L : tipo de linguagem

L-estrutura : $(D, \bar{\ })$ onde

D é um conjunto não vazio

→ domínio da estrutura

$\bar{\ }$ é a função interpretação da estrutura

tal que

- $c \in \mathcal{C} \longmapsto \bar{c} \in D$

(existem $\# D$ possíveis escolhas para $\bar{c}$ se D finito)

- $f \in \mathcal{F}$ t.q. $\mathcal{N}(f) = n \geqslant 1 \longmapsto \bar{f} : D^n \to D$ função

(existem $(\# D)^{(\# D^n)}$ possíveis escolhas para $\bar{f}$ se D finito)

- $R \in \mathcal{R}$ tal que $\mathcal{N}(R) = n \longmapsto \bar{R}$ relação n-ária em D (i.e. $\bar{R} \subseteq D^n$)

(existem $2^{\#(D^n)}$ possíveis escolhas para $\bar{R}$ se D finito)

$a : \mathcal{V} \to \operatorname{dom}(E)$ função : atribuição em E

$t \in \mathcal{T}_L$

$t[a]_E$: valor de t em E para a

- $x[a] = a(x), \ \forall x \in \mathcal{V}$
- $c[a] = \bar{c}, \ \forall c \in \mathcal{C}$
- $f(t_1, \dots, t_n)[a] = \bar{f}(t_1[a], \dots, t_n[a]), \ \forall f \in \mathcal{F}$ t.q. $\mathcal{N}(f) = n \geqslant 1$, $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$

a : atribuição em E
$d \in dom(E)$
$x \in \mathcal{V}$

$\boxed{a\binom{x}{d}}$:= $a' : \mathcal{V} \to dom(E)$
atribuição em E
definida por $a'(y) = \begin{cases} d & \text{se } y = x \\ a(y) & \text{se } y \in \mathcal{V} \setminus \{x\} \end{cases}$

$\varphi \in \mathcal{F}_L$

$\varphi[a]_E$: valor lógico de φ para a em E

- $\bot[a]_E = 0$
- $R(t_1, \ldots, t_m)[a]_E = 1$ sse $(t_1[a], \ldots, t_m[a]) \in \overline{R}$
  $\forall R \in \mathcal{R}$ t.q. $\mathcal{N}(R) = m$
  $\forall t_1, \ldots, t_m \in \mathcal{T}_L$

- $(\neg\varphi)[a]_E = 1$ sse $\varphi[a]_E = 0$
- $(\varphi \wedge \psi)[a]_E = 1$ sse $\varphi[a]_E = \psi[a]_E = 1$
- $(\varphi \vee \psi)[a]_E = 0$ sse $\varphi[a]_E = \psi[a]_E = 0$
- $(\varphi \to \psi)[a]_E = 0$ sse $\varphi[a]_E = 1$ e $\psi[a]_E = 0$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)[a]_E = 1$ sse $\varphi[a]_E = \psi[a]_E$
- $(\exists x\, \varphi)[a]_E = 1$ sse Existe $d \in D$ t.q. $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$
- $(\forall x\, \varphi)[a]_E = 1$ sse Para todo $d \in D$ $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1$.

Ex 5.1

a) $a : \mathcal{V} \to \mathrm{dom}(E)$ atribuição

$x_i \mapsto a(x_i)$

$t[a]_E$: valor de t em E para a

- $x[a] = a(x)$, para todo $x \in \mathcal{V}$
- $c[a] = \overline{c}$, para todo $c \in \mathcal{C}$
- $f(t_1, \dots, t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], \dots, t_n[a])$,

  para todo $f \in \mathcal{F}$ t.q. $\mathcal{N}(f) = n \geq 1$

  e para quaisquer $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$

i) $0[a_1] = \overline{0} = 0$

$0[a_2] = \overline{0} = 0$

ii) $x_5[a_1] = a_1(x_5)$

$= 0$

$x_5[a_2] = a_2(x_5)$

$= 5$

iii) $s(x_2)[a_1] = \overline{s}(x_2[a_1]) = \overline{s}(a_1(x_2)) =$

$= \overline{s}(0) = 0+1 = 1$

$s(x_2)[a_2] = \overline{s}(x_2[a_2]) = \overline{s}(a_2(x_2)) =$

$= \overline{s}(2) = 2+1 = 3$

iv) $(s(0)+x_3)[a_1] = s(0)[a_1] \mathbin{\overline{+}} x_3[a_1]$

$= \overline{s}(0[a_1]) \mathbin{\overline{+}} a_1(x_3)$

$= \overline{s}(\overline{0}) \mathbin{\overline{+}} 0 = (0+1)+0$

$= 1$

5.1 a) (cont.)

