Lógica da Programação

Exercícios Folha 1

1 Revisões sobre sintaxe e semântica da lógica clássica

1.1 Defina, por recursão, a função $\text{VAR} : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V}_p)$, que a cada fórmula faz corresponder o conjunto das variáveis proposicionais que nela ocorrem.

1.2 Sejam v_1 e v_2 valorações. Prove que: para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p$, se para todo $p \in \text{VAR}(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

1.3 Sejam φ, ψ fórmulas proposicionais e p uma variável proposicional. A notação $\varphi[\psi/p]$ representa a fórmula que resulta de, em φ, substituirmos as ocorrências de p por ψ. Defina, por recursão, esta operação de *substituição*.

1.4 No caso da lógica proposicional clássica, o *Teorema da Substituição* estabelece que, dado $p \in \mathcal{V}_p$ e dados $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_p$ tais que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_p$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Prove este resultado.

1.5 Neste exercício mostrar-se-á que o fragmento $\mathcal{F}_{\neg,\to}$ é *completo*.

a) Dê exemplo de $\varphi \in \mathcal{F}_{\neg,\to}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow (p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))$.

b) Defina, por recursão, uma função $f : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{F}_{\neg,\to}$ tal que para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p$, $f(\varphi) \Leftrightarrow \varphi$.

c) Prove que, efetivamente, a função f definida na alínea anterior tem a propriedade pretendida.

d) Conclua que $\mathcal{F}_{\neg,\to}$ é completo, ou seja, que para todo $\varphi \in \mathcal{F}_p$, existe $\psi \in \mathcal{F}_{\neg,\to}$ tal que $\psi \Leftrightarrow \varphi$.

1.6 Sejam $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas proposicionais e sejam Γ, Δ conjuntos de fórmulas proposicionais. Prove que:

a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$;

b) se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$;

c) se $\Gamma \models \varphi_1$ e $\Delta, \varphi_1 \models \varphi_2$, então $\Gamma, \Delta \models \varphi_2$;

d) $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \varphi$ se e só se $\models (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$;

e) $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistente.

1.7 Enuncie os princípios de indução e recursão estruturais para o conjunto dos L-termos e defina o conceito de *subtermo*.

1.8 Sejam t, t_1, t_2 L-termos e x, y variáveis distintas. A notação $t[t_1/x]$ (resp. $t[t_1/x; t_2/y]$) representa a *substituição* (resp. *substituição simultânea*) em t de x (resp. x e y) por t_1 (resp. t_1 e t_2) e a notação $\mathrm{VAR}(t)$ representa o conjunto das variáveis que ocorre em t.

a) Descreva recursivamente as duas operações de substituição, bem como a operação VAR.

b) Prove que: se $x \notin \mathrm{VAR}(t_2)$ e $y \notin \mathrm{VAR}(t_1)$, então $t[t_1/x; t_2/y] = (t[t_1/x])[t_2/y] = (t[t_2/y])[t_1/x]$.

c) Mostre que, na alínea anterior, a condição $x \notin \mathrm{VAR}(t_2)$ e $y \notin \mathrm{VAR}(t_1)$ é necessária.

1.9 Apresente uma descrição recursiva do conjunto das variáveis livres de uma L-fórmula.

1.10 Sejam t_0 e t_1 L-termos, x uma variável e seja a uma atribuição numa L-estrutura E. Prove que: $t_0[t_1/x][a]_E = t_0[a\begin{pmatrix} x \\ t_1[a] \end{pmatrix}]_E$.

1.11 Repita o exercício 1.7 para o conjunto das L-fórmulas.

1.12 Seja E uma L-estrutura. Prove que: para toda a L-fórmula φ a para todas as atribuições a_1 e a_2 atribuições em E, se para todo $x \in \mathrm{LIV}(\varphi)$, $a_1(x) = a_2(x)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

1.13 Sejam φ uma L-fórmula, E uma L-estrutura, a uma atribuição em E e x uma variável substituível sem captura de variáveis por um L-termo t em φ. Prove que: $E \models \varphi[t/x][a]$ sse $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$.

