

PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS (PROE)

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Custódio Peixeiro

Novembro 2021

Este documento foi concebido para servir de guia nas aulas e apenas como tal deverá ser utilizado no estudo da matéria.

- Tipos de Ondas (1)
- Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (16)
- Velocidades de Fase e de Grupo (4)
- Dispersão (3)
- Polarização (6)
- Energia e Potência (4)
- Reflexão e Refração em Interfaces Planas (7)

Tipos de Ondas

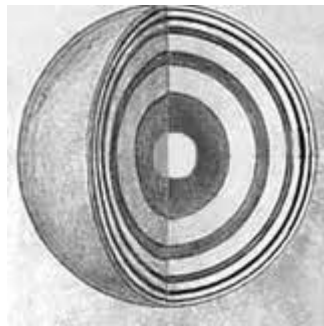
3/43

Uma onda é um fenômeno físico que ocorre num local num dado instante e é reproduzido noutros locais em instantes posteriores, sendo o atraso proporcional à distância de cada local à primeira posição **$F(r - ct)$**

Tipos de Ondas

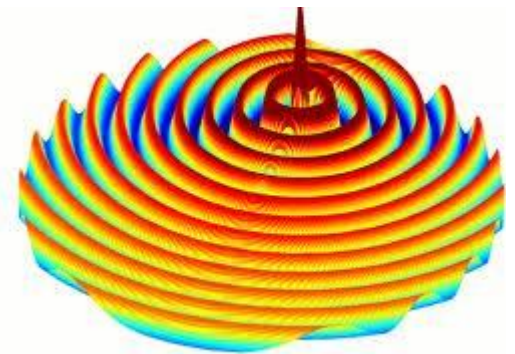
Esférica

$$\frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$



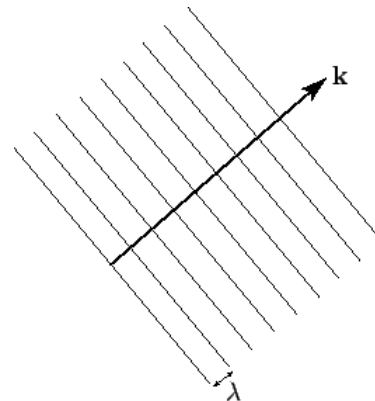
Cilíndrica

$$\frac{A}{\sqrt{\rho}} e^{j(\omega t - k\rho)}$$



Plana

$$A e^{j(\omega t - kr)}$$



Não existem exactamente ondas planas (exigiriam uma extensão infinita) mas existem ondas aproximadamente planas.

As ondas planas têm especial importância porque:

- longe da fonte que a originou uma OE é localmente plana

Por exemplo, uma antena produz na sua zona distante OEs (esféricas) localmente planas

- qualquer OE pode ser obtida como a sobreposição de ondas planas (de amplitude e fase adequadas) via transformada de Fourier

$$E(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k, \omega) e^{j(\omega t - k \cdot r)} dk d\omega$$

Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (2)

5/43

Das equações de Maxwell obtêm-se, para excitação temporal harmónica **exp (j ω t)**, as equações de onda no vácuo (sem fontes)

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}} = 0 \qquad \nabla^2 \bar{\mathbf{H}} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \bar{\mathbf{H}} = 0$$

Solução geral: $\mathbf{E} (\mathbf{H}) = \mathbf{F}_1(z-c_0t) + \mathbf{F}_2(z+c_0t)$ $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = (E_{0x}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}\hat{\mathbf{y}} + E_{0z}\hat{\mathbf{z}}) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$k^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = 0 \quad \text{Equação de dispersão}$$

$$\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{n}} \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = -j\mathbf{k} = -j k \hat{\mathbf{n}}$$

$$-jk\hat{n} \times \bar{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_0 \bar{\mathbf{E}}$$

$$-jk\hat{n} \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\mu_0 \bar{\mathbf{H}}$$

$$-jk\hat{n} \cdot \bar{\mathbf{D}} = 0$$

$$-jk\hat{n} \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$$

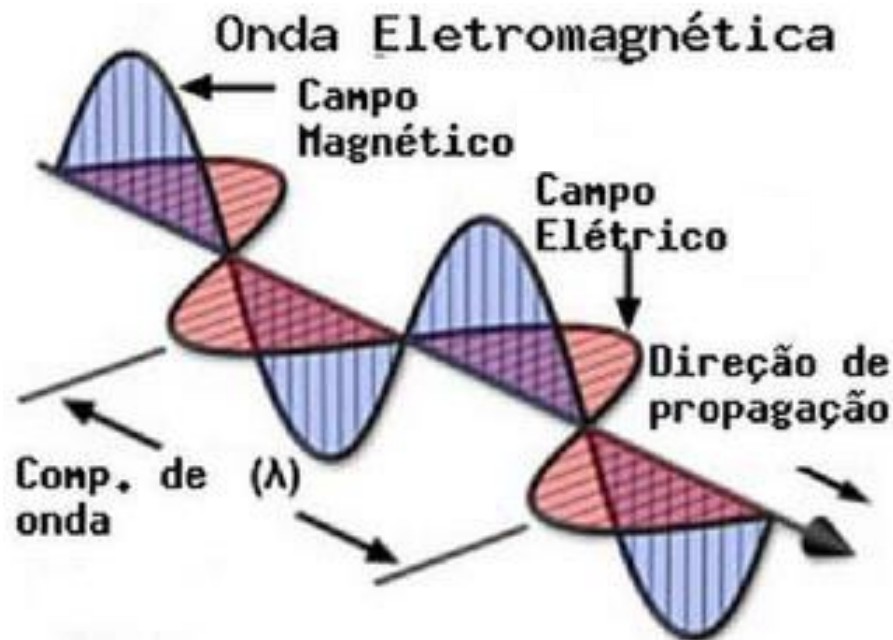
$$\hat{n} \perp \bar{\mathbf{E}} \perp \bar{\mathbf{H}}$$

$$\bar{\mathbf{E}} = -Z_0 (\hat{n} \times \bar{\mathbf{H}}) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ Ohm}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z_0} (\hat{n} \times \bar{\mathbf{E}})$$

Campos
puramente
transversais

Onda **TEM**



Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (4)

7/43

No caso geral de um meio com perdas (ϵ, μ, σ) **ϵ complexo**

$$\nabla^2 \mathbf{E} - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \underbrace{\mu\epsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})}_{\text{complexo}} \mathbf{E} = 0$$

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = E_0 e^{-\gamma \cdot \mathbf{r}} = (E_{0x} \hat{\mathbf{x}} + E_{0y} \hat{\mathbf{y}} + E_{0z} \hat{\mathbf{z}}) e^{-(\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z)}$$

$$\gamma^2 - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) = 0 \quad \text{Equação de dispersão}$$

$$jk = \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})}} = \sqrt{\frac{\mu(1 + j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})}{\epsilon \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]}}$$

Tangente do ângulo de perdas
 $\tan \theta = \sigma/\omega\epsilon$

Meio sem Perdas ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, $\sigma=0$)

Dielétrico Perfeito

$$\alpha=0$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c} = \beta_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Exemplos

Vácuo (ar)

$$\epsilon_r = \mu_r = 1$$

Vidro

$$\epsilon_r = 4, \mu_r = 1$$

Água destilada

$$\epsilon_r = 80, \mu_r = 1$$

Meio com Perdas Fracas ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, $\sigma \ll \omega \epsilon$) **Bom Dielétrico**

Para $x \ll 1$ $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \cong \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{c} = \beta_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$\alpha \cong \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \beta \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} = \beta \frac{\tan \theta}{2} \quad Z \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right)$$

Exemplos (Comportamento depende da frequência)

Vidro

$$\epsilon_r = 4, \mu_r = 1, \sigma = 10^{-12} \text{ S.m}^{-1}$$

Solo Seco

$$\epsilon_r = 4, \mu_r = 1, \sigma = 10^{-5} \text{ S.m}^{-1}$$

Água Doce

$$\epsilon_r = 80, \mu_r = 1, \sigma = 10^{-3} \text{ S.m}^{-1}$$

Meio com Perdas Fortes ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, $\sigma \gg \omega \epsilon$) **Bom Condutor**

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \cong \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad \delta \cong \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

δ - Profundidade de penetração,
distância em que os campos se
atenuam $e^1 = 1$ Neper = 8,686 dB

$$Z \cong \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} (1 + j) = R_m (1 + j) \quad R_m = \frac{1}{\sigma \delta}$$

Exemplos (Comportamento depende da frequência)

Solo Húmido

$$\epsilon_r = 30, \mu_r = 1, \sigma = 0,1 \text{ S.m}^{-1}$$

Água do Mar

$$\epsilon_r = 70, \mu_r = 1, \sigma = 5 \text{ S.m}^{-1}$$

Cobre

$$\epsilon_r = 1, \mu_r = 1, \sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$$

$$\delta (f=1 \text{ kHz}) = 2,1 \text{ mm}$$

$$\delta (f=1 \text{ MHz}) = 66,1 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\delta (f=1 \text{ GHz}) = 2,1 \text{ } \mu\text{m}$$

Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (8)

11/43

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

Resumo

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Tipo de Meio	Condição	Z [Ω]	α [Np.m ⁻¹]	β [rad.m ⁻¹]
Dielétrico Perfeito	σ=0	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$	0	$\frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$
Bom Dielétrico	$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (1 + j \frac{\sigma}{2 \omega \epsilon})$	$\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	
Bom Condutor	$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$	$\sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} (1 + j)$	$\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$	

