5.4.

a) $\models (\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \to \forall x (\varphi \vee \psi)$

(ou seja, $(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \to \forall x (\varphi \vee \psi)$ é universalmente válida)

Sejam $E = (D, \bar{\ })$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E.

Suponhamos que $E \models \forall x \varphi \vee \forall x \psi \; [a]$.

Pretendemos mostrar que $E \models \forall x (\varphi \vee \psi) [a]$.

Temos

$E \models \forall x \varphi \vee \forall x \psi \, [a]$ sse $\forall x \varphi \vee \forall x \psi \; [a]_E = 1$

sse $\forall x \varphi \, [a]_E = 1$ ou $\forall x \psi \, [a]_E = 1$

sse Para todo $d \in D$, $\varphi \left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$.

ou

Para todo $d \in D$, $\psi \left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$.

CASO 1: Para todo $d \in D$ $\varphi \left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$.

Neste caso, para todo $d \in D$, $\varphi \vee \psi \left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$, pelo que $\forall x (\varphi \vee \psi) [a]_E = 1$ e $E \models \forall x (\varphi \vee \psi) [a]$.

CASO 2: Para todo $d \in D$ $\psi \left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$

Neste caso, para todo $d \in D$, $\varphi \vee \psi \left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$ e, portanto, $E \models \forall x \varphi \vee \psi \left[a\binom{x}{d}\right]$.

5.4

b) $\not\models \forall x\,(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall x\,\varphi \vee \forall x\,\psi)$

$L = (\{\}, \{P, I\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(I) = 1$.

Sejam $E = (\{1,2,3,4\}, \bar{\ })$ com

$\bar{P} = \{2,4\}$ e $\bar{I} = \{1,3\}$, e a uma atribuição em E.

$E \models \forall x_0\,(P(x_0) \vee I(x_0))\,[a]$ sse

Para todo $d \in \{1,2,3,4\}$, $(d \in \bar{P}$ ou $d \in \bar{I})$,

o que é verdade.

Logo, $E \models \forall x_0\,(P(x_0) \vee I(x_0))\,[a]$

No entanto, $E \not\models (\forall x_0\, P(x_0) \vee \forall x_0\, I(x_0))\,[a]$.

De facto,

$E \not\models (\forall x_0\, P(x_0) \vee \forall x_0\, I(x_0))\,[a]$ sse

$E \not\models \forall x_0\, P(x_0)\,[a]$ e $E \not\models \forall x_0\, I(x_0)$ sse

Existe $d \in \{1,2,3,4\}$ t.q. $d \notin \bar{P}$ e Existe $d' \in \{1,2,3,4\}$ t.q. $d' \notin \bar{I}$, o que é verdade.

Ex. 5.5 $\quad (Qx\ \varphi)\ \square\ \psi \Leftrightarrow Qx\ (\varphi \square \psi)$ se $x \notin Liv(\psi)$

$Q \in \{\forall, \exists\}$, $\square \in \{\wedge, \vee\}$

(também é verdade

$$\psi \,\square\, (Qx\ \varphi) \Leftrightarrow Qx\ (\psi \square \varphi))$$

$Q = \forall$, $\square = \vee$, $x \notin Liv(\psi)$

· $\forall x\ (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x\, \varphi) \vee \psi$

Queremos mostrar que, para qualquer L-estrutura $E = (D, ^-)$ e qualquer atribuição a em E,

$$E \vDash \forall x\,(\varphi \vee \psi)\,[a] \quad \text{sse} \quad E \vDash (\forall x\, \varphi) \vee \psi.$$

Temos

$E \vDash \forall x\,(\varphi \vee \psi)\,[a]$ sse Para todo $d \in D$, $E \vDash (\varphi \vee \psi)\left[a\binom{x}{d}\right]$

sse Para todo $d \in D$, $E \vDash \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]$ ou $E \vDash \psi\left[a\binom{x}{d}\right]$.

sse Para todo $d \in D$, $E \vDash \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]$ ou $E \vDash \psi\,[a]$

$x \notin Liv(\psi)$

Logo, a e $a\binom{x}{d}$ são atrib. tais que $a(y) = a\binom{x}{d}(y)$ para todo $y \in Liv(\psi)$

sse $E \vDash \forall x\, \varphi\,[a]$ ou $E \vDash \psi\,[a]$

sse $E \vDash (\forall x\, \varphi \vee \psi)\,[a]$.

