DEDUÇÃO NATURAL PROPOSICIONAL (DNP)

↓

SISTEMA FORMAL de demonstrações

↓

FORMALIZAÇÃO DO CONCEITO DE PROVA

↙

caracterizações alternativas
dos conceitos de TAUTOLOGIAS
e de CONSEQUÊNCIAS SEMÂNTICAS

usaremos regras de inferência

modelar raciocínios / argumentos

$\boxed{\text{DERIVAÇÕES}}$ (prova / demonstração)

notação: esquemas como

(1)
$$\frac{p_0 \wedge p_1}{p_0}$$

(2)
$$\cfrac{\cfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}}{p_0}}{(p_0 \wedge p_1) \to p_0}$$

(3)
$$\frac{p_0 \qquad p_0 \to p_1}{p_1}$$

Exercício 3.1

a) Indique uma derivação em DNP cuja conclusão seja $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

$\mathcal{D} =$

$$\dfrac{\dfrac{p_1 \wedge p_0}{p_0}\,\wedge_2 E \qquad \dfrac{p_1 \wedge p_0}{p_1}\,\wedge_1 E}{p_0 \wedge p_1}\,\wedge I$$

é uma tal derivação

- conclusão de $\mathcal{D}$: $p_0 \wedge p_1$
- folhas : $p_1 \wedge p_0$ (não cortados)

Subderivações de $\mathcal{D}$: (c))

(1) $p_1 \wedge p_0$

(2) $\dfrac{p_1 \wedge p_0}{p_0}\,\wedge_2 E$

(3) $\dfrac{p_1 \wedge p_0}{p_1}\,\wedge_1 E$

(4) $\mathcal{D}$

3.1.

b) Uma tal derivação é

$$D = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)}}{p_0 \vee p_1}\ \vee_1 I}{p_1 \to (p_0 \vee p_1)}\ \to I^{(2)}}{p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))}\ \to I^{(1)}$$

Subderivações de D: (c)

(1) p_0

(2) $\dfrac{p_0}{p_0 \vee p_1}\ \vee_1 I$

(3) $\dfrac{\dfrac{p_0}{p_0 \vee p_1}\ \vee_1 I}{p_1 \to (p_0 \vee p_1)}\ \to I$

(4) D

$$D' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \vee p_1}\ \vee_2 I}{p_1 \to (p_0 \vee p_1)}\ \to I^{(2)}}{p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))}\ \to I^{(1)}$$

Exercício 3.2 $\quad \varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$

a) Encontre uma demonstração em DNP da fórmula

$$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

(ou seja, uma derivação em DNP cuja conclusão seja esta fórmula e cujo conjunto das hipóteses por cancelar seja vazio)

Uma tal derivação é:

$$D = \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\,\wedge_1 E}{\varphi \vee \psi}\,\vee_1 I}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)}\,\rightarrow I^{(1)}$$

Subderivações de D:

(1) $\varphi \wedge \psi$

(2) $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge_1 E$

(3) $\dfrac{\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge_1 E}{\varphi \vee \psi}\,\vee_1 I$

(4) D

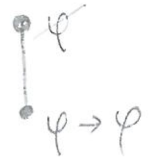
3.2

c) Encontrar demonstração em DNP de

$$\varphi \to \varphi$$

$$\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\varphi \to \varphi} \to I^{(1)}$$

ESTRUTURA DA ÁRVORE



Subderivações:

PASSO INICIAL (1) φ

(2) $$\dfrac{\cancel{\varphi}}{\varphi \to \varphi}$$

Exercício 3.2

d) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

Encontre uma demonstração em DNP de $(\neg\varphi\vee\psi)\to(\varphi\to\psi)$

$$\mathcal{D} = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi\vee\psi}^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \quad \cancel{\neg\varphi}^{(3)}}{\perp}\,\neg E}{\psi}\,(\perp) \qquad \cancel{\psi}^{(3)}}{\psi}\,\vee E^{(3)}}{\varphi\to\psi}\,\to I^{(2)}}{(\neg\varphi\vee\psi)\to(\varphi\to\psi)}\,\to I^{(1)}$$

Subderivações de $\mathcal{D}$:

(1) $\neg\varphi\vee\psi$

(2) φ

(3) $\neg\varphi$

(4) ψ

(5) $\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\,\neg E$

(6) $\dfrac{\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\,\neg E}{\psi}\,(\perp)$