DIELECTRIC CONSTANTS AND LOSS TANGENTS FOR SOME MATERIALS

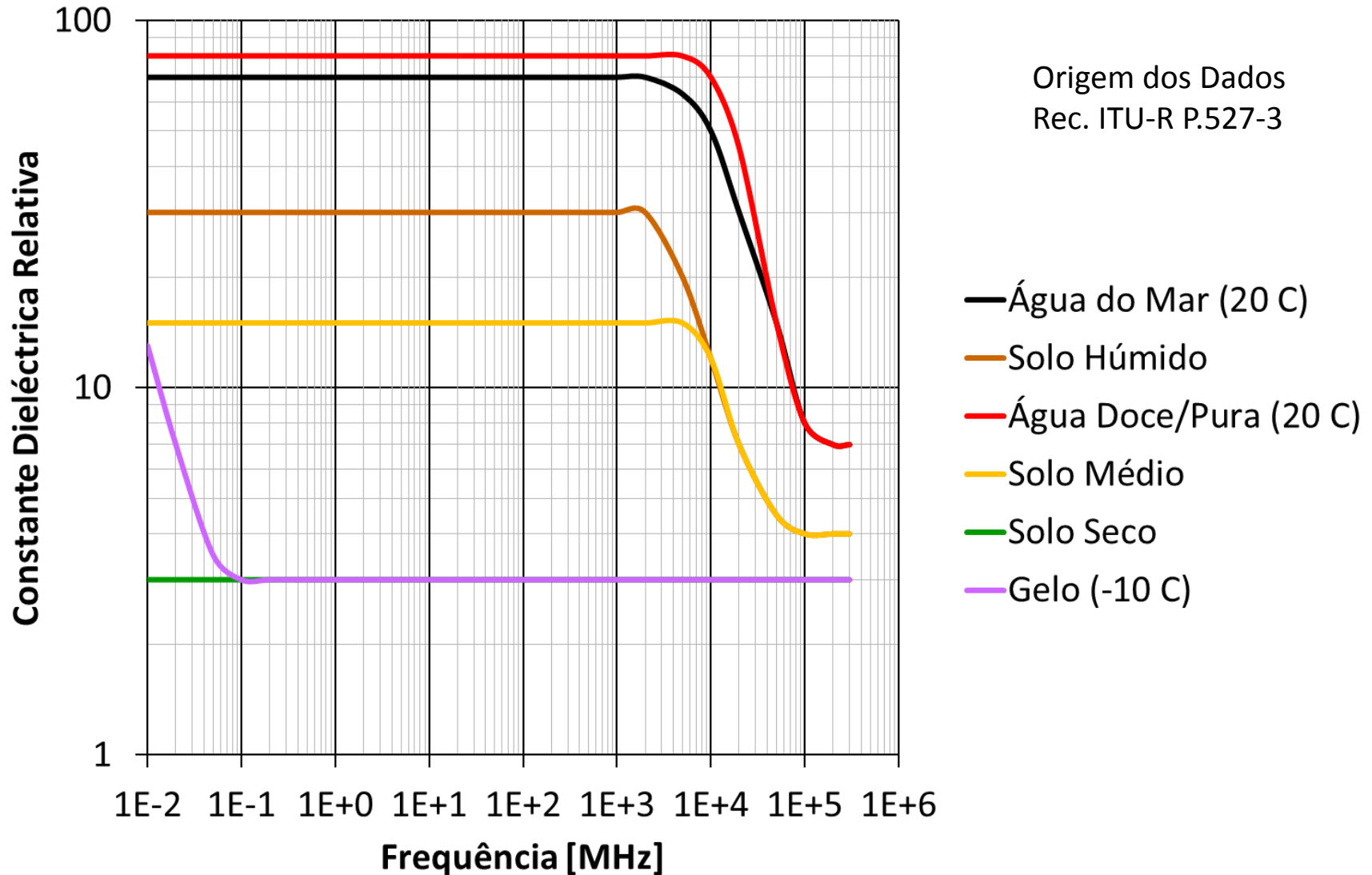
Material	Frequency	ϵ_r	$\tan \delta$ (25°C)
Alumina (99.5%)	10 GHz	9.5–10.	0.0003
Barium tetratitanate	6 GHz	37±5%	0.0005
Beeswax	10 GHz	2.35	0.005
Beryllia	10 GHz	6.4	0.0003
Ceramic (A-35)	3 GHz	5.60	0.0041
Fused quartz	10 GHz	3.78	0.0001
Gallium arsenide	10 GHz	13.	0.006
Glass (pyrex)	3 GHz	4.82	0.0054
Glazed ceramic	10 GHz	7.2	0.008
Lucite	10 GHz	2.56	0.005
Nylon (610)	3 GHz	2.84	0.012
Parafin	10 GHz	2.24	0.0002
Plexiglass	3 GHz	2.60	0.0057
Polyethylene	10 GHz	2.25	0.0004
Polystyrene	10 GHz	2.54	0.00033
Porcelain (dry process)	100 MHz	5.04	0.0078
Rexolite (1422)	3 GHz	2.54	0.00048
Silicon	10 GHz	11.9	0.004
Styrofoam (103.7)	3 GHz	1.03	0.0001
Teflon	10 GHz	2.08	0.0004
Titania (D-100)	6 GHz	96±5%	0.001
Vaseline	10 GHz	2.16	0.001
Water (distilled)	3 GHz	76.7	0.157

Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (10) 13/43

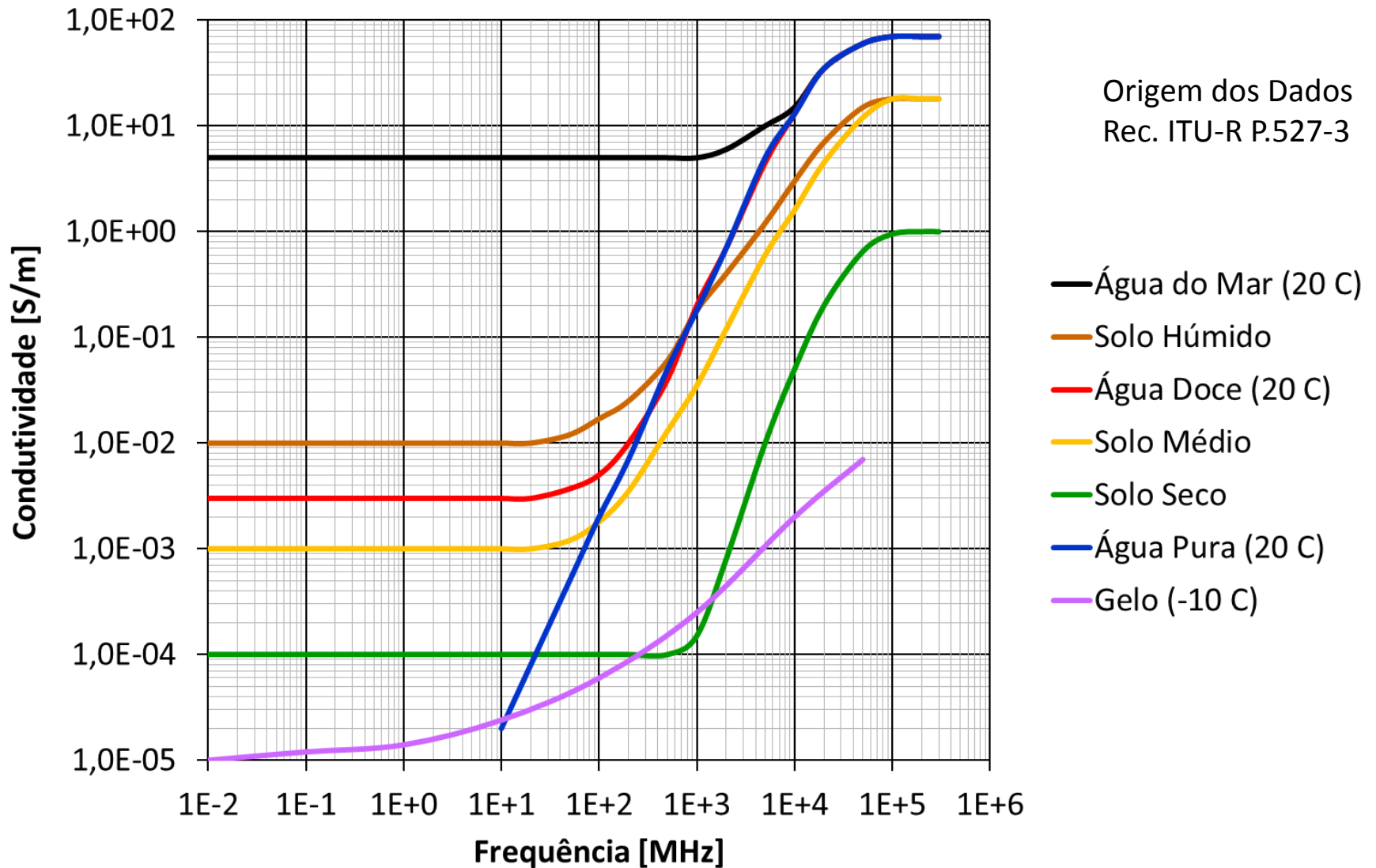
CONDUCTIVITIES FOR SOME MATERIALS

Material	Conductivity S/m (20°C)	Material	Conductivity S/m (20°C)
Aluminum	3.816×10^7	Nichrome	1.0×10^6
Brass	2.564×10^7	Nickel	1.449×10^7
Bronze	1.00×10^7	Platinum	9.52×10^6
Chromium	3.846×10^7	Sea water	3–5
Copper	5.813×10^7	Silicon	4.4×10^{-4}
Distilled water	2×10^{-4}	Silver	6.173×10^7
Germanium	2.2×10^6	Steel (silicon)	2×10^6
Gold	4.098×10^7	Steel (stainless)	1.1×10^6
Graphite	7.0×10^4	Solder	7.0×10^6
Iron	1.03×10^7	Tungsten	1.825×10^7
Mercury	1.04×10^6	Zinc	1.67×10^7
Lead	4.56×10^6		

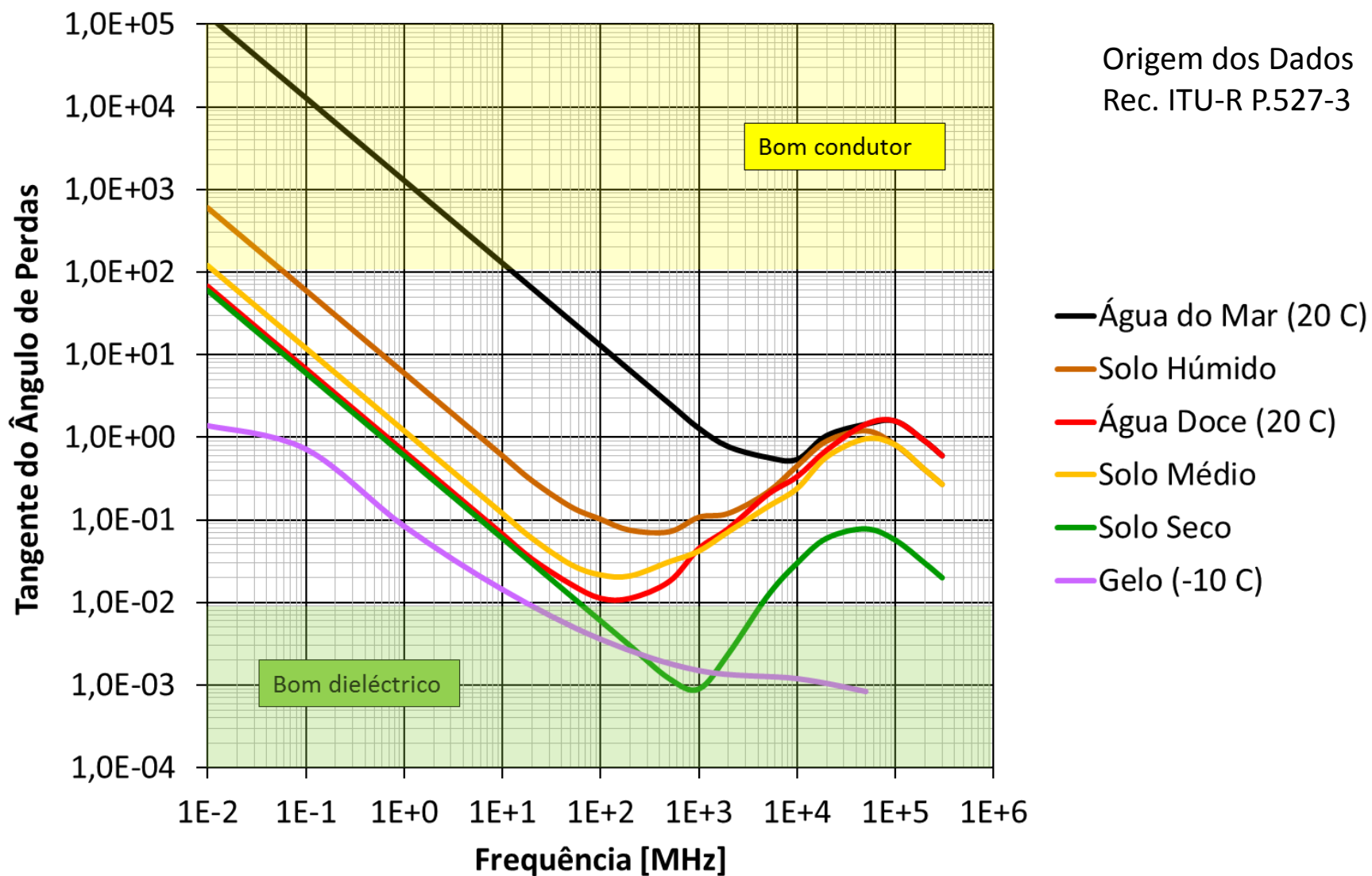
Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (11) 14/43



