3. Análise

Propriedades e caraterísticas da resposta no tempo de sistemas lineares e não lineares

Sistemas lineares

Objectivo: Após completar este módulo o aluno deverá ser capaz de relacionar o tipo de resposta no tempo com a estrutura do sistema linear, definida pela posição dos polos e dos zeros na função de transferência e pelos valores próprios e vetores próprios no modelo de estado.

Bibliogrfaia: Franklin, Powell e Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems, Addison Wesley.* Cap. 2 e 6.

A parte relativa à função de transferência corresponde à consolidação de matéria estudada em Sinais e Sistemas.

Modelos de sistemas lineares em tempo contínuo

a) Modelo de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

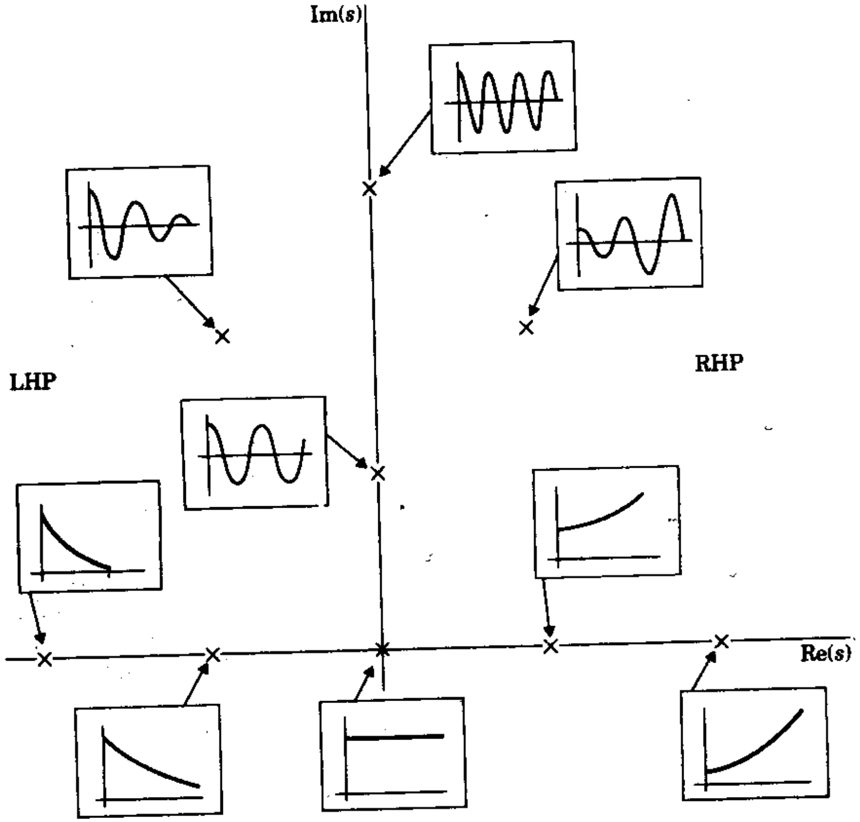
b) Função de transferência

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Polos: Raízes do denominador; determinam o tipo de resposta

Zeros: Raízes do numerador

Relação entre a posição dos polos e a resposta impulsiva (contínuo)



Teoremas do valor inicial e final (Transformada de Laplace)

$$TL\{f(t)\} = F(s)$$

Teorema do valor inicial

Se $f(t)$ não contiver impulsos ou singularidades de ordem superior na origem ($f(0)$), então:

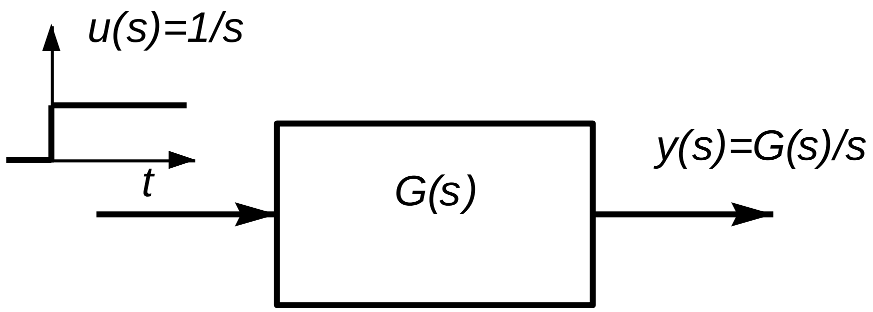
$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to +\infty} sF(s)$$

Teorema do valor final

Se $f(t)$ convergir para um valor constante quando $t \to \infty$, então:

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Resposta ao escalão de sistemas contínuos



Valor final da resposta da resposta ao escalão unitário:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{s} = G(0)$$

O ganho estático de um sistema linear é dado por $G(0)$.

Isto tem uma interpretação simples em termos da resposta em frequência como o ganho à frequência $\omega = 0$.

Valor inicial da resposta ao escalão

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to +\infty} sY(s) = \lim_{s \to +\infty} s\frac{1}{s}G(s) = \lim_{s \to +\infty} G(s)$$

Nº polos > nº zeros $\Rightarrow$ Resposta ao escalão contínua

Nº polos = nº zeros $\Rightarrow$ Resposta ao escalão descontinuidade com salto finito

Nº polos < nº zeros $\Rightarrow$ Resposta ao escalão descontinuidade, salto infinito

Valor inicial da derivada da resposta ao escalão:

$$\lim_{t\to 0}\dot{y}(t) = \lim_{s\to +\infty} sL\{\dot{y}(t)\} = \lim_{s\to +\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to +\infty} s^2 \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s\to +\infty} sG(s)$$

Nº polos > nº zeros+1 $\Rightarrow$ Derivada da resposta ao escalão contínua

Nº polos = nº zeros+1 $\Rightarrow$ Derivada da resposta ao escalão descontínua, finita

Nº polos < nº zeros+1 $\Rightarrow$ Derivada da resposta ao escalão descont., infinita

Exemplos

Usando os teoremas do valor inicial e final para a resposta e a sua derivada, e o facto de os polos serem reais, esboce qualitativamente a forma da resposta ao escalão dos sistemas com função de transferência:

a) $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$ b) $G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

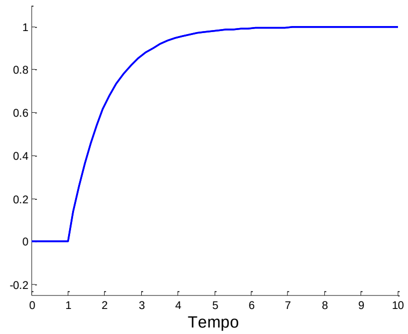
c) $G_3(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$ d) $G_4(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$

a) $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$

Há apenas um polo real e não há zeros $\Rightarrow$ Não há oscilações.

Excesso de polos-zeros = 1. Logo a resposta é contínua mas a derivada para $t = 0$ é descontínua mas finita: $\lim_{t \to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \to +\infty} s \frac{1}{s+1} = 1$

O ganho estático é 1.

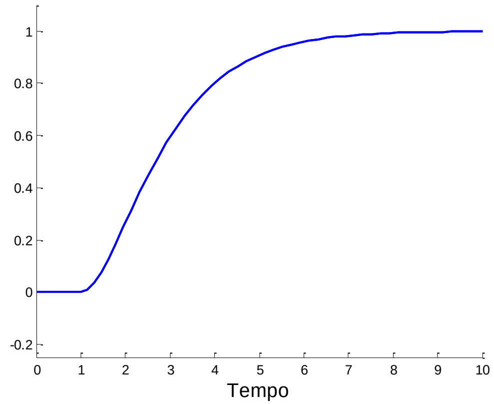


b) $G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

Há só dois polos reais $\Rightarrow$ não há oscilações.

Excesso de polos-zeros=2 $\Rightarrow$ Continuidade da resposta e da derivada.

Ganho estático = 1.

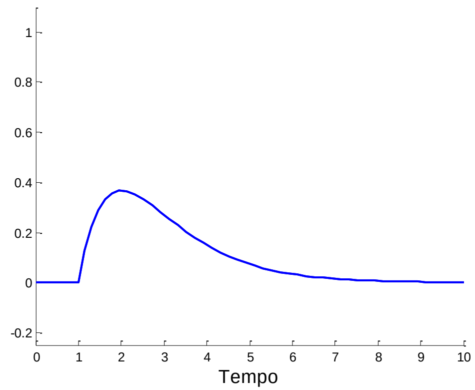


c) $G_3(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$

Excesso de polos-zeros=1 $\Rightarrow$ descontinuidade na derivada

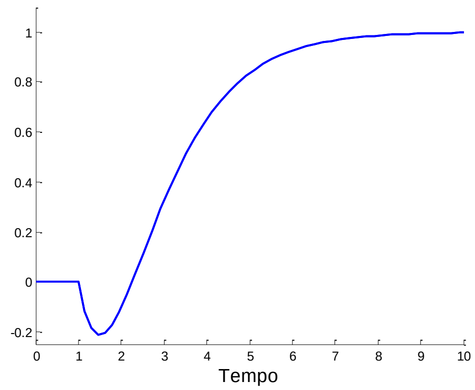
A derivada na origem é 1.

