$$\boxed{\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP},\ \varphi \in \mathcal{F}^{CP}}$$

Teorema da Correção:

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

Γ é sint. consist. sse Γ é semant. consist.

Teorema da Completude:

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

Teorema da Adequação

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ sse } \Gamma \models \varphi$$

Corolário φ é um teorema de DNP
sse
φ é uma tautologia

Exercício 3.7

a) Mostre que $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

(Teorema da Correção : $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$

Corolários: ① $\Gamma \nvDash \varphi \Rightarrow \Gamma \nvdash \varphi$)

② $\nvDash \varphi \Rightarrow \nvdash \varphi$

Assim, para mostrar que uma fórmula φ não é um teorema de DNP basta mostrar que φ não é uma tautologia.

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$p_0 \wedge p_1$	$(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

$\varphi = (p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não toma sempre o valor lógico 1.

Logo, $\nvDash \varphi$, donde $\nvdash \varphi$.

Exercício 3.7

b) Mostre que $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$

(Pelo Teorema da Correção, sabemos que se $p_0 \vee p_1 \nvDash p_0 \wedge p_1$, então $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$)

Seja v uma valoração tal que $v(p_0)=1$ e $v(p_1)=0$.

Então,

$$v(p_0 \vee p_1) = 1$$

e

$$v(p_0 \wedge p_1) = 0.$$

Logo,

$$p_0 \vee p_1 \nvDash p_0 \wedge p_1$$

e, por conseguinte,

$$p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$$

OBS: Podemos, em alternativa, construir uma tabela de verdade que nos permita concluir que $p_0 \vee p_1 \nvDash p_0 \wedge p_1$

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$p_0 \wedge p_1$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Exercício 3.7

c) Mostre que $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.

(Por definição, $\Gamma = \{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente se $\Gamma \nvdash \perp$. Como consequência do Teorema da Correção, se Γ é semanticamente consistente, então Γ é sintaticamente consistente.)

Seja v a valoração dada por

$$v(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ 1 & \text{se } i \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Como $v(p_0 \vee p_1) = v(\neg p_0 \wedge p_1) = 1$, segue-se que $v \models \Gamma$.

Logo, Γ é semanticamente consistente e, portanto, Γ é sintaticamente consistente.

OBS:

	p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_0 \vee p_1$	$\neg p_0 \wedge p_1$
$v(\,)$:	0	1	1	1	1

Exercício 3.7 e)

$$(\Gamma, \varphi \vdash \psi \text{ e } \vDash \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi$$

Admitamos que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e que $\vDash \varphi$. Pelo Teorema da Correção, sabemos que $\Gamma, \varphi \vDash \psi$. Mostremos que $\Gamma \vDash \psi$.

Para tal, seja v uma valoração tal que $v \vDash \Gamma$.

Como $\vDash \varphi$, segue-se que $v(\varphi)=1$. Assim, $v \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$. Por hipótese, sabemos que $\Gamma, \varphi \vDash \psi$. Logo, $v(\psi) = 1$.

Provamos que se v é uma valoração tal que $v \vDash \Gamma$, então $v(\psi) = 1$, i.e., $\Gamma \vDash \psi$.

Pelo Teorema da Completude, $\Gamma \vdash \psi$.

CÁLCULO DE PREDICADOS DA LÓGICA CLÁSSICA

até aqui: **CÁLCULO PROPOSICIONAL**

3 ASPETOS

(1) ASPETO SINTÁTICO (conceito de fórmula)

(2) ASPETO SEMÂNTICO (valor lógico associado a uma fórmula; conceitos como tautologia, conseq. semântica, conj. consistente)

(3) SISTEMA FORMAL (abordagem alternativa)

SINTAXE & SEMÂNTICA

\# ENRIQUECER A NOSSA LÓGICA

EXEMPLO

Se um número é natural então esse número mais um é também um número natural.

Como representar? — Cálculo Proposicional

$$\underbrace{p_0}_{\text{representa o antecedente}} \rightarrow \underbrace{p_1}_{\text{representa o consequente}}$$

representação "pobre" — a relação do consequente com o antecedente não é "visível"

Precisamos de enriquecer a nossa lógica

$$\underbrace{\forall x_0}_{\text{QUANTIFICADOR}} \left(\underbrace{\text{Natural}}_{\text{PREDICADO / RELAÇÃO}} (\underbrace{x_0}_{\text{VARIÁVEL}}) \longrightarrow \text{Natural} (\underbrace{x_0 + 1}_{\text{FUNÇÃO}}) \right)$$

