Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Métodos Numéricos para Equações de Derivadas Parciais

M. Irene Falcão

Mestrado em Matemática e Computação

2023/2024

Equações Hiperbólicas

Equações Hiperbólicas

Equações diferenciais parciais hiperbólicas (PDEs) surgem em muitos problemas físicos, normalmente sempre que o movimento de onda é observado. Ondas acústicas, ondas eletromagnéticas, ondas sísmicas, ondas de choque e muitos outros tipos de ondas podem ser modeladas por equações hiperbólicas. Muitas vezes, estes problemas são modelados por equações hiperbólicas lineares (para a propagação de perturbações suficientemente pequenas), mas modelar grandes movimentos geralmente requer resolver equações hiperbólicas não lineares. As equações hiperbólicas também surgem no transporte advectivo, quando uma substância é transportada com um fluxo, dando origem a uma equação de advecção - EDP hiperbólica escalar linear de primeira ordem, o caso mais simples possível.

Equações de 1ª ordem quasi-lineares

Consideremos a equação

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = c, \tag{1}$$

onde a, b e c são funções de x, y e u.

Introduzindo a notação

$$p := \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad q := \frac{\partial u}{\partial y},$$

a equação (1) pode escrever-se como

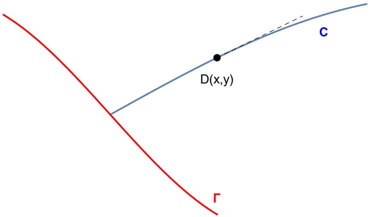
$$ap + bq = c. \tag{2}$$

Curvas características

A solução da equação (2) pode ser obtida considerando a possibilidade de encontrar uma direção, em cada ponto do plano xy, ao longo da qual a integração da equação se transforma na integração de uma equação diferencial ordinária. Nesta direção, a expressão a integrar é independente das derivadas parciais noutras direções (por exemplo p e q).

Suponhamos que resolvemos a equação (2) e que a solução é conhecida em cada ponto de uma dada curva C no plano xy, não coincidente com a curva Γ onde os valores iniciais de u são especificados.

Consideremos a situação ilustrada na figura,



onde $D = (x, y)$ é um ponto de C. (Note-se que em D, u e as derivadas parciais associadas satisfazem a equação (2).)

Ao longo da direção da tangente a C no ponto D tem-se que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = p\, dx + q\, dy, \tag{3}$$

sendo $\frac{dy}{dx}$ o declive da reta tangente a C em D.

As equações (2) e (3) formam um sistema de duas equações, nas incógnitas p e q. Resolvendo a 1ª equação em ordem a p e substituindo na 2ª, obtém-se a equação

$$q(a\,dy - b\,dx) + (c\,dx - a\,du) = 0, \tag{4}$$

a qual é independente de p, porque os coeficientes a, b e c são funções de x, y e u apenas. Se a curva C for escolhida de forma que

$$a\,dy - b\,dx = 0 \tag{5}$$

então a equação (4) reduz-se a

$$c\,dx - a\,du = 0, \tag{6}$$

sendo também independente de q.

A equação (5) é uma equação diferencial para a curva C e (6) é uma equação diferencial para os valores da solução u ao longo de C.

A curva C é designada curva característica ou característica. As equações (4)-(5) podem ser escritas na forma:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$$

A solução u pode ser encontrada usando a equação $du = \frac{c}{a}\,dx$ ou a equação $du = \frac{c}{b}\,dy$.

Exemplo: Considere a equação $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$ com condições iniciais $u(x,0) = \phi(x),\ 0 \le x \le 1$.