$$(s(0)+x_3)\,[a_2] = \bar{s}(\bar{0}) \mp a_2(x_3)$$
$$= (0+1)+3 = 4$$

v) $s(0\times(x_2\times x_3))\,[a_1] = \bar{s}\left(\left(0\times(x_2\times x_3)\right)[a_1]\right)$

$$= \bar{s}\left(0[a_1] \mathbin{\bar{\times}} (x_2\times x_3)[a_1]\right)$$
$$= \bar{s}\left(\bar{0} \mathbin{\bar{\times}} \left(x_2[a_1] \mathbin{\bar{\times}} x_3[a_1]\right)\right)$$
$$= \bar{s}\left(\bar{0} \mathbin{\bar{\times}} \left(a_1(x_2) \mathbin{\bar{\times}} a_1(x_3)\right)\right)$$
$$= \bar{s}\left(0\times(0\times 0)\right) = \bar{s}(0) = 0+1 = 1$$

$$s\left(0\times(x_2\times x_3)\right)[a_2] =$$
$$= \bar{s}\left(\bar{0} \mathbin{\bar{\times}} \left(a_2(x_2) \mathbin{\bar{\times}} a_2(x_3)\right)\right)$$
$$= \bar{s}\left(0\times(2\times 3)\right) = \bar{s}(0) = 0+1 = 1.$$

vi) $\left((s(0)+x_7)\times s(x_1+x_2)\right)[a_1] =$

$$= \left(\bar{s}(\bar{0}) \mp a_1(x_7)\right) \mathbin{\bar{\times}} \bar{s}\left(a_1(x_1) \mp a_1(x_2)\right)$$
$$= (1+0)\times\left((0+0)+1\right) = 1$$

$$\left((s(0)+x_7)\times s(x_1+x_2)\right)[a_2] = 32$$

5.1. $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$
$a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$

b) i) $\varphi = x_1 = x_2$

$(x_1 = x_2)[a_1] = 1$ sse $(a_1(x_1), a_1(x_2)) \in \bar{=}$

sse $0 = 0$, o que é verdade.

Logo, $\varphi[a_1] = 1$.

$\varphi[a_2] = (x_1 = x_2)[a_2] = 1$ sse $a_2(x_1) = a_2(x_2)$

sse $1 = 2$, o que é falso.

Portanto, $\varphi[a_2] = 0$

ii) Por i), $\neg(x_1 = x_2)[a_1] = 0$ e $\neg(x_1 = x_2)[a_2] = 1$.

iii) $\varphi = s(x_1) < (x_1 + 0)$.

$\varphi[a_1] = 1$ sse $(s(x_1)[a_1], (x_1+0)[a_1]) \in \bar{<}$

sse $\left(\bar{s}(a_1(x_1)), \bar{+}(a_1(x_1), \bar{0})\right) \in \bar{<}$

sse $1 < 0$, o que é falso.

Portanto, $\varphi[a_1] = 0$.

$\varphi[a_2] = 1$ sse $\left(\bar{s}(a_2(x_1)), \bar{+}(a_2(x_1), \bar{0})\right) \in \bar{<}$

sse $2 < 1$, o que é falso.

Assim, $\varphi[a_2] = 0$.

iv) $\varphi = (x_1 < x_2) \rightarrow (s(x_1) < s(x_2))$

$\varphi[a_1]_{E_{Arit}} = 0$ sse $(x_1 < x_2)[a_1]_E = 1$ e $s(x_1) < s(x_2)\,[a_1]_E = 0$

sse $(a_1(x_1), a_1(x_2)) \in \bar{<}$ e $(\bar{s}(a_1(x_1)), \bar{s}(a_1(x_2))) \notin \bar{<}$

sse $0 < 0$ e $1 \nless 1$, o que é falso.

