$$f_\neg : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$$
$$0 \longmapsto 1$$
$$1 \longmapsto 0$$

$$f_\wedge : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$$
$$(1,1) \longmapsto 1$$
$$(1,0) \longmapsto 0$$
$$(0,1) \longmapsto 0$$
$$(0,0) \longmapsto 0$$

$$f_\vee : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$$
$$(1,0) \longmapsto 1$$
$$(1,1) \longmapsto 1$$
$$(0,1) \longmapsto 1$$
$$(0,0) \longmapsto 0$$

$$f_\rightarrow : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$$
$$(1,1) \longmapsto 1$$
$$(1,0) \longmapsto 0$$
$$(0,1) \longmapsto 1$$
$$(0,0) \longmapsto 1$$

$$f_\leftrightarrow : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$$
$$(1,0) \longmapsto 0$$
$$(1,1) \longmapsto 1$$
$$(0,1) \longmapsto 0$$
$$(0,0) \longmapsto 1$$

$v$ função de $\mathcal{F}^{CP}$ em $\{0,1\}$ é uma valoração quando:

$v(\bot) = 0$

$v(\neg\varphi) = f_\neg(v(\varphi))$, $\forall \varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

$v(\varphi \square \psi) = f_\square(v(\varphi), v(\psi))$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$
$\forall \square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$v$ valoração, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

- $v(\neg\varphi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$
  $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$

- $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$
  $v(\varphi \wedge \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$

- $v(\varphi \vee \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$
  $v(\varphi \vee \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$

- $v(\varphi \to \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$

- $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$.

$f : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ função

$\Downarrow$

Existe uma e uma só valoração $v$ t.q. $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$

exercício 2.1

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \in \{p_0, p_1\} \\ 1 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p_0, p_1\} \end{cases}$$

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_1, p_3\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p_1, p_3\} \end{cases}$$

- $\varphi_1 = (p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3))$

$$\begin{aligned} v_1(\varphi_1) &= \max\big(v_1(p_2), v_1(\neg p_1 \wedge p_3)\big) \\ &= \max\big(1, \min(v_1(\neg p_1), v_1(p_3))\big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(\varphi_1) &= \max\big(v_2(p_2), v_2(\neg p_1 \wedge p_3)\big) \\ &= \max\big(0, \min(v_2(\neg p_1), v_2(p_3))\big) \\ &= \max\big(0, \min(1 - v_2(p_1), 1)\big) \\ &= \max\big(0, \min(1-1, 1)\big) \\ &= \max(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

OU

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\neg p_1$ | $\neg p_1 \wedge p_3$ | $(p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \in \{p_0, p_1\} \\ 1 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_1, p_3\} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

- $\varphi_2 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg (p_2 \wedge p_0)$

$$v_1(\varphi_2) = \min\left(v_1(p_2 \vee p_0),\ v_1(\neg(p_2 \wedge p_0))\right)$$

$$= \min\left(\max(v_1(p_2), v_1(p_0)),\ 1 - v_1(p_2 \wedge p_0)\right)$$

$$= \min\left(\max(1, 0),\ 1 - \min(v_1(p_2), v_1(p_0))\right)$$

$$= \min\left(1,\ 1 - \min(1, 0)\right)$$

$$= \min(1, 1 - 0) = 1$$

$$v_2(\varphi_2) = \min\left(\max(v_2(p_2), v_2(p_0)),\ 1 - \min(v_2(p_2), v_2(p_0))\right)$$

$$= \min\left(\max(0, 0),\ 1 - \min(0, 0)\right)$$

$$= \min(0, 1) = 0$$

| | $p_0$ | $p_2$ | $p_2 \vee p_0$ | $p_2 \wedge p_0$ | $\neg(p_2 \wedge p_0)$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

- $\varphi_3 = (p_1 \rightarrow ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \perp))$

$v_1(\varphi_3) = 1$
$v_2(\varphi_3) = 0$

exercício 2.2

$\varphi_1 = \neg p_3 \land (\neg p_1 \lor p_2)$

$\varphi_2 = (\neg p_3 \lor \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_2)$

$\varphi_3 = \neg p_3 \to (p_1 \land \neg p_2)$

a) $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ $v$ valoração t.q. $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = 1$

$v(\varphi_1) = 1 \iff v(\neg p_3) = 1 \land v(\neg p_1 \lor p_2) = 1$

$v(\varphi_2) = 1 \iff v(\neg p_3 \lor \neg p_1) = v(p_1 \to p_2)$

$v(\neg p_3) = 1 \iff v(p_3) = 0$

$v(\neg p_3) = 1 \implies v(\neg p_3 \lor \neg p_1) = 1$ independentemente do valor de $v(p_1)$.

Pretendemos encontrar $v$ t.q. $v(\neg p_1 \lor p_2) = 1$ e $v(p_1 \to p_2) = 1$.

Se, por exemplo, $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1 \lor p_2) = v(p_1 \to p_2) = 1$.

Consideremos, por exemplo, $v$ dada por

$$v(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 3 \\ 1 & \text{se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3\} \end{cases}$$

a) cont.

