$\boxed{\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}}$

Γ diz-se um conjunto consistente se existe pelo menos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, ou seja, tal que $v \models \varphi$, para todo $\varphi \in \Gamma$.
(i.e. $v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Gamma$)

2.15 $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ $\boxed{\text{V ou F?}}$

a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então Γ e Δ são consistentes.

Como $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, existe v valoração tal que $v \models \Gamma \cup \Delta$, i.e. $v(\varphi) = 1$, para todo $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$.
Assim, para todo $\varphi \in \Gamma$, $v(\varphi) = 1$, donde $v \models \Gamma$.
Também para todo $\varphi \in \Delta$, $v(\varphi) = 1$. Logo, $v \models \Delta$.
Podemos, então, afirmar que Γ e Δ são consistentes, pelo que a afirmação é verdadeira

2.15 $\boxed{\text{V ou F ?}}$

$\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$

b) Se Γ e Δ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.

$\Gamma = \{p_0\}$ é satisfeito pela valoração v tal que $v(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

$\Delta = \{\neg p_0\}$ é satisfeito pela valoração v' tal que $v'(p_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.
Assim, Γ e Δ são conjuntos consistentes. No entanto, $\Gamma \cup \Delta$ é inconsistente. De facto, se existisse uma valoração v'' tal que $v'' \models \Gamma \cup \Delta$, então $v''(p_0) = 1$ e $v''(\neg p_0) = 1$, o que é impossível.

2.15 $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ $\boxed{\text{V ou F ?}}$

c) Se Γ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.

Como Γ é consistente, existe uma valoração v tal que $v(\psi) = 1$, para todo $\psi \in \Gamma$. (*)

Suponhamos que $\neg\varphi \in \Gamma$.

Temos que $\varphi, \neg\varphi \in \Gamma$ e, por (*), segue-se que $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\varphi) = 1$, o que é impossível.

Logo, $\neg\varphi \notin \Gamma$.

$\boxed{\Gamma \vDash \varphi}$

$\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{cp}$
$\varphi \in \mathcal{F}^{cp}$

φ é consequência semântica de Γ

se

$v(\varphi) = 1$ para toda a valoração v que satisfaz Γ

ou seja,

Se v é uma valoração tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Gamma$, então $v(\varphi) = 1$.

$\boxed{\text{OBS:}}$ $\Gamma \nvDash \varphi$ se existe pelo menos uma valoração v tal que $v \vDash \Gamma$ mas $v(\varphi) = 0$.

2.16 V ou F ?

a) $p_3 \vee p_0 , \neg p_0 \models p_3$ é V, pois nos casos em que $p_3 \vee p_0$ e $\neg p_0$ são simultaneamente verdadeiros, também p_3 é verdadeira, como podemos ver na tabela.

p_0	p_3	$p_3 \vee p_0$	$\neg p_0$	p_3
1	1	1	0	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

OU Seja v uma valoração tal que

$$v(p_3 \vee p_0) = 1$$

e

$$v(\neg p_0) = 1 .$$

¿ Podemos afirmar que $v(p_3) = 1$?

De $v(\neg p_0)=1$, sabemos que $v(p_0)=0$. Mas, assim, como $v(p_3 \vee p_0)=1$, podemos concluir que $v(p_3)=1$.

2.16 V ou F ?

c) $\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3),\ \neg p_2 \models \neg p_1$

p_1	p_2	p_3	$\neg p_2$	$p_1 \vee p_3$	$\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3)$	$\neg p_2$	$\neg p_1$
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

A afirmação é F. Como podemos verificar na tabela (por exemplo, na 3ª linha), existem valorações que atribuem o valor 1 a $\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3)$ e a $\neg p_2$ mas atribuem o valor 0 a $\neg p_1$. Portanto,

$$\neg p_2 \to (p_1 \vee p_3),\ \neg p_2 \not\models \neg p_1$$

2.17 $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$

a) $\varphi \vee \psi, \ \neg\varphi \vee \sigma \vDash \psi \vee \sigma$

φ	ψ	σ	$\varphi \vee \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\varphi \vee \sigma$	$\psi \vee \sigma$
1	1	1	1	0	1	$\boxed{1}$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	$\boxed{1}$
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	$\boxed{1}$
0	1	0	1	1	1	$\boxed{1}$
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0

Pela tabela, podemos verificar que sempre que $\varphi \vee \psi$ e $\neg\varphi \vee \sigma$ tomam ambas valor lógico 1, também $\psi \vee \sigma$ toma valor lógico 1 (para quaisquer φ, ψ, σ).

Temos que a afirmação é, portanto, V.

2.17 c) $\Gamma \vDash \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \vDash \psi$

$(\Rightarrow)$

Hipótese: $\Gamma \vDash \varphi \vee \psi$

Para toda a valoração v, se $v \vDash \Gamma$, então $v(\varphi \vee \psi) = 1$.

Tese: $\Gamma, \neg\varphi \vDash \psi$

Seja v uma valoração tal que $v \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

$\boxed{¿\ v(\psi) = 1\ ?}$

Como $v \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, sabemos que $v \vDash \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$. Assim, $v \vDash \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$. Por hipótese, dado que $v \vDash \Gamma$, podemos afirmar que $v(\varphi \vee \psi) = 1$. Como $v(\varphi) = 0$, é óbvio que $v(\psi) = 1$.

$(\Leftarrow)$ Hipótese: $\Gamma, \neg\varphi \vDash \psi$

Para toda a valoração v, se $v \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, então $v(\psi) = 1$.

Tese: $\Gamma \vDash \varphi \vee \psi$

Seja v uma valoração v tal que $v \vDash \Gamma$.

$\boxed{¿\, v(\varphi \vee \psi) = 1?}$

Temos dois casos possíveis:

CASO 1: $v(\varphi) = 1$;
CASO 2: $v(\varphi) = 0$.

CASO 1: Neste caso, é claro que $v(\varphi \vee \psi) = 1$.

CASO 2: Neste caso, $v(\neg\varphi) = 1$. Assim, $v \vDash \Gamma$ e $v(\neg\varphi) = 1$. Logo, $v \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Por hipótese, $v(\psi) = 1$, donde $v(\varphi \vee \psi) = 1$.

Como em ambos os casos possíveis provámos que $v(\varphi \vee \psi) = 1$, podemos concluir que

$$\Gamma \vDash \varphi \vee \psi.$$