A resposta tende para zero.

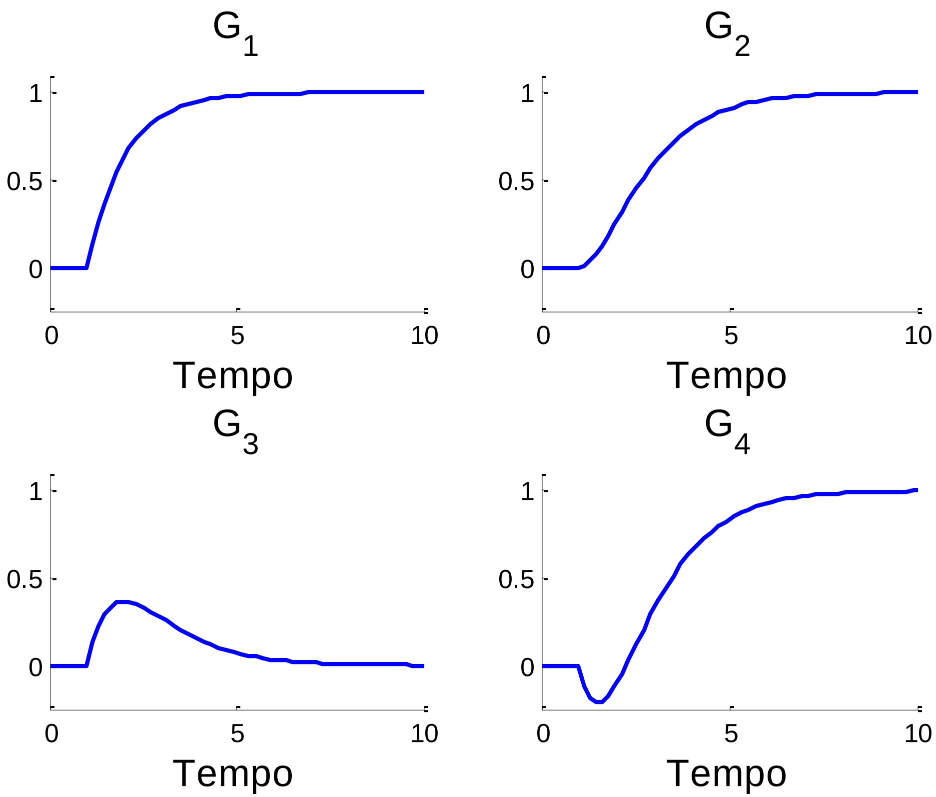


d) $G_4(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$

Há uma descontinuidade na origem. A derivada inicial é negativa mas a resposta final é positiva $\Rightarrow$ efeito de resposta inversa devido ao sistema ser de fase não mínima.



Resumo do exemplo



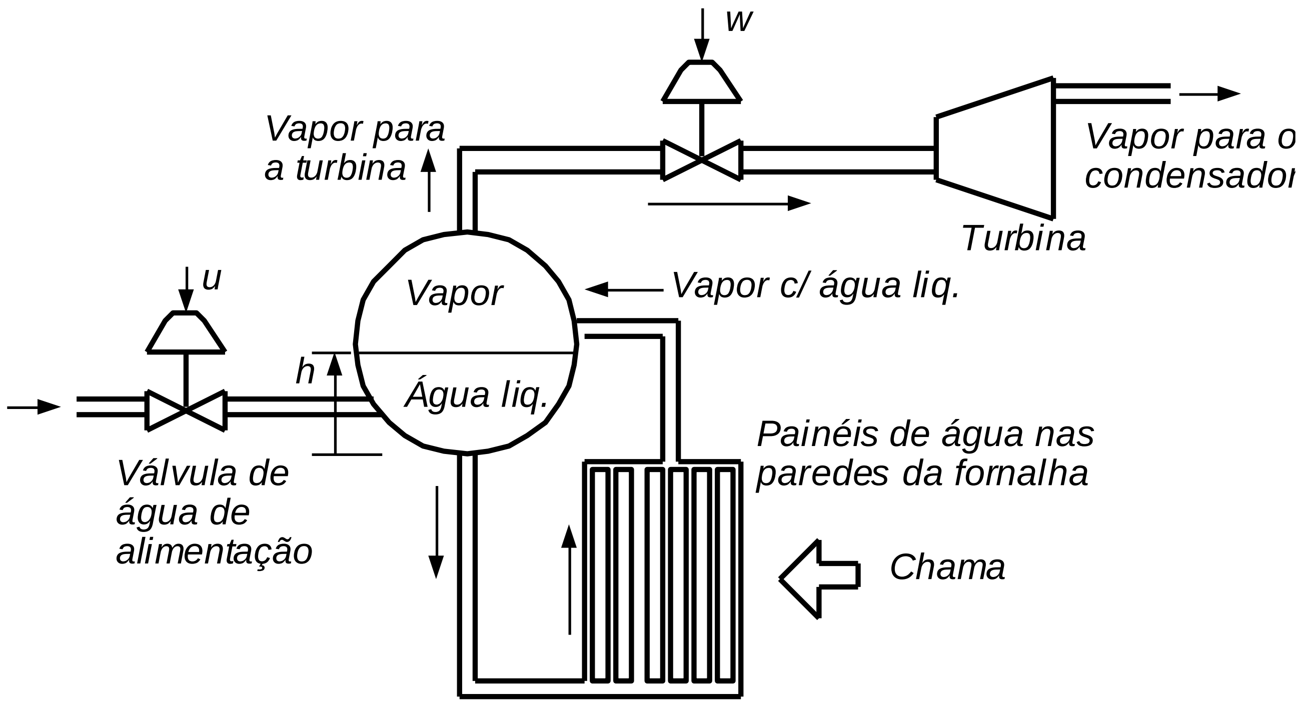
$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

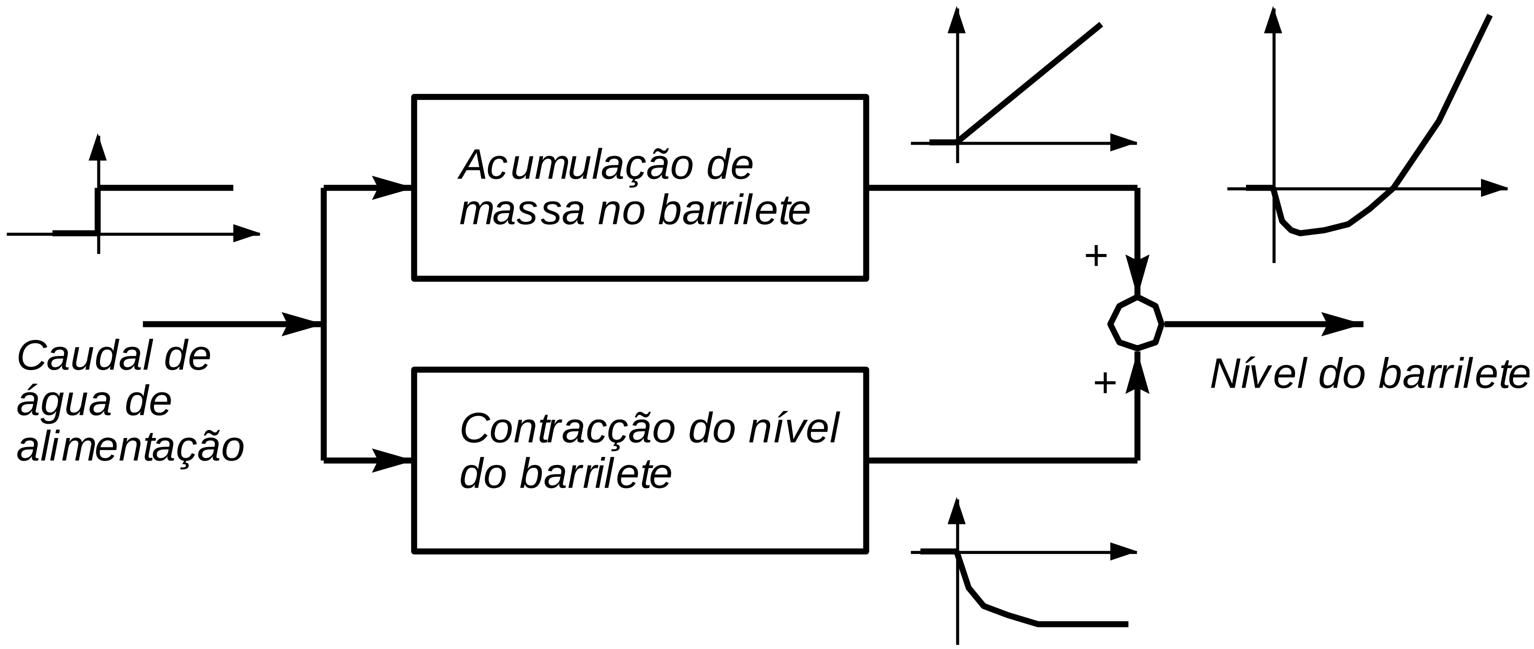
$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$G_3(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$G_4(s) = \frac{1-s}{(s+1)^2}$$

