2. Modelos Entrada/saída e Modelos de Estado

Objetivo: *No final deste módulo, os alunos deverão ser capazes de reconhecer as duas grandes classes de modelos entrada/saída e estado e converter um no outro.*

Bibliografia: *Lemos, Controlo no Espaço de Estados, Cap. 2*

Egeland e Gravdahl, Cap. 1

Sugere-se também para modelos discretos e aplicações à computação:

J. Hellerstein, Y. Diao, S. Parekh and D. Tilbury (2004). *Feedback control of computing systems*. Wiley Interscience.

Sistemas, sinais e diagramas de blocos

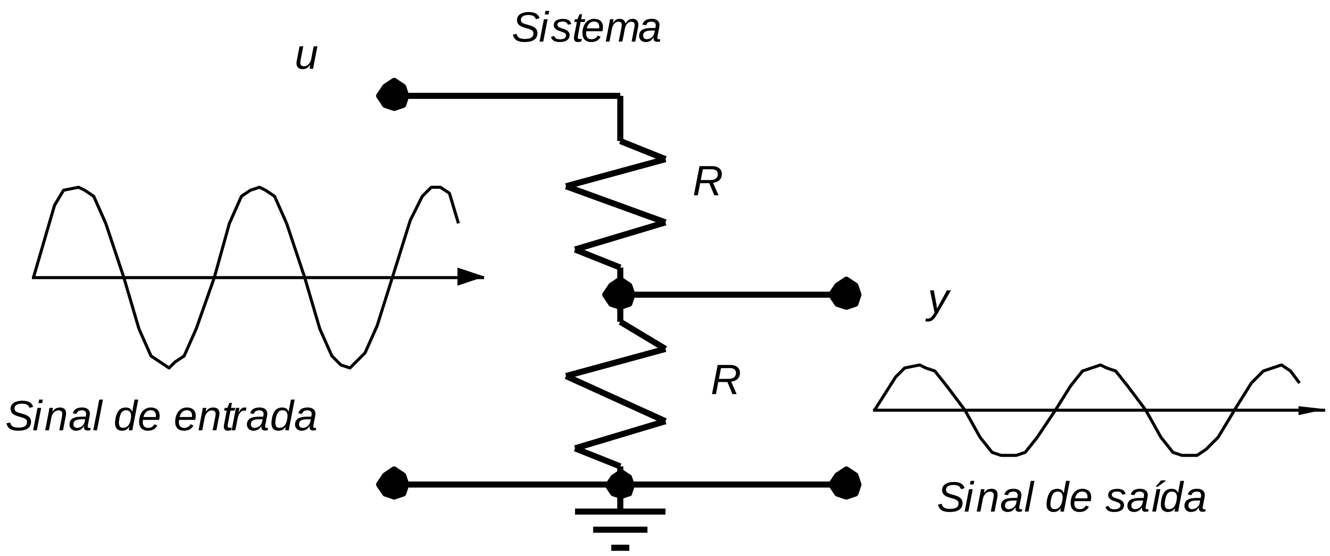
Fisicamente, um sistema é um conjunto de elementos que interagem entre si e com o meio exterior.

Um sinal é uma função do tempo.

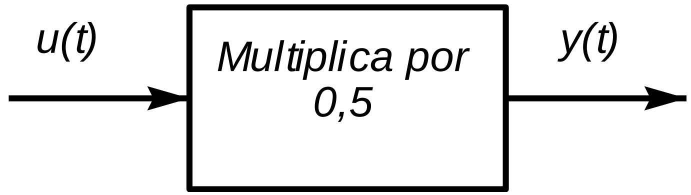
Matematicamente, os sistemas são descritos como operadores que transformam os sinais impostos pelo mundo exterior ao sistema noutros sinais impostos pelo sistema ao mundo exterior.

Isto dito assim é horrorosamente abstrato pelo que vamos ver dois exemplos.

Exemplo: Um divisor de tensão



Representação em termos de sistema:



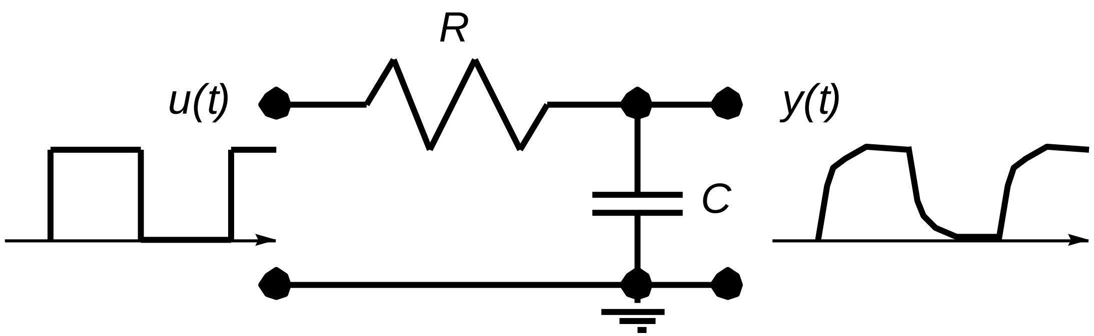
O divisor de tensão “transforma” o sinal de tensão à entrada $u(t)$ no sinal de tensão à saída, $y(t)$.

Esta transformação corresponde à operação matemática de multiplicar a entrada por $0,5$:

$$y(t) = 0,5u(t)$$

Para calcular a saída no instante genérico t apenas precisamos da entrada no mesmo instante. O sistema diz-se **estático**.

