Lógica da Programação

Teste

06.01.2021

(Duração: 3h)

Nota: *Justifique adequadamente todas as suas respostas.*

1. **a)** Construa uma demonstração de $(\neg p_0 \vee p_1) \to (p_0 \to p_1)$ em DNP_i e diga se o sequente $\Rightarrow (\neg p_0 \vee p_1) \to (p_0 \to p_1)$ é derivável em $\text{DNP}_c^{\Rightarrow}$.

b) Mostre que $(p_0 \to p_1) \to (\neg p_0 \vee p_1)$ é teorema de DNP_c e que, no entanto, não é teorema de DNP_i. (Sugestão: utilize teoremas de correção e completude.)

2. Recorrendo a indução em derivações, mostre que se $\Gamma \Rightarrow \varphi$ é derivável em $\text{DNP}_i^{\Rightarrow w}$, então $\Gamma \vdash_i \varphi$, para o fragmento com os conetivos $\neg$ e $\perp$.

3. Seja L a linguagem que contém apenas o símbolo de relação unário R. Seja φ a L-fórmula $\exists x_0(\neg R(x_0) \vee \forall x_0 R(x_0))$. Seja $K = (\{w_0, w_1\}, \leq, \{E_w\}_{w \in \{w_0, w_1\}})$ a L-estrutura de Kripke onde: $w_0 < w_1$; $dom(E_{w_0}) = dom(E_{w_1}) = \{d_0, d_1\}$; a função interpretação de E_{w_i} é notada por I_{w_i} e estas funções são tais que $I_{w_0}(R) = \{d_0\}$, $I_{w_1}(R) = \{d_0, d_1\}$.

a) Para cada $w \in \{w_0, w_1\}$, diga se se tem (i) $w \Vdash \forall x_0 R(x_0)[a]$ e se se tem (ii) $w \Vdash \varphi[a]$, para qualquer atribuição a em E_w.

b) Diga se φ é uma fórmula válida em lógica intuicionista.

4. Considere o λ-termo $M_1 = (\lambda x_1.(\lambda x_2.x_3 x_1)x_1)x_0$.

a) Determine $\{N \in \Lambda : M_1 \to_\beta^* N\}$.

b) Diga se M_1 admite forma β-normal.

c) Mostre que M_1 é tipificável (para algum contexto Γ e para algum tipo σ).

5. Considere o combinador $\mathsf{F} = \lambda x_0 x_1 x_2.x_1(x_1(x_0 x_1 x_2))$.

a) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathsf{F}\,\mathbf{c}_n =_\beta \mathbf{c}_{n+2}$.

b) Diga se a função $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $f(0) = 0$ e $f(n) = n + 2$, para todo $n > 0$, é λ-definível.

6. Mostre indutivamente que, para quaisquer $\Gamma, \Gamma', M, \sigma$, se $\Gamma \vdash M : \sigma$ e $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então $\Gamma' \vdash M : \sigma$. (Considere tipificação *à la* Curry.)

7. Considere as fórmulas $\varphi_1 = (p_0 \to p_1) \to p_2$ e $\varphi_2 = p_0 \to (p_1 \to p_2)$.

a) Indique uma derivação $\mathcal{D}$ em $\text{DNP}_i^{\Rightarrow w}$ com classes de hipóteses do sequente $\Rightarrow \varphi_1 \to \varphi_2$ e determine o λ-termo *à la Church* $t(\mathcal{D})$ associado a $\mathcal{D}$.

b) Diga se o tipo $t(\varphi_1 \to \varphi_2)$ é habitado.

c) Mostre que $\varphi_2 \to \varphi_1$ não é teorema de DNP_c e diga se o tipo $t(\varphi_2 \to \varphi_1)$ é habitado.

Cotações: 1- 4 val.; 2- 1,75 val.; 3- 2,5 val.; 4- 4 val.; 5- 2,5 val.; 6- 1,75 val.; 7- 3,5 val.