Exemplo de um sistema de fase não mínima: Nível do barrilete num grupo gerador de vapor de uma caldeira





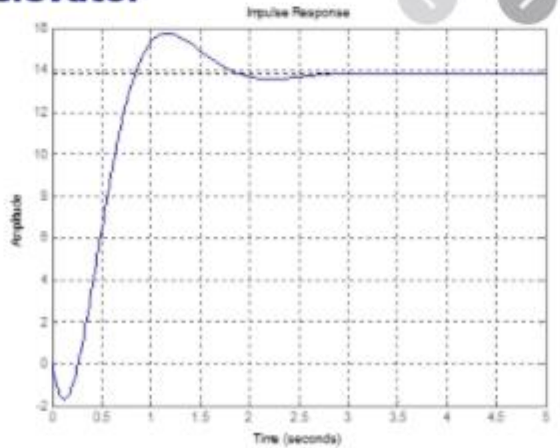
$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{(\tau - 1)s + 1}{s(\tau s + 1)}$$

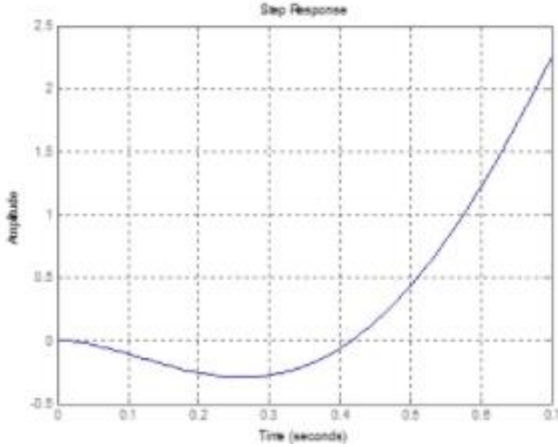
os dois polos em paralelos criam um zero que é de fase não mínima se o arrefecimento for mais rápido que a acumulação de massa.

Ex 3.28 Boeing 747 aircraft, altitude vs. elevator

- $H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{h(s)}{\delta_e(s)} = \frac{30(s-6)}{s(s^2+4s+13)}$
  - h: altitude
  - δ_e: elevator deflection
    - (downward is positive.)

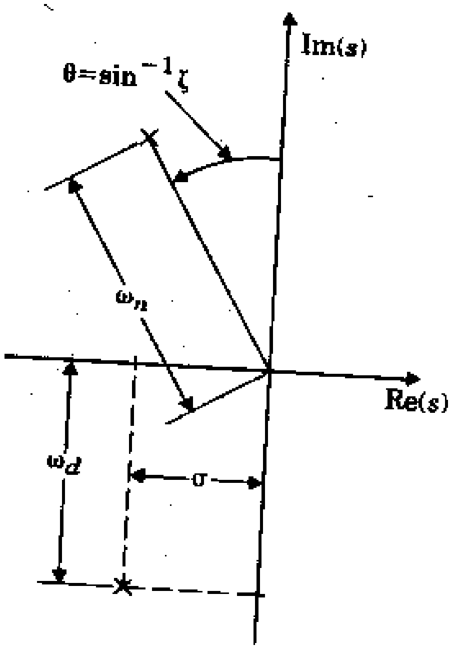
```
num = 30*[1 -6];
den = [1 4 13 0];
sys = tf(num,den)*(-1);
% -1 means the sign of elevator deflection.
t = 0:0.01:5;
impulse(sys,t); grid
t = 0:0.01:0.7;
figure; step(sys,t); grid
```

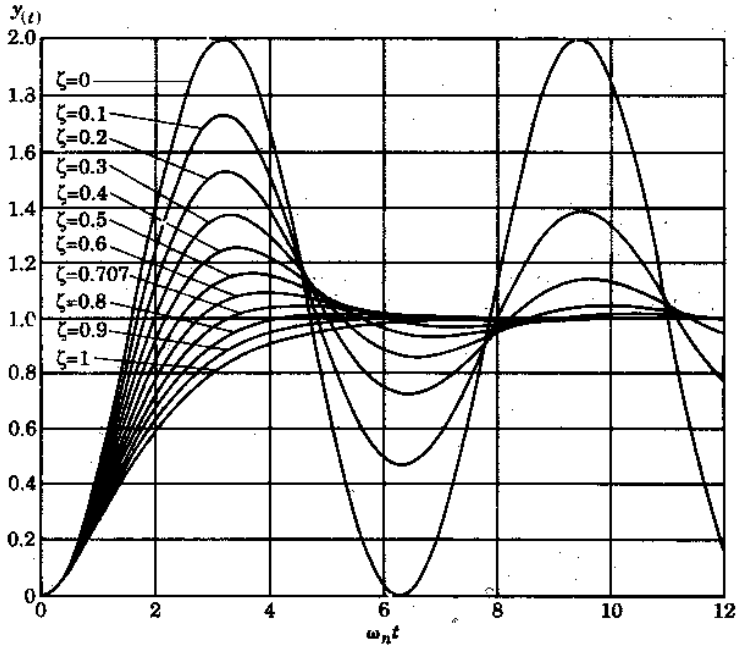


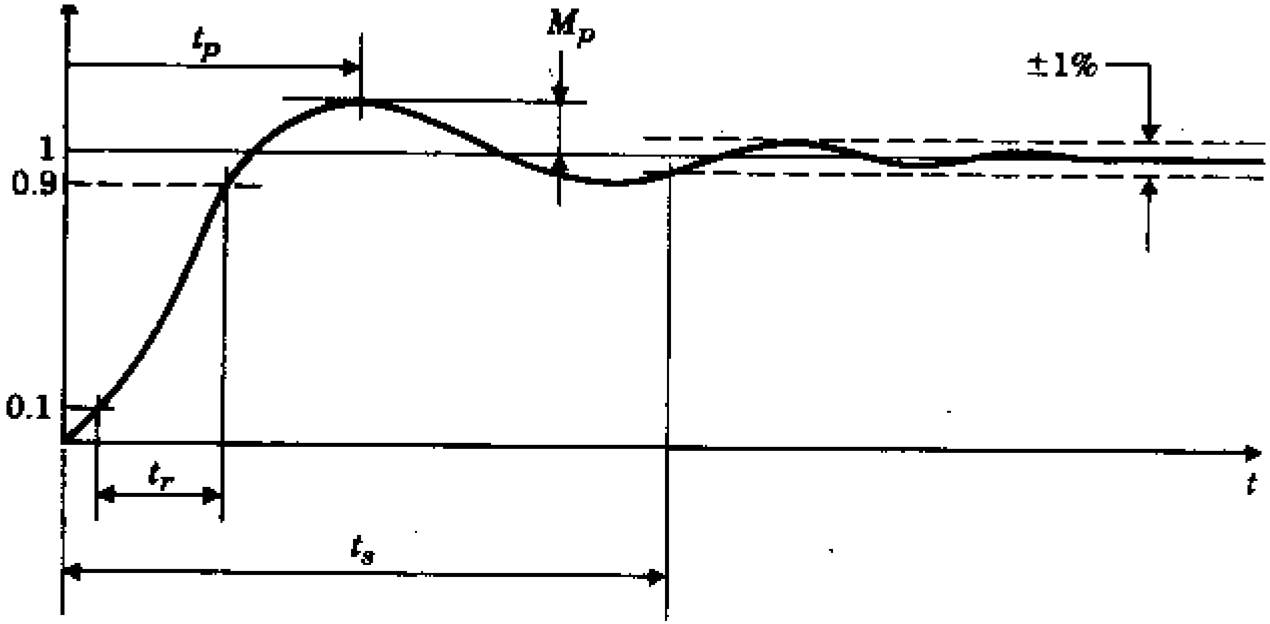


Sistemas de 2ª ordem (contínuo)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$







$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad t_s = \frac{4.6}{\varsigma \omega_n} \qquad S = M_p = e^{-\pi \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}} \qquad 0 \le \varsigma \le 1$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$

ς - Determina a forma da resposta

ω_n - Determina a escala de tempo

Quando maior for ω_n maior é a largura de banda e mais rápido é o sistema.

Modelo de estado de sistemas lineares: A equação homogénea

A equação (que descreve um sistema sem entrada):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

denomina-se **equação homogénea**.

A solução desta equação desempenha um papel fundamental na solução da equação de estado de sistemas lineares com entrada e na compreensão da dinâmica local de muitos sistemas não lineares.

A estrutura da solução depende dos valores próprios e dos vetores próprios da matriz da dinâmica, A.

Plano de estado

Para um sistema com duas variáveis de estado, o espaço de estado reduz-se a um plano, denominado *plano de estado*.

