

# **PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS (PROE)**

## **PROPAGAÇÃO GUIADA – LINHAS DE TRANSMISSÃO**

Custódio Peixeiro

Dezembro 2021

**Este documento foi concebido para servir de guia nas aulas e apenas como tal deverá ser utilizado no estudo da matéria.**

- Tipos de Guias de Ondas (Modos)
- Linhas de Transmissão (LT)
  - Modo TEM
  - Parâmetros Distribuídos
  - Exemplo do Cabo Coaxial
  - Equações Canônicas
  - Tensão e Corrente (com perdas, sem perdas, com fracas perdas)
  - Geometria (linha bifilar, cabo coaxial, linha de placas paralelas)
  - Linha Micro-Tira
- Linhas de Transmissão sem Perdas
- Carta de Smith
- Adaptação de Impedâncias
- Aplicações de Linhas de Transmissão

# Tipos de Guias de Ondas (Modos) (1)

3/55

Guias de ondas são estruturas metálicas e/ou dielétricas que guiam OEs. Pode haver confinamento total de energia (guias fechados) ou não (guias abertos).

## Guias Fechados

Cabo Coaxial

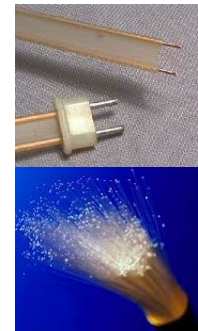
Guia de Paredes Metálicas



## Guias Abertos

Linha Bifilar

Fibra Óptica



Exibem geometria cilíndrica e as ondas propagam-se ao longo do eixo longitudinal (vamos considerar o eixo dos ZZ).

## Modos (Estrutura do campo eletromagnético)

TEM	$E_z = 0, H_z = 0$
TE (H)	$E_z = 0, H_z \neq 0$
TM (E)	$E_z \neq 0, H_z = 0$
Híbridos (HE ou EH)	$E_z \neq 0, H_z \neq 0$

# Tipos de Guias de Ondas (Modos) (2)

4/55

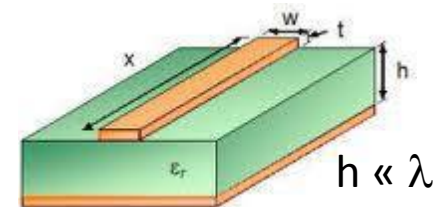
Só existem modos TEM em guias metálicos (sem perdas) de seção transversal multiplamente conexa (mínimo 2 condutores) e dielectricamente homogénea.

Modos TEM {  
    Linha bifilar (dielétrico homogéneo)  
    Cabo Coaxial (dielétrico homogéneo)

**Exemplos**

Não suportam modos TEM os guias de paredes metálicas (são simplesmente conexos) (qualquer que seja a secção transversal) nem os guias dielétricos (são dielectricamente não homogéneos) (varão dielétrico, fibra ótica).

Existem estruturas que suportam modos quase-TEM (por exemplo as linhas micro-tira)



Usam-se normalmente as designações **linha de transmissão** para os guias de ondas que suportam modos TEM e **guia de ondas** para os outros.

# Tipos de Guias de Ondas (Modos) (3)

5/55

Os modos TEM têm características que os tornam especiais em telecomunicações

- O campo elétrico, o campo magnético e a direcção de propagação formam um triedro directo
- Os modos TEM correspondem a ondas planas (mas não necessariamente uniformes)
- Definem-se univocamente tensões e correntes
- Admitindo que as características macroscópicas do meio ( $\mu, \epsilon$ ) não dependem da frequência, não há dispersão

$$k_z = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad v_f = v_g = c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Os sinais propagam-se sem deformação

Eixo longitudinal da LT ao longo de  $\hat{\mathbf{z}}$

Pelo teorema de Stokes

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \bar{\mathbf{E}})_z dS = \iint_{\mathcal{S}} -j\omega\mu \bar{H}_z dS = 0$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{\text{T}} = -\nabla_{\text{T}} \bar{\Phi} \quad \bar{V}_{12} = \int_1^2 \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 \nabla \bar{\Phi} \cdot d\mathbf{l} = \bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \bar{\mathbf{H}})_z dS = \iint_{\mathcal{S}} (\bar{\mathbf{J}} + j\omega\epsilon \bar{\mathbf{E}})_z dS = \iint_{\mathcal{S}} \bar{J}_z dS = \bar{I}$$

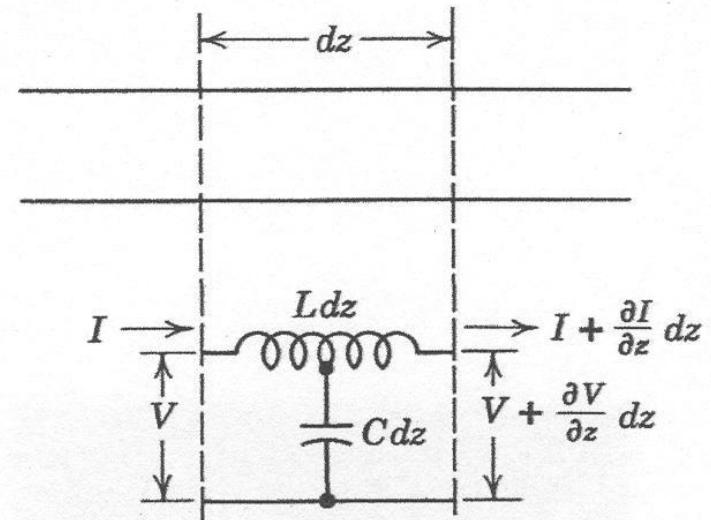
$$\bar{V}(x,y,z) = \bar{V}(x,y) e^{\pm jkz}$$

$$\bar{I}(x,y,z) = \bar{I}(x,y) e^{\pm jkz}$$

## Caso sem perdas

$$-V + (Ldz) \frac{\partial I}{\partial t} + V + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0$$

$$I = I + \frac{\partial I}{\partial z} dz + (Cdz) \frac{\partial V}{\partial t}$$



$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} + \omega^2 LC \bar{V} = 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial z^2} + \omega^2 LC \bar{I} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{V}(z) = \bar{V}_i e^{-jk_z z} + \bar{V}_r e^{+jk_z z}$$

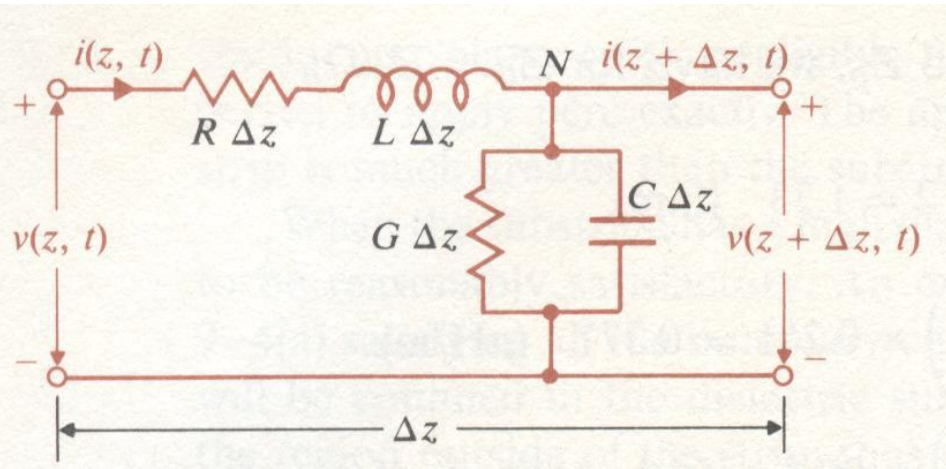
$$\bar{I}(z) = \bar{I}_i e^{-jk_z z} + \bar{I}_r e^{+jk_z z}$$

$$k_z = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{v_f}$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\bar{V}_i}{\bar{I}_i} = -\frac{\bar{V}_r}{\bar{I}_r} = Z_0 \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

## Caso geral (com perdas)



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} - (R + j\omega L)(G + j\omega C) \bar{V} = 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial z^2} - (R + j\omega L)(G + j\omega C) \bar{I} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{V}(z) = \bar{V}_i e^{-\gamma z} + \bar{V}_r e^{+\gamma z}$$

$$\bar{I}(z) = \bar{I}_i e^{-\gamma z} + \bar{I}_r e^{+\gamma z}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\frac{\bar{V}_i}{\bar{I}_i} = -\frac{\bar{V}_r}{\bar{I}_r} = Z_0$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}$$



Caso de interesse prático (com fracas perdas,  $\omega L \gg R$  e  $\omega C \gg G$ )

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\begin{cases} \alpha \approx \frac{\sqrt{LC}}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \\ \beta \approx \omega \sqrt{LC} \end{cases}$$

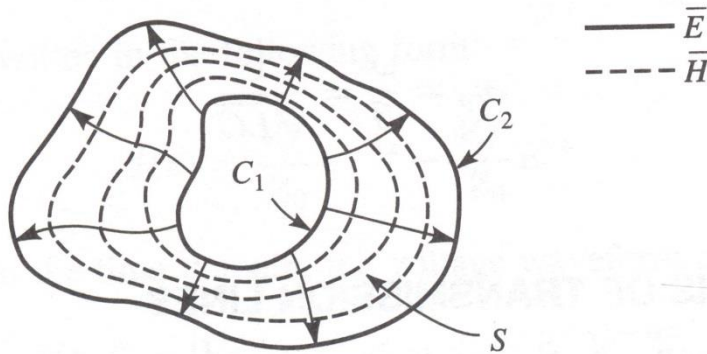
$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}$$

Igual ao caso  
sem perdas

$$\begin{cases} R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ X_0 = \frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right) \end{cases}$$

## Parâmetros Distribuídos



**Dielétrico ( $\epsilon_d, \mu_d, \sigma_d$ )**  
**Condutores ( $\epsilon_0, \mu_0, \sigma_c$ )**

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2 \sigma_c}}$$

$$L = \frac{\mu_d}{l_0^2} \int_S \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}}^* ds \quad [\text{H.m}^{-1}]$$

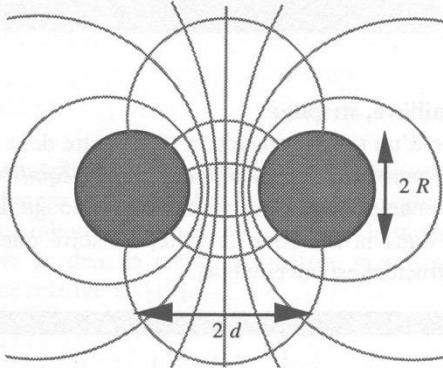
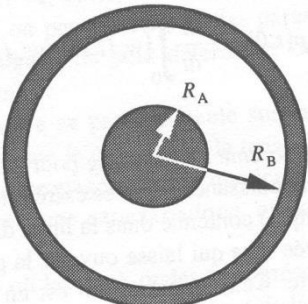
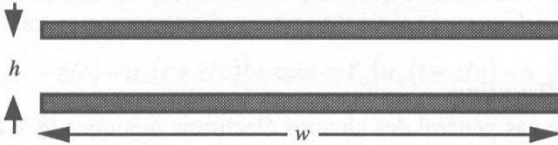
$$R = \frac{R_s}{l_0^2} \int_{C_1 + C_2} \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}}^* dl \quad [\Omega.\text{m}^{-1}]$$

$$C = \frac{\epsilon_d}{V_0^2} \int_S \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* ds \quad [\text{F.m}^{-1}]$$

$$G = \frac{\sigma_d}{V_0^2} \int_S \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* ds \quad [\text{S.m}^{-1}]$$

# Parâmetros Distribuídos (2)

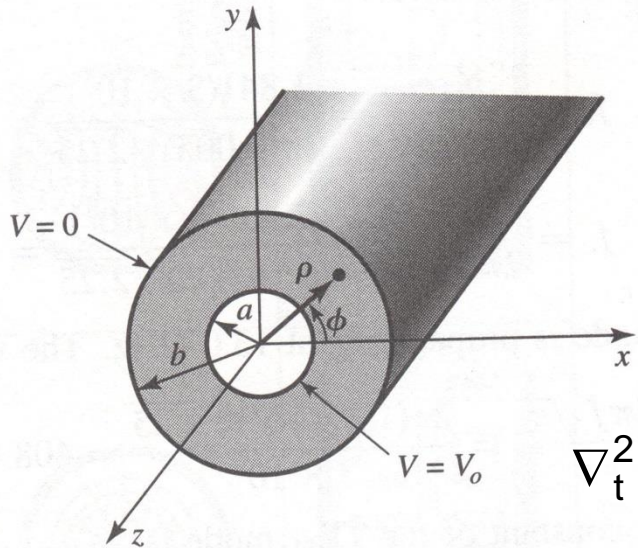
11/55

			
$R$ [ $\Omega \cdot m^{-1}$ ]	$\frac{R_s}{\pi R}$	$\frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_A} \right)$	$\frac{2R_s}{w}$
$L$ [H.m <sup>-1</sup> ]	$\left(\frac{d}{R}\right)^2 \gg 1 \quad \frac{\mu_d}{\pi} \ln\left(\frac{2d}{R}\right)$	$\frac{\mu_d}{2\pi} \ln\left(\frac{R_B}{R_A}\right)$	$\mu_d \frac{h}{w}$
$G$ [S.m <sup>-1</sup> ]	$\left(\frac{d}{R}\right)^2 \gg 1 \quad \frac{\pi \sigma_d}{\ln(2d/R)}$	$\frac{2\pi \sigma_d}{\ln(R_B/R_A)}$	$\sigma_d \frac{w}{h}$
$C$ [F.m <sup>-1</sup> ]	$\left(\frac{d}{R}\right)^2 \gg 1 \quad \frac{\pi \epsilon_d}{\ln(2d/R)}$	$\frac{2\pi \epsilon_d}{\ln(R_B/R_A)}$	$\epsilon_d \frac{w}{h}$
$Z_0$ [ $\Omega$ ]	$\left(\frac{d}{R}\right)^2 \gg 1 \quad \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_d}{\epsilon_d}} \ln\left(\frac{2d}{R}\right)$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_d}{\epsilon_d}} \ln\left(\frac{R_B}{R_A}\right)$	$\sqrt{\frac{\mu_d}{\epsilon_d}} \frac{h}{w}$

