Universidade do Minho

Departamento de Matemática e Aplicações

Séries Temporais

FORMULÁRIO

Docente: Raquel Menezes

Capítulo 1

Introdução

Definição Dado um p.e. $X(t)$, tal que para todo o t temos $E[X(t)^2] < +\infty$, define-se:

1. função valor médio $\mu(t) = E[X(t)]$
2. função de variância $\sigma^2(t) = Var[X(t)] = E[(X(t) - \mu(t))^2]$
3. função de covariância $\gamma(t_1, t_2) = Cov[X(t_1), X(t_2)] = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))]$
4. função de correlação $\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1,t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{Cov[X(t_1),X(t_2)]}{\sqrt{Var[X(t_1)]Var[X(t_2)]}}$

Definição Um p.e. diz-se um processo de **ruído branco** se:

1. $E[X(t)] = \mu$ (usualmente $\mu = 0$)
2. $Cov[X(t_1), X(t_2)] = 0, t_1 \neq t_2$
3. $Var[X(t)] = \sigma^2$, independentemente de t (homocedástico)

Função de auto-covariância

Para um processo estacionário de 2ª ordem define-se a função de auto-covariância

$$\gamma_k = Cov[X_t, X_{t+k}] = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]$$

Função de autocorrelação (FAC)

Para um processo estacionário de 2ª ordem define-se a função de autocorrelação

$$\rho_k = Corr[X_t, X_{t+k}] = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{Cov[X_t, X_{t+k}]}{\sigma^2}$$

Função de autocorrelação parcial (FACP)

Por vezes interessa além de estudar a correlação de uma forma global, também a correlação parcial entre X_t e X_{t+k}, quando se fixam as variáveis intermédias $X_{t+1}, X_{t+2}, ..., X_{t+k-1}$.

Capítulo 2

Alguns modelos estacionários lineares

Processos autoregressivos de ordem p, $AR(p)$

O processo X_t diz-se $AR(p)$ quando satisfaz a equação às diferenças estocásticas

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

ou

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p) X_t = \epsilon_t$$

onde $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p$ é o polinómio regressivo de ordem p e ϵ_t um ruído branco. Note-se que ϵ_t é independente de X_{t-k} para $\forall k \geq 1$.

A **fórmula geral para a função** ρ_k de um processo AR(p) pode ser obtida por

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{p} A_i G_i^k.$$

Os valores das p constantes A_i podem ser obtidos tendo em conta as p primeiras autocorrelações, ou seja, à custa do seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \ldots + \phi_p \rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p \rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \ldots + \phi_p
\end{aligned}$$

Processos de médias móveis de ordem q, $MA(q)$

Os processos $MA(q)$ são da forma

$$X_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2} - ... - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

ou

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q) \epsilon_t$$

onde $\Theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q$ é o polinómio médias móveis de ordem q.

A **função de autocovariâncias** é dada por:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2(1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2) & \text{se } k = 0 \\ \sigma_\epsilon^2(-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}) & \text{se } k = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \text{se } k \geq q + 1 \end{cases}$$

e a **FAC** é dada por

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}}{1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2} & \text{se } k = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \text{se } k \geq q + 1 \end{cases}$$

Processos mistos autoregressivos e médias móveis, $ARMA(p, q)$

Um processo $ARMA(p, q)$ vem definido pela seguinte equação

$$\Phi_p(B) X_t = \Theta_q(B) \epsilon_t$$

onde ϵ_t é um processo ruído branco, com ϵ_t independente de X_{t-k}, $\forall k \geq 1$, e os polinómios $\Phi_p(B)$ e $\Theta_q(B)$ são dados por

$$\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \quad \text{e}$$

$$\Theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q.$$

Consultar Tabela 2.1 para comparação dos vários tipos de processos $ARMA(p, q)$.

Processos autoregressivos estritamente sazonais

Os processos $AR(P)_s$ são da forma

$$X_t = \nu_1 X_{t-s} + \ldots + \nu_P X_{t-sP} + \epsilon_t \qquad \text{ou} \qquad N_P(B) X_t = \epsilon_t$$

onde $N_P(B) = 1 - \nu_1 B^s - \ldots - \nu_P B^{sP}$ representa o polinómio autoregressivo sazonal de grau P em B. Estes processos são sempre invertíveis e serão também estacionários caso as raízes do polinómio $N_P(B)$ estejam fora do círculo unitário.