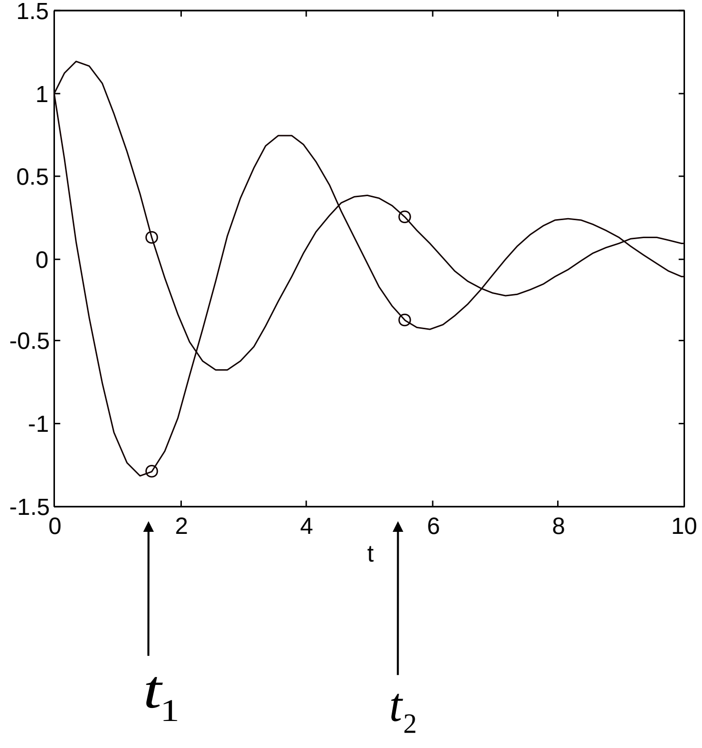
Exemplo

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

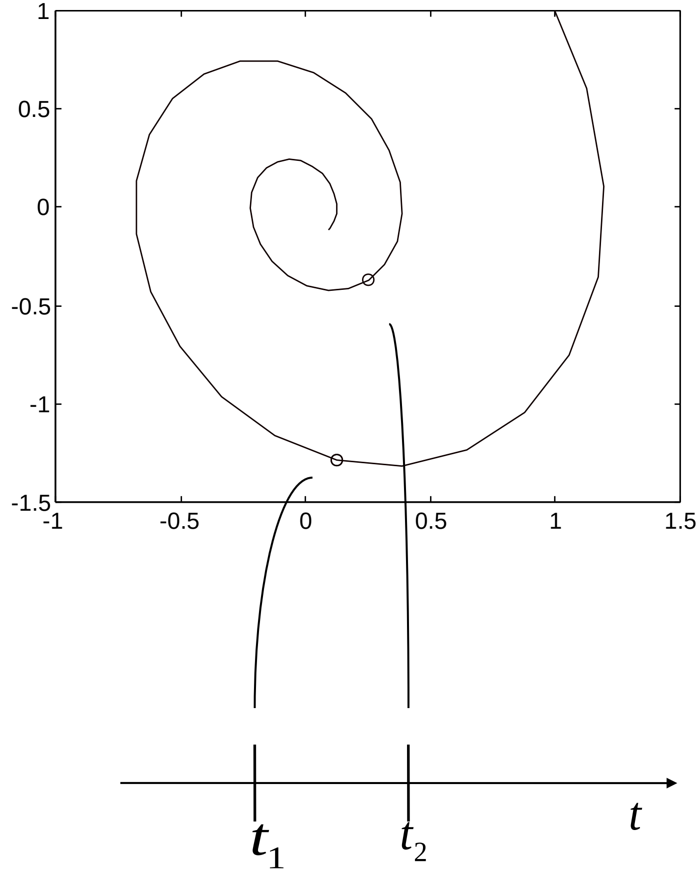
$$\frac{dx_2}{dt} = -1.5x_1 - 0.8x_2 \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.5 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

com condição inicial $x_1(0) = 1$ $x_2(0) = 1$. A solução no tempo e a correspondente órbita no espaço (plano) de estado mostram-se na figura seguinte.

Resposta no tempo



Trajetória correspondente no plano de estado



À medida que o tempo decorre, o ponto no espaço de estado que representa o estado percorre a trajetória que corresponde a uma dada condição inicial.

A cada condição inicial corresponde uma trajetória diferente.

Como a solução do problema com uma dada condição inicial existe e é única, as diferentes trajetórias nunca se cruzam.

Interpretação da solução da equação no espaço de estado

Equação homogénea:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

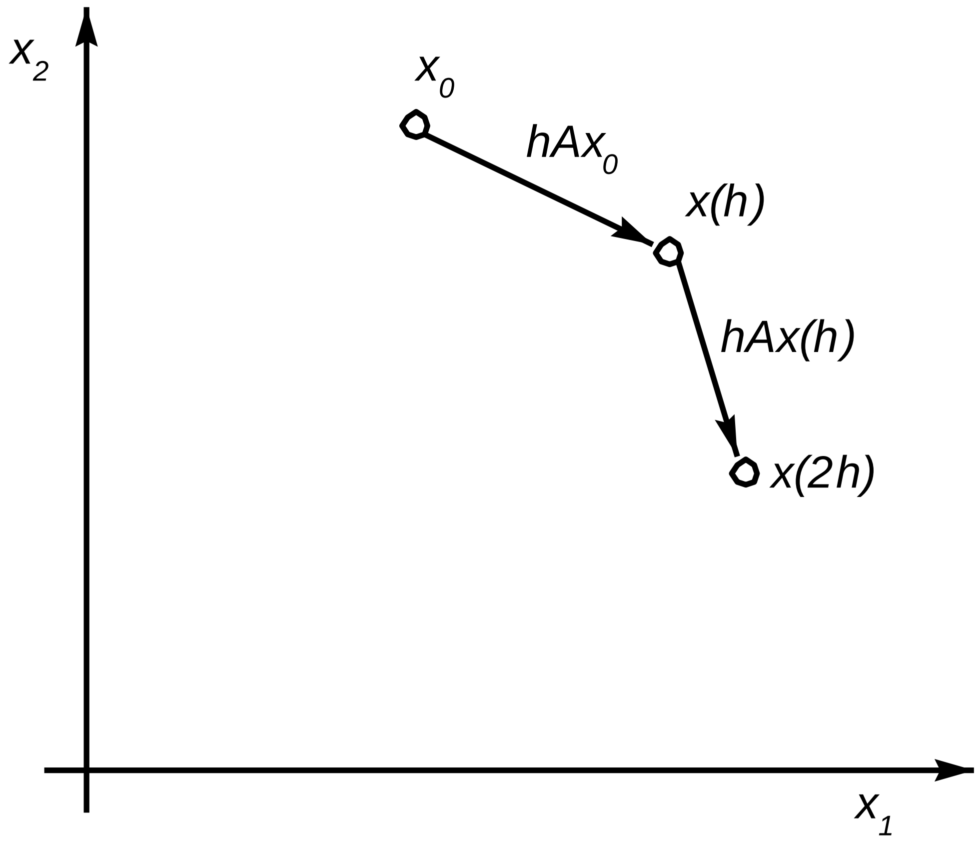
Aproximando a derivada por diferenças finitas:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x((k+1)h) - x(kh)}{h}$$

