Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Métodos Numéricos para Equações de Derivadas Parciais

M. Irene Falcão
Mestrado em Matemática e Computação
2023/2024

Equações Elípticas

As equações elípticas estão associadas a problemas de equilíbrio ou problemas de estado estacionário.

Exemplo equações elípticas

Equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x, y) = 0 \tag{2}$$

Problemas envolvendo este tipo de equações são sempre problemas de valores de fronteira, i.e. o domínio de integração é uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tendo como fronteira uma curva fechada $\partial\Omega$.

Condições de fronteira

- Problema de Dirichlet $\boxed{u = \phi(x,y), \text{ em } \partial\Omega}$

  É possível mostrar, usando o teorema de Green que este problema é bem posto.

- Problema de Neumann $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi(x,y), \text{ em } \partial\Omega}$

  Neste caso, a solução é determinada a menos de uma constante.

- Problema de Robin-Churchill[1] $\boxed{u(x,y) + a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial n} = \zeta(x,y), \text{ em } \partial\Omega}$

  Se $a(x,y) > 0$, o problema é bem posto.

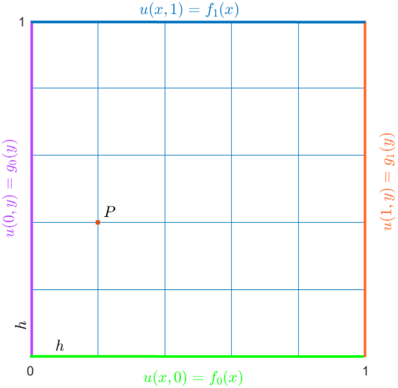
[1] ou misto

Fórmula dos cinco pontos para a equação de Laplace

Comecemos por considerar a solução da equação de Laplace (1) num quadrado $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, sujeita a condições de fronteira do tipo de Dirichlet

$$u(x,y) = \begin{cases} f_0(x), & y = 0,\ 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x), & y = 1,\ 0 \leq x \leq 1 \\ g_0(x), & x = 0,\ 0 \leq y \leq 1 \\ g_1(x), & x = 1,\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \tag{3}$$

Estratégia: A região Ω é coberta por uma rede Ω_h com malha uniforme h e, em cada ponto $P = (ih, jk)$; $i = 1, \ldots, M-1$; $j = 1, \ldots, M-1$, as derivadas envolvidas na equação (1) são substituídas por fórmulas de diferenças centrais.



$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = \tau_{i,j}, \tag{4}$$

onde

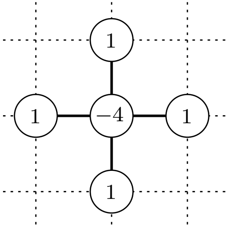
$$\tau_{i,j} = -\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i + \xi_i h, y_j) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x_i, y_j + \eta_j h)\right),\ \xi_i, \eta_j \in (-1, 1) \tag{5}$$

Uma aproximação $U_{i,j}$ pode ser obtida, "ignorando" na equação (4) o erro de truncatura (5):

Fórmula dos cinco pontos

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0; \tag{6}$$

$i = 1, \ldots, M-1,\ j = 1, \ldots, M-1.$



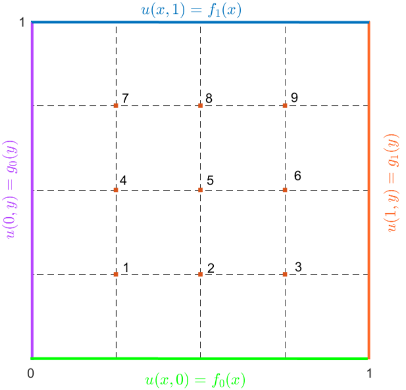
STENCIL

Se os pontos de Ω_h forem ordenados da esquerda para a direita e de baixo para cima, o sistema (6) de $(M-1)\times(M-1)$ equações pode escrever-se como

$$B\boldsymbol{U} = b \tag{7}$$

onde B é uma matriz banda e b é um vetor cujas componentes são dadas por valores fronteiros.