} FÓRMULA NO CÁLCULO DE PREDICADOS

CÁLCULO DE PREDICADOS

duas classes sintáticas

termos
(objetos do domínio de discurso)

fórmulas
(afirmações relativas aos objetos)

parametrizado por um tipo de linguagem — o tipo de linguagem fixa símbolos (usados para construir termos) de função e símbolos (usados para denotar relações elementares entre os objetos) de relação.

tipo de linguagem :

$L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$

- $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ conj. disjuntos
- $\mathcal{N} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ função

$\mathcal{F}$ — símbolos de função $\xrightarrow[\text{construir}]{\text{usados para}}$ L-termos

$\mathcal{R}$ — símbolos de relação

L-fórmulas

$\mathcal{N}$ — função aridade

$\boxed{s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}}$

$n = \mathcal{N}(s)$: aridade de s

("nº de argumentos que s espera")

s diz-se um símbolo n-ário

símbolos de função de aridade 0] — $\boxed{\text{constantes}}$ (conj. de constantes: $\mathcal{C}$)

$\boxed{L_{Arit}}$: tipo de linguagem para a Aritmética

$$L_{Arit} = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$$

$\mathcal{N}(0) = 0$

$\mathcal{N}(s) = 1$

$\mathcal{N}(+) = 2$

$\mathcal{N}(\times) = 2$

$\mathcal{N}(=) = 2$

$\mathcal{N}(<) = 2$

L: tipo de linguagem

$\boxed{\text{alfabeto } A_L}$:

a) $\perp, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$

b) $\exists, \forall$

c) $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ (variáveis de primeira ordem) conjunto: $\mathcal{V}$)

d) "(", ")", ","

e) símbolos de função e símbolos de relação de L

TERMOS DE TIPO L
(ou L-TERMOS)

$\mathcal{T}_L$: definido indutivamente sobre $(A_L)^*$ por

a) $x \in \mathcal{T}_L$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $c \in \mathcal{T}_L$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $\forall$ f símbolo de função de aridade $n \geq 1$

$$t_1 \in \mathcal{T}_L, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_L,$$

para todo $t_1, \dots, t_n \in (A_L)^*$

$\boxed{\text{VAR}:}$ $\mathcal{T}_L \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$

é definida, por recursão estrutural, por:

a) $\text{VAR}(x) = \{x\}$, $\forall x \in \mathcal{V}$

b) $\text{VAR}(c) = \emptyset$, $\forall c \in \mathcal{C}$

c) $\text{VAR}(f(t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \text{VAR}(t_i)$,

$$\forall_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \mathcal{N}(f)=n \geq 1}} \quad \forall t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$$

$\boxed{\text{subt}}$: $\mathcal{T}_L \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}_L)$

é definida, por recursão estrutural, por:

a) $\text{subt}(x) = \{x\}$, $\forall x \in \mathcal{V}$;

b) $\text{subt}(c) = \{c\}$, $\forall c \in \mathcal{C}$;

c) $\text{subt}(f(t_1, \dots, t_n)) = \{f(t_1, \dots, t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \text{subt}(t_i)$,

$$\forall_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \mathcal{N}(f)=n \geq 1}} \quad \forall t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$$

Exercício 4.1

$$L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$$

t.q. $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$

a) O conjunto dos termos de tipo L, $\mathcal{T}_L$, é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$

(2) $0 \in \mathcal{T}_L$

(3) $t \in \mathcal{T}_L \Rightarrow f(t) \in \mathcal{T}_L$, para todo $t \in (\mathcal{A}_L)^*$

(4) $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L \Rightarrow g(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_L$, para todo $t_1, t_2 \in (\mathcal{A}_L)^*$

Exercício 4.1 $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$

onde $\mathcal{N}(0)=0$, $\mathcal{N}(f)=1$, $\mathcal{N}(g)=2$ e $\mathcal{N}(R)=2$

b) Quais das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$ são termos de tipo L?

OBS T_L é definido indutivamente por

(1) $x_i \in T_L$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

(2) $0 \in T_L$;

(3) $t \in T_L \Rightarrow f(t) \in T_L$, para todo $t \in (\mathcal{A}_L)^*$;

(4) $t_1, t_2 \in T_L \Rightarrow g(t_1, t_2) \in T_L$, para todo $t_1, t_2 \in (\mathcal{A}_L)^*$.

(i) $0 \in T_L$ pela regra (2)

(ii) $f(0) \in T_L$ pois

(I) $0 \in T_L$ pela regra (2)

(II) $f(0) \in T_L$ por (I) e pela regra (3)

(iii) $f(1) \notin T_L$ pois $1 \notin \mathcal{A}_L$

(iv) $g(f(x_1, x_0), x_0) \notin T_L$ pois teríamos de ter $f(x_1, x_0) \in T_L$ ou $f(x_1 \in T_L$ e $x_0), x_0 \in T_L$, o que não acontece.