(7) $\dfrac{\neg\varphi\vee\psi \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \quad \cancel{\neg\varphi}^{(3)}}{\perp}}{\psi} \qquad \cancel{\psi}^{(3)}}{\psi}\,\vee E^{(3)}$

(8) $\dfrac{\dfrac{\neg\varphi\vee\psi \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \quad \cancel{\neg\varphi}^{(3)}}{\perp}}{\psi} \qquad \cancel{\psi}^{(3)}}{\psi}\,\vee E^{(3)}}{\varphi\to\psi}\,\to I^{(2)}$

(9) $\mathcal{D}$

Exercício 3.2

e) $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

Encontre uma demonstração em DNP de $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$

$D =$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)} \qquad \cancel{\neg\varphi}^{(2)}}{\perp}\,\neg E}{\neg\neg\varphi}\,\neg I^{(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(3)} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\perp}\,\neg E}{\varphi}\,(RAA)^{(3)}}{\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi}\,\leftrightarrow I^{(1)}$$

Exercício 3.2

f) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

Encontrar uma derivação de conclusão $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas seja vazio.

$D =$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\cancel{\varphi}^{(4)}$}
\AxiomC{$\cancel{(\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge_1 E$}
\UnaryInfC{$\varphi\to\psi$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{ψ}
\AxiomC{$\cancel{\psi}^{(4)}$}
\AxiomC{$\cancel{(\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge_2 E$}
\UnaryInfC{$\psi\to\varphi$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{φ}
\RightLabel{$\leftrightarrow I^{(4)}$}
\BinaryInfC{$\varphi\leftrightarrow\psi$}
\AxiomC{$\cancel{\varphi}^{(2)}$}
\AxiomC{$\cancel{\varphi\leftrightarrow\psi}^{(1)}$}
\RightLabel{$\leftrightarrow_1 E$}
\BinaryInfC{ψ}
\RightLabel{$\to I^{(2)}$}
\UnaryInfC{$\varphi\to\psi$}
\AxiomC{$\cancel{\psi}^{(3)}$}
\AxiomC{$\cancel{\varphi\leftrightarrow\psi}^{(1)}$}
\RightLabel{$\leftrightarrow_2 E$}
\BinaryInfC{φ}
\RightLabel{$\to I^{(3)}$}
\UnaryInfC{$\psi\to\varphi$}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$(\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)$}
\RightLabel{$\leftrightarrow I^{(1)}$}
\BinaryInfC{$((\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi))\leftrightarrow(\varphi\leftrightarrow\psi)$}
\end{prooftree}
$$

D é uma demonstração de $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$

Exercício 3.2

g) $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

Encontre uma demonstração em DNP de $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

$D =$

$$
\dfrac{
\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\varphi \vee \psi}} \qquad \dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\varphi}}}{\psi \vee \varphi}\vee_2 I \qquad \dfrac{\overset{(2)}{\cancel{\psi}}}{\psi \vee \varphi}\vee_1 I}{\psi \vee \varphi}\vee E^{(2)}
\qquad
\dfrac{\overset{(1)}{\cancel{\psi \vee \varphi}} \qquad \dfrac{\overset{(3)}{\cancel{\psi}}}{\varphi \vee \psi}\vee_2 I \qquad \dfrac{\overset{(3)}{\cancel{\varphi}}}{\varphi \vee \psi}\vee_1 I}{\varphi \vee \psi}\vee E^{(3)}
}{(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)}\leftrightarrow I^{(1)}
$$

D é uma demonstração de $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

Exercício 3.2

h) Encontre uma demonstração em DNP da fórmula $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

D =

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\cancel{\neg\varphi \vee \neg\psi}^{(2)}$}
\AxiomC{$\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{φ}
\AxiomC{$\cancel{\neg\varphi}^{(3)}$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}$}
\RightLabel{$\wedge E$}
\UnaryInfC{ψ}
\AxiomC{$\cancel{\neg\psi}^{(3)}$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\vee E^{(3)}$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg I^{(2)}$}
\UnaryInfC{$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$}
\AxiomC{$\cancel{\neg\varphi}^{(4)}$}
\RightLabel{$\vee_1 I$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vee \neg\psi$}
\AxiomC{$\cancel{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}^{(1)}$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(RAA)^{(4)}$}
\UnaryInfC{φ}
\AxiomC{$\cancel{\neg\psi}^{(5)}$}
\RightLabel{$\vee_2 I$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vee \neg\psi$}
\AxiomC{$\cancel{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}^{(1)}$}
\RightLabel{$\neg E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(RAA)^{(5)}$}
\UnaryInfC{ψ}
\RightLabel{$\wedge I$}
\BinaryInfC{$\varphi \wedge \psi$}
\RightLabel{$\leftrightarrow I^{(1)}$}
\BinaryInfC{$(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$}
\end{prooftree}
$$