$\{\varphi_2, \varphi_3\}$ $\quad$ $v'$ valoração tal que

$v'(\varphi_2) = v'(\varphi_3) = 1$

ex:

$v' : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ dada por

$$v'(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 2 \\ 1 & \text{se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2\} \end{cases}$$

b) Suponhamos que existe $v$ tal que $v(\varphi_1) = 1$ e $v(\varphi_3) = 1$.

De $v(\varphi_1) = 1$ sabemos que:

(1) $v(\neg p_3) = 1$, ou seja, $v(p_3) = 0$

e

(2) $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$

De $v(\varphi_3) = 1$ e de (1), sabemos que

(3) $v(p_1 \wedge \neg p_2) = 1$

Logo, $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_2) = 1$. (*).

(*) $\Rightarrow v(\neg p_1 \vee p_2) = 0$.

Mas isso contradiz (2).

Assim, não existe $v$ tal que $v(\varphi_1) = 1$ e $v(\varphi_3) = 1$.

exercício 2.3.

$$P \to Q$$

P é condição suficiente para Q

Q é condição necessária para P

a) $v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$

é uma condição suficiente para $v(p_3) = 0$. V ou F?

Sabendo que $v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$,

podemos concluir que $v(p_3) = 0$ ?

$$v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0 \implies \begin{array}{l} v(p_3 \to p_2) = 1 \\ \text{e } v(p_1) = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} v(p_3 \to p_2) = 1 \\ v(p_2) = 0 \end{array}\right\} \implies v(p_3) = 0.$$

Portanto, a afirmação é V.

b) Uma condição necessária para $v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) =$
$= 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$. V ou F ?

Se $v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) = 0$ então $v(p_1) = 1$ e
$v(p_3) = 0$ ?

$v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) = 0 \implies v(p_1) = 1$ e
$v(p_2 \to p_3) = 0 \implies v(p_1) = 1$ e
$v(p_2) = 1$ e $v(p_3) = 0$.

Portanto, $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$.

Assim, a afirmação é V.

c) Afirmação falsa
(porque $v((p_3 \to (p_1 \to p_3))) = 1 \not\Rightarrow v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1$)

exercício 2.4

$\models \varphi$ sse $v(\varphi)=1$, $\forall$ valoração $v$

a) Seja $v$ uma valoração. Temos que

$v((p_1 \to \perp) \vee p_1) = 1$ sse $v(p_1 \to \perp) = 1$ ou $v(p_1) = 1$

sse $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$,

o que é uma afirmação verdadeira.

Portanto,

$v((p_1 \to \perp) \vee p_1) = 1$, para toda a valoração

$v$ e

$(p_1 \to \perp) \vee p_1$ é uma tautologia.

OU

| $p_1$ | $p_1 \to \perp$ | $(p_1 \to \perp) \vee p_1$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

Como $\varphi = ((p_1 \to \perp) \vee p_1)$ tem valor lógico 1, independentemente do valor lógico de $p_1$, $\varphi$ é uma tautologia

b) é tautologia

c) $\varphi = \neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \vee p_2)$

$$\varphi \Leftrightarrow \neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \vee p_2)$$
$$\Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \vee p_2)$$
$$\Leftrightarrow \big(p_1 \vee (p_1 \vee p_2)\big) \wedge \big(p_2 \vee (p_1 \vee p_2)\big)$$
$$\Leftrightarrow (p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_2)$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{p_1 \vee p_2}_{\text{não é tautologia nem contradição}}$$

OU

| $p_1$ | $p_2$ | $p_1 \wedge p_2$ | $\neg(p_1 \wedge p_2)$ | $(p_1 \vee p_2)$ | $\neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \vee p_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Como o valor lógico de $\varphi$ depende dos valores lógicos de $p_1$ e $p_2$ (podendo ser 1 ou 0), $\varphi$ não é tautologia nem contradição.

d) $\varphi = (p_1 \vee \neg p_1) \to (p_1 \wedge \neg p_1)$

| $p_1$ | $\neg p_1$ | $p_1 \vee \neg p_1$ | $p_1 \wedge \neg p_1$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Logo, $\varphi$ é uma contradição.

exercício 2.5 V ou F

a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$

$\models \varphi \wedge \psi$ sse Para toda a valoração $v$, $v(\varphi \wedge \psi) = 1$

sse Para toda a valoração $v$, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$

sse Para toda a valoração $v$, $v(\varphi) = 1$ e
Para toda a valoração $v$, $v(\psi) = 1$

sse $\models \varphi$ e $\models \psi$. V

b) Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$

$\varphi = p_0$ É verdade que $\models p_0 \vee \neg p_0$ mas
$\psi = \neg p_0$ não é verdade que $\models p_0$ ou $\models \neg p_0$.

F

c) Afirmação verdadeira

d) Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

$\models \varphi \leftrightarrow \psi$ sse $\forall$ valoração $v$, $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$

sse $\forall$ valoração $v$, $v(\varphi) = v(\psi)$ $\circledast$

$\not\models \psi$ sse $\exists$ valoração $v'$ tal que $v'(\psi) = 0$.

Por $\circledast$, $v'(\varphi) = v'(\psi) = 0$.

Logo, existe pelo menos uma valoração que atribui o valor lógico 0 a $\varphi$, donde $\not\models \varphi$

V

Portanto, a afirmação é verdadeira