Exemplo de um sistema: Circuito RC

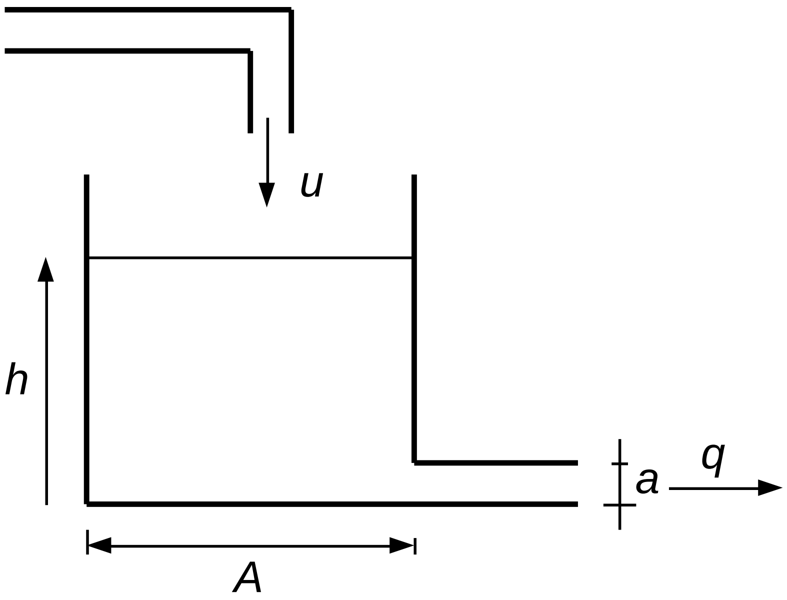


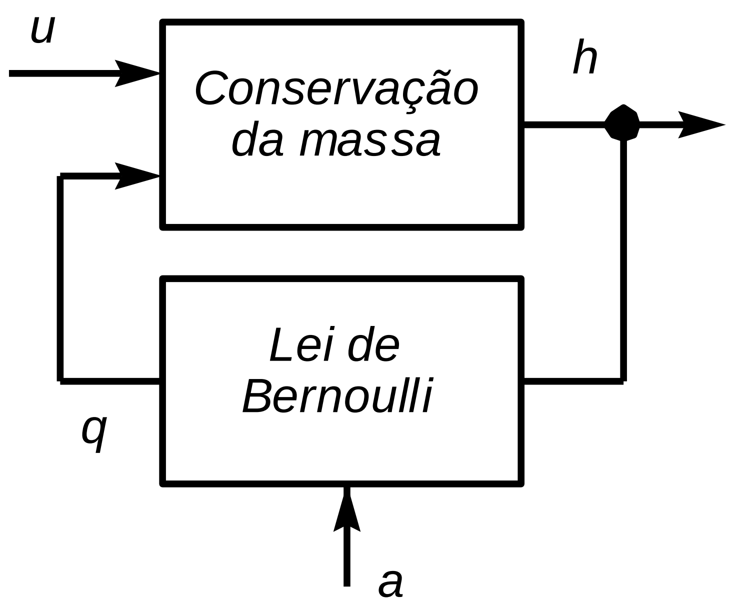
Representação em termos de sistema:

$$RC\,\frac{dy}{dt} = -y + u \qquad y(0) = y_0$$

Neste caso o sistema é dinâmico: A saída em t depende do passado.

Exemplo com múltiplos blocos: Tanque





Conservação da massa: $A\frac{dh}{dt} = u(t) - q(t)$

Lei de Bernoulli: $q = a\sqrt{2gh}$

Entradas: Caudal de entrada u; Área da abertura de saída a

Saída: Nível h, caudal de saída q

Podemos considerar o tanque como um sistema em que a entrada que podemos manipular é u, há uma entrada de perturbação a (imposta por outros sistemas) e a saída é o nível h.

Mas isto não é necessariamente sempre assim: Se uma entrada é manipulada ou uma perturbação, e qual o sinal de saída depende dos objetivos do sistema.

Como escrever sistematicamente as equações que traduzem as operações efetuadas pelos blocos nos sinais?

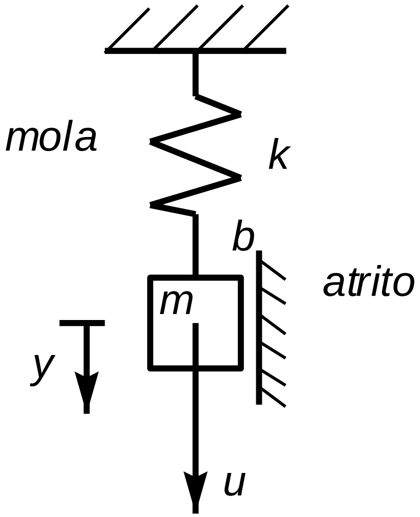
Tempo contínuo:

- Equação diferencial de ordem n
- Modelo de estado (sistema de n eqs. Diferenciais de 1ª ordem)

Tempo discreto:

- Equação de diferenças de ordem n
- Modelo de estado (sistema de n eqs de diferenças de 1ª ordem)

Exemplo em tempo contínuo: Massa oscilante



Como reage a mola à força externa u?

A mola atinge um ponto de equilíbrio devido ao peso.