1.14 Sejam x, y variáveis e φ, ψ L-fórmulas. Prove que:

a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ e $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;

b) $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$, $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$, mas não necessariamente $\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$;

c) $QxQy\varphi \Leftrightarrow QyQx\varphi$ (para $Q \in \{\exists, \forall\}$);

d) $\models \exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$, mas não necessariamente $\models \forall x\exists y\varphi \to \exists y\forall x\varphi$;

e) $Qx\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$ ($Q \in \{\exists, \forall\}$);

f) $Qx\varphi \Leftrightarrow Qy\varphi[y/x]$ se $y \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$ e x é substituível sem captura de variáveis por y em φ (para $Q \in \{\exists, \forall\}$).

1.15 Sejam φ, ψ L-fórmulas, Γ um conjunto de L-fórmulas, x uma variável e t um L-termo. Prove que:

a) se $\Gamma \models \forall x\varphi$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$;

b) se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin \mathrm{LIV}(\Gamma)$, então $\Gamma \models \forall x\varphi$;

c) se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x é substituível sem captura de variáveis por t em φ, então $\Gamma \models \exists x\varphi$;

d) se $\Gamma \models \exists x\varphi$, $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$, e $x \notin \mathrm{LIV}(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

2 Dedução natural

2.1 Sejam φ, ψ e σ fórmulas proposicionais. Com base na interpretação construtiva de provas BHK, justifique que existem provas das fórmulas que se seguem.

a) $\varphi \to \varphi$ b) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$

c) $\psi \to (\varphi \to \psi)$ d) $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$

2.2 Sejam φ, ψ e σ fórmulas proposicionais. Encontre derivações que mostrem que as seguintes fórmulas são teoremas de DNP_i e de DNP_c. Em cada um dos casos, explicite as subderivações das derivações encontradas.

a) $\varphi \to \varphi$ b) $\psi \to (\varphi \to \psi)$

c) $\varphi \to \neg\neg\varphi$ d) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

e) $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$ f) $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$

g) $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$ h) $((\varphi \vee \psi) \vee \sigma) \to (\varphi \vee (\psi \vee \sigma))$

2.3 Sejam φ, ψ e σ fórmulas proposicionais. Encontre demonstrações em DNP_c de cada uma das seguintes fórmulas. Diga se em algum dos casos a demonstração encontrada permite concluir que a fórmula é um teorema de DNP_i.

a) $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ b) $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$

c) $(\neg\psi \wedge \neg\varphi) \leftrightarrow \neg(\psi \vee \varphi)$ d) $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

2.4 Seja φ uma fórmula proposicional.

a) Indique uma derivação que mostre que $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ é um teorema de DNP_i. Explicite as subderivações da derivação encontrada.

b) Assumindo o cancelamento por classes de hipóteses, indique derivações distintas que provem que $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ é um teorema de DNP_i. Explicite as subderivações das derivações encontradas.

2.5 Considere ${\mathrm{DNP}_c}^{\perp,\to}$ (o fragmento de DNP_c na linguagem $\perp, \to$).

a) Defina indutivamente o conjunto das derivações de ${\mathrm{DNP}_c}^{\perp,\to}$.

b) Enuncie o princípio de indução associado às derivações de ${\mathrm{DNP}_c}^{\perp,\to}$.

c) Defina o conceito de subderivação em ${\mathrm{DNP}_c}^{\perp,\to}$.

d) Defina por recursão a função $H : \mathcal{D}^{{\mathrm{DNP}_c}^{\perp,\to}} \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_p^{\perp,\to})$ tal que

$$H(D) = \{\varphi \in \mathcal{F}_p^{\perp,\to} : \varphi \text{ é hipótese não cancelada de } D\}.$$

e) Prove por indução que: se D é uma derivação de φ a partir de Γ e D' é uma derivação de ψ a partir de Δ, então $\begin{array}{c} D' \\ [\psi] \\ D \end{array}$ é uma derivação de φ a partir de $(\Gamma \setminus \{\psi\}) \cup \Delta$.