Logo $\varphi[a_1]_{E_{Arit}} = 1$.

$\varphi[a_2]_{E_{Arit}} = 0$ sse $(a_2(x_1), a_2(x_2)) \in \bar{<}$ e $(\bar{s}(a_2(x_1)), \bar{s}(a_2(x_2))) \notin \bar{<}$

sse $1 < 2$ e $2 \nless 3$, o que é falso.

Portanto, $\varphi[a_2]_{E_{Arit}} = 1$

c) i) $\forall x_1 (x_1 = x_2)[a_1] = 1$ sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $(x_1 = x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $(d, a_1(x_2)) \in \bar{=}$

sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $d = 0$, o que é falso.

Portanto, $\forall x_1 (x_1 = x_2)[a_1] = 0$.

$\exists x_1 (x_1 = x_2)[a_1] = 1$ sse Existe pelo menos um $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $(x_1 = x_2)\left[a\binom{x_1}{d}\right] = 1$ sse Existe pelo menos um $d \in \mathbb{N}_0$ tal que $d = 0$, o que é verdade.

Assim, $\exists x_1 (x_1 = x_2)[a_1] = 1$.

iii) $\varphi = s(x_1) < (x_1 + 0)$

$(\forall x_1 \varphi)[a_1] = 1$ sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $\varphi\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $(\bar{s}(d), \bar{+}(d;0)) \in \bar{<}$

sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$, $d+1 < d$, o que é falso.

Portanto, $(\forall x_1 \varphi)[a_1] = 0$

$(\exists x_1 \varphi)[a_1] = 1$ sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $\varphi\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d+1 < d$, o que é falso.

Assim, $(\exists x_1 \varphi)[a_1] = 0$.

iv) $\varphi = (x_1 < x_2) \rightarrow (s(x_1) < s(x_2))$

$(\forall x_1 \varphi)[a_1] = 1$ sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $\varphi\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1$

sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $\left((x_1 < x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 0 \right.$ ou

$\left. s(x_1) < s(x_2)\left[a_1\binom{x_1}{d}\right] = 1 \right)$

sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $(d \not< 0$ ou $d+1 < 1)$

sse Para todo $d \in \mathbb{N}_0$ $(d \geq 0$ ou $d < 0)$, o que é verdade.

Portanto, $(\forall x_1 \varphi)[a_1] = 1$

$(\exists x_1 \varphi)[a_1] = 1$ sse Existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $(d \geq 0$ ou $d < 0)$, o que é verdade.

Assim, $(\exists x_1 \varphi)[a_1] = 1$.

5.1

d)

i) Vimos que $\varphi[a_2] = 0$, para $\varphi = x_1 = x_2$

Logo, φ não é válida na estrutura E_{Arit}

ii) Vimos que $\neg(x_1 = x_2)\,[a_1] = 0$. Logo, $\neg(x_1 = x_2)$ não é válida na estrutura E_{Arit}

iii) $\varphi = s(x_1) < (x_1 + 0)$

Vimos que $\varphi[a_1] = 0$. Portanto, φ não é válida na estrutura E_{Arit}.

iv) Seja a uma atribuição em E_{Arit}.

$\varphi = (x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$

Temos que

$$\varphi[a] = 1 \text{ sse } (a(x_1), a(x_2)) \notin \bar{<} \text{ ou } (\bar{s}(a(x_1)), \bar{s}(a(x_2))) \in \bar{<}$$

$$\text{sse } a(x_1) \geq a(x_2) \text{ ou } a(x_1)+1 < a(x_2)+1$$

$$\text{sse } a(x_1) \geq a(x_2) \text{ ou } a(x_1) < a(x_2),$$

o que é verdade, uma vez que $a(x_1), a(x_2) \in \mathbb{N}_0$.

Portanto, $\varphi[a] = 1$, para toda a atribuição a em E_{Arit}, donde φ é válida em E_{Arit}.