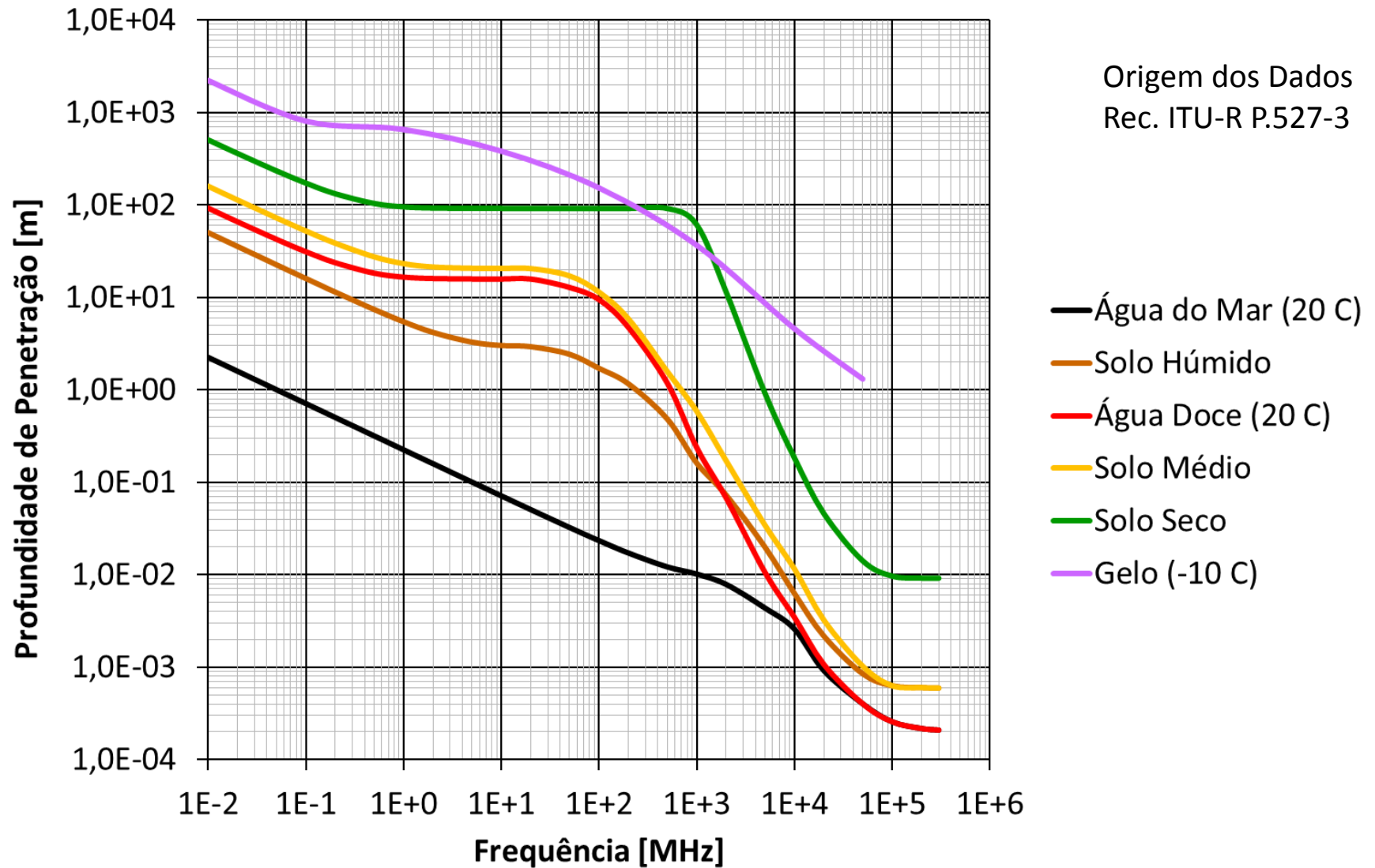
Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (12) 15/43



Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (13) 16/43

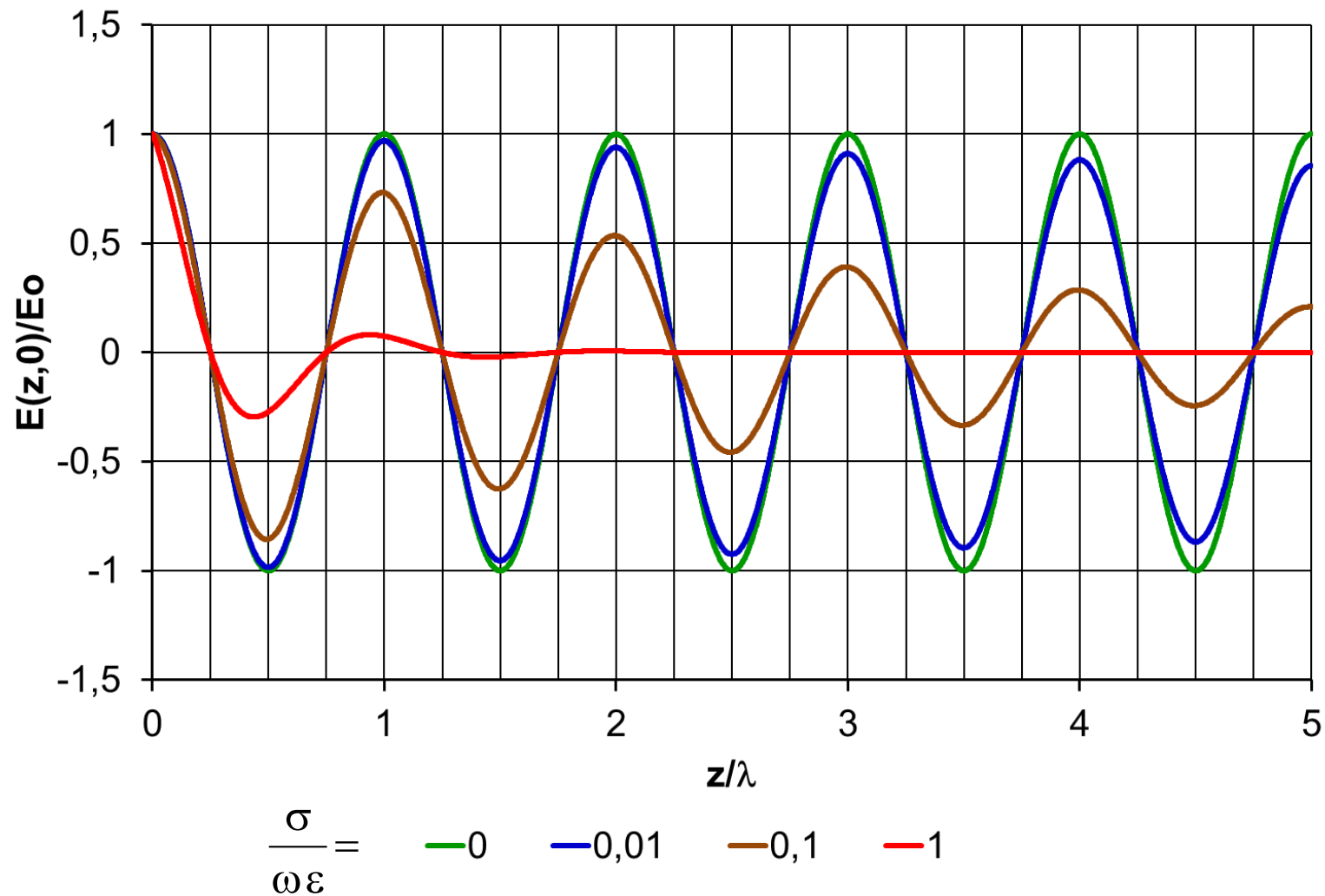


Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (14) 17/43



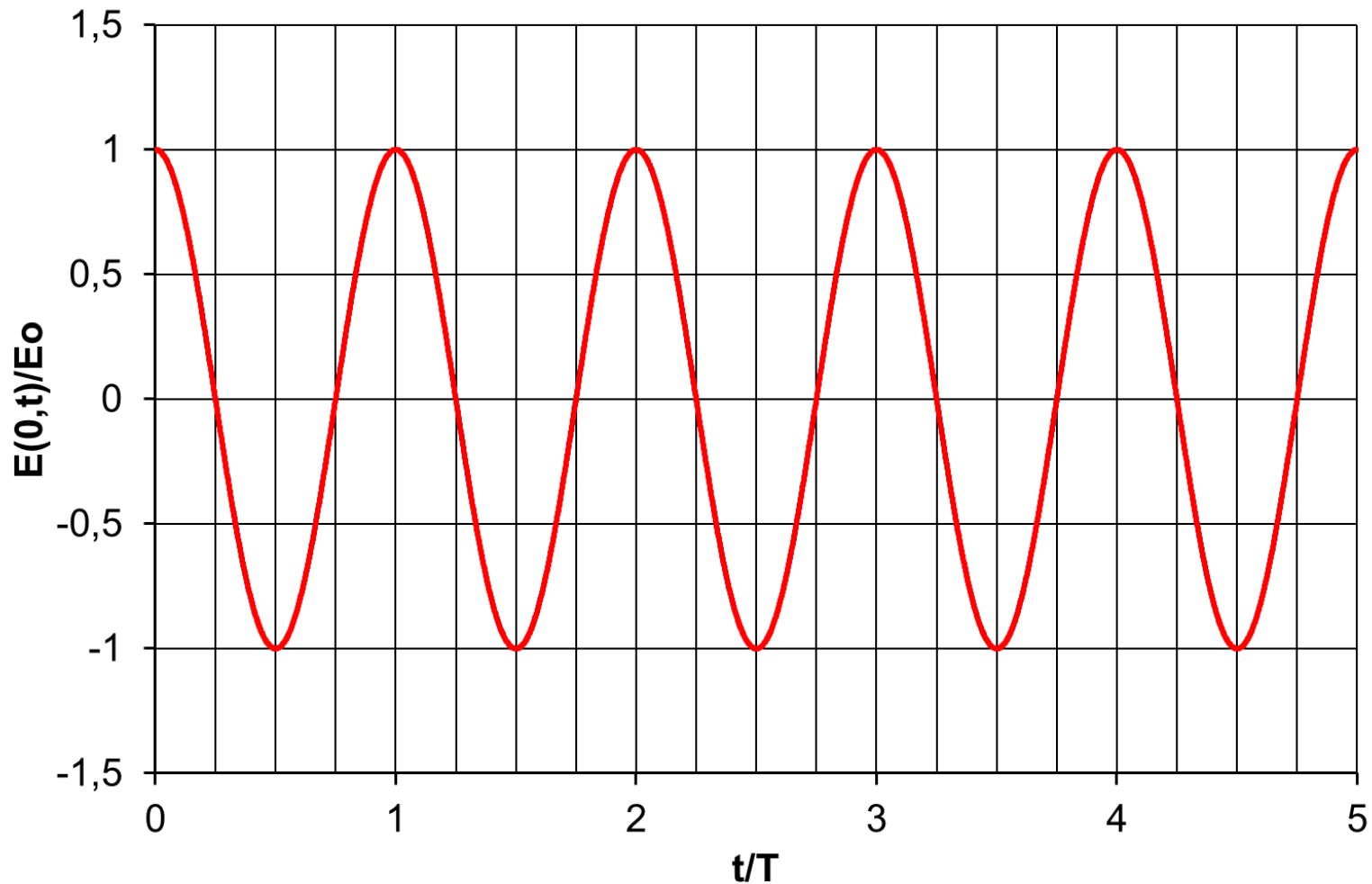
Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (15) 18/43

