Resolução exercícios Tema 4

Lógica da Programação

Ex. 4.1) Para cada uma das tipificações

$\Gamma \vdash M : \sigma$ do Ex. 3.10,

determine $d(\Gamma \vdash M : \sigma)$

(vi) [Contexto tipificação à Church

$$
d\left(
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{x : \tau \to \sigma, y : \tau \vdash x : \tau \to \sigma}\,Var \qquad \dfrac{}{x : \tau \to \sigma, y : \tau \vdash y : \tau}\,Var}{x : \tau \to \sigma, y : \tau \vdash xy : \sigma}\,Ap
}{x : \tau \to \sigma \vdash \lambda y . xy : \tau \to \sigma}\,Abs
}{\vdash \lambda x^{\tau \to \sigma} y^{\tau} . xy : (\tau \to \sigma) \to (\tau \to \sigma)}\,Abs
\right)
$$

parênteses FACULTATIVOS (associados à direita)

=

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{x : d\tau \to d\sigma, y : d\tau \Rightarrow d\tau \to d\sigma}\,Ax^{x} \qquad \dfrac{}{x : d\tau \to d\sigma, y : d\tau \Rightarrow d\tau}\,Ax^{y}}{x : d\tau \to d\sigma, y : d\tau \Rightarrow d\sigma}\,\to E
}{x : d\tau \to d\sigma \Rightarrow d\tau \to d\sigma}\,\to I^{y}
}{\Rightarrow (d\tau \to d\sigma) \to (d\tau \to d\sigma)}\,\to I^{x}
$$

Ex. 4.2) [uma tipificação que permite extrair o λ-termo]

(i) $\lambda x^{\sigma \to \sigma \to \sigma} \lambda y^{\sigma} . xy$ → y é argumento de x

ler da direita para a esquerda

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{x : d\sigma \to (d\sigma \to d\sigma), y : d\sigma \Rightarrow x : d\sigma \to (d\sigma \to d\sigma)}\,Ax^{x} \qquad \dfrac{}{x : .., y : d\sigma \Rightarrow d\sigma}\,Ax^{y}}{x : d\sigma \to (d\sigma \to d\sigma), y : d\sigma \Rightarrow d\sigma \to d\sigma}\,\to E
}{x : d\sigma \to (d\sigma \to d\sigma) \Rightarrow d\sigma \to (d\sigma \to d\sigma)}\,\to I^{y}
}{\Rightarrow (d\sigma \to (d\sigma \to d\sigma)) \to (d\sigma \to (d\sigma \to d\sigma))}\,\to I^{x}
$$

D''

$t_{(ermo)}(D) = \lambda x^{\sigma \to (\sigma \to \sigma)} \lambda y . xy$

Ex. 4.3) - exercício 2.2. c) $\varphi \to (\neg\neg\varphi)$

$((\varphi \to \bot) \to \bot)$

$t(\bot) = \bot$

$d(\bot) = \bot$

$\varphi \to ((\varphi \to \bot) \to \bot)$

$\lambda x^{t\varphi} \lambda y^{t\varphi \to \bot} . yx$ → com tipo ⊥ (absurdo)

Ex. 4.7) $\overset{\text{tipo simples}}{\sigma}$ habitado $\Rightarrow d(\sigma)$ é válida em lógica clássica?

(tautologia da lógica clássica)

σ habitado $\Rightarrow \exists M \in \Lambda : \emptyset \vdash M : \sigma$

$\Rightarrow \underbrace{\emptyset \Rightarrow d\sigma}_{\text{sequente}}$ é derivável em DNP $\overset{\Rightarrow W}{:}$

$\Rightarrow \emptyset \vdash_i d\sigma \Rightarrow \emptyset \vdash_c d\sigma$

$\Rightarrow \emptyset \vDash d\sigma \Rightarrow d\sigma$ tautologia

Contrarrecíproco:

$d\sigma$ não é tautologia $\Rightarrow \sigma$ não é habitado

Ex. 4.8)

a) $(a_1 \to a_0) \to a_0$ não é habitado?