5.6.

a) $x \notin Liv(\psi)$

i) $\models (\forall x \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x\ (\varphi \to \psi)$

(ou seja, $\forall x \varphi \to \psi \Leftrightarrow \exists x\ (\varphi \to \psi)$)

$\forall x\ \varphi \to \psi$

$\Leftrightarrow\ \neg \forall x \varphi \vee \psi$

$\Leftrightarrow\ \exists x\ \neg\varphi\ \vee \psi$

$\Leftrightarrow\ \exists x\ (\neg\varphi \vee \psi)$

$\downarrow$

ex. 5.5, $x \notin Liv(\psi)$

$\Leftrightarrow\ \exists x\ (\varphi \to \psi)$.

b) i) A condição $x \notin Liv(\psi)$ é necessária para

$\models (\forall x \varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x\ (\varphi \to \psi)$

$L = (\{\}, \{R, P\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(R) = \mathcal{N}(P) = 1$.

$E = (\{1,2\}, \bar{\ })$

onde $\overline{R} = \{1,2\}$, $\overline{P} = \{2\}$.

$E \not\models (\forall x_0\ R(x_0)) \to P(x_0)$

pois $E \models \forall x_0\ R(x_0)$, uma vez que

para todo $d \in \{1,2\}$, $d \in \overline{R}$

mas $E \not\models P(x_0)$: tome-se uma atribuição a

t.q. $a(x_0) = 1$

$(1 \notin \overline{P})$.

5.6 (cont.)

$$E \models \exists x_0 \ (R(x_0) \to Q(x_0))$$

pois existe $d \in \{1,2\}$ t.q. se $d \in \bar{R}$ então $d \in \bar{Q}$ (tome-se $d = 2$)

c) $\models \exists x \ (\varphi \to \forall x \ \varphi)$

$$\exists x \ (\varphi \to \forall x \ \varphi) \Leftrightarrow \forall x \varphi \to \forall x \varphi$$

5.9. a) i)

$\exists x \ (\psi \to \varphi) \Leftrightarrow (\forall x \psi) \to \varphi$

$x \notin LIV(\varphi)$

(considere-se $\psi = \forall x \varphi$)

Como $\models \forall x \varphi \to \forall x \varphi$, segue-se que

$$\models \exists x \ (\varphi \to \forall x \varphi).$$

5.7.

$L = L_{Arit}$

$\varphi_1 : (x_1 < x_0)$

$\varphi_2 : \neg (x_1 < x_0)$

$\varphi_3 = \exists x_1 \neg (x_1 < x_0)$

$\varphi_4 = \forall x_1 \neg (x_1 < x_0)$

Um conjunto de L-fórmulas Γ diz-se satisfazível quando para alguma L-estrutura E e para alguma atribuição a em E, (E, a) satisfaz Γ.

($E \models \varphi[a]$, para todo $\varphi \in \Gamma$)

a) Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Sabemos que

$E \models \varphi_2 [a]$ sse $E \not\models x_1 < x_0 [a]$

sse $E \not\models \varphi_1 [a]$.

Logo, $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ não é satisfazível.

b) Sejam $E = EA_{rit}$ e $a : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ a atribuição dada por $a(x_i) = \begin{cases} i & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ i+2 & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$ $(i \in \mathbb{N}_0)$

Temos que

$E \models \varphi_1 [a]$ sse $a(x_1) < a(x_0)$ sse $1 < 2$, o que é verdade

$E \models \varphi_3 [a]$ sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $\neg(x_1 < x_0)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d \not< a(x_0)$

sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d \geq 2$, o que é verdade.