A equação pode aproximar-se pela equação de diferenças

$$x((k+1)h) = x(kh) + hAx(kh)$$

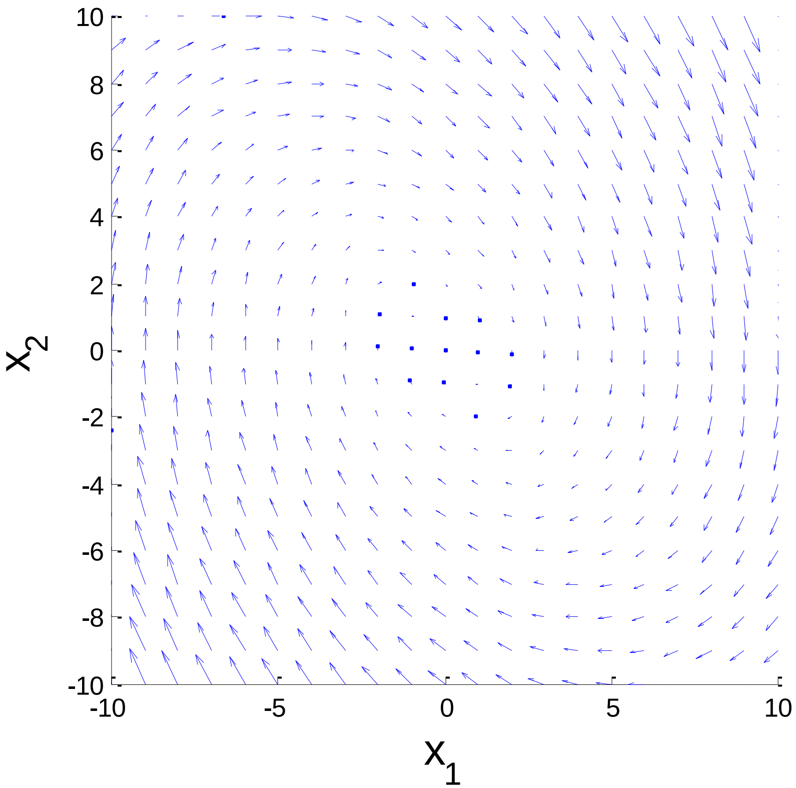
$$x((k+1)h) = x(kh) + hAx(kh)$$



$$x((k+1)h) = x(kh) + hAx(kh)$$

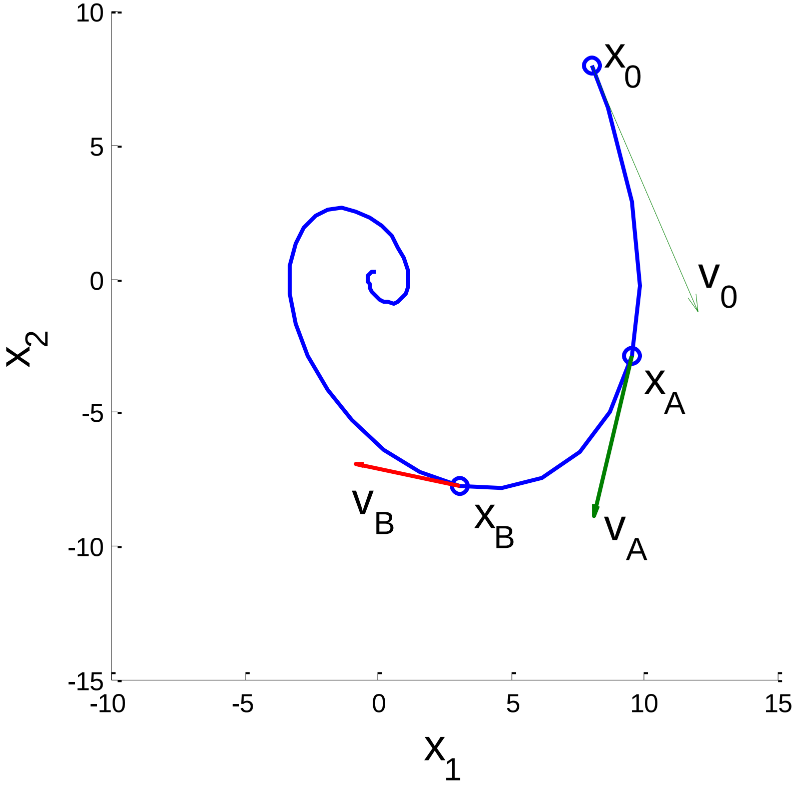
No espaço de estados, a solução pode assim ser interpretada do seguinte modo:

- Começamos com uma condição inicial x_0 no instante $k = 0$.
- Para obter o novo ponto no instante $k = h$ somamos ao vetor x_0 um vetor um vetor proporcional a Ax_0 (mais exactamente hAx_0). Obtém-se um ponto $x(h) = hAx_0$.
- O processo é em seguida iterado.



Em cada ponto x do espaço de estados a função Ax define um vetor (campo de vetores) que indica qual a direcção seguida nesse ponto pela solução da equação diferencial.

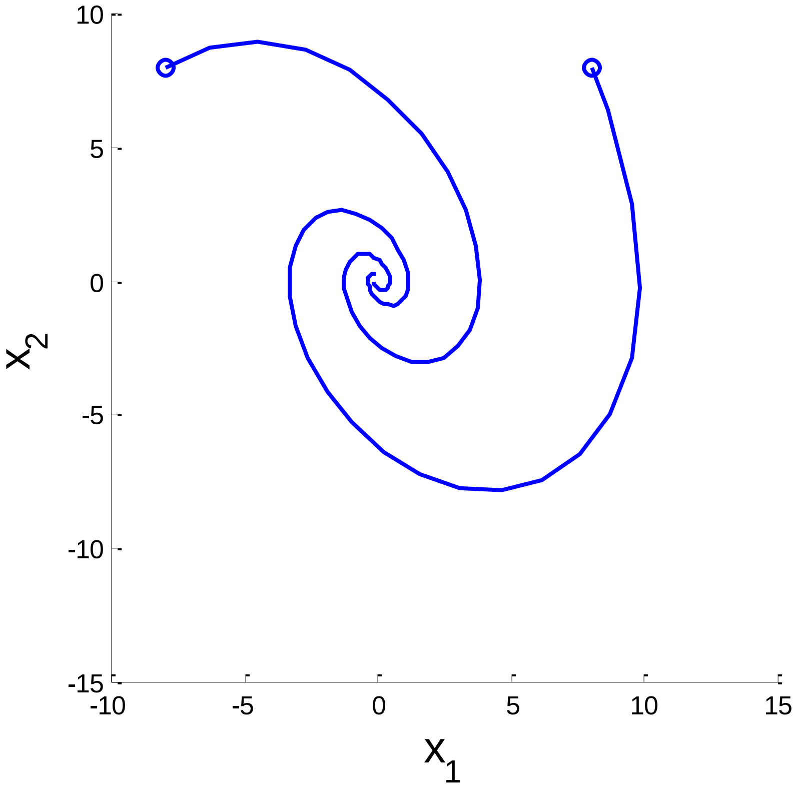
O **campo de vetores** pode ser traçado no MATLAB com a função *quiver*.



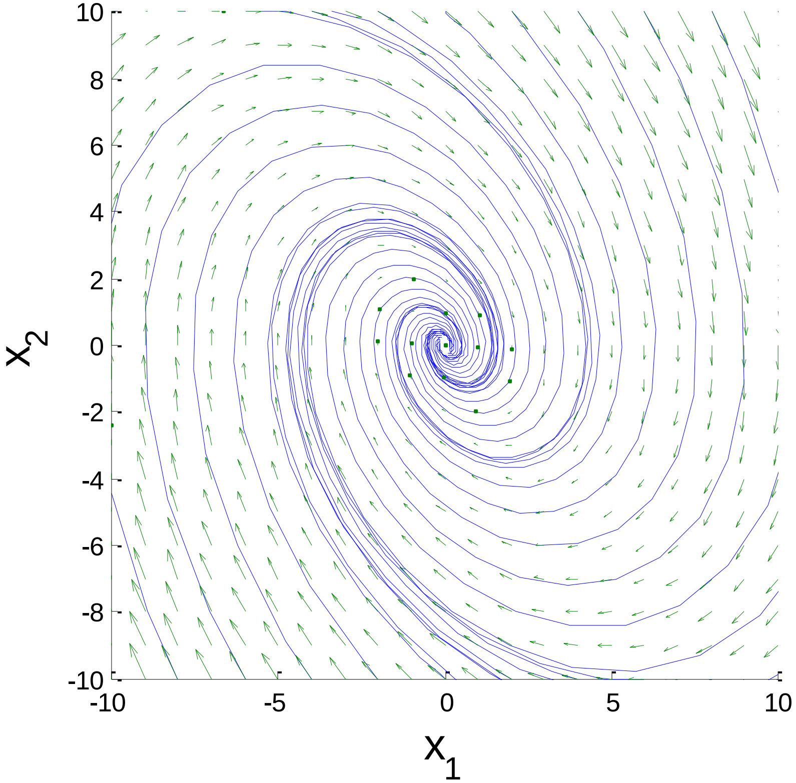
Partindo do ponto x_0, a solução avança (localmente) na direção $v_0 = Ax_0$.

Em cada ponto a trajetória é tangente ao campo de vetores nesse ponto.

As trajetórias denominam-se órbitas.



Se começarmos com outra condição inicial, obtemos uma outra trajetória. A figura mostra duas trajetórias geradas a partir de duas condições iniciais diferentes.



Retrato de fase

Existência e unicidade de solução

A solução da equação de estado linear com condição inicial especificada

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

existe e é única.

Este resultado implica que as trajetórias de estado não se podem cruzar pois, se assim fosse, haveria duas soluções diferentes da equação diferencial com a mesma condição inicial (correspondente ao ponto de cruzamento).

Discussão

"Seguir" as direções indicadas pelo campo de vetores proporciona um método numérico aproximado para resolver a equação de estado homogénea,

No entanto, gostaríamos de ter um método analítico e, sobretudo, de ter indicadores que revelem o **comportamento qualitativo da solução** (se oscila ou não, se tende para zero ou para infinito quando o tempo aumenta).

As propriedades da solução dependem da estrutura da matriz da dinâmica A, em particular dos seus valores próprios e vetores próprios, tema que estudaremos em seguida.

Nota sobre álgebra linear: Valores próprios e vetores próprios

Dada uma matriz A quadrada $[n \times n]$, os vetores próprios v_i satisfazem

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

em que λ_i é o correspondente valor próprio.

Por outras palavras: A direção definida pelos vetores próprios permanece invariante na transformação associada à matriz.

