1.Modelos e simulação

Objectivos: *Explicar os objectivos e importância da Modelação e Simulação e dar exemplos ilustrativos dos problemas que, depois, serão estudados em detalhe*.

Sistemas

Sistema coleção de objetos que interagem. Exemplos:

- Um campo de coletores solares para produção de energia
- A rede de distribuição de energia elétrica em Portugal
- Uma máquina de papel
- Uma rede de comunicações
- Um servidor de uma rede de computadores
- Um paciente sujeito a anestesia
- A infeção pelo vírus HIV1 no corpo humano
- Um conjunto de pessoas que interagem

Perguntas

A Engenharia (ou a mera, mas nobre, curiosidade humana) tenta responder a **questões** sobre estes e outros sistemas. Por exemplo:

- Como melhorar o desempenho da produção de energia no campo de coletores solares?
- Será que a rede de distribuição de energia é estável ou podem surgir oscilações de amplitude crescente?
- Como é possível ajustar as válvulas numa máquina de papel para produzir papel de “boa” qualidade?
- Como reage o corpo humano à administração de um fármaco anestésico?
- Como melhorar o desempenho numa rede de computadores?

Experimentação

Muitas destas perguntas podem ser respondidas por *experimentação*: *Testar o sistema real e ver o que acontece*!

Uma atividade central das Ciências Naturais durante vários séculos (em particular desde o século XVI) consistiu em fazer perguntas apropriadas sobre as propriedades dos sistemas e respondê-las através da experimentação.

Esta é a base do Método Experimental que se baseia no ciclo:

- Observação
- Hipótese
- Experimentação

Método experimental; Baseado em sólidos princípios, mas tem limitações.

Por vezes é desadequado ou impossível realizar experiências. Razões:

- É muito **caro** (ex.: a realização de múltiplos testes arbitrários numa máquina de papel implica a produção de papel invendável)
- É excessivamente **perigoso** (ex.: treinar operadores de uma instalação nuclear para reagir a situações perigosas)
- O **sistema ainda não existe** (ex.: Ao projetar uma nova aeronave pretende-se avaliar o efeito de diferentes formas das asas nas propriedades aerodinâmicas).
- Há **limitações éticas**.

Modelos

Um modelo de um sistema é um outro sistema, construído numa "tecnologia" mais simples e barata cujo comportamento (evolução no tempo) é uma imagem das variáveis que queremos estudar no sistema real.

- **Modelos analógicos** (ex.: modelos reduzidos de barragens)
- **Modelos matemáticos**: Sistemas de equações diferenciais ou de diferenças; modelos de acontecimentos discretos (e. g. Redes de Petri); modelos de agentes.

Modelos e simulação

Um modelo pode ser usado para avaliar como é que o sistema modelado reagiria em dadas circunstâncias.

Num modelo matemático relativamente simples, isso pode ser feito resolvendo analiticamente as equações que o constituem.

Em modelos mais complexos a solução analítica pode ser substituída pela solução numérica. É nisto que consiste a simulação.

Como construir um modelo?

- **Modelação Física**: Aplicação das relações fundamentais da Física, da Química, da Termodinâmica, etc. (conservação da massa, conservação da energia, conservação do momento, leis de Kirchhoff, lei de Ohm, ...)
  - Não se pode usar quando não há princípios fundamentais, ou quando o sistema é muito complexo
- **Análise de dados**: Ajuste de funções matemáticas (e. g. polinómios) ou de parâmetros de equações que descrevem as funções que queremos representar aos dados medidos no sistema real.
  - Não permite prever fora da gama dos dados

Em muitos casos o melhor é usar uma combinação destas duas abordagens.

Verificação dos modelos

Voltaire (sobre Descartes): *Il fit une philosophie comme on fait un bon roman: tout parut vraisemblable et rien ne fut vrai.*

Não é difícil construir um modelo.

A dificuldade está em que o modelo represente bem a realidade.

Todos os modelos têm um certo domínio de validade, definido pelo intervalo de valores das variáveis em que é válido (exemplo: a "lei" de Ohm).

Para validar um modelo, as previsões que ele faz devem ser confrontadas com as observações experimentais.

Tipos de modelos

- Determinísticos / Estocásticos
- Dinâmicos / Estáticos
- Tempo contínuo / Tempo Discreto
- Distribuídos (PDE-dimensão infinita) / Concentrados (ODE-dimensão finita)
- Guiados pelo tempo / Guiados por acontecimentos

Vamos começar por estudar um modelo em tempo discreto e depois estudaremos alguns em tempo contínuo.

A seguir estudaremos modelos guiados por acontecimentos.

Estes exemplos vão introduzir vários conceitos importantes.

Exemplo 1: Um modelo da economia

Modelo em tempo discreto

Modelo simples da Economia Nacional que considera as variáveis:

- $y(t)$: o produto interno bruto (PIB) no ano t
- $c(t)$: o consumo total no ano t
- $I(t)$: o total de investimentos no ano t
- $g(t-1)$: os gastos do governo no ano t (decididos 1 ano antes)

O PIB (anual) é o total de bens e serviços gerados num país num ano.

Tem-se (para um país com as exportações iguais às importações):

$$y(t) = c(t) + I(t) + g(t-1)$$

O tempo t é um número inteiro (anos).

Hipóteses para a modelação

Para modelar a Economia, diferentes correntes de pensamento económico fazem hipóteses diferentes. Neste exemplo apresenta-se um modelo baseado nas seguintes hipóteses:

1. O consumo do ano corrente é proporcional ao PIB do ano anterior:

$$c(t) = a\, y(t-1) \qquad a > 0$$

2. O investimento é proporcional ao aumento do consumo:

$$I(t) = b[c(t) - c(t-1)] \quad b > 0$$

As equações

$$y(t) = c(t) + I(t) + g(t-1)$$

$$c(t) = a\, y(t-1)$$

$$I(t) = b(c(t) - c(t-1))$$

constituem um modelo (muito simples) da Economia Nacional.

Queremos escrevê-las numa forma diferente:

$$variável(t+1) = f(variáveis(t))$$

$$y(t+1) = f_1(y(t), c(t))$$

$$c(t+1) = f_2(y(t), c(t))$$

Modelo de estado

$$c(t+1) = ay(t)$$

e ainda:

$$y(t+1) = c(t+1) + I(t+1) + g(t)$$

$$y(t+1) = c(t+1) + b[c(t+1) - c(t)] + g(t)$$

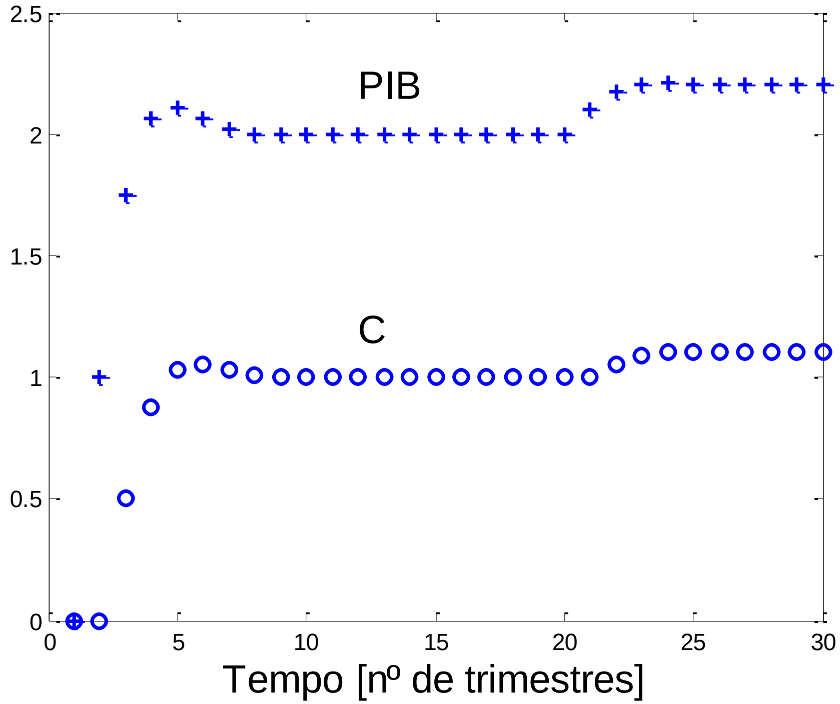
$$y(t+1) = (1+b)ay(t) - bc(t) + g(t)$$

Isto resulta no sistema de 2 equações de diferenças de 1ª ordem

$$\begin{bmatrix} c(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & (1+b)a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} g(t)$$