A equação diferencial da família de características é

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{1}$$

donde se conclui que a equação da família de características é

$$x = \frac{1}{2}y^2 + k_1,$$

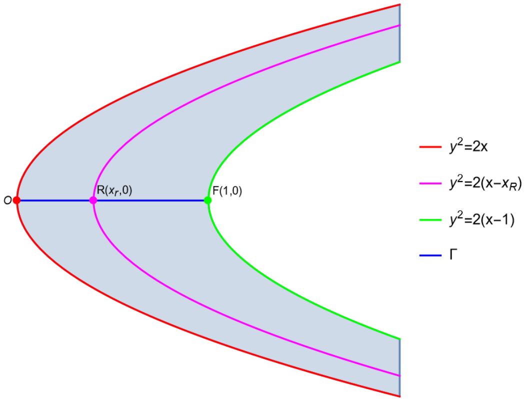
onde k_1 é uma constante para cada característica. Para a característica que passa no ponto $R = (x_R, 0)$, tem-se que $k_1 = x_R$, o que significa que a característica que passa em R é $y^2 = 2(x - x_R)$.

A solução ao longo da curva característica pode obter-se de

$$\frac{dy}{1} = \frac{du}{2},$$

i.e, $u = 2y + k_2$, com k_2 constante para cada característica. Para a característica que passa no ponto $R = (x_R, 0)$, tem-se que $k_2 = u_R$, onde u_R designa a solução em R, ou seja, a solução ao longo da característica $y^2 = 2(x - x_R)$ é $u = 2y + u_R$.

Como os valores iniciais para u são conhecidos apenas em Γ, a solução está definida (e é única) apenas na região limitadas pelas curvas características $y^2 = 2x$ e $y^2 = 2(x - 1)$. Fora desta região, a solução não está definida.


O
R(x_r,0)
F(1,0)
y^2=2x
y^2=2(x−x_R)
y^2=2(x−1)
Γ

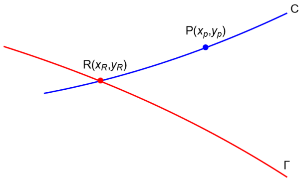
Método para integração numérica ao longo da uma característica

Suponhamos que a solução u é conhecida numa curva inicial Γ, não coincidente com uma curva característica. Seja $R = (x_R, y_R)$ um ponto em Γ e seja $P = (x_P, y_P)$ um ponto numa curva característica C que passa em R e tal que $x_P - x_R$ é suficientemente pequeno.

A equação diferencial para a característica é:

$$a\,dy = b\,dx,$$

o que permite obter dx ou dy. A equação diferencial para a solução ao longo da característica é dada por



$$a\,du = c\,dx \quad \text{ou} \quad b\,du = c\,dy,$$

o que permite obter du para valores de dx ou dy conhecidos.

Sejam $u^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ aproximações para a solução u e suponhamos que x_P é conhecido. Então, aproximações $y_P^{(1)}$ para y_P e $u_P^{(1)}$ para u_P podem obter-se de

$$a_R(y_P^{(1)} - y_R) = b_R(x_P - x_R)$$
$$a_R(u_P^{(1)} - u_R) = c_R(x_P - x_R)$$

Para obter as iteradas seguintes, substituímos os coeficientes a, b e c pelos seus valores médios em R e P.

$$\tfrac{1}{2}(a_R + a_P^{(k)})(y_P^{(k+1)} - y_R) = \tfrac{1}{2}(b_R + b_P^{(k)})(x_P - x_R)$$
$$\tfrac{1}{2}(a_R + a_P^{(k)})(u_P^{(k+1)} - u_R) = \tfrac{1}{2}(c_R + c_P^{(k)})(x_P - x_R)$$

Equação de advecção

Consideremos a equação de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \;\; a > 0 \text{ (constante)}. \tag{7}$$

Esta equação surge em muitos processos de transporte, onde $u(x, t)$ representa, por exemplo, a concentração de um produto químico que é transportado por um fluxo de velocidade constante a.

Seja $x_i = ih$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ e $t_j = kR$, $j = 0, 1, \ldots$.

Usando a expansão em série, podemos escrever

$$u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + k) = u_{i,j} + k \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j} + \frac{1}{2} k^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{i,j} + \ldots$$

Usando (7), obtém-se $\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$ e a equação anterior pode ser reescrita como

$$u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + k) = u_{i,j} - ka \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{1}{2} k^2 a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \ldots$$

Usando agora diferenças centrais para aproximar as derivadas na direção de x, obtém-se a seguinte fórmula de diferenças finitas para aproximar a equação (7).