Exemplo (t=0) $E(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta)$ $\varepsilon = \varepsilon_0$ $f = 100 \text{ MHz}$
 $\mu = \mu_0$
 $\theta = 0$



Ondas Planas e Uniformes em Meios Ilimitados (16) 19/43

Exemplo ($z=0$) $E(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta)$ $\varepsilon = \varepsilon_0$ $f = 100 \text{ MHz}$
 $\mu = \mu_0$
 $\theta = 0$



Velocidades de Fase e de Grupo (1)

20/43

$$E(z,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

Grupo de 2 ondas de frequências (ligeiramente) diferentes $\Delta\omega \ll \omega_0$

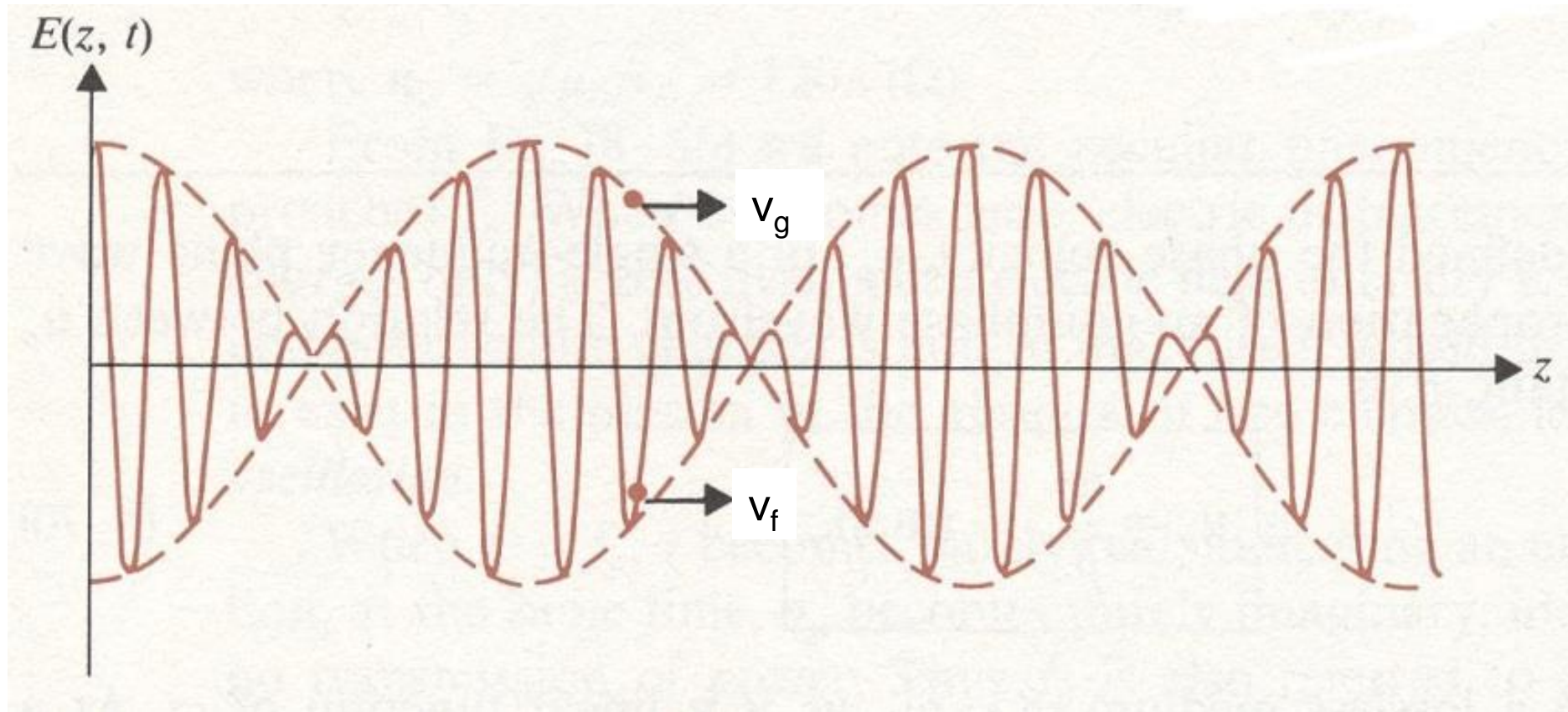
$$E(z,t) = E_0 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z] + E_0 \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z]$$

$$E(z,t) = 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$$

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\frac{\Delta\beta}{\Delta\omega}} \quad \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} v_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Velocidades de Fase e de Grupo (2)

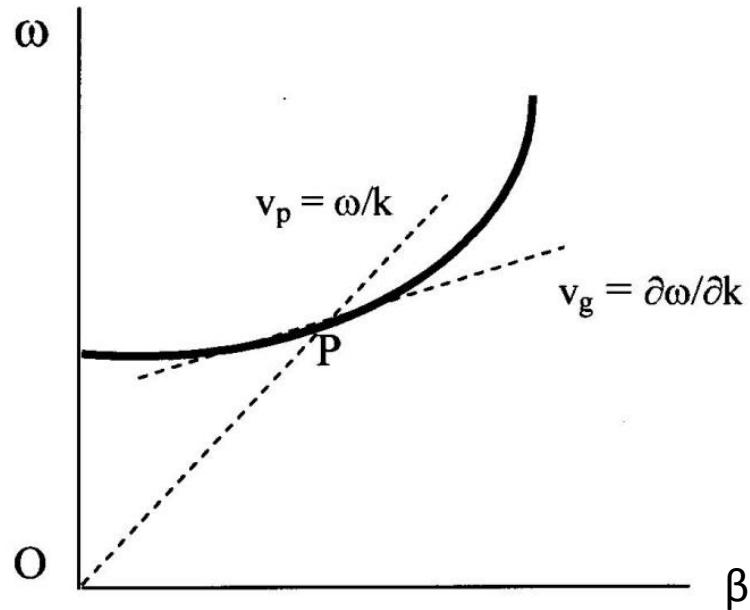
21/43



Velocidades de Fase e de Grupo (3)

22/43

Diagrama de dispersão (diagrama β - ω , ou diagrama de Brillouin)



No caso geral

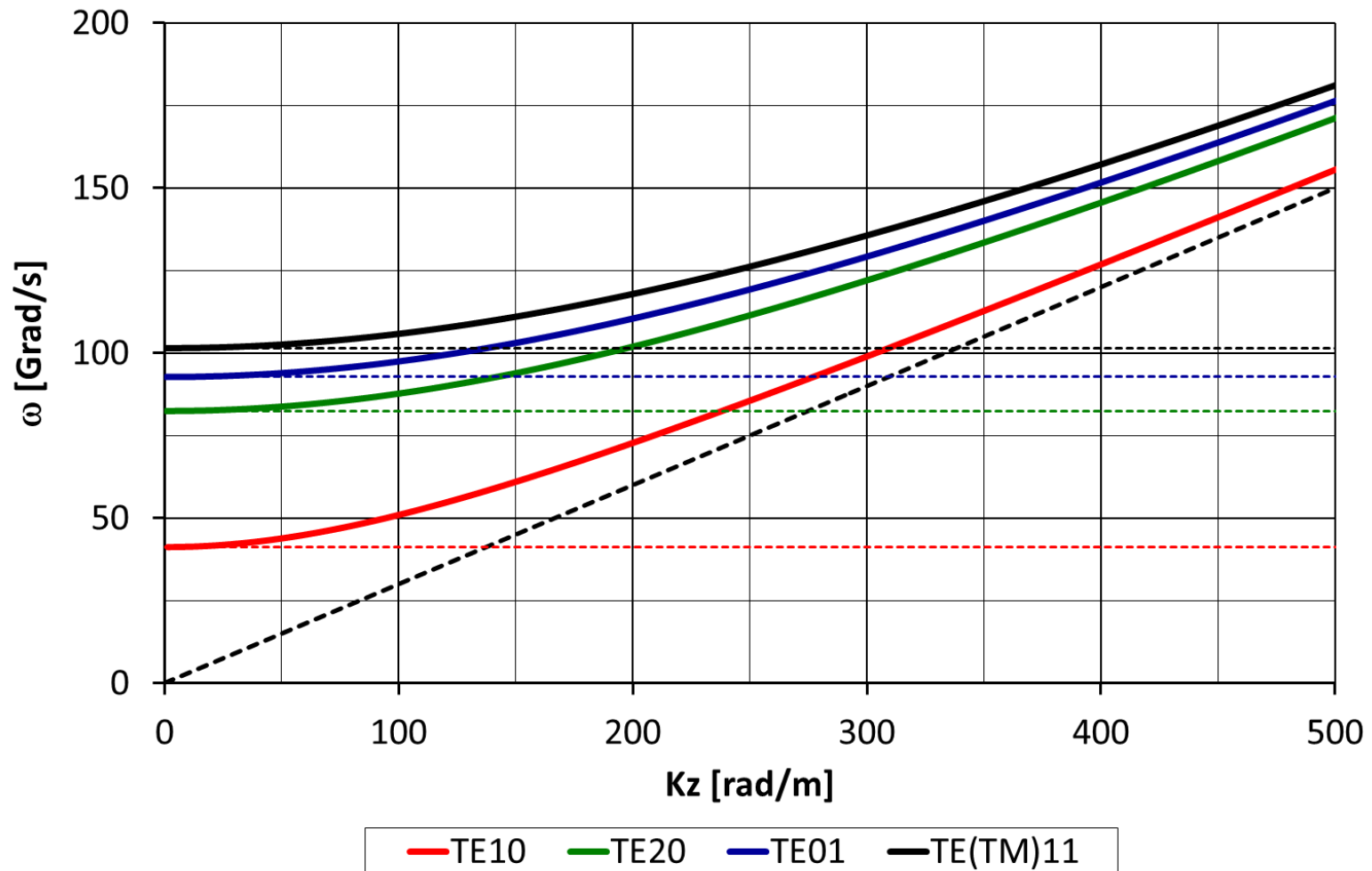
$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\beta_x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\omega}{\beta_y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\omega}{\beta_z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta_y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta_z} \hat{\mathbf{z}}$$

Velocidades de Fase e de Grupo (4)

23/43

Exemplo de diagrama de dispersão
Guia metálico de secção rectangular (WR90)



Para ondas planas em meios sem perdas (ou com fracas perdas)

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad v_f = v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

