Teoria das Categorias

Mestrado em Matemática Computacional

Ana Cristina Ferreira

Conteúdo

Estes apontamentos foram disponibilizados aos alunos de Teoria das Categorias do Mestrado em Matemática Computacional no ano lectivo 2012/2013.

Baseados no livro "Categories for the Working Mathematician" de S. Mac Lane (Springer-Verlag, 1971).

1 Introdução

Uma categoria consiste apenas em setas,
aprender teoria de categorias é aprender a viver sem objetos.

A teoria de categorias baseia-se na observação que muitas propriedades dos "sistemas matemáticos" podem ser unificadas e simplificadas através da apresentação de um diagrama de setas. Cada seta $f : X \longrightarrow Y$ representa uma função; isto é, dois conjuntos X e Y e uma regra $x \longmapsto fx$ que associa a cada elemento $x \in X$ um elemento $fx \in Y$. Sempre que possível escreveremos fx e não $f(x)$. Um diagrama típico de conjuntos e funções é

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z \end{tikzcd}$$

Este diagrama é comutativo quando $h = g \circ f$, onde $g \circ f$ é a composta de funções usual, $g \circ f : X \longrightarrow Z$ definida por $x \longmapsto g(fx)$. Diagramas semelhantes podem ser aplicados noutros contextos matemáticos; por exemplo, na "categoria" de todos os grupos, as letras X, Y e Z representam grupos enquanto f, g e h representam homomorfismos. Na "categoria" dos espaços topológicos, X, Y e Z são, então, espaços topológicos e f, g e h são funções contínuas.

Muitas propriedades das várias construções matemáticas podem ser representadas através de propriedades universais de diagramas. Considere o produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y, consistindo como usual no conjunto de todos os pares ordenados (x, y) com $x \in X$ e $y \in Y$. As projeções $(x, y) \longmapsto x$ e $(x, y) \longmapsto y$ do produto $X \times Y$ nos seus "eixos" X e Y são funções $p : X \times Y \longrightarrow X$ e $q : X \times Y \longrightarrow Y$. Qualquer função $f : W \longrightarrow X \times Y$ de um terceiro conjunto W em $X \times Y$ é unicamente determinada pelas suas compostas $p \circ h$ e $q \circ h$. Reciprocamente, dado W e duas funções f e g como no diagrama abaixo, existe uma única função h que torna o diagrama comutativo, nomeadamente $hw = (fw, gw)$.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd}$$

Assim, dados X e Y, (p, q) é "universal" entre os pares de funções de algum conjunto W para X e Y, porque qualquer outro para (f, g) factoriza unicamente (via h) através de (p, q). Esta propriedade descreve o produto cartesiano $X \times Y$ unicamente (a menos de bijeção). O mesmo diagrama, lido na categoria dos grupos, descreve unicamente o produto cartesiano de grupos (munido da correspondente operação de multiplicação).

Adjunção é outra expressão para estas propriedades universais. Se escrevermos $\hom(W, X)$ para o conjunto de todas as funções $f : W \longrightarrow X$ e $\hom((U, V), (X, Y))$ para o conjunto de todos os pares de funções $f : U \longrightarrow X$ e $g : V \longrightarrow Y$, a correspondência indicada no diagram acima é a bijeção

$$\hom(W, X \times Y) \cong \hom((W, W), (X, Y)).$$

Esta bijeção é natural no sentido (a ser tornado preciso mais à frente) em que está definida "da mesma forma" para todo os conjuntos W e todos os pares de conjuntos (X, Y) (e é igualmente "natural" quando interpretada para grupos ou espaços topológicos).

Esta bijeção natural envolve duas construções em conjuntos: a construção $W \longmapsto (W, W)$ que envia cada conjunto no par diagonal $\Delta W = (W, W)$ e a construção $(X, Y) \longmapsto X \times Y$ que envia cada par de conjuntos no seu produto cartesiano. Dada a bijeção do diagrama anterior, dizemos que a construção $X \times Y$ é um adjunto à direita da construção Δ e que Δ é um adjunto à esquerda do produto cartesiano. Adjuntos, como veremos, ocorrem em toda a matemática.

A construção "produto cartesiano" é chamada um "functor" porque se aplicada adequadamente a conjuntos e a funções entre eles; duas funções $k : X \longrightarrow X'$ e $l : Y \longrightarrow Y'$ dão origem a uma função produto cartesiano $k \times l$:

$$k \times l : X \times Y \longrightarrow X' \times Y', \quad (x, y) \longmapsto (kx, ly).$$

Observe que o conjunto unitário $1 = \{0\}$ pode ser usado como identidade para a operação "produto cartesiano", tendo em conta as bijeções

$$1 \times X \xrightarrow{\lambda} X \xleftarrow{\varrho} X \times 1$$

dadas por $\lambda(0, x) = x$ e $\varrho(x, 0) = x$.

A noção de monóide (ou semigrupo com identidade) desempenha um papel central na teoria de categorias. Um monóide pode ser descrito como um conjunto M munido de duas funções

$$\mu : M \times M \longrightarrow M \quad \eta : 1 \longrightarrow M$$

tal que os seguintes dois diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times M \arrow[r, "1 \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times 1"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\
M \times M \arrow[r, "\mu"] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \times M \arrow[r, "\eta \times 1"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \times M \arrow[d, "\mu"] & M \times 1 \arrow[l, "1 \times \eta"'] \arrow[d, "\rho"] \\
M \arrow[r, leftrightarrow, "="] & M \arrow[r, leftrightarrow, "="] & M
\end{tikzcd}$$

onde 1 em $1 \times \mu$ é a função indentidade $M \longrightarrow M$ e 1 em $1 \times M$ é o conjunto singular $1 = \{0\}$, e λ e ρ são as bijeções dadas acima. Dizer que este diagramas comutam é dizer que as seguintes compostas são iguais

$$\mu \circ (1 \times \mu) = \mu \circ (\mu \times 1), \quad \mu \circ (\mu \times 1) = \lambda, \quad \mu \circ (1 \times \eta) = \rho.$$

Estes diagramas podem ser reescritos através de elementos, escrevendo a função μ como um produto $\mu(x, y) = xy$ e substituindo a função η pelo seu único valor, o elemento $\eta(0) = u$, com $u \in M$. Os diagramas anteriores tranformam-se então nos seguintes

$$\begin{tikzcd}
(x,y,z) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x,yz) \arrow[d, mapsto] \\
(xy,z) \arrow[r, mapsto] & (xy)z = x(yz)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(0,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (u,x) \arrow[d, mapsto] \\
x \arrow[r, mapsto, "="] & ux
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x,u) \arrow[d, mapsto] & (x,0) \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
xu & x \arrow[l, mapsto, "="']
\end{tikzcd}$$

Estes são exatamente os axiomas conhecidos de um monóide, a multiplicação é associativa e existe um único elemento u que é identidade quer à esquerda quer à direita.

O mesmo tipo de raciocínio pode ser aplicado a outras "estruturas"; por exemplo, podemos descrever um grupo como um monóide M munido da função $\zeta : M \longrightarrow M$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & M \times M \arrow[r, "1 \times \zeta"] & M \times M \arrow[d] \\
1 \arrow[rr] & & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (x,x) \arrow[r, mapsto] & (x,x^{-1}) \arrow[d, mapsto] \\
0 \arrow[rr, mapsto] & & u = xx^{-1}
\end{tikzcd}$$

onde $\delta : M \longrightarrow M \times M$ é a função diagonal $x \longmapsto (x, x)$, para $x \in M$, e a seta vertical $M \longrightarrow 1$ é a função "constante" de M para o conjunto singular 1.

Esta definição de grupo através de setas μ, η, ζ é tal que os diagramas comutativos não fazem menção dos elementos do grupo e portanto podem ser aplicados noutras circunstâncias. Pore exemplo se M representar um espaço topológico e não apenas um conjunto e as setas foram funções contínuas então os diagramas definem um grupo topológico. Assim grupos ou grupos topológicos podem ser vistos como grupos "diagramáticos" na categoria dos conjuntos ou dos espaços topológicos.

A definição de grupo numa categoria depende (para a definição de inverso) da função diagonal $\delta : M \longrightarrow M \times M$ no quadrado cartesiano $M \times M$. A definição de monóide no sentido das categorias é mais geral, porque o produto cartesiano em $M \times M$ pode ser substituído por uma outra operação $\Box$ que é associativa e tem unidade no sentido descrito anteriormente.

Podemos então falar de monóide no sistema $(C, \Box, 1)$, onde C é uma categoria, $\Box$ é uma operação nas condições prescritas e 1 é a unidade. Considere-se, por exemplo, um monóide em

$$(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z}),$$

onde $\mathbf{Ab}$ é a categoria dos grupos abelianos, 1 é dado por $\mathbb{Z}$, o grupo dos inteiros; e temos então o seguinte isomorfismo

$$\mathbb{Z} \otimes X \cong X \cong X \otimes \mathbb{Z}$$

onde X é um grupo abeliano (o que mostra que $\mathbb{Z}$ é unidade para o produto tensorial).

Então o monóide M em $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$ é simplesmente um anel. O morphismo $\mu : M \otimes M \longrightarrow M$ é, por definição de $\otimes$, uma função $M \times M \longrightarrow M$, a que chamamos multiplicação, que é bilinear, ou seja, distribuitiva sobre a adição à direita e à esquerda, enquanto o morfismo $\eta : \mathbb{Z} \longrightarrow M$ de grupos abelianos é completamente determinado ao escolher um elemente, nomeadamente a imagem u do gerador $1 \in \mathbb{Z}$. O diagrama comutativo (...) diz-se que a multiplicação μ é associativa e u é a unidade multiplicativa à esquerda e à direita, isto é, que M é efetivamente um anel.

Os (homo)-morfismos de uma estrutura algébrica também podem ser descritos por diagramas. Se (M, μ, η) e (M', μ', η') são dois monóides, descritos pelos diagramas acima, então um morfismo do primeiro no segundo, pode ser definido como uma função $f : M \longrightarrow M'$ tal que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] \\ M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times M \arrow[r] \arrow[d, "f \times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ M' \times M' \arrow[r] & M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "||"'] & M \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, "\eta'"] & M' \end{tikzcd}$$

Em termos de elementos, isto diz-nos que $f(xy) = (fx)(fy)$ e que $fu = u'$ onde u e u' são as unidades; então um homorfismo é, como usual, uma função que preserva a multiplicação e as unidades. Se M e M' são monóides em $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$, ou seja, anéis, o morfismo f é um homomorfismo de anéis (que preserva as unidades).

Um último exemplo: ações. Uma ação de um monóide (M, μ, η) num conjunto S define-se como uma função $\mu : M \times S \longrightarrow S$ tal que os seguintes diagramas comutam.

$$\begin{tikzcd} M \times M \times S \arrow[r, "1 \times \nu"] \arrow[d, "\mu \times 1"'] & M \times S \arrow[d, "\nu"] \\ M \times S \arrow[r, "\nu"] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \times S \arrow[r, "\eta \times 1"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M \times S \arrow[d, "\nu"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Se escrevermos $\mu(x, s) = x.s$ para o resultado da ação do elemento $x \in M$ no elemento $s \in S$, os diagramas postulam

$$x.(y.s) = (xy).s, \quad u.s = s,$$

para todos os $x, y \in M$ e todos os $s \in S$. Estes são os axiomas usuais de ação de um monóide num conjunto. Se (M, μ, η) for um monóide em $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$ então uma ação de M em $S \in \mathbf{Ab}$ corresponde a uma estrutra de M-módulo à esquerda sobre S.

2 Categorias, functores e transformações naturais

2.1 Axiomas para categorias

Vamos descrever categorias diretamente através de axiomas, sem usar teorias de conjuntos, e chamar-lhes "metacategorias". Começamos com uma noção mais simples, a de (meta)grafo.

Um *metagrafo* consiste em *objetos* $a, b, c, \ldots$, *setas* $f, g, h, \ldots$ e as duas operações seguintes:

domínio: que associa a cada seta f um objeto $a = \operatorname{dom} f$;

codomínio: que associa a cada seta f um objeto $b = \operatorname{codom} f$.

