Lógica da Programação

Teste

18.01.23

(Duração: 3h)

Nota: *Justifique adequadamente todas as suas respostas.*

1. **a)** Construa uma demonstração em DNP_i da fórmula: $(\neg p_0 \vee p_1) \to (p_0 \to (p_0 \wedge p_1))$.

b) Seja L um tipo de linguagem com símbolos de relação unários P e Q. Construa uma derivação em $\mathrm{DN}_c^{\Rightarrow w}$ do sequente

$$\forall x_0(\neg \mathsf{P}(x_0) \to \neg \mathsf{Q}(x_0)) \Rightarrow \forall x_0(\mathsf{Q}(x_0) \to \mathsf{P}(x_0))$$

e conclua que: $\forall x_0(\neg \mathsf{P}(x_0) \to \neg \mathsf{Q}(x_0)) \vdash_c \forall x_0(\mathsf{Q}(x_0) \to \mathsf{P}(x_0))$. Em alternativa, com penalização de 0,25 valores, pode construir diretamente uma derivação em DN_c que mostre esta relação de derivabilidade.

2. Considerando apenas o fragmento proposicional com os conetivos $\wedge$, $\neg$, $\perp$, mostre por indução em derivações que, para quaisquer fórmula φ e conjunto finito de fórmulas Γ, se φ é derivável a partir de Γ em DNP_c, então $\Gamma \Rightarrow \varphi$ é derivável em $\mathrm{DNP}_c^{\Rightarrow w}$.

3. Considere o combinador $\mathsf{F} = \lambda ywz.\, w((yw)z)$ e o 1º numeral de Church $\mathbf{c}_1 = \lambda fx.\, fx$.

a) Determine $\{N \in \Lambda : \mathsf{F}\,\mathbf{c}_1 \to_\beta^* N\}$ e justifique se i) $\mathsf{F}\,\mathbf{c}_1$ admite forma β-normal e se ii) $\mathsf{F}\,\mathbf{c}_1 =_\beta \mathbf{c}_1$.

b) Seja σ um tipo simples e considere que Nat_σ é o tipo simples dado por $(\sigma \to \sigma) \to (\sigma \to \sigma)$.

i) Mostre que $\vdash \mathbf{c}_1 : Nat_\sigma$ e que $\vdash \mathsf{F} : Nat_\sigma \to Nat_\sigma$ (considerando tipificação *à la Curry*).

ii) Dê exemplo de um habitante de Nat_σ que não seja uma forma β-normal e diga se qualquer habitante de Nat_σ admite forma β-normal.

c) Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathsf{F}\,\mathbf{c}_n =_\beta \mathbf{c}_{n+1}$.

d) Considere que $g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é uma função numérica λ-definida por um combinador G. Mostre que a função numérica $h : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $h(n) = 0$, caso $n = 0$, e $h(n) = g(n+1)$, caso contrário, é λ-definível.

4. Mostre por indução que, para todo $M, N, \Gamma, x, \sigma, \tau$ tais que $x \notin dom(\Gamma)$, se $\Gamma \vdash M : \sigma$ e $\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau$, então $\Gamma \vdash N[M/x] : \tau$.

5. Considere as fórmulas $\varphi_1 = ((p_0 \to p_1) \to p_2)$ e $\varphi_2 = ((p_1 \to p_0) \to (p_1 \to p_2))$.

a) Indique uma derivação $\mathcal{D}$ do sequente $\Rightarrow \varphi_1 \to \varphi_2$, em $\mathrm{DNP}_i^{\Rightarrow w}$ com classes de hipóteses, e determine o λ-termo *à la Church* $t(\mathcal{D})$ associado a $\mathcal{D}$.

b) Diga se o tipo $t(\varphi_1 \to \varphi_2)$ é habitado.

c) Mostre que $\varphi_2 \to \varphi_1$ não é teorema de DNP_c e diga se para algum λ-termo *à la Church* N e para alguma variável x é possível ter-se a seguinte relação de tipificação: $x : t(\varphi_2) \vdash N : t(\varphi_1)$.

Cotações: 1- 4,25 val.; 2- 1,75 val.; 3- 7,5 val.; 4- 1,75 val.; 5- 4,75 val.