No caso geral dos meios com perdas

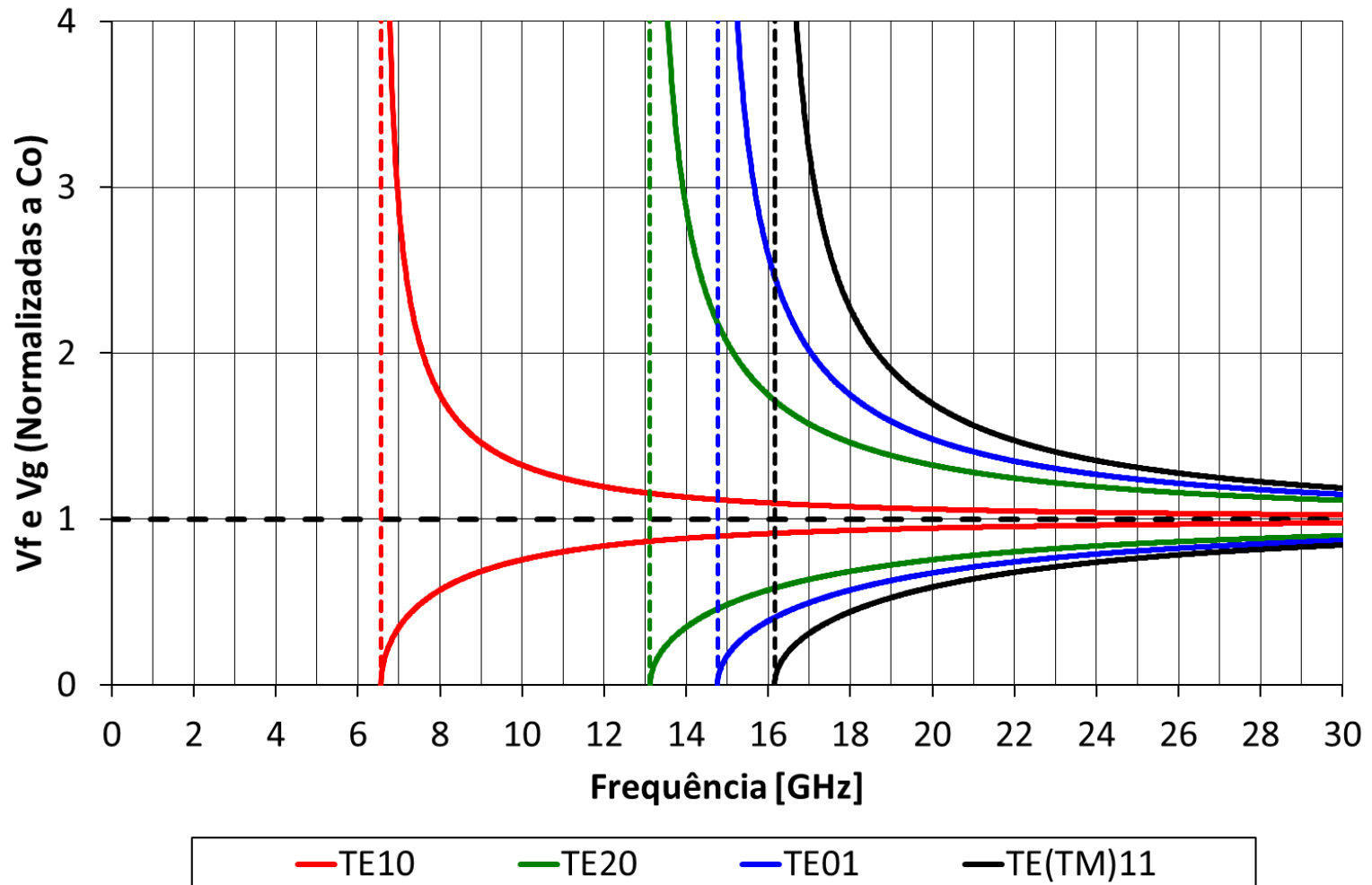
$$jk = \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

$v_f \neq v_g$ e dependem ambas da frequência (**meio dispersivo**)

Dispersão (2)

25/43

Exemplo de velocidades de fase e de grupo
Guia metálico de secção rectangular (WR90)



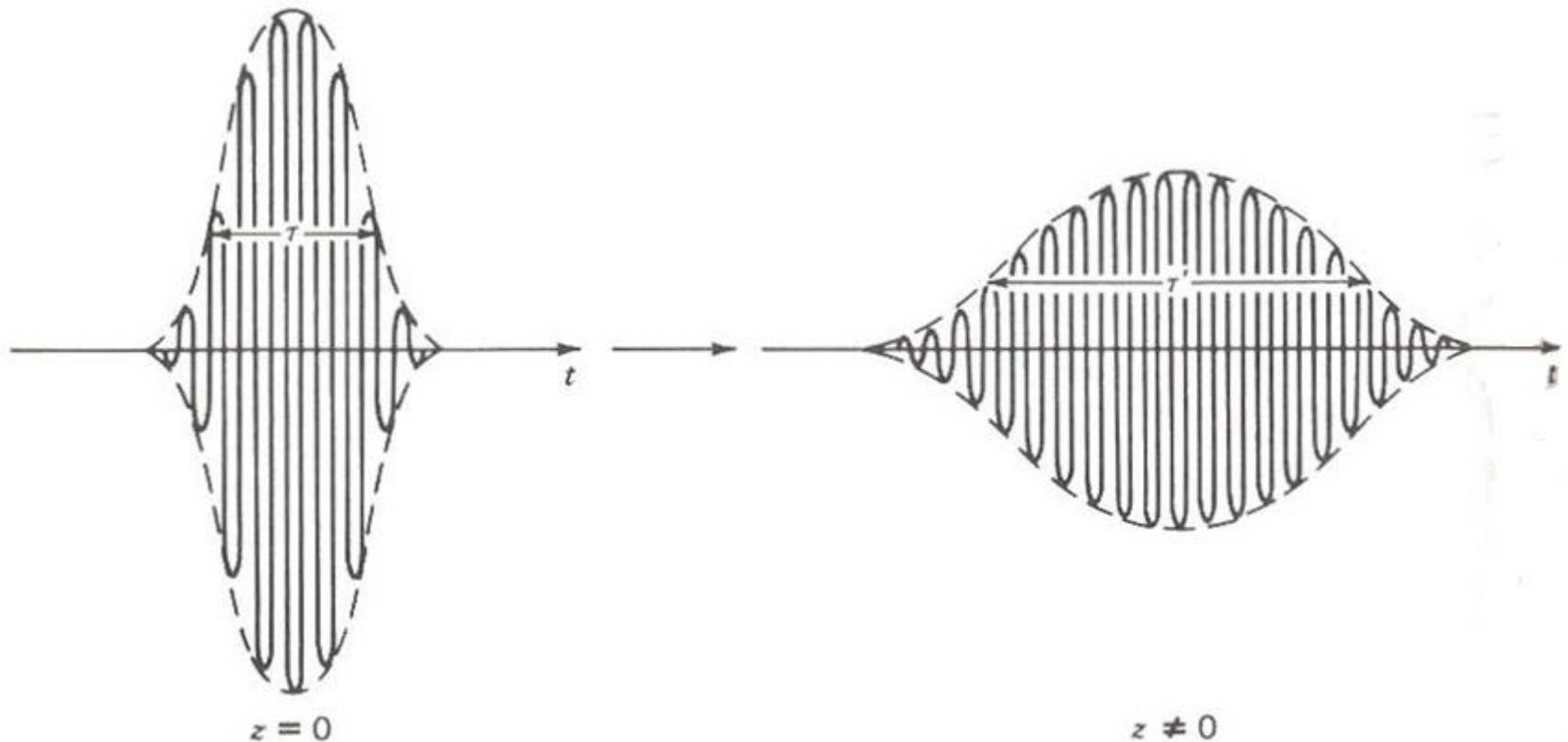
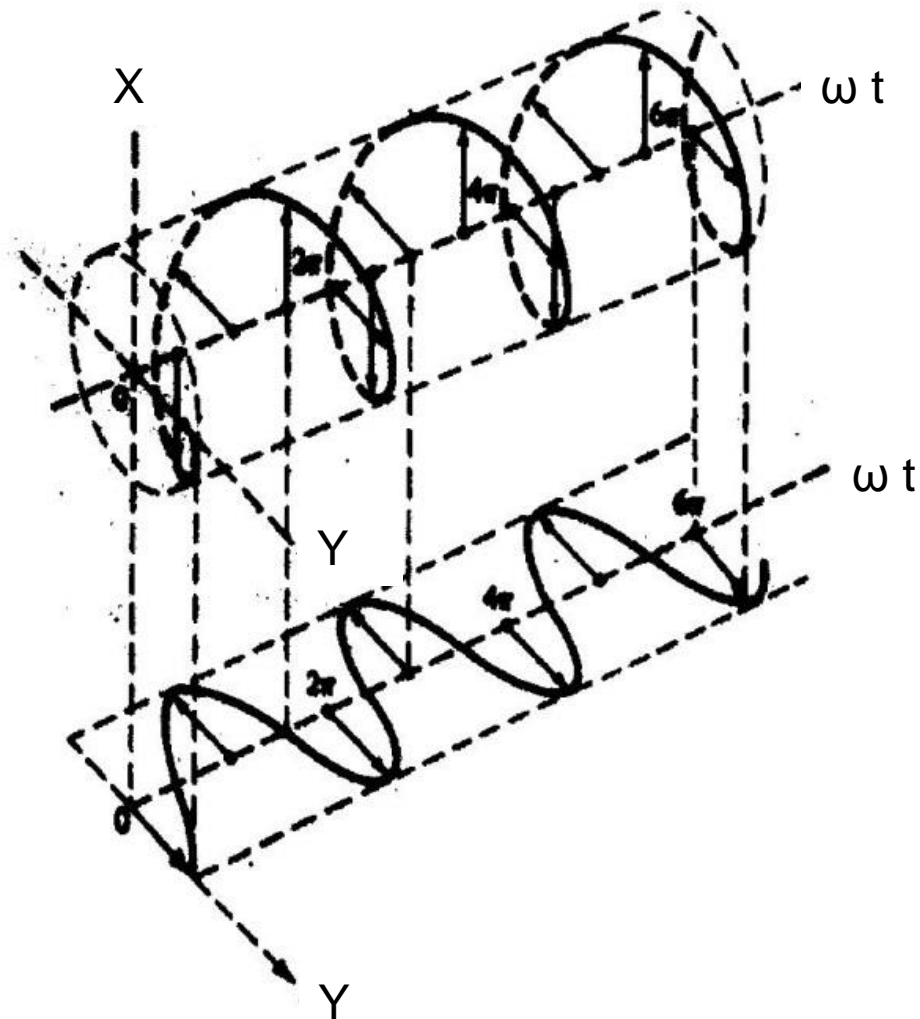


FIG. 8.16b Illustration of the spread of the modulated envelope of a pulse as it travels down a system with group dispersion.