Esquema de diferenças finitas

$$U_{i,j+1} = \tfrac{1}{2}ap(1+ap)U_{i-1,j} + (1-a^2p^2)U_{i,j} - \tfrac{1}{2}ap(1-ap)U_{i+1,j}, \qquad (8)$$

onde $p = \dfrac{k}{h}$.

O método de Lax-Wendroff explícito é estável se

$$0 < ap \leq 1$$

e tem erro de truncatura local

$$\mathcal{O}(k^2 + h^2).$$

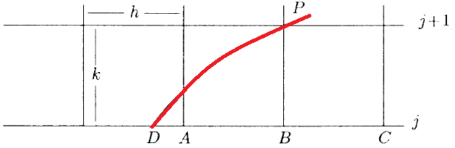
Este método pode ser usado para resolver problemas de valor inicial e problemas de valor de fronteira.

Condição de Courant-Friedrichs-Lewy

Suponhamos que uma equação hiperbólica de 1ª ordem foi aproximada por uma equação de diferenças da forma

$$U_{i,j+1} = aU_{i-1,j} + bU_{i,j} + cU_{i+1,j} \tag{9}$$

Consideremos a curva característica que passa num ponto $P = (ih, (j+1)k)$ da grelha retangular ilustrada na figura.



A solução U_P da equação (9) em P, depende de U_A, U_B e U_C. Assumamos que a característica representada encontra o segmento de reta AC em D e consideremos AC como um segmento de reta inicial.

➠ Se os valores iniciais ao longo de AC forem alterados então a solução U_P mudará, mas essas alterações não afetarão o valor da solução em P da equação diferencial parcial que depende do valor inicial em D.

Nesse caso, U_P não poderá convergir para u_P, quando $h \to 0$, $k \to 0$.

➠ Para se obter convergência, D deve estar entre A e C. Esta condição é designada condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

Vejamos como se pode exprimir a CFL.

Consideremos o esquema de Lax-Wendroff (8) para a equação de advecção (7).

A equação diferencial para a característica é:

$$a\,dt = dx.$$

Para se obter convergência da equação de diferenças, o declive de PD $\left(\frac{dt}{dx}\right)$ deverá ser maior ou igual ao declive de PA, i.e.

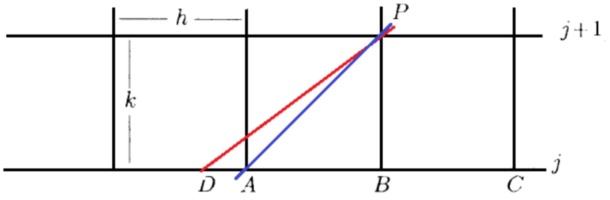
Condição de Courant-Friedrichs-Lewy

$$\frac{1}{a} \geq \frac{k}{h} = p \Leftrightarrow ap \leq 1.$$

O número ap designa-se número de Courant.

A região limitada pela linha inicial $t = 0$ e pela reta de declive $\frac{k}{h}$ que passa em P chama-se o domínio de dependência numérico de P.

A região limitada pela linha inicial $t = 0$ e pela característica que passa em P é o domínio de dependência da equação em P.



É condição necessária de convergência que o domínio de dependência numérico da equação de diferenças contenha o domínio de dependência da equação diferencial.

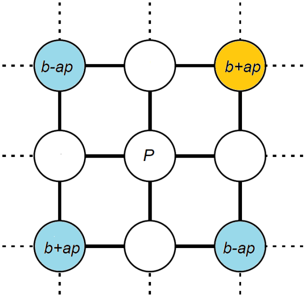
Método de Wendroff implícito

Uma aproximação implícita de 2ª ordem para a equação (1) pode ser obtida aproximando as derivadas $\frac{\partial U}{\partial x}$ e $\frac{\partial U}{\partial y}$ pela média de diferença central nas direções de x e de y.

Método de Wendroff

$$(b - ap)U_{i,j+1} + (b + ap)U_{i+1,j+1} = (b + ap)U_{i,j} + (b - ap)U_{i+1,j} + 2kc,$$

onde $p = \dfrac{k}{h}$.