2.6 Dadas fórmulas φ e ψ numa linguagem L e variáveis x e y, construa derivações que mostrem que as seguintes L-fórmulas são teoremas de DN_c. Diga se em algum dos casos a derivação encontrada permite também concluir que se trata de um teorema de DN_i.

a) $\forall x\,(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

b) $\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$ se $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$

c) $\exists x\exists y\varphi \to \exists y\exists x\varphi$

d) $\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$

e) $\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$

f) $(\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x\,(\varphi \to \psi)$ se $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$

2.7 Demonstre as proposições que se seguem relativamente ao sistema DNP_ℓ (para $\ell = c$ e para $\ell = i$):

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_\ell \varphi$.
b) Se $\Gamma \vdash_\ell \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash_\ell \varphi$.
c) Se $\Gamma, \varphi \vdash_\ell \psi$ e $\Delta \vdash_\ell \varphi$, então $\Gamma, \Delta \vdash_\ell \psi$.
d) $\Gamma \vdash_\ell \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash_\ell \varphi$ e $\Gamma \vdash_\ell \psi$.
e) $\Gamma \vdash_\ell \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash_\ell \psi$.
f) $\Gamma \vdash_\ell \varphi \leftrightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash_\ell \psi$ e $\Gamma, \psi \vdash_\ell \varphi$.
g) $\Gamma \vdash_\ell \neg\varphi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash_\ell \bot$.
h) $\Gamma \vdash_\ell \varphi \vee \psi$ se $\Gamma \vdash_\ell \varphi$ ou $\Gamma \vdash_\ell \psi$. (Dê um contra-exemplo para a implicação recíproca.)
i) $\Gamma \vdash_\ell \bot$ se e só se $\Gamma \vdash_\ell \varphi$, para qualquer φ.

2.8 Considere de novo ${\mathrm{DNP}_c}^{\bot,\to}$ (o fragmento de DNP_c na linguagem $\bot$, $\to$).

a) Prove por indução que: para todo $D \in {\mathrm{DNP}_c}^{\bot,\to}$, se φ é a conclusão de D, então $H(D) \models \varphi$ (onde H é a função definida no exercício 2.5).
b) Conclua o Teorema da Correção para este fragmento: se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \models \varphi$.

2.9 Mostre que:

a) $\models \varphi \vee \neg\varphi$ e $\vdash_c \varphi \vee \neg\varphi$.
b) $p_0 \to p_1 \nvdash_c p_0$.
c) $\nvdash_i \neg(p_0 \wedge p_1) \to \neg p_0$.
d) Se $\Gamma, \varphi \vdash_i \psi$ e $\models \varphi$, então $\Gamma \vdash_c \psi$.

2.10 Seja $\mathrm{DNP}_c{}^{\neg\neg}$ o sistema obtido de DNP_c substituindo a regra de redução ao absurdo pela *regra da dupla negação*

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \neg\neg.$$

a) Prove que $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ e $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ são teoremas de $\mathrm{DNP}_c{}^{\neg\neg}$.

b) Prove que φ é derivável a partir de Γ em DNP_c sse o mesmo acontece em $\mathrm{DNP}_c{}^{\neg\neg}$. (Faça a prova apenas para o fragmento $\to, \bot, \neg$.)

c) Conclua que $\mathrm{DNP}_c{}^{\neg\neg}$ é um sistema correto e completo para a lógica proposicional clássica.

2.11 A *tradução da dupla negação* de Gödel (da lógica clássica na lógica intuicionista), para o fragmento $\to, \bot, \neg$, é definida recursivamente como se segue (onde φ^* denota a fórmula que resulta da aplicação da tradução à fórmula φ): $\bot^* {=} \bot$; $p^* = \neg\neg p$ (para toda a variável proposicional p); $(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*$; $(\varphi \to \psi)^* = \varphi^* \to \psi^*$.

a) Determine $(\neg\neg p_0 \to p_0)^*$.

b) Prove que $(\neg\neg p_0 \to p_0)^*$ é um teorema de DNP_i.

c) Prove por indução em φ que $\neg\neg\varphi^* \to \varphi^*$ é um teorema de DNP_i.

d) Prove que se $\Gamma \vdash_c \varphi$, então $\Gamma^* \vdash_i \varphi^*$ (onde $\Gamma^* = \{\psi^* : \psi \in \Gamma\}$).

2.12 Para cada fórmula φ_0 do exercício 2.6, mostre que o sequente $\Rightarrow \varphi_0$ é derivável em $\mathrm{DN}_c^{\Rightarrow}$.

2.13 Para o fragmento da lógica proposicional na linguagem $\bot, \neg, \wedge$, prove que $\Gamma \vdash_c \varphi$ sse $\vdash_c \Gamma \Rightarrow \varphi$.

