4.2.

d)

i) $\varphi = x_2 - 0 < x_1$

$subf(\varphi) = \{\varphi\}$

ii) $\varphi = \exists x_0 \forall x_1 \, (x_1 - x_0 < 0)$

$$subf(\varphi) = \{x_1 - x_0 < 0, \ \forall x_1 \, (x_1 - x_0 < 0), \ \varphi\}$$

iii) $\varphi = \forall x_1 \exists x_0 \, (x_1 < x_0) \wedge P(x_1)$

$$subf(\varphi) = \{x_1 < x_0, \ \exists x_0 \, (x_1 < x_0), \ \forall x_1 \exists x_1 \, (x_1 < x_0), \ P(x_1), \ \varphi\}$$

e)

i) $\varphi = x_2 - 0 < x_1$

$Liv(\varphi) = \{x_1, x_2\}$

$LiG(\varphi) = \emptyset$

ii) $\varphi = \exists x_0 \forall x_1 \, (x_1 - x_0 < 0)$

$Liv(\varphi) = \emptyset$

$LiG(\varphi) = \{x_1, x_0\}$

iii) $\varphi = \forall x_1 \exists x_0 \, (x_1 < x_0) \wedge P(x_1)$

$Liv(\varphi) = \{x_1\}$; $LiG(\varphi) = \{x_0, x_1\}$

$\varphi[t/x]$: substituição, em φ, das ocorrências livres da variável x pelo L-termo t

a) $R(t_1, \dots, t_n)[t/x] = R(t_1[x], \dots, t_n[x])$,

para todo $R \in \mathcal{R}$
de aridade n
e para todo $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$

b) $\perp [t/x] = \perp$

c) $(\neg\varphi)[t/x] = \neg\varphi[t/x]$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$

d) $(\varphi_1 \square \varphi_2)[t/x] = \varphi_1[t/x] \square \varphi_2[t/x]$,

para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
e todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$

e) $$(Q_y\varphi)[t/x] = \begin{cases} Q_y\varphi & \text{se } y = x \\ Q_y\,\varphi[t/x] & \text{se } y \neq x, \end{cases}$$

para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi \in \mathcal{F}_L$

4.3

i) $\varphi = x_2 - 0 < x_1$

$$\varphi[x_2 - x_0 / x_1] = x_2 - 0 < x_2 - x_0$$

ii) $\varphi = \exists x_0 \forall x_1 \, (x_1 - x_0 < 0)$

$$\varphi[x_2 - x_0/x_1] = \exists x_0 \forall x_1 \, (x_1 - x_0 < 0)$$
$$= \varphi$$

iii) $\varphi = \forall x_1 \exists x_0 \, (x_1 < x_0) \wedge P(x_1)$

$$\varphi[x_2 - x_0 / x_1] = \forall x_1 \exists x_0 \, (x_1 < x_0) \wedge P(x_2 - x_0)$$

iv) $\varphi = \forall x_0 \, (x_0 < x_1) \vee \exists x_1 \, (x_1 < x_0)$

$$\varphi[x_2 - x_0 / x_1] = \forall x_0 \, (x_0 < x_2 - x_0) \vee \exists x_1 \, (x_1 < x_0)$$

x está livre para t em φ se para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy, $y \notin VAR(t)$

x OCORRE LIVRE EM φ?

SIM

NÃO

ALGUMA OCORRÊNCIA LIVRE DE x NO ALCANCE DE Q_y?

SIM

NÃO

$y \in VAR(t)$?

SIM

NÃO

x NÃO ESTÁ LIVRE PARA t EM φ

x ESTÁ LIVRE PARA t EM φ

OBS: Se $x \notin LIV(\varphi)$ ou $VAR(t) = \emptyset$, então x está livre para t em φ

4.4.

a) $x_1 < x_2$ não tem ocorrências de quantificadores.
V Logo, x_1 está livre para $t = x_2$ em $x_1 < x_2$

b) $\varphi = \exists x_2 \ (x_1 < x_2)$
F

x_1 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\exists x_2$ e $x_2 \in VAR(x_2)$. Logo, x_1 não está livre para x_2 em φ

OBS: Fazendo $\varphi[x_2/x_1]$, obteríamos

$$\exists x_2 \ (x_2 < x_2),$$

verificando-se a captura de variáveis.

c) $\varphi = \exists x_2 \ (x_1 < x_2)$
V

$VAR(0) = \emptyset$
Logo, x_1 está livre para 0 em φ

OBS: $\varphi[0/x_1] = \exists x_2 \ (0 < x_2)$: não ocorre captura de variáveis

d)
V $\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \ (x_1 < x_2)$

x_1 não ocorre livre em φ. Logo, x_1 está livre para x_2 em φ

OBS: $\varphi[x_2/x_1] = \varphi$ (não há captura de variáveis)

e) $\varphi = \exists x_2 \, (x_1 < x_2)$

V

$x_2 \notin Liv(\varphi)$. Logo, x_2 está livre para qualquer L-termo t em φ

OBS: $\varphi[t/x_2] = \varphi$ (não há captura de variáveis)

f) $\varphi = \exists x_2 \, (x_1 < x_2)$

F

$x_1 \in Liv(\varphi)$ e há uma ocorrência livre de x_1 no alcance de $\exists x_2$.
x_1 está livre para t em φ se e só se $x_2 \notin VAR(t)$

4.5.

a) $L = (\{\}, \{L, P\}; \mathcal{N})$

onde $\mathcal{N}(L) = \mathcal{N}(P) = 1$

$\forall x_0 \, (P(x_0) \to L(x_0))$

b) $L = (\{\}, \{Q, V, M\}, \mathcal{N})$

onde $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(M)$

$\forall x_0 \, ((Q(x_0) \to V(x_0)) \wedge (\neg Q(x_0) \to M(x_0)))$

c) $L = (\{\}, \{V\}, \mathcal{N})$

onde $\mathcal{N}(V) = 1$

$\exists x_0 \, \neg V(x_0)$

ou

$\neg(\forall x_0 \, V(x_0))$

d) $L = (\{J\}, \{C\}, \mathcal{N})$

onde $\mathcal{N}(J) = 0$ e $\mathcal{N}(C) = 1$

$(\forall x_0 \, C(x_0)) \to C(J)$

e) $L = (\{6, 12, d\}, \{>\}, \mathcal{N})$

onde $\mathcal{N}(6) = \mathcal{N}(12) = 0$, $\mathcal{N}(d) = 1$ e $\mathcal{N}(>) = 2$

$\forall x_0 \, (x > 6 \to d(x) > 12)$