

# DEDUÇÃO NATURAL PROPOSICIONAL (DNP)

↓  
SISTEMA FORMAL de demonstrações

↓  
FORMALIZAÇÃO DO  
CONCEITO DE PROVA

↙  
caracterizações alternativas  
dos conceitos de TAUTOLOGIAS  
& de CONSEQUÊNCIAS SEMÂNTICAS

↘  
usaremos regras de  
inferência

modelar raciocínios/argumentos

↳ DERIVAÇÕES (prova/demonstração)

notação: esquemas como

$$(1) \quad \frac{p_0 \wedge p_1}{p_0}$$

$$(2) \quad \frac{\frac{\cancel{p_0} \wedge \cancel{p_1}}{p_0}}{(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_0}$$

$$(3) \quad \frac{p_0 \quad p_0 \rightarrow p_1}{p_1}$$

### Exercício 3.1

- a) Indique uma derivação em DNP cuja conclusão seja  $p_0 \wedge p_1$  e cuja única hipótese não cancelada seja  $p_1 \wedge p_0$ .

D =

$$\frac{\frac{p_1 \wedge p_0}{p_0} \wedge_2 E \quad \frac{p_1 \wedge p_0}{p_1} \wedge_1 E}{p_0 \wedge p_1} \wedge I$$

é uma tal derivação

- conclusão de D :  $p_0 \wedge p_1$
- folhas :  $p_1 \wedge p_0$  (não cortados)

Subderivações de D: (c)

(1)  $p_1 \wedge p_0$

(2)  $\frac{p_1 \wedge p_0}{p_0} \wedge_2 E$

(3)  $\frac{p_1 \wedge p_0}{p_1} \wedge_1 E$

(4) D

3.1.

b) Uma tal derivação é

$$D = \frac{\frac{\frac{\cancel{p_0}^{(1)}}{p_0 \vee p_1} \vee_1 I}{p_1 \rightarrow (p_0 \vee p_1)} \rightarrow I^{(2)}}{p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_0 \vee p_1))} \rightarrow I^{(1)}$$

Subderivações de D: (c)

$$(1) \quad p_0$$

$$(2) \quad \frac{p_0}{p_0 \vee p_1} \vee_1 I$$

$$(3) \quad \frac{\frac{p_0}{p_0 \vee p_1} \vee_1 I}{p_1 \rightarrow (p_0 \vee p_1)} \rightarrow I$$

$$(4) \quad D$$

$$D' = \frac{\frac{\frac{\cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \vee p_1} \vee_2 I}{p_1 \rightarrow (p_0 \vee p_1)} \rightarrow I^{(2)}}{p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_0 \vee p_1))} \rightarrow I^{(1)}$$

### Exercício 3.2

$$\varphi, \psi, \psi \in \mathcal{F}^{\text{CP}}$$

a) Encontre uma demonstração em DNP da fórmula

$$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

(ou seja, uma derivação em DNP cuja conclusão seja esta fórmula e cujo conjunto das hipóteses por cancelar seja vazio)

Uma tal derivação é:

$D =$

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_1 E}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I \\ \hline (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi) \rightarrow I^{(1)} \end{array}$$

Subderivações de  $D$ :

$$(1) \quad \varphi \wedge \psi$$

$$(2) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_1 E$$

$$(3) \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_1 E}{\varphi \vee \psi} \vee_1 I$$

$$(4) \quad D$$

3.2

c) Encontrar demonstração em DNP  
de  
 $\varphi \rightarrow \varphi$

$$\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi \rightarrow \varphi} \rightarrow I^{(1)}$$

ESTRUTURA  
DA ÁRVORE



Subderivações:

PASSO INICIAL (1)  $\varphi$

$$(2) \frac{\varphi}{\varphi \rightarrow \varphi}$$

### Exercício 3.2

d)  $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{\text{CP}}$

Encontre uma demonstração em DNP de  $(\neg\psi \vee \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)$

[illegible]