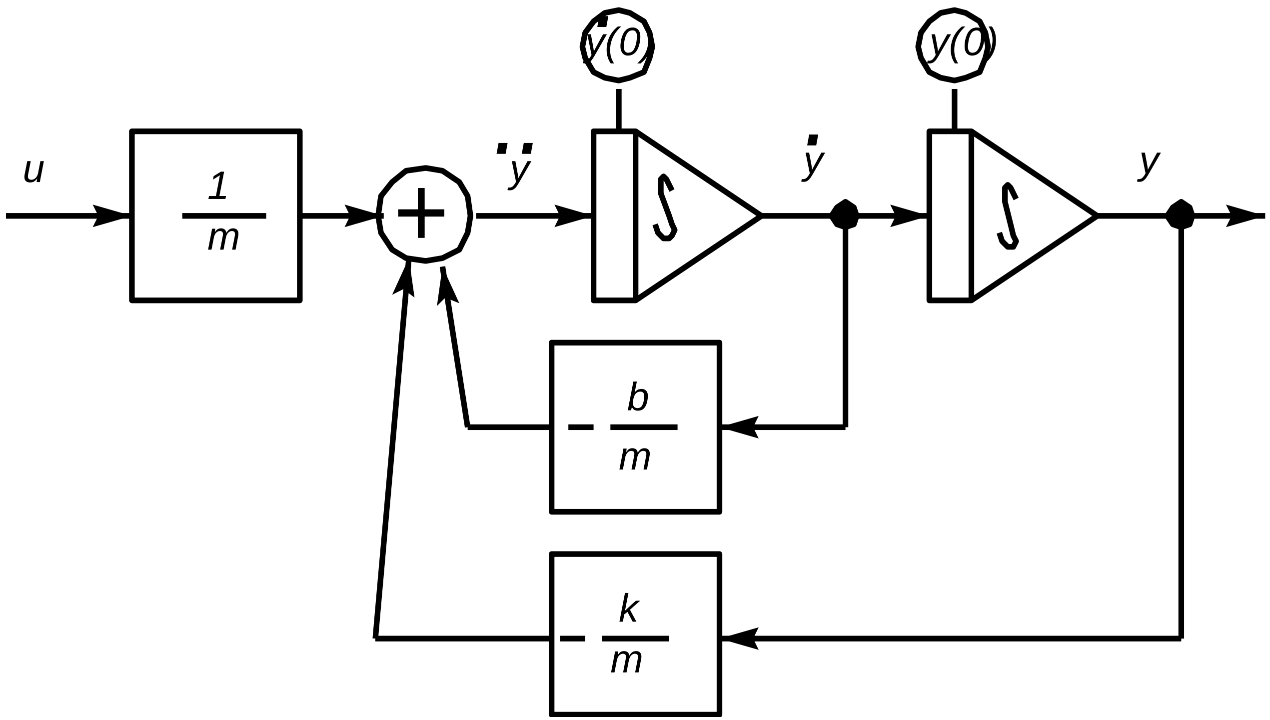
Definir um referencial a partir deste ponto.

Seja y a coordenada medida neste sentido.

Pela lei de Newton: O produto da massa pela aceleração é igual à soma das forças que acuam no sentido positivo de y,

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt} + u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{m}u$$ Diagrama de blocos:



Uma outra possibilidade: Modelo de estado

Em vez de uma equação de segundo grau, duas equações de 1º grau.

As incógnitas são as variáveis de estado.

Variáveis de estado no exemplo da massa oscilatória:

Posição: $x_1 := y$ velocidade: $x_2 := \dot{y}$

A equação de 2ª ordem $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{m}u$

é equivalente às 2 equações diferenciais de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}u \end{cases}$$

Neste caso, o modelo é linear e pode ser escrito matricialmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Definindo o vetor de estado x e as matrizes

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O modelo de estado escreve-se na forma standard para o caso linear:

Equação da dinâmica do estado: $\dot{x} = Ax + Bu$ Condição inicial: $x(0) = x_0$

Equação de saída: $y = Cx$

Caso geral: Equação diferencial

Relaciona as entradas e as saídas através de uma única equação diferencial de ordem n:

$$g\left(y^{(n)}(t),\ y^{(n-1)}(t),\ \dots,\ y(t),\ u^{(m)}(t),\ u^{(m-1)}(t),\ \dots,\ u(t)\right) = 0$$

em que g é uma função, $n > m$ e

$$y^{(k)}(t) := \frac{d^k}{dt^k} y(t)$$

Condições iniciais:

$$y(0) = y_0,\ y^{(1)}(0) = y_0^{(1)},\ \dots,\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

Equação diferencial linear com coeficientes constantes

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_m u(t)$$

Condições iniciais:

$$y(0) = y_0,\ y^{(1)}(0) = y_0^{(1)},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

Função de transferência

A função de transferência é o quociente das transformadas de Laplace da saída e da entrada, com condições iniciais nulas

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Modelo de estado não linear

Modelo da dinâmica:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n, \ u_1, \ \ldots, \ u_m)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n, \ u_1, \ \ldots, \ u_m)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n, \ u_1, \ \ldots, \ u_m)$$

Modelo dos sensores:

$$y_1 = h_1(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n = h_n(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n)$$

O modelo de estado escreve-se normalmente na ***forma vetorial*** como:

Modelo da dinâmica: $\frac{dx}{dt} = f(x,\ u)$

Condições iniciais: $x(0) = x_0$

Modelo das observações (sensores): $y = h(x)$

x = Vetor de variáveis de estado ($\dim(x) = n$)

u = Vetor de variáveis manipuladas ($\dim(u) = m$)

y = Vetor de saídas (observações) ($\dim(y) = p$)

A função f denomina-se um campo de vetores (a cada ponto x faz corresponder o vetor das derivadas). Mais sobre isto a seguir.

no

Modelo de estado de sistemas lineares

Equação de estado (eq. diferencial, relaciona a entrada u com o estado x):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Condição inicial no estado

$$x(0) = x_0$$

Equação de saída (equação algébrica, relaciona o estado x com a saída y):

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dimensões: $x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m, \quad y(t) \in R^p$

$$A[n \times n] \quad B[n \times m] \quad C[p \times n] \quad D[p \times m]$$

Normalmente iremos considerar $D = 0$ (sistemas com mais polos que zeros).

Diagrama de blocos do modelo de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

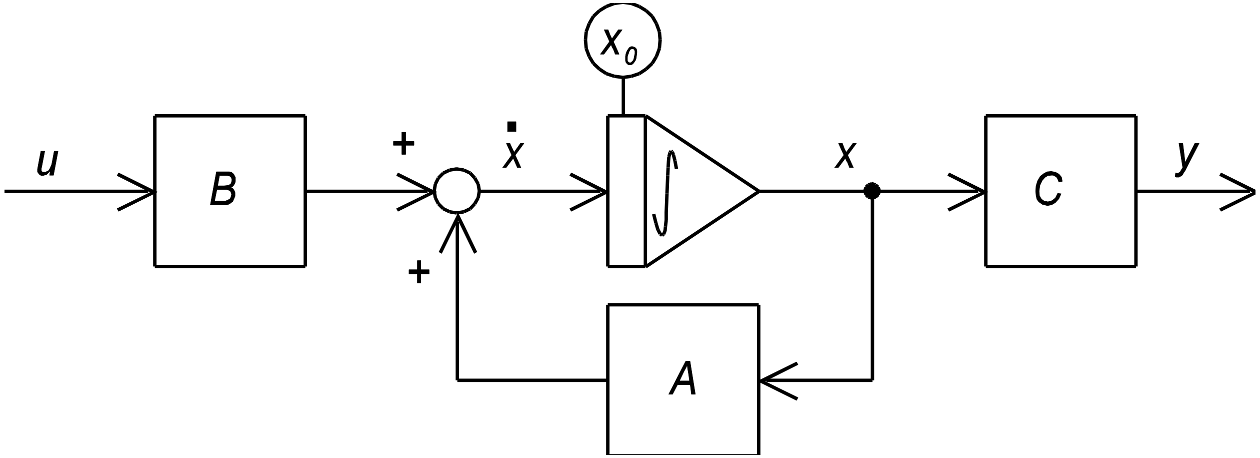


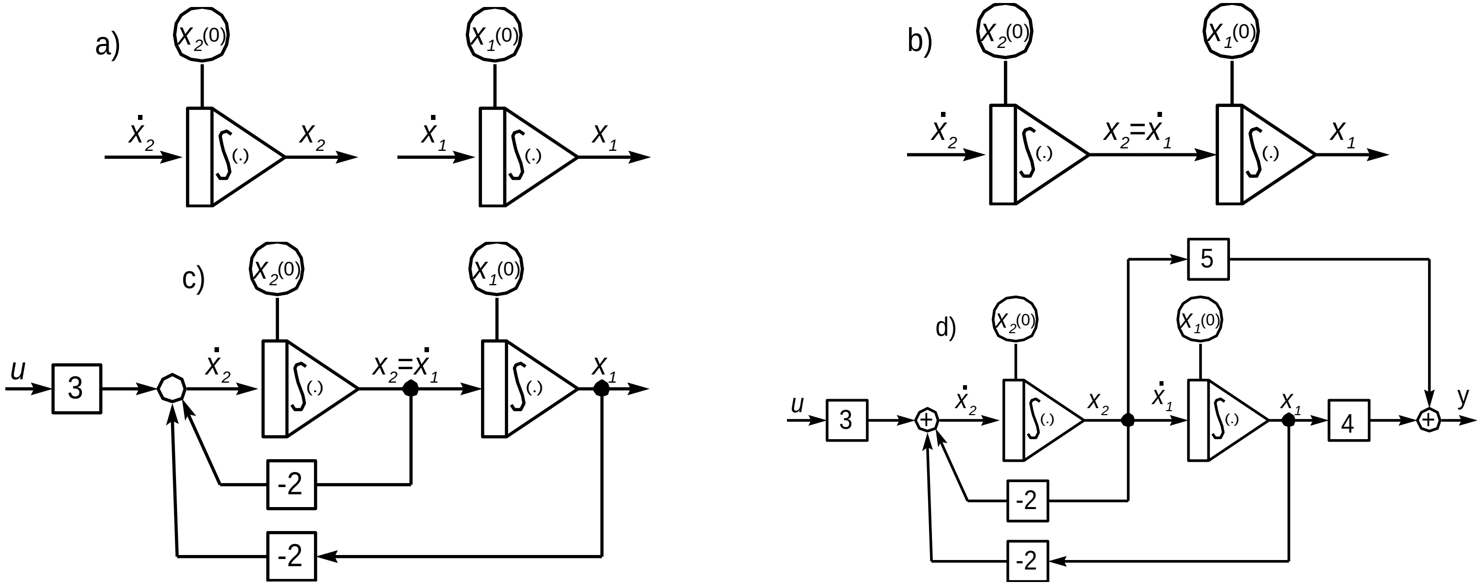
Diagrama de blocos das equações de estado – Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u,$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + 3u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \text{x}$$