Tal seta f corresponde claramente a

$$f : a \longrightarrow b \qquad \text{ou} \qquad a \xrightarrow{f} b.$$

Uma *metacategoria* é um metagrafo munido das seguintes operações:

Identidade: que associa a cada objeto a uma seta $1_a : a \longrightarrow a$;

Composição: que associa a cada par de setas (f, g) tal que $\operatorname{codom} f = \operatorname{dom} g$, uma seta $g \circ f$, chamada a composta, verificando $g \circ f : \operatorname{dom} f \longrightarrow \operatorname{codom} g$. Esta operação pode ser vista através do diagrama

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & c \end{tikzcd}$$

que exibe todos os domínios e codomínios envolvidos. Estas operações numa metacategoria obdecem aos seguintes axiomas

Associatividade: para objetos e setas com a seguintes configuração

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{k} d$$

temos sempre a igualdade

$$k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f.$$

Esta equação pode ser representada através do seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "g \circ f"] & & d \\
b \arrow[rr, "g"] \arrow[urr, "k \circ g"'] & & c \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

Existência de unidade: Para as setas $f : a \longrightarrow b$ e $g : b \longrightarrow c$ a composição com a seta $1_b : b \longrightarrow b$ resulta em

$$1_b \circ f = f \quad \text{e} \quad g \circ 1_b = g.$$

O diagrama que corresponde a este axioma é o seguinte

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\
& b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

Se b é um objeto de uma metacategoria C, a seta identidade 1_b está unicamente determinada. Por vezes, pode ser conveniente identificar a seta 1_b com o próprio objeto b, escrevendo $b : b \longrightarrow b$. Assim sendo é possível dispensar os objetos e trabalhar apenas com setas. Neste curso não vamos optar por esta visão da teoria das categorias.

2.2 Categorias

Uma categoria será uma interpretação de uma metacategoria e dos seus objetos, setas e axiomas na teoria dos conjuntos.

Um *grafo dirigido* consiste num par ordenado (O, A), onde O é um conjunto de objetos e A é um conjunto de setas, munido das seguintes operações

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "\text{dom}"] \arrow[r, shift right, "\text{codom}"'] & O
\end{tikzcd}$$

Neste grafo, o conjunto de pares de setas que podem ser compostas é o conjunto

$$A \times_O A = \{(f, g) \in A \times A : \operatorname{dom} g = \operatorname{codom} f\},$$

chamado o produto de A sobre O.

Uma *categoria* é um grafo dirigido com duas operações adicionais, definidas por

$$O \xrightarrow{\quad 1 \quad} A \qquad\qquad A \times_O A \xrightarrow{\quad \circ \quad} A$$

$$c \longmapsto 1_c \qquad\qquad (g, f) \longmapsto g \circ f$$

chamadas identidade e composição, tais que $\operatorname{dom} 1_a = a = \operatorname{codom} 1_a$, $\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom} f$ e $\operatorname{codom}(g \circ f) = \operatorname{codom} g$, para todos os objetos $a \in O$ e pares de setas $(g, f) \in A \times_O A$, satisfazendo as leis da associatividade e existência de unidade.
Ao estudar uma categoria C, escrevemos, por abuso de linguagem

$$b \in C \qquad \text{e} \qquad f \in C$$

em vez de $c \in O$ e $f \in A$. Escrevemos também

$$\hom(b, c) = \{f : \operatorname{dom} f = b, \operatorname{codom} f = c\}$$

para o conjunto de todas as setas cujo domínio é b e o codomínio é c.

2.2.1 Exemplos

0 é a categoria vazia, 0 objetos, 0 setas.

1 é a categoria com um único elemento e uma única seta (identidade).

2 é a categoria com dois elementos a e b e uma única seta $a \longrightarrow b$ não identidade.

3 é a categoria com três elementos cujas setas não identidade são dadas pelo seguinte diagrama $\begin{smallmatrix} & \cdot & \\ \nearrow & & \searrow \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot \end{smallmatrix}$

$\downarrow\downarrow$ é a categoria com dois objetos a, b e duas setas $a \rightrightarrows b$ não identidade. A estas setas chamamos setas paralelas.

Em cada um destes exemplos existe apenas uma possibilidade para a composição de setas.

Categorias discretas. Uma categoria diz-se *discreta* quando toda a seta é uma identidade. Como existe uma correspondência biunívoca entre setas identidade e objetos, uma categoria discreta é simplesmente um conjunto.

Monóides. Um monóide é uma categoria com um único objeto (o conjunto sobre o qual o monóide está definido). Todo o monóide fica determinado pelo conjunto das suas setas (cada seta corresponde à multiplicação por um elemento fixo), pela identidade (a que corresponde o elemento neutro), e pela lei da composição de setas (que determina que a multiplicação é associativa).

Grupos. Um grupo é uma categoria com um único objeto na qual todas as setas têm um inverso (à esquerda e à direita) para a composição de setas.

Matrizes. Seja K um anel comutativo. O conjunto $\mathbf{Matr_k}$ das matrizes rectangulares com entradas em K é uma categorias; os objetos são números naturais $n, m, \dots$, cada matrix $A_{m\times n}$ é vista como uma seta $m \longrightarrow n$ e a composição é dada pela composição usual de matrizes.

Conjuntos. Sendo V um conjunto de conjuntos, consideramos $\mathbf{Ens_V}$ a categoria de todos os objetos $X \in V$, e as setas são todas as funções $f : X \longrightarrow Y$, $X, Y \in V$, com a composição usual de funções.

Pré-ordens. Uma pré-ordem é uma categoria P, na qual dados objetos p e p' existe uma única seta $p \longrightarrow p'$. Isto define uma relação binária $\leq$ nos objetos de P do seguinte modo

$$p \leq p' \text{ se e só se } p \longrightarrow p' \text{ é uma seta em } P.$$

Esta relação é reflexiva (existência de seta identidade) e é transitiva (composição de setas). Reciprocamente, a partir de qualquer relação binária reflexiva e transitiva podemos obter uma categoria pré-ordem. Pré-ordens incluem ordens parciais (onde dados p, p' se tem $p \leq p'$ e $p' \leq p$ implica $p = p$) e ordens totais (onde dados p, p' se tem sempre ou $p \leq p'$ ou $p' \leq p$).

Ordinais. Consideramos o ordinal n como o conjunto de todos os ordinais que lhe precedem $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Em particular, 0 é o conjunto vazio é o primeiro ordinal infinito é $\omega = \{0, 1, \ldots\}$. Cada ordinal n é totalmente ordenado e portanto é uma categoria (uma pré-ordem). Por exemplo, as categorias **1**, **2**, **3** correspondem precisamente aos ordinais $1, 2$ e 3. Um outro exemplo é a ordem total ω, que consiste nas setas identidade, nas setas

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \ldots$$

e nas suas compostas.

Categoria simplicial. Δ é a categoria cujos objetos são todos os ordinais finitos e as setas são todas as funções $f : m \longrightarrow n$ que preservam a ordem (isto é, para $i \leq j$ tem-se $fi \leq fj$).

$\mathbf{Finord} = \mathbf{Set}_\omega$. Esta é a categoria de todos os ordinais finitos n e de todas as setas $f : n \longrightarrow m$ de n para m. Esta é essencialmente a categoria de todos os conjuntos finitos onde usamos apenas um conjunto finito n para cada cardinal finito.

Categorias largas. Apesar de não existir o conjunto de todos os conjuntos[1], queremos definir de algum modo a categoria **Set** de todos os conjuntos "pequenos". Para tal vamos assumir que existe um conjunto suficientemente grande U, a que vamos chamar universo. Dizemos que um conjunto x é pequeno se pertence ao universo U. Através deste "artifício" podemos construir várias categorias que nos são familiares.

Set: Objetos: todos os conjuntos pequenos. Setas: todas as funções entre eles.

$\mathbf{Set}_*$: Conjuntos com um ponto preferido. Objetos: conjuntos pequenos com um ponto base. Setas: funções que preservam o ponto base.

Cat: Objetos: todas as categorias pequenas. Setas: todos os functores entre elas.

Mon: Objetos: todos os monóides pequenos. Setas: todos os morfismos de monóide.

[1] Consulte notas sobre teoria de conjuntos, em particular sobre o paradoxo de Russel.

Grp: Objetos: todos os grupos pequenos. Setas: todos os morfismos de grupo.

Ab: Objetos: todos os grupos abelianos pequenos. Setas: todos os morfismos de grupo entre grupos abelianos.

Rng: Objetos: todos os anéis pequenos. Setas: todos os morfismos de anel (que preservam unidades).

R**-Mod:** Objetos: todos os pequenos módulos à esquerda sobre o anel R. Setas: funções lineares.

Mod-R**:** Objetos: todos os pequenos módulos à direita sobre o anel R. Setas: funções lineares.

Top: Objetos: espaços topológicos pequenos. Setas: funções contínuas.

$\mathbf{Top}_*$: Objetos: espaços topológicos pequenos com um ponto base. Setas: funções contínuas que preservam o ponto base.

2.3 Functores

Um *functor* é um morfismo de categorias. Mais precisamente, dadas categorias C e B, um functor

$$T : C \longrightarrow B$$

com domínio C e codomínio B consiste em duas funções compatíveis: a *função objeto* que associad a cada objeto $c \in C$ um objeto $Tc \in B$ e a *função seta* (denotada também por T) que associa a cada seta $f : c \longrightarrow c'$ uma seta $Tf : Tc \longrightarrow Tc'$ de B de modo que se verifique

$$T(1_c) = 1_{T_c} \quad \text{e} \quad T(g \circ f) = Tg \circ Tf,$$

quando a composta $g \circ f$ estiver definida em C.

Um exemplo simples é o do functor das partes de um conjunto $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$. A função objeto associa a cada conjunto X o conjunto das suas partes $\mathcal{P}(X)$; a função seta envia cada seta $f : X \longrightarrow Y$ na seta $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$, $S \subset X \longmapsto fS \subset Y$. Uma vez que temos claramente $\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}X}$ e $\mathcal{P}(gf) = \mathcal{P}g\mathcal{P}f$, temos um functor definido da categoria **Set** na categoria **Set**.

Functores ocorrem naturalmente em álgebra. Um exemplo: consideremos um anel commutativo K e $\mathrm{GL_n}(K)$ o grupo das matrizes $n \times n$ invertíves, com a multiplicação usual de matrizes. Cada morfismo de anéis $f : K \longrightarrow K'$ produz de forma clara um morfismo de grupos $\mathrm{GL}_n(f) : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K')$. Estes dados definem, para cada número natural n, um functor $\mathrm{GL}_n : \mathbf{CRng} \longrightarrow \mathbf{Grp}$.

Um functor que simplesmente "esquece" parte ou toda a estrutura de um objeto algébrico chama-se usualmente um functor de esquecimento. Por exemplo, o functor de esquecimento $T : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ associa a cada grupo G o conjunto TG dos seus elementos (esquecendo assim a multiplicação e, portanto, a estrutura de grupo) e envia cada morfismo de grupos $f : G \longrightarrow G'$ na mesma função f vista apenas como uma função entre conjuntos. De forma análoga podemos definir o functor $S : \mathbf{Rng} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ que envia cada anel R no grupo abeliano (aditivo) R e a cada morfismo de anéis

$f : R \longrightarrow R'$ associa a mesma função $f : R \longrightarrow R'$ vista como morfismo de grupos abelianos.

Composição de functores. Dados dois functores $C \xrightarrow{T} B$ e $B \xrightarrow{S} A$ entre categorias A e B e B e C, a compostas

$$c \longmapsto S(Tc) \quad \text{e} \quad f \longmapsto S(Tf)$$

em objetos c e setas f de C, definem um functor $S \circ T : C \longrightarrow A$ chamado functor composto de S com T. Esta composição é associativa. Para cada categoria B, o functor identidade $I_B : B \longrightarrow B$ é o elemento neutro para esta composição. Podemos assim considerar a metacategoria de todas as categoriais, os objetos são todas as categorias e as setas são todos os functores entre categorias. Analogamente podemos formar a categoria **Cat** de todas as categorias "pequenas".