Podemos acrescentar uma equação para o investimento

$$I(t+1) = bay(t) - bc(t)$$

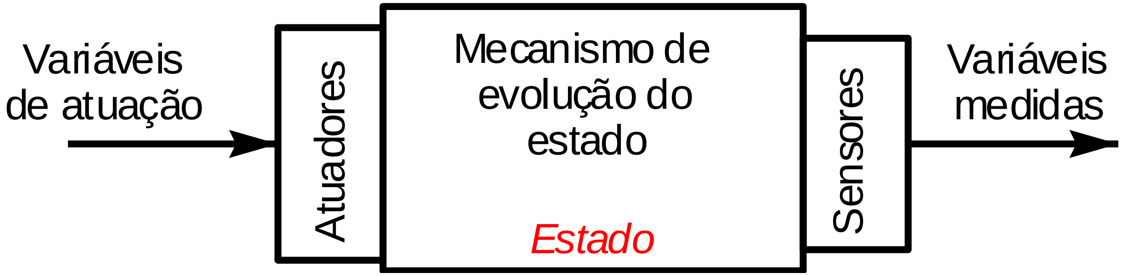



```
C(1)=0;    % Initial conditions
PIB(1)=0;

% Simulation

for t=1:(Tfinal-1)
    g(t)=1;
    if t>=20
        g(t)=1.1;
    end;
    C(t+1)=a*PIB(t);
    PIB(t+1)=b*C(t)+(1+b)*a*PIB(t)+g(t);
end;

% Show results
```

$a = b = 0.5$

Saltos de 1 e 0.1 em $g(t)$

O conceito de estado



Estado é um vetor de variáveis tais que se as soubermos num dado instante, podemos saber como o sistema evolui daí para a frente, se soubermos qual a atuação futura aplicada ao sistema.

Saber o estado dispensa saber a história passada do sistema, que o levou à situação em que se encontra.

O conceito de estado é central a toda a modelação e simulação.

Exemplo: o jogo do Monopólio

- O estado é (normalmente, mas nem sempre) a casa em que marca se encontra.
- O mecanismo de transição de estado está associado ao lançamento dos dados. Por exemplo, se os dados forem lançados e o resultado for 2, e se a marca estiver na casa número 5 (o estado presente), a marca avança para a casa 7 (o novo estado).
- Questão: a prisão é um estado?

A “Prisão” não é um estado.

Se soubermos que a marca está na prisão, isso não é suficiente para saber o estado futuro da marca quando se lançam os dados.

É também necessário saber se se está na prisão de passagem, ou se se está preso.

Como o estado traduz toda a informação necessária para se saber como se vai avançar, ele tem de ter mais informação do que apenas saber-se que a marca está na “prisão”.

Ponto de equilíbrio

No exemplo do modelo da Economia:

Sendo g constante, que valores de c e y (constantes) fazem o sistema ficar em equilíbrio?

Ajuda – modelo de estado da economia:

$$c(t+1) = ay(t)$$

$$y(t+1) = (1+b)ay(t) - bc(t) + g(t)$$

$$c(t+1) = ay(t)$$

$$y(t+1) = (1+b)ay(t) - bc(t) + g(t)$$

Para valores constantes:

$$c = ay$$

$$y = (1+b)ay - bc + g$$

$$y = (1+b)ay - bay + g$$

$$y = \frac{1}{1-a}g, \qquad c = \frac{a}{1-a}g$$

O conceito de equilíbrio é outro conceito muito importante.

Atenção: não confundir equilíbrio com estabilidade

O modelo pode ser usado para estudar como é que o Governo pode influenciar a economia. Nesse caso, a maximização do PIB pode ser vista como um objetivo.

O governo pode fazer isto de diversas maneiras:

- Influenciar $c(t)$ através dos impostos (um aumento do imposto de transação causa um decréscimo no consumo);
- Influenciar $I(t)$ através da taxa de juro (uma taxa de juro mais baixa torna mais fácil pedir empréstimos o que favorece o investimento)

Neste exemplo consideram-se apenas os gastos do governo $g(t)$ como meio de este influenciar a economia (variável de controlo)

Alternativa: equação de diferenças de 2ª ordem

$$y(t) = c(t) + I(t) + g(t)$$

$$c(t) = a\, y(t-1)$$

$$I(t) = b(c(t) - c(t-1))$$

Uma outra forma do modelo (relaciona $g(t)$ com $y(t)$):

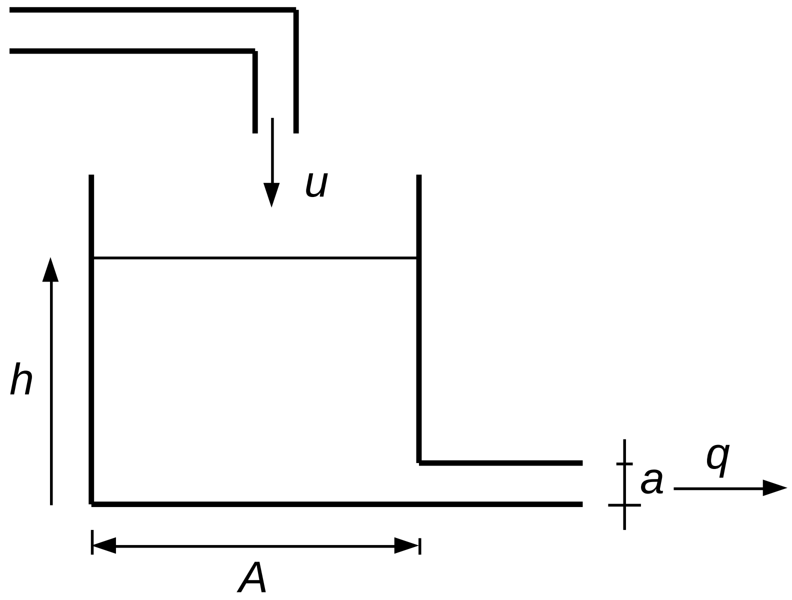
$$y(t) = ay(t-1) + b[ay(t-1) - ay(t-2)] + g(t-1)$$

Reordenando, obtém-se a **equação de diferenças** que relaciona $g(t)$ (“entrada”) com $y(t)$ (“saída”):

$$y(t) - (a+ab)y(t-1) + aby(t-2) = g(t-1)$$

Neste caso precisamos de impor os 2 primeiros valores de y.

Exemplo 2: Tanque – sistema em tempo contínuo



Como escrever as equações de um modelo do tanque que relacione o caudal de entrada com o nível?

Conservação da massa

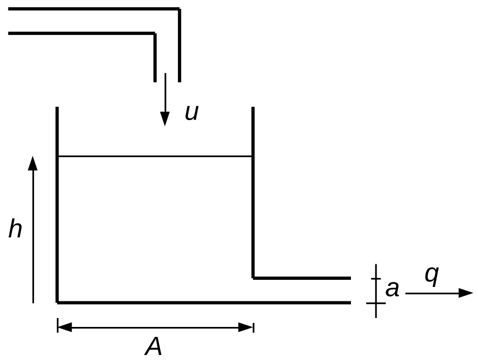
+

Conservação da energia

Conservação da massa

Considere-se um intervalo de tempo pequeno, Δt, em torno do instante t

Neste intervalo o nível varia de uma quantidade Δh



A variação do volume é dada:

Geometricamente por $A\Delta h$

Pela conservação da massa por $(u(t) - q(t))\Delta t$

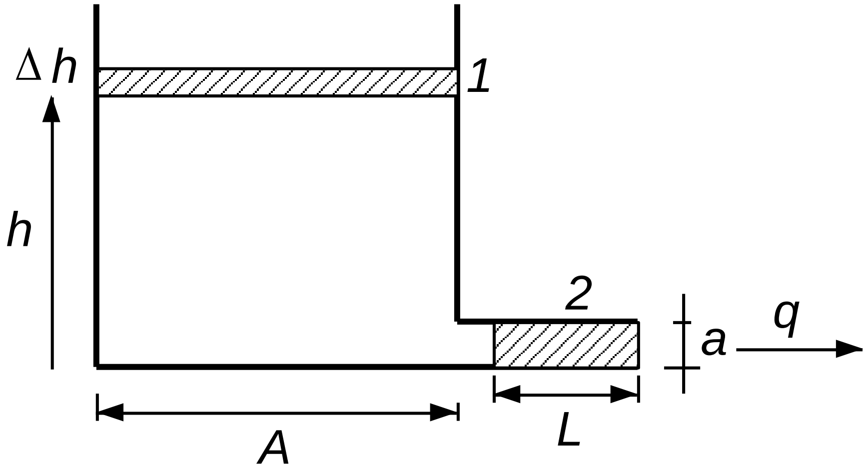
Igualando estes termos e dividindo por Δt, obtém-se