5.1.

e) Não sendo válidas em E_{Arit}, as fórmulas das alíneas b) i), ii) e iii) não são universalmente válidas

iv) Consideremos a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \tilde{\ })$ onde $\tilde{0}$ é o número zero, $\tilde{s}: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $\tilde{s}(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, $\tilde{+}$ é a adição usual em $\mathbb{Z}$, $\tilde{\times}$ é a multiplicação usual em $\mathbb{Z}$, $\tilde{=}$ é a relação de igualdade usual em $\mathbb{Z}$ e $\tilde{<}$ é a relação "menor do que" usual em $\mathbb{Z}$.

Seja $a: \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Z}$ a atribuição em E dada por $a(x_i) = \begin{cases} -2i & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$ e $\varphi: (x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.

Temos que $\varphi[a]_E = 0$ sse $(x_1 < x_2)[a]_E = 1$ e $(s(x_1) < s(x_2))[a]_E = 0$

sse $(a(x_1), a(x_2)) \in \tilde{<}$ e $(\tilde{s}(a(x_1)), \tilde{s}(a(x_2))) \notin \tilde{<}$

sse $-2 < 0$ e $4 \geqslant 0$, o que é verdade. Portanto, $\varphi[a]_E = 0$ e φ não é válida em E. Portanto, não é universalmente válida.

Ex. 5.2. $E = (D, \overline{})$ $D = \{d_1, d_2\}$

$\bar{0} = d_1$

$\bar{+} : D^2 \longrightarrow D$
$(x,y) \longmapsto d_2$

$\bar{s} : D \to D$
$x \longmapsto x$

$\bar{\times} : D^2 \longrightarrow D$
$(x,y) \longmapsto \begin{cases} d_1 & \text{se } x = y \\ d_2 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

$\bar{=} \; = \{(d_1, d_1), (d_2, d_2)\}$ $\bar{<} \; = \{(d_1, d_2)\}$

$a_1 : \mathcal{V} \longrightarrow D$
$x_i \longmapsto d_2$, para todo i

$a_2 : \mathcal{V} \longrightarrow D$
$x_i \longmapsto \begin{cases} d_2 & \text{se } i \text{ par} \\ d_1 & \text{se } i \text{ ímpar} \end{cases}$

a) i) $0[a_1] = \bar{0} = d_1$
$0[a_2] = \bar{0} = d_2$

ii) $x_5[a_1] = a_1(x_5) = d_2$
$x_5[a_2] = a_2(x_5) = d_1$

iii) $s(x_2)[a_1] = \bar{s}\left(a_1(x_2)\right) = \bar{s}(d_2) = d_2$
$s(x_2)[a_2] = \bar{s}\left(a_2(x_2)\right) = \bar{s}(d_2) = d_2$

iv) $s(0 \times (x_2 \times x_3))[a_1] =$

$= \bar{s}\left(\bar{\times}\left(0[a_1], (x_2 \times x_3)[a_1]\right)\right) =$

$= \bar{s}\left(\bar{\times}\left(\bar{0}, \bar{\times}(a_1(x_2), a_1(x_3))\right)\right)$

$= \bar{s}\left(\bar{\times}\left(d_1, \bar{\times}(d_2, d_2)\right)\right)$

$= \bar{s}\left(\bar{\times}(d_1, d_1)\right) = \bar{s}(d_1) = d_1$

5.2

a) (cont.)

$$s\,(0 \times (x_2 \times x_3))\,[a_2] =$$
$$= \overline{s}\,(\overline{\times}\,(\overline{0}, \overline{\times}\,(a_2(x_2), a_2(x_3))))$$
$$= \overline{s}\,(\overline{\times}\,(d_1, \overline{\times}\,(d_2, d_1)))$$
$$= \overline{s}\,(\overline{\times}\,(d_1, d_2)) = \overline{s}\,(d_2) = d_2.$$

b)

ii) $\varphi = x_1 = x_2$

$\varphi[a_1]_E = 1$ sse $(x_1[a_1], x_2[a_1]) \in \overline{=}$

sse $(d_2, d_1) \in \overline{=}$, o que é falso.