Um isomorfismo $T : C \longrightarrow B$ de categorias é um functor T de C em B que é uma bijeção, tanto nos objetos como nas setas. Equivalentemente, um functor $T : C \longrightarrow B$ é um isomorfismo se e só se existe um functor $S : B \longrightarrow C$ tal que $S \circ T$ e $T \circ S$ são functores identidade, diz-se então que S é o inverso de T e escreve-se $S = T^{-1}$. Um functor diz-se *completo* se para cada par c, c' de objetos de C e cada seta $g : Tc \longrightarrow Tc'$ de B, existe uma seta $f : c \longrightarrow c'$ de C com $g = Tf$. Claramente o composto de dois functores completos é um functor completo. Um functor $T : C \longrightarrow B$ diz-se *fiel* se para todo o par c, c' de objetos de C e pares de setas paralelas $f_1, f_2 : c \longrightarrow c'$ a condição $Tf_1 = Tf_2$ implica $f_1 = f_2$. O composto de functores fiéis é um functor fiel. Um functor que é completo e fiel diz-se um functor completamente fiel.

Uma subcategoria S de uma categoria C é uma coleção de alguns objetos e algumas setas de C, de modo que se $f : c \longrightarrow c'$ é uma seta em C então c e c' são objetos de S, para cada objeto s de S a seta $1_s : s \longrightarrow s$ é uma seta de S e se f e g são setas de S que podem ser compostas em C, então a composta $g \circ f$ é uma seta de S. Estas condições garantem que S é uma categoria. A inclusão $S \longrightarrow T$ que envia cada objeto e seta de S em si mesmos é um functor, chamado o *o functor de inclusão.* Este functor é automaticamente fiel. Dizemos que S é uma subcategoria completa de C se o functor de inclusão é completo. Por exemplo a categoria $\mathbf{Set}_f$ de todos os conjuntos finitos é uma subcategoria completa de **Set**.

2.4 Transformações naturais

Dados dois functores $S, T : C \longrightarrow B$, uma *tranformação natural* $\tau : S \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} T$, é uma função que associa a cada objeto c de C uma seta $\tau_c : Sc \longrightarrow Tc$ em B de tal forma que, para toda a seta $f : c \longrightarrow c'$, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"] & Sc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\ c' & Sc' \arrow[r, "\tau_{c'}"] & Tc' \end{tikzcd}$$

Quando isto se verifica, dizemos que $\tau_c : Sc \longrightarrow Tc$ é *natural* em c. Se pensarmos num functor S como dando uma imagem em B de (todos os objetos e setas) em B, então uma transformação natural τ é um conjunto de setas que envia (ou translada!) a imagem em B por S na imagem em B por T, de modo que os subdiagramas do seguinte diagrama comutem.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
& b \arrow[dl, "g"] \\
c &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Sa \arrow[rr, "\tau_a"] \arrow[dd, "Sh"'] \arrow[dr, "Sf"] & & Ta \arrow[dd] \arrow[dr, "Tf"] & \\
& Sb \arrow[rr, "\tau_b"] \arrow[dl, "Sg"] & & Tb \arrow[dl, "Tg"] \\
Sc \arrow[rr, "\tau_c"'] & & Tc &
\end{tikzcd}$$

Uma transformação natural é frequentemente chamada um morfismo de functores. Um transformação natural τ tal que toda a seta τ_c é invertivel em B diz-se uma *equivalência natural* ou um *isomorfismo natural* e nesse caso denotamos $\tau : S \cong T$. As setas $(\tau_c)^{-1}$ serão então as setas da transformação natural $\tau^{-1} : T \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} S$.

O determinante é uma transformação natural. Mais precisamente, seja $\det_K M$ o determinante de uma matriz M, quadrada de ordem n, com entradas no anel comutativo K e seja K^* o grupo das unidades (i.e, elementos invertíveis) de K. Sabemos que M é invertível quando o determinante de M é uma unidade em K e que $\det_K : \mathrm{GL}_n K \longrightarrow K^*$ é um morfismo de grupos. Uma vez que o determinante está definido da mesma maneira para todo o anel comutativo K, cada morfismo $f : K \longrightarrow K'$ de anéis comutativos dá origem ao seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_n K \arrow[r, "\det_K"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n f"'] & K^* \arrow[d, "f^*"] \\
\mathrm{GL}_n K' \arrow[r, "\det_{K'}"'] & K'^*
\end{tikzcd}$$

pelo que o determinante $\det : \mathrm{GL}_n \longrightarrow (\ )^*$ é uma transformação natural entre dois functores **CRng** $\longrightarrow$ **Grp**.

Encontramos outro exemplo de *naturalidade* quando "comparamos" a categoria **Finord** dos ordinais finitos e a categoria $\mathbf{Set}_f$ de todos os conjuntos finitos (num universo U). Cada ordinal $n = 0, 1, \ldots, n-1$ é um conjunto finito portanto temos o functor de inclusão $S : \mathbf{Finord} \longrightarrow \mathbf{Set}_f$. Por outro lado, cada conjunto finito X determina um ordinal $n = \#X$, o número de elementos de X. Podemos escolher para cada X, uma bijeção $\theta_X : X \longrightarrow \#X$. Para toda a função $f : X \longrightarrow Y$ podemos definir uma função $\#f : \#X \longrightarrow \#Y$ fazendo $m \longmapsto \theta_Y f \theta_X^{-1} m$ para $m \in n = \#X$. Isto é o mesmo que dizer que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "f"'] & \#X \arrow[d, "\#f"] \\ Y \arrow[r, "\theta_Y"'] & \#Y \end{tikzcd}$$

comuta. Isto garante que $\# : \mathbf{Set}_f \longrightarrow \mathbf{Finord}$ é um functor. Note que se X for um ordinal então θ_X pode ser tomada com a identidade. Assim o functor composto $\# \circ S$ é igual ao functor identidade I' de $\mathbf{Finord}$. No entanto, o functor composto $S \circ \#$ não é o functor identidade I em Set_f uma vez que estamos a enviar X em $\mathbf{Set}_f$ num conjunto finito especial, o ordinal com o mesmo número de elementos de X. Portanto S e $\#$ não definem um isomorfismo de categoria. Observe, no entanto, que o diagrama acima garante que $\theta : I \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} S \circ \#$ é um isomorfismo natural. Resumindo temos $I \cong S \circ \#$ e $I' = \# \circ S$.

Uma *equivalência* entre categorias C e D define-se como um par de functores $S : C \longrightarrow D$ e $T : D \longrightarrow C$ e isomorfismos naturais tais que $I_C \cong T \circ S$ e $I_D \cong S \circ T$.

3 Construções em categorias

3.1 Dualidade

Em teoria das categorias, *dualidade* é o processo de "virar todas as setas ao contrário".

A *teoria elementar de uma categoria abstrata* (TECA) consiste em certas afirmações Σ (onde afirmação significa uma frase declarativa à qual está atribuido o valor verdadeiro ou falso) que envolvem os símbolos $a, b, c, \dots$ para os objetos e $f, g, h, \dots$ para as setas. Estas afirmações são construídas através de afirmações atómicas. As frases "a é o domínio de f", "b é o codomíno de f", "i é a seta identidade em a", "g pode ser composta com f e h é a composta", "$a = b$" e "$f = g$", são exemplos de afirmações atómicas. Estas afirmações atómicas também podem ser escritas como equações: "$a = \operatorname{dom} f$", "$h = g \circ f$", etc. Uma afirmação Σ define-se como sendo uma frase (ou uma fórmula bem formada) construída através de afirmações atómicas, dos conetivos usuais (e, ou, não, implica, se e só se) e dos quantificadores (para todo, existe).

Uma sentença é uma afirmação onde todas as variáveis estão quantificadas (isto é, não existem variáveis livres). Por exemplo, "Para toda a seta f, existem a e b tais que $f : a \longrightarrow b$" é uma sentença (na verdade, um axioma em qualquer categoria). Os axiomas de metacategoria são também sentenças.

O dual de uma afirmação Σ de TECA é construída fazendo as seguintes substituições ao longo de Σ: "domínio" por codomínio", "codomínio" por "domínio", "$h = g \circ f$" por

"$h = g \circ f$", setas são viradas ao contrário, compostas trocam de ordem. Símbolos lógicos (e, ou,...) ficam na mesma.

Temos a seguinte tabela

Afirmação Σ	Afirmação dual Σ^*
$f : a \longrightarrow b$	$f : b \longrightarrow a$
$a = \operatorname{dom} f$	$a = \operatorname{codom} f$
$i = 1_a$	$i = 1_a$
$h = g \circ f$	$h = f \circ g$
u é o inverso à direita de v	u é o inverso à esquerda de v
f é invertível	f é invertível

Note que a afirmação dual da dual é a afirmação original (isto é, $\Sigma^{**} = \Sigma$). Se uma afirmação envolve um diagrama, então a afirmação dual envolve o diagrama com todas as setas viradas ao contrário.

O dual de cada um dos axiomas de categoria é também um axioma. Portanto, considerando uma demonstração, a partir dos axiomas, de um teorema sobre uma categoria arbitrária e substituindo cada afirmação pela sua afirmação dual, obtemos uma demonstração do teorema dual. A isto chama-se o *princípio da dualidade*.

Um exemplo onde podemos aplicar o princípio da dualidade é o seguinte. Dada uma categoria C, um objeto t diz-se *terminal* em C se para cada objeto $a \in C$, existe exatamente uma seta $a \longrightarrow t$. Se t é terminal, a única seta $t \longrightarrow t$ é a identidade e daqui resulta que quaisquer dois objetos terminais numa categoria são isomorfos (nessa categoria). Um objeto s diz-se inicial em C, se para cada objeto $a \in C$, existe uma única seta $s \longrightarrow a$. Por exemplo, na categoria **Set**, o conjunto vazio é um objeto inicial e qualquer conjunto com um único elemento é um objeto terminal. Em **Grp**, o grupo com um único elemento é objeto inicial e terminal. Note que "t é objeto inicial" é a afirmação dual de "t é objeto terminal". Já justificamos que um objeto terminal é único a menos de isomorfismo, pelo que, pelo princípio da dualidade, sabemos também que um objeto inicial é também único a menos de isomorfismo.

Observação: O princípio da dualidade também se aplica a afirmações sobre várias categorias e functores entre elas. Uma afirmação dual troca as setas das categorias envolvidas mas **não** troca a ordem nos functores.

3.2 Contravariância e opostos

A cada categoria C podemos associar a categoria oposta C^{op}, da seguinte forma: os objetos de C^{op} são os objetos de C e as setas de C^{op} são as setas f^{op} tais que se $f : a \longrightarrow b$ é uma seta de C então $f^{op} : b \longrightarrow a$ é uma seta em C^{op}. A composta $f^{op}g^{op} = (gf)^{op}$ está definida em C^{op} exatamente quando gf está definida em C. Claramente C^{op} é uma categoria. Além disso, este processo traduz uma qualquer afirmação Σ em C na sua afirmação dual Σ^* em C^{op}. Note que qualquer sentença Σ é verdadeira em C^{op} se e só se a sua afirmação dual Σ^* é verdadeira em C. Isto motiva a que alguns autores chamem a C^{op} a categoria dual de C e denotem $C^{op} = C^*$.

Se $T : C \longrightarrow B$ é um functor, podemos definir um novo functor $T^{op} : C^{op} \longrightarrow B^{op}$ através da associação $c \longmapsto Tc$ para os objetos e $f^{op} \longrightarrow (Tf)^{op}$ para as setas. Além disso, se considerarmos as funções $C \longmapsto C^{op}$ e $T \longmapsto T^{op}$, definimos um functor (covariante!) $\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$.