Portanto, (E, a) satisfaz $\{\varphi_1, \varphi_3\}$ e este conjunto é satisfazível.

c) Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em $E = (D, \bar{\ })$

Temos que

$$E \models \varphi_1 [a] \text{ sse } (a(x_1), a(x_0)) \in \bar{<} \,. \quad (*)$$

e

$E \models \varphi_4 [a]$ sse Para todo $d \in D$, $\neg(x_1 < x_0) \left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse Para todo $d \in D$, $x_1 < x_0 \left[a\binom{x_1}{d}\right] = 0$

sse $\underbrace{\text{Para todo } d \in D, \ (d, a(x_0)) \notin \bar{<}}_{\text{tomando } d = a(x_1), \text{ obtemos } (a(x_1), a(x_0)) \notin \bar{<} \ (**)}$.

Como $(*)$ e $(**)$ se contradizem, não existe um par (E, a) que satisfaça $\{\varphi_1, \varphi_4\}$, pelo que este conjunto não é satisfazível.

d) Sejam $E = E_{Arit}$ e a a atribuição definida por $a(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

Temos que $E \models \varphi_3 [a]$ sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $\neg(x_1 < x_0)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $(x_1 < x_0)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 0$

sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d \geq \underbrace{a(x_0)}_{=0}$,

o que é verdade.

Além disso,

$E \models \varphi_4 [a]$ sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $d \geq 0$, o que também é verdade. Logo, (E, a) satisfaz $\{\varphi_3, \varphi_4\}$

5.9.

a) $\forall x\,(\psi \to \varphi),\ \forall x\,(\sigma \to \psi) \models \forall x\,(\sigma \to \varphi)$

Seja $E = (D, {}^{-})$ uma L-estrutura e seja a uma atribuição em E.

Suponhamos que $E \models \forall x\,(\psi \to \varphi)\,[a]$ (1)

e

$E \models \forall x\,(\sigma \to \psi)\,[a]$. (2)

Pretendemos mostrar que $E \models \forall x\,(\sigma \to \varphi)\,[a]$.

Por (1) sabemos que: para todo $d \in D$, se $E \models \psi\left[a\binom{x}{d}\right]$ então $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]$. (*)

Por (2) sabemos que: para todo $d' \in D$, se $E \models \sigma\left[a\binom{x}{d'}\right]$ então $E \models \psi\left[a\binom{x}{d'}\right]$. (**)

Seja $d'' \in D$. Se $E \models \sigma\left[a\binom{x}{d''}\right]$, então $E \models \psi\left[a\binom{x}{d''}\right]$ (por **) e, portanto, $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d''}\right]$ (por *).

5.9

b) $\forall x\,(\psi \to \varphi),\ \exists x\,(\sigma \wedge \psi) \models \exists x\,(\sigma \wedge \varphi)$

Sejam $E = (D, ^-)$ uma L-estrutura e a uma atribuição.

Suponhamos que: (1) $E \models \forall x\,(\psi \to \varphi)\,[a]$
e
(2) $E \models \exists x\,(\sigma \wedge \psi)\,[a]$

Pretendemos mostrar que $E \models \exists x\,(\sigma \wedge \varphi)\,[a]$, ou seja, que existe $d \in D$ t.q. $E \models \sigma\left[a\binom{x}{d}\right]$ e $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]$.

Por (1), sabemos que, para todo $d' \in D$,

$$E \models \psi\left[a\binom{x}{d'}\right] \Rightarrow E \models \varphi\left[a\binom{x}{d'}\right] \quad (*)$$

Por (2), sabemos que existe $d'' \in D$ t.q.

$$E \models \sigma\left[a\binom{x}{d''}\right] \text{ e } E \models \psi\left[a\binom{x}{d''}\right].$$

Por $(*)$, segue-se que $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d''}\right]$.

Assim, $E \models \sigma\left[a\binom{x}{d''}\right]$ e $E \models \varphi\left[a\binom{x}{d''}\right]$, o que conclui a prova.