Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Métodos Numéricos para Equações de Derivadas Parciais

M. Irene Falcão
Mestrado em Matemática e Computação
2023/2024

EDP e Fórmulas de Diferenças

EDPs de 2ª ordem

Vamos considerar equações de derivadas parciais (EDPs) de 2ª ordem quasi-lineares, em duas variáveis independentes, isto é, equações da forma

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e, \tag{1}$$

onde $u(x, y)$ é uma função continuamente diferenciável até à 2ª ordem num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e a, b, c e e são funções de x, y, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$, mas não de derivadas de ordem superior.

Curvas características

Como é sabido, quando tratamos equações diferenciais ordinárias numericamente, é usual começar-se a integração num certo ponto onde os valores da solução u e de algumas das suas derivadas são conhecidos. Por exemplo, para uma equação de 2ª ordem é geralmente suficiente conhecer $u_0 = u(x_0)$ e $u_0' = u'(x_0)$; derivadas de ordem superior são então obtidas da equação diferencial, por derivações sucessivas. Para uma equação de derivadas parciais, é natural pensar-se num processo semelhante. Neste caso, será razoável substituir o ponto de partida x_0 por uma curva *inicial* ao longo da qual sejam dados os valores de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Suponhamos então que C é uma curva regular do plano xy ao longo da qual são conhecidos os valores de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ e vejamos em que condições esta informação é suficiente para determinar uma única solução da equação (1) em pontos "fora" de C. Por outras palavras, procuramos uma solução da equação diferencial (1) na vizinhança de um ponto arbitrário $P = (x, y)$ de C:

$$u(x+h, y+k) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \left(\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \right)_P h^m k^n, \tag{2}$$

ou seja, pretendemos saber qual a possibilidade de determinar, de forma única, os coeficientes da expansão (2), usando a equação diferencial (1) e os valores de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ sobre C.

Introduzamos as notações

$$p := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q := \frac{\partial u}{\partial y}, \quad r := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t := \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Como no ponto P todas as derivadas de ordem superior à segunda podem ser determinadas em termos dos valores em P de u, p, q, r, s e t, por sucessiva diferenciação da equação diferencial

$$ar + bs + ct = e, \tag{3}$$

segue-se que precisamos apenas de determinar r, s e t em P. Assim, o problema reduz-se ao da determinação das condições sob as quais os valores de u, p e q são suficientes para a determinação, de forma única, dos valores de r, s e t ao longo de C que satisfaçam a equação diferencial (3).

Suponhamos que a curva C é definida através das suas equações paramétricas

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \tag{4}$$

onde τ denota o comprimento de arco de C. Temos então

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} = r\frac{dx}{d\tau} + s\frac{dy}{d\tau} \tag{5}$$

e

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} = s\frac{dx}{d\tau} + t\frac{dy}{d\tau} \tag{6}$$

As equações (5)-(6) juntamente com a equação (3) constituem um sistema para a determinação das "incógnitas" r, s e t, cuja matriz ampliada é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & e \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & 0 & \frac{dp}{d\tau} \\ 0 & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dq}{d\tau} \end{array}\right).$$

Este sistema terá solução única sse o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} \end{vmatrix} \tag{7}$$

for não nulo. Segue-se imediatamente que o determinante (7) se anula sse

$$a\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - b\frac{dx}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} + c\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = 0$$

ou, equivalentemente, se

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b\frac{dy}{dx} + c = 0. \tag{8}$$

Neste caso não existe solução do sistema (não é possível determinar r, s e t) a não ser que se anule cada um dos determinantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b & c & e \\ \frac{dy}{d\tau} & 0 & \frac{dp}{d\tau} \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dq}{d\tau} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c & -e \\ \frac{dx}{d\tau} & 0 & -\frac{dp}{d\tau} \\ 0 & \frac{dy}{d\tau} & -\frac{dq}{d\tau} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & b & e \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & \frac{dp}{d\tau} \\ 0 & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dq}{d\tau} \end{vmatrix}.$$

Observação: Facilmente se prova que quando D é nulo, se algum dos determinantes D_1, D_2, D_3 se anula, então os outros determinantes também se anulam (sendo o sistema indeterminado). Em particular, $D_2 = 0$ conduz à seguinte equação:

$$a\frac{dy}{dx}dp + cdq - edy = 0. \tag{9}$$

A equação (8) determina duas direções $\frac{dy}{dx}$, as quais definem, por integração, duas curvas (ou mais propriamente duas famílias de curvas) chamadas curvas características. Mais precisamente, três casos distintos se podem dar:

- Se $b^2 - 4ac > 0$, a equação tem duas raízes *reais distintas*, ou seja, existem de facto duas curvas características que passam no ponto $P = (x, y)$. Neste caso, a equação diz-se hiperbólica
- Se $b^2 - 4ac = 0$, a equação uma e uma o raiz *real*. Há portanto uma única curva característica passando por P. Neste caso, a equação diferencial é dita parabólica.
- Se $b^2 - 4ac < 0$ não existem curvas características. Neste caso, a equação diferencial chama-se elíptica.

Convém salientar que uma equação diferencial pode ser, por exemplo, elíptica num certo domínio, sendo hiperbólica noutro, ou seja, que o tipo de equação diferencial pode variar no conjunto de pontos onde está definida.

Vemos assim que, quando uma equação é hiperbólica num certo domínio, em cada ponto desse domínio existem duas direções – as direções das curvas características – dadas pela solução da equação (8), ao longo das quais o valor de u, p e q terão que satisfazer a equação (9), não podendo portanto ser dados arbitrariamente. Na prática, a relação entre as diferenciais de p e q expressa pela equação (9) pode ser utilizada para integrar numericamente a equação diferencial – trata-se do chamado método das características, de que voltaremos a falar mais à frente.

