

Lógica EI

exercício 2.19

DMAT UMinho

12.abril.2021

exercício 2.19

O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

(a) Os três depoimentos são consistentes?

(b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

(c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

(d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?

(e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

exercício 2.19

O Carlos é inocente: p_0

O João é inocente: p_1

O Manuel é inocente: p_2

Os depoimentos podem ser traduzidos por

- Carlos: $\varphi = \neg p_1 \wedge p_2$
- João: $\psi = \neg p_0 \rightarrow \neg p_2$
- Manuel: $\sigma = p_2 \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1)$

exercício 2.19

Consideremos a correspondente tabela de verdade:

| p_0 | p_1 | p_2 | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | φ | ψ | σ |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|--------------------------|-----------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

exercício 2.19

(a) Os três depoimentos são consistentes? (é o mesmo que perguntar se o conjunto $\{\varphi, \psi, \sigma\}$ é consistente ou, equivalentemente, se há alguma linha da tabela em que φ, ψ, σ sejam todas verdadeiras)

| p_0 | p_1 | p_2 | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | φ | ψ | σ |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|--------------------------|-----------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

R: sim

exercício 2.19

(b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

Vejamos se o depoimento do Manuel (σ) é consequência dos outros dois depoimentos (é o mesmo que perguntar se σ é consequência semântica de $\{\varphi, \psi\}$; a pergunta que se coloca é: sempre que φ e ψ são simultaneamente verdadeiras, σ também é verdadeira?)

| p_0 | p_1 | p_2 | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | φ | ψ | σ |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|--------------------------|-----------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

R: Pela tabela, vemos que $\varphi, \psi \models \sigma$, ou seja, o depoimento do Manuel é consequência dos outros dois depoimentos. Por outras palavras, se o João e o Carlos disserem a verdade, o Manuel também diz a verdade.

exercício 2.19

Vejamos se o depoimento do João (ψ) é consequência dos outros dois depoimentos: (é o mesmo que perguntar se ψ é consequência semântica de $\{\varphi, \sigma\}$; a pergunta que se coloca é: sempre que φ e σ são simultaneamente verdadeiras, ψ também é verdadeira?)

| p_0 | p_1 | p_2 | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | φ | ψ | σ |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|--------------------------|-----------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

R: Pela tabela, vemos que $\varphi, \sigma \not\models \psi$, ou seja, o depoimento do João não é consequência dos outros dois depoimentos. Por outras palavras, se o Carlos e o Manuel disserem a verdade, não é garantido que o João também diga a verdade.

exercício 2.19

Vejamos se o depoimento do Carlos (φ) é consequência dos outros dois depoimentos: (é o mesmo que perguntar se φ é consequência semântica de $\{\psi, \sigma\}$; a pergunta que se coloca é: sempre que ψ e σ são simultaneamente verdadeiras, φ também é verdadeira?)

| p_0 | p_1 | p_2 | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | φ | ψ | σ |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|--------------------------|-----------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

R: Pela tabela, vemos que $\psi, \sigma \models \varphi$, ou seja, o depoimento do Carlos é consequência dos outros dois depoimentos. Por outras palavras, se o João e o Manuel disserem a verdade, o Carlos também diz a verdade.

exercício 2.19

(c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu? (os três réus estarem inocentes corresponde a termos p_0 , p_1 e p_2 verdadeiras, ou seja, corresponde à primeira linha da tabela)

| p_0 | p_1 | p_2 | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | φ | ψ | σ |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|--------------------------|-----------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Na primeira linha da tabela, os depoimentos falsos são φ e σ , ou seja, os depoimentos de Carlos e Manuel. Portanto, quem mentiu foram o Carlos e o Manuel.

exercício 2.19

(d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado? (todos dizerem a verdade corresponde a todos os depoimentos serem verdadeiros, ou seja, corresponde à terceira linha da tabela)

| p_0 | p_1 | p_2 | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | φ | ψ | σ |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|--------------------------|-----------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Na terceira linha da tabela, p_0 e p_2 são verdadeiras e p_1 é falsa. Portanto, o Carlos e o Manuel são inocentes e o João é culpado.

exercício 2.19

(e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado? (no caso em que um dos suspeitos é inocente - com a correspondente variável proposicional verdadeira -, o seu depoimento deve ser verdadeiro; no caso em que um dos suspeitos é culpado - com a correspondente variável proposicional falsa -, o seu depoimento deve ser falso)

| p_0 | p_1 | p_2 | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | $\neg p_0 \vee \neg p_1$ | φ | ψ | σ |
|-------|-------|-------|------------|------------|------------|--------------------------|-----------|--------|----------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

A única situação que verifica as condições do enunciado desta alínea é a descrita na sexta linha da tabela. De facto, na primeira, na segunda e na quarta linhas temos o Carlos inocente mas o seu depoimento é falso; na terceira e na oitava linhas temos o João culpado mas o seu depoimento é verdadeiro; na quinta linha temos o João inocente mas o seu depoimento é falso e na sétima linha temos o Carlos culpado mas o seu depoimento é verdadeiro. Portanto, resta a sexta linha, em que o Carlos e o Manuel são culpados e os seus depoimentos são falsos e em que o João é inocente e o seu depoimento é verdadeiro.

R: Carlos e Manuel