2.14 Mostre que, nos sistemas $\mathrm{DNP}_\ell^{\Rightarrow w}$ ($\ell \in \{c, i\}$), qualquer das seguintes versões da regra de introdução para a conjunção

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \quad \Delta \Rightarrow \psi}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\ \wedge I \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\ \wedge I'$$

produz o mesmo conjunto de sequentes deriváveis.

2.15 Nos sistemas $\mathrm{DNP}_\ell^{\Rightarrow w}$ ($\ell \in \{c, i\}$), qualquer das seguintes versões da regra de introdução para a implicação

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \psi}{\Gamma \backslash \{\varphi\} \Rightarrow \varphi \to \psi} \to I \qquad \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi} \to I'\ (\varphi \notin \Gamma)$$

produz o mesmo conjunto de sequentes deriváveis. Prove o resultado para o fragmento implicacional.

2.16 Escreva as regras de inferência para dedução natural com sequentes e classes de hipóteses. Para cada fórmula φ_0 do exercício 2.2, encontre uma derivação do sequente $\Rightarrow \varphi_0$.

3 λ-calculus: sintaxe e tipos simples

3.1 Indique quais das seguintes palavras são λ-termos.

(i) (x_1x_2). (ii) x_1x_2.

(iii) $((x_1)(x_2))$. (iv) $(\lambda x_2.x_1x_2)$.

(v) $(\lambda x_0(x_1x_2))$. (vi) $(\lambda x_0\lambda x_2(x_1x_2))$.

(vii) $(\lambda x_0((\lambda x_1x_1)x_2))$. (viii) $(\lambda x_0((\lambda x_0x_0)x_2))$.

(ix) $(\lambda x_0x_2(\lambda x_0x_0x_2))$. (x) $(\lambda x_0x_2((\lambda x_0x_0)x_2))$.

3.2 Considere a expressão $x_0\lambda x_0.x_0(x_1x_2)$. Indique qual dos seguintes termos é abreviado por esta expressão, e escreva abreviadamente os restantes.

(i) $((x_0(\lambda x_0x_0))(x_1x_2))$.

(ii) $(x_0((\lambda x_0x_0)(x_1x_2)))$.

(iii) $(x_0(\lambda x_0(x_0(x_1x_2))))$.

3.3 Enuncie os princípios de indução e recursão estruturais associados a Λ.

3.4 Defina recursivamente uma função que calcule o conjunto $\mathrm{LIV}(M)$, para cada λ-termo M.

3.5 Defina recursivamente uma função que, para cada λ-termo M, calcule o conjunto $\mathrm{LIG}(M)$ das variáveis com ocorrências ligadas em M.

3.6 Considere o predicado $SSCV(x, M, N)$ ("x substituível sem captura de variáveis por M em N"). Dê exemplos de x, M e N, tais que:

a) o predicado $SSCV(x, M, N)$ seja verdadeiro;
b) o predicado $SSCV(x, M, N)$ seja falso.

3.7 Dê uma definição indutiva do predicado $SSCV(x, M, N)$.

3.8 Sejam $M = \lambda x_0.x_0x_1(\lambda x_1.x_0x_1)$ e $N \in \Lambda$.

a) Indique λ-termos M' tais que $M =_\alpha M'$.
b) Indique um λ-termo M' tal que $M =_\alpha M'$ e $\mathrm{LIV}(M') \cap \mathrm{LIG}(M') = \emptyset$.
c) Para cada $y \in \{x_0, x_1\}$, mostre que existe M' tal que $M =_\alpha M'$ e $SSCV(y, N, M')$.

3.9 Mostre que:

a) Se $\mathrm{LIV}(M) = \emptyset$ então $M[N/x] = M$.
b) Se $x \notin \mathrm{LIV}(N)$ então $x \notin \mathrm{LIV}(M[N/x])$.

Lógica da Programação

Exercícios Folha 7

3.10 Identifique as afirmações verdadeiras (considerando que x e y são variáveis distintas e que τ e σ são tipos distintos):

(i) $x : \sigma \vdash \lambda y^{\tau}.x : \tau \to \sigma$.
(ii) $x : \sigma \vdash \lambda y^{\tau}.x : \sigma \to \sigma$.
(iii) $\vdash \lambda x^{\sigma} y^{\tau}.x : \sigma \to \tau \to \sigma$.
(iv) $\vdash \lambda x^{\sigma \to \sigma}.xx : (\sigma \to \sigma) \to \sigma$.
(v) $\vdash \lambda x^{\tau \to \sigma} y^{\tau}.xy : (\tau \to \sigma) \to \tau \to \sigma$.
(vi) $\vdash \lambda x^{\tau \to \sigma} y^{\tau}.xy : (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma$.