# (Exemplo) Cabo Coaxial (1)

12/55

## Modo TEM



$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_t = -\nabla_t \bar{\Phi}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}_t = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{E}}}{Z_{\text{TEM}}}$$

$$\nabla_t^2 \Phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial \Phi(\rho)}{\partial \rho} \right] = 0$$

$$\text{cnf} \begin{cases} \bar{\Phi}(a) = \bar{V}_0 \\ \bar{\Phi}(b) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\Phi}(\rho) = C_1 \ln(\rho) + C_2 = \bar{V}_0 \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}$$

$$\bar{\mathbf{E}} = -\nabla_t \bar{\Phi} = -\frac{\partial \bar{\Phi}(\rho)}{\partial \rho} \hat{\rho} = \frac{\bar{V}_0}{\rho \ln(b/a)} \hat{\rho}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{E}}}{Z_{\text{TEM}}} = \frac{\bar{V}_0}{Z_{\text{TEM}} \rho \ln(b/a)} \hat{\phi}$$

## (Exemplo) Cabo Coaxial (2)

13/55

### Modo $TE_{11}$

- O cabo coaxial também suporta modos TE e TM
- O modo com frequência de corte mais baixa (depois do TEM) é o  $TE_{11}$

$$J'_n(k_c a) Y'_n(k_c b) = J'_n(k_c b) Y'_n(k_c a)$$

**Equação característica dos modos  $TE_{nm}$**

Solução aproximada  $k_c a = \frac{2}{1+b/a}$

### Exemplo (Cabo coaxial RG-142)

$$2a = 0,856 \text{ mm}$$

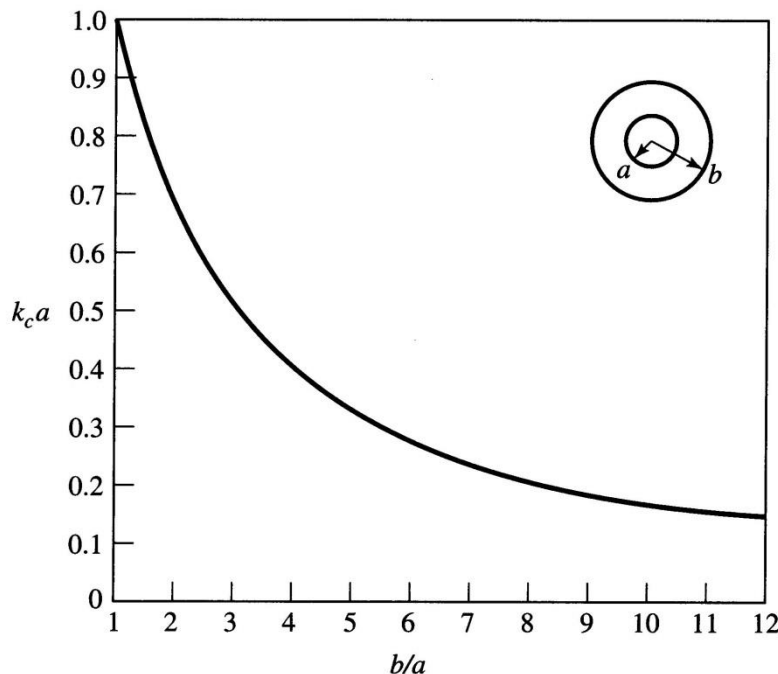
$$2b = 2,946 \text{ mm}$$

$$\epsilon_r = 2,2$$

$$Z_0 = 50 \Omega$$

$$k_c \approx 526 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$f_c \approx 17 \text{ GHz}$$

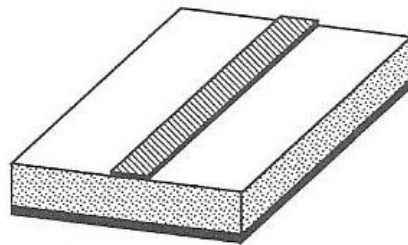


# Linha Micro-Tira (1)

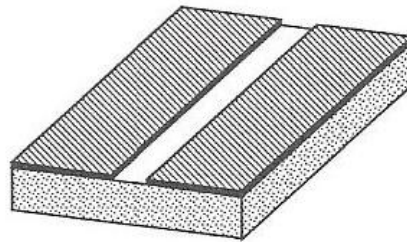
14/55

Há muitos outros tipos de linhas de transmissão

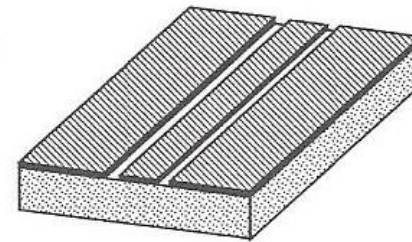
## Exemplos de Linha Impressas



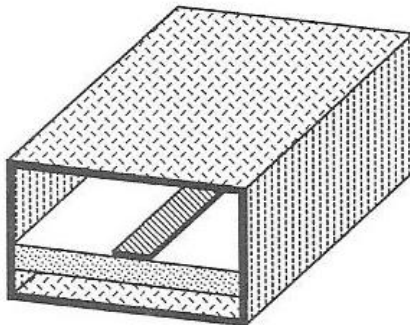
Microstrip



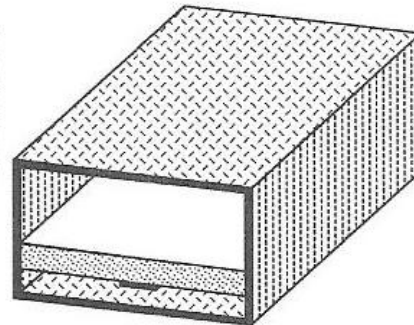
Slotline



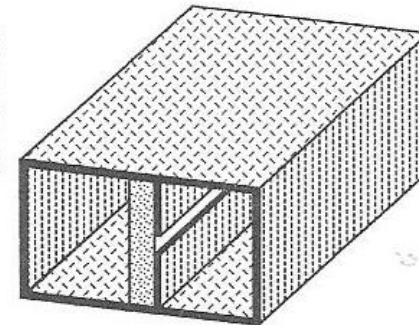
Coplanar Line



Suspended  
Stripline



Inverted  
Stripline

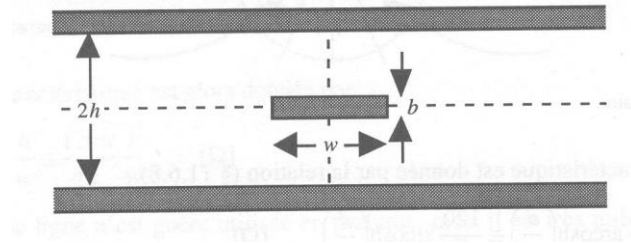
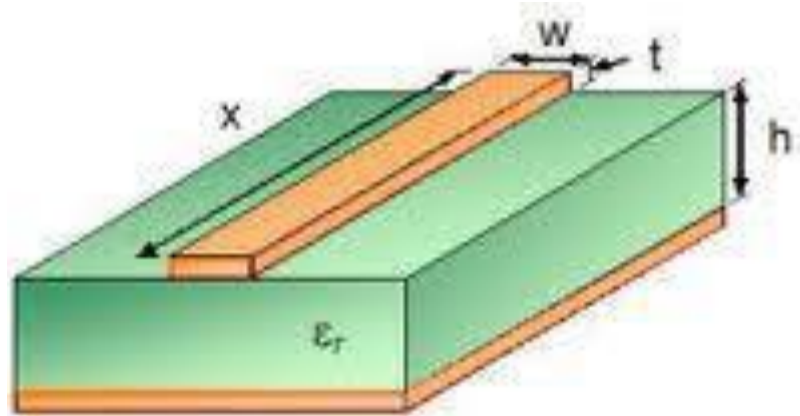


Fin Line

A mais comum é a linha micro-tira – fácil de fabricar, plano de terra, frequências elevadas, grande largura de banda

## Linha Micro-Tira

Deriva da linha de tira  
(versão plana do cabo coaxial)



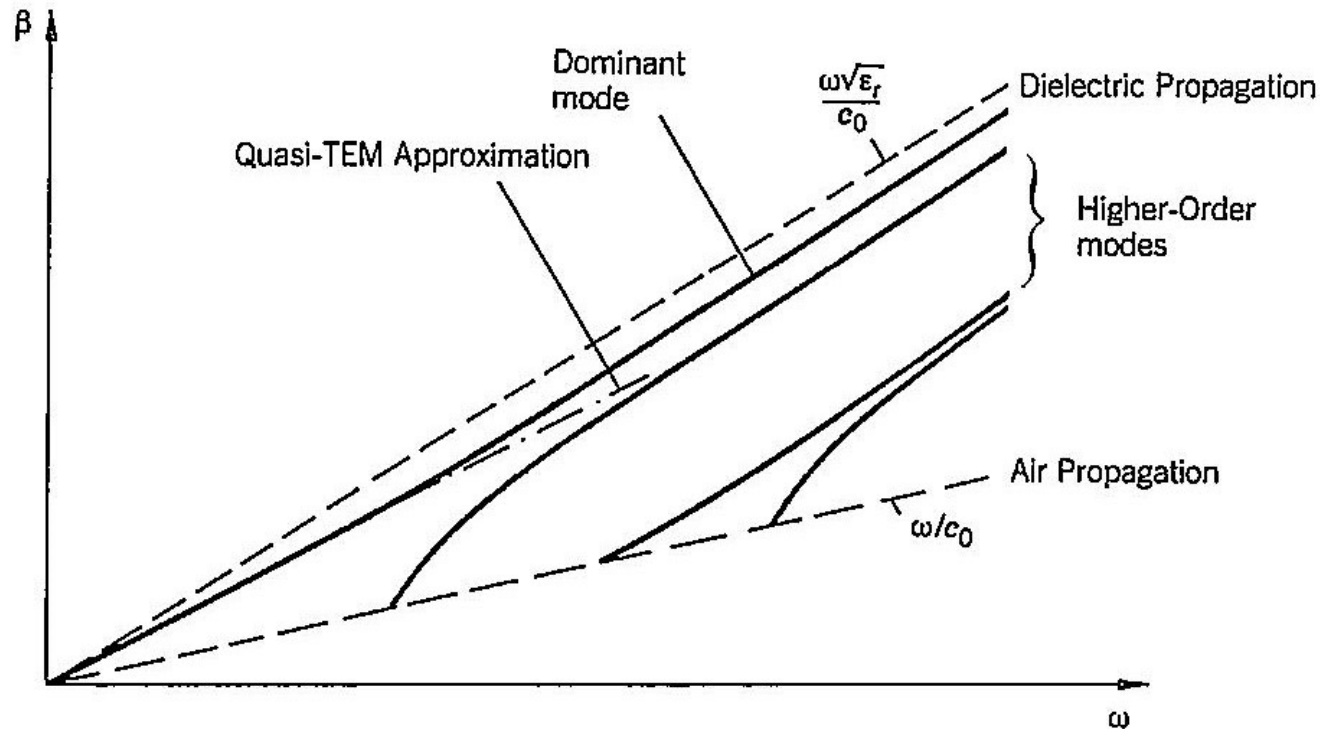
Estrutura não homogênea

- Substrato dielétrico ( $\epsilon_r$ ) entre a tira e o plano de terra
- Ar ( $\epsilon_r=1$ ) acima do plano de terra

Estrutura não suporta modos TEM, suporta **modos híbridos**

# Linha Micro-Tira (3)

16/55



Modo fundamental com **frequência de corte nula**

Em baixa frequência pode-se utilizar a aproximação quase-TEM ( $E_z \ll E_x, E_y$ )



# Linha Micro-Tira (4)

17/55

## Linha Micro-Tira

Não existem soluções analíticas

Utilizam-se simuladores eletromagnéticos rigorosos (exemplo: CST)

Utilizam-se simuladores que usam soluções aproximadas (exemplo: TX-LINE)

TX-LINE (grátis) <https://www.awr.com/awr-software/options/tx-line>

TXLINE 2003 - Microstrip

Microstrip | Stripline | CPW | CPW Ground | Round Coaxial | Slotline | Coupled MSLine | Coupled Stripline

Material Parameters

Dielectric: RT/Duroid 5880  
Conductor: Copper  
Dielectric Constant: 2.16  
Conductivity: 5.88E+07 S/m  
Loss Tangent: 0.001

