Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Métodos Numéricos para Equações de Derivadas Parciais

M. Irene Falcão
Mestrado em Matemática e Computação
2023/2024

Equações Elípticas

As equações elípticas estão associadas a problemas de equilíbrio ou problemas de estado estacionário.

Exemplo equações elípticas

Equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x, y) = 0 \tag{2}$$

Problemas envolvendo este tipo de equações são sempre problemas de valores de fronteira, i.e. o domínio de integração é uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tendo como fronteira uma curva fechada $\partial\Omega$.

Condições de fronteira

- Problema de Dirichlet $\boxed{u = \phi(x, y), \text{ em } \partial\Omega}$

  É possível mostrar, usando o teorema de Green que este problema é bem posto.

- Problema de Neumann $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi(x, y), \text{ em } \partial\Omega}$

  Neste caso, a solução é determinada a menos de uma constante.

- Problema de Robin-Churchill[1] $\boxed{u(x, y) + a(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial n} = \zeta(x, y), \text{ em } \partial\Omega}$

  Se $a(x, y) > 0$, o problema é bem posto.

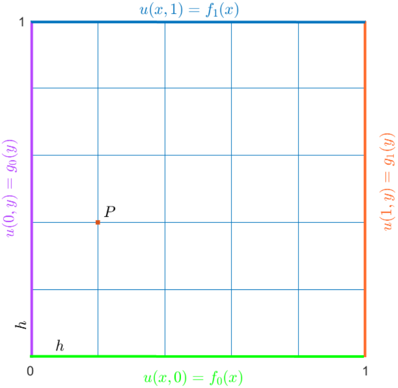
[1] ou misto

Fórmula dos cinco pontos para a equação de Laplace

Comecemos por considerar a solução da equação de Laplace (1) num quadrado $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, sujeita a condições de fronteira do tipo de Dirichlet

$$u(x,y) = \begin{cases} f_0(x), & y = 0,\ 0 \le x \le 1 \\ f_1(x), & y = 1,\ 0 \le x \le 1 \\ g_0(x), & x = 0,\ 0 \le y \le 1 \\ g_1(x), & x = 1,\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \tag{3}$$

Estratégia: A região Ω é coberta por uma rede Ω_h com malha uniforme h e, em cada ponto $P = (ih, jk)$; $i = 1, \ldots, M-1$; $j = 1, \ldots, M-1$, as derivadas envolvidas na equação (1) são substituídas por fórmulas de diferenças centrais.



$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = \tau_{i,j}, \tag{4}$$

onde

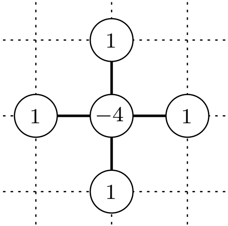
$$\tau_{i,j} = -\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i + \xi_i h, y_j) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x_i, y_j + \eta_j h)\right),\ \xi_i, \eta_j \in (-1,1) \tag{5}$$

Uma aproximação $U_{i,j}$ pode ser obtida, "ignorando" na equação (4) o erro de truncatura (5):

Fórmula dos cinco pontos

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0; \qquad (6)$$

$i = 1, \ldots, M-1,\ j = 1, \ldots, M-1.$



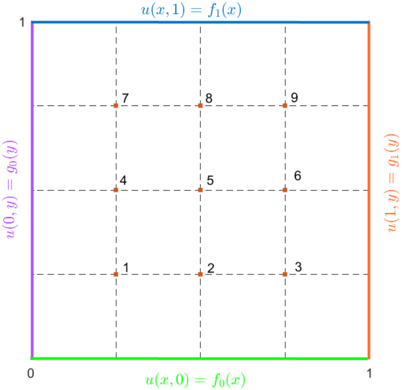
STENCIL

Se os pontos de Ω_h forem ordenados da esquerda para a direita e de baixo para cima, o sistema (6) de $(M-1)\times(M-1)$ equações pode escrever-se como

$$B\boldsymbol{U} = b \tag{7}$$

onde B é uma matriz banda e b é um vetor cujas componentes são dadas por valores fronteiros.

Exemplo: Se $M = 4$



$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{array}\right)$$

$$b = \begin{pmatrix} -f_0(h) - g_0(h) \\ -f_0(2h) \\ -f_0(3h) - g_1(h) \\ -g_0(2h) \\ 0 \\ -g_1(2h) \\ -g_0(3h) - f_1(h) \\ -f_1(2h) \\ -g_1(3h) - f_1(3h) \end{pmatrix}$$

Em geral, ordenando os pontos da forma indicada, o sistema de $(M-1)^2$ equações terá como matriz dos coeficientes uma matriz tridiagonal por blocos

$$B = \begin{pmatrix} A & I & 0 & \dots & 0 \\ I & A & I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I & A & I \\ 0 & \dots & 0 & I & A \end{pmatrix}$$

onde cada bloco é uma matriz quadrada de ordem $M-1$:

- os blocos A são matrizes tridiagonais com -4 na diagonal e 1 fora da diagonal;
- I representa a matriz identidade de ordem $M-1$;
- 0 representa a matriz nula de ordem $M-1$.