$A\frac{\Delta h}{\Delta t} = u(t) - q(t)$ tomando o limite $\Delta t \to 0$, obtém-se a eq. diferencial:

$$A\frac{dh}{dt} = u(t) - q(t) \quad \text{ou} \quad h(t) = h(0) + \frac{1}{A}\int_0^t \big(u(\tau) - q(\tau)\big)d\tau$$

Conservação da energia

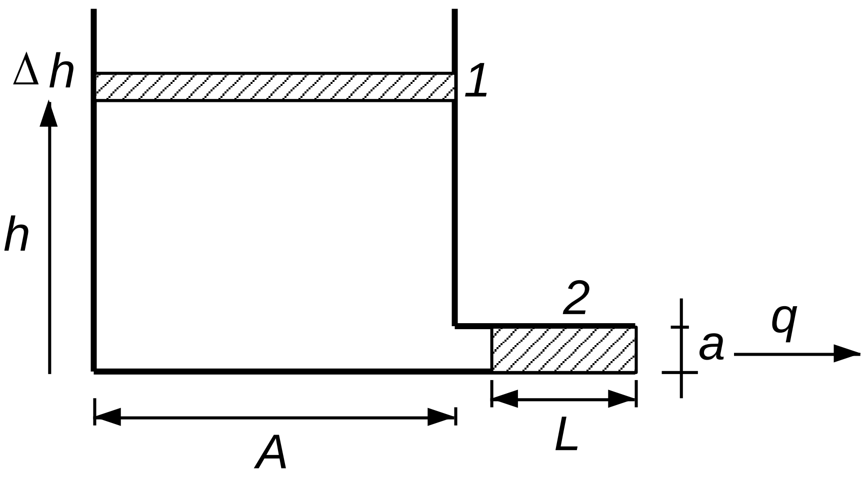
A conservação da energia permite relacionar o caudal de saída com o nível.



Durante o intervalo de tempo Δt a energia potencial do elemento de água 1 é transformada em energia cinética do elemento de água 2, que sai pelo orifício de saída.

$$E_{pot} = \Delta mgh$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\Delta mv^2 \qquad v = \frac{L}{\Delta t} \text{ e } L = \frac{q\Delta t}{a} \Rightarrow v = \frac{q}{a}$$



$$E_{cin} = \frac{1}{2}\Delta m\left(\frac{q}{a}\right)^2$$

$$E_{pot} = E_{cin}$$

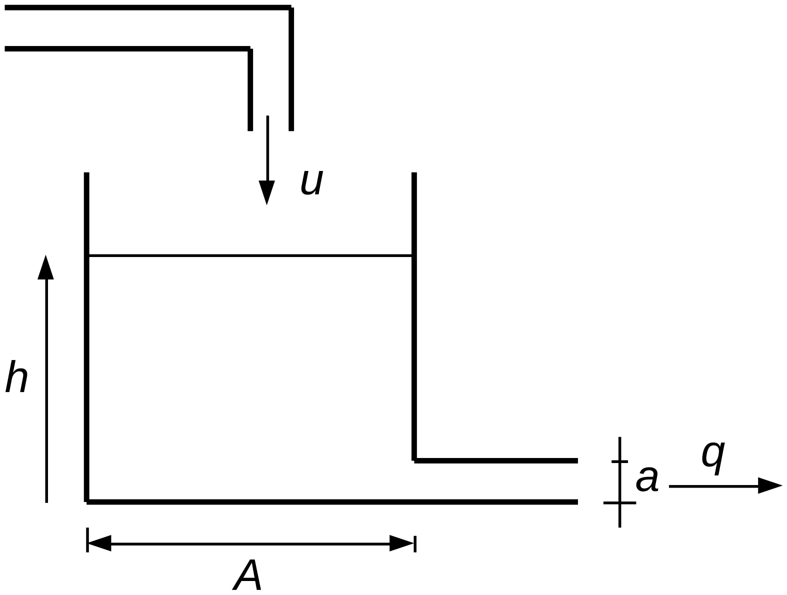
$$\Delta mgh = \frac{1}{2}\Delta m\left(\frac{q}{a}\right)^2$$

Conclui-se o Princípio de Bernoulli: $q = a\sqrt{2gh}$

Questão histórica: Qual Bernouilli?

A resposta é Daniel Bernouilli. Este princípio foi posto na forma que o conecemos por L. Euler em 1752.

Pondo tudo junto:



Conservação da massa:

$$A\frac{dh}{dt} = u(t) - q(t)$$

Conservação da energia:

$$q = a\sqrt{2gh}$$

Modelo matemático do tanque:

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \qquad h(0) \text{ dado}$$

O que nos "diz" o modelo sobre a evolução do nível?

- Se o caudal de entrada for constante, atinge-se um valor de equilíbrio? Como calculá-lo?
- Como evolui o nível $h(t)$ em função do tempo a partir de uma dada condição inicial?

Nível de equilíbrio no tanque

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t)$$

No equilíbrio, o nível $h(t)$ é constante e a derivada é nula.

$$0 = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h} + \frac{1}{A}u$$

$$\bar{h} = \frac{\bar{u}^2}{2ga^2}$$

Evolução qualitativa do nível

Podemos ter uma ideia qualitativa da evolução no tempo de $h(t)$ se observarmos os sinais da derivada dados pela equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t)$$

Para fixar ideias, consideremos $A = 1$, $a\sqrt{2g} = 1$ e um caudal constante $u(t) = 1\ \ t \geq 0$. O modelo escreve-se

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\sqrt{h(t)} + 1$$

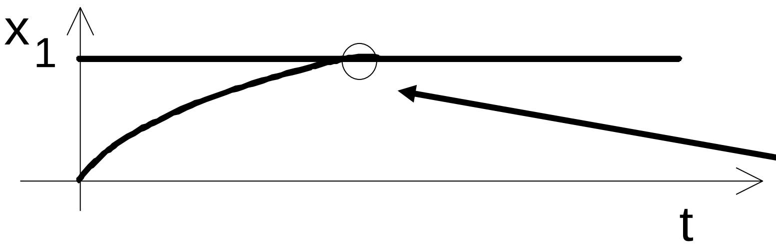
$$\frac{d}{dt}h(t) = -\sqrt{h(t)} + 1$$

Para valores de $h(t)$ entre 0 e 1 (nível de equilíbrio), a função

$$-\sqrt{h(t)} + 1$$

é positiva. Como esta função dá o valor da derivada, o nível $h(t)$ é crescente.

Repare-se que o nível não pode atingir o equilíbrio num instante finito pois isso violaria o teorema de existência e unicidade de uma equação diferencial.



Se isto fosse possível, por este ponto passariam duas soluções.

A concavidade da curva que representa a solução depende da 2ª derivada.

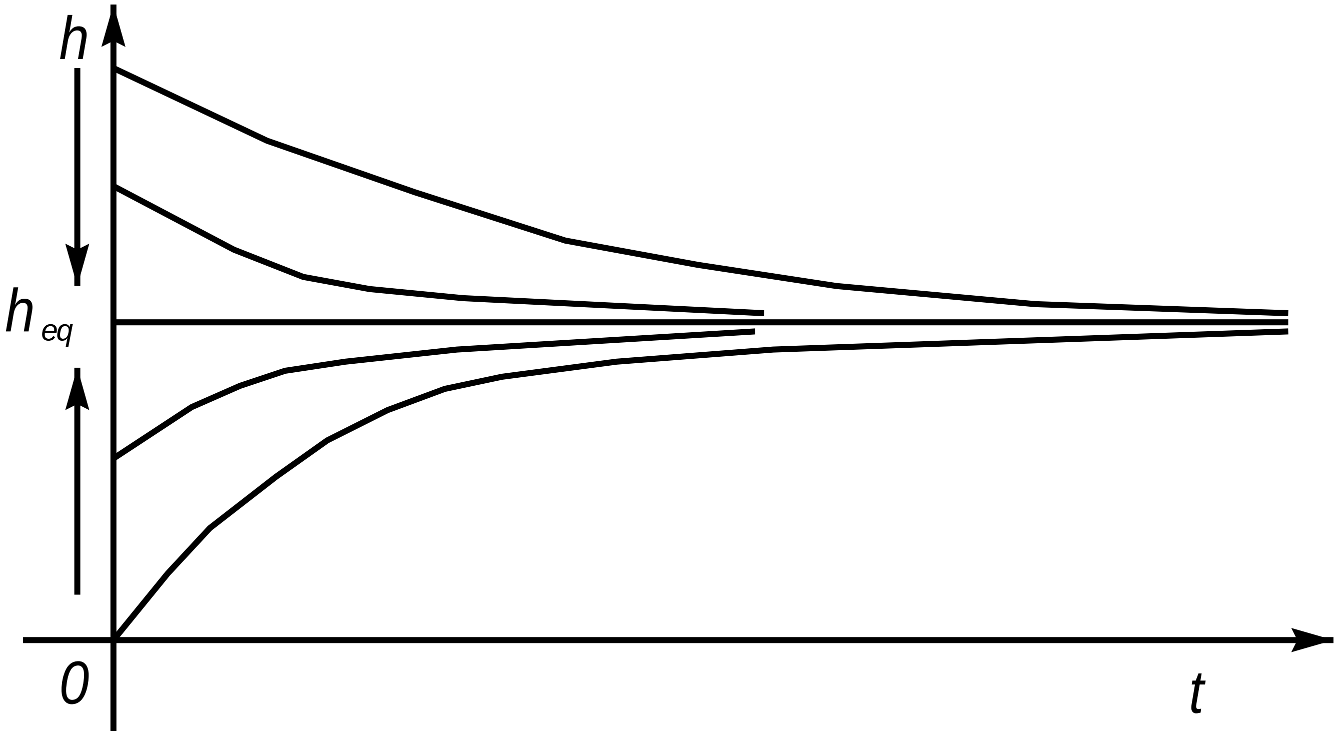
$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\sqrt{h}+1\right) = -\frac{d}{dh}\left(\sqrt{h}\right).\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h}}\left(-\sqrt{h}+1\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\sqrt{h}-1\right)$$