Electrical Characteristics

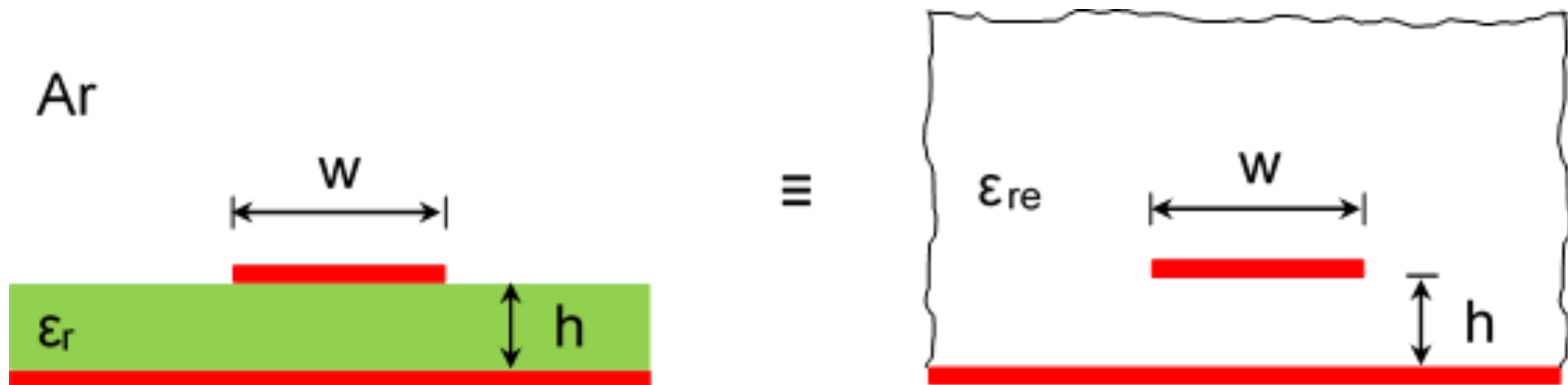
Impedance: 50 Ohms  
Frequency: 10 GHz  
Electrical Length: 90 deg  
Phase Constant: 180 deg/m  
Effective Dielectric Constant: 10  
Loss: 10 dB/m

Physical Characteristic

Physical Length (L): 20.3267 mm  
Width (w): 4.38436 mm  
Height (H): 1.6 mm  
Thickness (T): 35 um

## Linha Micro-Tira (Modo quase-TEM)

Define-se uma estrutura homogênea equivalente ( $\epsilon_{re}$ )



Há várias equações aproximadas que permitem calcular  $\epsilon_{re}$ . Estas equações resultam de soluções numéricas rigorosas

Um bom compromisso entre simplicidade e rigor (erro  $< 1\%$  para  $0,05 \leq w/h \leq 20$  e  $\epsilon_r < 16$ ) é

$$\epsilon_{re} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{h}{w}}}$$

## Análise – $Z_0(\epsilon_{re}, w/h)$

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{re}}} \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right) & w \leq h \\ \frac{120 \pi}{\sqrt{\epsilon_{re}} \left[ \frac{w}{h} + 1,393 + 0,667 \ln \left( \frac{w}{h} + 1,444 \right) \right]} & w \geq h \end{cases}$$

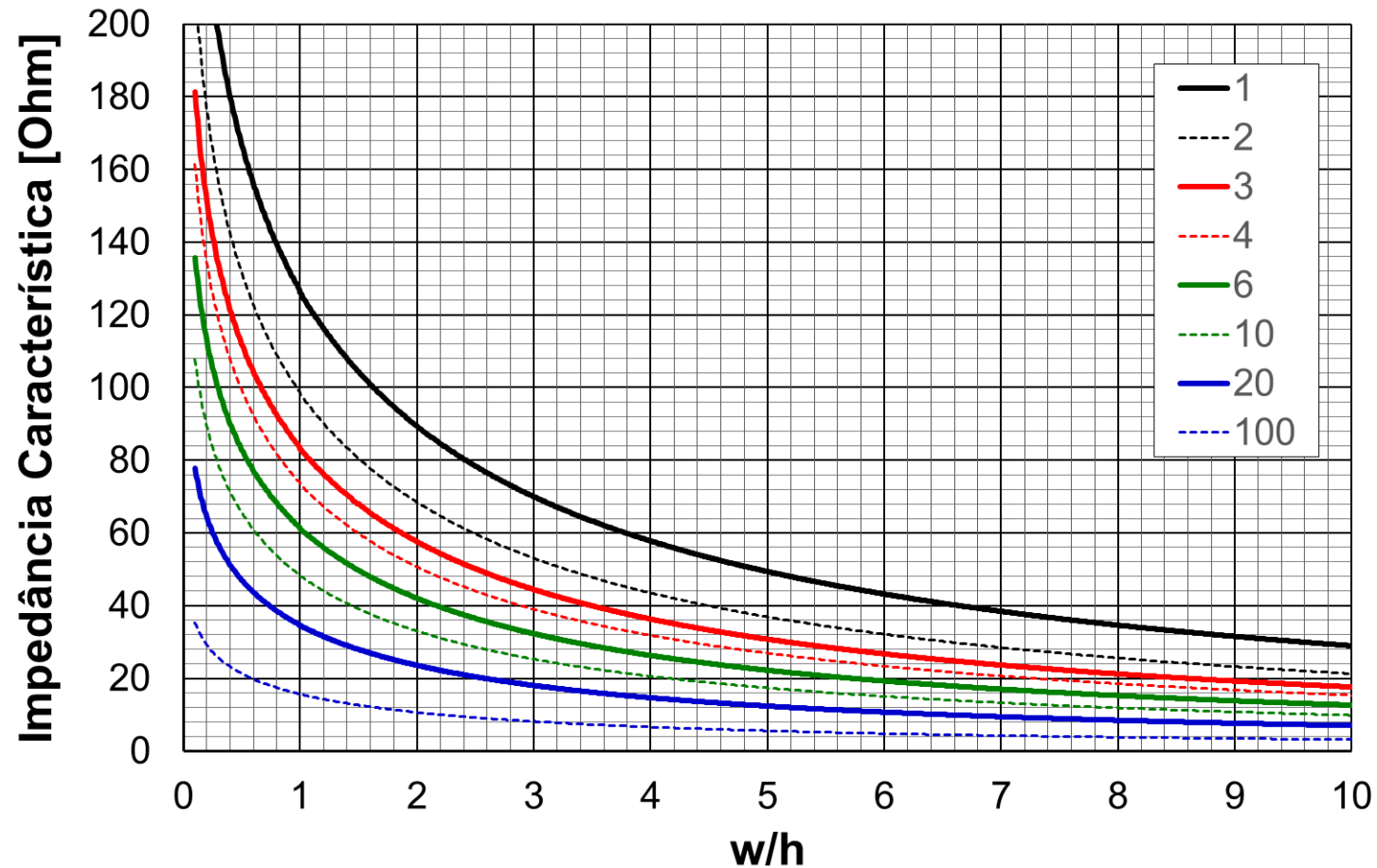
## Síntese – $w/h(\epsilon_r, Z_0)$

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left( 0,23 + \frac{0,11}{\epsilon_r} \right) \quad B = \frac{377 \pi}{2 Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\frac{w}{h} = \begin{cases} \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} & \frac{w}{h} < 2 \\ \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left[ \ln(B - 1) + 0,39 - \frac{0,61}{\epsilon_r} \right] \right\} & \frac{w}{h} > 2 \end{cases}$$

# Linha Micro-Tira (7)

20/55



$Z_0$  elevado:  $\epsilon_r$  baixo e/ou  $w/h$  baixo

$Z_0$  baixo:  $\epsilon_r$  elevado e/ou  $w/h$  elevado

$Z_0=50 \Omega$ ,  $\epsilon_r=10$

$\epsilon_{re}=6,81$   $w/h=0,93$

## Perdas

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 w} N_p / m$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_c}{2 \sigma_c}}$$

$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_{re} - 1)}{2 \sqrt{\epsilon_{re} (\epsilon_r - 1)}} \tan \delta N_p / m$$

$$\tan \delta = \frac{\sigma_d}{\omega \epsilon_d}$$

## Exemplo (f=1 GHz)

(Substrato –  $\epsilon_r=10$ ,  $\tan \delta=0,001$ ,  $h=1,575$  mm,  $\sigma_c=5,8 \times 10^7$  S/m,  $\mu_c=\mu_0$ )

Linha micro-tira:  $Z_0=50 \Omega$

$$w=1,46 \text{ mm (} w/h=0,93 \text{)}$$

$$R_s=8,25 \text{ m}\Omega$$

$$\alpha_c=0,113 \text{ Np/m}=0,98 \text{ dB/m}$$

$$\alpha_d=0,026 \text{ Np/m}=0,23 \text{ dB/m}$$

## Modelo Dispersivo (Simples)

$$\epsilon_{re}(f) = \epsilon_r - \frac{\epsilon_r - \epsilon_{res}}{1 + G \left( \frac{f}{f_p} \right)^2}$$

$\epsilon_{res}$  -  $\epsilon_{re}$  estático ( $f=0$ )

$$f_d = \frac{Z_0}{2\mu_0 h}$$

$$G = 0,6 + 0,009 Z_0$$

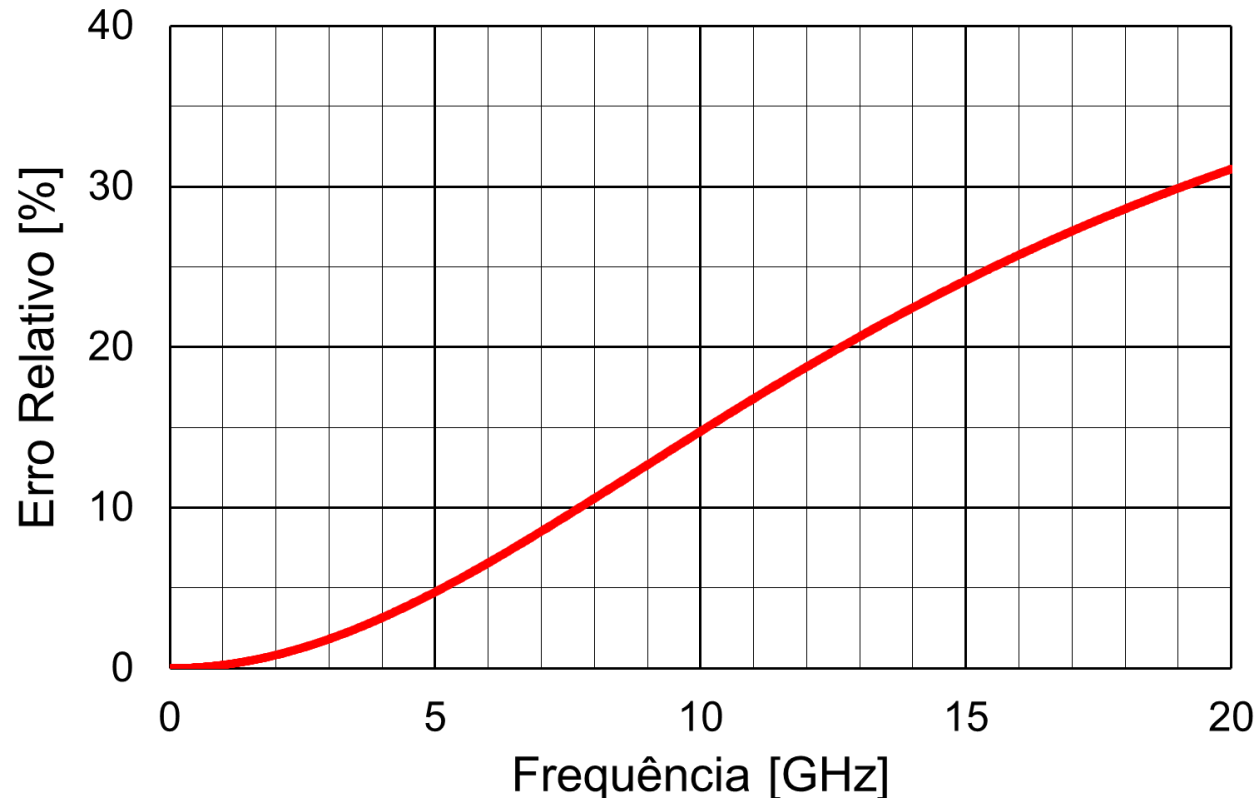
$$\Delta\epsilon_{re}(f) = \frac{\epsilon_{re}(f) - \epsilon_{res}}{\epsilon_{res}}$$