Note-se que este esquema só pode ser usado se forem conhecidos os valores iniciais em $t = 0$ e os valores de fronteira em $x = 0$. Neste caso, o esquema anterior é incondicionalmente estável e pode ser escrito explicitamente como

$$U_{i+1,j+1} = U_{i,j} + \frac{b - ap}{b + ap}(U_{i+1,j} - U_{i,j+1}) + \frac{2kc}{b + ap}$$

Outros métodos :: equação advecção (7)

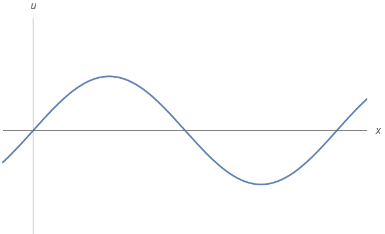
Método	Esquema
Euler progressivo	$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{p}{2} a(U_{i+1,j} - U_{i-1,j})$
Upwind	$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{p}{2} a(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) + \frac{p}{2}\|a\|(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})$
Lax-Friedrichs	$U_{i,j+1} = \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - \frac{p}{2} a(U_{i+1,j} - U_{i-1,j})$
Lax Wendroff	$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{p}{2} a(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) + \frac{p^2}{2} a^2(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j})$
Warming-Beam	$U_{i,j+1} = U_{i,j} - \frac{p}{2} a(3U_{i,j} - 4U_{i,j-1} + U_{i,j-2}) + \frac{p^2}{2} a^2(U_{i,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i-2,j})$
Leap-Frog	$U_{i,j+1} = U_{i,j-1} - pa(U_{i+1,j} - U_{i-1,j})$

Consideremos a equação das ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{10}$$

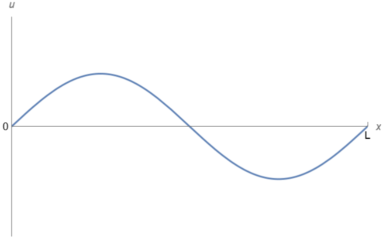
Corda infinita

Um modelo simplificado para o movimento de uma corda elástica flexível uniforme num plano é dado pela equação das ondas (10) onde $u(x,t)$ é o afastamento da corda no instante t e no ponto x em relação à posição retilínea de equilíbrio (que supomos ser ao longo do eixo dos xx), considerado perpendicularmente a este eixo.



Corda finita

Consideramos agora o movimento de uma corda elástica flexível uniforme de comprimento L; supõe-se que no instante inicial são conhecidas a "forma" $u(x,0)$ e a "velocidade" $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ da corda e que a corda está fixa nas extremidades.



Condições iniciais ($x \in [0, L]$, $t \in \mathbb{R}$):

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = g(x), \tag{11}$$

Condições de fronteira:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \;\; t > 0 \tag{12}$$

Curvas características

As curvas características para a equação (10) são da forma

$$x + ct = \zeta, \qquad x - ct = \nu,$$

com ζ e ν constantes específicas para cada característica. Usando a mudança de variáveis

$$\zeta = x + ct, \quad \nu = x - ct, \quad \Phi(\zeta, \nu) = u(x, t)$$

a equação (10) pode escrever-se como $4c^2 \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial \nu} = 0$, cuja solução é dada por

$$\Phi(\zeta, \nu) = F(\zeta) + G(\nu),$$

onde F e G são funções arbitrárias de classe $\mathcal{C}^2$.

A solução da equação (10) vem então

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct). \tag{13}$$

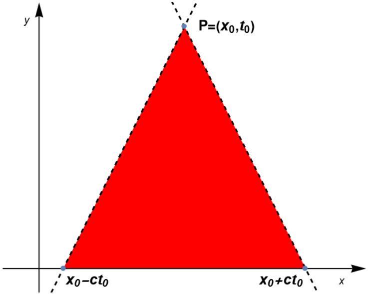
As soluções são o resultado da soma da translação de duas funções, em sentidos opostos, ambas movendo-se com velocidade c.

