Universidade do Minho
Departamento de Matemática

MMC

ANCP

Ficha de trabalho 1 — 2023/2024

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz real.

(a) Determine a fatorização QR de A quando $\det(A) = ad - bc > 0$.

(b) Se os vetores colunas de A forem linearmente dependentes, ocorrerá *breakdown* no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Usando o resultado em (a), mostre como ocorre este *breakdown*.

2. Assuma que A é uma matriz real de ordem $m \times n$, $m < n$, e que $\operatorname{rank}(A) = m$. Prove que A pode ser escrita na forma $A = LQ$, onde L é uma matriz triangular inferior de ordem $m \times m$ e Q é uma matriz $m \times n$ com linhas ortonormadas.

3. Seja A uma matriz real de ordem $n \times n$. Usando a fatorização QR de A, prove a desigualdade

$$|\det(A)| \leq \|\boldsymbol{a}_1\| \|\boldsymbol{a}_2\| \cdots \|\boldsymbol{a}_n\|,$$

onde $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ são as colunas de A (desigualdade de Hadamard).

4. Seja A uma matriz real de ordem $m \times n$ e $A = QR$ a sua fatorização QR reduzida.

(a) Mostre que $\boldsymbol{a}_i - (r_{1i}\boldsymbol{q}_1 + \cdots + r_{i-1,i}\boldsymbol{q}_{i-1}\})$ é ortogonal ao subespaço $\operatorname{span}(\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{i-1}\})$, onde $\boldsymbol{a}_i$ são as colunas de A, $\boldsymbol{q}_i$ as colunas de Q e $R = [r_{i,j}]$, $i, j = 1, \ldots, n$.

(b) Conclua que r_{ii} é a distância de $\boldsymbol{a}_i$ a $\operatorname{span}(\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{i-1}\})$.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 8 & 2 & -8 & 0 \\ 3 & 15 & 23 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 57 & 35 & 1 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 15 & 55 & 2 \\ 33 & 7 & 5 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Use a função `[Q,R]=mgs(A)` (implementação em MATLAB do processo de Gram-Schmidt modificado) para obter uma base ortonormada para o espaço gerado pelas colunas de A.

(b) Calcule o valor absoluto do determinante da matriz A usando a decomposição $A = QR$.
Compare com o valor que se obtém para o determinante usando a função `det` do MATLAB.

6. Há vários algoritmos que ficam propensos a problemas quando os vetores que geram começam a perder ortogonalidade. Uma solução standard é implementar *reortogonalização*. Isto pode incorporar-se no método de Gram-Schmidt, tanto na versão clássica como na versão modificada.

O seguinte pseudo-código é o algoritmo de Gram-Schmidt modificado para calcular a decomposição QR.

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Output: $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$

for $j = 1$ to n **do**
  $\boldsymbol{q}_j = \boldsymbol{a}_j$
  for $i = 1$ to $j - 1$ **do**
    $r_{ij} = \boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{q}_j$
    $\boldsymbol{q}_j = \boldsymbol{q}_j - r_{ij}\boldsymbol{q}_i$
  end for
  $r_{jj} = \|\boldsymbol{q}_j\|$
  $\boldsymbol{q}_j = \boldsymbol{q}_j / r_{jj}$
end for

(continua)

Em aritmética exata, depois dos passos $6-9$, $\boldsymbol{q}_j$ é ortogonal a $\boldsymbol{q}_k$, $k=1,\ldots,j-1$. Contudo, devido a erros de arredondamento e cancelamento subtrativo, provavelmente não será. Podemos recomeçar com o vetor calculado $\boldsymbol{q}_j$ e repetir os passos $6-9$, esperando melhorar a ortogonalidade. Os valores $\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{q}_j$ serão pequenos e servirão como correções aos valores originais de R.

O seguinte pseudo-código, quando colocado entre os passos 9 e 10, implementa o algoritmo de reortogonalização descrito.

for $i=1$ to $j-1$ **do**
  $s_{ij}=\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{q}_j$
  $\boldsymbol{q}_j=\boldsymbol{q}_j-s_{ij}\boldsymbol{q}_i$
  $r_{ij}=r_{ij}+s_{ij}$
end for

(a) Implemente no MATLAB a função `[Q,R]=mgsr(A,flag)` que seletivamente implementa o processo de reortogonalização; ou seja, quando `flag=1`, a função deve implementar reortogonalização; caso contrário, não. Se o argumento `flag` estiver omisso, o seu valor por defeito deve ser 1.

Em caso de não familiaridade em lidar com variáveis de input, use o help do MATLAB para `nargin`.

(b) Defina uma matriz de ordem 200×160 e aplique a função `mgsr` com e sem reortogonalização. Em cada caso, avalie a ortogonalidade e comente os resultados (a matriz deve ser adequadamente escolhida por forma a que se verifiquem diferenças).

DATA LIMITE PARA O ENVIO DA RESOLUÇÃO: 15 DE MARÇO DE 2024.