Aula 13 - Lógica da Programação

6. - Correspondência Curry - Howard (II)

6.1. - Normalização em derivações

Motivação: Eliminar redundâncias / desvios em derivações:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{\,z}}{p_1 \to p_0}\,{\to}I^{x} \qquad \cancel{p_1}^{\,y}}{\dfrac{p_0}{p_1 \to p_0}\,{\to}I^{y}}\,{\to}E}{p_0 \to (p_1 \to p_0)}\,{\to}I^{z} \quad \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{\,z}}{p_1 \to p_0}\,{\to}I^{y}}{p_0 \to (p_1 \to p_0)}\,{\to}I^{z}$$

Def: Uma ocorrência de uma fórmula numa derivação diz-se máximal ou desvio quando é simultaneamente conclusão de uma inferência de introdução $(\to I)$ e premissa principal de uma inferência de eliminação (1ª premissa de $\to E$).

Ex: A ocorrência de $p_1 \to p_0$ uma 1ª premissa de $\to E$ (no exemplo anterior) é maximal.

Def: Regra de redução em derivação de $DNP_i^{\to}$:

operação de redução em derivações

$$(\rightsquigarrow_{\to}) \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\varphi \\ D_1 \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\,{\to}I \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \varphi\end{matrix}}{\psi}\,{\to}E \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} D_2 \\ [\varphi] \\ D_1 \\ \psi \end{matrix}$$

Def: A regra $(\rightsquigarrow_{\to})$ induz as seguintes relações binárias em derivações de $DNP_i^{\to}$.

"redução num passo"

i) $D \rightsquigarrow D'$ quando D' pode ser obtida de D', substituindo alguma das suas subderivações D_0 por uma derivação D_1 tal que $D_0 \rightsquigarrow_{\to} D_1$;

ii) $D \rightsquigarrow^* D'$ quando $D = D'$ ou $\exists D''.\ D \rightsquigarrow D''$ e $D'' \rightsquigarrow^* D'$.

"redução em 0 ou mais passos"

Prop.: Se D é derivação de φ a partir de Γ (em $DNP_i^{\to}$) e $D \rightsquigarrow^* D'$, então D' é também uma derivação de φ a partir de Γ.

Def.: Uma derivação em $DNP_i^{\to}$ diz-se normal quando não há fórmulas maximais.

Prop. (Propriedade da Subfórmula): Toda a fórmula que ocorre numa derivação normal é subfórmula da conclusão ou de alguma das hipóteses não canceladas.

Def.: D diz-se uma forma normal de D' quando D é normal e $D' \rightsquigarrow^* D$.

Teorema Normalização: Toda a derivação (em $DNP_i^{\to}$) admite uma forma normal, isto é:

$$\forall D\ \exists D' \text{ normal}.\ D \rightsquigarrow^* D'.$$

Corolário: Se φ é derivável a partir de Γ em $DNP_i^{\to}$, então existe derivação D de φ a partir de Γ que é normal e cujas subfórmulas de D são subfórmulas de φ onde alguma fórmula de Γ.

Corolário: (Consistência de $DNP_i^{\rightarrow}$):

$\nvdash_i p$, para qualquer variável proposicional p.

(Consequência do Teorema da Normalização e da Propriedade da Subfórmula.)

$x : p \Rightarrow_\circ p$

6.2.- Relação entre normalização de derivações e β-redução.

Obs: As definições e resultados anteriores aplicam-se analogamente a $DNP_i^{\rightarrow, w}$ com classes de hipóteses.

Prop.: 1) $\forall D, D' : D \rightsquigarrow D' \Rightarrow t_{(ermo)}(D) \rightarrow_\beta t_{(ermo)}(D')$

2) $\forall M, M', \Gamma, \sigma : M \rightarrow_\beta M' \wedge \Gamma \vdash M : \sigma$

$\Downarrow$

$d(\Gamma \vdash M : \sigma) \rightsquigarrow d(\Gamma \vdash M' : \sigma)$

Teorema (Isomorfismo de Normalização): Os processos de normalização em derivações e em λ-termos (à la Church) tipificáveis são isomorfos e, em particular, tem-se:

$\forall D, D' : D \rightsquigarrow D'$ se (se e só se) $t_{(ermo)}(D) \rightarrow_\beta t_{(ermo)}(D')$

Corolário: 1) A relação $\rightsquigarrow$ em derivações é confluente e as formas normais são únicas. (Teorema da Confluência em λ-cálculus). $\rightarrow_\beta$

2) Qualquer sequência de reduções para eliminar desvios / fórmulas maximais é finita. (Teor. da Normalização — Versão Forte)

3) Se σ é um tipo habitado, então há habitantes de σ cujo tipificação envolve apenas tipos que correspondem a subfórmulas de $d(\sigma)$. (Proposição da Subfórmula).

$\vdash M : (\sigma \to \sigma) \to (\sigma \to \sigma)$

$\emptyset \vdash M : \sigma$
$d(\sigma)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash F : \sigma \to \sigma \qquad \vdash M''' : \sigma}{F : \sigma \to \sigma,\ x : \sigma \vdash M'' : \sigma}}{F : \sigma \to \sigma \vdash M' : \sigma \to \sigma}}{\vdash M : (\sigma \to \sigma) \to (\sigma \to \sigma)} \rightarrow_M$$

$\downarrow$

$M = \lambda f^{\sigma \to \sigma}. M'$ $\quad M' = \lambda x^{\sigma} : M'$

$M'' = f M'''$