Ficha de Trabalho 1

Métodos de Previsão e Séries Temporais
Mestrado em Estatística para Ciência de Dados

---

1. Calcule a fórmula geral para a FAC do seguinte processo AR(2)

$$Y_t = 1{,}2\, Y_{t-1} - 0{,}32\, Y_{t-2} + \varepsilon_t.$$

2. Em ambiente R, gere 500 observações do modelo AR(2)

$$Y_t = Y_{t-1} - 0{,}9\, Y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

onde ε_t é um ruído branco reduzido.

3. Em ambiente R, gere 100 observações da autorregressão

$$Y_t = -0{,}9\, Y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

onde ε_t é um ruído branco reduzido. De seguida, aplique o filtro de médias móveis

$$X_t = (Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3})/4$$

aos dados gerados de Y_t. Apresente Y_t e X_t no mesmo gráfico. Comente o comportamento de X_t e como a aplicação da média móvel alterou esse comportamento.

4. Obtenha os parâmetros de um processo AR(3) em que as 3 primeiras autocorrelações são dadas por $\rho_1 = 0{,}8$, $\rho_2 = 0{,}6$ e $\rho_3 = 0{,}4$. Verifique se o processo é estacionário. Em caso afirmativo, calcule a fórmula geral para a FAC.

5. Prove que a função de autocovariância de um processo MA(1) é dada por

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2), & se\ k = 0 \\ -\theta\sigma_\varepsilon^2, & se\ k = \pm 1. \\ 0, & se\ |k| \geq 2 \end{cases}$$

6. Mostre que a função de autocovariância, no caso de um processo não estacionário, pode ser escrita como

$$\gamma(t_1, t_2) = E[(Y_{t1} - \mu_{t1})(Y_{t2} - \mu_{t2})] = E[Y_{t1}Y_{t2}] - \mu_{t1}\mu_{t2}$$

onde $E[Y_t] = \mu_t$.

7. Considere a seguinte série temporal y_t para $t = 1, \ldots, 200$:

$$y_t = s_t + \varepsilon_t$$

onde ε_t é um ruído branco de média zero reduzido,

$$s_t = \begin{cases} 0, & t = 1, \dots, 100 \\ 10\, exp\left(-\dfrac{(t-100)}{20}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi t}{4}\right), & t = 101, \dots, 200 \end{cases}$$

7.1 Calcule a função média, $\mu_y(t)$ para $t = 1, \dots, 200$, do processo dado. Desenhe o respetivo gráfico.

7.2 Calcule a função de autocovariância $\gamma_y(t_1, t_2)$ para $t_1 = 1, \dots, 200$ e $t_2 = 1, \dots, 200$.

8. Considere a série temporal

$$y_t = \beta_1 + \beta_2\, t + \varepsilon_t$$

onde β_1 e β_2 são constantes conhecidas e ε_t é um processo ruído branco com variância σ_ε^2.

8.1 Determine se y_t é estacionário.

8.2 Mostre que o processo $y_t - y_{t-1}$ é estacionário. Para tal, encontre as respetivas funções para a média e autocovariância.

8.3 Repita a alínea **8.2** caso ε_t seja substituído por um processo estacionário geral, digamos z_t com função média dada por μ_z e função de autocovariância dada por $\gamma_z(h)$.

8.4 Mostre que o valor esperado do seguinte processo de médias móveis

$$v_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{j=-q}^{q} y_{t-j}$$

é dado por $\beta_1 + \beta_2\, t$ e apresente uma expressão simplificada para a função de autocovariância.

9. Considere um processo de médias móveis definido por

$$y_t = \varepsilon_{t-1} + 2\varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$$

onde os vários ε_t são independentes com média zero e variância σ_ε^2. Determine as funções de autocovariância e autocorrelação como funções de argumento $h = t_1 - t_2$ e faça os respetivos gráficos.

10. Identifique o seguinte modelo ARMA(p, q) e determine se é estacionário e/ou invertível processo de médias móveis definido por

$$y_t = y_{t-1} - 0{,}5\, y_{t-2} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1},$$

sendo ε_t um processo ruído branco com média zero e variância σ_ε^2.

11. Se as primeiras 10 autocorrelações simples e parciais calculadas para uma amostra de 100 observações de uma série temporal forem

lag k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FAC ρ_k	0,01	0,07	-0,05	0,06	-0,16	0,11	0,08	0,05	0,12	-0,01
FACP α_{kk}	0,08	0,09	0,03	0,09	-0,07	0,12	0,08	-0,09	0,02	0,11

Que modelo seria apropriado para descrever a série temporal?