# Aula 10 – Lógica

Ex: (β) $(\lambda x. M)N \to M[N/x]$

$\beta = \{((\lambda x.M)N,\ M[N/x]) \in \Lambda^2 : M, N \in \Lambda,\ x \in V\}$

Def: O fecho de compatibilidade de $\beta$ é a relação binária de $\lambda$-termos notada por $\to_\beta$ e definida indutivamente por:

$$\frac{}{M \to_\beta N}\ \beta \quad (M,N)\in\beta \qquad\qquad \frac{M \to_\beta N}{\lambda x.M \to_\beta \lambda x.N}\ \mathrm{Abs}\ (x \in V)$$

$$\frac{M \to_\beta N}{MP \to_\beta NP}\ \mathrm{ApF} \qquad\qquad \frac{M \to_\beta N}{PM \to_\beta PN}\ \mathrm{ApA}$$

A relação $\to_\beta$ é também designada por relação de $\beta$-redução (em 1 passo)

Ex:

$$\dfrac{\dfrac{}{(\lambda x_0.x_0)x_1 \to_\beta x_1}\ \beta \quad ((\lambda x_0.x_0)x_1,\ x_1) \in \beta}{x_2((\lambda x_0.x_0)x_1) \to_\beta x_2 x_1}\ \mathrm{ApF}$$

$\therefore\ x_2((\lambda x_0.x_0)x_1) \to_\beta x_2 x_1$

No entanto, $(x_2((\lambda x_0.x_0)x_1),\ x_2 x_1) \notin \beta$

Def: O fecho reflexivo e transitivo de $\to_\beta$ é notado por $\to_\beta^*$ e é relação binária em $\lambda$-termos definida indutivamente por:

$$\frac{\quad}{M \to_\beta^* N} \quad \to_\beta \; (M \to_\beta N)$$

$$\frac{\quad}{M \to_\beta^* M} \; \text{Refl.} \; (M \in \Lambda)$$

(Reflexividade)

$$\frac{M \to_\beta^* N \qquad N \to_\beta^* P}{M \to_\beta^* P} \; \text{Trans.}$$

(Transitividade)

**Ex:** $\underbrace{(\lambda x_0 . x_0 x_1)(\lambda x_2 . x_2)}_{M} \to_\beta (\lambda x_2 . x_2) x_1$

$\to_\beta x_1$

$\therefore M \to_\beta^* x_1$

Símbolo de conclusão

**Def:** Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, as relações $\to_\beta^n$ de $\beta$-redução em $n$ passos definem-se recursivamente por:

$$\to_\beta^0 = \{(M, M) : M \in \Lambda\}$$

$$\to_\beta^{n+1} = \{(M, N) : \exists P \in \Lambda : (M, P) \in \to_\beta^n \wedge (P, N) \in \to_\beta\}$$

**Obs:** 1) $M \to_\beta^n N$ se e só se (sse) $\exists M_1, \dots, M_{n-1} \in \Lambda . M \to_\beta M_1 \to_\beta \cdots \to_\beta M_{n-1} \to_\beta N$

(chamada uma sequência de redução de $M$ em $N$ em $n$ passos).

Em particular:

I) $M \to_\beta^0 N$ sse $M = N$

II) $M \to_\beta^1 N$ sse $M \to_\beta N$

2) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \to_\beta^n = \to_\beta^*$

**Ex:** 1) $K = \lambda x_0 . \lambda x_1 . x_0$ (combinador $K$)

$I = \lambda x_2 . x_2$ (combinador $I$)

$$\underbrace{(K\,x_3)(I\,x_4)}_{M} \rightarrow_\beta (\lambda x_1 . x_3)(I\,x_4)$$

$$(K\,x_3)(I\,x_4) \rightarrow_\beta (K x_3)\, x_4 \rightarrow_\beta (\lambda x_1 . x_3)\, x_4 \rightarrow_\beta x_3$$

$$(\lambda x_1 . x_3)(I\,x_4) \rightarrow_\beta x_3$$

$$(\lambda x_1 . x_3)(I\,x_4) \rightarrow_\beta (\lambda x_1 . x_3)\, x_4 \rightarrow_\beta x_3$$

$$M \rightarrow^2_\beta (\lambda x_1 x_3)\, x_4$$

$$\therefore \quad M \rightarrow^2_\beta x_3$$

$$M \rightarrow^3_\beta x_3$$

2) delta $\Delta = \lambda x_0 . x_0 x_0$

omega $\Omega = \Delta\Delta$

$$\Omega = (\lambda x_0 . x_0 x_0)(\lambda x_0 . x_0 x_0) \rightarrow_\beta \underbrace{(\lambda x_0 . x_0 x_0)(\lambda x_0 . x_0 x_0)}_{= \Omega} \rightarrow_\beta \cdots$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \Omega \rightarrow^n_\beta \Omega$$

pelo que existem sequencias de redução arbitrariamente longas (infinitas) a partir de $\Omega$.

Prop: $M \rightarrow^*_\beta N \Rightarrow P[M/x] \rightarrow^*_\beta P[N/x]$

Dem: Por indução em $P$.