Para h entre 0 e 1 a 2ª derivada é negativa e a concavidade está virada para baixo.

Para h maior que 1 a 2ª derivada é positiva e a concavidade está virada para cima.

Com base nesta discussão, podemos assim concluir que a forma qualitativa das soluções para várias condições iniciais é

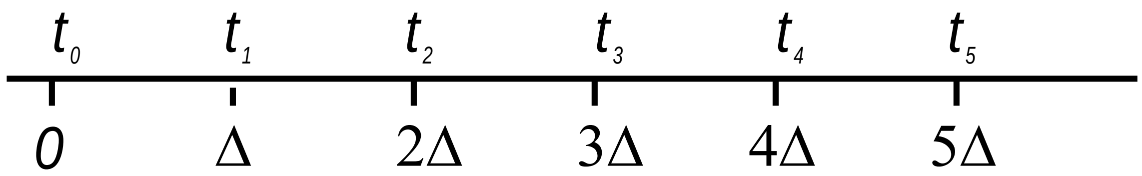


Integração numérica com o método de Euler

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\sqrt{h(t)} + 1$$

Definir uma grelha de pontos para o tempo

$$t_k = k\Delta \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$



Aproximar a derivada por diferenças finitas

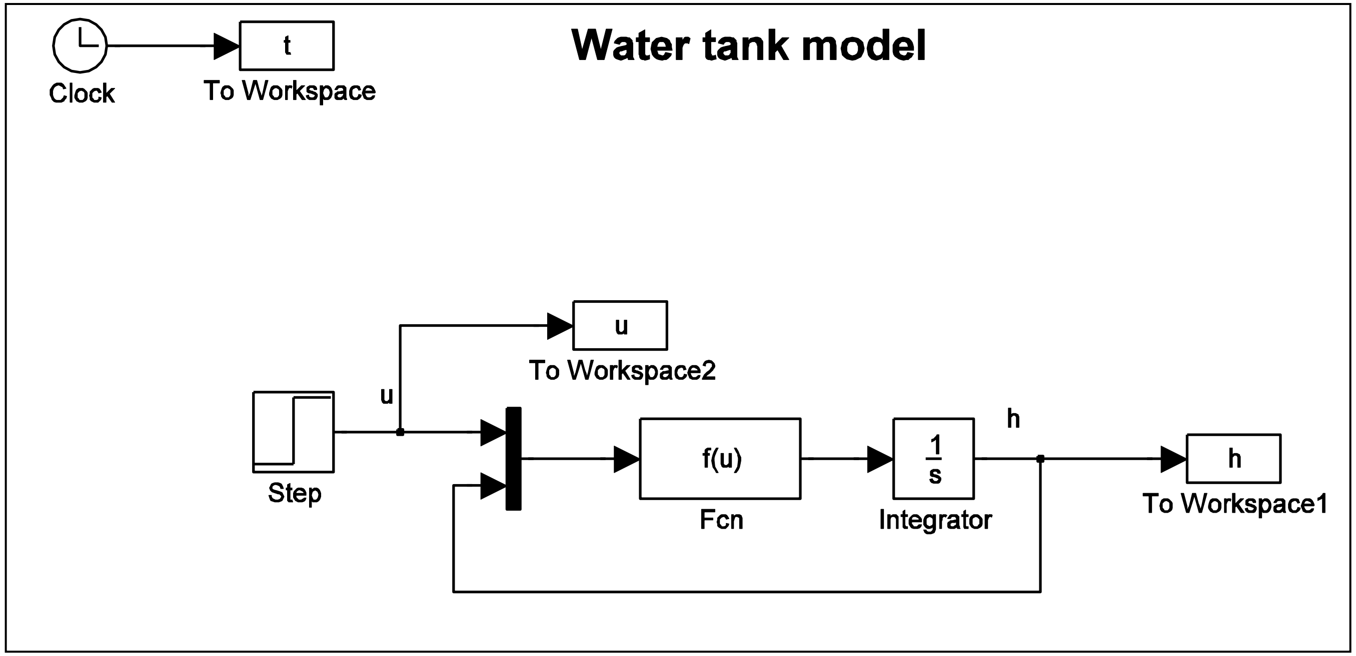
$$\frac{d}{dt}h(t) \approx \frac{h(t_k)-h(t_{k-1})}{\Delta} \quad \mapsto \quad h(t_k) = h(t_{k-1}) + \Delta\left(-\sqrt{h(t_{k-1})} + 1\right)$$

Pseudo-código para simulação do tanque

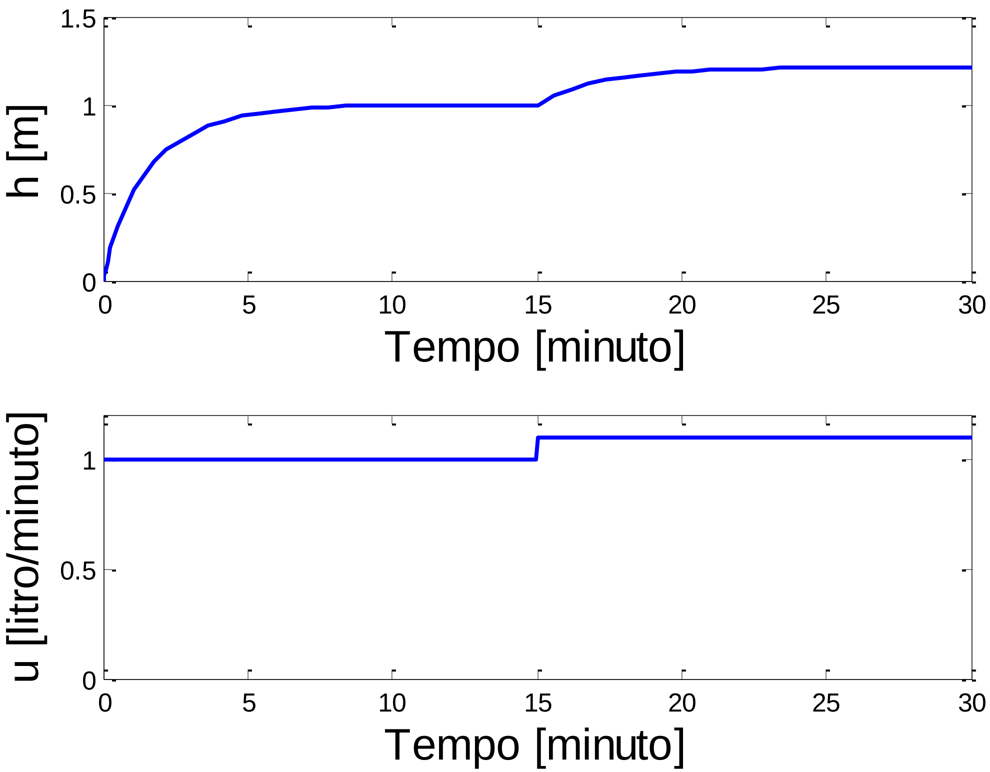
1. Definir os parâmetros que entram na simulação (Δ).
2. Definir a condição inicial $h(0) = valor\ dado$
3. Executar o ciclo do tempo, para $k = 1$ até k_{final}
   a. $h(t_k) = h(t_{k-1}) + \Delta\left(-\sqrt{h(t_{k-1})} + 1\right)$
   b. $t_{k+1} = t_k + \Delta$
4. Mostrar os resultados