Polarização (1)

27/43

$$\mathbf{E}(z,t) = E_1 \cos(\omega t - kz) \hat{x} + E_2 \cos(\omega t - kz + \Phi) \hat{y}$$

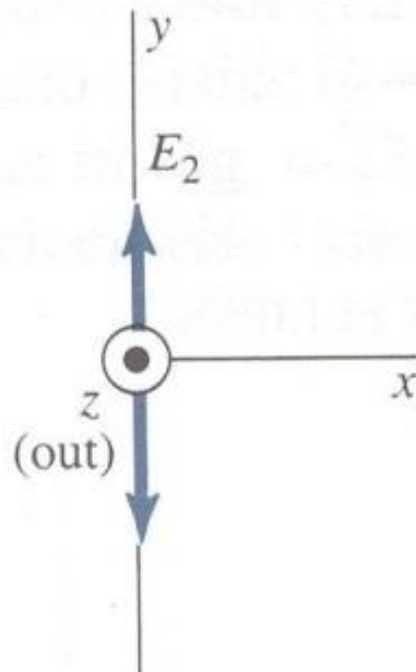


Polarização (2)

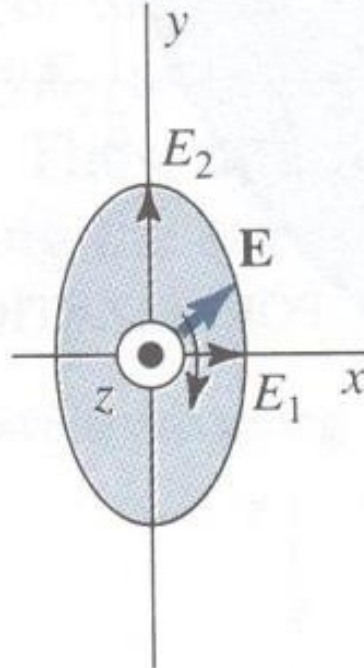
28/43

Curva de polarização é a figura geométrica descrita pela “ponta do vector campo elétrico” ao longo do tempo, num ponto do espaço (OE a propagar-se aproximando-se do observador)

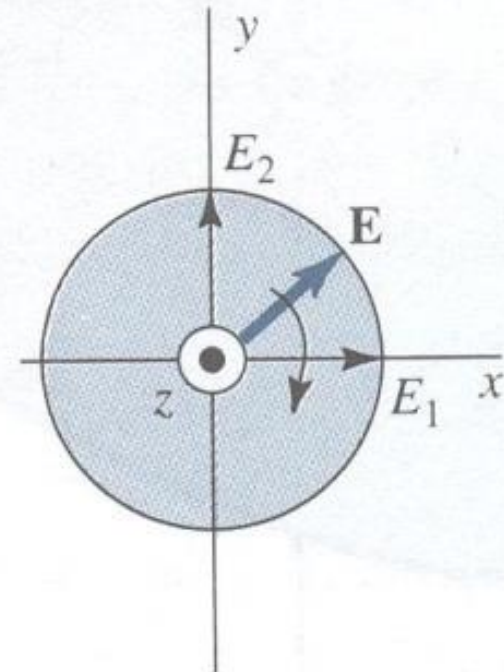
Linear
polarization



Elliptical
polarization



Circular
polarization



Polarização (3)

29/43

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_1}\right)\left(\frac{E_y}{E_2}\right)\cos\Phi = \sin^2\Phi$$

Equação da curva
(elipse) de polarização

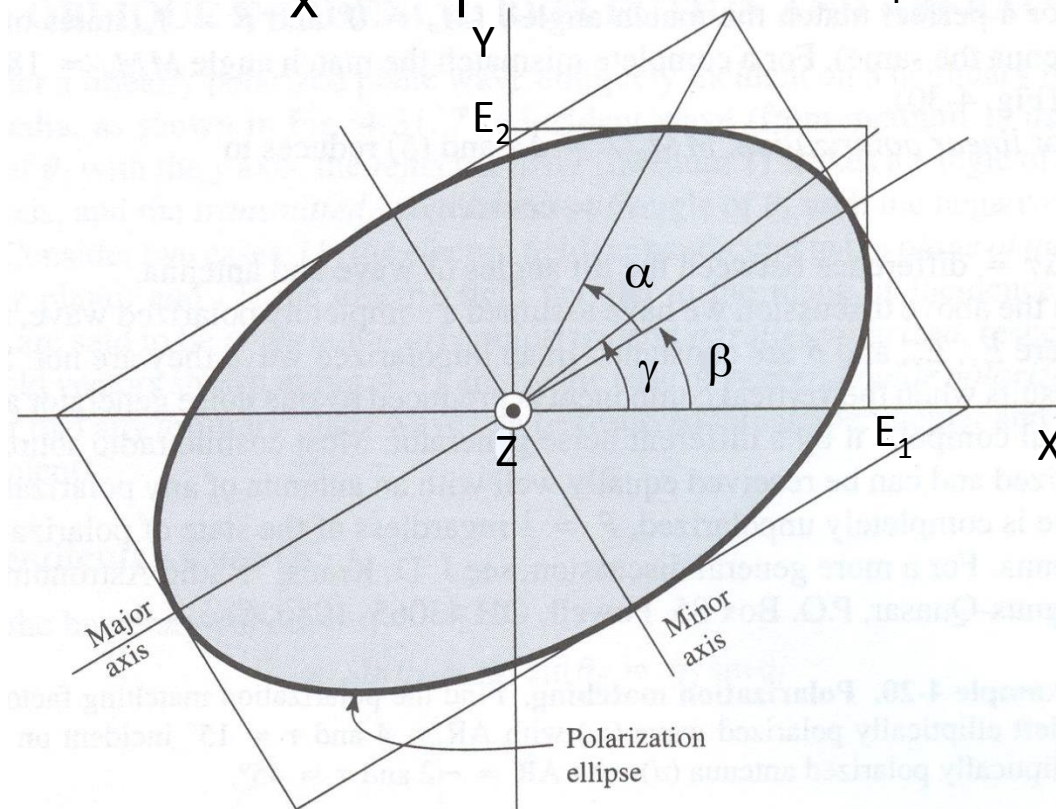
$$p = \frac{\bar{E}_y}{\bar{E}_x} = \frac{E_2}{E_1} e^{j\Phi} \quad \tan\gamma = \frac{E_2}{E_1}$$

p é a razão de polarização

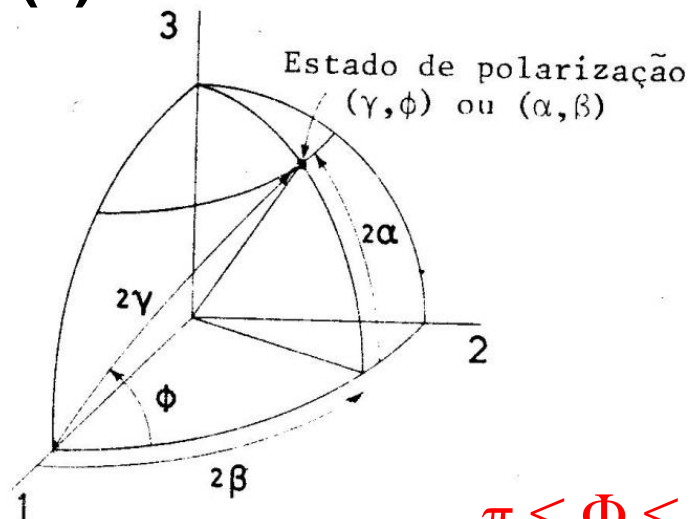
Estado de Polarização
 (α, β) ou (γ, Φ)

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 2\gamma = \cos 2\alpha \cos 2\beta \\ \tan \Phi = \frac{\tan 2\alpha}{\sin 2\beta} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\alpha = \sin 2\gamma \sin \Phi \\ \tan 2\beta = \tan 2\gamma \cos \Phi \end{array} \right.$$



Esfera de Poincaré

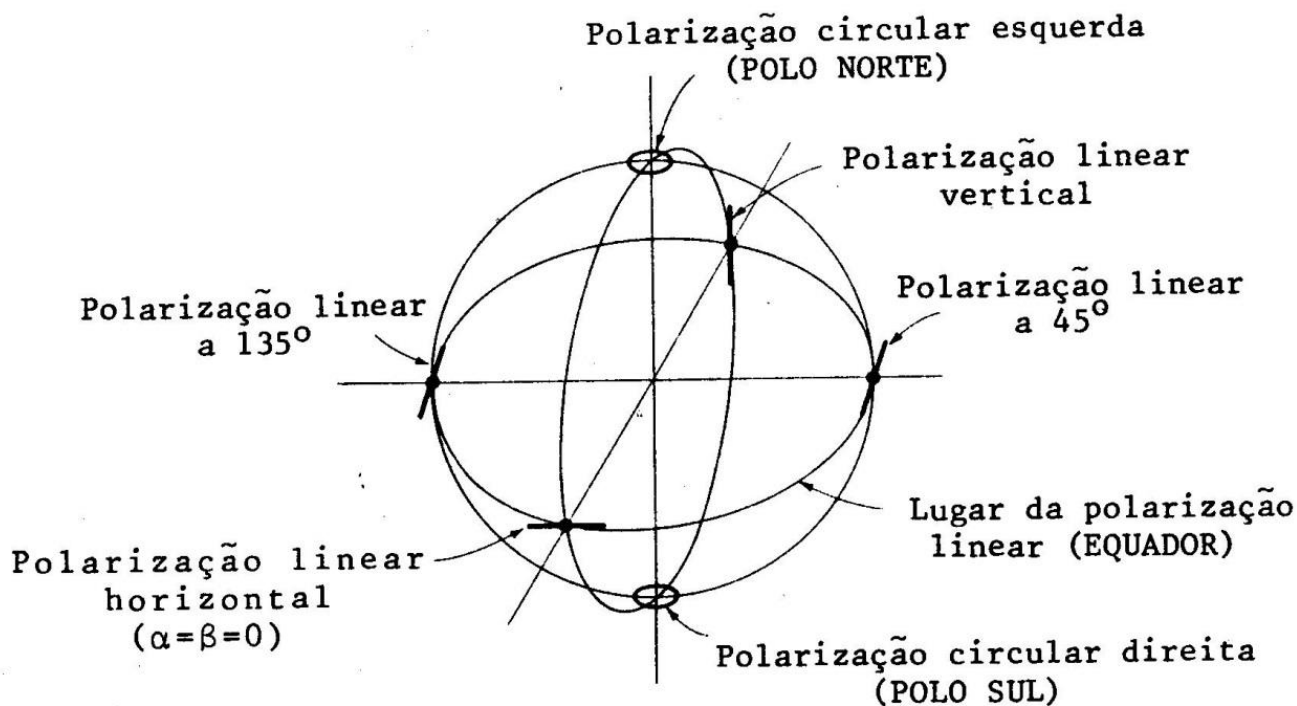


$$-\pi \leq \Phi \leq \pi$$

$$0 \leq \gamma \leq \pi/2$$

$$-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$$

$$0 \leq \beta \leq \pi$$



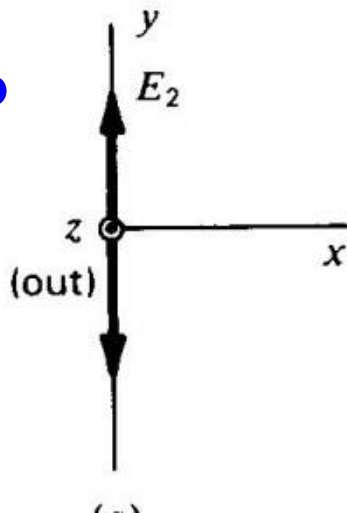
Casos Notáveis

$$\Phi = 0, \pi$$

$$E_y = \pm \frac{E_2}{E_1} E_x$$

Infinidade de polarizações lineares (todas as inclinações $\gamma \in [0, \pi/2]$)

**Exemplo
PV**

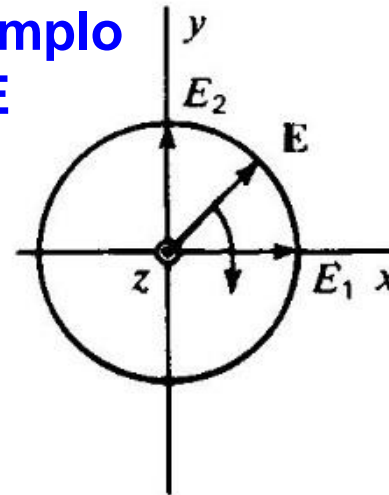


$$E_2 = E_1 = E \quad \text{e} \quad \Phi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$E_x^2 + E_y^2 = E^2$$

Duas polarizações circulares (PCE, PCD)