(v) $g(x_0, f(x_1)) \in T_L$ pois:

(I) $x_0 \in T_L$ pela regra (1)

(II) $x_1 \in T_L$ pela regra (1)

(III) $f(x_1) \in T_L$ pela regra (3) e por (II)

(IV) $g(x_0, f(x_1)) \in T_L$ pela regra (4) e por (I) e (III).

(vi) $R(x_0, x_1) \notin T_L$ pois $R \notin \mathcal{F}$ ($R \in \mathcal{R}$).

Exercício 4.1

c) $VAR(t)$: conjunto das variáveis que ocorrem no L-termo t

i) $VAR(0) = \emptyset$

ii) $VAR(g(x_1, f(x_1))) = VAR(x_1) \cup VAR(f(x_1))$
$= \{x_1\} \cup VAR(x_1)$
$= \{x_1\} \cup \{x_1\} = \{x_1\}$.

iii) $VAR(g(x_1, x_2)) = VAR(x_1) \cup VAR(x_2)$
$= \{x_1\} \cup \{x_2\}$
$= \{x_1, x_2\}$.

iv) $VAR(g(x_1, g(x_2, x_3))) = VAR(x_1) \cup VAR(g(x_2, x_3))$
$= \{x_1\} \cup VAR(x_2) \cup VAR(x_3)$
$= \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\}$
$= \{x_1, x_2, x_3\}$

Exercício 4.1

d)

subt (t) : conjunto dos subtermos do L-termo t

(1) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

(2) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

(3) $subt(f(t_1,\dots,t_n)) = \{f(t_1,\dots,t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} subt(t_i)$

$(f \in \mathcal{F},\ \mathcal{N}(f) = n \geq 1)$

(i)

$$subt(0) = \{0\}$$

(ii) $subt(g(x_1, f(x_1))) = \{g(x_1, f(x_1))\} \cup subt(x_1) \cup$

$\cup\ subt(f(x_1)) = \{g(x_1, f(x_1))\} \cup \{x_1\} \cup$

$\cup \{f(x_1)\} \cup subt(x_1) = \{g(x_1, f(x_1)),$

$x_1, f(x_1)\} \cup \{x_1\} = \{g(x_1, f(x_1)), x_1, f(x_1)\}$

(iii) $subt(g(x_1,x_2)) = \{g(x_1,x_2)\} \cup subt(x_1) \cup subt(x_2)$

$= \{g(x_1,x_2)\} \cup \{x_1\} \cup \{x_2\}$

$= \{g(x_1,x_2),\ x_1,\ x_2\}$

(iv) $subt(g(x_1, g(x_2,x_3))) = \{g(x_1, g(x_2,x_3))\} \cup subt(x_1) \cup$

$\cup\ subt(g(x_2,x_3)) = \{g(x_1, g(x_2,x_3))\} \cup \{x_1\} \cup$

$\cup \{g(x_2,x_3)\} \cup subt(x_2) \cup subt(x_3) =$

$= \{g(x_1, g(x_2,x_3)),\ x_1,\ g(x_2,x_3)\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\} =$

$= \{g(x_1, g(x_2,x_3)), x_1, g(x_2,x_3), x_2, x_3\}$

Exercício 4.1

e) $x \in \mathcal{V}$

$t, t' \in \mathcal{T}_L$

$t'[t/x]$: substituição de x por t em t'

(1) $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{se } y = x \\ y & \text{se } y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;

(2) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$

(3) $f(t_1, \dots, t_m)[t/x] = f(t_1[t/x], \dots, t_m[t/x])$,
para todo $f \in \mathcal{F}$ t.q. $\mathcal{N}(f) = m \geq 1$ e todo $t_1, \dots, t_m \in \mathcal{T}_L$

i) $0\,[g(x_0, 0)/x_1] = 0$

ii) $g(x_1, f(x_1))\,[g(x_0, 0)/x_1] =$

$= g(x_1[g(x_0,0)/x_1],\ f(x_1)[g(x_0,0)/x_1])$

$= g(g(x_0, 0),\ f(x_1[g(x_0,0)/x_1]))$

$= g(g(x_0, 0),\ f(g(x_0, 0)))$

iii) $g(x_1, x_2)\,[g(x_0, 0)/x_1] = g(x_1[g(x_0,0)/x_1],\ x_2[g(x_0,0)/x_1])$

$= g(g(x_0, 0),\ x_2)$

Ex. 4.