3.11 Repita o exercício anterior, apagando as anotações de tipos nas abstrações e considerando tipificação *à la* Curry.

3.12 Mostre que os seguintes termos são tipificáveis (considerando que x, y, z são variáveis distintas e que τ, σ, ρ são tipos distintos):

(i) $\lambda x^{\sigma \to \sigma \to \sigma} \lambda y^{\sigma}.xy$.
(ii) $\lambda xyz.xyz$.
(iii) $\lambda xyz.x(yz)$.
(iv) $\lambda x^{\sigma \to \tau \to \rho} y^{\sigma \to \tau} z^{\sigma}.xz(yz)$.

3.13 Um tipo σ diz-se *habitado num contexto* Γ se existir um termo M tal que $\Gamma \vdash M : \sigma$, chamando-se a um tal M um *habitante de* σ *no contexto* Γ. No caso particular em que Γ é vazio, diz-se simplesmente que σ é *habitado* e que um tal M é um *habitante de* σ.

Dado um tipo σ, seja $\tau = \sigma \to ((\sigma \to \sigma) \to \sigma)$.

a) Mostre que τ é habitado.
b) Mostre que τ tem uma infinidade de habitantes.

3.14 Considerando tipificação *à la* Curry, mostre que se M é tipificável, então todos os seus subtermos próprios também o são. (Observe que a implicação recíproca é falsa.)

3.15 Mostre que: se $\Gamma \vdash M : \sigma$, então:

a) se $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash M : \sigma$;
b) $\text{LIV}(M) \subseteq dom(\Gamma)$.

3.16 Mostre que: se $\Gamma \vdash N : \tau$ e $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$, então $\Gamma \vdash M[N/x] : \sigma$.

3.17 Seja $\Lambda_{\mathbb{T}}$ o conjunto dos λ-termos *à la* Church, com anotações de tipos simples nas abstrações, e seja $M \in \Lambda_{\mathbb{T}}$. Notemos por $|M|$ o λ-termo sem tipos que resulta de M apagando as anotações de tipos nas abstrações.

a) Defina por recursão a função $|\_| : \Lambda_{\mathbb{T}} \to \Lambda$.
b) Prove que: para todo $P \in \Lambda_{\mathbb{T}}$, se $\Gamma \vdash P : \sigma$ *à la* Church então $\Gamma \vdash |P| : \sigma$ *à la* Curry.
c) Prove que: para todo $M \in \Lambda$, se $\Gamma \vdash M : \sigma$ *à la* Curry então existe $P \in \Lambda_{\mathbb{T}}$ tal que $|P| = M$ e $\Gamma \vdash P : \sigma$ *à la* Church.
d) Conclua que: para todo $M \in \Lambda$, M é tipificável *à la* Curry sse existe $P \in \Lambda_{\mathbb{T}}$ tipificável *à la* Church tal que $|P| = M$.

4 Correspondência Curry-Howard (I)

4.1 Para cada uma das tipificações $\Gamma \vdash M : \sigma$ do exercício 3.10 que correspondem a afirmações verdadeiras, determine $d(\Gamma \vdash M : \sigma)$.

4.2 Para cada um dos termos M do exercício 3.12, encontre um conjunto de classes de hipóteses Γ, uma fórmula φ e uma derivação D de $\Gamma \Rightarrow \varphi$ em $\mathrm{DNP}_i^{\Rightarrow w}$ (com classes de hipóteses) tais que $t(D)$ é tipificação de $t(\Gamma) \vdash M : t(\varphi)$. (No caso dos λ-termos sem anotações nas abstrações, encontre previamente uma anotação apropriada para as abstrações.)

4.3 Para cada uma das derivações D construídas para provar as alíneas a) a c) do exercício 2.2, explicite uma derivação D' da mesma fórmula em $\mathrm{DNP}_i^{\Rightarrow w}$ com classes de hipóteses e determine $t(D')$ (vendo $\neg\varphi$ como uma abreviatura para $\varphi \to \perp$ e assumindo que $\perp$ é um tipo atómico simples e que $t(\perp) = \perp$).