Obtenção da função de transferência a partir do modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Tome-se a transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$sX(s) = AX(s) + bU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) \qquad X(s) = TL(x) \quad U(s) = TL(u)$$

Daqui vem

$$(sI - A)X(s) = bU(s) \quad \rightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1}bU(s)$$

ou seja

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}b\ U(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}b\ U(s)$$

A função de transferência vem pois dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}b$$

Dado que

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(\ sI - A)}$$

a função de transferência escreve-se

$$G(s) = \frac{Cadj(sI - A)b}{det(\ sI - A)}$$

Nota sobre Álgebra Linear – Adjunta de uma matriz

A adjunta de uma matriz $M = [m_{ij}]$ é dada por

$$adj(M) = [M_{ij}]^T$$

em que M_{ij} é o **co-fator** do elemento m_{ij}, ou seja, é dada pelo determinante da matriz que se obtém eliminando a linha i e a coluna j, multiplicado por -1^{i+j}.

Exemplo: $$adj\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Adjunta de uma matriz – Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad adj(M) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 30 \\ 16 & 1 & -6 \\ 0 & 15 & -10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 0 \\ -5 & 1 & 15 \\ 30 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

Para verificar o resultado, observe-se que

$$M \frac{adj(M)}{det(M)} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 16 & 0 \\ -5 & 1 & 15 \\ 30 & -6 & -10 \end{bmatrix} = I_3$$

Referência: G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, 2ª ed., p 170.

Polos e zeros

$$G(s) = \frac{Cadj(sI - A)b}{det(sI - A)}$$

Os polos são as raízes do **polinómio característico** da matriz A, dado por

$$det(sI - A)$$

Os zeros são as raízes do polinómio

$$Cadj(sI - A)b$$

Função de transferência a partir do modelo de estado – Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix} \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+5)+6} \begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+5)+6} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Obtenção do modelo de estado – Sistemas sem zeros

Dada a função de transferência apenas com polos:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Pretende-se obter **um** modelo de estado que a represente.

Repare-se que este modelo de estado **não** é único.

Vamos começar por introduzir um tipo de variáveis de estado denominadas **variáveis de fase**, em que o vetor de estado é dado pela saída e pelas suas $n-1$ primeiras derivadas. Neste exemplo, $n = 3$.

Obtenção da equação diferencial:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)Y(s) = b_0 U(s)$$

$$s^3 Y(s) + a_1 s^2 Y(s) + a_2 s Y(s) + a_3 Y(s) = b_0 U(s)$$

Daqui vem a equação diferencial:

$$\dddot{y}(t) + a_1 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_3 y(t) = b_0 u(t)$$

$$\dddot{y}(t) + a_1\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_3 y(t) = b_0 u(t)$$

Variáveis de estado (saída e derivadas até à ordem $n - 1 = 2$):

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2$$

A equação diferencial escreve-se

$$\dot{x}_3 = -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + b_0 u(t)$$

O modelo de estado fica:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -a_1 x_3 - a_2 x_2 - a_3 x_1 + b_0 u(t)$$

ou, em termos matriciais:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

A matriz da dinâmica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

tem uma estrutura com propriedades suficientemente importantes para merecer um nome. Diz-se na **forma companheira**.

Consiste numa identidade de ordem $n-1$ no canto superior direito, tendo ao lado uma coluna de zeros e em baixo uma linha com os coeficientes do polinómio característico da matriz (denominador da função de transferência).

Nota sobre Álgebra Linear – Polinómio Característico de uma matriz

O polinómio característico de uma matriz quadrada A é dado por

$$det(sI - A)$$

Para matrizes na forma companheira o polinómio característico pode ser escrito por inspecção.

Posteriormente ver-se-á que as raízes do polinómio característico, denominadas **valores próprios** da matriz, têm uma importante interpretação geométrica. Já vimos que correspondem aos polos da função de transferência, pelo que determinam a resposta no tempo do sistema.

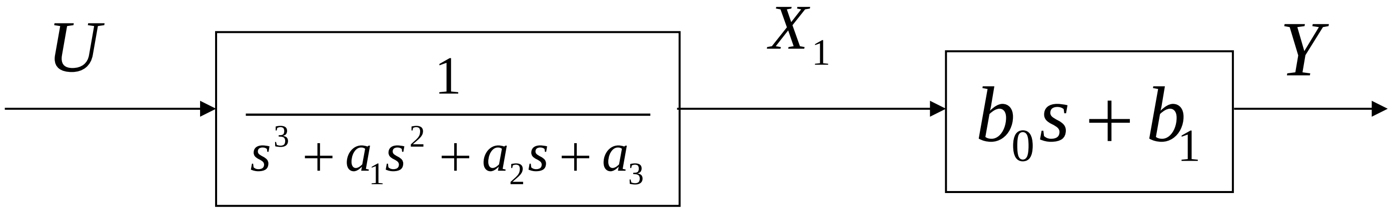
Sistemas com zeros

$$G(s) = \frac{b_0 s + b_1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Se aplicarmos a técnica anterior, surge uma derivada da entrada, o que causa uma dificuldade.