Logo, $\varphi[a_1]_E = 0$.

iii) $\varphi = s(x_1) < (x_1 + 0)$

$\varphi[a_1]_E = 1$ sse $(s(x_1)[a_1], (x_1 + 0)[a_1]) \in \overline{<}$

sse $(\overline{s}(d_2), \overline{+}(d_2, d_1)) \in \overline{<}$

sse $(d_2, d_2) \in \overline{<}$, o que não é verdade.

Portanto, $\varphi[a_1]_E = 0$.

5.2.
b) (cont.)

(iv) $\varphi = \quad (x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$

$\varphi[a_1]_E = 1$ sse $(x_1 < x_2)[a_1] = 0$ ou

$s(x_1) < s(x_2)\ [a_1] = 1$

sse $(a_1(x_1), a_1(x_2)) \notin \bar{<}$ ou

$(s(x_1)[a_1], s(x_2)[a_1]) \in \bar{<}$

sse $(d_2, d_2) \notin \bar{<}$ ou $(\bar{s}(a_1(x_1)), \bar{s}(a_1(x_2))) \in \bar{<}$

sse $(d_2, d_2) \notin \bar{<}$ ou $(d_2, d_2) \in \bar{<}$,

o que é verdade.

Portanto, $\varphi[a_1]_E = 1$.

$\varphi[a_2]_E = 1$ sse $(a_2(x_1), a_2(x_2)) \notin \bar{<}$

ou

$(\bar{s}(a_2(x_1)), \bar{s}(a_2(x_2))) \in \bar{<}$

sse $(d_1, d_2) \notin \bar{<}$

ou

$(\bar{s}(d_1), \bar{s}(d_2)) \in \bar{<}$

sse $(d_1, d_2) \notin \bar{<}$ ou $(d_1, d_2) \in \bar{<}$,

o que é verdade.

Logo, $\varphi[a_2]_E = 1$.

Ex. 5.3

$$L = (\{0, s, +, \times\}, \{<, =\}, \mathcal{N}) \text{ onde}$$

$$\mathcal{N}(0)=0, \quad \mathcal{N}(s)=1, \quad \mathcal{N}(+)=\mathcal{N}(\times)=\mathcal{N}(<)=\mathcal{N}(=)=2$$

a) $E = (\{0\}, \bar{\ })$ estrutura de tipo L

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \bar{0} \in \{0\} \; ; \\ \bar{s} : \{0\} \to \{0\} \text{ é função;} \\ \bar{+} : \{0\}\times\{0\} \to \{0\} \text{ é função;} \\ \bar{\times} : \{0\}\times\{0\} \to \{0\} \text{ é função;} \\ \bar{<} : \text{relação binária em } \{0\} \text{ (ou seja, } \bar{<} \text{ é subconjunto} \\ \quad \text{de } \{0\}\times\{0\}) \\ \bar{=} : \text{relação binária em } \{0\} \; (\text{i.e., } \bar{=} \subseteq \{0\}\times\{0\}) \end{cases}$$

Assim, existem

$$1 \times 1^1 \times 1^1 \times 1^1 \times 2^1 \times 2^1 = 4$$

estruturas de tipo L com domínio $\{0\}$.

$E = (\{0,1,2\}, \bar{\ })$ é estrutura de tipo L $\iff$ $\bar{0} \in \{0,1,2\}$;

$\bar{s} : \{0,1,2\} \to \{0,1,2\}$ é função, $\bar{+}, \bar{\times} : \{0,1,2\}^2 \to \{0,1,2\}$ é funções

e $\bar{<}, \bar{=} \subseteq \{0,1,2\}^2$.

Assim, existem

$$3 \times 3^3 \times 3^9 \times 3^9 \times 2^9 \times 2^9 = 3^{22} \times 2^{18}$$

estruturas de tipo L com domínio $\{0,1,2\}$.

b) Seja $E' = (\{0,1,2\}, -)$ onde

$\bar{0} = 1$ $\qquad \bar{s} : \{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,2\}$

$\qquad\qquad\qquad x \longmapsto x$

$\bar{+} : \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,2\}$

$\qquad (x, y) \longmapsto y$

$\bar{\times} : \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,2\}$

$\qquad (x, y) \longmapsto x$

$\bar{<} = \{ (0,1), (0,2) \}$

$\bar{=} = \{ (1,2) \}$