Consideremos agora um functor $S : C^{op} \longrightarrow B$. Estamos a associar a cada objeto C^{op} um objeto Sc de B e a cada seta $f^{op} : b \longrightarrow a$ de C^{op} uma seta $Sf^{op} : Sb \longrightarrow Sa$ de B, tal que $S(f^{op}g^{op}) = (Sf^{op})(Sg^{op})$, sempre que $f^{op}g^{op}$ está definida. O functor S pode ser descrito diretamente através da categoria C escrevendo $\bar{S}f$ para Sf^{op}, então $\bar{S}$ é um *functor contravariante* de C para B, que envia cada objeto $c \in C$ num objeto $\bar{S}c \in B$ e cada seta $f : a \longrightarrow b$ numa seta $\bar{S}f : \bar{S}b \longrightarrow \bar{S}a$ (na direção oposta), de forma que

$$\bar{S}(1_c) = 1_{\bar{S}c}, \qquad \bar{S}(fg) = (\bar{S}g)(\bar{S}f).$$

Note que a função seta de um functor contravariante $\bar{S}$ inverte a ordem da composição.

Um exemplo de um functor contravariante $\bar{P} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Para cada conjunto X, $\bar{P}X = \{S|\, S \subset X\}$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X, para cada função $f : X \longrightarrow Y$, $\bar{P}f : \bar{P}Y \longrightarrow \bar{P}X$ envia cada subconjunto $A \subset Y$ na sua imagem recíproca $f^{-1}(A) \subset X$.

Um outro exemplo, é o conhecido processo de associar a cada espaço vectorial V o seu dual V^* e a cada aplicação linear $f : V \longrightarrow W$ a aplicação dual $f^* : W^* \longrightarrow V^*$. Este processo define um functor contravariante da categoria $\mathbf{Vect}_K$, dos espaços vectoriais (sobre o corpo K fixo), em si mesma.

Um functor, $T : C \longrightarrow B$, tal como definido anteriormente, chama-se um functor *covariante* de C para B. Em geral, é bastante mais conveniente representar um functor contravariante $\bar{S}$ de C para B como um functor covariante de $\bar{S} : C^{op} \longrightarrow B$ ou então como um functor covariante $S^{op} : C \longrightarrow B^{op}$. A menos que seja explicitamente dito o contrário, para nós, um functor $T : C \longrightarrow B$ representará sempre um functor covariante.

Conjuntos de morfismos dão-nos exemplos importantes de functores covariantes e contravariantes. Seja C uma categoria e seja U um universo suficientemente grande que inclua todos os subconjuntos do conjunto das setas de C (por exemplo, o conjunto das partes das setas de C). Seja $\mathbf{Ens} = \mathbf{Set}_U$, a categoria cujos objetos são todos os conjuntos $X \in V$, as setas todas as funções $f : X \longrightarrow Y$ entre dois destes cojuntos, com a composição usual de funções. Cada conjunto

$$\hom(a, b) = \{f|\, f : a \longrightarrow b \in C\}$$

é um objeto desta categoria. Para cada $a \in C$, temos um functor covariante

$$C(a, -) : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

tal que a função objecto envia cada objeto b de C em $\hom(a, b)$ e a função seta envia cada função $k : b \longrightarrow b'$ numa função

$$\begin{array}{rccc} k_* : & \hom(a,b) & \longrightarrow & \hom(a,b') \\ & f & \longmapsto & k \circ f \end{array}.$$

À função k_* chamamos a função induzida por k ou composição com k à esquerda. Analogamente, dado um objeto b de C, temos um functor contravariante

$$C(-,b) : C \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

tal que a função seta envida cada função função $k : a \longrightarrow a'$ numa função

$$\begin{array}{rlcl} k^* : & \hom(a',b) & \longrightarrow & \hom(a,b) \\ & f & \longmapsto & f \circ k \end{array}.$$

A função k^* é assim a composição com k à direita.
Um último exemplo. Dado X um espaço topológico, consideremos $\mathbf{Open}(X)$, o conjunto de todos os abertos de X ordenados pela inclusão, portanto uma ordem parcial, logo uma categoria. Seja $C(U,\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas de U com valores reais. O functor

$$T : \mathbf{Open}(X) \longrightarrow \mathbf{Set}$$

que a cada aberto U de X associa $C(U,\mathbb{R})$ e que a cada seta $U \longrightarrow V$ (isto é, $U \subseteq V$) associa uma função $C(U,\mathbb{R}) \longrightarrow C(V,\mathbb{R})$ que envia h em $h|_V$, é um functor contravariante. A este functor chama-se o feixe dos germes das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$.

3.3 Produto de categorias

Dadas duas categorias B e C, podemos formar uma nova categoria $B \times C$, chamada o produto de B com C, como se segue. Um objeto de $B \times C$ é um par de objetos (b,c), onde $b \in B$ e $c \in C$. Uma seta $(b,c) \longrightarrow (b',c')$ é um par de setas (f,g) onde $f : b \longrightarrow b'$ e $g : c \longrightarrow c'$, tal que a composição de duas destas setas

$$(b,c) \xrightarrow{(f,g)} (b',c') \xrightarrow{(f',g')} (b'',c'')$$

está definida em termos das composição em B e em C, da seguinte forma

$$(f,g) \circ (f',g') = (f \circ f', g \circ g').$$

Os functores

$$B \xleftarrow{P} B \times C \xrightarrow{Q} C$$

chamados as *projeções do produto*, definem-se da maneira óbvia. Estes functores têm a seguinte propriedade. Dada uma categoria D e dois functores

$$B \xleftarrow{R} D \xrightarrow{T} C$$

existe um único functor $F :\longrightarrow B \times C$ com $PF = R$ e $QF = T$. A construção de F (seta a tracejado) pode ser visualizada através do seguinte diagrama comutativo de functores:

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "R"'] \arrow[d, dashed, "F"] \arrow[dr, "T"] & \\
B & B \times C \arrow[l, "P"] \arrow[r, "Q"'] & C
\end{tikzcd}$$

Esta propriedade da categoria produto significa que as projeções P e Q são "universais" entre os pares de funções para B e para C (num sentido a ser tornado preciso no próximo capítulo).

Dois functores $U : B \longrightarrow B'$ e $V : C \longrightarrow C'$ dão origem a um functor produto $U \times V : B \times C \longrightarrow B' \times C'$ que pode ser definido explicitamente nos objetos e nas setas através de

$$(U \times V)(b, c) = (Ub, Vc) \quad \text{e} \quad (U \times V)(f, g) = (Uf, Vg).$$

Em alternativa, o functor $U \times V$ pode ser descrito como o único functor que torna o seguinte diagrama comutativo;

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "U"'] & B \times C \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] \arrow[d, dashed, "U \times V"] & C \arrow[d, "V"] \\
B' & B' \times C' \arrow[l, "P'"] \arrow[r, "Q'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

O produto $\times$ é assim um par de funções: cada par de categorias (B, C) é enviado numa nova categoria $B \times C$, cada par de functores (U, V) é enviado num novo functor $U \times V$. Além disso quando as compostas $U' \circ U$ e $V' \circ V$ estão definidas, claramente se tem que $(U' \times V') \circ (U \times V) = (U' \circ U) \times (V' \circ V)$. Assim, $\times$ é ele próprio um functor

$$\times : \mathbf{Cat} \times \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

(quando restrito a categorias pequenas). Existem functores $\mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, $\mathbf{Top} \times \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$, etc, que se constroem de maneira análoga.

A nossa definição de categoria produto dá-nos, de forma quase automática, a descrição de functores $F : D \longrightarrow B \times C$ numa categoria produto. Por outro lado, functores da forma $S : B \times C \longrightarrow D$ são chamados *bifunctores* ou functores em duas variáveis. Bifunctores são bastante comuns; por exemplo, o produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é (a função objeto de) um bifunctor $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

Fixando um argumento num bifunctor S, o resultado é um functor no outro argumento. O bifunctor S fica determinado por estas duas coleções de functores numa variável da seguinte forma.

Proposição 3.1. *Sejam B, C e D três categorias. Para cada objeto $c \in C$ e $b \in B$, sejam*

$$L_c : B \longrightarrow D \quad \text{e} \quad M_b : C \longrightarrow D$$

functores tais que $M_b(c) = L_c(b)$. Existe um bifunctor $S : B \times C \longrightarrow D$ com $S(-, c) = L_c$, para todo o c e $S(b, -) = M_b$, para todo o b, se e só se para todo o par de setas $f : b \longrightarrow b'$ e $g : c \longrightarrow c'$ se tem a seguinte condição de compatibilidade

$$M_{b'}g \circ L_c f = L_{c'} f \circ M_b g.$$

Esta equação define a função seta $S(f, g)$ no par (f, g), onde f é uma seta de B e g é uma seta de C.

Demonstração — A condição de compatibilidade do enunciado pode ser mais facilmente visualizada através do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
L_c b & \xrightarrow{\quad L_c f \quad} & L_c b' = M_{b'} c & \xrightarrow{\quad M_{b'} g \quad} & M_{b'} c' \\
\| & & & & \| \\
M_b c & \xrightarrow{\quad M_b g \quad} & M_b c' = L_{c'} b & \xrightarrow{\quad L_{c'} f \quad} & L_{c'} b'
\end{array}$$

Escrevendo b, b', c e c' para as correspondentes setas identidade, a definição de composição em $B \times C$ mostra que:

$$(b', g) \circ (f, c) = (b' f, gc) = (f, g) = (fb, c' g) = (f, c') \circ (b, g).$$

Aplicando o functor S a esta equação obtemos a igualdade

$$S(b', g) S(f, c) = S(f, c') S(b, g),$$

que reescrita como diagrama comutativo fica

$$\begin{tikzcd}
S(b,c) \arrow[r, "S(b,g)"] \arrow[d, "S(f,c)"'] \arrow[dr, dashed, "S(f,g)"] & S(b,c') \arrow[d, "S(f,c')"] \\
S(b',c) \arrow[r, "S(b',g)"'] & S(b',c')
\end{tikzcd}$$

Esta é a condição de compatibilidade reescrita de outra forma, pelo que se conclui que tal condição é necessária.

Reciprocamente, dadas as coleções L_c e M_b como no enunciado, o diagrama acima define $S(f,g)$ para todo o par de setas (f,g). Deixamos ao cuidado do leitor verificar que a condição de compatibilidade garante que S é, de facto, um bifunctor.

$\square$

Podemos também formar produtos de três ou mais categorias e combinar a construção de categoria produto com categoria oposta. Existe um isomorfismo evidente entre $(B\times C)^{op}$ e $B^{op}\times C^{op}$. Um functor $B^{op}\times C \longrightarrow D$ é chamado um bifunctor contravariante em B e covariante em D com valores em D.

Vamos agora considerar transformações naturais entre bifunctores $S, S' : B\times C \longrightarrow D$. Seja α uma função que associa a cada par de objetos $b \in B$ e $c \in C$ uma seta

$$\alpha(b,c) : S(b,c) \longrightarrow S'(b,c)$$

em D. Dizemos que α é *natural em* B se para cada $c \in C$, as componentes $\alpha(b,c)$, para todo o $b \in$ B,

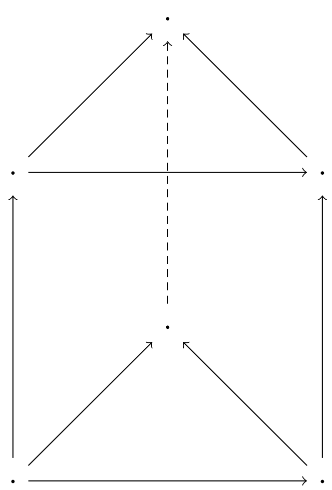
$$\alpha(-,c) : S(-,c) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} S'(-,c)$$

definem uma transformação natural entre functores $B \longrightarrow D$. Analogamente se define α *natural em* C.

A proposição seguinte é muito simples mas bastante útil.