Uma possibilidade (há mais!) é “partir” o sistema nos zeros e nos polos, tomando como variáveis de estado a saída do bloco dos polos e as suas duas primeiras derivadas.

Tem-se o diagrama de blocos:



A equação da dinâmica mantem-se.

A equação de saída é alterada:

$$y = b_0 \dot{x}_1 + b_1 x_1 = b_0 x_2 + b_1 x_1$$

$$y = [b_1 \quad b_0 \quad 0] x$$

Transformação de coordenadas no modelo de estado

Considere o modelo de estado com equações

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

É feita uma transformação de coordenadas

$$z(t) = Tx(t)$$

em que T é uma matriz quadrada invertível.

Qual o modelo de estado verificado pelo vetor $z(t)$?

Sugestão: Derive $z(t) = Tx(t)$

$$z(t) = Tx(t)$$

Derivando:

$$\dot{z}(t) = T\dot{x}(t)$$

Usando o modelo de estado de $x(t)$:

$$\dot{z}(t) = T(Ax(t) + bu(t))$$

Usando a transformação inversa

$$\dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + Tbu(t))$$

$$y(t) = Cx(t) = CT^{-1}x(t)$$

Transformação de coordenadas no modelo de estado

Dado o modelo de estado com equações

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad\qquad y(t) = Cx(t)$$

é feita uma transformação de coordenadas

$$z(t) = Tx(t)$$

em que T é uma matriz quadrada invertível.

Nas novas coordenadas as equações de estado são

$$\dot{z}(t) = Ez(t) + \Gamma u(t) \qquad y(t) = Hx(t)$$

$$E = TAT^{-1} \qquad H = CT^{-1}$$

Simulação da equação diferencial e do modelo de estado – Exemplo

Considere o sistema linear descrito pela função de transferência:

$$\frac{Y}{U} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^s} \qquad \xi,\ \omega_n \text{ parâmetros}$$

a) Obtenha a equação diferencial equivalente. Desenhe um diagrama de blocos com 2 integradores que permita a simulação da equação diferencial. *Sugestão: Exprima $\ddot{y}$ como função de $\dot{y}$ e de y e depois integre duas vezes. Suponha que y está disponível à saída de um integrador e desenhe o diagrama a partir daí.*

b) Obtenha o modelo de estado equivalente, usando variáveis de fase.

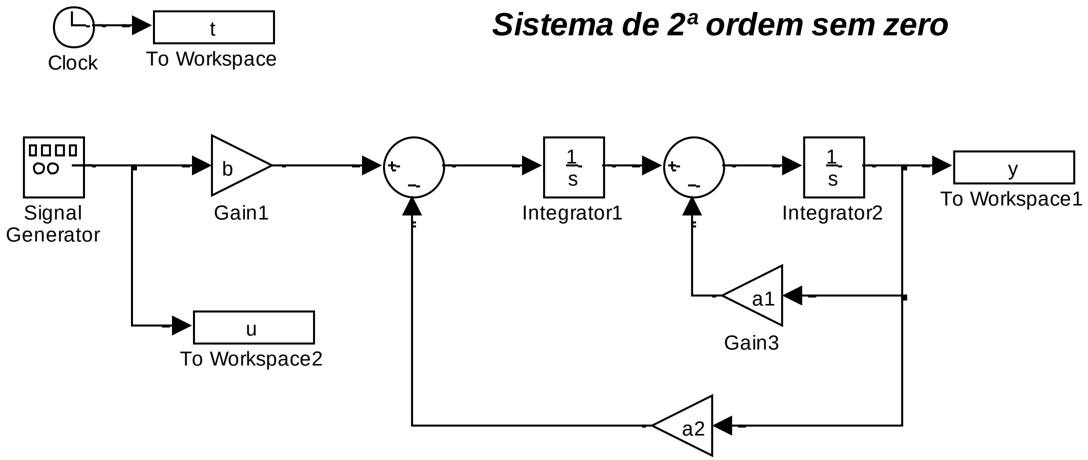
c) Desenhe o diagrama de blocos do modelo de estado.

Realização com base na equação diferencial

$$s^2Y + 2\xi\omega_n sY + \omega_n^2 Y = \omega_n^2 U \qquad \ddot{y} = -2\xi\omega_n\dot{y} - \omega_n^2 y + \omega_n^2 u$$

$$y = \int \left[-2\xi\omega_n y + \int (-\omega_n^2 y + \omega_n^2 u) dt_1 \right] dt_2$$

Sistema de 2ª ordem sem zero



$$a_1 = 2\xi\omega_n; \quad a_2 = \omega_n^2$$

Simulação de sistemas com zeros - Exemplo

Considere o sistema linear descrito pela função de transferência:

$$\frac{Y}{U}=\frac{s+b}{s^2+a_1s+a_2}$$

a) Obtenha a equação diferencial equivalente.

b) Desenhe um diagrama de blocos com 2 integradores que permita a simulação da equação diferencial. (Pense um pouco!)

c) Obtenha o modelo de estado equivalente, usando variáveis de fase.

d) Desenhe o diagrama de blocos do modelo de estado.

