Lógica de Programação - Aula 4

Ex:

$$\mathcal{D}_0 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}}{p_1}\ \wedge_1 E}{p_0 \vee p_1}\ \vee_1 I}{(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)} \in \mathcal{D}^{DNP}(\ell) \quad \ell \in \{i, c\}$$

Obs: Cada um dos conjuntos de derivações tem associado um princípio de indução estrutural e um princípio de recursão estrutural, bem como um conceito de subderivação.

Ex: As subderivações da derivação $\mathcal{D}_0$ são:

- $p_0 \wedge p_1$, $\quad \cfrac{p_0 \wedge p_1}{p_1}\ \wedge_1 E$, $\quad \cfrac{\cfrac{p_0 \wedge p_1}{p_1}\ \wedge_1 E}{p_0 \vee p_1}\ \vee_1 I$, $\quad \mathcal{D}_0$

Notação: Por vezes guardaremos fragmentos dos sistemas formais restritos a certos conetivos/quantificadores. Por exemplo,

$DN_c^{\perp, \to, \forall}$ denotará o fragmento relativo à linguagem das fórmulas em $\perp$, $\to$, $\forall$ e cujo conjunto de derivações é fechado para as regras $\perp E$, $\to I$, $\to E$, $\forall I$, $\forall E$, RAA.

$$\cfrac{\begin{array}{c}\cancel{\neg\varphi} \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\varphi}\ \text{RAA}$$

$(\Leftrightarrow \varphi \to \perp)$ (podemos aplicar todas as derivações na intuicionista, EXCETO o RAA)

RAA (só pode ser usado nas derivações CLÁSSICAS)
(Redução ao absurdo)

Definição: **1)** $\mathcal{D}$ é uma derivação de φ $\left(\text{notação: } \begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \varphi\end{array}\right)$ quando a conclusão de $\mathcal{D}$ (a raiz da árvore) é φ.

2) $\mathcal{D}$ é uma derivação de φ a partir de Γ $\left(\text{notação: } \begin{array}{c}\Gamma \\ \mathcal{D} \\ \varphi\end{array}\right)$ quando $\mathcal{D}$ é uma derivação de φ cujo conjunto de hipóteses não canceladas (folhas não "cortadas") constituem um subconjunto de Γ.

3) D é uma demonstração de φ quando D é uma derivação de φ a partir do conjunto vazio $\emptyset$.

$$\left(\begin{array}{c}\emptyset\\ D\\ \varphi\end{array}\right)$$

Ex: a)

$$\dfrac{\dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_1}\wedge_1 E}{p_0 \vee p_1}\vee_2 I$$

é uma derivação de $p_0 \vee p_1$ a partir de $\{p_0 \wedge p_1\}$.

2) D_0 do exemplo anterior é uma derivação de $(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$ a partir de $\emptyset$, pelo que é uma demonstração desta fórmula

Def: Dada $\begin{array}{c}D_1\\ \varphi\end{array}$, a notação $\begin{array}{c}D_1\\ [\varphi]\\ D_2\end{array}$ denotará a derivação obtida de D_2 substituindo todas as (eventuais) ocorrências de φ como hipótese não cancelada de D_2 pela derivação D_1.

Ex: $D_2 = \dfrac{p_0 \quad p_1}{p_0 \wedge p_1}\wedge I \qquad D_1 = \dfrac{p_2 \to p_0 \quad p_2}{p_0}\to E$

$$\begin{array}{c}D_1\\ [\varphi]\\ D_2\end{array} = \dfrac{\dfrac{p_2 \to p_0 \quad p_2}{p_0}\to E}{p_0 \wedge p_1}\wedge I$$

Obs: Dadas derivações $\begin{array}{c}\Gamma\\ D_1\\ \varphi\end{array}$ e $\begin{array}{c}\Delta\\ D_2\\ \psi\end{array}$,

$\begin{array}{c}D_1\\ [\varphi]\\ D_2\end{array}$ é derivação de ψ a partir de ψ, a partir de $\Delta\setminus\{\varphi\}\cup\Gamma$ D_2.

Def: 1) As relações de derivabilidade/consequência sintática clássica e intuicionista (entre conjuntos de fórmulas) são notadas por $\vdash_l$ (com $l \in \{c, i\}$) e definidas por: (martelo) clássico intuicionista

$\Gamma \vdash_l \varphi$ se e só se φ é derivável a partir de Γ em DNP_l

2) φ é fórmula de $DN(P)_\ell$ $(\ell \in \{c, i\})$ (notação: $\vdash_\ell \varphi$) quando existem demonstrações de φ em $DN(P)_\ell$.

Obs: $\vdash_\ell \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash_\ell \varphi$

Ex: 1) $\vdash_\ell (p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$ $(\ell \in \{c, i\})$

2) $\{p_0 \wedge p_1\} \vdash_\ell p_0 \vee p_1$ $(\ell \in \{c, i\})$

podem ser omitidos.

