a las 6:00 pm, no se aceptarán evaluaciones después de la fecha y hora indicadas. Cabe mencionar que la falta de estos lineamientos así como de ejercicios incompletos, erróneos, repercutirá en la calificación incluso podría derivar en la cancelación del examen. En algunos ejercicios se pide resolverlos con python sin embargo puede usar el software que mas le convenga siempre y cuando reponda correctamente y añada lo que se pide, de igual manera con Latex puede usar otro editor de ecuaciones que usted prefiera.

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	Total
Valor (puntos)	2	1	2	1	2	1	1	**10**

Lea cuidadosamente y responda lo que se pide a continuación.

1. Considere la siguiente serie de tiempo de tipo AR(1) no estacionaria:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{con } \phi_1 = 1$$

   a) Muestre que $E[X_t] = X_0$ y $V[X_t] = t\sigma^2$
   b) Muestre que $Cov[X_t, X_{t-k}] = |t-k|\sigma^2$
   c) Para para k=1,2 y 3 realice un plot del auto correlograma teórico usando las expresiones anteriores.
   d) Realice un programa en python que simule una trayectoria de longitud 400 de la serie no estacionaria y añada un plot de la trayectoria (considere $X_0 = 0$). Calcule el autocorrelograma simple y parcial con base a la trayectoria generada.
   e) Posteriormente use la trayectoria para ajustar un modelo AR, use los primeros 380 datos para ajustar y los últimos 20 para predecir, solape las gráficas del ajuste y los datos reales ¿Que concluye partir de esta gráfica y la tabla con el resumen del ajuste?, no olvide incluir esa tabla.

2. Considere la serie de tiempo AR(2) estacionaria:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + c + \varepsilon_t$$

   Muestre que:

   a) $E[X_t] = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}$
   b) $V[X_t] = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}$

3. Considere la siguiente serie de tiempo de tipo AR(2):

$$X_t = 1.4X_{t-1} - 0.85X_{t-2} + \varepsilon_t$$

a) Use las raíces del polinomio de retrasos para mostrar que la serie tiene un periodo de tamaño 9.

b) Realice un programa en python que simule una trayectoria de la serie de longitud 135 y añada un plot de la trayectoria para verificar que los datos que produce la serie tienen dicho periodo. ¿Cuantos ciclos hay?

c) Genere una trayectoria de dicha serie de modo que la longitud de la serie contenga 100 ciclos, luego calcule el periodograma y la densidad espectral a partir de la trayectoria y añada los gráficos.

d) Con lo anterior estime el periodo de la serie. ¿Coinciden? ¿De cuanto es la diferencia entre el periodo estimado y el teórico?.

4. Considere el siguiente modelo MA(1):

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Encuentre el estimador de θ_1 por mínimos cuadrados (ó máxima verosimilitud)

5. Considere el siguiente modelo ARMA(2,1):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

a) Si X_t es estacionaria encuentre la función de autocorrelación del proceso como función de los parámetros.

b) Si $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = -0.21$ y $\theta_1 = 0.7$ entonces el modelo que aparenta ser un ARMA es en realidad un AR(1).

6. Se tiene la auto correlaciones simples y parciales de un modelo ajustado, con veinte años de observaciones trimestrales.

Simples	0.5	0.2	0.04	-0.15	-0.02	-0.14	0.12	0.1
Parciales	0.5	0.45	-0.15	0.18	0.12	-0.21	0.1	0.05

a) Calcular la prueba de Box-Ljung, para las autocorrelaciones simples y parciales graficar con sus bandas de confianza

b) Identificar al modelo y obtener la estimación de sus parámetros.

c) Calcular la varianza suponiendo una sigma de 0.9.

d) Calcular las covarianzas del modelo que propone.

7. Utilice los datos del archivo rates.csv para:

a) Ajustar un modelo que pronostique 5 observaciones a partir del ultimo dato de la serie. Añada los gráficos.

b) Calcule el periodograma con su densidad espectral. Añada las gráficas del periodo y la frecuencia.

c) Con lo anterior estime el periodo de la serie.