Subderivadas de  $D$ :

$$(1) \neg \varphi \vee \psi$$

(2)  $\varphi$

(3)  $\neg \varphi$

(4)  $\psi$

(5)  $\frac{\varphi \quad 7\varphi}{\perp} 7E$

$$(6) \quad \begin{array}{r} 47E \\ \underline{1} \\ 4 \end{array} \quad (1)$$

(7)

$\psi$  (3)

$\psi$   $\psi$

$\perp$

$\psi$

$\psi$   $\psi$   $\psi$   $\psi$   $VE$  (3)

(8)

	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	
(1)	0	0	0	0	
(2)	0	1	1	0	
(3)	1	0	1	0	
(4)	1	1	1	1	
(5)	0	0	0	0	1
(6)	0	1	1	0	0
(7)	1	0	1	0	0
(8)	1	1	1	1	1

(9) D

### Exercício 3.2

e)  $\varphi \in \mathcal{F}(P)$

Encontre uma demonstração em DNP de  $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$

D =

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{---} \cancel{\varphi}^{(1)} \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \cancel{\neg\varphi}^{(2)} \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \neg E \\ \text{---} \end{array} \\
 \text{---} \perp \text{---} & \text{---} \neg I^{(2)} \text{---} & \\
 \text{---} \neg\neg\varphi \text{---} & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{---} \cancel{\neg\varphi}^{(3)} \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)} \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \neg E \\ \text{---} \end{array} \\
 \text{---} \perp \text{---} & \text{---} (RAA)^{(3)} \text{---} & \\
 \text{---} \varphi \text{---} & & \begin{array}{c} \leftrightarrow I^{(1)} \\ \text{---} \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$

### Exercício 3.2

f)  $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{\text{CP}}$

Encontrar uma derivação de conclusão  $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$  cujo conjunto de hipóteses não canceladas seja vazio.

$$D =$$

$$\begin{array}{c}
 (1) \\
 \hline
 (\psi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \psi) \quad \wedge_1 E \\
 \hline
 \psi \rightarrow \psi \quad \rightarrow E \\
 \hline
 \psi \\
 \hline
 \psi \leftrightarrow \psi \quad \leftrightarrow I^{(1)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 (1) \quad (2) \\
 \hline
 (\psi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \psi) \quad \wedge_2 E \\
 \hline
 \psi \rightarrow \psi \quad \rightarrow E \\
 \hline
 \psi \\
 \hline
 \psi \leftrightarrow \psi \quad \leftrightarrow I^{(4)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 (1) \\
 \hline
 \psi \leftrightarrow \psi \quad \leftrightarrow E \\
 \hline
 \psi \\
 \hline
 \psi \rightarrow \psi \quad \rightarrow I^{(2)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 (3) \quad (1) \\
 \hline
 \psi \leftrightarrow \psi \quad \leftrightarrow E \\
 \hline
 \psi \\
 \hline
 \psi \rightarrow \psi \quad \rightarrow I^{(3)}
 \end{array}$$

D é uma demonstração de  $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$



### Exercício 3.2

g)  $\varphi, \psi \in \mathcal{F}CP$

Encontre uma demonstração em DNP de  $(\psi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \psi)$

$$D =$$

Diagram illustrating the reduction of a quantum circuit to a single layer of CNOT gates:

The diagram shows a sequence of operations on two qubits, labeled (1) and (2). The operations are represented by gates and lines:

- Qubit (1) starts with a Hadamard gate ( $H$ ).
- Qubit (2) starts with a Hadamard gate ( $H$ ).
- A CNOT gate is applied with control on qubit (1) and target on qubit (2).
- A CNOT gate is applied with control on qubit (2) and target on qubit (1).
- A series of CNOT gates are applied between qubits (1) and (2), with controls and targets alternating.
- The final state is labeled  $I^{(1)}$ .

D é uma demonstração de  $(\psi \vee \varphi) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi)$



### Exercício 3.3.

a) Mostre que  $p_0 \rightarrow p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$ .