Exemplo: Se $M = 4$



$$
B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{array}\right)
$$

$$
b = \begin{pmatrix}
-f_0(h) - g_0(h) \\
-f_0(2h) \\
-f_0(3h) - g_1(h) \\
-g_0(2h) \\
0 \\
-g_1(2h) \\
-g_0(3h) - f_1(h) \\
-f_1(2h) \\
-g_1(3h) - f_1(3h)
\end{pmatrix}
$$

Em geral, ordenando os pontos da forma indicada, o sistema de $(M-1)^2$ equações terá como matriz dos coeficientes uma matriz tridiagonal por blocos

$$B = \begin{pmatrix} A & I & 0 & \dots & 0 \\ I & A & I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I & A & I \\ 0 & \dots & 0 & I & A \end{pmatrix}$$

onde cada bloco é uma matriz quadrada de ordem $M-1$:

- os blocos A são matrizes tridiagonais com -4 na diagonal e 1 fora da diagonal;
- I representa a matriz identidade de ordem $M-1$;
- 0 representa a matriz nula de ordem $M-1$.

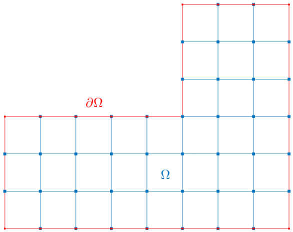
A resolução do sistema deverá ter em conta a estrutura da matriz.

Equação de Poisson

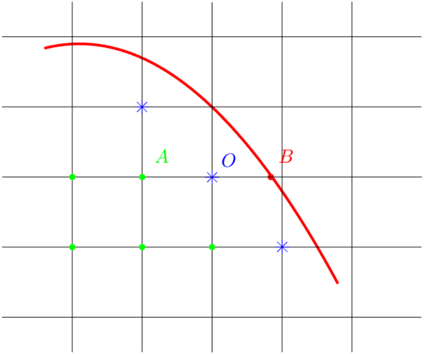
O método descrito para resolver a equação de Laplace num quadrado, com condições de fronteira de Dirichlet, generaliza-se de forma imediata para um problema envolvendo a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$
$$u(x,y) = \phi(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

onde Ω é um domínio tal que as linhas da rede intersetam $\partial\Omega$ em nós dessa rede.



O que acontece se a região Ω for irregular?



Na figura, os pontos a verde são chamados nós interiores - são rodeados por 4 nós contidos em Ω e os pontos a azul são chamados nós fronteiros

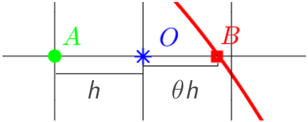
Estratégia:

- Nos nós interiores pode ser aplicada a fórmula de diferenças

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j}. \tag{8}$$

- Nos nós fronteiros é necessário substituir $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e/ou $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ por uma fórmula de diferenças não centradas.

No ponto O da figura, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ pode ser substituída pela fórmula usual de diferenças centrais, mas o mesmo não acontece com $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$



No ponto O da figura poderá ser usada a fórmula de diferenças não centrada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{2}{1+\theta}u_A + \frac{2}{\theta(1+\theta)}u_B - \frac{2}{\theta}u_O\right) + \mathcal{O}(h).$$

(Comece por verificar que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{h}\left(-\frac{\theta}{1+\theta}u_A + \frac{1}{\theta(1+\theta)}u_B - \frac{1-\theta}{\theta}u_O\right) + \mathcal{O}(h^2)$.)

Observe-se que, se $\theta = 1$, i.e., se B for um nó da malha, recupera-se a fórmula de diferenças centrais usuais, a qual como sabemos tem erro $\mathcal{O}(h^2)$ e não $\mathcal{O}(h)$.