Proposição 3.2. *Para os functores S, S', a função α estabelecida acima define uma transformação natural de (bi)functores $S \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} S'$ se e só α é natural em B e α é natural em C.*

A categoria produto pode ser vizualizada no caso $C \times \mathbf{2}$, onde $\mathbf{2}$ é a categoria com dois elementos e uma seta não identidade $0 \longrightarrow 1$. Explicitamente $C \times \mathbf{2}$ consiste em duas cópias de C, $C \times 0$ e $C \times 1$, com setas "ligando" uma cópia à outra. Para $C = \mathbf{3}$, temos a seguinte figura (onde as setas "diagonais" são omitidas).



$C \times 1$

$C \times 0$

Temos functores $T_0, T_1 : C \longrightarrow C \times \mathbf{2}$ (chamados "base" e "topo", respectivamente), definidos para cada seta f de C como $T_0 f = (f, 0)$ e $T_1 f = (f, 1)$. Se $\downarrow$ denota a seta $0 \longrightarrow 1$ de $\mathbf{2}$, podemos definir uma transformação natural entre $T_0, T_1 : C \longrightarrow C \times \mathbf{2}$ através de

$$\mu : T_0 \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} T_1, \quad \mu(c) = (c, \downarrow)$$

para todo o objeto c. Esta transformação envia a "base" no "topo" e é claramente natural[2]. Chamamos a μ a *transformação natural universal* de C pela seguinte razão: dada qualquer transformação natural $\tau : S \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} T$ entre dois functores $S, T : C \longrightarrow B$, existe um único functor $F : C \times \mathbf{2} \longrightarrow B$ com $F\mu c = \tau c$, para qualquer objeto c. Especificamente, dada uma seta $f : c \longrightarrow c'$,

$$F(f, 0) = Sf, \quad F(f, 1) = Tf, \quad F(f, \downarrow) = Tf \circ \tau c = \tau c' \circ Sf.$$

Podemos verificar facilmente que estas leis definem um bifunctor $C \times \mathbf{2} \longrightarrow B$ e que $F\mu = \tau$. Esquematicamente temos o seguinte:

$$(f, \downarrow) : (c, 0) \longrightarrow (c', 1), \qquad F(f, \downarrow) : (Sc, 0) \longrightarrow (Tc', 1),$$

pelo que temos duas possibilidades para definir a seta $F(f, \downarrow)$:

$$(Sc, 0) \xrightarrow{(Sf, \downarrow)} (Sc', 1) \xrightarrow{(\tau_{c'}, 1)} (Tc', 1)$$

$$(Sc, 0) \xrightarrow{(\tau_c, 0)} (Tc, 0) \xrightarrow{(Tf, \downarrow)} (Tc', 1)$$

O facto de τ ser uma transformação natural garante que as duas possibilidades acima produzem a mesma seta, pelo que o functor F está bem definido.

3.4 Categorias de functores

Dadas categorias C e B, consideremos todos os functores $R, S, T, \cdots : C \longrightarrow B$. Se $\sigma : R \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} S$ e $\tau : S \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} T$ são duas transformações naturais, as coleções σc e τc, para cada $c \in C$, definem setas $(\tau \cdot \sigma)(c) = \tau c \circ \sigma c$, que são as componentes de uma transformação natural $\tau \cdot \sigma : R \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} T$.

Para mostrar que $\sigma \cdot \tau$ é natural basta observar que o seguinte diagrama

[2] É intuitivamente claro que não existe nenhuma transformação natural $T_1 \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} T_0$.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dd, "f"'] & & Rc \arrow[rr, "\sigma c"] \arrow[rrrr, bend left, "(\tau\cdot\sigma)(c)"] \arrow[dd, "Rf"] & & Sc \arrow[rr, "\tau c"] \arrow[dd, "Sf"] & & Tc \arrow[dd, "Tf"] \\
& & & & & & \\
c' & & Rc' \arrow[rr, "\sigma c'"] \arrow[rrrr, bend right, "(\tau\cdot\sigma)(c')"'] & & Sc' \arrow[rr, "\tau c'"] & & Tc'
\end{tikzcd}$$

é claramente comutativo, uma vez que cada um dos retângulos é comutativo. Esta composição de funções é associativa e para cada functor T existe uma identidade, a tranformação natural $1_T : T \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} T$ com componentes $(1_T)c = 1_{Tc}$. Assim, podemos construir formalmente a categoria functor

$$B^C := \mathrm{Funct}(C, B)$$

cujos objetos são functores $T : C \longrightarrow B$ e as setas são tranformações naturais entre dois functores. Por vezes escrevemos $\mathrm{Nat}(S,T)$ em vez de $B^C(S,T)$ para o conjunto seta

$$\{\tau |\, \tau : S \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} T \text{ natural }\}.$$

Vejamos agora alguns exemplos. Se B e C são conjuntos (vistos como categorias discretas, isto é, categorias onde só existem setas identidade) então B^C também é um conjunto, isto é, uma categoria discreta: o conjunto de todas as funções $C \longrightarrow B$. No caso particular de $B = \{0,1\}$, um conjunto com dois elementos, então $\{0,1\}^C$ é isomorfo a $\mathcal{P}(C)$, o conjunto das partes de C. A categoria discreta $\{0,1\}^C$ é a categoria das funções caracteristicas de C, pelo que um isomorfismo entre $\{0,1\}^C$ e $\mathcal{P}(C)$ é dado pela correspondência $f \longmapsto f^{-1}(\{1\})$.

Para qualquer categoria B temos que $B^{\mathbf{1}}$ é naturalmente isomorfa a B. A categoria $B^{\mathbf{2}}$ é a chamada categoria das setas de B. Cada objeto de $B^{\mathbf{2}}$, isto é, cada functor $F : \mathbf{2} \longrightarrow B$ corresponde à escolha de uma seta em B com domínio $F0$ e codomínio $F1$. Uma seta entre functores F e G nesta categoria corresponde assim a uma transformação natural

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & F0 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "F(\downarrow)"'] & G0 \arrow[d, "G(\downarrow)"] \\
1 & F1 \arrow[r, "k"'] & G1
\end{tikzcd}$$

ou seja, a um par de setas (h,k) em B tal que o diagrama acima comuta.

4 Universalidade e limites

4.1 Setas universais

Definição 4.1. *Se $S : D \longrightarrow C$ é um functor e c um objeto de C, uma* seta universal *de c para S é um par (r, u) consistindo de um objeto r de D e de uma seta $u : c \longrightarrow Sr$ de C tal que para todo o par (d, f) com d um objeto de D e $f : c \longrightarrow Sd$ uma seta de C, existe uma única seta $f' : r \longrightarrow d$ em D tal que $Sf' \circ u = f$.*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & Sr \arrow[d, dashed, "Sf'"] \\ & Sd \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} r \arrow[d, dashed, "f'"] \\ d \end{tikzcd}$$

Um exemplo bastante familiar é o das bases de espaços vetoriais. Seja $\mathbf{Vect}_K$ a categoria de todos os espaços vetoriais sobre um corpo K fixo e cujas setas são as transformações lineares entre dois espaços vetoriais. Consideremos o functor de esquecimento

$$U : \mathbf{Vect}_K \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Para qualquer conjunto X existe um espaço vetorial V_X tal que X é uma base de V_X, consistindo do conjunto de todas as K-combinações lineares formações de elementos de X. Note-se que a função que envia cada $x \in X$ em x visto como um vetor de X é simplesmente a seta $j : X \longrightarrow U(V_X)$ em **Set**. Para qualquer outro espaço vetorial W, sabemos (de álgebra linear) que dada qualquer função $f : X \longrightarrow U(W)$ esta pode ser extendida unicamente a uma transformação linear $f' : V_X \longrightarrow W$, verificando $Uf' \circ j = f$. Isto significa que j é uma seta universal de X para U.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & U(V_X) \arrow[d, dashed, "Uf'"] \\ & U(W) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V_X \arrow[d, dashed, "f'"] \\ W \end{tikzcd}$$

A ideia de universalidade é muitas vezes expressa em termos de *elementos universais*. Se D é uma categoria e $H : D \longrightarrow \mathbf{Set}$ um functor, um *elemento universal* do functor H é um par (r, e) consistindo de um objeto $r \in D$ e um elemento $e \in Hr$ tal que para qualquer par (d, x) com $x \in Hd$ existe uma única seta $f : r \longrightarrow d$ de D tal que $(Hf)e = x$.

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r, "H"] \arrow[d, dashed, "f"] & Hr \arrow[d, dashed, "Hf"] & \{*\} \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "||"] \\ d \arrow[r, "H"] & Hd & \{*\} \arrow[l, "x"'] \end{tikzcd}$$

Um exemplo típico é o das relações de equivalência. Consideremos E uma relação de equivalência no conjunto S, o conjunto S/E das classes de equivalência de S relativamente a E e a projeção $p : S \longrightarrow S/E$ que envia cada $s \in S$ na sua classe de equivalência $[s]_E$. Temos a seguinte propriedade bem conhecida: se $f : S \longrightarrow X$ é tal que $fs = fs'$ sempre que sEs' então f induz uma função $f' : S/E \longrightarrow X$, isto é, f pode ser escrita como uma composta $f = f' \circ p$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & S/E \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Isto significa que $(S/E, p)$ é um elemento universal para o functor H : **Set** $\longrightarrow$ **Set** que a cada conjunto X associa o conjunto HX de todas as funções $f : S \longrightarrow X$ tais que $f(s) = f(s')$ se sEs'.

A noção elemento universal é um caso especial da noção seta universal. Se $*$ for um conjunto singular então qualquer elemento $e \in Hr$ pode ser encarado como uma seta $e : * \longrightarrow Hr$ em **Set**. Portanto um elemento universal (r, e) para H é exatamente uma seta universal de $*$ para H.

O recíproco também é verdade mas neste caso é necessário modificar o functor, como se segue. Admitindo que C tem conjuntos de setas pequenos, isto é, os conjuntos

$$C(a, b) = \{f | f : a \longrightarrow b\}$$

são conjuntos pequenos, a noção seta universal é um caso especial da noção elemento universal. Se $S : D \longrightarrow C$ é um functor e $c \in C$ é um objeto, então $(r, u : c \longrightarrow Sr)$ é uma seta universal de C para o functor S se e só se o par $(r, u \in C(c, Sr))$ é um elemento universal para o functor $H = C(c, S-)$ (note que c está fixo). Este functor atua em objetos e setas de D através de

$$d \longmapsto C(c, Sd), \qquad h \longmapsto C(c, Sh).$$

Até ao momento tratamos do conceito de seta universal de $c \in C$ para $S : D \longrightarrow C$. Existe também o conceito recíproco.

Definição 4.2. *Uma seta universal de S para $c \in C$ é um par (r, v) consistindo de um objeto $r \in D$ e uma seta $v : Sr \longrightarrow c$, tal que para todo o par (d, f) com $f : Sd \longrightarrow c$ existe uma única seta $f' : d \longrightarrow r$ com $f = v \circ Sf'$, tal como no seguinte diagrama comutativo.*

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, dashed, "f'"] & & Sd \arrow[d, dashed, "Sf'"'] \arrow[dr, "f"] & \\ r & & Sr \arrow[r, "v"'] & c \end{tikzcd}$$

Vejamos finalmente que o produto cartesiano é um "universal". Consideremos as projeções $p : a \times b \longrightarrow a$ e $q : a \times b \longrightarrow b$ de um produto numa categoria C (onde C é, por exemplo, **Grp**, **Set**, **Cat**, ...). Como sabemos, dadas funções $f : c \longrightarrow a$ e $g : c \longrightarrow b$ existe uma única função $h : c \longrightarrow a \times b$ com $ph = f$ e $qh = g$, como no seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd} a & a \times b \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & b \\ & c \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Para tornar esta construção numa seta universal, vamos introduzir o functor diagonal $\Delta : C \longrightarrow C \times C$ com $\Delta c = (c, c)$. Temos que o par (f, g) é uma seta $\Delta c \longrightarrow (a, b)$ em $C \times C$ e (p, q) é uma seta universal de Δ para (a, b). Em termos de diagramas:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, dashed] & \Delta c \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "{(f,g)}"] & \\ a \times b & \Delta(a \times b) \arrow[r, "{(p,q)}"'] & (a, b) \end{tikzcd}$$

4.2 O lema de Yoneda

Nesta secção vamos ver como a noção de universalidade pode ser formulada em termos de conjuntos seta.

