Métodos Numéricos para Equações de Derivadas Parciais

Mestrado em Matemática e Computação

Teste :: 6 de junho 2023

Duração: 2h 30m

Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

1. Pretende-se resolver a equação parabólica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2},\ t \geq 0,$$

sujeita às condições

$$u(x,0) = x(1-x),\ 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2},t\right) = -\tfrac{1}{2}u\left(\tfrac{1}{2},t\right);\ \forall t > 0.$$

a) Formule um esquema explícito de diferenças finitas, usando aproximações de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ para as derivadas na direção de x e de ordem $\mathcal{O}(k)$ para as derivadas na direção de t, onde h e k denotam, como habitualmente, as dimensões da malha retangular associada ao esquema.

b) Considere $h = 0.1$ e $k = 0.005$.

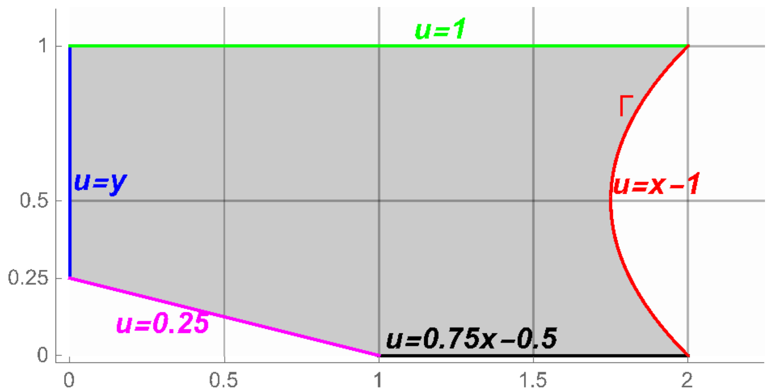
(i) Escreva a matriz associada ao esquema obtido em a).

(ii) Obtenha uma aproximação para a solução em $t = 0.01$ e $t = 0.02$, usando o esquema obtido.

2. Pretende-se resolver a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

na região e com as condições de fronteira indicadas na figura abaixo; a curva Γ representada é parte da parábola de equação $x = (y-0.5)^2 + 1.75$.



a) Identifique os nós interiores e os nós fronteiros da malha.

b) Determine aproximações para o problema dado, usando $h = k = \frac{1}{2}$.

c) Se usasse $h = k = \frac{1}{4}$, quantos nós interiores e quantos nós fronteiros passaria a ter a malha?

(continua)

3. Considere a equação de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ a > 0 \text{ (constante)}. \tag{1}$$

a) Determine os coeficientes α, β e γ de forma que o esquema de diferenças finitas

$$U_{i,j+1} = \alpha U_{i-1,j} + \beta U_{i,j} + \gamma U_{i+1,j}$$

para aproximar a equação dada, tenha a maior precisão possível. Nestas condições, que conhecido método se obtém?

b) Considere a equação (1), para $0 < x < \infty,\ t > 0$ e $a = 1$, sujeita às condições iniciais

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

e às condições de fronteira

$$u(0,t) = t,\ t > 0.$$

(i) Resolva analiticamente o problema.

(ii) Resolva numericamente o problema, usando o método de Lax-Friedrichs com $h = \frac{1}{4}$ e $k = \frac{1}{8}$. Apresente a solução para $t = 0.25$ e $x = 0 : 0.25 : 2.5$.

(iii) Use o método de Fourier para estudar a estabilidade deste método.