Departamento de Matemática e Aplicações

Séries Temporais

Teste Modelo (sobre toda a matéria)

Duração: 2h10m

Nome:

Número:

NOTA: Considere em todos os exercícios que $\{\epsilon_t\} \sim RB(0, \sigma_\epsilon^2)$

1. Considere os gráficos obtidos a partir de uma série temporal X_t e apresentados em Anexo, onde

   Gráfico 1: série original X_t
   Gráfico 2: nova série $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$
   Gráfico 3: FAC da série ∇X_t
   Gráfico 4: FACP da série ∇X_t

   (a) Qual o modelo ARMA apropriado para descrever a série ∇X_t? Justifique.

   (b) Que conclui sobre a estacionaridade da série X_t ? Que modelo ARIMA seria apropriado para descrever a série X_t?

2. Considere o modelo $(1 - 0.3B + 0.2B^2)X_t = \epsilon_t$.

   (a) Diga, justificando, se este modelo AR(2) corresponde ou não a um processo estacionário.

   (b) Calcule o primeiro valor da função de autocorrelação, ou seja $\{\rho_1\}$, sabendo que $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1}$.

   (c) Calcule a fórmula geral para a função de autocorrelação, $\{\rho_k\}$, ou seja $\rho_k = A_1G_1^k + A_2G_2^k$.

3. Considere $X_t = \epsilon_t + c(\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} + ...)$, com c constante.

   (a) A que modelo ARMA corresponde? Este processo é estacionário?

   (b) Considere agora $Y_t = (1 - B)X_t$. A que modelo ARMA corresponde? Para que valores de c, este novo processo é invertível?

4. Considere o modelo ARIMA(1,1,1) dado por $(1 - 0.2B)(1 - B)X_t = (1 - 0.5B)\epsilon_t$.

   (a) Determine se o processo $(1 - B)X_t$ é estacionário? E invertível?

   (b) Supondo que temos as observações $x_1, x_2, ..., x_T$, encontre as expressões que permitem calcular as previsões para x_{T+1} e x_{T+2}.

   (c) Mostre que a expressão recursiva para 3 ou mais saltos (i.e. $k \geq 3$) no futuro é dada por

   $$\widehat{x}_{T+k} = 1.2\widehat{x}_{T+k-1} - 0.2\widehat{x}_{T+k-2}$$

   (d) Calcule $\widehat{x}_{T+2}$, supondo $\epsilon_T = 1$, $x_T = 4$ e $x_{T-1} = 3$.

   (e) Obtenha um intervalo de predição, a 95%, para $\widehat{x}_{T+2}$, sabendo que $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

5. Considere o processo MA(2) $X_t = (1 - 0.8B^2)\epsilon_t$. Mostre que as funções de covariância e autocorrelação são dadas, respectivamente, por

$$\gamma(k) = \begin{cases} 1.64\sigma_\epsilon^2 & \text{se } k = 0 \\ -0.8\sigma_\epsilon^2 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \rho(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ -0.49 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Justifique os vários passos.

6. Considere os dois seguintes modelos SARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)$_s$, que foram aplicados a um conjunto de observações mensais Xt em ambiente R

```
> modelo1 = arima(Xt, order=c(0,1,1), seasonal=list(order=c(0,1,1), period=12))
> modelo2 = arima(Xt, order=c(0,1,1), seasonal=list(order=c(0,1,2), period=12))
```

(a) Identifique estes dois modelos, indicando as respectivas ordens da parte regular, da parte sazonal e respectiva periodicidade.

(b) Assumindo que os resultados devolvidos foram os seguintes

```
> modelo1
Call:
arima(x = Xt, order = c(0, 1, 1), seasonal = list(order = c(0, 1, 1), period = 12))

Coefficients:
            ma1     sma1
        -0.4018  -0.5569
s.e.     0.0896   0.0731

sigma^2 estimated as 0.001348:  log likelihood = 244.7,  aic = -483.4
>
>
> modelo2
Call:
arima(x = Xt, order = c(0, 1, 1), seasonal = list(order = c(0, 1, 2), period = 12))

Coefficients:
            ma1     sma1    sma2
        -0.4154  -0.5979  0.0685
s.e.     0.0900   0.0946  0.0910

sigma^2 estimated as 0.00134:  log likelihood = 244.98,  aic = -481.96
```

i. Para cada um dos modelos, diga quais lhe parecem coeficientes estatisticamente significativos?
ii. Justifique porquê que o modelo 1 é preferível ao modelo 2 ?

(c) Apresente a fórmula matemática para X_t no caso do modelo 1.