Proposição 4.3. *Para um functor $S : D \longrightarrow C$ o par $(r, u : c \longrightarrow Sr)$ é universal de c para S se e só se a função que envia $f' : r \longrightarrow d$ em $Sf' \circ u : c \longrightarrow Sd$ é uma bijeção de conjuntos de setas*

$$D(r, d) \xrightarrow{\simeq} C(c, Sd).$$

Estas bijeções definem um isomorfismo natural entre functores $D(r, -) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} C(c, S-)$. Reciprocamente dados r em D e c em C, qualquer isomorfismo natural

$$D(r, -) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} C(c, S-)$$

é determinado pela única seta $u : c \longrightarrow Sr$ tal que (r, u) é universal de c para S.

Demonstração — Observemos os dois esquemas abaixo:

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, dashed, "f'"] \\ d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & Sr \arrow[d, dashed, "Sf'"] \\ & Sd \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{ccc} D(r,d) & \xrightarrow{\quad\xi\quad} & C(c,Sd) \\ [f' : r \longrightarrow d] & \longmapsto & [Sf' \circ u : c \longrightarrow Sr \longrightarrow Sd] \end{array}$$

Dizer que (r,u) é universal é dizer que existe uma única seta $f' : r \longrightarrow d$ tal que $Sf' \circ u = f$, para cada seta $f : c \longrightarrow Sr$. Ora isto é exatamente o mesmo que dizer que ξ é uma bijeção. Vejamos agora que a coleção ξ_d é natural em d. Consideremos a seta $g' : d \longrightarrow d'$. O diagrama

$$\begin{tikzcd} D(r,d) \arrow[r, "Sf' \circ u"] \arrow[d, "g'"'] & C(c,Sd) \arrow[d, "Sg'"] \\ D(r,d') \arrow[r, "S(g'f') \circ u"'] & C(c,Sd') \end{tikzcd}$$

é comutativo se e só se $S(g'f') \circ u = Sg' \circ (Sf' \circ u)$. Mas isto é verdade pela functorialidade (covariante) de S e pela associatividade da composição de setas.

Reciprocamente, suponhamos que temos um isomorfismo natural

$$D(r,-) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} C(c,S-).$$

Este isomorfismo natural produz, para cada $d \in D$, uma bijeção

$$\xi_d : D(r,d) \to C(c,Sd).$$

Em particular, fazendo $d = r$, a identidade $1_r \in D(r,r)$ é enviada atraves de ξ_r numa seta $u : c \longrightarrow Sr$ em C. Para qualquer seta $f' : d \longrightarrow d$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} D(r,r) \arrow[r, "\xi_r"] \arrow[d, "f'"'] & C(c,Sr) \arrow[d, "Sf'"] \\ D(r,d) \arrow[r, "\xi_d"'] & C(c,Sd) \end{tikzcd}$$

é comutativo porque ξ é natural. Mas neste diagrama 1_r é enviada (direita, baixo) em $Sf' \circ u$ e também em (baixo, direita) $\xi_d(f')$. Como ξ_d é uma bijeção, isto significa que cada $f : c \longrightarrow S_d$ é da forma $f = Sf' \circ u$, para uma única seta f'. Mas isto significa precisamente que o para (r, u) é universal de c para S.

$\square$

Observação: Na proposição acima os functores $D(r, S-)$ e $C(c, S-)$ são functores $D \longrightarrow \mathbf{Set}$.

A partir de agora vamos assumir que a categoria D tem conjuntos seta pequenos.

Definição 4.4. *Uma* representação *de um functor* $K : D \longrightarrow \mathbf{Set}$ *é um par* (r, ψ) *com* r *um objeto de* D *e*

$$\psi : D(r, -) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} K$$

um isomorfismo natural. O objeto r *é chamado o objeto representativo. O functor* K *diz-se representável se tal representação existe.*

A menos de isomorfismo, um functor representável é simplesmente um functor da forma $D(r, -) : D \longrightarrow \mathbf{Set}$.

Proposição 4.5. *Seja* $*$ *um conjunto singular e* D *uma categoria. Se o par* $(r, u : * \longrightarrow Kr)$ *é uma seta universal de* $*$ *para* $K : D \longrightarrow \mathbf{Set}$*, então a função* ψ *que, para cada objeto* d *de* D*, envia a seta* $f' : r \longrightarrow d$ *em* $(Kf')(u*) \in Kd$ *é uma representação de* K*. Toda a representação de* K *é obtida desta forma a partir de uma tal seta universal.*

Demonstração — Dada a seta universal u, a correspondência $f' \longmapsto K(f')(u(*))$ é uma representação. Dada a representação $\psi : D(r, -) \simeq K$, ψ_r envia $1 : r \longrightarrow r$ num elemento de Kr, que é um elemento universal, logo uma seta universal $* \longrightarrow Kr$.

$\square$

Observamos que cada uma das noções "seta universal", "elemento universal" e "functor representável" subsume as outras duas. Assim, uma seta universal de c para $S : D \longrightarrow C$ dá origem a uma isomorfismo natural $D(r, d) \simeq C(c, Sd)$ e, portanto, a uma representação do functor $C(s, S-) : D \longrightarrow \mathbf{Set}$ e também a um elemento universal do mesmo functor.

O argumento principal das duas proposições anteriores assenta na observação que cada transformação natural $\varphi : D(r, -) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} K$ fica completamente determinada pela imagem através de φ_r da seta identidade $1 : r \longrightarrow r$. Este facto pode ser enunciado mais formalmente como se segue.

Lema 4.6 (Yoneda)**.** *Seja* D *uma categoria e* $K : D \longrightarrow \mathbf{Set}$ *um functor de* D *para* **Set** *e* r *um objeto em* D*. Existe uma bijeção*

$$\gamma : \mathrm{Nat}(D(r, -), K) \longrightarrow Kr$$

que envia cada transformação natural $\alpha : D(r, -) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} K$ *em* $\alpha_r 1_r$*, isto é, na imagem da seta identidade* $r \longrightarrow r$*.*

Demonstração — A demonstração deste facto assenta no seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
r \arrow[d, "f"'] \\
d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D(r,r) \arrow[r, "\alpha_r"] \arrow[d, "{D(r,f)}"'] & Kr \arrow[d, "Kf"] \\
D(r,d) \arrow[r, "\alpha_d"'] & Kd
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_r \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & u \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto] & \alpha_d f = Kf(u)
\end{tikzcd}
$$

O diagrama significa que cada transformação natural fica determinada pela escolha de $\alpha_r(1_r) \in Kd$; para cada d, $\alpha_d f = Kf(1_r)$.

$\square$

Corolário 4.7. *Temos o seguinte isomorfismo*

$$\mathrm{Nat}(D(r,-), D(s,-)) \simeq D(s,r),$$

ou seja, cada tranformação natural $D(r,-) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D(s,-)$ *fica completamente determinada pela escolha de uma seta* $s \longrightarrow r$*.*

A função γ do lema de Yoneda é natural em K e em r. Para formalizar esta afirmação, é necessário considerar K como um objeto na categoria functor $\mathbf{Set}^D$, ver tanto o domínio como o codomínio da função γ como functores do par (K, r) e considerar este par como um objeto na categoria $\mathbf{Set}^D \times D$. O codomínio de γ é o functor avaliação E, que envia cada par (K, r) em Kr; o domínio é um functor N que envia cada objeto (K, r) no conjunto $\mathrm{Nat}(D(r,-), K)$ de todas as transformações naturais e que envia cada par de setas (F, f) com $F : K \longrightarrow K'$ e $f : r \longrightarrow r'$ em $\mathrm{Nat}(D(f,-), F)$. Com estas observações temos provada de imediato uma adenda ao lema de Yoneda.

Lema 4.8. *A bijeção* γ *é um isomorfismo natural* $\gamma : N \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} E$ *entre os functores* $E, N : \mathbf{Set}^D \times D \longrightarrow \mathbf{Set}$*.*

A função objeto $r \longmapsto D(r,-)$ e a função seta

$$(f : s \longrightarrow r) \longmapsto D(f,-) : D(r,-) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D(s,-)$$

definem um functor completo e fiel

$$Y : D^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}^D$$

a que se chama o functor de Yoneda. Dualizando temos o functor (fiel e completo)

$$Y^* : D \longrightarrow \mathbf{Set}^{D^{op}}$$

que envia cada seta $f : s \longrightarrow r$ na transformação natural

$$D(-,f) : D(-,s) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} D(-,r) : D^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Concluindo, podemos ver qualquer categoria D como uma subcategoria de uma categoria functor adequada[3].

[3] Compare esta afirmação com o Teorema de Cayley da Teoria de Grupos.

4.3 Produtos, coprodutos, limites e colimites

Na secção 3.3 e, mais tarde, na secção 4.1 vimos pormenorizadamente a construção produto numa categoria. Vejamos agora a noção dual, isto é, a noção de coproduto.

Coprodutos.

Recorde que para qualquer categoria C temos definido o functor diagonal $\Delta : C \longrightarrow C \times C$. Uma seta universal de um objeto (a,b) de $C \times C$ para o functor Δ é chamada um diagrama coproduto. Um diagrama coproduto consiste, assim, de um objeto $c \in C$ e uma seta $(a, b) \longrightarrow \Delta c = (c, c)$ de $C \times C$, isto é, um par de setas $i : a \longrightarrow c$ e $j : b \longrightarrow c$ de a e b num codomínio comum c.

Este par tem a propriedade universal seguinte: para qualquer outro par de setas $f : a \longrightarrow d$ e $g : b \longrightarrow d$, existe uma única seta $h : c \longrightarrow d$ tal que $f = hi$ e $g = hj$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & a \amalg b \arrow[d, dashed, "h"'] & b \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

Quando tal diagrama existe o objeto c é único (a menos de isomorfismo em C), escreve-se $c = a \amalg b$ e chama-se a c o objeto coproduto. O diagrama coproduto representa-se

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i"] & a \amalg b & b \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd}$$

e as setas i e j são chamadas as injeções do produto.

Observe que a associação $(f, g) \longmapsto h$ é uma bijeção de conjuntos seta

$$C(a, d) \times C(b, d) \simeq C(a \amalg b, d)$$

natural em d com inversa $h \longmapsto (hi, hj)$. Se todo o par de objetos $a, b \in C$ tem um coproduto então escolhendo um coproduto para cada para de objetos, o coproduto

$$\amalg : C \times C \longrightarrow C$$

é um bifunctor, com $h \amalg k$ definido para setas

$$h : a \longrightarrow a' \qquad \text{e} \qquad k : b \longrightarrow b'$$

como sendo a única seta $h \amalg k : a \amalg b \longrightarrow a' \amalg b'$ tal que $(h \amalg k)i = i'h$ e $(h \amalg k)j = j'k$.

Por exemplo, na categoria **Set**, $a \amalg b$ é a união disjunta dos conjuntos a e b. Em **Ab** e **Vct**, o coproduto de a e b é a soma direta $a \oplus b$. Numa pré-ordem P, o supremo $a \vee b$ de dois elementos a e b, caso exista, é um elemento com as seguintes propriedades:

(i) $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$ e (ii) $a \leq c$ e $b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$. Isto significa que $a \vee b$ é o coproduto de a e b em P, vista como uma categoria.

Núcleos e cónucleos.

Seja C uma categoria com um objeto nulo z, isto é, um objeto que é simultaneamente inicial e terminal. Assim, para quaisquer dois objetos x e y existe uma seta

$$0_{xy} : x \longrightarrow z \longrightarrow y$$

denominada a seta nula de x para y.

O núcleo de uma seta $f : a \longrightarrow b$ é uma seta $u : k \longrightarrow a$ tal que:

(i) $fu = 0_{kb}$;

(ii) se $h : c \longrightarrow a$ é tal que $fh = 0_{cb}$ então h fatoriza através de u, isto é, $h = uh'$ para uma única seta $h' : c \longrightarrow k$.