Diagrama de blocos para simulação no SIMULINK

$$\frac{d}{dt}h(t) = -\sqrt{h(t)} + 1$$

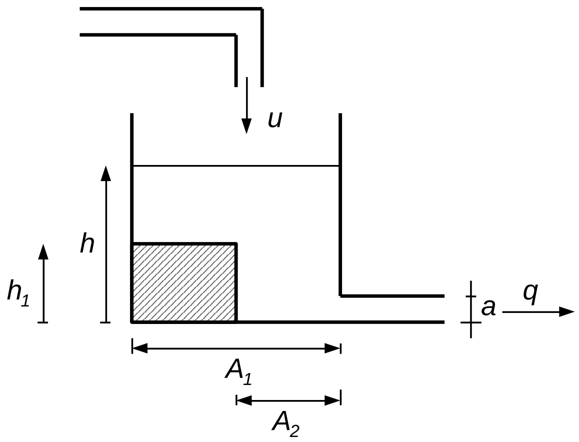


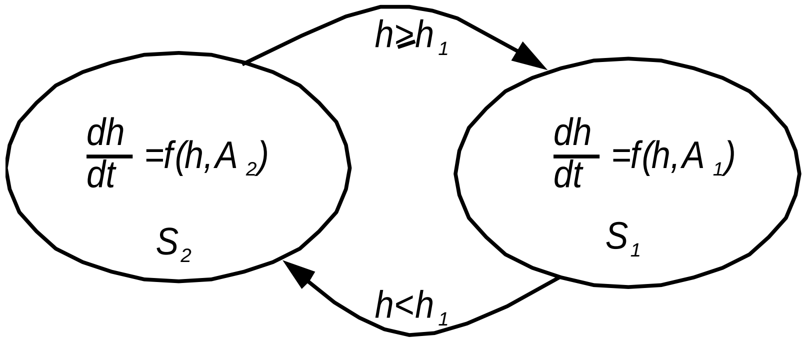
Simulação do tanque



A simulação parte de uma condição inicial nula (tanque inicialmente vazio). Entre $t = 0min$ e $t = 15min$ o caudal de entrada é mantido em $1litro/min$.O nível sobe até atingir um valor de equilíbrio. Em seguida, o caudal aumenta para $1{,}1litro/min$, o que causa uma nova variação do nível, que estabiliza novamente num outro valor do equilíbrio.

Saltos na dinâmica: sistemas híbridos





Há dois tipos de estados:

- 2 estados discretos (estamos abaixo ou acima de h_1) que determinam a dinâmica (neste caso apenas um parâmetro da ODE)
- 1 estado contínuo (nível); evolui de acordo com uma ODE que depende do estado discreto.

Sistemas de acontecimentos discretos

Descritos por uma máquina de estados

- Um conjunto de estados discretos; o estado do sistema transita entre eles de acordo com uma regra de transição (acionada por um acontecimento).

Sistemas híbridos:

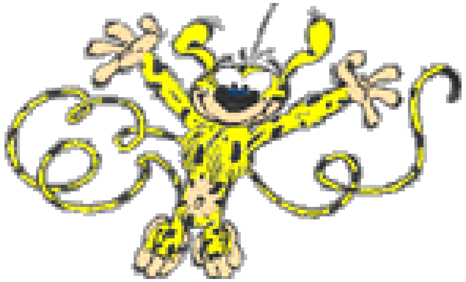
- Em cada estado o sistema evolui de acordo com uma dinâmica diferente (definida por uma equação diferencial ou por uma condição inicial).

Exemplos de sistemas híbridos

- Caixa de velocidades num veículo automóvel
- Termoestato para regulação da temperatura num frigorífico
- Impacto dos pés de um robô bípede
- Sistemas com falhas
- Aeronaves de estrutura variável
- Servidores de uma rede de computadores
- Uma bola que saltita
- Controlador adaptativo baseado em modelos múltiplos. O controlador aplicado ao sistema depende de um supervisor.

Exemplo 3 – Modelos de ecossistemas

Num ecossistema há vários seres vivos que interagem. Neste exemplo considera-se um ecossistema simplificado com apenas duas espécies.



Marsupilamis Sympaticus, L.

Monstrus Ferocissimus, L.

O objetivo é construir um modelo matemático que permita calcular a evolução do número de indivíduos de cada espécie ao longo do tempo.

Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ o número de indivíduos de cada espécie no instante t.

λ_i Taxa de natalidade da espécie i = Número de novas crias que nascem
por unidade da população e
por unidade de tempo

Por unidade de tempo nascem $\lambda_i N_i$ novas crias da espécie i

μ_i Taxa de mortalidade da espécie i =Número de mortos
por unidade da população e
por unidade de tempo

Por unidade de tempo morrem $\mu_i N_i$ indivíduos da espécie i

Balanço num intervalo de tempo curto

Considerem-se dois instantes de tempo t e $t+\Delta$ separados por um intervalo de tempo muito pequeno Δ.

$$\begin{bmatrix} Variação \\ de\ N_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} n^o\ nascim.\ de\ N_1 \\ por\ unidade\ de \\ população\ e \\ unidade\ de\ tempo \end{bmatrix}}_{\lambda_1} N_1 \Delta - \underbrace{\begin{bmatrix} n^o\ mortos\ de\ N_1 \\ por\ unidade\ de \\ população\ e \\ unidade\ de\ tempo \end{bmatrix}}_{\mu_1} N_1 \Delta$$

$$\frac{d}{dt} N_1(t) = (\lambda_1 - \mu_1(N_1, N_2)) N_1(t)$$

Modelo da interação entre as duas populações

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \mu_1(N_1, N_2))N_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \mu_2(N_1, N_2))N_2(t)$$

A taxa de mortalidade depende da disponibilidade de comida, bem como da maneira como as espécies interagem entre si.

Consideram-se dois casos:

- Competição
- Predador e presa

Caso 1: As espécies competem pelo mesmo alimento

$$\mu_i(N_1, N_2) = \gamma_i + \delta_i(N_1 + N_2) \qquad \delta_i > 0, \quad i = 1,\ 2$$

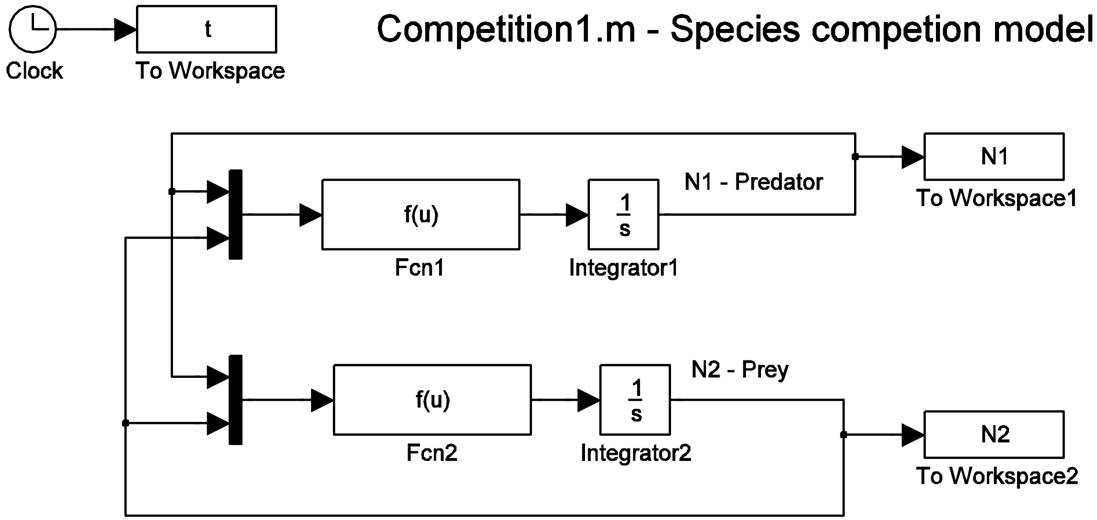
Termo constante da taxa de mortalidade

Quanto maior for o número de indivíduos, maior é a competição pelo alimento disponível e maior a taxa de mortalidade

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) - \delta_1\left[N_1(t) + N_2(t)\right]N_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \delta_2\left[N_1(t) + N_2(t)\right]N_2(t)$$