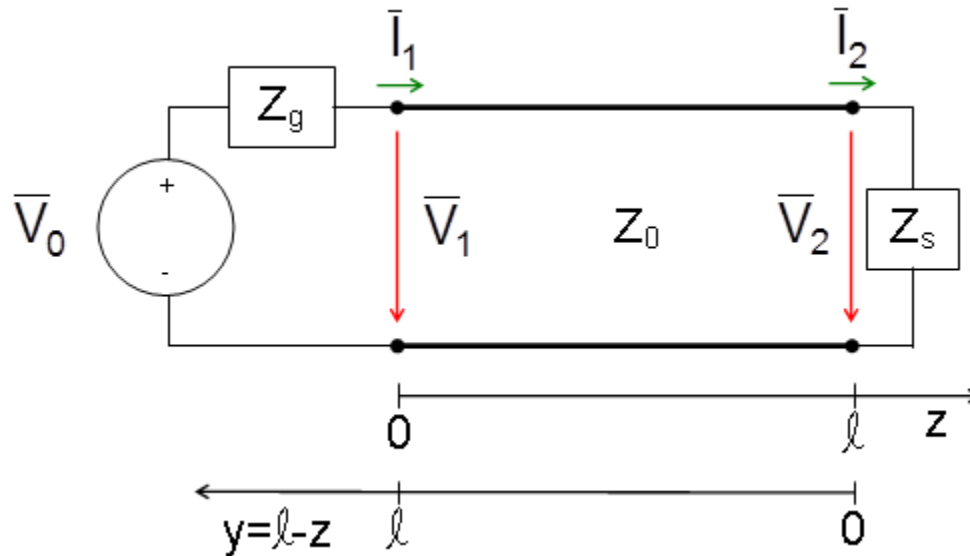
## Exemplo

Substrato: RT/Duroid 6010

$\epsilon_r=10,2$ ,  $h=1,27$  mm

$Z_0=50$ ,  $w=1,18$  mm,  $\epsilon_{res}=6,833$





$$\bar{V}(y) = \bar{V}_{i2} e^{\gamma y} + \bar{V}_{r2} e^{-\gamma y} = \bar{V}_{i2} (e^{\gamma y} + k_s e^{-\gamma y})$$

$$\bar{V}_{i2} = \bar{V}_{i1} e^{-\gamma l}$$

$$\bar{I}(y) = \frac{\bar{V}_{i2}}{Z_0} e^{\gamma y} - \frac{\bar{V}_{r2}}{Z_0} e^{-\gamma y} = \frac{\bar{V}_{i2}}{Z_0} (e^{\gamma y} - k_s e^{-\gamma y})$$

$$\bar{V}_{r1} = \bar{V}_{r2} e^{-\gamma l}$$

$\bar{V}_{i2}, \bar{V}_{r2}$  – ondas incidente e reflectida de tensão na carga ( $z = l, y = 0$ )

$$k_s = \frac{\bar{V}_{r2}}{\bar{V}_{i2}} = k e^{j\theta_s} \text{ fator de reflexão (de tensão) na carga}$$

$$k(y) = k e^{j\theta} = \frac{\bar{V}_r(y)}{\bar{V}_i(y)} = \frac{k_s e^{-\gamma y}}{e^{\gamma y}} = k_s e^{-2\gamma y}$$

$$Z(y) = \frac{\bar{V}(y)}{\bar{I}(y)} = Z_0 \frac{e^{\gamma y} + k_s e^{-\gamma y}}{e^{\gamma y} - k_s e^{-\gamma y}} = Z_0 \frac{1+k(y)}{1-k(y)}$$

$$k(y) = \frac{Z(y) - Z_0}{Z(y) + Z_0} \quad k_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = \frac{z_s - 1}{z_s + 1} \quad z_s = \frac{Z_s}{Z_0}$$

$$Z_s = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} \quad Z_{1s} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = Z(y = \ell) = Z_0 \frac{e^{\gamma \ell} + k_s e^{-\gamma \ell}}{e^{\gamma \ell} - k_s e^{-\gamma \ell}} = Z_0 \frac{1+k_{1s}}{1-k_{1s}}$$

$$\bar{V}_2 = T_V \bar{V}_1 \quad T_V = \frac{1+k_s}{e^{\gamma \ell} + k_s e^{-\gamma \ell}}$$

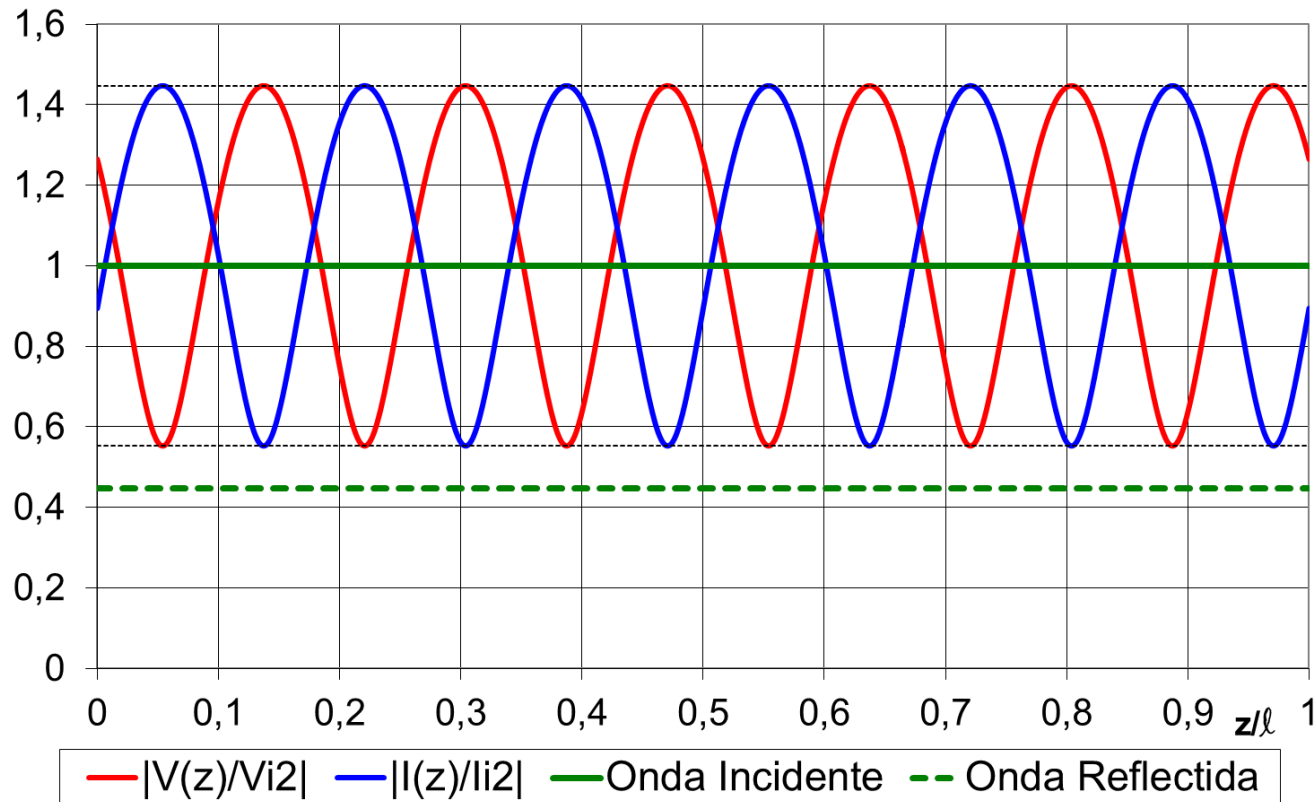
$$\bar{I}_2 = T_I \bar{I}_1 \quad T_I = \frac{1-k_s}{e^{\gamma \ell} - k_s e^{-\gamma \ell}}$$



$$\left| \frac{\bar{V}(y)}{\bar{V}_{i2}} \right| = \sqrt{e^{2\alpha y} + k^2 e^{-2\alpha y} + 2k \cos(2\beta y - \theta)}$$

**Exemplo – LT sem perdas**  
 $\ell = 60 \text{ m}$ ,  $Z_s = Z_0 + jZ_0$   
 $f = 15 \text{ MHz}$  ( $\lambda = 20 \text{ m}$ )

$$\left| \frac{\bar{I}(y)}{\bar{I}_{i2}} \right| = \sqrt{e^{2\alpha y} + k^2 e^{-2\alpha y} - 2k \cos(2\beta y - \theta)}$$



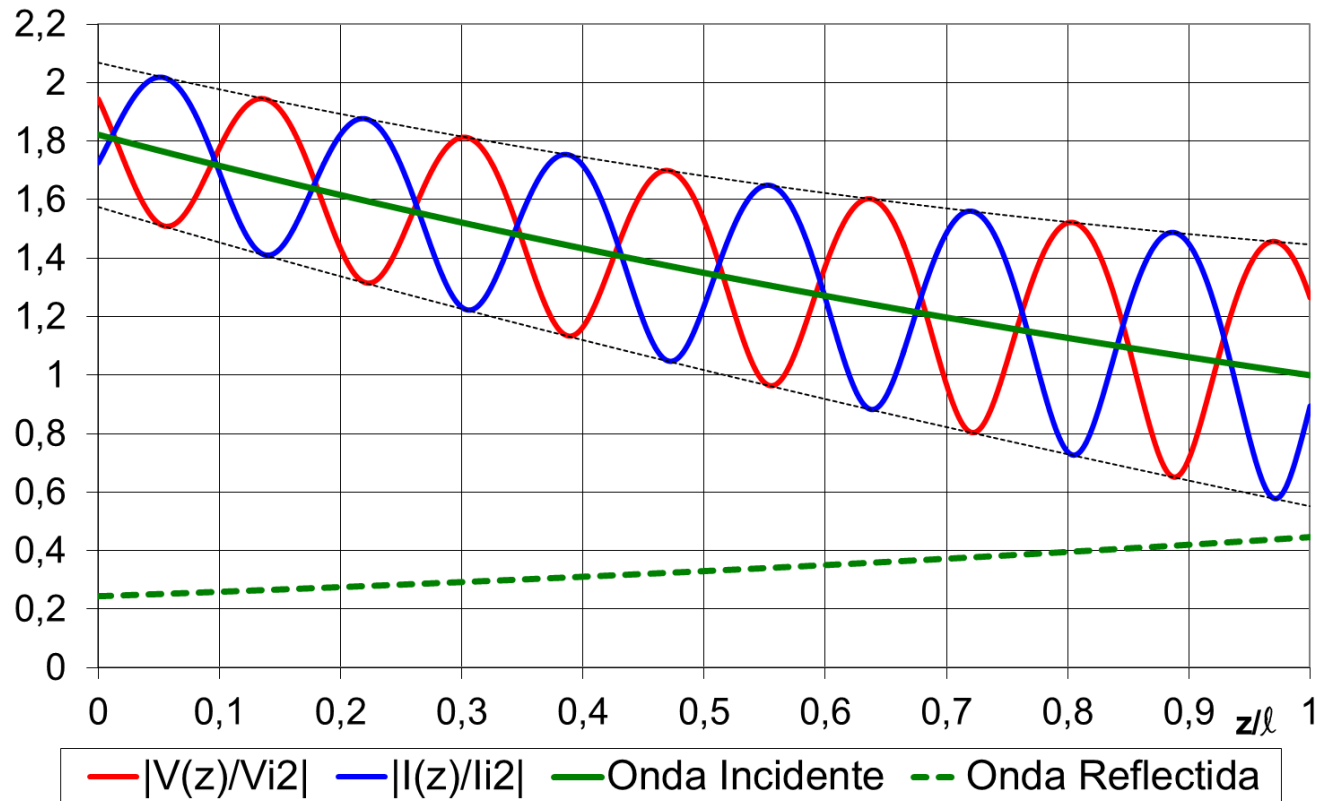
## LT – Tensão e Corrente (4)

26/55

### Exemplo – LT com perdas

$\ell=60$  m,  $Z_s=Z_0+jZ_0$ ,  $\alpha=0,01$  Nep.m<sup>-1</sup>

$f=15$  MHz ( $\lambda=20$  m)



$$\bar{V}(y) = \bar{V}_{i2} (e^{j\beta y} + k_s e^{-j\beta y})$$

$$\bar{I}(y) = \bar{I}_{i2} (e^{j\beta y} - k_s e^{-j\beta y})$$

$$\left| \frac{\bar{V}(y)}{\bar{V}_{i2}} \right| = \sqrt{1 + k^2 + 2k \cos(2\beta y - \theta_s)}$$

$$\left| \frac{\bar{I}(y)}{\bar{I}_{i2}} \right| = \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos(2\beta y - \theta_s)}$$

## Tensão

$$y_{\max} = \frac{\lambda \theta_s}{4\pi} + n \frac{\lambda}{2} \quad \left| \frac{\bar{V}}{\bar{V}_{i2}} \right|_{\max} = 1 + k$$

$$y_{\min} = \frac{\lambda \theta_s}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} \quad \left| \frac{\bar{V}}{\bar{V}_{i2}} \right|_{\min} = 1 - k$$

## Corrente

$$y_{\min} = \frac{\lambda \theta_s}{4\pi} + n \frac{\lambda}{2} \quad \left| \frac{\bar{I}}{\bar{I}_{i2}} \right|_{\min} = 1 - k$$

$$y_{\max} = \frac{\lambda \theta_s}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} \quad \left| \frac{\bar{I}}{\bar{I}_{i2}} \right|_{\max} = 1 + k$$

$$p = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{1+k}{1-k}$$

$$k(y) = k_s e^{-j2\beta y} = k e^{-j(2\beta y - \theta_s)}$$

$$Z_{\max} = p Z_0 \quad Z_{\min} = \frac{Z_0}{p}$$

$$Z(y) = \frac{\bar{V}(y)}{\bar{I}(y)} = Z_0 \frac{Z_s + j Z_0 \tan(\beta y)}{Z_0 + j Z_s \tan(\beta y)}$$

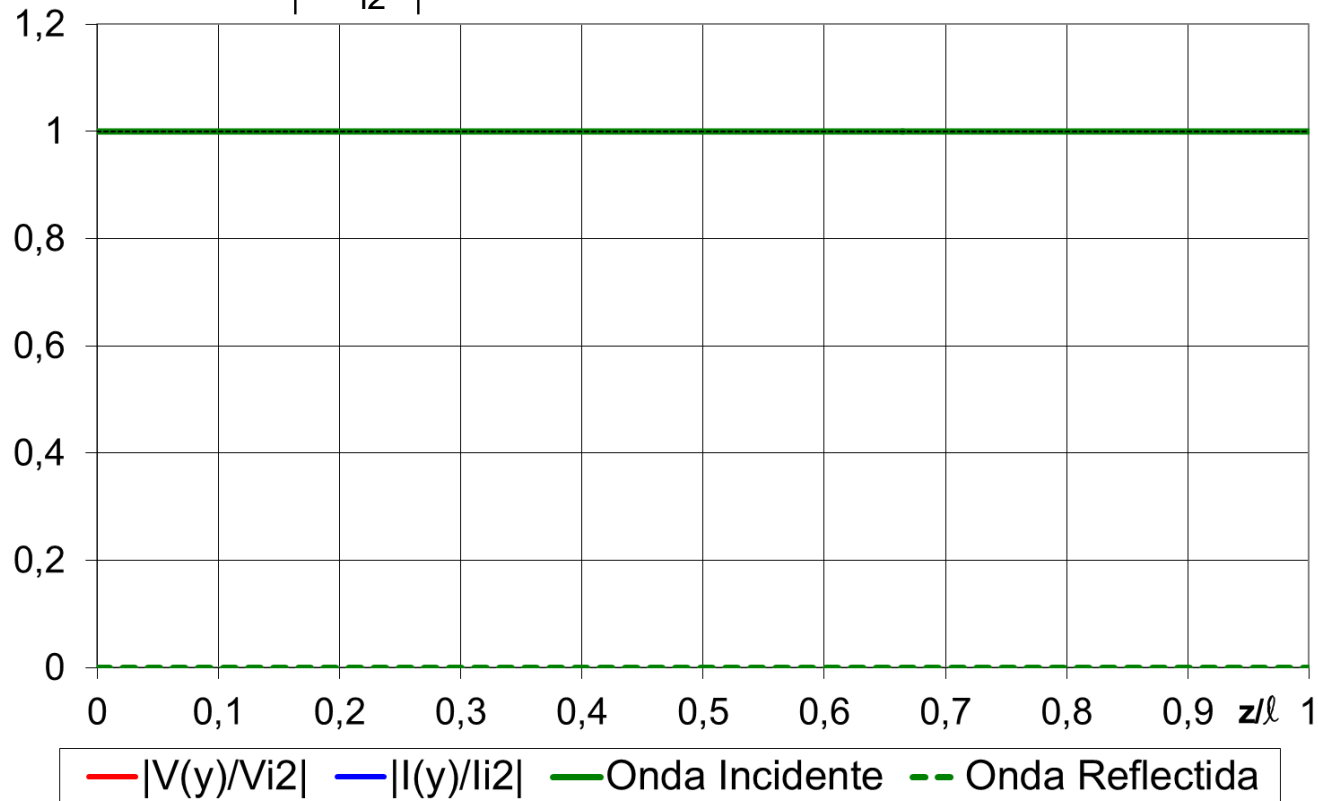
## LT sem Perdas (2)