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[d, "h"] & \\
k \arrow[r, "u"] & a \arrow[r, "f"] & b
\end{tikzcd}$$

Em **Grp**, o núcleo de uma seta $f : A \longrightarrow B$ corresponde ao núcleo usual de um homomorfismo de grupos, isto é, $K = \{a \in A : f(a) = e_B\}$.

O conúcleo de uma seta $f : a \longrightarrow b$ é uma seta $v : b \longrightarrow l$ tal que:

(i) $vf = 0_{al}$;

(ii) se $h : b \longrightarrow c$ é tal que $hf = 0_{ac}$ então h fatoriza através de v, isto é, $h = h'v$ para uma única seta $h' : l \longrightarrow c$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "v"] \arrow[d, "h"] & l \arrow[dl, dashed, "h'"] \\
 & c &
\end{tikzcd}$$

Em **Ab**, o conúcleo de uma seta $f : A \longrightarrow B$ corresponde ao conúcleo usual de um homomorfismo de grupos abelianos, isto é, $L = B/f(A)$.

Equalizadores e coequalizadores.

Uma vez que núcleos e conúcleos só estão definidos para categorias com objeto nulo, generalizamos estes conceitos para categorias mais gerais.

Sejam $f, g : a \rightrightarrows b$ duas setas paralelas numa categoria C. Um equalizador do par (f, g) é uma seta $u : e \longrightarrow a$ tal que:

(i) $fu = gu$;

(ii) se $h : c \longrightarrow a$ é tal que $fh = gh$ então $h = uh'$ para uma única seta $h' : c \longrightarrow e$.

$$\begin{tikzcd} & & c \arrow[d, "h"] \arrow[dll, dashed, "h'"'] & \\ e \arrow[rr, "u"] & & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

Numa categoria com objeto nulo, o nucleo $f : a \longrightarrow b$ é simplesmente o equalizador de $f, 0_{ab} : a \longrightarrow b$. Na categoria **Grp** ou **Set**, o equalizador de dois homomorfismos de grupos ou duas funções (resp.) corresponde à inclusão em A do subgrupo ou conjunto (resp.) $E = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$.

Sejam $f, g : a \rightrightarrows b$ duas setas paralelas numa categoria C. Um coequalizador do par (f, g) é uma seta $u : b \longrightarrow e$ tal que:

(i) $uf = ug$;

(ii) se $h : b \longrightarrow c$ é tal que $hf = hg$ então $h = h'u$ para uma única seta $h' : e \longrightarrow c$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"] & e \arrow[dl, dashed, "h'"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

Numa categoria com objeto nulo, o cónucleo $f : a \longrightarrow b$ é simplesmente o coequalizador de $f, 0_{ab} : a \longrightarrow b$. Na categoria **Ab**, o coequalizador de dois homomorfismos de grupos abelianos corresponde à projeção $B \longrightarrow B/(f-g)A$. Na categoria **Set** o coequalizador de duas funções $f, g : X \longrightarrow Y$ é a projeção $p : Y \longrightarrow Y/\sim$ onde $\sim$ é a menor relação de equivalência em $Y \times Y$ que contém (fx, gx), para cada $x \in X$.

Pullbacks e pushouts.

Seja C uma categoria. Consideremos um par de setas $f : b \longrightarrow a$ e $g : c \longrightarrow a$ com um codomínio comum a, o *pullback* de (f, g) é um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

tal que para qualquer outro diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & c \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

existe uma única seta $t : e \longrightarrow d$ tal que $k = tq$ e $h = pt$.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "f"] & & a & & c \arrow[ll, "g"'] \\
& & d \arrow[llu, "p"] \arrow[rru, "q"'] & & \\
& & e \arrow[u, dashed, "t"] \arrow[lluu, "h"] \arrow[rruu, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Seja C uma categoria. Consideremos um par de setas $f : a \longrightarrow b$ e $g : a \longrightarrow c$ com um domínio comum a, o *pushout* de (f, g) é um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "u"] \\
c \arrow[r, "v"'] & r
\end{tikzcd}$$

tal que para qualquer outro diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "h"] \\
c \arrow[r, "k"'] & s
\end{tikzcd}$$

existe uma única seta $t : r \longrightarrow s$ tal que $tu = h$ e $tv = k$.

$$\begin{tikzcd}
c & a \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "f"] & b \arrow[dl, "u"'] \arrow[ddl, "h"] \\
& r \arrow[d, dashed, "t"] & \\
& s &
\arrow[from=1-1, to=2-2, "v"]
\arrow[from=1-1, to=3-2, "k"']
\end{tikzcd}$$

Limites e colimites.
Sejam C e J duas categorias e $F : J \longrightarrow C$ um functor. O *limite* de F, também designado por *limite inverso* ou *limite projetivo*, denotado por $\mathrm{Lim}F$ ou $\varprojlim F$ consiste de um objeto $r \in C$ e uma coleção de setas $\nu_i : r \longrightarrow F_i$, para cada $i \in J$, verifcando $\nu_j = Fu\nu_i$, para toda a seta $u : i \longrightarrow j$ de J

$$\begin{tikzcd}
& r \arrow[dl, "\nu_i"'] \arrow[d, "\nu_j"] \\
Fi \arrow[r, "Fu"'] & Fj
\end{tikzcd}$$

chamado o *cone universal* sob r (também designado por alguns autores por cocone), tal que para qualquer outro cone (c, σ_i) existe uma única seta $t : c \longrightarrow r$ verificando $\nu_i = \sigma_i t$, para todo o $i \in J$.

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[d, dashed, "t"] \\
F_i \arrow[r, "\nu_i"'] & r
\end{tikzcd}$$

Por exemplo, consideremos J como sendo o ordinal $\omega = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots\}$ e seja F o functor $F : \omega \longrightarrow \mathbf{Set}^{op}$ que envia cada seta de ω na seta oposta de uma inclusão. O functor F pode ser visto como uma sequência infinita

$$F0 \supseteq F1 \supseteq F2 \supseteq F3 \supseteq \cdots .$$

É fácil verificar que a interseção $I = \bigcap_{n \in \omega} F_n$ é o limite deste funtor.
Sejam C e J duas categorias e $F : J \longrightarrow C$ um functor. O *colimite* de F, também designado por *limite direto* ou *limite indutivo*, denotado por $\mathrm{Colim}F$ ou $\varinjlim F$ consiste de um objeto $r \in C$ e uma coleção de setas $\mu_i : Fi \longrightarrow r$, para cada $i \in J$, verifcando $\mu_j Fu = \mu_i$, para toda a seta $u : i \longrightarrow j$ de J

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "Fu"] \arrow[dr, "\mu_i"'] & F_j \arrow[d, "\mu_j"] \\ & r \end{tikzcd}$$

chamado o *cone universal* sobre r, tal que para qualquer outro cone (c, τ_i) existe uma única seta $t : r \longrightarrow c$ verificando $t\mu_i = \tau_i$, para todo o $i \in J$.

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[dr, "\tau_i"'] & r \arrow[d, dashed, "t"] \\ & c \end{tikzcd}$$

Por exemplo, consideremos J como sendo o ordinal $\omega = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots\}$ e seja F o functor $F : \omega \longrightarrow \mathbf{Set}$ que envia cada seta de ω numa inclusão. O functor F pode ser visto como uma inclusão infinita

$$F0 \subseteq F1 \subseteq F2 \subseteq F3 \subseteq \cdots .$$

É fácil verificar que a união $U = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ é o colimite deste funtor.

Observação 4.9. Cada uma das construções descritas nesta secção pode ser vista como uma seta universal de um functor numa ou para uma categoria de functores adequada, conforme bibliografia.

5 Adjuntos

5.1 Adjunções

Vamos apresentar um conceito que nos dá uma formulação alternativa das propriedades de objetos livres (espaços vectoriais, monóides livres, grupos livres...) e outras construções universais.

Como motivação vamos voltar a examinar a construção do espaço vetorial V_X de base X. Fixamos um corpo K e consideramos os functores

$$\mathbf{Vct}_K \xrightarrow{U} \mathbf{Set} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Set} \xrightarrow{V} \mathbf{Vct}_K$$

onde U é o functor de esquecimento, V é tal que $V(X) = V_X$, o conjunto de todas as combinações lineares finitas formais de elementos de X sobre K.

Recorde que cada função $g : X \longrightarrow U(W)$ pode ser extendida a uma aplicação linear $f : V(X) \longrightarrow W$, definida explicitamente por

$$f\left(\sum_i k_i x_i\right) = \sum_i k_i g(x_i).$$

Esta correspondência $g \overset{\psi}{\longmapsto} f$ tem uma inversa $f \overset{\varphi}{\longmapsto} f|_X$ (restrição de f a X) e, portanto, temos uma bijeção de conjuntos seta

$$\varphi : \mathbf{Vct}_K(V(X), W) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Set}(X, U(W)).$$

Esta bijeção $\varphi = \varphi_{X,W}$ está definida "da mesma forma" para todos os conjuntos X e todos os espaços vetoriais W. Isto significa que $\varphi_{X,Y}$ são as componentes de uma transformação natural entre dois bifunctores

$$F, G : \mathbf{Set}^{op} \times \mathbf{Vct}_K \longrightarrow \mathbf{Set}$$

tais que $F(X, W) = \mathbf{Vct}_K(V(X), W)$ e $G(X, W) = \mathbf{Set}(X, U(W))$.
Vejamos agora um exemplo na categoria **Set**. Cada função $g : S \times T \longrightarrow R$ de duas variávies pode ser tratada com uma função de uma única variável

$$\begin{array}{rccl} \varphi_g : & S & \longrightarrow & R^T \\ & s & \longmapsto & \begin{array}{rccl} g(s,-) : & T & \longrightarrow & R \\ & t & \longmapsto & g(s,t) \end{array} \end{array} .$$

Esta bijeção é natural em S, T e R. Fixando T podemos definir functores

$$F, G : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

com $F(S) = S \times T$ e $G(R) = R^T$ e, nesta caso, temos uma bijeção

$$\mathbf{Set}(F(S), R) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Set}(S, G(R))$$

natural em S e R.

Definição 5.1. *Sejam A e X duas categorias. Uma adjunção de X para A é um terno (F, G, φ) onde F e G são functores $F : X \longrightarrow A$ e $G : A \longrightarrow X$ e φ é uma função que associa a cada par de objetos, $x \in X$ e $a \in A$, uma bijeção de conjuntos*

$$\varphi := \varphi_{x,a} : A(Fx, a) \xrightarrow{\simeq} X(x, Ga)$$

que é natural em x e em a.

Na definição, $A(F-, -)$ representa o bifunctor

$$X^{op} \times A \xrightarrow{F^{op} \times Id} A^{op} \times A \xrightarrow{\text{hom}} \mathbf{Set}$$

e $X(-, G-)$ representa o bifunctor

$$X^{op} \times A \xrightarrow{Id \times G^{op}} X^{op} \times X \xrightarrow{\text{hom}} \mathbf{Set}$$

Para verificar a naturalidade de φ, basta verificar a naturalidade em x e em a separadamente. Assim a naturalidade da bijeção φ significa que para todas as setas $k : a \longrightarrow a'$ em A e $h : x' \longrightarrow x$ em X os diagramas

$$\begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi_{x,a}} & X(x, Ga) \\ {\scriptstyle k_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Gk)_*} \\ A(Fx, a') & \xrightarrow[\varphi_{x,a'}]{} & X(x, Ga') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi_{x,a}} & X(x, Ga) \\ {\scriptstyle (Fh)^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h^*} \\ A(Fx', a) & \xrightarrow[\varphi_{x',a}]{} & X(x', Ga) \end{array}$$

onde k_* é a composição com k à esquerda e k^* é a composição com k à direita, são comutativos.

