literal : p_i ou $\neg p_i$

FORMAS NORMAIS CONJUNTIVAS

$$(l_{11} \vee \ldots \vee l_{1m_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{n1} \vee \ldots \vee l_{nm_n})$$

- exemplos

$(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3 \vee \neg p_1)$

$(p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_4) \wedge (p_5 \vee \neg p_6 \vee p_0)$

$(p_1 \vee \neg p_2) \wedge p_3 \wedge (p_5 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7)$

$(p_1 \vee \neg p_2) \wedge p_3$

$p_1 \vee \neg p_2$

$p_1 \wedge p_3 \wedge \neg p_4$

$\neg p_5$

FORMAS NORMAIS DISJUNTIVAS

$$(l_{11} \wedge \ldots \wedge l_{1m_1}) \vee \ldots \vee (l_{n1} \wedge \ldots \wedge l_{nm_n})$$

- exemplos

$(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_1)$

$(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge \neg p_4) \vee (p_5 \wedge \neg p_6 \wedge p_7)$

$(p_0 \wedge p_1) \vee p_5 \vee (\neg p_0 \wedge p_2)$

$p_0 \wedge \neg p_2$

$p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3$

p_3

2.11 $\boxed{FNC \Leftrightarrow \varphi}$ $\boxed{FND \Leftrightarrow \varphi}$

1º eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$

2º utilizar leis de De Morgan (se aplicável)

3º eliminar duplas negações

4º aplicar distributividade entre conjunções e disjunções.

a) $\neg p_0 = \varphi$ $\quad\varphi$ é FNC e FND

b) $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3) = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ é FNC e FND

c) $\varphi = (p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p_1 \vee p_0) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_0) \Leftrightarrow (p_1 \vee p_0 \vee \neg p_2) \wedge$
$\wedge (p_1 \vee p_0 \vee p_0) = \varphi^c$ $\quad\varphi^c$ é FNC e $\varphi^c \Leftrightarrow \varphi$

$\varphi \Leftrightarrow p_1 \vee p_0 \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_0) = \varphi^d$ $\quad\varphi^d$ é FND e $\varphi^d \Leftrightarrow \varphi$

d) $\varphi = p_1 \to \bot \Leftrightarrow \neg p_1$

$\neg p_1$ è FNC e FND logicamente equivalente a φ

e) $\varphi : (p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$

$\varphi \Leftrightarrow (p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee p_1) \wedge (p_2 \vee p_0) = \varphi^c$ $\quad$ φ^c è FNC e $\varphi^c \Leftrightarrow \varphi$

$\varphi \Leftrightarrow ((p_1 \vee p_0) \wedge p_2) \vee ((p_1 \vee p_0) \wedge (p_1 \wedge p_0))$

$\Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_1 \wedge p_0) \vee (p_0 \wedge p_1 \wedge p_0) = \varphi^d$

φ^d è FND e $\varphi^d \Leftrightarrow \varphi$

f) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)) \wedge$

$\wedge ((\neg p_2 \to \neg p_1) \to (p_1 \to p_2))$

$\Leftrightarrow (\neg(p_1 \to p_2) \vee (\neg p_2 \to \neg p_1)) \wedge$

$\wedge (\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \vee (p_1 \to p_2))$

$\Leftrightarrow ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg\neg p_2 \vee \neg p_1)) \wedge ((\neg p_2 \wedge \neg\neg p_1) \vee$

$\vee (\neg p_1 \vee p_2)) \Leftrightarrow ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_2 \vee \neg p_1)) \wedge$

$\wedge ((\neg p_2 \wedge p_1) \vee (\neg p_1 \vee p_2)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee p_2 \vee \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge$

$\wedge (p_1 \vee \neg p_1 \vee p_2)$

OBS: $\varphi: (p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$ é uma tautologia. Logo, $p_0 \vee \neg p_0$ é uma FNC e FND logicamente equivalente a φ

2.12

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$\varphi^d = (p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_2)$$

é uma FND logicamente equivalente a φ.

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$\varphi^c = (\neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_1 \vee p_2)$$

é uma FNC logicamente equivalente a φ

2.14 Γ : conjunto de fórmulas

Γ diz-se **consistente** se existe alguma valoração v que **satisfaz** Γ ($v \models \Gamma$), ou seja, tal que $v(\varphi)=1$, para todo $\varphi \in \Gamma$.

a) $\Gamma = \{ p_0 \wedge p_2 , \ p_1 \to \neg p_3 , \ p_1 \vee p_2 \}$

A valoração $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ tal que

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3\} \\ 0 & \text{se } i = 3 \end{cases}$$

satisfaz Γ, pelo que Γ é consistente

b) $\Gamma = \{ p_0 \vee \neg p_1 , \ p_1 , \ p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3) \}$

A valoração $v : \mathcal{F}^{CP} \to \{0,1\}$ tal que

$v(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$,

é tal que $v(\varphi)=1$, para todo $\varphi \in \Gamma$.

Logo, $v \models \Gamma$, donde Γ é consistente

c) $\mathcal{F}^{CP}$

Suponhamos que existe v tal que v é uma valoração que satisfaz $\mathcal{F}^{CP}$. Então, $v(\varphi)=1$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Em particular, $v(\perp) = 1$, o que é absurdo.
Logo, $\mathcal{F}^{CP}$ é inconsistente.

2.15 $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. V ou F?

a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são consistentes.

$\Gamma \cup \Delta$ é consistente: Existe v valoração tal que $v \models \Gamma \cup \Delta$, ou seja, tal que $v(\varphi)=1$, para todo $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$.

Assim, para todo $\varphi \in \Gamma$, $v(\varphi)=1$, pelo que $v \models \Gamma$ e Γ é consistente. Mais ainda, $v(\varphi)=1$, para todo $\varphi \in \Delta$. Portanto, $v \models \Delta$ e Δ é consistente. Portanto, a afirmação é verdadeira.