Pretendemos construir uma derivação em DNP cuja conclusão é a fórmula  $\neg p_0$  e cujo conjunto de hipóteses não cancelados é um subconjunto de  $\Gamma \setminus \{p_0 \rightarrow p_1, \neg p_1\}$ .

$$D = \frac{\frac{\frac{\cancel{p_0}^{(1)}}{p_1} \quad p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow E}{\neg p_1} \quad \neg E}{\neg p_0} \quad \neg I^{(1)}$$

é uma tal derivação.

- Conclusão de  $D$ :  $\neg p_0$
- Conjunto de hipóteses não canceladas:  $\Delta = \{p_0 \rightarrow p_1, \neg p_1\} = \Gamma$ .
- Subderivações:

$$(1) \quad p_0$$

$$(2) \quad p_0 \rightarrow p_1$$

$$(3) \quad \frac{p_0 \quad p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow E}{p_1}$$

$$(4) \quad \neg p_1$$

$$(5) \quad \frac{\frac{p_0 \quad p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow E}{p_1} \quad \neg p_1 \neg E}{\bot}$$

$$(6) \quad D$$

### Exercício 3.3

4) Mostre que  $P_0 \rightarrow P_1, P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_0 \vdash ((P_0 \leftrightarrow P_1) \wedge (P_1 \leftrightarrow P_2)) \wedge (P_0 \leftrightarrow P_2)$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{(1)} \\
 \hline
 \cancel{P_1} \quad P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow f \\
 \hline
 P_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{(1)} \\
 \hline
 \cancel{P_2} \quad P_2 \rightarrow P_0 \rightarrow f \\
 \hline
 P_0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{(2)} \\
 \hline
 \cancel{P_0} \quad P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow f \\
 \hline
 P_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{(2)} \\
 \hline
 \cancel{P_1} \quad P_1 \rightarrow P_2 \\
 \hline
 P_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{(3)} \\
 \hline
 \cancel{P_0} \quad P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow f \\
 \hline
 P_1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{(3)} \\
 \hline
 \cancel{P_2} \quad P_2 \rightarrow P_0 \rightarrow f \\
 \hline
 P_0
 \end{array}
 \\
 \hline
 P_1 \leftrightarrow P_2 \quad P_0 \leftrightarrow P_1 \quad P_2 \leftrightarrow P_0 \quad \leftrightarrow I^{(1)} \quad \leftrightarrow I^{(2)} \quad \leftrightarrow I^{(3)}
 \\
 \hline
 (P_0 \leftrightarrow P_1) \wedge (P_1 \leftrightarrow P_2) \quad P_0 \leftrightarrow P_2 \quad \wedge I
 \\
 \hline
 ((P_0 \leftrightarrow P_1) \wedge (P_1 \leftrightarrow P_2)) \wedge (P_0 \leftrightarrow P_2)
 \end{array}$$

é uma derivação em DNF cuja conclusão é  $\varphi = ((P_0 \leftrightarrow P_1) \wedge (P_1 \leftrightarrow P_2)) \wedge (P_0 \leftrightarrow P_2)$  e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é  $T = \{P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_0, P_0 \rightarrow P_1\}$ , o que permite afirmar que  $T \vdash \varphi$ .

### Exercício 3.3.

c) Mostre que  $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$  é sintaticamente inconsistente

(Pretendemos obter uma derivação em DNP de  $\perp$  a partir de  $T = \{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ , ou seja, uma derivação em DNP cuja conclusão é  $\perp$  e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de  $T$ )

D =

$$\frac{p_0 \vee p_1 \quad \frac{\frac{(1) \quad \cancel{p_0} \quad \neg p_0}{\perp} \neg E \quad \frac{(1) \quad \cancel{p_1} \quad \neg p_1}{\perp} \neg E}{\perp} \vee E (1)}{\perp}$$

D é uma derivação em DNP com

conclusão  $\perp$

e conjunto de hipóteses não canceladas é  $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$

Logo,  $T \vdash \perp$ , pelo que  $T$  é sintaticamente inconsistente