Exemplos

Equações parabólicas

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ equação de difusão (ou do calor)

Equações elípticas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g = 0$$ equação de Poisson

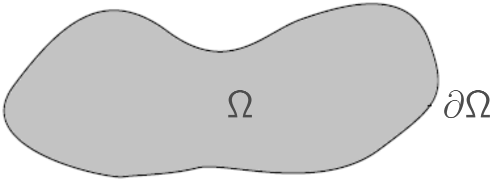
Equações hipérbolicas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ equação das ondas

Condições iniciais e condições de fronteira

A solução de uma equação de derivadas parciais de 2ª ordem envolve duas funções arbitrárias. Assim, para se obter uma solução particular, é necessário especificarem-se condições adicionais à equação diferencial.

➠ No caso de uma equação diferencial elíptica, a sua solução é pretendida no interior de uma região fechada e limitada Ω, sendo a solução u ou a sua derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ (ou uma combinação linear de ambas) especificadas na fronteira de Ω. Trata-se de um problema de valores de fronteira.

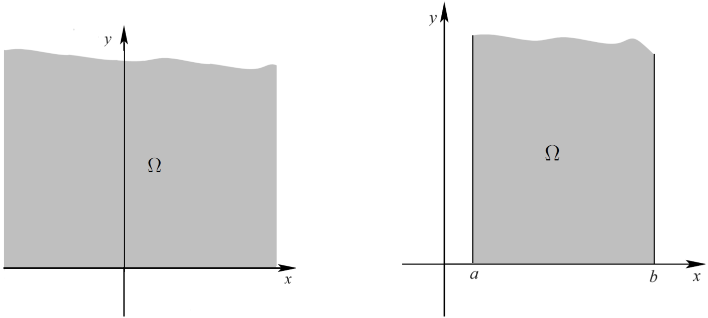


➠ No caso de uma equação parabólica, o domínio Ω onde se pretende a solução é, em geral, o semiplano

$$\Omega = \{(x,y) : y \geq 0, -\infty < x < +\infty\}, \tag{10}$$

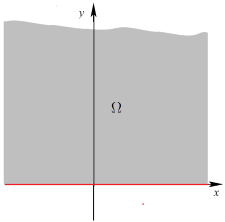
ou uma semifaixa

$$\Omega = \{(x,y) : y \geq 0, a \leq x \leq b\}. \tag{11}$$



No primeiro caso são dados os valores de u ao longo da reta $y = 0$, isto é, é dada a *condição inicial*

$$u(x, 0) = f(x), \; -\infty < x < +\infty.$$



Em geral, neste tipo de problemas a variável y representa o tempo, correspondendo portanto a condição anterior a especificar u no *instante inicial* $y = 0$. Trata-se de um problema de valores iniciais.

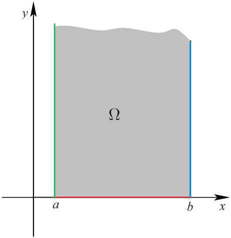
No segundo caso, é dada a *condição inicial*

$$u(x,0) = f(x),\ \ a \le x \le b,$$

juntamente com as *condições de fronteira*

$$u(a,y) = \alpha(y)$$

$$u(b,y) = \beta(y),\ \ y \ge 0$$



Trata-se de um problema de valores iniciais e de fronteira.

➠ No caso de uma equação hiperbólica, temos os mesmos domínio semi-infinitos (10) ou (11). Quando o domínio é o semiplano (10) são dadas as condições iniciais

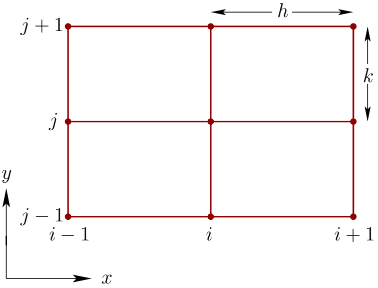
$$
\begin{aligned}
u(x, 0) &= f(x)) \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= g(x), \ -\infty < x < +\infty.
\end{aligned}
$$

Quando o domínio é a faixa (11) são dadas condições iniciais do tipo das anteriores, mas há necessidade de se especificarem também condições de fronteira.

Trata-se também de um problema de valores iniciais e de fronteira.

A essência dos métodos de diferenças finitas é a substituição das derivadas envolvidas em (1) por aproximações de diferenças finitas.

Considere o plano *XOY* dividido em retângulos iguais de lados h e k, paralelos aos eixos coordenados *OX* e *OY*, respetivamente, onde a origem coincide com um vértice dos retângulos.



Seja P um ponto genérico desta rede (i.e., um vértice de um dos retângulos) de coordenadas $x_i = ih$, $y_j = jk$, com i e j inteiros.

Seja u uma função de duas variáveis independentes x e y e denotemos o valor de u em P por $u_{i,j} := u(ih, jk)$. Se u é suficientemente diferenciável,as seguintes expressões obtêm-se facilmente por expansão em série de Taylor em torno do ponto (x_i, y_j) (ver Exercício 1.15):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x_i + \xi_i h, y_j)\\ &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2),\end{aligned}$$

$\xi_i \in (0,1)$.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4}{\partial y^4}u(x_i, y_j + \nu_j k)$$
$$= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + \mathcal{O}(k^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x_i, y_j + \mu_j k)$$
$$= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + \mathcal{O}(k),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} - \frac{k^2}{6}\frac{\partial^3}{\partial y^3}u(x_i, y_j + \mu_j k)$$
$$= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + \mathcal{O}(k^2)$$