**Exemplo
PCE**

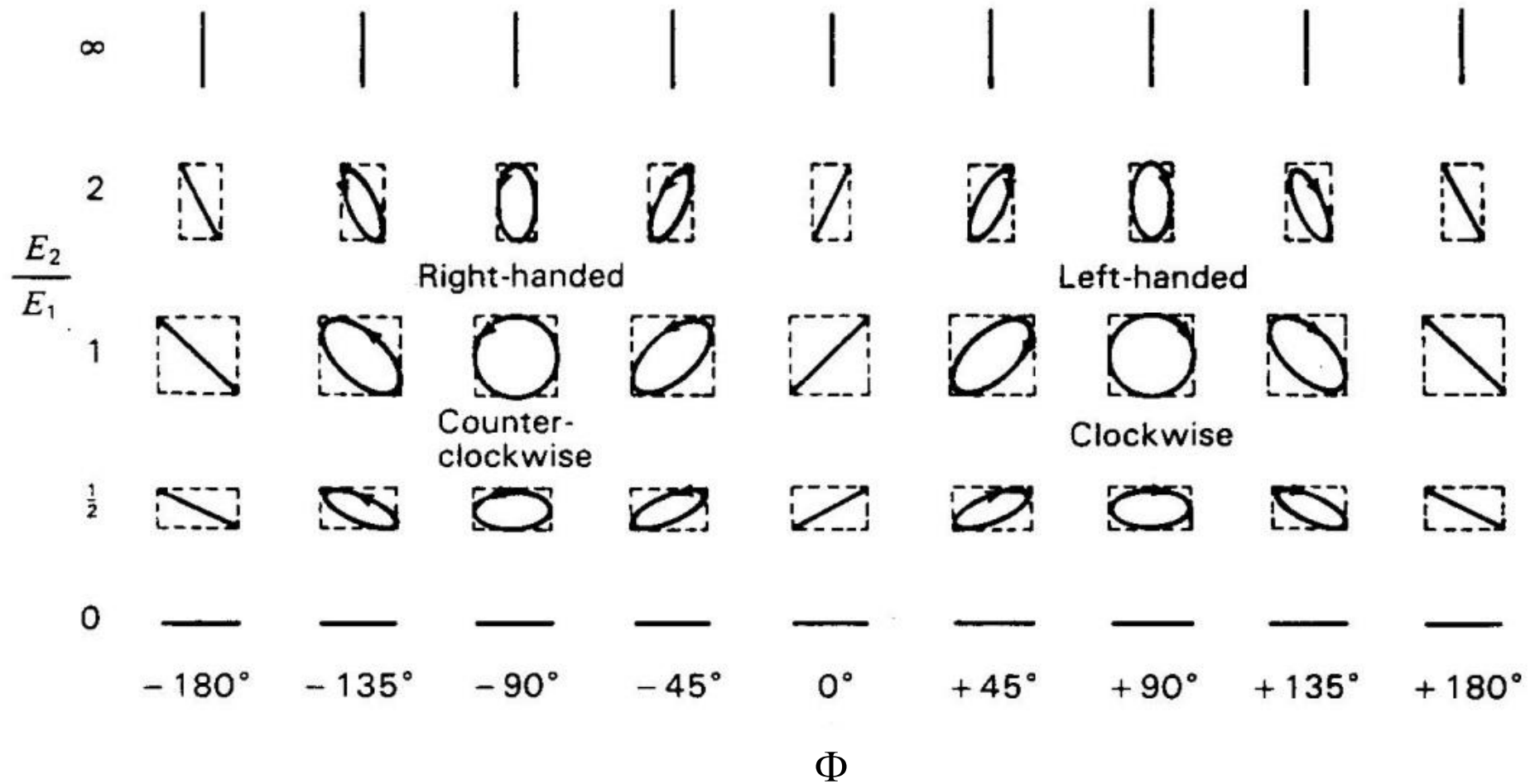


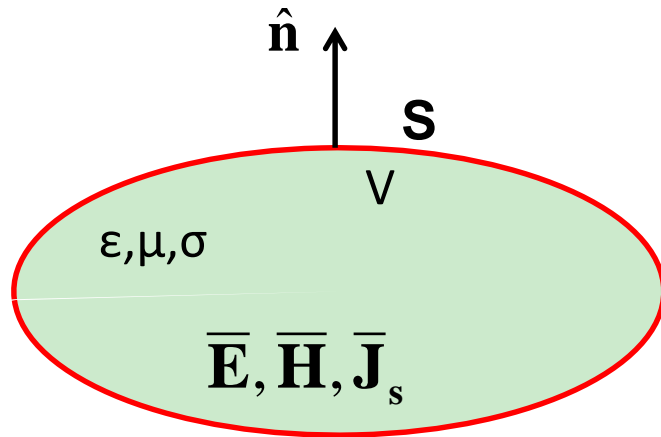
$\Phi > 0$, PCE
Rotação no sentido retrogrado

$\Phi < 0$, PCD
Rotação no sentido directo

Polarização (6)

32/43





$$\bar{\mathbf{D}} = \epsilon \bar{\mathbf{E}}$$

$$\epsilon = \epsilon_r - j\epsilon_i \quad \epsilon_r, \epsilon_i \geq 0$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mu \bar{\mathbf{H}}$$

$$\mu = \mu_r - j\mu_i \quad \mu_r, \mu_i \geq 0$$

A partir das (duas primeiras) equações de Maxwell

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon \bar{\mathbf{E}}$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}}_s + \sigma \bar{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \bar{\mathbf{H}}$$

do Teorema da Divergência

$$\int_V \nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) dV = \oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S}$$

e da identidade vetorial $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) = (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) \cdot \bar{\mathbf{H}}^* - (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}^*) \cdot \bar{\mathbf{E}}$

obtém-se – **Teorema de Poynting**

$$-\frac{1}{2} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{J}}_s^*) dV = \frac{1}{2} \oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} + \frac{\sigma}{2} \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV$$
$$+ \frac{\omega}{2} \int_V \left(\epsilon_i |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \mu_i |\bar{\mathbf{H}}|^2 \right) dV + j \frac{\omega}{2} \int_V \left(\mu_r |\bar{\mathbf{H}}|^2 - \epsilon_r |\bar{\mathbf{E}}|^2 \right) dV$$

Definem-se vetor de Poynting (**S**) e vetor complexo de Poynting (**S^c**)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad \mathbf{S}^c = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*)$$

$$P_s = P_o + P_\ell + j 2 \omega (W_m - W_e)$$

P_s – Valor médio no tempo da potência (complexa) fornecida pelas fontes

P_o - Valor médio no tempo do fluxo de potência para fora de S

P_ℓ – Valor médio no tempo da potência dissipada em V

W_m – Valor médio no tempo da energia magnética armazenada em V

W_e – Valor médio no tempo da energia eléctrica armazenada em V

$$P_s = -\frac{1}{2} \int_V (\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{J}}_s^*) dV \quad P_o = \frac{1}{2} \oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{S}^c \cdot d\mathbf{S}$$

$$P_\ell = \frac{\sigma}{2} \int_V |\bar{\mathbf{E}}|^2 dV + \frac{\omega}{2} \int_V \left(\epsilon_i |\bar{\mathbf{E}}|^2 + \mu_i |\bar{\mathbf{H}}|^2 \right) dV$$

$$W_m = \int_V \mu_r \frac{|\bar{\mathbf{H}}|^2}{4} dV \quad W_e = \int_V \epsilon_r \frac{|\bar{\mathbf{E}}|^2}{4} dV$$

Energia e Potência (4)

36/43

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt = \text{Re}(S^c) = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{E} \times \bar{H}^*)$$

No caso das ondas planas em meios sem perdas

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{E} \times \bar{H}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{E} \times (\hat{n} \times \frac{\bar{E}^*}{Z})] = S_0 \hat{n}$$

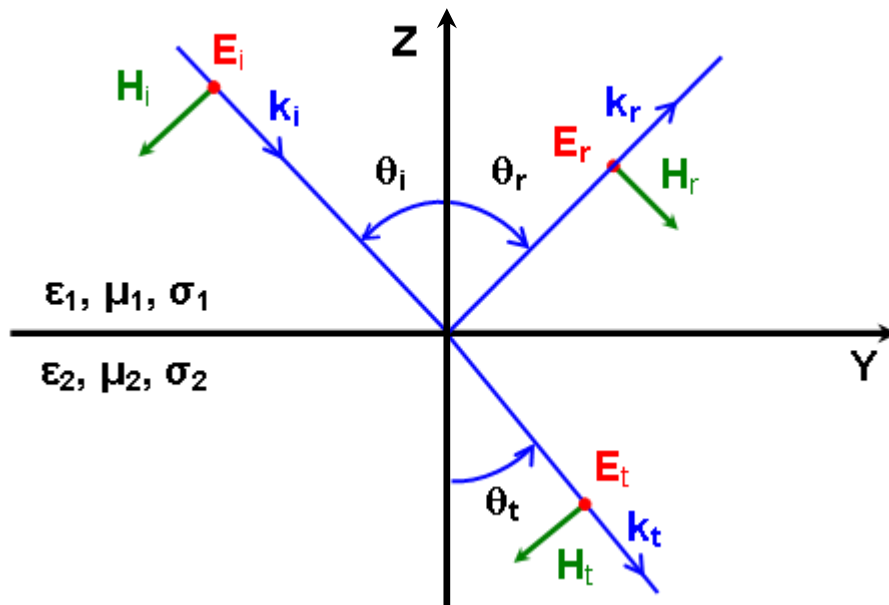
$$S_0 = \frac{E_0^2}{2Z} = \frac{ZH_0^2}{2} \text{ W.m}^{-2}$$

$$E_0 = Z H_0 \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ Ohm}$$

Reflexão e Refração em Interfaces Planas (1)

37/43

Polarização TE (Perpendicular, Horizontal)



$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{E}_0 \hat{\mathbf{x}}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{E}}}{Z} = \bar{H}_{0y} \hat{\mathbf{y}} + \bar{H}_{0z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \sin \theta_i \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}}$$

cnf (z=0)

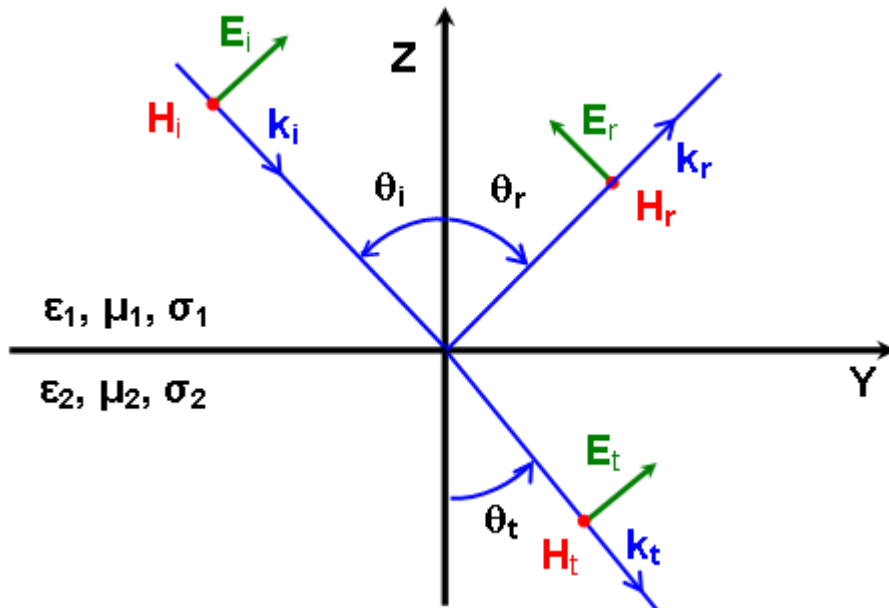
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \bar{E}_{0i} + \bar{E}_{0r} = \bar{E}_{0t} \\ 2 \quad \bar{H}_{0yi} + \bar{H}_{0yr} = \bar{H}_{0yt} \\ 3 \quad \mu_1 (\bar{H}_{0zi} + \bar{H}_{0zr}) = \mu_2 \bar{H}_{0zt} \end{array} \right.$$

$$R_{TE} = \frac{\bar{E}_{0r}}{\bar{E}_{0i}} = \frac{\cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