Se a solução satisfizer as condições iniciais (11) obtém-se então (ver exercício):

Solução d'Alembert

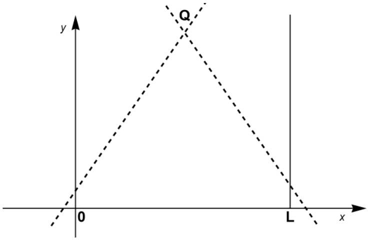
$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds. \tag{14}$$

A equação (14) mostra que a solução num ponto $P = (x_0, t_0)$ é univocamente determinada pelos valores de f e g no intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ na linha inicial $t = 0$.



Este intervalo, que é determinado pela interseção das características que passam pelo ponto (x_0, t_0) com a reta $t = 0$, é o intervalo de dependência de P. O triângulo a vermelho é o domínio de dependência de P.

Se a equação das ondas (10), está sujeita às condições iniciais (11), então a equação (13) só tem significado se o ponto $P = (x_0, t_0)$ é tal que o seu intervalo de dependência está contido no intervalo $[0, L]$, onde as funções f e g estão definidas. Se o ponto Q é tal que as características que por ele passam intersetam a reta $t = 0$ fora do intervalo $[0, L]$, a solução poderá ser obtida , embora não tão facilmente, através da utilização das condições de fronteira.



Métodos explícitos

Para construir a solução do problema (10) com condições iniciais (11) e condições de fronteira (12), a região

$$\Omega = \{(x,t) : 0 \leq x \leq L,\ \ t \geq 0\}$$

é coberta com uma rede de malha retangular de dimensões h e k, $\Omega_{h,k}$, com h tal que $Mh = L$.

Em cada ponto de $\Omega_{h,k}$, determina-se uma aproximação $U_{i,j}$ para $u_{i,j} = u(ih, jk)$. A fórmula mais simples para aproximar a equação (10) é:

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} = c^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \tag{15}$$

a qual tem erro de truncatura local $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.

Fazendo $r = \dfrac{ck}{h}$, podemos escrever a equação (15) como

$$U_{i,j+1} = r^2 U_{i-1,j} + 2(1-r^2)U_{i,j} + r^2 U_{i+1,j} - U_{i,j-1};\, i = 1, \ldots, M-1,\ j = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

- Das condições de fronteira (12) obtemos $U_{0,j} = U_{M,j} = 0$;
- A primeira condição inicial implica que $U_{i,0} = f(ih)$.
- Como o método envolve três níveis da rede, é necessário calcular $U_{i,1}$, usando a segunda condição inicial, para que se possa iniciar a recursão (16).

Introduzimos então os "pontos fictícios" (x_i, t_{-1}), com $t_{-1} = -k$, e aproximamos a derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ nos pontos $(x_i, 0)$ por

$$\frac{U_{i,1} - U_{i,-1}}{2k} = g_i, \tag{17}$$

com erro de truncatura $\mathcal{O}(k^2)$.

Da equação (17) obtém-se

$$U_{i,-1} = U_{i,1} - 2kg_i. \tag{18}$$

Substituindo (18) em (16) para $j = 0$ (com a introdução dos "pontos fictícios", assume-se que a equação (16) é também válida para $j = 0$), e usando $U_{i,0} = f_i$, obtém-se

$$U_{i,1} = \frac{r^2}{2} f_{i+1} + (1 - r^2) f_i + \frac{r^2}{2} f_{i-1} + kg_i. \tag{19}$$

O método (16) pode agora ser usado para determinar $U_{i,j}$; $i = 1, \dots, M-1$, $j > 1$.

Condição de Courant-Friedrichs-Lewy

Seguindo uma análise análoga à feita para a equação de advecção, podemos obter as características numéricas de um ponto P e o correspondente domínio de dependência numérico, bem como o domínio de dependência da equação em P.

É condição necessária de convergência que o domínio de dependência numérico da equação de diferenças contenha o domínio de dependência da equação diferencial, i.e.,

$$0 < r = \frac{ck}{h} \leq 1.$$