Lógica da Programação

Teste

04.01.17

(Duração: 3h)

Nota: *Justifique adequadamente todas as suas respostas.*

1. **a)** Construa uma derivação que prove que $(p_0 \wedge p_1) \to \neg(p_0 \to \neg p_1)$ é um teorema de DNP_i.

b) (i) Construa uma derivação que prove que $\neg(p_0 \to \neg p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ é um teorema de DNP_c e (ii) prove que, no entanto, esta fórmula não é um teorema de DNP_i.

2. Considere o fragmento da lógica intuicionista com os conetivos $\to$, $\wedge$, $\perp$. Sem recurso aos teoremas da correção e completude, prove que, para todo o conjunto de fórmulas Γ e para toda a fórmula φ, $\Gamma \vdash_i \varphi$ implica $\vdash_i \Gamma \Rightarrow \varphi$.

3. Seja L o tipo de linguagem que contém apenas o símbolo de relação unário R. Seja φ a L-fórmula $\exists x_0(R(x_0) \to \forall x_0 R(x_0))$. Seja $K = (\{w_0, w_1, w_2\}, \leq, \{E_w\}_{w\in\{w_0,w_1,w_2\}})$ a L-estrutura de Kripke onde: $w_0 < w_1 < w_2$; $dom(E_{w_0}) = \{a\}$, $dom(E_{w_1}) = \{a, b\}$, $dom(E_{w_2}) = \{a, b\}$; a função interpretação de E_{w_i} é notada por I_{w_i} e estas funções são tais que $I_{w_0}(R) = \{a\}$, $I_{w_1}(R) = \{a\}$, $I_{w_2}(R) = \{a, b\}$.

a) Para cada $w \in \{w_0, w_1, w_2\}$, diga se $w \Vdash \varphi$.

b) Diga se φ é uma fórmula válida em lógica intuicionista.

4. **a)** Dê exemplo de λ-termos M, N, N' e de uma variável $x \in \mathrm{LIV}(M)$ tais que $N \to_\beta N'$, mas <u>não</u> $M[N/x] \to_\beta M[N'/x]$. Justifique.

b) Prove que, para quaisquer λ-termos M, N, N' e para qualquer variável x, $N \to_\beta N'$ implica $M[N/x] \to_\beta^* M[N'/x]$.

5. Considere o combinador $\mathsf{SOMA} = \lambda x_0 x_1 x_2 x_3 . x_0 x_2 (x_1 x_2 x_3)$ e, recorde que, dado um tipo simples σ, $Nat_\sigma = (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma$.

a) Prove que $\vdash \mathsf{SOMA} : Nat_\sigma \to Nat_\sigma \to Nat_\sigma$ (considerando tipificação *à la Curry*).

b) Prove que $\mathsf{SOMA}\,\mathbf{c}_1\,\mathbf{c}_1 =_\beta \mathbf{c}_2$.

c) Sabendo que a *função soma* em $\mathbb{N}_0$ é λ-definível pelo combinador SOMA, prove que a função $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, é λ-definível.

6. Mostre que se M é um λ-termo tal que $M =_\beta (\lambda x_0 . x_0 x_0)(\lambda x_0 . x_0 x_0)$, então M não é tipificável.

7. Considere a fórmula $\varphi = (((p_0 \to p_1) \to p_1) \to p_1) \to p_0 \to p_1$.

a) Indique uma derivação $\mathcal{D}$ em $\mathrm{DNP}_i^{\Rightarrow w}$ com classes de hipóteses do sequente $\Rightarrow \varphi$.

b) Indique um habitante M (*à la Church*) do tipo $t(\varphi)$.

c) Justifique se para M e $\mathcal{D}$ indicados nas alíneas anteriores se tem $t(\mathcal{D}) = M$.

Cotações: 1- 4 val.; 2- 2 val.; 3- 2,75 val.; 4- 3 val.; 5- 3,75 val.; 6- 1,5 val.; 7- 3 val.