Processos de médias móveis estritamente sazonais

Os processos $MA(Q)_s$ são da forma

$$X_t = \epsilon_t - \eta_1 \epsilon_{t-s} - \ldots - \eta_Q \epsilon_{t-sQ} \qquad \text{ou} \qquad X_t = H_Q(B) \epsilon_t$$

Tabela 2.1: Comparação dos vários tipos de processos $ARMA(p,q)$

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
Modelo em termos dos valores anteriores de X_t	$\Phi_p(B)X_t = \epsilon_t$ Série finita em X_t	$(\Theta_q(B))^{-1}X_t = \epsilon_t$ Série infinita em X_t	$(\Theta_q(B))^{-1}\Phi_p(B)X_t = \epsilon_t$ Série infinita em X_t
Modelo em termos dos valores anteriores de ϵ_t	$X_t = (\Phi_p(B))^{-1}\epsilon_t$ Série infinita em ϵ_t	$X_t = \Theta_q(B)\epsilon_t$ Série finita em ϵ_t	$X_t = (\Phi_p(B))^{-1}\Theta_q(B)\epsilon_t$ Série infinita em ϵ_t
Condições de estacionaridade	Raízes de $\Phi_p(B) = 0$ fora do círculo unitário	Sempre estacionários	Raízes de $\Phi_p(B) = 0$ fora do círculo unitário
Condições de invertibilidade	Sempre invertíveis	Raízes de $\Theta_q(B) = 0$ fora do círculo unitário	Raízes de $\Theta_q(B) = 0$ fora do círculo unitário
FAC	Decaimento exponencial e/ou sinusoidal para zero	Decaimento brusco para zero a partir de $k = q+1$	Decaimento exponencial e/ou sinusoidal para zero
FACP	Decaimento brusco para zero a partir de $k = p+1$	Decaimento exponencial e/ou sinusoidal para zero	Decaimento exponencial e/ou sinusoidal para zero

onde $H_Q(B) = 1 - \eta_1 B^s - \ldots - \eta_Q B^{sQ}$ representa o polinómio médias móveis sazonal de grau Q em B. Estes processos são sempre estacionários.

Processos mistos estritamente sazonais, $ARMA(P,Q)_s$

A generalização dos dois processos anteriormente descritos pode ser efectuada pelos seguintes modelos

$$N_P(B)X_t = H_Q(B)\epsilon_t.$$

Processos multiplicativos, $ARMA(p,q) \times (P,Q)_s$

Os processos multiplicativos com componentes sazonal e não sazonal são da forma

$$\Phi_p(B)N_P(B)X_t = \Theta_q(B)H_Q(B)\epsilon_t$$

onde $\Phi_p(B)$ e $N_P(B)$ representam os polinómios autoregressivo não sazonal e sazonal, e $\Theta_q(B)$ e $H_Q(B)$ representam os polinómios médias móveis não sazonal e sazonal, respectivamente.

Capítulo 3

Modelos não estacionários lineares

Processos integrados mistos, $ARIMA(p, d, q)$

Generalizando as ideias anteriores de modo a contemplar qualquer modelo $ARMA$, e permitindo que o operador autoregressivo tenha d raízes unitárias, chega-se à expressão

$$(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)(1 - B)^d X_t = (1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q)\epsilon_t.$$

ou

$$\Phi_p(B)\nabla^d X_t = \Theta_q(B)\epsilon_t.$$

Processos integrados mistos sazonais, $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$

Este processo pode se escrever abreviadamente como

$$N_P(B)\Phi_p(B)\nabla^d \nabla_s^D X_t = \Theta_q(B)H_Q(B)\epsilon_t$$

onde $\nabla_s^D = (1 - B^s)^D$, e os polinómios $N_P(B)$, $\Phi_p(B)$, $\Theta_q(B)$ e $H_Q(B)$ foram definidos no capítulo 2.

Capítulo 4

Modelização ARIMA de séries temporais

Previsão com modelos ARIMA

Dado um processo $ARIMA(p, d, q)$, denotado por $\Phi_p(B)(1-B)^d x_t = \Theta_q(B)\epsilon_t$, consideremos a sua representação $MA(\infty)$,

$$x_t = \Psi(B)\epsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$$

onde $\psi_0 = 1$ e os restantes ψ_i podem obter-se à custa da equação

$$\Phi_p(B)(1 - B)^d \Psi(B) = \Theta_q(B).$$

Para se determinar um intervalo de predição a 95% para a variável x_T tendo-se observado toda a série até x_T, calcula-se

$$[\hat{x}_{T+k} \pm 1.96\hat{\sigma}_\epsilon(1 + \hat{\psi}_1^2 + \ldots + \hat{\psi}_{k-1}^2)^{1/2}].$$