28/55

Caso Particular  $Z_s = Z_0$  (Carga adaptada) ( $\ell = 40$  m,  $f = 15$  MHz,  $\lambda = 20$  m)

$$k_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = 0 \quad p = \frac{1+k}{1-k} = 1$$

$$\bar{V}(y) = \bar{V}_{i2} e^{-j\beta y} \quad \left| \frac{\bar{V}(y)}{\bar{V}_{i2}} \right| = 1 \quad k(y) = 0 \quad Z(y) = Z_0$$



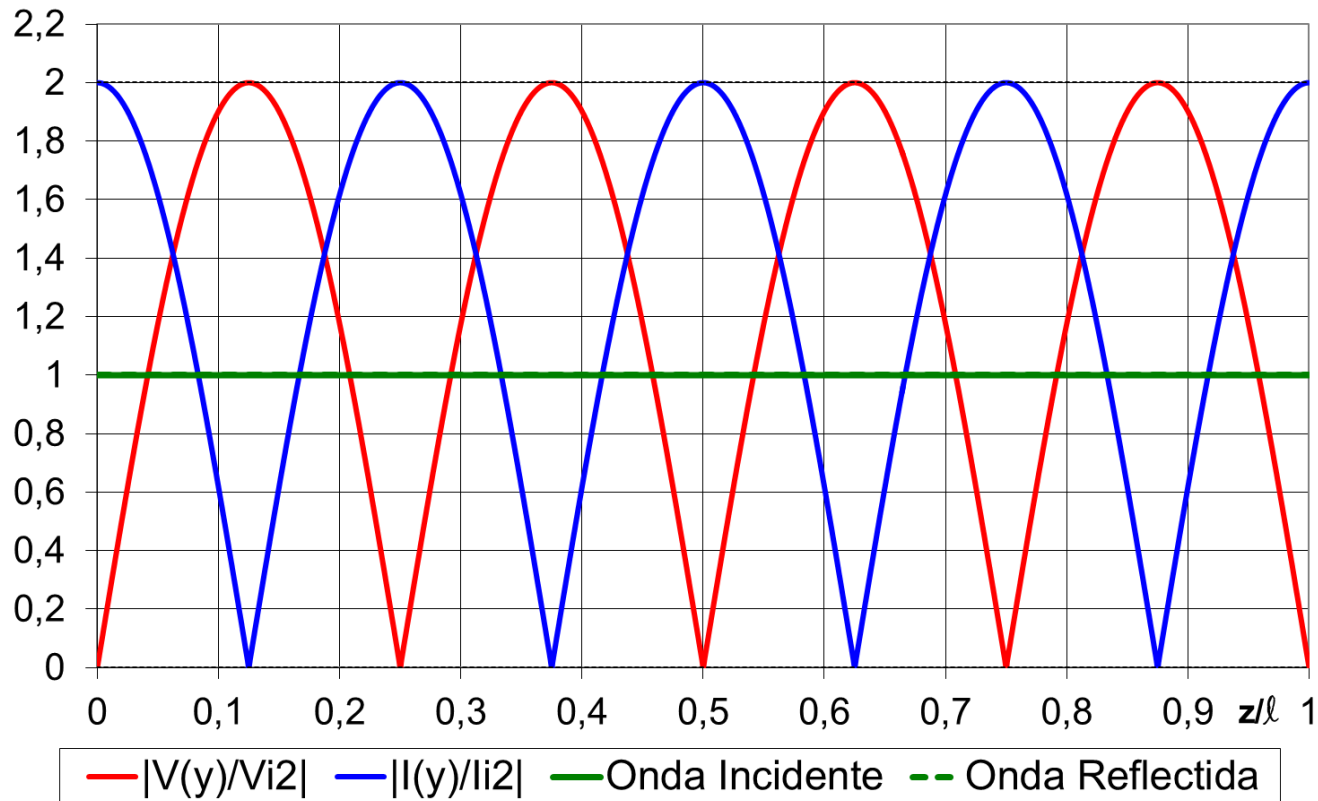
# LT sem Perdas (3)

29/55

**Caso Particular  $Z_s=0$  (Curto-circuito) ( $\ell=40$  m,  $f=15$  MHz,  $\lambda=20$  m)**

$$k_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = -1 \quad p = \frac{1+k}{1-k} = \infty$$

$$\bar{V}(y) = j2\bar{V}_{i2} \sin(\beta y) \quad \left| \frac{\bar{V}(y)}{\bar{V}_{i2}} \right| = |2\sin(\beta y)| \quad k(y) = -e^{-j2\beta y} \quad Z(y) = jZ_0 \tan(\beta y)$$



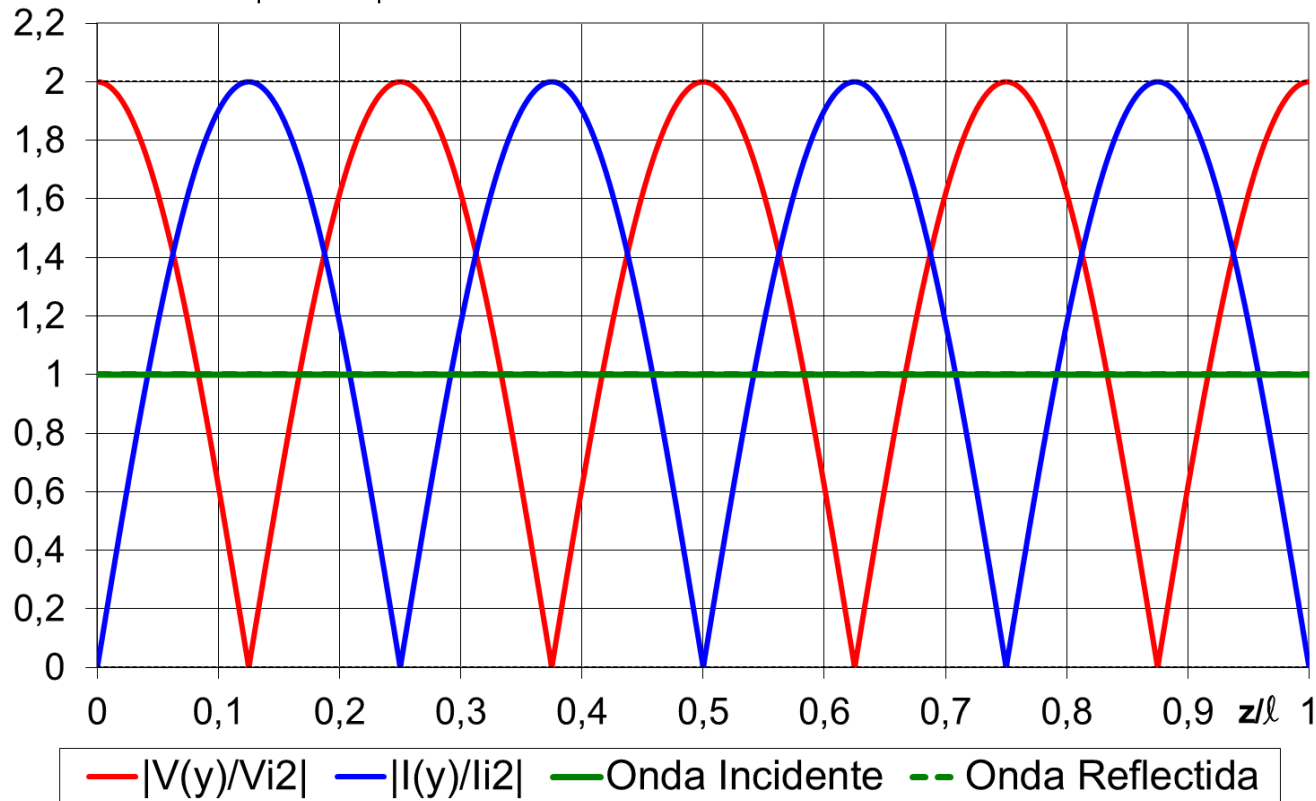
# LT sem Perdas (4)

30/55

Caso Particular  $Z_s = \infty$  (Circuito aberto) ( $\ell = 40$  m,  $f = 15$  MHz,  $\lambda = 20$  m)

$$k_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = 1 \quad \rho = \frac{1 + k}{1 - k} = \infty$$

$$\bar{V}(y) = 2\bar{V}_{i2} \cos(\beta y) \quad \left| \frac{\bar{V}(y)}{\bar{V}_{i2}} \right| = |2 \cos(\beta y)| \quad k(y) = e^{-j2\beta y} \quad Z(y) = -jZ_0 \cotan(\beta y)$$



### Variação no Espaço e no Tempo

$$V(y,t) = \text{Re} \left[ \bar{V}(y) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ \bar{V}_{i2} \left( e^{j\beta y} + k_s e^{-j\beta y} \right) e^{j\omega t} \right]$$

$$\frac{V(y,t)}{V_{i2}} = \cos(\omega t + \beta y) + k \cos(\omega t - \beta y + \theta_s)$$

Variação espacial (t=Constante)

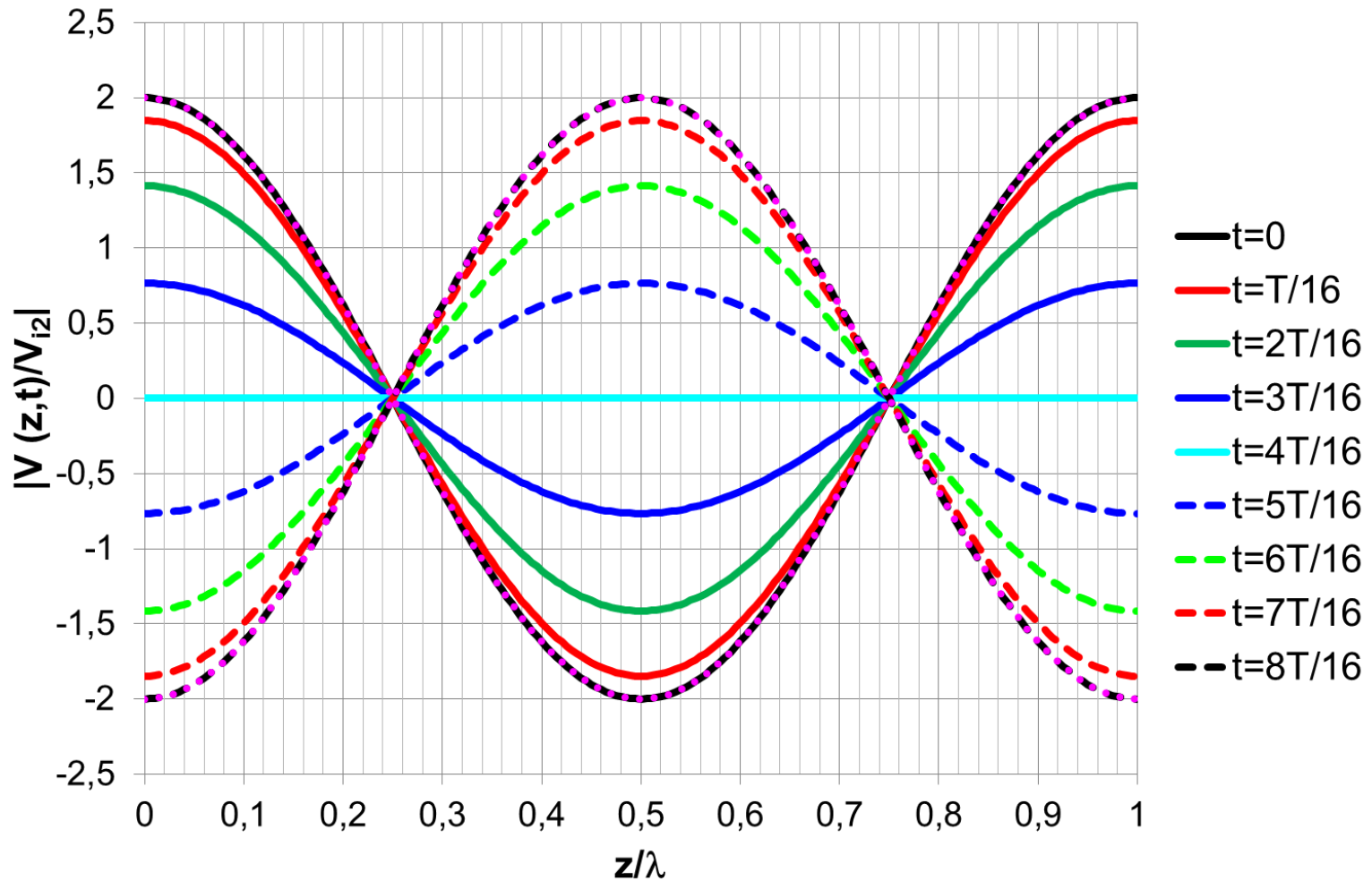
Variação temporal (y=Constante, z=Constante)

$$\omega t = 2\pi \frac{t}{T} \qquad \beta y = 2\pi \frac{y}{\lambda}$$

# LT sem Perdas (6)

32/55

Caso Particular  $Z_s = \infty$  (Circuito-aberto) ( $f=15$  MHz,  $\lambda=20$  m)

