Lógica da Programação

Exercícios

1.8.- a) $VAR(t)$ - conjunto das variáveis que ocorre em t

$$VAR(\, t(x_0, \times(0, x_1))\,) = \{x_0, x_1\}$$

(como fazemos isto por recursão)

$$VAR(x_i) = \{x_i\} \quad (i \in \mathbb{N}_0)$$

$$VAR(c) = \emptyset \quad (c \text{ constante de } L)$$

$$VAR(f(t_1, \dots, t_n)) = VAR(t_1) \cup \dots \cup VAR(t_n)$$

(f símbolo de função de aridade $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$)

$x \in))$

$t[t_1/x]$ - substituição de x por t_1

$$x_i[t_1/x] = \begin{cases} t_1, & \text{se } x_i = x \\ x_i, & \text{se } x_i \neq x \end{cases}$$

$$c[t_1/x] = c$$

$$f(t_1', \dots, t_n')[t_1/x] = f(t_1'[t_1/x], \dots, t_n'[t_1/x])$$

$(x \neq y)$: $t[t_1/x \,;\, t_2/y]$ - substituição simultânea de x por t_1 e y por t_2.

$$x_i[t_1/x \,;\, t_2/y] = \begin{cases} t_1, & \text{se } x_i = x \\ t_2, & \text{se } x_i = y \\ x_i, & \text{se c.c. (caso contrário)} \end{cases}$$

$$c[t_1/x \,;\, t_2/y] = c$$

$$f(t_1', \dots, t_n')[t_1/x \,;\, t_2/y] =$$
$$= f(t_1'[t_1/x \,;\, t_2/y], \dots, t_n'[t_1/x \,;\, t_2/y])$$

1.8.- b) Provar que: $x \notin VAR(t_2)$ e $y \notin VAR(t_1)$

$$\Downarrow$$

$$P(t):\ t[t_1/x \,;\, t_2/y] = (t[t_1/x])[t_2/y] =$$

Hipótese $= (t[t_2/y])[t_1/x]$

Vamos fazer a sua demonstração por indução:

1. Para todo $t \in \mathbb{N}_0$, $P(x_i)$

Caso $x_i = x$, $x_i[t_1/x ; t_2/y] = t_1$ $y \notin VAR(t_1)$

$(x_i[t_1/x])[t_2/y] = t_1[t_2/y]$

Lema: $x \notin VAR(t)$: $t[t'/x] = t$

Caso $x_i = y$. $x_i[t_1/x ; t_2/y] = t_2$

$(x_i[t_1/x])[t_2/y] = x_i[t_2/y]$

Caso $x_i \neq x$ e $x_i \neq y$,

$x_i[t_1/x ; t_2/y] = x_i$

$(x_i[t_1/x])[t_2/y] = x_i[t_2/y]$

2. $P(c)$, para constante de L?

$c[t_1/x ; t_2/y] = c$

$(c[t_1/x])[t_2/y] = c[t_2/y]$

3. $P(t_1')$ e ... e $P(t_n') \Rightarrow$

$\Rightarrow P(f(t_1', \dots, t_n'))$

(para todo $t_1', \dots, t_n' \in \mathcal{T}_L$)?

$(f(t_1', \dots, t_n')[t_1/x])[t_2/y] =$

$= f(t_1'[t_1/x], \dots, t_n'[t_1/x])[t_2/y] =$

$= f(t_1'[t_1/x ; t_2/y], \dots, t_n'[t_1/x ; t_2/y])$

$\longrightarrow P(t_i')$: $t_i'[t_1/x ; t_2/y] =$

$= (t_i'[t_1/x])[t_2/y]$

1.8.– c) $x_1[x_2/x_1 ; x_3/x_2] = x_2$

$(x_1[x_2/x_1])[x_3/x_2] = x_2[x_3/x_2] = x_3$

É uma espécie de "contraexemplo" (prova de que 1.8.– b) é só uma condição necessária, MAS NÃO suficiente).

Exercício 1.9.)

LIV(φ) : conjunto das variáveis com ocorrências livres em φ

↑ L-fórmula

R símbolo de relação de L de aridade $n \geq 1$; $t_1, \dots, t_n \in T_L$.

