exercício 2.6 $\quad \varphi = (\neg p_2 \to \bot) \wedge p_1$.

a) $\quad \varphi[p_0 \wedge p_3 / p_2] = (\neg(p_0 \wedge p_3) \to \bot) \wedge p_1$

(i) v valoração tal que

$$v(\varphi) = v(\varphi[p_0 \wedge p_3 / p_2])$$

exemplo: v tal que

$$v(p_i) = 0, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0.$$

$v(\varphi) = 0$ e $v([p_0 \wedge p_3 / p_2]) = 0$

(ii) v valoração tal que

$$v(\varphi) \neq v([p_0 \wedge p_3 / p_2])$$

exemplo: v tal que

$$v(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 2 \\ 1 & \text{se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2\} \end{cases}$$

(obs: $v(p_2) \neq v(p_0 \wedge p_3)$)

exercício 2.8

$\varphi \rightsquigarrow$ encontrar ψ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$
e os conetivos de ψ estão
em $\{\neg, \vee\}$

$\sigma \to \psi \Leftrightarrow \neg\sigma \vee \psi$

$\sigma \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sigma \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)$

$\psi \to \bot \Leftrightarrow \neg \psi$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$

a) $\varphi = (p_0 \wedge p_2) \to p_3$

$\varphi \Leftrightarrow \neg(p_0 \wedge p_2) \vee p_3$
$\Leftrightarrow \underbrace{(\neg p_0 \vee \neg p_2) \vee p_3}_{\psi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}}$

b) $\varphi = p_1 \vee (p_2 \to \bot)$

$\varphi \Leftrightarrow p_1 \vee (\neg p_2 \vee \bot)$
$\Leftrightarrow \underbrace{p_1 \vee \neg p_2}_{\psi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}}$

c) $\varphi = \neg p_4 \leftrightarrow p_2$

$\varphi \Leftrightarrow (\neg p_4 \to p_2) \wedge (p_2 \to \neg p_4)$
$\Leftrightarrow \neg\,(\neg(\neg p_4 \to p_2) \vee \neg\,(p_2 \to \neg p_4))$
$\Leftrightarrow \neg\,(\neg\,(p_4 \vee p_2) \vee \neg\,(\neg p_2 \vee \neg p_4)) = \psi$

exercício 2.9

$$f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$$

$$\varphi \longmapsto f(\varphi) \text{ tal que } f(\varphi) \Leftrightarrow \varphi$$

(os conetivos de $f(\varphi)$ estão em $\{\vee, \neg\}$)

a) $f(\bot) = \neg(p_0 \vee \neg p_0)$

b) $f(p) = p, \ \forall p \in \mathcal{V}^{CP}$

c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi), \ \forall \varphi \in \mathcal{F}^{CP}$

d) $f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) \vee f(\psi), \ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

e) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg f(\varphi) \vee \neg f(\psi)), \ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

f) $f(\varphi \to \psi) = \neg f(\varphi) \vee f(\psi), \ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$

g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg\left(\neg(\neg f(\varphi) \vee f(\psi)) \vee \neg(\neg f(\psi) \vee f(\varphi))\right)$

exercício 2.10

- $\{\neg, \vee, \wedge\}$ é um conjunto de conetivos completo?

Vimos em 2.9 que $\{\neg, \vee\}$ é um conjunto de conetivos completo. Logo, $\{\neg, \vee, \wedge\}$, que contém $\{\neg, \vee\}$ também é um conjunto de conetivos completo.

(Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conetivos de ψ estão em $\{\neg, \vee\}$

$$\Downarrow$$

Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conetivos de ψ estão em $\{\neg, \vee, \wedge\}$)

OBS: $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \perp\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são conjuntos completos de conetivos.

- $\{\vee, \wedge\}$ é um conjunto de conetivos completo?

$\varphi = \neg\bot$ é uma tautologia

Suponhamos que existe ψ tal que $\psi \Leftrightarrow \varphi$ e os conetivos de ψ estão em $\{\vee, \wedge\}$.

Podemos afirmar que $\psi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$ (conjunto definido em 2.7).

Como $\varphi \Leftrightarrow \psi$, ψ é uma tautologia, o que contradiz a alínea c) do exercício 2.7.

Portanto, não existe ψ como acima, donde $\{\vee, \wedge\}$ não é um conjunto completo de conetivos.