Para uma matriz $n \times n$ há, no máximo, n vetores próprios linearmente independentes (mas pode haver menos).

Aos vetores próprios também se dá o nome de *vetores modo*.

Determinação dos vetores próprios e dos valores próprios

Como

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

os vetores próprios satisfazem o sistema de equações algébrico

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

Para que este sistema tenha soluções não triviais $v_i \neq 0$, ele tem de ser indeterminado, pelo que os valores próprios λ_i devem satisfazer a equação polinomial (equação característica):

$$det(A - \lambda_i I) = 0$$

Polinómio característico da matriz: $det(A - \lambda I)$

Para calcular os valores próprios e os vetores próprios de uma matriz A quadrada $[n \times n]$ deve pois proceder-se do seguinte modo:

a) Calcular os valores próprios resolvendo a equação polinomial:

$$det(A - \lambda_i I) = 0$$

b) Para cada um dos valores próprios λ_i obter os valores próprios correspondentes resolvendo o sistema

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0$$

Como este sistema é indeterminado, a sua solução é obtida a menos de uma constante de normalização, que pode ser escolhida como for conveniente.

Cálculo dos valores e vetores próprios – Exemplo

Determine os valores próprios e os vetores próprios da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

Polinómio característico da matriz:

$$det(\,A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

Os valores próprios são as raízes deste polinómio:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 2$$

Vetores próprios:

$$\lambda_1 = -1 \qquad (A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é qualquer múltiplo de $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 2 \qquad (A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é qualquer múltiplo de $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Diagonalização de matrizes

Hipótese: A matriz A tem n vetores próprios linearmente independentes.

Matriz modal (as colunas são os vetores próprios):

$$M = [v^1 \quad \cdots \quad v^n]$$

Matriz diagonal dos valores próprios

$$\Lambda = diag(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n)$$

Como, para cada par vetor próprio/valor próprio,

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

vem

$$AM = M\Lambda$$

ou seja, a matriz A admite a seguinte decomposição:

$$A = M\Lambda M^{-1}$$

Tem-se ainda, multiplicando à direita por M e à esquerda por M^{-1}:

$$\Lambda = M^{-1}AM$$

Solução da equação homogénea por diagonalização

Esta técnica é válida quando a matriz da dinâmica tem n vetores próprios linearmente independentes.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

Faz-se uma transformação de variáveis associada à matriz modal:

$$z = M^{-1}x \quad \text{ou} \quad x = Mz$$

Nas coordenadas z a dinâmica fica

$$\dot{z} = M^{-1}\dot{x} = M^{-1}Ax = M^{-1}AMz = \Lambda z$$

Ou seja, as componentes de z ficam desacopladas, pelo que as equações podem ser resolvidas separadamente!

$$\dot{z} = \Lambda z$$

Esta equação matricial corresponde ao sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n \end{cases}$$

Como as equações estão separadas, podem ser resolvidas separadamente:

$$z_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$\cdots$$

$$z_n(t) = k_n e^{\lambda_n t}$$

Os k_i são constantes que dependem das condições iniciais

Estrutura da resposta nas coordenadas x:

$$x = Mz = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$x = k_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + k_n v_n e^{\lambda_n t}$$

A cada um dos termos

$$v_i e^{\lambda_i t}$$

dá-se o nome de ***modo*** do sistema. A resposta do sistema é uma combinação linear dos modos em que os coeficientes dependem das condições iniciais.

Exemplo

Determine a resposta no tempo do sistema homogéneo

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A estrutura da resposta é da forma:

$$x(t) = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-1t} + k_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Determinação das constantes k_1 e k_2a partir das condições iniciais:

Para $t = 0$:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k_1 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} k_2$$

Este sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad k_1 = 3, \qquad k_2 = 1$$

Retrato de fase de sistemas lineares

A solução do problema de valores iniciais

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

com A uma matriz com n vetores próprios linearmente independentes é da forma

$$x(t) = k_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + k_n v_n e^{\lambda_n t}$$

em que as constantes $k_1,\ \ldots,\ k_n$ dependem das condições iniciais.

Consoante a posição no plano complexo dos valores próprios λ_i, assim será o tipo de resposta.

No plano ($n = 2$): $$x(t) = k_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

Valores próprios reais

- Se os valores próprios forem reais as respostas correspondentes serão exponenciais.

- Se a parte real for positiva, as exponenciais serão crescentes e o estado tende para infinito.

- Se a parte real for negativa, as exponenciais serão decrescentes e o estado tende para zero.

Valores próprios complexos conjugados

Os valores próprios complexos ocorrem sempre em pares conjugados para que a solução seja real.

Correspondem a termos oscilatórios multiplicados por uma exponencial decrescente se a parte real do valor próprio for negativa, crescente se fôr positiva, e sem amortecimento se for nula.

Recorde-se que

$$e^{(\alpha+j\beta)t} = e^{\alpha\ t}\{cos(\beta t) + j\,sin(\beta t)\}$$

Exemplo: Valores próprios complexos conjugados

Resolva a equação

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sugestão: Calcule os valores próprios e os vetores próprios e use:

$$x(t) = k_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 v_2 e^{\lambda_{2n} t} = 2\, Re\{\, k_1 v_1 e^{\lambda_1 t}\}$$

Observe que esta expressão é válida por os dois termos da soma serem complexos conjugados.

Equação característica:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (s-1)^2 + 1 = 0$$

Os valores próprios são as soluções da equação característica:

$$\lambda_1 = 1 + j \quad \lambda_1 = 1 - j$$

Os vetores próprios satisfazem o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - 1 & 1 \\ -1 & \lambda_i - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como estas equações são dependentes, apenas usamos a primeira.

$$(\lambda_i - 1)v_i^1 + v_i^2 = 0$$

Escolhe-se a normalização

$$v_i^1 = 1$$

pelo que a equação anterior conduz a

$$v_i^2 = 1 - \lambda_i$$

ou seja

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

A solução da equação para $t = 0$ escreve-se

$$x_0 = k_1 v_1 + k_2 v_2$$

donde

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = x_0 \quad \text{ou seja} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $k_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j \quad k_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} j = k_1^*$

A solução da equação diferencial com a condição inicial especificada é pois

$$x(t) = 2\,Re\left\{\frac{1}{2}(1+j)\begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} e^{(1+j)t}\right\} = Re\left\{\begin{bmatrix} 1+j \\ 1-j \end{bmatrix}\ e^{t}(cos\,t + j\,sin\,t)\right\}$$

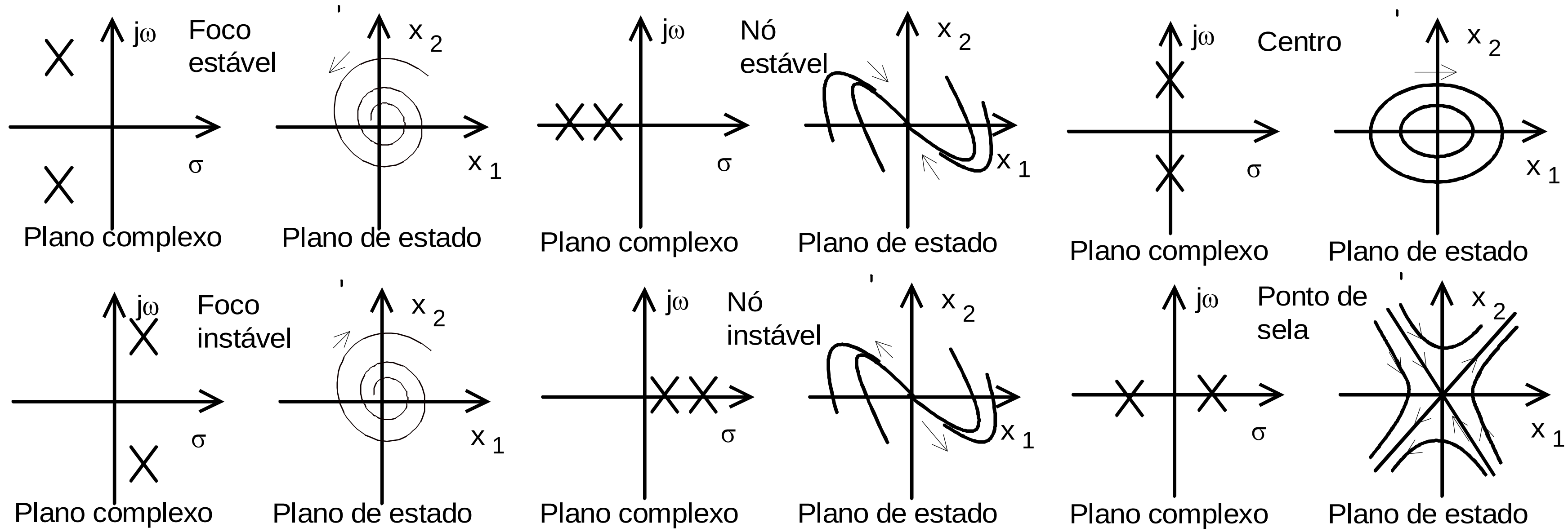
ou seja:

$$x(t) = e^{t}\begin{bmatrix} cos\,t - sin\,t \\ cos\,t + sin\,t \end{bmatrix}$$

Fim do exemplo

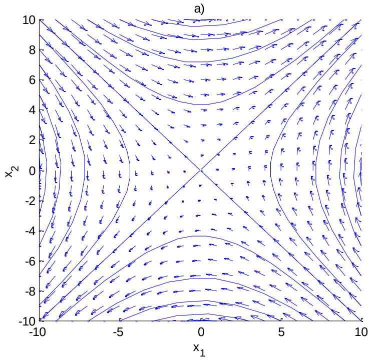
Classificação da dinâmica dos sistemas lineares