Uma maneira equivalente de exprimir a naturalidade da bijeção φ é dizer que φ é uma bijeção que associa uma seta $f : Fx \longrightarrow a$ a uma outra seta $\varphi f : x \longrightarrow Ga$, de modo que as igualdades

$$\varphi(kf) = (Gk)(\varphi f) \qquad e \qquad \varphi(f(Fh)) = (\varphi f)h \tag{1}$$

se verifiquem para todas as setas $h : x' \longrightarrow x$ e $k : a \longrightarrow a'$. Isto é ainda equivalente a dizer que φ^{-1} é natural, i.e., dada a seta $g : x \longrightarrow Ga$ temos

$$\varphi^{-1}(gh) = (\varphi^{-1}g)(Fh) \qquad e \qquad \varphi^{-1}((Gk)g) = k(\varphi^{-1}g) \tag{2}$$

para todas as setas $h : x' \longrightarrow x$ e $k : a \longrightarrow a'$.

Dada uma adjunção (F, G, φ), o functor F diz-se o adjunto à esquerda de G e G diz-se o adjunto à direita de F.

Toda a adjunção produz setas universais. Mais especificamente, seja $x \in X$ e $a = Fx$, temos uma bijeção

$$\varphi_{x,Fx} : A(Fx, Fx) \xrightarrow{\simeq} X(x, GFx).$$

Observamos que $A(Fx, Fx)$ contem a seta identidade $1_{Fx} : Fx \longrightarrow Fx$ e seja $\eta_x = \varphi(1_{Fx})$. Segundo a (demonstração da) proposição 4.3, a seta

$$\eta_x : x \longrightarrow GFx$$

é uma seta universal de x para G. Observe que uma tal adjunção dá-nos uma seta universal η_x para cada objeto $x \in X$.

Além disso a função $x \longmapsto \eta_x$ define uma transformação natural $I_X \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} GF$ uma vez que todo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] \arrow[d, "h"'] & GFx' \arrow[d, "GFh"] \\
x \arrow[r, "\eta_x"'] & GFx
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Para provar a comutatividade deste diagrama podemos usar as equações (1) para mostrar que

$$(GFh) \circ \varphi(1_{Fx'}) = \varphi(Fh \circ 1_{Fx'}) = \varphi(1_{Fx} \circ Fh) = \varphi(1_{Fx}) \circ h.$$

A adjunção (F, G, φ) produz também produz setas universais de F para $a \in A$. Tomamos $x = Ga$ em

$$\varphi = \varphi_{Ga,a} : A(Ga, a) \xrightarrow{\simeq} X(Ga, Ga)$$

e consideramos a seta $\varepsilon_a = \varphi^{-1}(1_{Ga})$. Tal como no caso anterior, a seta

$$\varepsilon_a : FGa \longrightarrow a$$

é uma seta universal de F para a e, além disso, ϵ define uma transformação natural

$$\varepsilon : FG \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} I_A.$$

Para a verificação deste último facto, usem-se as equações (2).

A η e ε chamamos, respetivamente, a *unidade* e a *counidade* da adjunção.

Resumindo, o conjunto das observações anteriores provou o seguinte.

Teorema 5.2. *Uma adjunção $(F, G, \varphi) : X \longrightarrow A$ determina:*

1. *uma transformação natural $\eta : I_X \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} GF$, tal que para cada objeto x a seta η_x é universal; além disso, a adjunta à direita de cada seta $f : Fx \longrightarrow a$ é a seta*
$$\varphi f = Gf \circ \eta_x : x \longrightarrow Ga;$$
2. *uma transformação natural $\varepsilon : FG \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} I_A$, tal que para cada objeto a a seta ε_a é universal; além disso, a adjunta à esquerda de cada seta $g : x \longrightarrow Ga$ é a seta*
$$\varphi^{-1} g = \varepsilon_a \circ Fg : Fx \longrightarrow a.$$

Revisitamos o exemplo anterior em **Set**. Seja T um conjunto fixo e sejam os functores $F, G : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ tais que $F(S) = S \times T$ e $G(R) = R^T$. Dado X objeto de **Set**, a seta

$$X \longrightarrow (X \times T)^T$$

é uma seta universal de X para G. Analogamente, dado A objeto de **Set**, a seta

$$A^T \times T \longrightarrow A$$

é uma seta universal de F para A.

No teorema que se segue apresentamos uma lista de caracterizações alternativas do conceito de adjunção.

Teorema 5.3. *Toda a adjunção* $(F,G,\varphi) : X \longrightarrow A$ *fica completamente determinada por cada um dos items da seguinta lista.*

1. *Functores* F, G *e uma transformação natural* $\eta : I_X \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} GF$ *tal que cada seta* $\eta_x : x \longrightarrow GFx$ *é universal de* x *para* G. *A bijeção* φ *é definida por*

$$\varphi f = Gf \circ \eta_x : x \longrightarrow Ga$$

para cada seta $f : Fx \longrightarrow a$.

2. *Functores* F, G *e uma transformação natural* $\varepsilon : FG \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} I_A$ *tal que cada seta* $\varepsilon_a : FGa \longrightarrow a$ *é universal de* F *para* a. *A bijeção* φ^{-1} *é definida por*

$$\varphi^{-1} g = \varepsilon_a \circ Fg : Fx \longrightarrow a$$

para cada seta $g : x \longrightarrow Ga$.

3. *o functor* $G : A \longrightarrow X$ *e para cada* $x \in X$ *um objeto* $F_0 x \in A$ *e uma seta universal* $F_0 x \in A$ *e uma seta universal* $\eta_x : x \longrightarrow GF_0 x$ *de* x *para* G. *Então o functor* F *tem como função objeto* F_0 *e está definido nas setas pela igualdade*

$$(GFh)\eta_x = \eta_{x'} h.$$

4. *o functor* $F : X \longrightarrow A$ *e para cada* $a \in A$ *um objeto* $G_0 a \in X$ *e uma seta* $\varepsilon_a : FG_0 a \longrightarrow a$ *universal de* F *para* a. *Então o functor* G *tem como função objeto* G_0 *e está definido nas setas pela igualdade*

$$\varepsilon_{a'}(FGk) = k\varepsilon_a.$$

5. *Functores* F *e* G *e transformações naturais*

$$\eta : I_X \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} GF \qquad e \qquad \varepsilon : FG \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} I_A$$

tais que

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G \qquad e \qquad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

são identidades.

Observamos que as afirmações *1.* e *2.* e as afirmações *3.* e *4.* no teorema são duais e que as afirmações *3.* e *4.* são versões mais fracas de *1.* e *2.*, respetivamente. A afirmação *5.* é uma versão do conceito de adjunção sem recorrer a universalidade. Devido a *5.*, por vezes denota-se uma adjunção como $(F,G,\eta,\varepsilon) : X \longrightarrow A$.

Vejamos agora exemplos de aplicação do teorema anterior à construção de adjunções a partir de setas universais.

Seja C uma categoria onde todo o par de objetos (a,b) tem um produto. Como vimos anteriormente, isto é o mesmo que dizer que para cada par $(a,b) \in C \times C$ existe uma seta universal do functor diagonal $\Delta : C \longrightarrow C \times C$ para (a,b).

$$
\begin{tikzcd}
c \\
d \arrow[u, dashed, "f \times g"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta c \arrow[r, "{(p,g)}"] & (a,b) \\
\Delta d \arrow[u, dashed, "\Delta(f \times g)"] \arrow[ur, "{(f,g)}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
c = a \times b \\
\\
p : a \times b \longrightarrow a \\
q : a \times b \longrightarrow b
\end{array}
$$

Pelo teorema anterior podemos concluir que a função objeto $(a, b) \longrightarrow a \times b$ define um functor $P : C \times C \longrightarrow C$ que é o adjunto à direita do functor diagonal $\Delta : C \longrightarrow C \times C$. A bijeção nas setas é dada por

$$(C \times C)(\Delta c, (a, b)) \xrightarrow{\simeq} C(a, P(a, b)).$$

A unidade em c é a seta $\eta_c : c \longrightarrow P\Delta c$, isto é, a seta diagonal em c e a counidade em (a, b) é a seta $\varepsilon_{(a,b)} : \Delta P(a, b) \longrightarrow (a, b)$, isto é, um par de setas $a \longleftarrow a \times b \longrightarrow b$, nomeadamente as projeções do produto $p : a \times b \longrightarrow a$ e $q : a \times b \longrightarrow b$.

Analogamente se a categoria C tem coprodutos $(a, b) \longrightarrow a \amalg b$ então estes definem o functor coproduto

$$\amalg : C \times C \longrightarrow C$$

que é o adjunto à esquerda do functor diagonal $\Delta : C \longrightarrow C \times C$.Neste caso, temos a bijeção nas setas dada por

$$C(\amalg(a, b), c) \xrightarrow{\simeq} (C \times C)((a, b), \Delta c).$$

Os próximos dois corolários caracterizam a existência de dois functores adjuntos de um mesmo functor e a noção de adjunção em termos de functores representáveis.

Corolário 5.4. *Sejam F, F' dois functores $F, F' : X \longrightarrow A$.*

1. *Se F e F' são dois adjuntos à esquerda de $G : A \longrightarrow X$ então F e F' são naturalmente isomorfos.*

Sejam G, G' dois functores $G, G' : A \longrightarrow X$.

2. *Se G e G' são dois adjuntos à direita de $F : X \longrightarrow A$ então G e G' são naturalmente isomorfos.*

Corolário 5.5.

1. *Um functor $G : A \longrightarrow X$ tem um adjunto à esquerda se e só se para cada $x \in X$, o functor $X(x, G-)$ é representável como um functor de $a \in A$. Se*

$$\varphi : A(F_0 x, a) \xrightarrow{\simeq} X(x, Ga)$$

é uma representação deste functor, então F_0 é a função objeto de um functor F, o adjunto à esquerda de G, para o qual a bijeção φ é natural e, portanto, a adjunção de X para A.

2. *Um functor $F : X \longrightarrow A$ tem um adjunto à direita se e só se para cada $a \in A$, o functor $A(F-, a)$ é representável como um functor de $x \in X$. Se*

$$\psi : X(x, G_0 a) \xrightarrow{\simeq} A(Fx, a)$$

é uma representação deste functor, então G_0 é a função objeto de um functor G, o adjunto à esquerda de F, para o qual a bijeção ψ é natural e, portanto, ψ^{-1} é a adjunção de X para A.

Finalizamos esta subsecção com a observação fundamental seguinte.

1. Um functor $G : A \longrightarrow X$ tem adjunto à esquerda se e só se existe uma seta universal de G para x, para todo o $x \in X$.

2. Um functor $F : X \longrightarrow A$ tem adjunto à direita se e só se existe uma seta universal de a para F, para todo o $a \in A$.

5.2 Exemplos de adjuntos

Apresentamos de seguinta uma tabela de adjuntos à esquerda para functores de esquecimento típicos.

Functor de esquecimento	Adjunto à esquerda	Unidade
$U : \mathbf{Vct}_K \longrightarrow \mathbf{Set}$	$X \longrightarrow FX$ espaço vetorial de base X	$X \longrightarrow UFX$ "inserção" da base
$U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$	$X \longrightarrow FX$ grupo livre sobre X	$X \longrightarrow UFX$ "inserção" de geradores
$U : \mathbf{Mon} \longrightarrow \mathbf{Set}$	$X \longrightarrow FX$ monoide livre sobre X	$X \longrightarrow UFX$ "inserção" de geradores
$U : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$	$X \longrightarrow FX$ topologia discreta sobre X	$X \longrightarrow UFX$

Na próxima tabela apresentamos adjuntos para functores do tipo "diagonal" (que podem não existir em algumas categorias).

Functor	Adjunto	Unidade	Counidade
$\Delta : C \longrightarrow C \times C$	Esquerda: coproduto Direita: produto	par de injeções seta diagonal	seta *folding* par de projeções
$C \longrightarrow \mathbf{1}$	Esquerda: objeto inicial s Direita: objeto terminal t	 $c \longrightarrow t$	$s \longrightarrow c$
$\Delta_J : C \longrightarrow C^J$	Esquerda: objeto limite Direita: objeto limite	Cone universal 	 Cocone universal

Nota: a seta *folding* é uma seta $c \amalg c \longrightarrow c$ e a sua interpretação depende da categoria onde o coproduto está definido.