4.4 Repita o exercício anterior para o teorema de DNP_i em 2.11 b).

4.5 Mostre que, para todo Γ, M, σ tais que $\Gamma \vdash M : \sigma$, $t(d(\Gamma \vdash M : \sigma)) = M$.

4.6
a) Defina uma função t_0 que a cada derivação D em $\mathrm{DNP}_i{}^{\to}$ com classes de hipóteses, com conclusão φ e conjunto de hipóteses não canceladas Γ, faça corresponder um terno $(M_0, \sigma_0, \Gamma_0)$, de tal modo que $\sigma_0 = t(\varphi)$, $\Gamma_0 = t(\Gamma)$ e que $\Gamma_0 \vdash M_0 : \sigma_0$ (usando tipificação *à la* Church).
b) Prove que, de facto, a função t_0 tem a propriedade requerida.

4.7 Mostre que se σ é um tipo simples habitado, então $d(\sigma)$ é uma fórmula válida do fragmento implicacional da lógica clássica.

4.8 Mostre que:

a) $(a_1 \to a_0) \to a_0$ não é habitado
b) $(a_0 \to a_0) \to a_0$ não é habitado
c) a_0 não é habitado no contexto $\{x : a_1 \to a_0, y : a_2 \to a_1\}$.

(Sugestão: recorra ao exercício anterior.)

4.9 Considere as fórmulas $\varphi_1 = ((p_0 \to p_1) \to p_0)$ e $\varphi_2 = ((p_0 \to p_1) \to p_1)$.

a) Indique uma derivação D do sequente $\Rightarrow \varphi_1 \to \varphi_2$, em $\mathrm{DNP}_i^{\Rightarrow w}$ com classes de hipóteses, e determine o λ-termo *à la Church* $t(D)$ associado a D.

b) Diga se o tipo $t(\varphi_1 \to \varphi_2)$ é habitado.

c) Mostre que $\varphi_2 \to \varphi_1$ não é teorema de DNP_c e diga se o tipo $t(\varphi_2 \to \varphi_1)$ é habitado.

5 λ-calculus: redução e expressividade

5.1 Considere os combinadores

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathbf{I} & = & \lambda x.x & & \mathbf{K} & = & \lambda xy.x \\ \mathbf{S} & = & \lambda xyz.xz(yz) & & \mathbf{W} & = & \lambda xy.y \\ \Delta & = & \lambda x.xx & & \Omega & = & \Delta\Delta \end{array}$$

a) Verifique que $\Delta\mathbf{I} \to_\beta \mathbf{II}$.
b) Indique n tal que $\mathbf{SKK} \to_\beta^n \mathbf{I}$.
c) Determine $\{M \in \Lambda : \mathbf{W}\Omega\mathbf{I} \to_\beta^2 M\}$.
d) Calcule todas as sequências de β-reduções a partir dos seguintes termos:

(i) $\mathbf{I}(\mathbf{II})$. (ii) $\mathbf{SK}x$. (iii) Ω. (iv) $\mathbf{KI}\Omega$.

5.2 Mostre que:

(i) $I =_\beta \mathbf{SKK}$.
(ii) $\mathbf{I}M =_\beta \mathbf{II}M$, para todo o M.
(iii) $\Delta\mathbf{I} =_\beta \mathbf{W}\Omega\mathbf{I}$.

5.3 Suponhamos que $M_1 \to_\beta M_2 \leftarrow_\beta M_3 \to_\beta M_4$ e $(M_4, N) \in \beta$. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras, onde a notação $M \to_\beta^+ N$ significa $M \to_\beta^n N$ para algum $n \geq 1$:

(i) $M_1 \to_\beta^* M_2$. (ii) $M_1 \to_\beta^+ M_2$. (iii) $M_1 =_\beta M_2$.
(iv) $M_1 \to_\beta^+ M_3$. (v) $M_1 =_\beta M_3$. (vi) $M_3 =_\beta M_1$.
(vii) $M_2 \to_\beta^+ M_4$. (viii) $M_2 =_\beta M_4$. (ix) $M_4 =_\beta M_1$.
(x) $M_4 \to_\beta N$. (xi) $N =_\beta M_4$. (xii) $M_1 =_\beta N$.

5.4 Indique, caso exista, uma forma β-normal para os seguintes termos:

(i) $(\lambda x.xy)\mathbf{I}$. (ii) $xy\mathbf{K}$. (iii) $\Omega\Omega$.