Retrato de fase em função dos valores próprios de A

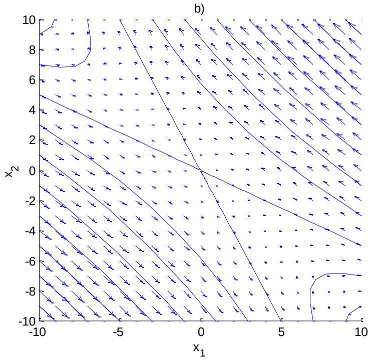


Exercício

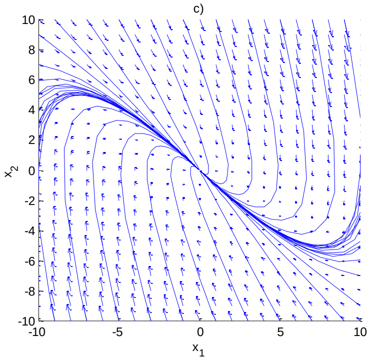
a)



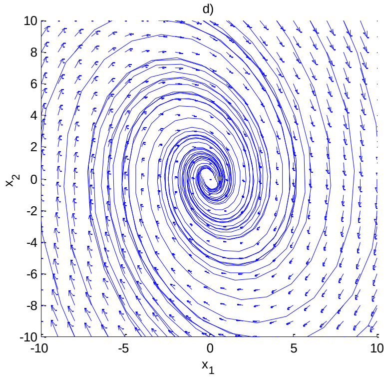
b)



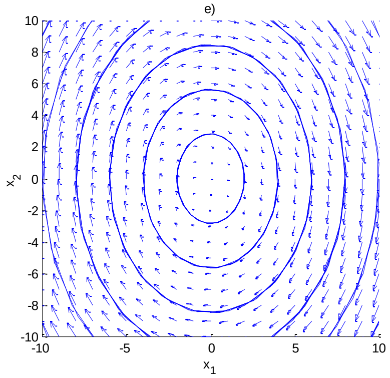
c)



d)



e)



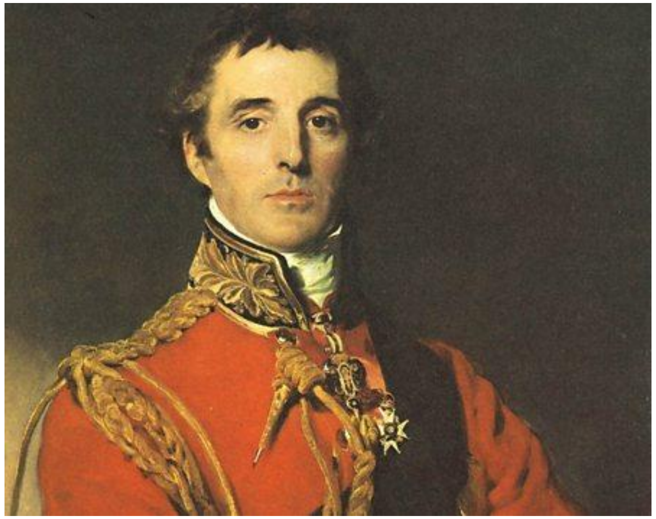
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -5/3 & -4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

a) Diga qual das matrizes correspondem a qual retrato de fase. Deve justificar a sua resposta com base nos valores próprios e vetores próprios (calcule os vetores próprios apenas quando necessário).

b) Indique uma condição inicial não nula tal que o estado do sistema com matriz da dinâmica A_3 tenda para zero quando o tempo aumenta.

O que verdadeiramente aconteceu na batalha de Waterloo



A batalha teve lugar em 18 de Junho de 1815. Napoleão estava doente, hesitou e deu início ao ataque tarde, cerca das 11h da manhã.

As forças francesas, comandadas por Napoleão com a ajuda de Ney eram um pouco superiores às do exército aliado (onde se falavam 17 línguas diferentes, mas em que predominavam os ingleses; embora os portugueses tivessem tido um papel importante na queda de Napoleão, chegando a invadir o sul da França, não havia nenhum grupo organizado português em Waterloo.), comandadas por Wellington.

No final do dia, cerca das 19h00, os franceses tinham vantagem e Wellington disse "*Ou o final do dia, ou Blücher têm de chegar!*".

Blücher, o comandante das forças prussianas, chegou e inverteu a vantagem dos franceses, levando à vitória do exército aliado.

Será que podemos modelar a batalha de Waterloo?

Como podemos descrever o estado de um exército

da maneira mais simples possível?

Estado de um exército = número de soldados

x_1 = # tropas francesas

x_2 = # tropas aliadas

O que podemos admitir para a derivada do estado?

$$\dot{x}_1 = ?$$

$$\dot{x}_2 = ?$$

O efeito de um exército é diminuir o outro, pelo que a derivada de x_1 deve ser negativa e dada por um termo que cresce em módulo com o outro exército. O modelo mais simples é

$$\dot{x}_1 = -x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$

a) Escreva este modelo autónomo na forma matricial

b) Com base nos valores próprios e nos vetores próprios da matriz da dinâmica trace qualitativamente o retrato de fase no plano de estado.

c) Suponha que, inicialmente, o número de soldados franceses era $x_1(0) = 3$ e de soldados aliados $x_2(0) = 2$. Quem vence a batalha de acordo com o modelo?

Assuma que o modelo está escalado tal que $x_1 = 1$ significa 25000. Isto significa que que inicialmente existiriam 75000 franceses e 50000 aliados (os números reais eram aproximadamente 72000 franceses e 59000 aliados; o exército de Blücher era de 50000 prussianos).

O tempo é medido em dezenas de [hora].

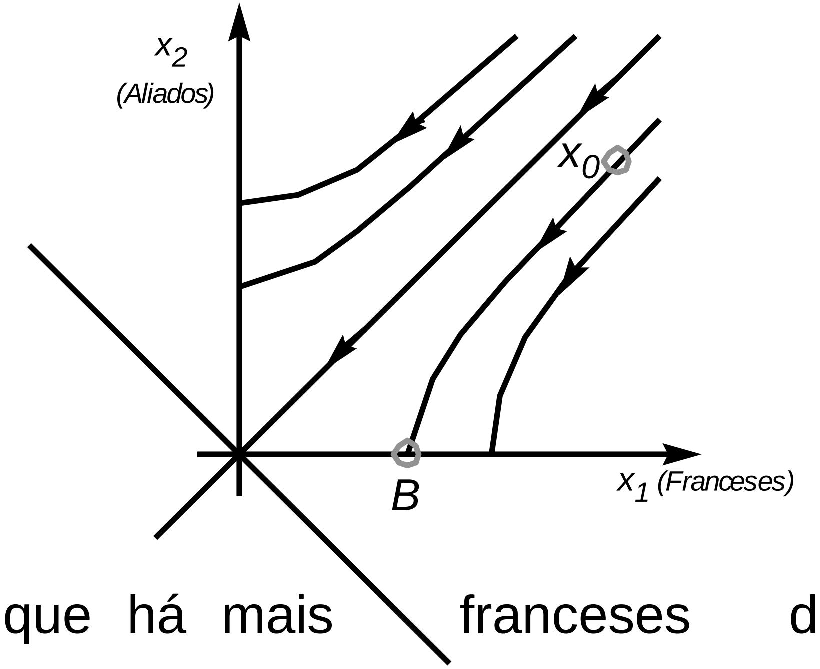
Modelo de estado na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Valores próprios e vetores próprios

$$\lambda_1 = -1, \quad v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

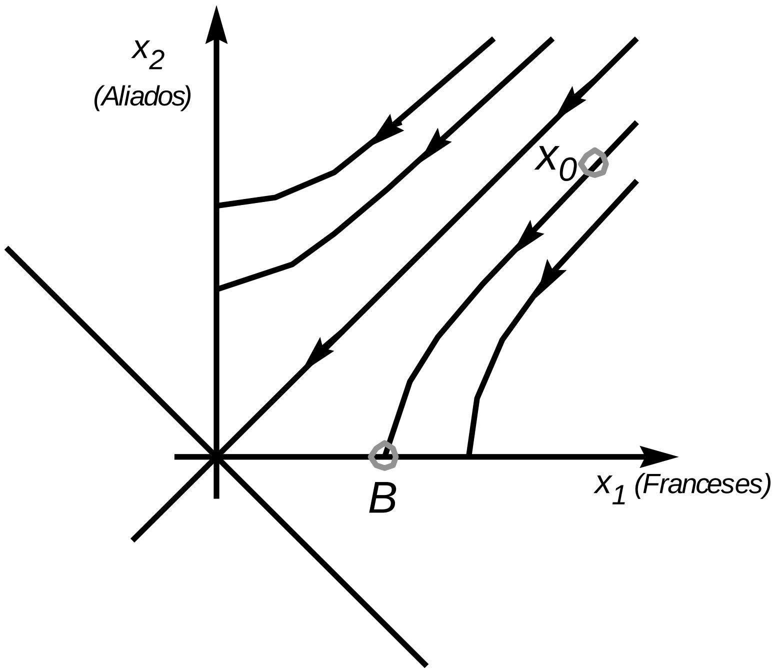


Começando numa condição inicial em que há mais franceses do que aliados o estado evolui para o ponto B, em que deixa de haver tropas aliadas (os franceses vencem).

