0.7 $\quad s: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ t.q. $s(1) = 2$
$s(n+1) = \dfrac{2}{s(n)}, \quad n \geq 1.$

a)
$$s(1) = 2$$
$$s(2) = \frac{2}{s(1)} = \frac{2}{2} = 1$$
$$s(3) = \frac{2}{s(2)} = \frac{2}{1} = 2$$

b) $\operatorname{Im}(s) = \{ s(n) : n \in \mathbb{N} \} = \{1, 2\}$

Note-se que $s(1) = 2$ e $s(2) = 1$.
Logo, $\{1, 2\} \subseteq \operatorname{Im}(s)$.

Mostremos, agora, que $\operatorname{Im}(s) \subseteq \{1,2\}$, ou seja, que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $s(n) \in \{1,2\}$.
Consideremos o predicado $P(n)$: "$s(n) = 1$ ou $s(n) = 2$" sobre os elementos n de $\mathbb{N}$.

(1) Dado que $s(1) = 2$, segue-se que $P(1)$.

(2) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$, ou seja, $s(n) = 1$ ou $s(n) = 2$. Segue-se que

$$s(n+1) = \frac{2}{s(n)} \begin{cases} = \dfrac{2}{1} = 2 \text{ se } s(n) = 1 \\ \text{ou} \\ = \dfrac{2}{2} = 1 \text{ se } s(n) = 2 \end{cases}$$

Logo, $P(n+1)$

Por (1) e (2), pelo Princ. Indução Estrutural para $\mathbb{N}$, $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

0.8 $\quad A = \{0,1\}$

a) comprimento 0 : ε

comprimento 1 : $\left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} 2$

comprimento 2 : $\left.\begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2\times 2 \\ \shortparallel \\ 2^2 \end{matrix}$

comprimento 3 : $\left.\begin{matrix} 000 & 100 \\ 001 & 101 \\ 010 & 110 \\ 011 & 111 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2\times 2\times 2 \\ \shortparallel \\ 2^3 \end{matrix}$

b) L : linguagem em A

$L \subseteq A^*$

A^* é um conjunto infinito. Se considerarmos L subconjunto singular de A^*, temos já um nº infinito de possibilidades.

com um só elemento

Portanto, existe um nº infinito de linguagens em A com um nº de elementos ≤ 3.

c) $w = uv$ para os seguintes pares (u,v) de palavras u,v em A : $(\varepsilon, 0110)$, $(0110, \varepsilon)$, $(0, 110)$, $(01, 10)$, $(011, 0)$

0.9

a) A: conj. dos naturais múltiplos de 5

é definido indutivamente, sobre $\mathbb{N}$, por:

(1) $5 \in A$
(2) $n \in A \Rightarrow n+5 \in A$

b) B: conjunto dos números inteiros

é definido indutivamente, sobre $\mathbb{Z}$, por:

(1) $0 \in B$;
(2) $n \in B \Rightarrow n+1 \in B$;
(3) $n \in B \Rightarrow -n \in B$.

c) C: conjunto das palavras no alfabeto $A = \{0,1\}$

cujo comprimento é ímpar

é definido indutivamente, sobre A^*, por

(1) $0 \in C$;
(2) $1 \in C$;
(3) $u,v \in C \Rightarrow uv0 \in C$;
(4) $u,v \in C \Rightarrow uv1 \in C$.

(1)' $0 \in C$
(2)' $1 \in C$
(3)' $u,v,s \in C \Rightarrow uvs \in C$

d) D: conjunto das palavras no alfabeto $A = \{a,b\}$ que têm um nº par de ocorrências do símbolo a: é definido indutivamente, sobre A^*, por

(1) $\varepsilon \in D$
(2) $b \in D$
(3) $u \in D \Rightarrow a\,u\,a \in D$
(4) $u,v \in D \Rightarrow uv \in D$

$\mathcal{F}^{CP}$ é a linguagem em $\mathcal{A}^{CP}$ definida indutivamente por

a) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$;
b) $p \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
c) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \Rightarrow (\neg\varphi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}^{CP})^*$;
d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP} \Rightarrow (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}^{CP})^*$.

1.1. Quais das seguintes palavras pertencem a $\mathcal{F}^{CP}$?

a) $(\neg(p_1 \vee p_2))$

c) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$