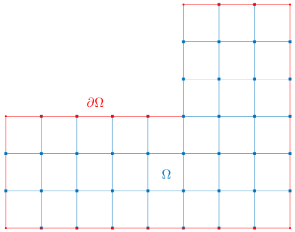
A resolução do sistema deverá ter em conta a estrutura da matriz.

Equação de Poisson

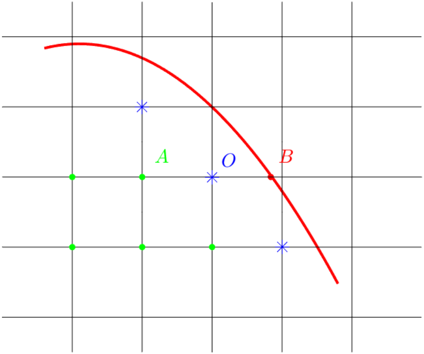
O método descrito para resolver a equação de Laplace num quadrado, com condições de fronteira de Dirichlet, generaliza-se de forma imediata para um problema envolvendo a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$
$$u(x,y) = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

onde Ω é um domínio tal que as linhas da rede intersetam $\partial\Omega$ em nós dessa rede.



O que acontece se a região Ω for irregular?



Na figura, os pontos a verde são chamados nós interiores - são rodeados por 4 nós contidos em Ω e os pontos a azul são chamados nós fronteiros

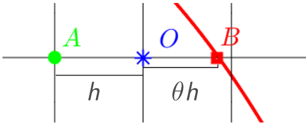
Estratégia:

- Nos nós interiores pode ser aplicada a fórmula de diferenças

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j}. \tag{8}$$

- Nos nós fronteiros é necessário substituir $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e/ou $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ por uma fórmula de diferenças não centradas.

No ponto O da figura, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ pode ser substituída pela fórmula usual de diferenças centrais, mas o mesmo não acontece com $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$



No ponto O da figura poderá ser usada a fórmula de diferenças não centrada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{2}{1+\theta}u_A + \frac{2}{\theta(1+\theta)}u_B - \frac{2}{\theta}u_O\right) + \mathcal{O}(h).$$

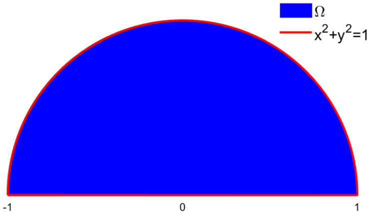
(Comece por verificar que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{h}\left(-\frac{\theta}{1+\theta}u_A + \frac{1}{\theta(1+\theta)}u_B - \frac{1-\theta}{\theta}u_O\right) + \mathcal{O}(h^2)$.)

Observe-se que, se $\theta = 1$, i.e., se B for um nó da malha, recupera-se a fórmula de diferenças centrais usuais, a qual como sabemos tem erro $\mathcal{O}(h^2)$ e não $\mathcal{O}(h)$.

Equação de Laplace em coordenadas polares

Em alternativa ao uso de fórmulas não centradas, pode usar-se uma mudança de variáveis de tal modo que o problema resultante esteja definido numa região que possa ser coberta por uma rede que intersete a fronteira apenas em nós.

Exemplo: Consideremos a região circular $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ e a equação de Laplace (1) sujeita às condições de fronteira $u = x^2 + y^2$ em $\partial\Omega$



Quando o domínio Ω tem fronteira circular, é conveniente o uso de coordenadas polares: $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. A equação de Laplace escreve-se então como

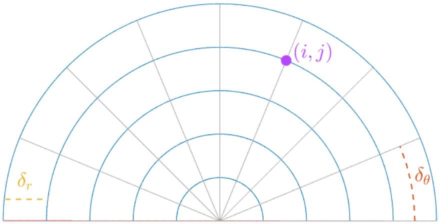
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

A região $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ é agora coberta por uma rede formada por

- semi-círculos $r = i\delta_r$; $i = 1, 2, \ldots, M$, onde $M\delta_r = 1$

  e

- linhas retas $\theta = j\delta_\theta$; $j = 1, 2, \ldots, N$, onde $N\delta_\theta = \pi$



A equação diferencial no ponto (i, j) é aproximada por

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\delta_r^2} + \frac{1}{i\delta_r}\frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\delta_r} + \\ + \frac{1}{(i\delta_r)^2}\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\delta_\theta^2} = 0,$$

$$i = 1, \dots, M-1 \text{ e } j = 1, \dots, N-1$$

obtendo-se um sistema de equações que pode ser resolvido para a determinação dos valores da solução nos nós.