Def.: O fecho de equivalência de $\rightarrow_\beta$ é a relação binária notada por $=_\beta$ e definida indutivamente por:

$$\frac{M \rightarrow_\beta N}{M =_\beta N} \rightarrow_\beta \qquad \qquad \frac{}{M =_\beta M} \text{ Refl. (Reflexividade)}$$

$$\frac{M =_\beta P \qquad P =_\beta N}{M =_\beta N}\ \text{Trans.}$$

(Transitividade)

$$\frac{M =_\beta N}{N =_\beta M}\ \text{Sim.}$$

(Simetria)

A relação $=_\beta$ é também designada por <u>β-igualdade</u> ou <u>β-convertibilidade</u>.

Ex: $(\lambda x_0 . x_1)\, x_2 =_\beta x_1 =_\beta (\lambda x_0 . x_1)\, x_3$

$\therefore\ (\lambda x_0 . x_1)\, x_2 =_\beta (\lambda x_0 . x_1)\, x_3$

Obs: $\beta \subset \to_\beta \subset \to^*_\beta \subset =_\beta$

$\beta$

$\to_\beta$

$\to^*_\beta$

$=_\beta$

Def: 1) Um λ-termo $M$ diz-se uma <u>forma β-normal</u> (abreviadamente <u>β-nf</u>) quando nenhum dos sub-termos de $M$ é um β-redex.

2) $N$ diz-se uma <u>forma β-normal de $M$</u> quando i) $N$ é β-nf e
ii) $M \to^*_\beta N$

Ex: 1) $M_0 = (\lambda x_0 . x_0 x_0)(\lambda x_1 . x_1)$

$$\downarrow_\beta$$

$$(\lambda x_1 . x_1)(\lambda x_1 . x_1)$$

$$\downarrow_\beta$$

$$\lambda x_1 . x_1 = M_1$$

2) $M_1$ é β-nf.

Obs: $M$ β-nf $\Rightarrow \forall N \in \Lambda\ \ M \not\to_\beta N$

3) $M_1$ é uma β-nf de $M_0$.

Prop.: $M$ β-nf $\wedge\ M \to^*_\beta N \Rightarrow M = N$

Dem.: Por indução em $M \to^1_\beta N$

**Prop:** As formas β-normais são os λ-termos da forma:

$$\underbrace{\lambda y_1 \cdots y_n}_{\text{possivelmente vazio}} . ((x \underbrace{M_1) \cdots M_n}_{\text{possivelmente vazio}})$$

e $M_1, \dots, M_n$ são formas β-normais.

**Teor.:** (Confluência / Church-Rosser)

$\to_\beta$ é confluente, isto é,

Se $M \to_\beta^* N_1$ e $M \to_\beta^* N_2$

Então $\exists P .\ N_1 \to_\beta^* P$ e $N_2 \to_\beta^* P$.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "*"', "\beta"] \arrow[dr, "*", "\beta"'] & \\
N_1 \arrow[dr, dotted, "*"', "\beta"] & & N_2 \arrow[dl, dotted, "*", "\beta"'] \\
 & P &
\end{tikzcd}$$

**Prop.:** 1) Todo λ-termo tem no máximo uma forma β-normal.

2) $M =_\beta N \Rightarrow \exists P .\ M \to_\beta^* P \leftarrow_\beta^* N$.

**Dem:** 1) Suponha-se que $M$ tem β-nfs $N_1$ e $N_2$.

Então, $M \to_\beta^* N_1$ e $M \to_\beta^* N_2$.

Logo, pelo Teorema da Confluência,

$\exists P .\ N_1 \to_\beta^* P \leftarrow_\beta^* N_2$.

Assim, por Prop. temos, como $N_1$ e $N_2$ são β-nfs, temos que ter $N_1 = P = N_2$.

2) Por indução em $M =_\beta N$.

**Teor.** (Consistência $=_\beta$)

$\exists M, N \in \Lambda : M \neq_\beta N$.

**Dem:** Basta tomar para $M$ e $N$ duas formas $\beta$-normais distintas, por exemplo $x_0$ e $x_1$. Se tivéssemos $x_0 =_\beta x_1$, então existiria $P$ tal que $x_0 \to^*_\beta P$ e $x_1 \to^*_\beta P$. Mas, como $x_0$ e $x_1$ são $\beta$-nfs, temos que ter $x_0 = P = x_1$, o que é absurdo. (pois $x_0$ e $x_1$ são variáveis distintas).

Obs.) **1)** $=_\alpha$, a relação de $\alpha$-igualdade, corresponde ao fecho de equivalência de $\to_\alpha$, que é o fecho de compatibilidade da regra $(\alpha)$, dada por:

$$(\alpha) \quad \lambda x.M \to \lambda y.M[y/x]$$

$(y \notin LIV(M)$ e $SSCV(x,y,M))$.

**2)** $=_\eta$, a relação $\eta$-igualdade, corresponde ao fecho de equivalência de $\to_\eta$, que é o fecho de compatibilidade da regra $(\eta)$, dada por:

$$(\eta) \quad \lambda x.Mx \to M \quad \text{se} \quad x \notin LIV(M).$$

$$(\lambda x.Mx)y \to_\beta My$$

$$x \notin LIV(M)$$

**Ex:** $\lambda x_0.x_1x_1 \to_\eta x_1 \leftarrow_\eta \lambda x_2.x_1x_2 \leftarrow_\eta \lambda x_3.(\lambda x_2.x_1x_2)x_3$

(mini-teste: 45 minutos
depois submeter ficheiro)