Atendendo a 4.7, basta $\hookrightarrow$ mostrar

que $d((a_1 \to a_0) \to a_0) = (p_1 \to p_0) \to p_0$

não é tautologia.

Tome-se uma valoração v tal que $v(p_0) = 0 = v(p_1)$, dado que para tal v, $v((p_1 \to p_0) \to p_0) = 0$.

b) $(a_0 \to a_0) \to a_0$ não é habitado.

Basta provar que $d((a_0 \to a_0) \to a_0)$ não é tautologia. (tome-se v tal que $v(p_0) = 0$)

$$\dfrac{\dfrac{\text{Var.}\,\dfrac{}{x : a_0 \to a_0 \vdash x : a_0 \to a_0} \qquad x : a_0 \to a_0 \vdash ?_3 : a_0}{x : a_0 \to a_0 \vdash ?_1 : a_0}}{\vdash ?_1 : (a_0 \to a_0) \to a_0}\,\text{Abs.}$$

$?_0 = \lambda x^{a_0 \to a_0} . ?_1$

$?_1 = x\, ?_3$

c) a_0 não é habitado no contexto $\{x : a_1 \to a_0,\ y : a_2 \to a_1\}$

Tendo em conta uma contradição,

suponhamos, $\exists M.\ \Gamma \vdash M : a_0$.

Assim (usando a regra ABS,

$y : a_2 \to a_1 \vdash \lambda x^{a_1 \to a_0}. M : (a_1 \to a_0) \to a_0$.

Novamente pelo ABS,

$\vdash \lambda y^{a_2 \to a_1}. \lambda x^{a_1 \to a_0}. M : (a_2 \to a_1) \to ((a_1 \to a_0) \to a_0)$ σ

Assim, por 4.7,
$d(\sigma)$ é tautologia, o que não é verdade
$(v(p_0) = 0,\ v(p_1) = 0,\ v(p_2) = 0)$.

Ex. 4.9)

(exercício típico de teste)

$\varphi_1 = ((p_0 \to p_1) \to p_0)$;

$\varphi_2 = ((p_0 \to p_1) \to p_1)$

a) Indicar derivação D do sequente $\Rightarrow \varphi_1 \to \varphi_2$ em $DNP_i^{\Rightarrow w}$ (com classes de hipóteses)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\varphi_1, y:p_0 \to p_1 \Rightarrow p_0 \to p_1}Ax^y \qquad \dfrac{\otimes}{x:\varphi_1, y:p_0 \to p_1 \Rightarrow p_0}\to E}{x:\varphi_1, y:p_0 \to p_1 \Rightarrow p_1}\to E}{x:\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2}\to I^y}{\Rightarrow \varphi_1 \to \varphi_2}\to I^x$$

$$\otimes \qquad \dfrac{\dfrac{}{x:\varphi_1, y:\ldots \Rightarrow \varphi_1}Ax^x \qquad \dfrac{}{x,y:p_0 \to p_1 \Rightarrow p_0 \to p_1}Ax^y}{}\to E$$

Determinar o λ-termo associado a D

$t_{ermo}(D) = \lambda x^{t\varphi_1} \lambda y^{t(p_0 \to p_1)}. y(xy)$

b) $t(\varphi_1 \to \varphi_2)$ é habitado?

Sim: $t_{ermo}(D)$ é um habitante de $t(\varphi_1 \to \varphi_2)$

$(\emptyset \vdash t_{ermo}(D) : t(\varphi_1 \to \varphi_2))$

c) Mostrar que $\varphi_2 \to \varphi_1$ não é teorema de DNP_c e dizer se $t(\varphi_2 \to \varphi_2)$ é habitado.

$\varphi_2 \to \varphi_1$ não é tautologia (...)

($v(p_0) = 0$ e $v(p_1) = 0$)

$\therefore$ $\varphi_2 \to \varphi_1$ não pode ser teorema de DNP_c.

$\therefore$ $\Rightarrow \varphi_2 \to \varphi_1$ não é derivável em $DNP_i^{\Rightarrow, w}$

$\therefore$ $t(\varphi_2 \to \varphi_1)$ não pode ser habitado.