Problemas de Neumann

Consideremos a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega := \{0 \leq x, y, \leq 1\}. \tag{9}$$

sujeita às condições de fronteira

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \begin{cases} f_0(x), & y = 0,\ 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x), & y = 1,\ 0 \leq x \leq 1 \\ g_0(x), & x = 0,\ 0 \leq y \leq 1 \\ g_1(x), & x = 1,\ 0 \leq y \leq 1, \end{cases} \tag{10}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n}$ denota a derivada de u na direção da normal exterior à fronteira de Ω, i.e., $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \boldsymbol{n}$, onde $\boldsymbol{n} = (nx, ny)$ é o vetor normal unitário.

Trata-se de um problema de Neumann, o qual, como já foi referido, não possui solução única; para obter uma única solução é necessária uma condição adicional, por exemplo, especificar-se o valor da solução num ponto.

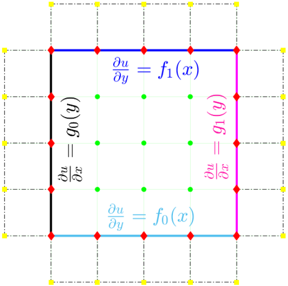
Estratégia: A região Ω é coberta por uma rede Ω_h com malha uniforme $h = \frac{1}{M}$.

- Em cada nó interior $P = (ih, jk);\; i, j = 1, \ldots, M-1$, a solução da equação diferencial (9) é aproximada pela solução da equação de diferenças (8). Temos então um sistema de $(M-1)^2$ equações e $(M+1)^2 - 4$ incógnitas;
- Em cada ponto fronteiro, aproximamos $\frac{\partial u}{\partial n}$ por uma fórmula de diferenças centrais de ordem $\mathcal{O}(h^2)$, introduzindo $4(M+1)$ "pontos fictícios";
- Assumimos que a equação diferencial é também satisfeita nos pontos da fronteira. Obtemos então um total de $(M+3)^2 - 4$ equações em $(M+3)^2 - 4$ incógnitas;
- Eliminam-se inicialmente os pontos fictícios, de forma a resolver um sistema de $(M+1)^2$ equações em $(M+1)^2$ incógnitas (este sistema é, em geral indeterminado, pelo que necessita de uma condição adicional),

Resumindo:

- Aplicar a equação de diferenças (8) nos pontos  ;

- Aproximar as condições de fronteira por



$$\frac{U_{1,j} - U_{-1,j}}{2h} = g_0(jh)$$
$$\frac{U_{M+1,j} - U_{M-1,j}}{2h} = g_1(jh);$$
$$j = 0, \ldots, M,$$
$$\frac{U_{i,1} - U_{i,-1}}{2h} = f_0(ih)$$
$$\frac{U_{i,M+1} - U_{i,M-1}}{2h} = f_1(ih); \;\; i = 0, \ldots, M.$$

- Assumir que (9) é também satisfeita nos pontos  e usar (8);

- Usar as relações obtidas anteriormente juntamente com as condições fronteira para eliminar estes pontos 

Erro de discretização da fórmula dos 5 pontos

Vamos analisar o erro de discretização da fórmula dos 5 pontos

$$\frac{1}{h^2}\left(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}\right) = f_{i,j}, \tag{11}$$

para aproximar a solução da equação de Poisson com condições de fronteira de Dirichlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega :=]0,a[\times]0,b[\tag{12}$$

$$u(x,y) = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega \tag{13}$$

As equações de diferenças que aproximam o problema (12)-(13) podem ser escritas na forma

$$LU_{i,j} = f_{i,j}, \ (i,j) \in \Omega_h \tag{14}$$

$$U_{i,j} = \phi_{i,j}, \ (i,j) \in \partial\Omega_h, \tag{15}$$

onde L é o operador de diferenças

$$LU_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j}\right). \tag{16}$$

Pretende-se obter a expressão para o erro de discretização $e_{i,j} = u_{i,j} - U_{i,j}$ nos pontos $(i,j) \in \Omega_h$ em termos de h.