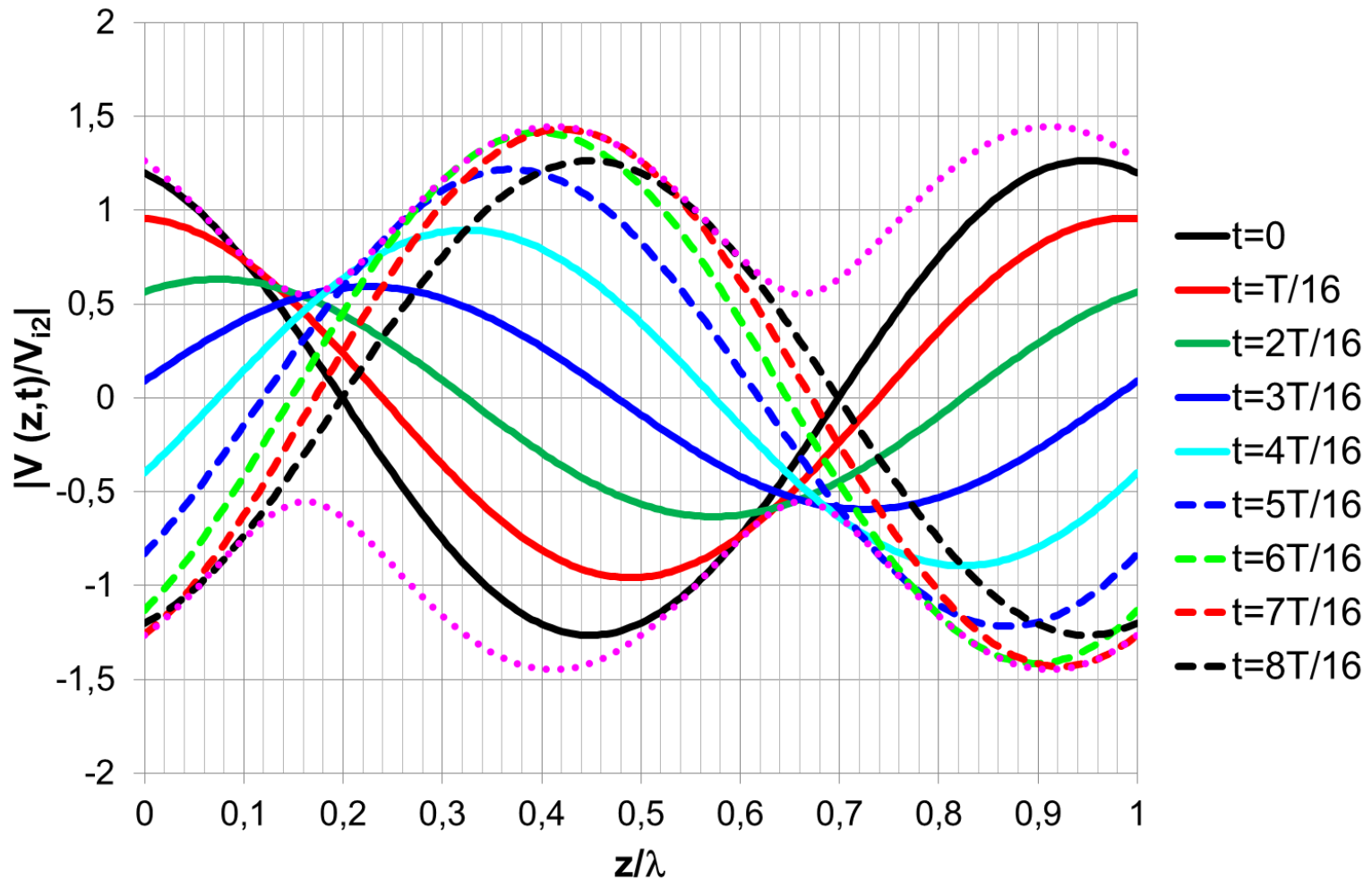




# LT sem Perdas (7)

33/55

Caso Particular  $Z_s = Z_0 + j Z_0$  ( $k_s = 0,447 e^{j63,43^\circ}$ ) ( $f=15$  MHz,  $\lambda=20$  m)



## Potência Transportada

Numa linha sem perdas a potência transportada é a mesma em qualquer ponto da linha

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\bar{V} \bar{I}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \bar{V} \frac{\bar{V}^*}{Z^*} \right) = \frac{|\bar{V}|^2}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{Z^*} \right)$$

É mais fácil calcular a potência nos pontos de máximo e mínimo de tensão (corrente), porque a tensão e a corrente estão em fase

$$\bar{V}_{\max} = \bar{V}_{i2} (1+k) \quad \bar{I}_{\min} = \frac{\bar{V}_{i2}}{Z_0} (1-k) = \frac{\bar{V}_{\max}}{p Z_0} \quad k_s = k e^{j\theta_s}$$

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \bar{V}_{i2} (1+k) \frac{\bar{V}_{i2}^*}{Z_0} (1-k) \right] = \frac{|\bar{V}_{i2}|^2}{2 Z_0} (1-k^2) = \frac{|\bar{V}_{\max}|^2}{2 p Z_0} = p \frac{|\bar{V}_{\min}|^2}{2 Z_0}$$

$$Z_s = Z_0 \quad (k_s = 0, p = 1) \rightarrow P_{\max} = \frac{|\bar{V}_{i2}|^2}{2 Z_0} = \frac{|\bar{V}_0|^2}{8 Z_0} \quad \text{se } Z_g = Z_0$$

## Adaptação do Gerador

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_{i2} (e^{j\beta\ell} + k_s e^{-j\beta\ell}) = \frac{Z_{1s}}{Z_{1s} + Z_g} \bar{V}_0 \quad Z_{1s} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\bar{V}_{i2} (e^{j\beta\ell} + k_s e^{-j\beta\ell})}{\frac{\bar{V}_{i2}}{Z_0} (e^{j\beta\ell} - k_s e^{-j\beta\ell})}$$

$$\bar{V}_{i2} = \frac{Z_0 (Z_s + Z_0)}{(Z_s + Z_0)(Z_g + Z_0)e^{j\beta\ell} - (Z_s - Z_0)(Z_g - Z_0)e^{-j\beta\ell}} \bar{V}_0 \quad k_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$$

- Se  $Z_g \neq Z_0$  (Linha desadaptada do gerador)

$\bar{V}_{i2}$  depende da carga ( $Z_s$ ) (excepto se  $Z_s = Z_0$ )

- Se  $Z_g = Z_0$  (Linha adaptada ao gerador)

$$\bar{V}_{i2} \text{ é independente da carga} \quad \bar{V}_{i2} = \frac{\bar{V}_0}{2} e^{-j\beta\ell} \quad (\bar{V}_{i1} = \frac{\bar{V}_0}{2})$$

# Carta de Smith (1)

36/55

$$\bar{V}(y) = \bar{V}_i + \bar{V}_r = \bar{V}_{i2} (e^{j\beta y} + k_{vs} e^{-j\beta y}) = \bar{V}_{i2} e^{j\beta y} [1 + k_v(y)] = \bar{V}_i(y) [1 + k_v(y)]$$

$$\bar{I}(y) = \bar{I}_i + \bar{I}_r = \bar{I}_{i2} (e^{j\beta y} + k_{ls} e^{-j\beta y}) = \bar{I}_{i2} e^{j\beta y} [1 + k_l(y)] = \bar{I}_i(y) [1 + k_l(y)]$$

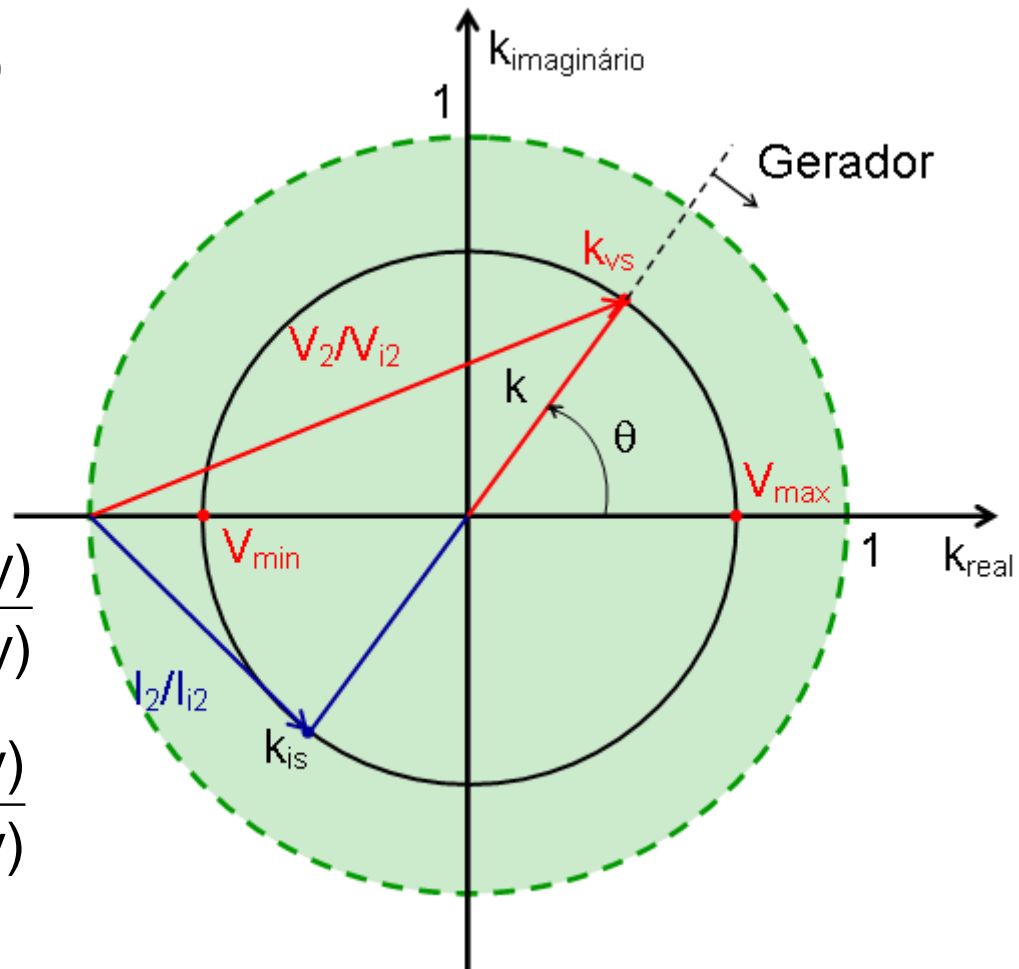
$$k_v(y) = k_{vs} e^{-j2\beta y} \quad k_l(y) = -k_v(y)$$

$$\bar{V}_i(y) = \bar{V}_{i2} e^{j\beta y}$$

$$\bar{I}_i(y) = \frac{\bar{V}_i(y)}{Z_0} = \bar{I}_{i2} e^{j\beta y}$$

$$z(y) = \frac{Z(y)}{Z_0} = r(y) + jx(y) = \frac{1 + k_v(y)}{1 - k_v(y)}$$

$$y(y) = \frac{Y(y)}{Y_0} = g(y) + jb(y) = \frac{1 + k_l(y)}{1 - k_l(y)}$$



$$r + jx = \frac{1+k}{1-k} = \frac{1+(k_{\text{real}} + jk_{\text{imaginário}})}{1-(k_{\text{real}} + jk_{\text{imaginário}})}$$

$$\begin{cases} (k_{\text{real}} - \frac{r}{1+r})^2 + k_{\text{imaginário}}^2 = \frac{1}{(1+r)^2} \\ (k_{\text{real}} - 1)^2 + (k_{\text{imaginário}} - \frac{1}{x})^2 = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