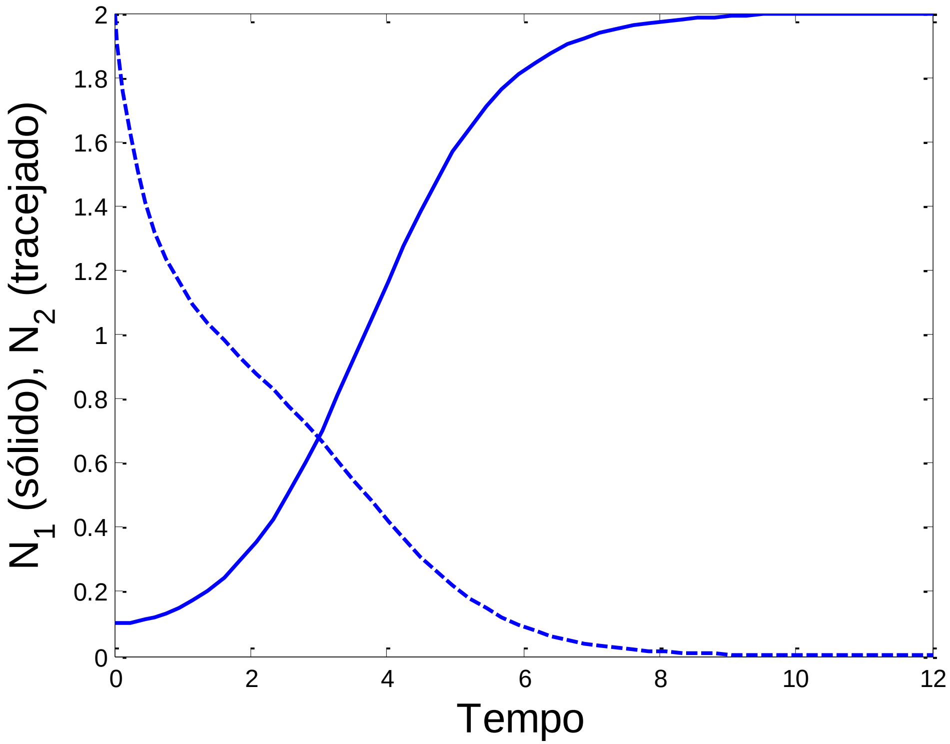
Diagrama de blocos para a simulação



$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) - \delta_1\left[N_1(t) + N_2(t)\right]N_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \delta_2\left[N_1(t) + N_2(t)\right]N_2(t)$$

Competição entre duas espécies



Pode mostrar-se que se

$$\frac{\lambda_1 - \gamma_1}{\delta_1} > \frac{\lambda_2 - \gamma_2}{\delta_2}$$

a espécie 2 extingue-se e a espécie 1 aproxima-se do limite

$$\frac{\lambda_1 - \gamma_1}{\delta_1}$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = \delta_2 = 1$$

Caso 2: Predador e Presa

A primeira espécie (predador) caça a segunda (presa).

O alimento disponível para a espécie 1 é proporcional a $N_2(t)$ e a sua taxa de mortalidade diminui quando $N_2(t)$ aumenta:

$$\mu_1(N_1, N_2) = \gamma_1 - \alpha_1 N_2$$

Conversamente, para a espécie 2

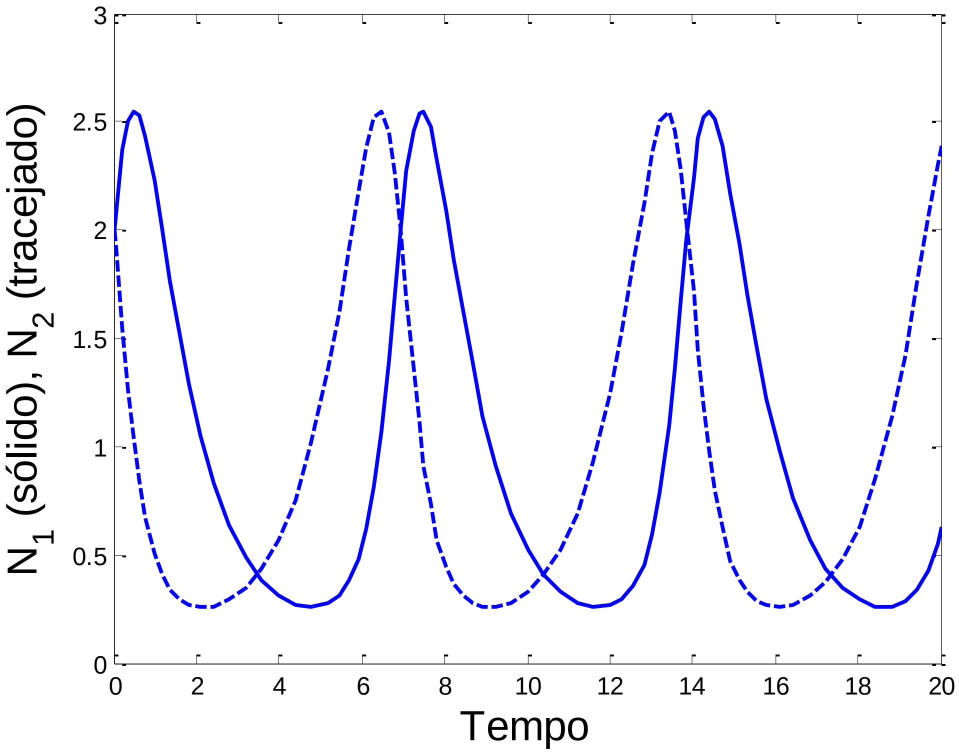
$$\mu_2(N_1, N_2) = \gamma_2 + \alpha_2 N_1$$

Equações do modelo predador/presa

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = (\lambda_1 - \gamma_1)N_1(t) + \alpha_1 N_1(t)N_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = (\lambda_2 - \gamma_2)N_2(t) - \alpha_2 N_1(t)N_2(t)$$

Oscilações no modelo predador/presa

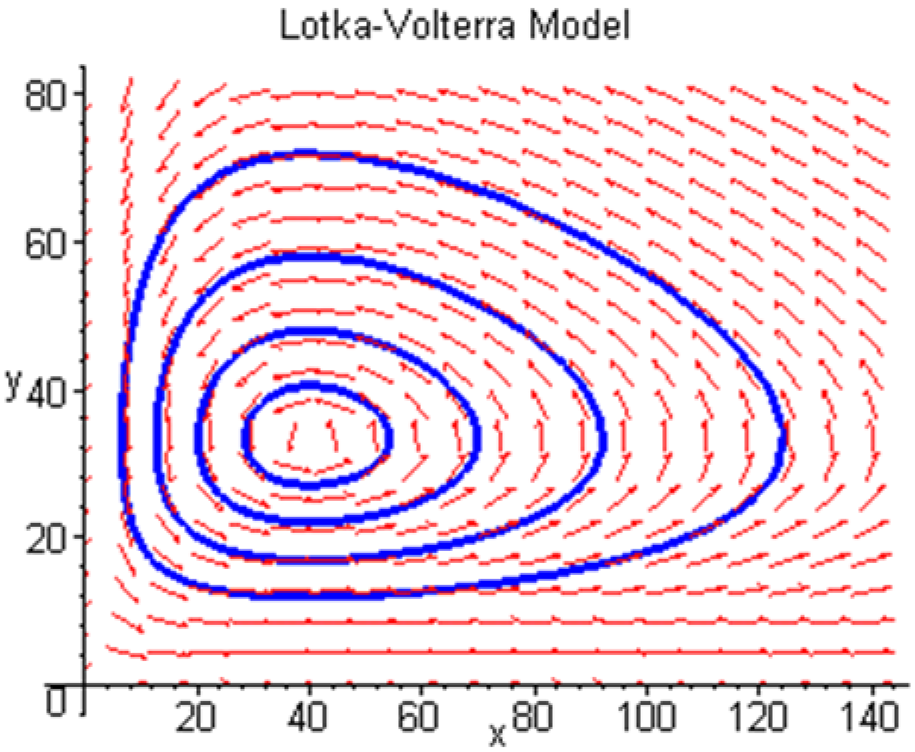


$$\lambda_1 = 1,\ \gamma_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \gamma_2$$

Face à abundância de presas (2), o número de predadores (1) aumenta, forçando o número de presas a diminuir.

A redução do número de presas aumenta a taxa de mortalidade dos predadores devido à redução do alimento disponível, o que reduz o seu número. Por sua vez, isto permite que o número de presas volte a aumentar. O ciclo repete-se.

Estas oscilações correspondem a trajetórias fechadas no espaço de estados



Neste caso não há uma oscilação com amplitude bem definida, mas podem existir oscilações com várias amplitudes, dependendo das condições iniciais.