Realização com base na equação diferencial

$$\frac{Y}{U} = \frac{s+b}{s^2+a_1 s+a_2} \qquad s^2 Y + a_1 s Y + a_2 Y = sU + bU$$

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = \dot{u} + bu \qquad \ddot{y} = (-a_1 \dot{y} + \dot{u}) + (-a_2 y + bu)$$

Integrando uma vez:

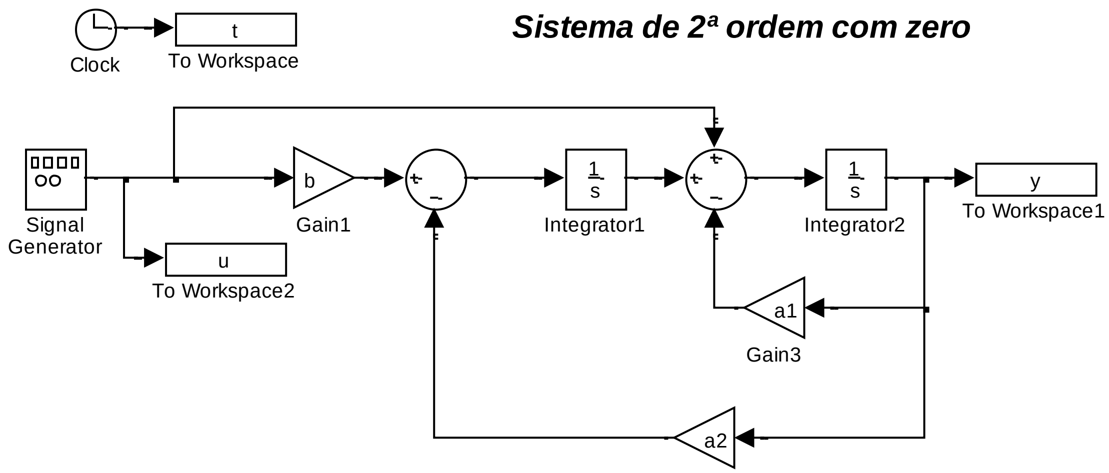
$$\dot{y} = -a_1 y + u + \int (-a_2 y + bu) dt_1$$

Intergando novamente:

$$y = \int \left[-a_1 y + u + \int (-a_2 y + bu) dt_1\right] dt_2$$

Realização com a equação diferencial

$$y = \int [-a_1 y + u + \int (-a_2 y + bu) dt_1] \; dt_2$$



Sistemas em tempo discreto

Nos sistemas em tempo discreto, o tempo é modelado como um número inteiro que toma sucessivamente os valores 0, 1, 2, ...

Os sistemas dinâmicos são modelados por equações de diferenças.

Também aqui podemos ter equações de diferenças de ordem n ou por sistemas de n equações de ordem n (modelo de estado).

Descrição de SLITs por equações de diferenças

SLIT = Sistema Linear Invariante no Tempo

Equação de diferenças escrita com as amostras avançadas:

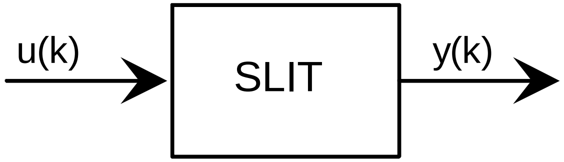
$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\ldots+a_n y(k)=$$
$$=b_0 u(k+m)+b_1 u(k+m-1)+\ldots+b_m u(k)$$

Equação de diferenças escrita com as amostras atrasadas:

$$y(k)+a_1 y(k-1)+\ldots+a_n y(k-n)=$$
$$=b_0 u(k-(n-m))+b_1 u(k-(n-m)-1)+\ldots+b_m u(k-n)$$

Passa-se de uma para outra atrasando ou adiantando o tempo *n* passos.

Função de transferência discreta



Assume-se o sistema modelado pela equação de diferenças

$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\ldots+a_n y(k)=b_0 u(k+m)+b_1 u(k+m-1)+b_m u(k)$$

Tome-se transformada Z com condições iniciais nulas para obter a função de transferência:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0 z^m+b_1 z^{m-1}+\ldots+b_m}{z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\ldots+a_n}$$

Exemplo: SLIT discreto de 2ª ordem

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = b_0 u(k+1) + b_1 u(k)$$

Atrasando de 2 unidades

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2)$$

Tomando a transformada Z com condições iniciais nulas

$$(z^2 + a_1 z + a_2)Y(z) = (b_0 z + b_1)U(z)$$

Função de transferência

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Exemplo: Sistema discreto de 1ª ordem

$$y(k+1)-0.5y(k)=0.5u(k) \qquad y(0)=0$$

Resposta do sistema a uma entrada definida por

$$u(k)=\begin{cases}0 & se \quad k<0 \\ 1 & se \quad k\geq 0\end{cases}$$

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	0
1	1	0.5
2	1	0.75=0.5x0.5+0.5
3	1	0.75x0.5+0.5=0.875

Exemplo: Modelo de uma população

A população assume-se dividida em estratos etários, cada um correspondente a um intervalo de tempo discreto.