**Variação com r**

Circunferências de centro  $(\frac{r}{1+r}, 0)$  e raio  $\frac{1}{1+r}$

**Variação com x**

Circunferências de centro  $(1, \frac{1}{x})$  e raio  $|\frac{1}{x}|$

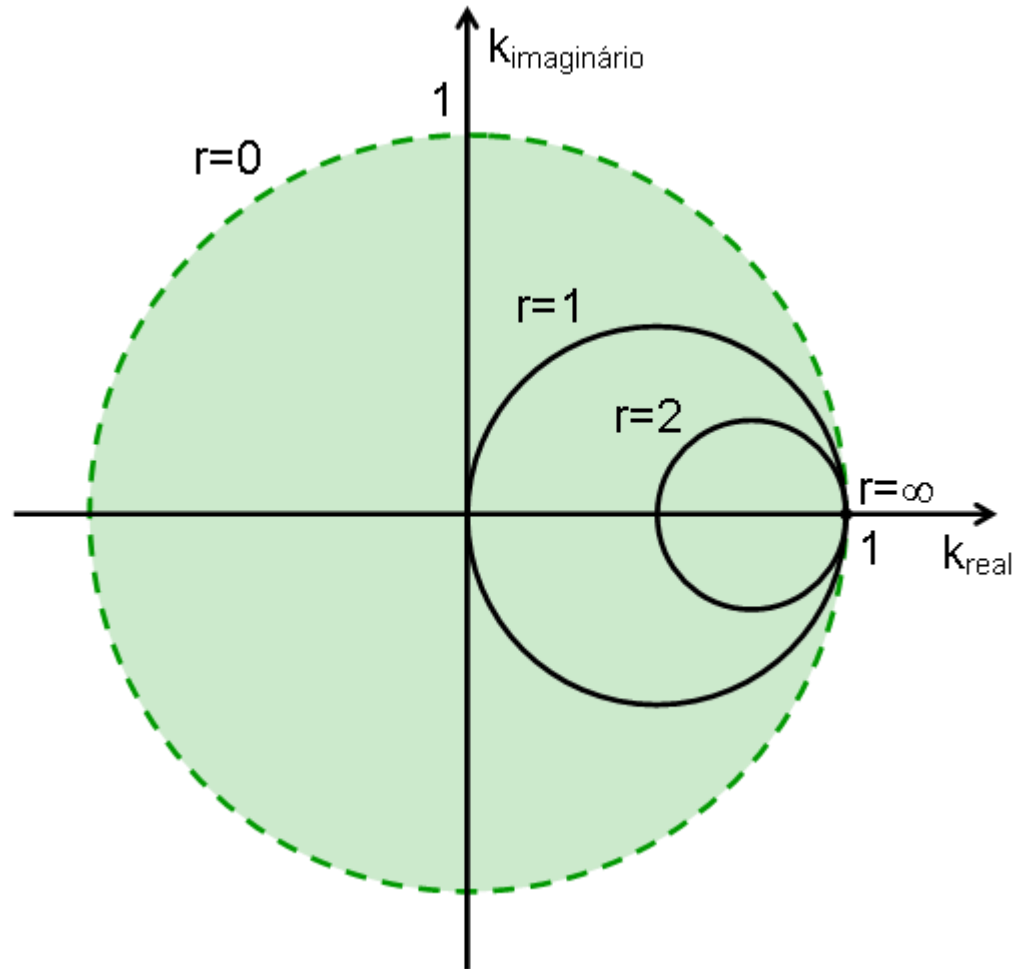
## Curvas de $r=\text{cte}$ (circunferências com centro sobre o eixo real)

$$r=0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } (0,0) \\ \text{Raio } 1 \end{array} \right.$$

$$r=1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } (\frac{1}{2}, 0) \\ \text{Raio } \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$r=2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } (\frac{2}{3}, 0) \\ \text{Raio } \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$r=\infty \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } (1,0) \\ \text{Raio } 0 \end{array} \right.$$



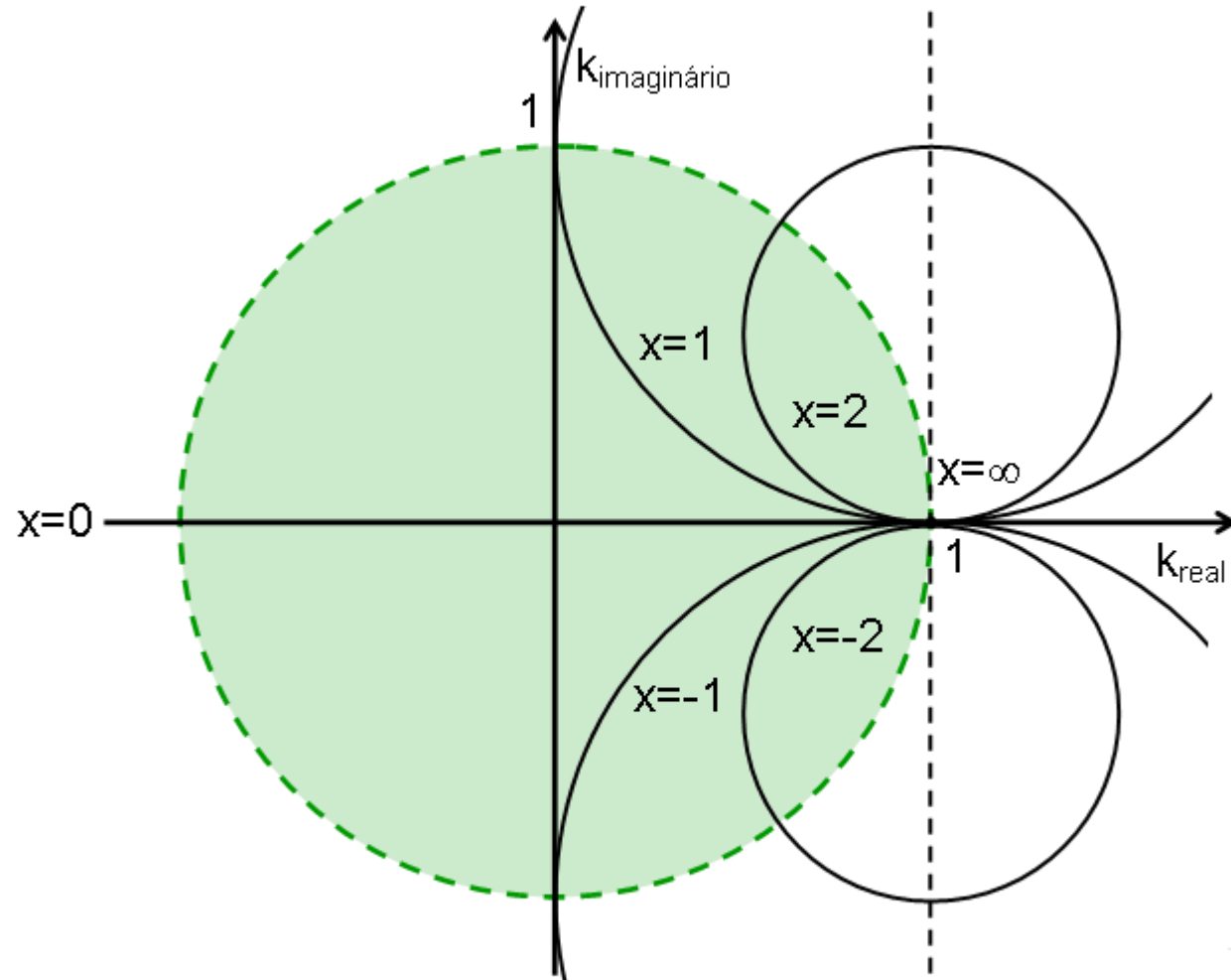
Curvas de  $x=\text{cte}$  (circunf. com centro sobre a recta vertical  $k_{\text{real}}=1$ )

$$x = \pm \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } (1, 0) \\ \text{Raio } 0 \end{array} \right.$$

$$x = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } (1, -1) \\ \text{Raio } 1 \end{array} \right.$$

$$x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } (1, \infty) \\ \text{Raio } \infty \end{array} \right.$$

$$x = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro } (1, 1) \\ \text{Raio } 1 \end{array} \right.$$



# Carta de Smith (5)

40/55

The Complete Smith Chart  
Black Magic Design

Exemplo ( $f=200$  MHz,  $\ell=4,8$  m,  $Z_s=Z_0+jZ_0$ )

$$\lambda=1,5 \text{ m}$$

$$\ell=3,2\lambda$$

$$k_s \approx 0,447 \exp(j63,4^\circ)$$

$$p \approx 2,62$$

$$y_s \approx 0,5 - j0,5$$

$$z_{\max} \approx 2,62$$

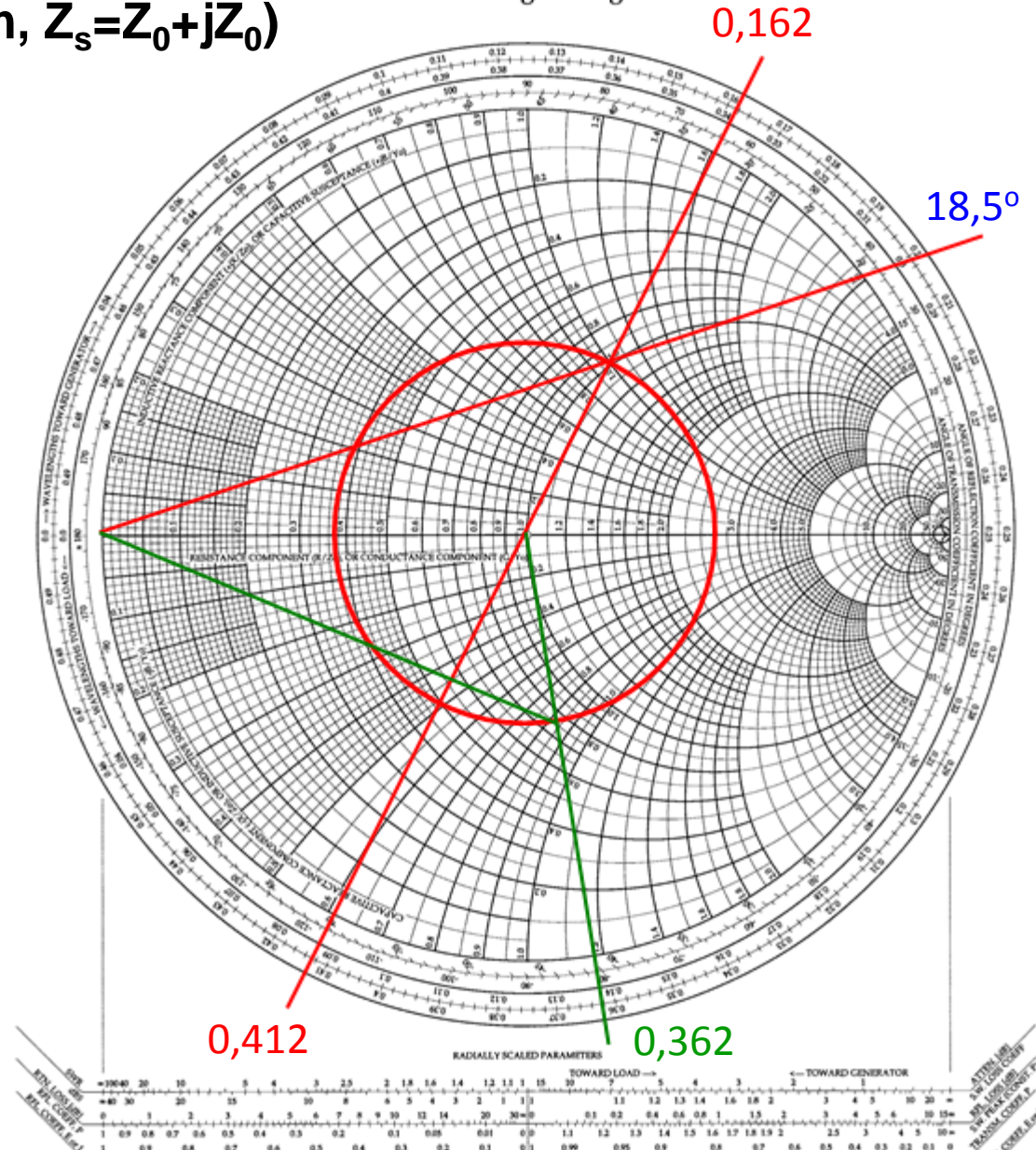
$$z_{\min} \approx 0,38$$

$$d \approx (0,162 + j0,2)\lambda$$

$$k_{1s} \approx 0,447 \exp(-j80,5^\circ)$$

$$z_{1s} \approx 0,760 - j0,838$$

$$\frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_{i2}} \approx 1,265 \exp(j18,4^\circ)$$



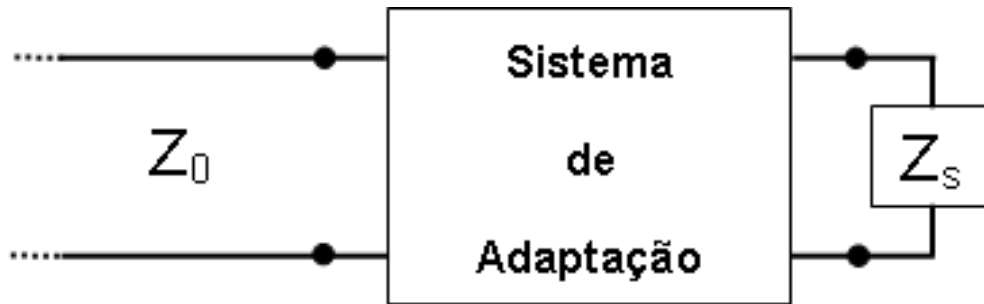


$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{V}_i \bar{I}_i^*) = \frac{|\bar{V}_i|^2}{2Z_0} \quad P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{V}_r \bar{I}_r^*) = \frac{|\bar{V}_r|^2}{2Z_0} = k^2 \frac{|\bar{V}_i|^2}{2Z_0} = k^2 P_i$$

$$P_t = P_i - P_r = (1 - k^2) P_i$$

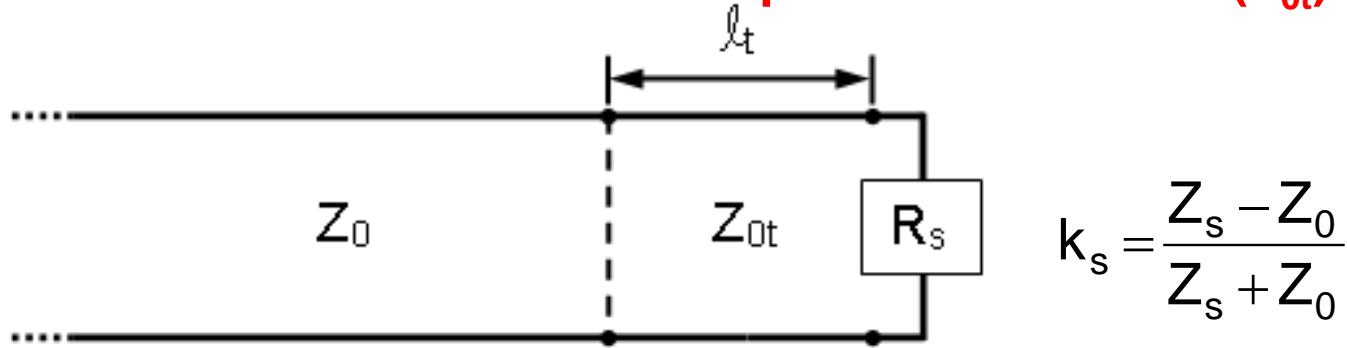
Para maximizar a potência entregue à carga procede-se à adaptação ( $k=0$ )

