Aula 11 - Lógica da Programação

5.2.- Relações entre redução e tipificação.

Teor.: (Preservação de Tipos pela β-redução / "subject reduction")

$$\Gamma \vdash M : \tau \wedge M \to_\beta^* N \Rightarrow \Gamma \vdash N : \tau$$

Dem.: 1) mostrar por indução $\to_\beta$ o resultado para $M \to_\beta N$.

2) mostrar por indução em $\to_\beta^*$ o resultado para $M \to_\beta^* N$. O caso base segue por 1).

Teor.: (Normalização - Versão Fraca)

M tipificável $\Rightarrow$ M admite forma β-normal

$(\exists \Gamma, \tau.\ \Gamma \vdash M : \tau)$

$(\exists N \in \Lambda.\ N$ é β-nf e $M \to_\beta^* N)$

Teor.: (Normalização - Versão Forte)

M tipificável $\Rightarrow$ toda a sequência de β-reduções a partir de M é finita.

Obs.: Versão Forte $\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow$ Versão Fraca

Corolário: A relação $\Rightarrow_\beta$ para λ-termos tipificáveis é decidível.

Dem.: Dados λ-termos M_1 e M_2 tipificáveis. Constroem-se sequências de redução a partir de cada um dos λ-termos até atingir as formas β-normais N_1 e N_2, respetivamente.

(Este processo é garantidamente finito devido ao Teorema da Normalização – Versão Forte).

Se $N_1 = N_2$, então $M_1 =_\beta M_2$.

Caso contrário, teremos que $M_1 \neq M_2$ (com auxílio do Teorema da Confluência).

$$M_1 \xrightarrow[\beta]{*} N_1 = N_2 \xleftarrow[\beta]{*} M_2$$

$$M_1 =_\beta M_2 \Rightarrow \exists P.\ M_1 \xrightarrow[\beta]{*} P \xleftarrow[\beta]{*} M_2$$

$$\begin{tikzcd}
& M_2 \arrow[dl, "\beta^*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
N_1 & & P \arrow[ll, "*", "\beta"'] \\
\beta = nf \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& M_2 \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
P & & P \arrow[dl, "\beta^*"] \\
& N_2 &
\end{tikzcd}$$