Para $(i, j) \in \Omega_h$, tem-se

$$Le_{i,j} = Lu_{i,j} - LU_{i,j} = Lu_{i,j} - f_{i,j} = \tau_{i,j}, \tag{17}$$

onde $\tau_{i,j}$ é o erro de truncatura local dado por (5). Seja $R := [0, a] \times [0, b]$ e suponhamos que u é de classe $\mathcal{C}^4$ em R. Definindo

$$M_4 = \max \left\{ \max_R \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \max_R \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}$$

obtém-se

$$\max_{\Omega_h} |\tau_{i,j}| \leq \tfrac{1}{6} h^2 M_4,$$

ou seja (cf. (17))

$$\max_{\Omega_h} |Le_{i,j}| = \max_{\Omega_h} |\tau_{i,j}| \leq \tfrac{1}{6} h^2 M_4. \tag{18}$$

Lema

Se v é uma função definida num conjunto de pontos de uma rede $R_h := \Omega_h \cup \partial\Omega_h$, com malha uniforme h, da região retangular $[0, a] \times [0, b]$, então

$$\max_{\Omega_h} |v| \leq \max_{\partial\Omega_h} |v| + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) \max_{\Omega_h} |Lv|, \tag{19}$$

onde L é o operador de diferenças (16)

Aplicando este resultado ao erro de discretização $e_{i,j}$, obtém-se

$$\max_{\Omega_h} |e_{i,j}| \leq \max_{\partial\Omega_h} |e_{i,j}| + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) \max_{\Omega_h} |Le_{i,j}|.$$

Como $e_{i,j} = 0$ na fronteira, resulta de (18) que

$$\max_{\Omega_h} |e_{i,j}| \leq \tfrac{1}{24}(a^2 + b^2)h^2 M_4.$$

Demonstração do lema: Seja

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4}(x_i^2 + y_j^2) = \frac{1}{4}(i^2 + j^2)h^2, \ (i,j) \in R_h.$$

Facilmente se conclui que, para qualquer ponto $(i,j) \in \Omega_h$, se tem

$$0 \leq \phi_{i,j} \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2), \text{ para todo } (i,j) \in R_h \tag{20}$$

e

$$L\phi_{i,j} = 1, \text{ para todo } (i,j) \in \Omega_h \tag{21}$$

Consideremos as funções

$$w^+ = v + N\phi \qquad \text{e} \qquad w^- = -v + N\phi, \tag{22}$$

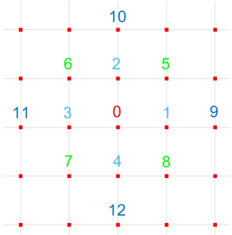
onde $N = \max_{\Omega_h} |Lv_{i,j}|$. Então, usando (21) e (22) obtém-se, para $(i,j) \in \Omega_h$,

$$Lw^+_{i,j} = Lv_{i,j} + N \geq 0 \qquad \text{e} \qquad Lw^-_{i,j} = -Lv_{i,j} + N \geq 0.$$

Vamos agora provar que

Se $Lw_{i,j} \geq 0$, para todo $(i,j) \in \Omega_h$, então $\max\limits_{\Omega_h} w_{i,j} \leq \max\limits_{\partial\Omega_h} w_{i,j}$.

Consideremos um ponto $P \in \Omega_h \cup \partial\Omega_h$ e a numeração indicada na figura. Comecemos por supor que P é o ponto indicado por $0 \in \Omega_h$. Então



$$Lw_P = \frac{1}{h^2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 4w_P) \geq 0.$$

i.e., $\qquad w_P \leq \frac{1}{4}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4).$

Se $w_{i,j}$ atingisse o valor máximo M em P, i.e., se

$$M = w_P \geq w_{i,j}, \ (i,j) \in \Omega \quad \text{e} \quad M > w_{i,j}, \ (i,j) \in \partial\Omega \tag{23}$$

então a desigualdade anterior apenas seria válida se

$$w_P = \tfrac{1}{4}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) = M,$$

com $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = M$.

Escolhendo agora como ponto P o ponto 1 (e repetindo sucessivamente os argumentos), concluiríamos que $w_{i,j} = M$ em todos os pontos de Ω_h e $\partial\Omega_h$, o que seria absurdo por (23).

Retomando a demonstração do lema e aplicando o resultado que acabámos de provar a w^+ e w^-, conclui-se, usando (22), que

$$\max_{\Omega} w_{i,j}^{\pm} \leq \max_{\partial\Omega} w_{i,j}^{\pm} = \max_{\partial\Omega}(\pm v_{i,j} + N\phi_{i,j})$$

donde se obtém, por (20),

$$\max_{\Omega} w_{i,j}^{\pm} \leq \max_{\partial\Omega}(\pm v_{i,j}) + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)N.$$

Como $w_{i,j}^{\pm} = \pm v_{i,j} + N\phi_{i,j}$ e $N\phi_{i,j} \geq 0$, resulta que $\pm v_{i,j} \leq w_{i,j}^{\pm}$, para todo $(i,j) \in \Omega_h \cup \partial\Omega_h$. Logo

$$\max_{\Omega} \pm(v_{i,j}) \leq \max_{\partial\Omega}(\pm v_{i,j}) + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)N,$$

e o resultado pretendido obtém-se de imediato.