$L = (\{0, -\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$ em que

$\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(P) = 1$, $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$

a) $\mathcal{T}_L$ é definido indutivamente, sobre $(A_L)^*$, pelas seguintes regras:

(1) $x \in \mathcal{T}_L$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

(2) $0 \in \mathcal{T}_L$;

(3) $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L \Longrightarrow t_1 - t_2 \in \mathcal{T}_L$, para todo $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$.

Exemplos de L-termos:

x_1

0

$x_1 - 0$

$x_2 - x_3$

$x_1 - (x_2 - x_3)$

$(x_2 - x_3) - (x_1 - 0)$

L-fórmula atómica

$$R(t_1, \dots, t_n)$$

onde $R \in \mathcal{R}$
e $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$

At_L : conjunto das L-fórmulas atómicas

FÓRMULAS DE TIPO L

$\mathcal{F}_L$ é definido indutivamente sobre $(A_L)^*$ por

a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in At_L$

b) $\perp \in \mathcal{F}_L$

c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \Rightarrow (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, $\forall \varphi \in (A_L)^*$

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L \Rightarrow (\varphi \square \psi) \in \mathcal{F}_L$, $\forall \square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ $\forall \varphi, \psi \in (A_L)^*$

e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \Rightarrow (Qx\varphi) \in \mathcal{F}_L$

para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$
e para todo $\varphi \in (A_L)^*$

Ex 4.2 $L = (\{0, -\}, \{P, <\}, \mathcal{N})$ onde $\mathcal{N}(0)=0$, $\mathcal{N}(P)=1$, $\mathcal{N}(-)=$
$= \mathcal{N}(<) = 2$

b)

At_L : conjunto das L-fórmulas atómicas

palavras sobre A_L da forma $P(t_1)$ ou $<(t_1, t_2)$ em que t_1 e t_2 são L-termos

Exemplos de L-fórmulas atómicas

$P(0)$
$P(x_1)$
$P(x_1 - x_3)$

$<(0, x_1)$

$x_1 - x_3 < (x_1 - x_3) - x_2$

Ex 4.2

c)

i) $x_2 - 0 \in \mathcal{T}_L$

$x_1 \in \mathcal{T}_L$

$<$ é um símbolo de relação de aridade 2.

Logo, $x_2 - 0 < x_1 \in At_L$

e, portanto, $x_2 - 0 < x_1 \in \mathcal{F}_L$.

ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0) \in \mathcal{F}_L$ pois:

(1) $x_1 - x_0 < 0 \in At_L$ (uma vez que $<$ é um símbolo de relação de aridade 2 e $x_1 - x_0, 0 \in \mathcal{T}_L$);

(2) $\forall x_1 (x_1 - x_0 < 0) \in \mathcal{F}_L$ pela regra e) da Def 143, porque $x_1 \in \mathcal{V}$ e por (1);

(3) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0) \in \mathcal{F}_L$ pela regra e) da Def 143, porque $x_0 \in \mathcal{V}$ e por (2).

iii) $\forall x_2 (\exists x_0 (x_0 < x_1) \rightarrow \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0)) \wedge P(x_2) \in \mathcal{F}_L$ pois:

(1) $x_0 < x_1 \in At_L$ (uma vez que $x_0, x_1 \in \mathcal{T}_L$ e $<$ é um símbolo de relação de aridade 2);

(2) $x_2 < x_1 - x_0 \in At_L$ (uma vez que $x_2, x_1 - x_0 \in \mathcal{T}_L$ e $<$ é um símbolo de relação de aridade 2);

(3) $P(x_2) \in At_L$ (pois $x_2 \in \mathcal{T}_L$ e P é um símbolo de relação de aridade 1);

(4) $\exists x_0 (x_0 < x_1) \in \mathcal{F}_L$ pela regra e) da Def. 143, porque $x_0 \in \mathcal{V}$ e por (1);

(5) $\exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0) \in \mathcal{F}_L$ pela regra e) da Def 143, porque $x_1 \in \mathcal{V}$ e por (2);

(6) $\exists x_0 (x_0 < x_1) \rightarrow \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0) \in \mathcal{F}_L$ pela regra d) da Def 143 ($\square = \rightarrow$), por (4) e (5);

(7) $\forall x_2 \left(\exists x_0 (x_0 < x_1) \rightarrow \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0)\right) \in \mathcal{F}_L$ pela regra e) da Def 143, porque $x_2 \in \mathcal{V}$ e por (6);

(8) $\forall x_2 (\exists x_0 (x_0 < x_1) \rightarrow \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0)) \wedge P(x_2) \in \mathcal{F}_L$ pela regra d) da Def 143 ($\square = \wedge$), por (7) e por (3).