5.5 a) Sejam $P = \mathbf{KK}x$ e Q a sua forma β-normal. Calcule $LIV(Q)$.
b) Mostre que: se $M \to_\beta N$ então $LIV(M) \supseteq LIV(N)$.

5.6 Mostre que: se $M =_\beta N$, então existe P tal que $M \to_\beta^* P$ e $N \to_\beta^* P$.

5.7 Mostre que as seguintes afirmações não são verdadeiras.

(i) $\mathbf{I} =_\beta K$.
(ii) $\Delta =_\beta \Omega$.
(iii) $\lambda x.Mx =_\beta M$, para todo o M.

5.8 Mostre que: se M é tipificável, então não existem sequências de β-reduções infinitas a partir de subtermos de M.

5.9 Justifique que as seguintes relações entre termos tipificáveis M e N são decidíveis:

(i) $(M, N) \in (\beta)$. (ii) $M \to_\beta N$. (iii) $M \to_\beta^* N$.

5.10 Mostre que σ é *habitado* num contexto Γ se e só se σ é *habitado* no contexto Γ por uma forma β-normal.

5.11 Dado um tipo simples σ, seja Nat_σ o tipo $(\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma$. Usando tipificação *à la* Curry, prove que:

a) para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $f : \sigma \to \sigma, x : \sigma \vdash f^n(x) : \sigma$;
b) conclua que todo o numeral de Church é tipificável com tipo Nat_σ.

5.12 a) Mostre que se N e N' são formas β-normais de M e M', respetivamente, então ou $N = N'$ ou $M \neq_\beta M'$.
b) Conclua que, para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$, se $m \neq n$, então $\mathbf{c}_m \neq_\beta \mathbf{c}_n$.

5.13 Sejam $F, M, N \in \Lambda$, x uma variável e $n \in \mathbb{N}_0$. Mostre que:

a) $F^n(M)[N/x] = (F[N/x])^n(M[N/x])$.
b) $\mathbf{c}_n F M =_\beta F^n(M)$.

5.14 Considere o combinador $\mathbf{ZERO} = \lambda x.x(\lambda y.\mathbf{false})\mathbf{true}$.

a) Mostre que $\mathbf{ZERO}\ \mathbf{c}_n =_\beta \mathbf{true}$ se $n = 0$ e que $\mathbf{ZERO}\ \mathbf{c}_n =_\beta \mathbf{false}$ se $n > 0$.
b) Assuma definido um combinador *predecessor* $\mathbf{PRED}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{PRED}\ \mathbf{c}_{n+1} =_\beta \mathbf{c}_n$. Mostre que a função numérica *predecessor* dada por $f(0) = 0$; $f(n + 1) = n$ é λ-definível.
c) Mostre que é λ-definível a seguinte função de subtração: $f(m, n) = m - n$, se $m \geq n$; $f(m, n) = 0$, se $m < n$.

5.15 Considere o combinador de ponto fixo de Turing $\mathbf{\Theta} = \mathbf{AA}$, onde $\mathbf{A} = \lambda xy.y(xxy)$. Verifique que, para todo o λ-termo F, $\mathbf{\Theta} F \to_\beta^* F(\mathbf{\Theta} F)$ e que, de facto, $\mathbf{\Theta}$ é um combinador de ponto fixo.

5.16 Sejam f, g, h funções numéricas de tipo adequado, de tal modo que h é obtida de f e g por recursão primitiva do seguinte modo:

1. $h(0, x) = f(x)$
2. $h(n + 1, x) = g(h(n, x), n, x)$.

Considere que f e g são λ-definíveis por combinadores F e G, respetivamente. Mostre que h é λ-definível pelo combinador

$$H = \mathbf{\Theta}(\lambda h\, n\, x.\, \mathbf{IF}\ \mathbf{ZERO}\, n\ \mathbf{THEN}\ F\, x\ \mathbf{ELSE}\ G\,(h\,(\mathbf{PRED}\ n)\, x)\, n\, x).$$

5.17 Mostre que as seguintes funções numéricas são λ-definíveis:

a) $f(n) = 1$, se $n = 0$; $f(n) = 0$, caso contrário.
b) $f(n) = n + 1$.
c) $f(n) = n!$.
d) $f(n, m) = m^n$.