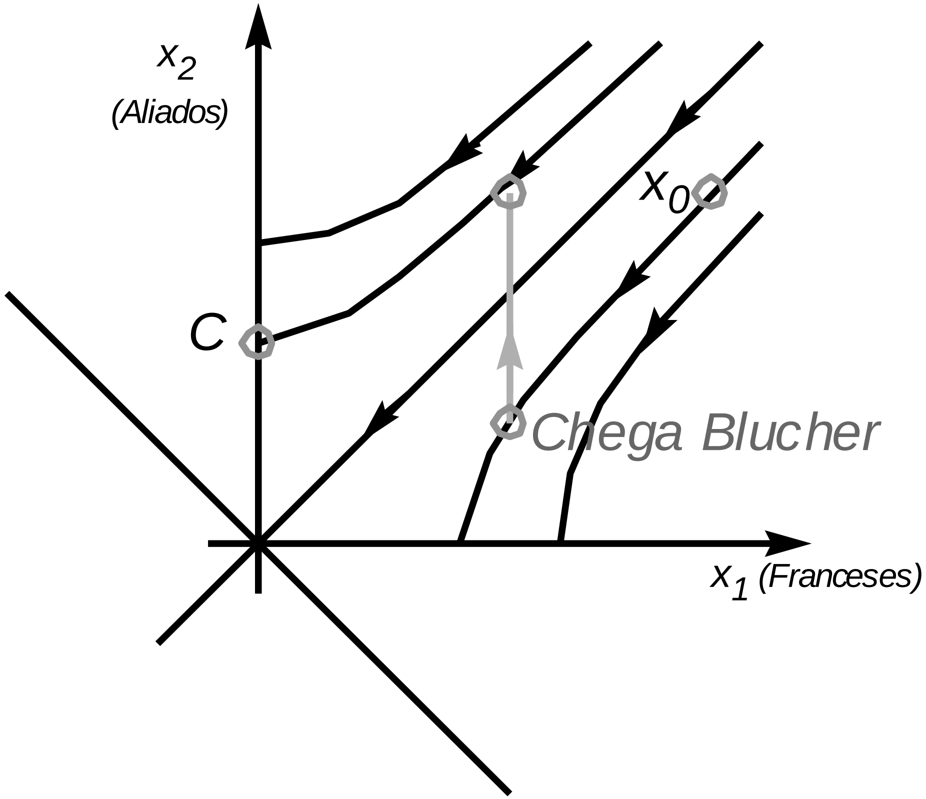
Bom: quem é que venceu a batalha de Waterloo?

Estamos a esquecer-nos do marechal Blücher e dos seus reforços prussianos.

Como podemos modelar o seu efeito na batalha?



A chegada dos prussianos de Blücher desloca o estado na vertical o leva a que sejam os soldados franceses a ser aniquilados, acabando-se no ponto C.



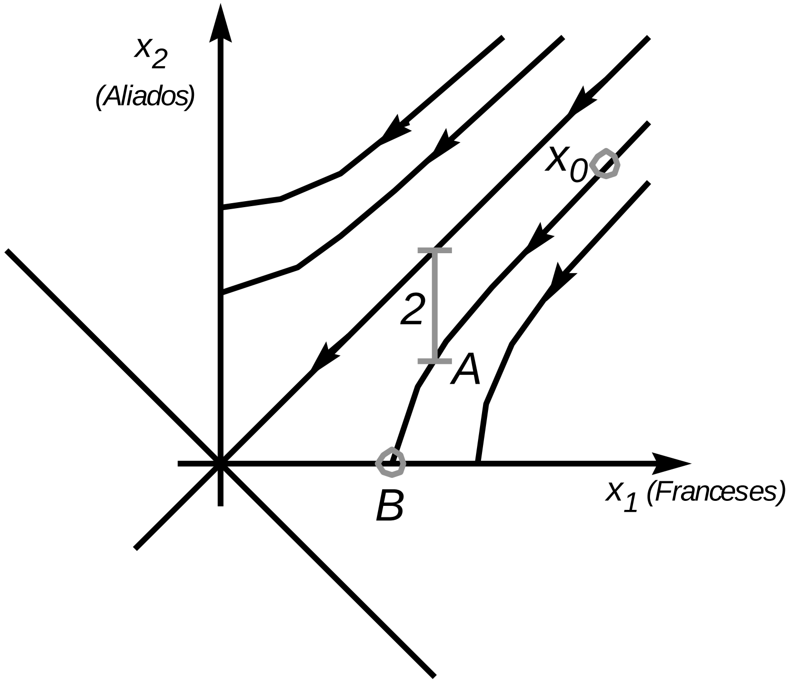
Questão: qual o tempo máximo que Blücher podia demorar a chegar para ainda poder inverter a sorte da batalha?

Vamos admitir que Blücher trouxe um reforço de 2 (ou sejan na nossa escala, 50000 soldados.

Solução de

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = 2{,}5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + 0{,}5 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}$$



Impondo a condição

$$x_1(t) = x_2(t) + 2$$

E resolvendo em ordem a t, vem

$$t_{max} = \ln 2 \cong 0{,}693$$ cerca de 7 horas

O que verdadeiramente aconteceu na batalha de Waterloo: (mais) uma desgraça humana.

Quando visitou o campo de batalha, no dia seguinte, o duque de Wellington disse em lágrimas: *Pior do que uma grande derrota, só uma grande vitória!*

Em Waterloo morreram 50000 soldados.

Quantas mais pessoas morreram pela efémera glória de Napoleão, Portugal incluído?

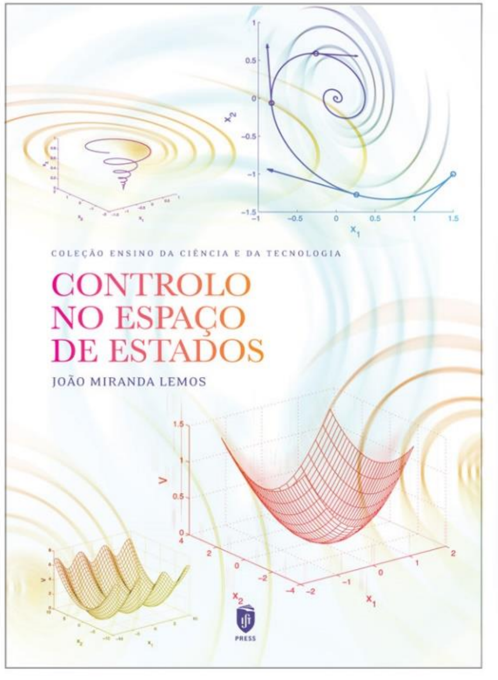
Bibliografia sobre a resposta modal do modelo de estado

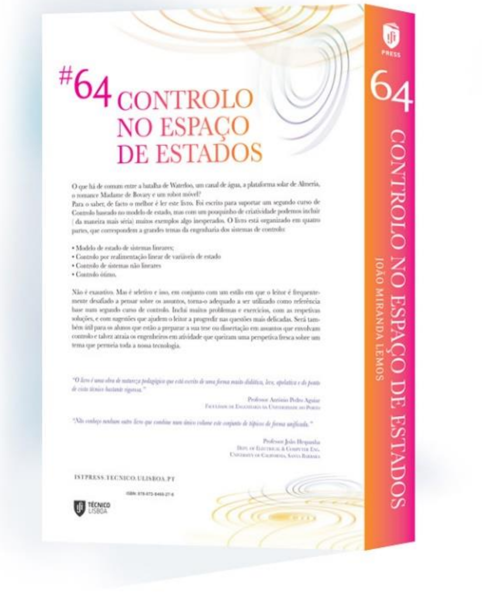
João Miranda Lemos

Controlo no Espaço de Estados

IST Press

Caps. 2 e 3





Fim do ficheiro