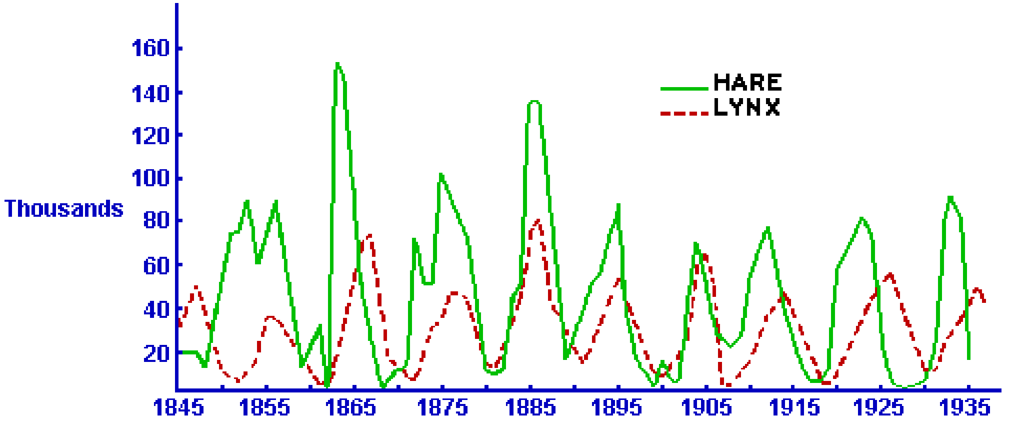
Nesta figura: $x \rightarrow N_2, \;\; y \rightarrow N_1$

As oscilações com amplitudes bem definidas correspondem a trajetórias fechadas no espaço de estados, denominadas ciclos limites (não é o caso aqui).

Um exemplo famoso: O lince e a lebre do ártico

Registos do número de peles comercializadas pela Companhia da Baía do Hudson (Canadá) durante cerca de 100 anos:

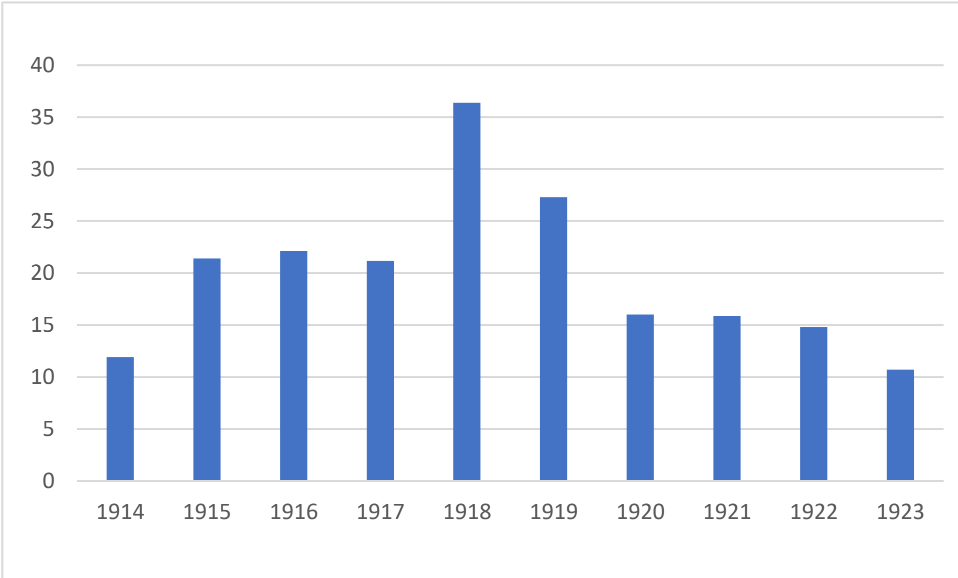
Fonte: J. D. Irving



Fonte: cdc.caltech.edu

O aumento dos tubarões no Mediterrâneo durante a I Guerra Mundial

Em meados dos anos 1920, o biólogo italiano Umberto D'Ancona observou que, no período da I guerra mundial, a percentagem dos peixes seláceos (peixes predadores, com o esqueleto totalmente formado por cartilagens, ex. raia, tubarão) pescados aumentou em relação aos peixes comestíveis.



Dados para o porto de Fiume:

Hipótese: Este aumento foi devido à redução do esforço de pesca.

O matemático Vito Volterra desenvolveu o modelo predador/presa:

x presa y predador

$$\dot{x} = ax - bxy$$

$$\dot{y} = -cy + dxy$$

Os pontos de equilíbrio obtêm-se igualando as derivadas a zero:

$$ax - bxy = 0$$

$$-cy + dxy = 0$$

Há 2 pontos de equilíbrio:

$$x = 0, y = 0 \qquad \text{e} \qquad x = \frac{c}{d}, y = \frac{a}{b}$$

Valor médio das espécies

A solução é periódica com um certo período T.

O valor médio das espécies (presas e predadores) obtém-se integrando num período e dividindo pelo período:

$$\bar{x} = \int_0^T x(t)dt, \qquad \bar{y} = \int_0^T y(t)dt$$

$$\dot{x} = ax - bxy \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{x} = a - by \quad \rightarrow \quad \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}dt = \frac{1}{T}\int_0^T [a - by(t)]dt$$

O lado direito desta igualdade: $\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}dt = \ln x(T) - \ln x(0) = 0$ (x é periódico).

$$\frac{1}{T}\int_0^T [a - by(t)]dt = 0 \qquad \rightarrow \qquad a = b\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt \qquad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \bar{y} = \frac{a}{b}$$

Analogamente, pode mostrar-se que $\bar{x} = \frac{c}{d}$.

O efeito da pesca

x presa y predador

$$\dot{x} = ax - bxy$$

$$\dot{y} = -cy + dxy$$

Como modelar o esforço de pesca?

Modelo predador/presa com pesca

$$\dot{x} = ax - bxy - \varepsilon x = (a - \varepsilon)x - bxy$$

$$\dot{y} = -cy + dxy - \varepsilon y = -(c + \varepsilon)y + dxy$$

O equilíbrio não nulo é agora

$$\bar{x} = \frac{c + \varepsilon}{d}, \quad \bar{y} = \frac{a - \varepsilon}{b}$$

Aumentando o esforço de pesca:

- O número de peixes comestíveis (presas) aumenta
- O número de seláceos (predadores, y) diminui

Uma consequência inesperada: uso de inseticidas

Os inseticidas matam pragas de insetos mas também matam os insetos que são seus predadores.

Aumentar o uso de inseticidas vai aumentar o número de presas (insetos nocivos, exatamente o contrário do que se pretende!

M. Braun, *Differential Equations and their Applications*, 2nd ed. Springer-Verlag, 1978, pp. 413-420.

R. C. Robinson, *Introduction to Dynamical Systems*, Pearson – Prentice Hall, 2004. Pp. 147-149.

Vito Volterra (1860-1940) foi um matemático italiano que deu importantes contributos à teoria das equações às derivadas parciais e à teoria das equações integrais (as séries de Volterra são um instrumento importante para o estudo dos sistemas não lineares). Lutou como aviador na 1ª Grande Guerra e agiu no plano das ideias políticas enquanto parlamentar a partir de 1922. Em 1931 foi forçado a abandonar a Universidade de Roma por se recusar a subscrever um pacto de lealdade ao Governo Fascista de então. No período entre as duas guerras mundiais estudou a equação logística e desenvolveu modelos para as relações predador-presa, sendo considerado, em conjunto com **Alfred Lotka,** o fundador da **Biologia Matemática**. O interesse de Volterra por este tipo de problemas foi atraído pelas observações do biólogo **Umberto D'Ancona** (seu genro), segundo as quais, durante o período da I Guerra Mundial, a percentagem de peixes predadores aumentara nas capturas no mar Adriático. Volterra desenvolveu um modelo matemático que explicou qualitativamente o fenómeno. Após a morte do seu sogro, D'Ancona publicou o livro *A luta pela existência*, inspirado nas ideias de Volterra e em homenagem a este.

Pontas soltas

- Como estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio?
    - Linearizar e estudar a estabilidade do sistema linearizado
    - Método direto de Lyapunov
- Como provar a existência de soluções periódicas?
    - Método direto de Lyapunov (no modelo predados-presa)

O método direto de Lyapunov não é estudado neste curso.