3) $\vdash_c \neg\neg p_0 \to p_0$

clássica

4) $\vdash_\ell \forall x \varphi \to \exists x \varphi$ $(\ell \in \{c, i\})$

Obs: $\Gamma \vdash_i \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_c \varphi$

intuicionista → clássica

$(D^{DN(P)_i} \subset D^{DN(P)_c})$ intuicionista $\equiv$

$\equiv$ clássica $/ \{RAA\}$

redução ao absurdo

Prop.: Para $\ell \in \{c, i\}$, tem-se:

1) $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash_\ell \varphi$

2) $\Gamma \vdash_\ell \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta \vdash_\ell \varphi$

3) $\Gamma \vdash_\ell \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash_\ell \psi \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash_\ell \psi$

Demonstração:

1) $\cdot\ \varphi$ é derivação de φ a partir de $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ $(\varphi \in \Gamma)$.

2) Da hipótese $\Gamma \vdash_\ell \varphi$, existe uma derivação D de φ a partir de Γ em $DN(P)_\ell$. Assim, como $\Gamma \subseteq \Delta$, D é ainda uma derivação de φ a partir de Δ em $DN(P)_\ell$. Logo, $\Delta \vdash_\ell \varphi$.

3) De $\Gamma \vdash_\ell \varphi$, existe D_1 de φ a partir de Γ.

De $\Delta, \varphi \vdash_\ell \psi$, existe D_2 de ψ a partir de Δ, φ.

Logo,
$$\begin{array}{c} \mathcal{D}_1^{\Pi} \\ \Delta_1 [\varphi] \\ \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array}$$
é uma derivação de ψ a partir de $(\Delta \cup \{\varphi\}) \setminus \{\varphi\} \cup \Pi = \Delta \cup \Pi$.

Logo, $\Pi, \Delta \vdash_l \psi$.

<u>Proposição</u>: $\Pi \vdash_l \varphi \to \psi$ se e só se $\Pi, \varphi \vdash_l \psi$ $(l \in \{c, i\})$

(Demonstração - exercícios das folhas práticas)

Cancelamento de hipóteses

existem 2 opções usuais.

1) <u>Cancelamento completo</u> (a opção usada até aqui): todas as ocorrências de fórmulas que podem ser canceladas com a aplicação de uma regra são obrigatoriamente canceladas.

2) <u>Cancelamento por classes de hipóteses</u>: apenas certas ocorrências das fórmulas que podem ser canceladas com a aplicação de uma regra (eventualmente todas) são canceladas; exige algum mecanismo adicional para identificar as ocorrências a cancelar usaremos $x, y, z, \ldots$ para o efeito.

<u>Exemplo</u>: 1) Com cancelamento completo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}}{p_1}\wedge_2 E \qquad \dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}}{p_0}\wedge_1 E}{p_1 \wedge p_0}\wedge I}{(p_0 \wedge p_1) \to (p_1 \wedge p_0)}\to I$$

é derivação.

MAS

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}}{p_1} \qquad \dfrac{p_0 \wedge p_1}{p_0}}{p_1 \wedge p_0}}{(p_0 \wedge p_1) \to (p_1 \wedge p_0)}$$

Não é derivação

2) Com cancelamento por classes de hipóteses:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0\wedge p_1}^{\,x}}{p_1}\wedge_2 E \qquad \dfrac{\cancel{p_0\wedge p_1}^{\,x}}{p_0}\wedge_1 E}{p_1\wedge p_0}\wedge I}{(p_0\wedge p_1)\to(p_1\wedge p_0)}\to I^{x}$$

é derivação

e

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0\wedge p_1}^{\,x}}{p_1}\wedge_2 E \qquad \dfrac{p_0\wedge p_1}{p_0}\wedge_1 E}{p_1\wedge p_0}}{(p_0\wedge p_1)\to(p_1\wedge p_0)}\to I^{x}$$

Também é uma derivação.

Obs: A opção de cancelamento por classes de hipóteses não altera as relações de derivabilidade $\vdash_l$, isto é:
φ é derivável a partir de Γ com cancelamento completo se e só se φ é derivável a partir de Γ com cancelamento por classes de hipóteses.

Teorema (Correção de $DN(P)_c$ para lógica clássica)

$$\Gamma \vdash_c \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

Demonstração: Por indução em derivações de $DN(P)_c$, mostra-se que, para todo $D \in \mathcal{D}^{DN(P)_c}$, se $\boxed{D \text{ é derivação de } \varphi \text{ a partir de } \Gamma, \text{ então } \Gamma \models \varphi.}$ $P(D)$

Corolário:

1) $\Gamma \not\models \varphi \Rightarrow \Gamma \nvdash_l \varphi$

2) φ não é válida (respetivamente, φ não é tautologia).
$\Downarrow$
φ não é teorema de DN_l (respetivamente, DNP_l) com $l \in \{c, i\}$.

Obs: i) $\Gamma \vdash_i \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_c \varphi$
ii) $\Gamma \nvdash_c \varphi \Rightarrow \Gamma \nvdash_i \varphi$

Ex: $p_0 \vee p_1 \nvdash_\ell p_0 \quad \ell \in \{c, i\}$

Teor.: (Completude de $DN(P)_c$ para lógica clássica)

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_c \varphi$$