Reflexão e Refração em Interfaces Planas (2)

38/43

Polarização TM (Paralela, Vertical)



$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

$$\bar{H} = \bar{H}_0 \hat{x}$$

$$\bar{E} = Z(-\hat{n} \times \bar{H}) = \bar{E}_{0y} \hat{y} + \bar{E}_{0z} \hat{z}$$

$$\hat{n}_i = \sin \theta_i \hat{y} - \cos \theta_i \hat{z}$$

cnf (z=0)

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \bar{H}_{0i} + \bar{H}_{0r} = \bar{H}_{0t} \\ 2 \quad \bar{E}_{0yi} + \bar{E}_{0yr} = \bar{E}_{0yt} \\ 3 \quad \epsilon_1 (\bar{E}_{0zi} + \bar{E}_{0zr}) = \epsilon_2 \bar{E}_{0zt} \end{array} \right.$$

$$R_{TM} = \frac{\bar{H}_{0r}}{\bar{H}_{0i}} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_{21}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_{21}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{21}^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\text{Leis de Snell} \left\{ \begin{array}{l} \theta_r = \theta_i \\ n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \end{array} \right. \quad \sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_{21}} \quad n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$T_{\text{TE}} = 1 + R_{\text{TE}} \quad T_{\text{TM}} = 1 + R_{\text{TM}}$$

Meios sem perdas

$$n_{21} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_{r2} \epsilon_{r2}}{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Meios com Perdas

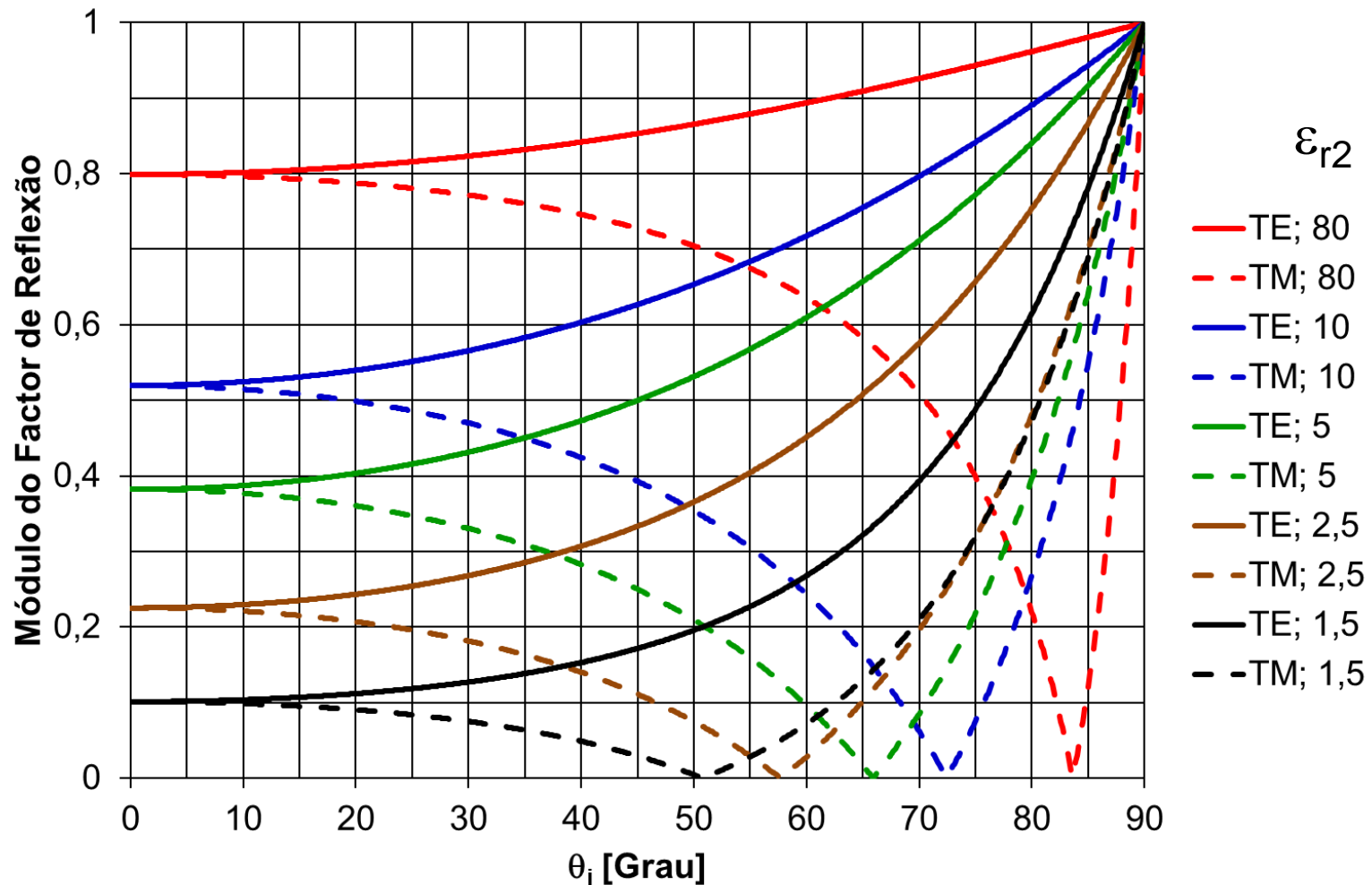
$$n_{21} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 (\sigma_2 + j\omega \epsilon_2)}{\mu_1 (\sigma_1 + j\omega \epsilon_1)}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\sigma + j\omega \epsilon}}$$

Reflexão e Refração em Interfaces Planas (4)

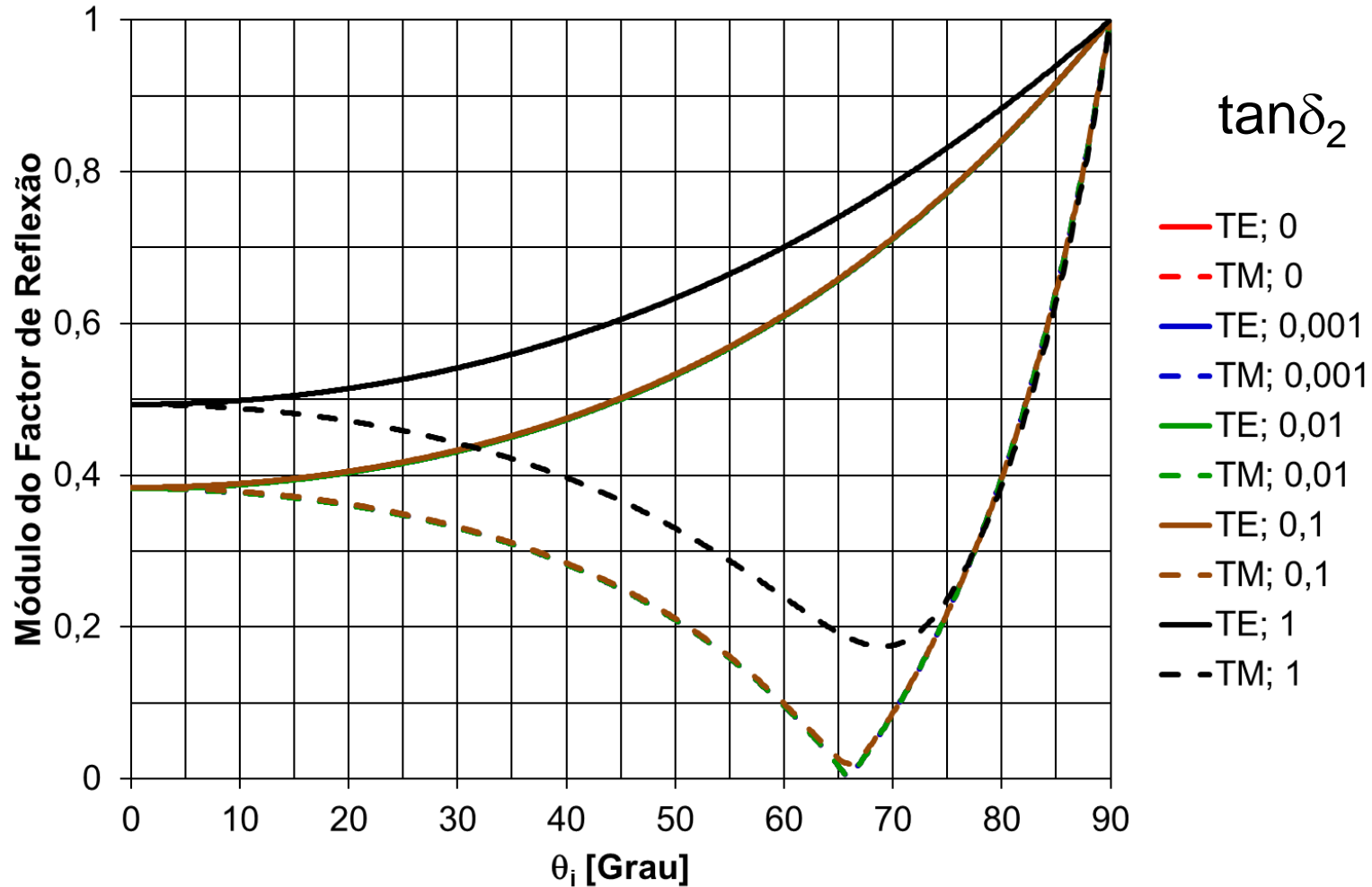
40/43

Factores de Reflexão [Meio 1 ar, meio 2 ($\underline{\epsilon}_{r2}$, $\mu_2=\mu_0$, $\sigma_2=0$)]




41/43

Factores de Reflexão [Meio 1 ar, meio 2 ($\epsilon_{r2}=5$, $\mu_2=\mu_0$, $\underline{\sigma}_2$)]



Transmissão Total ($R_T = 0$)

TE  $n_{21}=1$ (só um meio)

TM  $\cos\theta_{iB} = \frac{1}{\sqrt{n_{21}^2 + 1}}$ Ângulo de Brewster

Reflexão Total ($|R_T| = 1$)

$$\sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{n_{21}} \quad n_{21} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} < 1 \quad \epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$$

$$\sin\theta_{iL} = n_{21}$$

Meio 2 Condutor Perfeito ($\sigma_2 = \infty$)

$$n_{21} = \infty \rightarrow R_{TM} = 1 \quad \text{e} \quad R_{TE} = -1$$

Reflexão e Refração em Interfaces Planas (7)

43/43

Exemplo – Reflexão Total

Meio 1: Água ($n_1 \approx 1,33$) Meio 2: Ar ($n_2 = 1$) $\theta_{\text{lim}} \approx \sin^{-1}(1/1,33) \approx 48,7^\circ$