Exemplo 4 – Servidor Apache

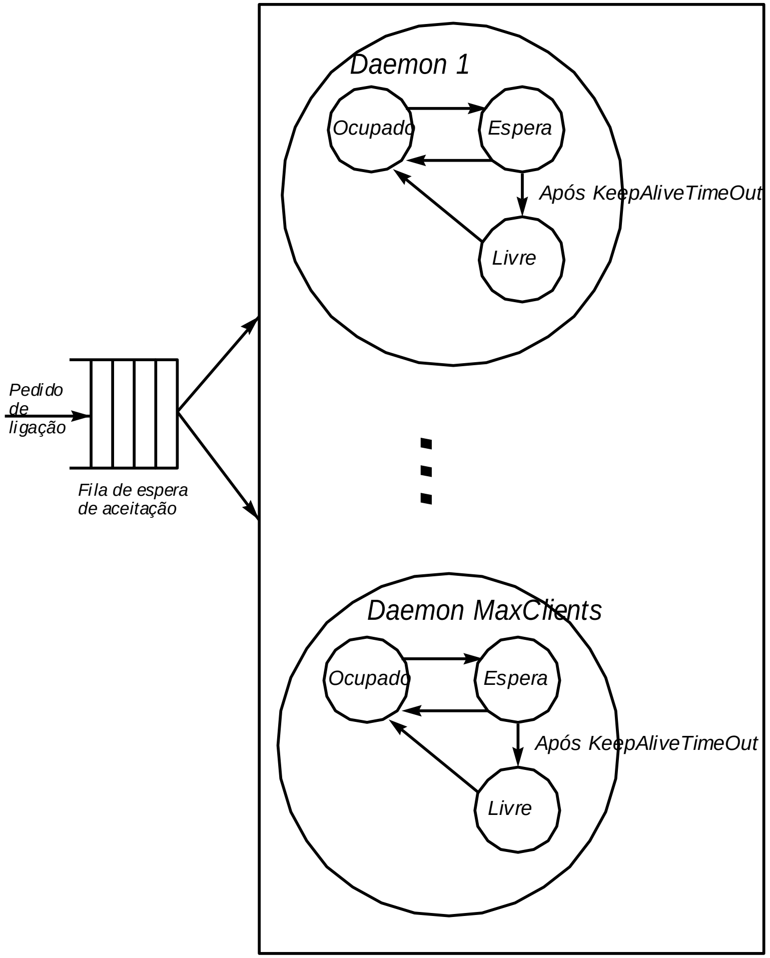
O servidor Apache é um programa de computador responsável por aceitar pedidos de HTTP (*Hypertext Transfer Protocol*) de clientes (denominados *web browsers*) servindo-lhes respostas HTTP (por exemplo páginas web, tal como documentos html ou imagens).

O servidor está estruturado na forma de processos (subprogramas que correm independentemente, lançados pelo programa servidor) denominados "*daemons*". O número máximo de *daemons* que podem existir simultaneamente é configurável entre 2 e 60000.

Os pedidos dos clientes entram no servidor através de uma fila de espera, onde aguardam que haja um *daemon* disponível. Os *daemons* podem estar em um de três estados:

Livre Ocupado Espera

Quando um *daemon* está "livre" e aceita um pedido passa ao estado "ocupado". Após processar o pedido do cliente, o daemon não passa de novo ao estado "livre", mas sim a um estado de "espera" e a ligação permanece aberta por forma a que subsequentes pedidos do mesmo cliente sejam processados mais eficientemente. Enquanto está no estado de "espera", o *daemon* não pode processar pedidos de outros clientes.



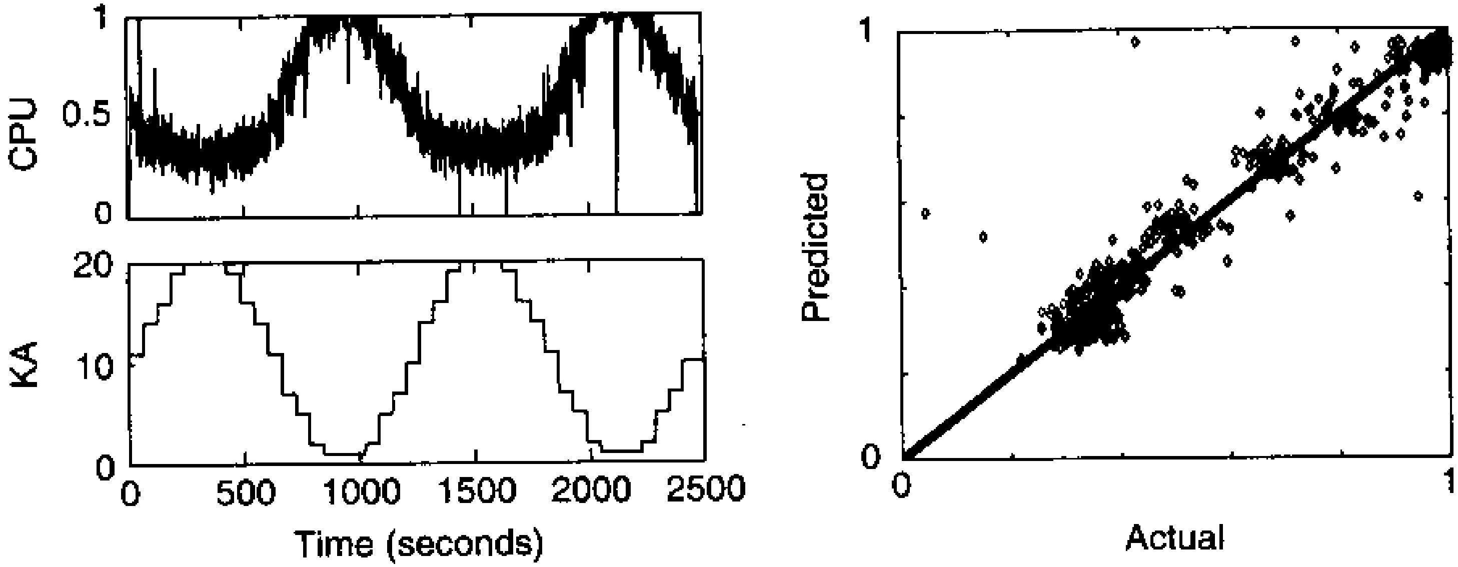
Daemon 1
Ocupado
Espera
Após KeepAliveTimeOut
Livre
Pedido de ligação
Fila de espera de aceitação
Daemon MaxClients
Ocupado
Espera
Após KeepAliveTimeOut
Livre

Um dos parâmetros do servidor Apache é o *keepAliveTimeOut* (KA) que determina o tempo máximo que um daemon pode ficar no estado de espera até que a ligação com o cliente seja interrompida e ele passe de novo ao estado "livre".

O parâmetro KA influencia a carga de CPU usada.

- KA muito grande: a CPU é subutilizada, dado que há processos que requerem CPU e que não se conseguem ligar ao servidor;
- KA muito pequeno: a ligação termina prematuramente o que faz desperdiçar CPU para repôr a ligação ao mesmo cliente.

A relação entre o valor de KA e a carga de CPU usada pode ser estabelecida através de observações experimentais, em que se varia KA e se regista a carga de CPU:



(a) Experimental data (b) Model evaluation

A partir destes dados, a relação entre KA e a carga de CPU é modelada por

$$y(k+1) = \alpha y(k) + \beta u(k)$$

em que $y(k) = CPU - 0.58$, $u(k) = KA - 11$, k é o tempo discreto e α e β são números que se podem estimar pelo método dos mínimos quadrados a partir de observações experimentais. Neste caso, obtém-se $\alpha = 0.6$ e $\beta = -0.014$.

Este modelo pode ser utilizado para projectar um algoritmo que ajuste KA por forma a quer se obtenha uma carga de CPU optimizada.

Referência: J. L. Hellerstein, Y. Diao, S. Parekh e D. M. Tilbury (2004). *Feedback Control of Computing Systems*. Wiley Interscience. Pp. 16-18 e 57-58.
(disponível livremente no IEEExplore)

Conclusões

- Foram dados exemplos em áreas de aplicação muito diferentes. No entanto os modelos resultantes têm muitas características comuns.
- O modelo consiste numa equação diferencial ou num sistema de equações diferenciais que relacionam as diversas variáveis no sistema. A partir da solução destas equações podem calcular-se outras variáveis.
- No caso dos exemplos em tempo discreto (Economia, Servidor Apache), obtêm-se equações de diferenças, mas a estrutura é a mesma.
- O uso de equações diferenciais ou de diferenças é uma consequência do carácter dinâmico dos sistemas que se consideraram, em que o comportamento atual depende do passado.

- A construção dos modelos envolve vários graus de aproximação. As equações para certos circuitos elétricos são muito exatas. As equações do tanque incluem hipóteses adicionais sobre a não existência de turbulência.
- Para os exemplos biológico e económico, é óbvio que as taxas de variação não são assim. No entanto, espera-se que os modelos estejam qualitativamente corretos e que permitam tirar conclusões sobre o funcionamento dos sistemas.
- O mesmo se passa com o modelo do servidor Apache. Este não é obtido a partir de “leis” fundamentais, mas inferido (identificado) a partir de dados experimentais.

- Para além deste modelos remos considerar outros, guiados por acontecimentos e não pelo tempo
  - Sistemas de acontecimentos discretos
  - Modelação por agentes