$x_i(k)$ é o número de indivíduos no estrato i no tempo k

Assume-se:

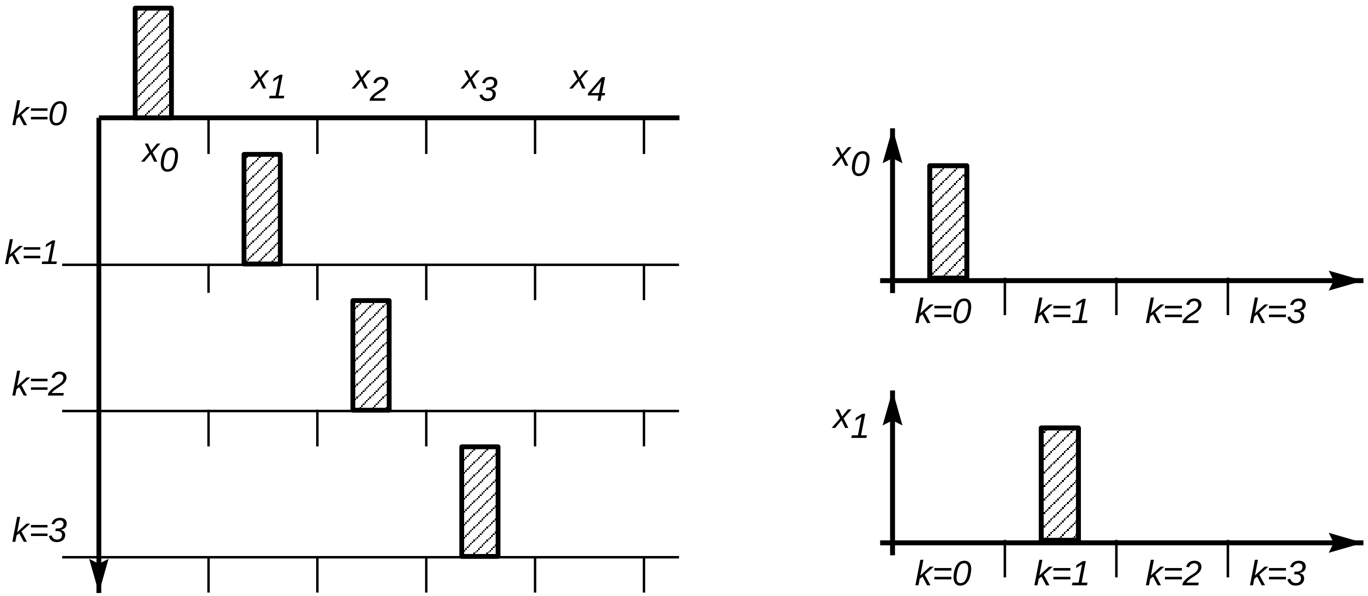
Índice do estrato: $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

Tempo discreto: $k = 0, 1, 2, \ldots$

Este modelo é conhecido em língua Inglesa como "Cohort population model".

Se não houver mortos, todos os elementos da geração i no ano k estarão na geração $i+1$ no ano $k+1$:

$$x_{i+1}(k+1) = x_i(k) \qquad i = 0,1,2,\ldots,n-1$$



Se existirem mortos à medida que o tempo passa, só uma parte da geração i no ano k estará na geração $i+1$ no ano $k+1$:

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i \, x_i(k) \qquad 0 \le \beta_i \le 1 \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Os membros da população no estrato 0 resultam da reprodução dos elementos dos diversos estratos:

$$x_0(k+1) = \alpha_0 x_0(k) + \alpha_1 x_1(k) + \ldots + \alpha_n x_n(k)$$

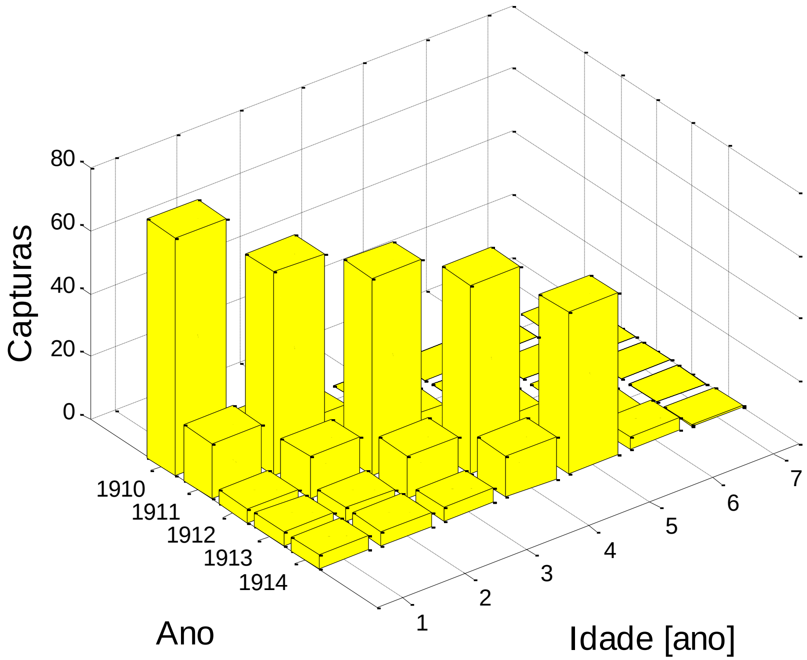
$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i \, x_i(k) \qquad 0 \le \beta_i \le 1 \qquad i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$x_0(k+1) = \alpha_0 x_0(k) + \alpha_1 x_1(k) + \ldots + \alpha_n x_n(k)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = Ax(k)$$



Capturas de arenque no Mar do Norte entre 1910 e 1914 (Hjort, 1926).

O desenvolvimento de modelos de populações é muito importante para a gestão do “stock” de peixe, por forma a otimizar o plano de pesca.

Road map: Modelos de SLIT de dimensão finita