$LIV(R) = \emptyset$

$LIV(R(t_1, \dots, t_n)) = VAR(t_1) \cup \dots \cup VAR(t_2)$

$LIV(\bot) = \emptyset$

$LIV(\neg \psi) = LIV(\psi)$ (para todo ψ L-fórmula)

$LIV(\psi_1 \square \psi_2) = LIV(\psi_1) \cup LIV(\psi_2)$

(para todo ψ_1, ψ_2 L-fórmula, $\square \in B/N$)

$LIV(Q x \ \psi) = LIV(\psi) \setminus \{x\}$

(para todo ψ L-fórmula, $x \in V$, $Q \in \{\forall, \exists\}$)

Exercício 1.14 – b)

$\models \exists x (\varphi \overset{\land}{\cancel{\lor}} \psi) \overset{\longrightarrow}{\Leftrightarrow} \exists x \varphi \overset{\land}{\cancel{\lor}} \exists x \psi$

Seja $E = (D, I)$ uma L-estrutura e 'a' uma atribuição em E

- $E \models \exists x (\varphi \overset{\land}{\cancel{\lor}} \psi) [a]$ se e só se
- $E \models \varphi \overset{\land}{\cancel{\lor}} \psi \left[a\binom{x}{d}\right]$, para algum $d \in D$

  se e só se
- $E \models \varphi \left[a\binom{x}{d}\right]$ ~~ou~~ e $E \models \psi \left[a\binom{x}{d}\right]$,

  para algum $d \in D$, se e só se
- $E \models \varphi \left[a\binom{x}{d'}\right]$, para algum $d' \in D$

  ~~ou~~ e $E \models \psi \left[a\binom{x}{d''}\right]$, para algum $d'' \in D$

  se e só se
- $E \models \exists x \varphi [a]$ ~~ou~~ e $E \models \exists x \psi [a]$

  se e só se
- $E \models \exists x \varphi \overset{\land}{\cancel{\lor}} \exists x \psi [a]$

$E_{Arit} \models \exists x_0 \ x_0 = 0 \land \exists x_0 \neg (x_0 = 0)$

↓

$\exists x_0 \, (x_0 = 0 \wedge \neg(x_0 = 0))$

Exercício 1.12) a_1 e a_2 atribuições numa estrutura E

provar por indução $P(\varphi)$

para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$,

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{para todo } x \in LIV(\varphi) \ a_1(x) = a_2(x) \\ \Downarrow \\ E \models \varphi[a_1] \text{ se e só se } E \models \varphi[a_2] \end{array}}$$

Demonstração: Por indução estrutural em φ.
(ver resolução mais à frente!)

Exercício 1.15 - b)

$\Gamma \models \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma) \Rightarrow \Gamma \models \forall x \varphi$?

Seja $E = (D, I)$ uma estrutura e a uma atribuição em E. Supondo que $E \models \Gamma[a]$ (temos que mostrar: $E \models \forall x \varphi[a]$), isto é, para $\boxed{\text{todo } d \in D, \ E \models \varphi[a\binom{x}{d}]}$.

Seja $d \in D$ (arbitrário). (**)

Temos que $\boxed{E \models \Gamma[a\binom{x}{d}]}$, uma vez que $E \models \Gamma[a]$ e $x \notin LIV(\Gamma)$ $\otimes$.

De (**) e da hipótese $\Gamma \models \varphi$, segue $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$

$\otimes$ Para qualquer $\psi \in \Gamma$,
para qualquer $y \in LIV(\psi)$,
$a(y) = a\binom{x}{d}(y)$, $x \notin LIV(\psi)$

Exercício 1.12) (Demonstração)

Por indução estrutural em φ.

1) $P(\perp)$? $E \not\models \perp[a_1]$ e $E \not\models \perp[a_2]$

2.1) $P(R)$ com R símbolo de aridade 0?

$E \models R[a_1]$ se e só se $I(R) = 1$ se e só se $E \models R[a_2]$.

2.2) $P(R(t_1, \dots, t_n))$, para R símbolo de relação n-ário com $n \geq 1$ e $t_1, \dots, t_n$ termos?

$E \models R(t_1, \dots, t_n)\, [a_1]$

se e só se $(t_1[a_1]_E, \dots, t_n[a_1]_E) \in I(R)$

(*)

se e só se $(t_1[a_2]_E, \dots, t_n[a_2]_E) \in I(R)$

se e só se $E \models R(t_1, \dots, t_n)\, [a_2]$

(*) para $1 \leq i \leq n$ $t_i[a_1]_E = t_i[a_2]_E$, uma vez que para todo $x \in VAR(t_i)$, $a_1(x) = a_2(x)$ (* *)

(* *) De $LIV(R(t_1, \dots, t_n)) =$

$= VAR(t_1) \cup \dots \cup VAR(t_n)$ e da hipótese para todo $x \in LIV(R(t_1, \dots, t_n))$ $a_1(x) = a_2(x)$.