D é uma derivação de conclusão $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ cujo conjunto de hipóteses não canceladas é o conjunto vazio. Logo, D é uma demonstração de $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

Exercício 3.3.

a) Mostre que $p_0 \to p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

Pretendemos construir uma derivação em DNP cuja conclusão é a fórmula $\neg p_0$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de $\Gamma = \{p_0 \to p_1, \neg p_1\}$.

$$D = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \qquad p_0 \to p_1}{p_1}\,{\to}E \qquad \neg p_1}{\bot}\,\neg E}{\neg p_0}\,\neg I^{(1)}$$

é uma tal derivação.

- Conclusão de D : $\neg p_0$
- Conjunto de hipóteses não canceladas : $\Delta = \{p_0 \to p_1, \neg p_1\} = \Gamma$.
- Subderivações :

(1) p_0

(2) $p_0 \to p_1$

(3) $\dfrac{p_0 \qquad p_0 \to p_1}{p_1}\,{\to}E$

(4) $\neg p_1$

(5) $\dfrac{\dfrac{p_0 \qquad p_0 \to p_1}{p_1}\,{\to}E \qquad \neg p_1}{\bot}\,\neg E$

(6) D

Exercício 3.3

b) Mostre que $p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \land (p_1 \leftrightarrow p_2)) \land (p_0 \leftrightarrow p_2)$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\cancel{p_1}^{(1)} \quad p_1 \to p_2}{p_2}{\scriptstyle \to E}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\cancel{p_2}^{(1)} \quad p_2 \to p_0}{p_0}{\scriptstyle \to E} \quad p_0 \to p_1}{p_1}{\scriptstyle \to E}
}{p_1 \leftrightarrow p_2}{\scriptstyle \leftrightarrow I^{(1)}}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\cancel{p_0}^{(2)} \quad p_0 \to p_1}{p_1}{\scriptstyle \to E}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(2)} \quad p_1 \to p_2}{p_2}{\scriptstyle \to E} \quad p_2 \to p_0}{p_0}{\scriptstyle \to E}
}{p_0 \leftrightarrow p_1}{\scriptstyle \leftrightarrow I^{(2)}}
}{(p_0 \leftrightarrow p_1) \land (p_1 \leftrightarrow p_2)}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(3)} \quad p_0 \to p_1}{p_1}{\scriptstyle \to E} \quad p_1 \to p_2}{p_2}{\scriptstyle \to E}
\qquad
\dfrac{\cancel{p_2}^{(3)} \quad p_2 \to p_0}{p_0}{\scriptstyle \to E}
}{p_0 \leftrightarrow p_2}{\scriptstyle \leftrightarrow I^{(3)}}
}{((p_0 \leftrightarrow p_1) \land (p_1 \leftrightarrow p_2)) \land (p_0 \leftrightarrow p_2)}{\scriptstyle \land I}
$$

é uma derivação em DNP cuja conclusão é $\varphi = ((p_0 \leftrightarrow p_1) \land (p_1 \leftrightarrow p_2)) \land (p_0 \leftrightarrow p_2)$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\Gamma = \{p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_0,\ p_0 \to p_1\}$, o que permite afirmar que $\Gamma \vdash \varphi$.

Exercício 3.3.

c) Mostre que $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente

(Pretendemos obter uma derivação em DNP de $\bot$ a partir de $T = \{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$, ou seja, uma derivação em DNP cuja conclusão é $\bot$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de T)

$D =$

$$\dfrac{p_0 \vee p_1 \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{p_0}} \qquad \dfrac{\neg p_0 \wedge \neg p_1}{\neg p_0}\wedge_1 E}{\bot}\neg E \qquad \dfrac{\overset{(1)}{\cancel{p_1}} \qquad \dfrac{\neg p_0 \wedge \neg p_1}{\neg p_1}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\bot}\vee E^{(1)}$$

D é uma derivação em DNP com

conclusão $\bot$

e conjunto de hipóteses não canceladas é $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$

Logo, $T \vdash \bot$, pelo que T é sintaticamente inconsistente