A desadaptação pode provocar a deformação dos sinais



- Transformador de  $\lambda/4$  em série
- “Stub” simples em paralelo

## Transformador de Quarto de Comprimento de Onda ( $Z_{0t}$ )



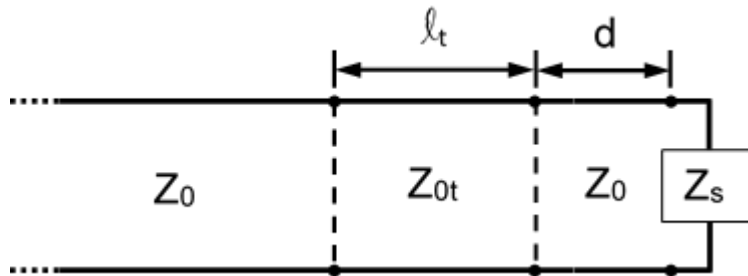
$$Z(y) = Z_{0t} \frac{e^{j\beta y} + k_s e^{-j\beta y}}{e^{j\beta y} - k_s e^{-j\beta y}}$$

$$Z(y) = Z_{0t} \frac{Z_s \cos(\beta y) + j Z_{0t} \sin(\beta y)}{Z_{0t} \cos(\beta y) + j Z_s \sin(\beta y)}$$

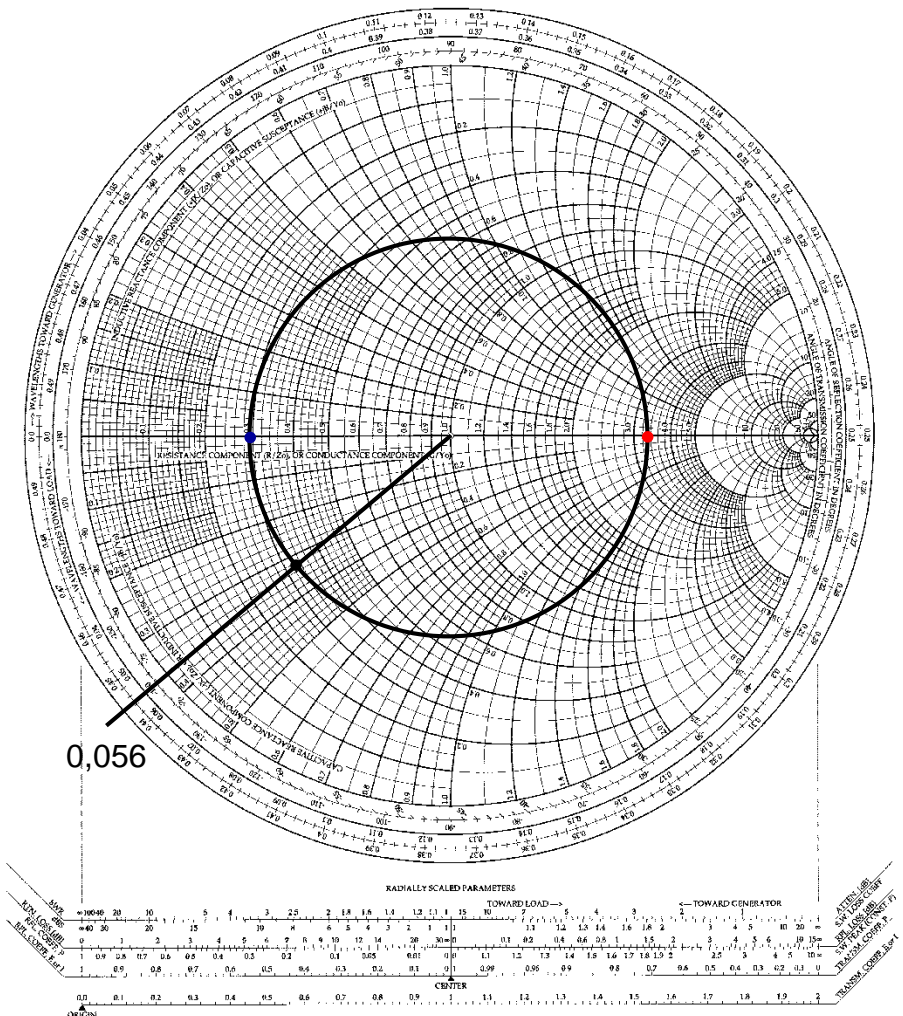
$$y = \ell_t = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \beta y = \frac{\pi}{2} \quad Z(y = \lambda/4) = \frac{Z_{0t}^2}{Z_s} \quad Z_s = R_s \quad Z_{0t} = \sqrt{Z_0 R_s}$$

- Mesmo quando  $Z_s$  não é real, pode-se usar o transformador de  $\lambda/4$ , inserindo-o num ponto da LT ( $y=d$ ) onde a impedância é real.
- Pode usar-se mais do que um troço (maior largura de banda).

## Transformador de Quarto de Comprimento de Onda (d, $Z_{0t}$ )



The Complete Smith Chart  
Black Magic Design



**Exemplo**  $Z_s = \frac{Z_0}{3} - j \frac{Z_0}{3}$

**Solução 1**

$$d = 0,056 \lambda$$

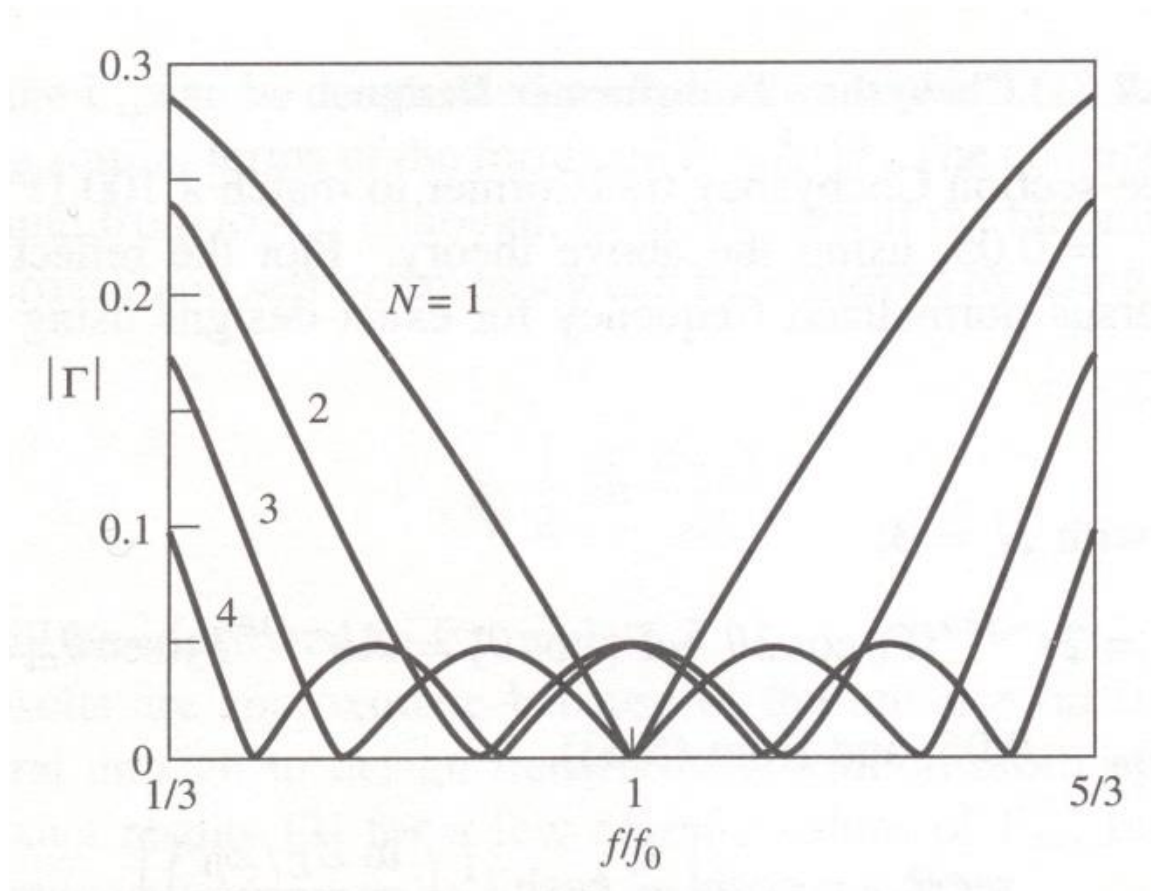
$$Z_{0t} = \sqrt{Z_0 0,30 Z_0} = 0,5477 Z_0$$

**Solução 2**

$$d = 0,306 \lambda$$

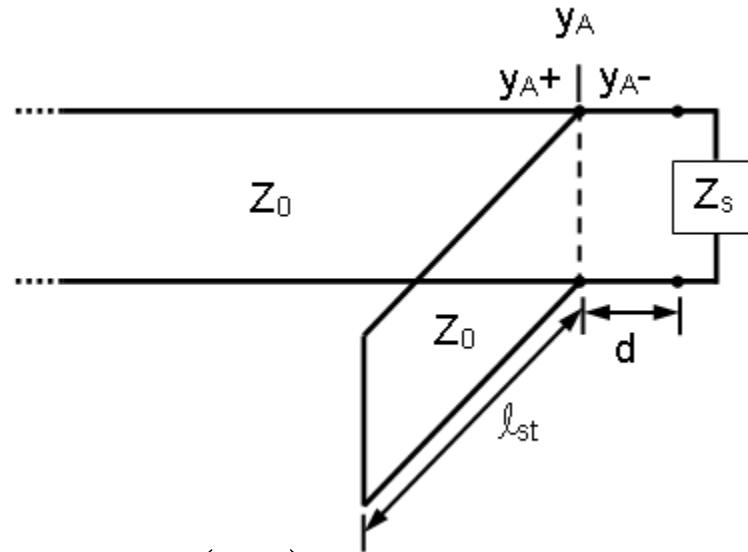
$$Z_{0t} = \sqrt{Z_0 3,40 Z_0} = 1,8439 Z_0$$

## Exemplo - Transformador de $\lambda/4$ com vários troços (N)



As impedância característica de cada troço segue uma lei definida (neste caso obtida a partir de polinómios de Chebyshev).

## “Stub” Simples ( $d, \ell_{st}$ )



$$y_{A+} = y_{A-} + y_{stub}$$

$$y_{A-} = g_{A-} + j b_{A-} = \frac{1}{z_{A-}} = \frac{1 + j z_s \tan(\beta d)}{z_s + j \tan(\beta d)} \quad z_s = \frac{Z_s}{Z_0} = r_s + j x_s$$

$$1 + j0 = (g_{A-} + j b_{A-}) + (0 + j b_{stub}) \quad \begin{cases} g_{A-} = 1 & (\text{define } d) \\ b_{stub} = -b_{A-} & (\text{define } \ell_{st}) \end{cases}$$

“Stub” em curto-circuito

$$b_{stub} = -\cotan(\beta \ell_{st})$$

“Stub” em circuito-aberto

$$b_{stub} = \tan(\beta \ell_{st})$$

## Adaptação de Impedâncias (6)

46/55

$$\tan(\beta d) = \frac{-x_s \pm \sqrt{r_s \left[ (r_s - 1)^2 + x_s^2 \right]}}{1 - r_s}$$

$$b_{A^-} = \frac{x_s \tan^2(\beta d) + (r_s^2 + x_s^2 - 1) \tan(\beta d) - x_s}{r_s^2 + [x_s + \tan(\beta d)]^2}$$

**Exemplo**  $Z_s = \frac{Z_0}{3} - j \frac{Z_0}{3} \quad r_s = \frac{1}{3} \quad x_s = -\frac{1}{3}$

$$\tan(\beta d) = \frac{1 + \sqrt{5/3}}{2} \quad \beta d = 48,8793^\circ \quad d = 0,13578\lambda \quad b_{A^-} = -1,29099$$

$$\tan(\beta d) = \frac{1 - \sqrt{5/3}}{2} \quad \beta d = 171,7217^\circ \quad d = 0,47700\lambda \quad b_{A^-} = 1,29099$$

“Stub” em curto-circuito  $\ell_{st} = 0,39511\lambda$  e  $\ell_{st} = 0,10489\lambda$

“Stub” em circuito-aberto  $\ell_{st} = 0,14511\lambda$  e  $\ell_{st} = 0,35489\lambda$

# Adaptação de Impedâncias (7)

47/55

Carta de Smith

Exemplo 1

$$Z_s = \frac{Z_0}{3} - j \frac{Z_0}{3}$$

$$Y_s = \frac{3Y_0}{2} + j \frac{3Y_0}{2}$$

“Stub” em CA

Solução a

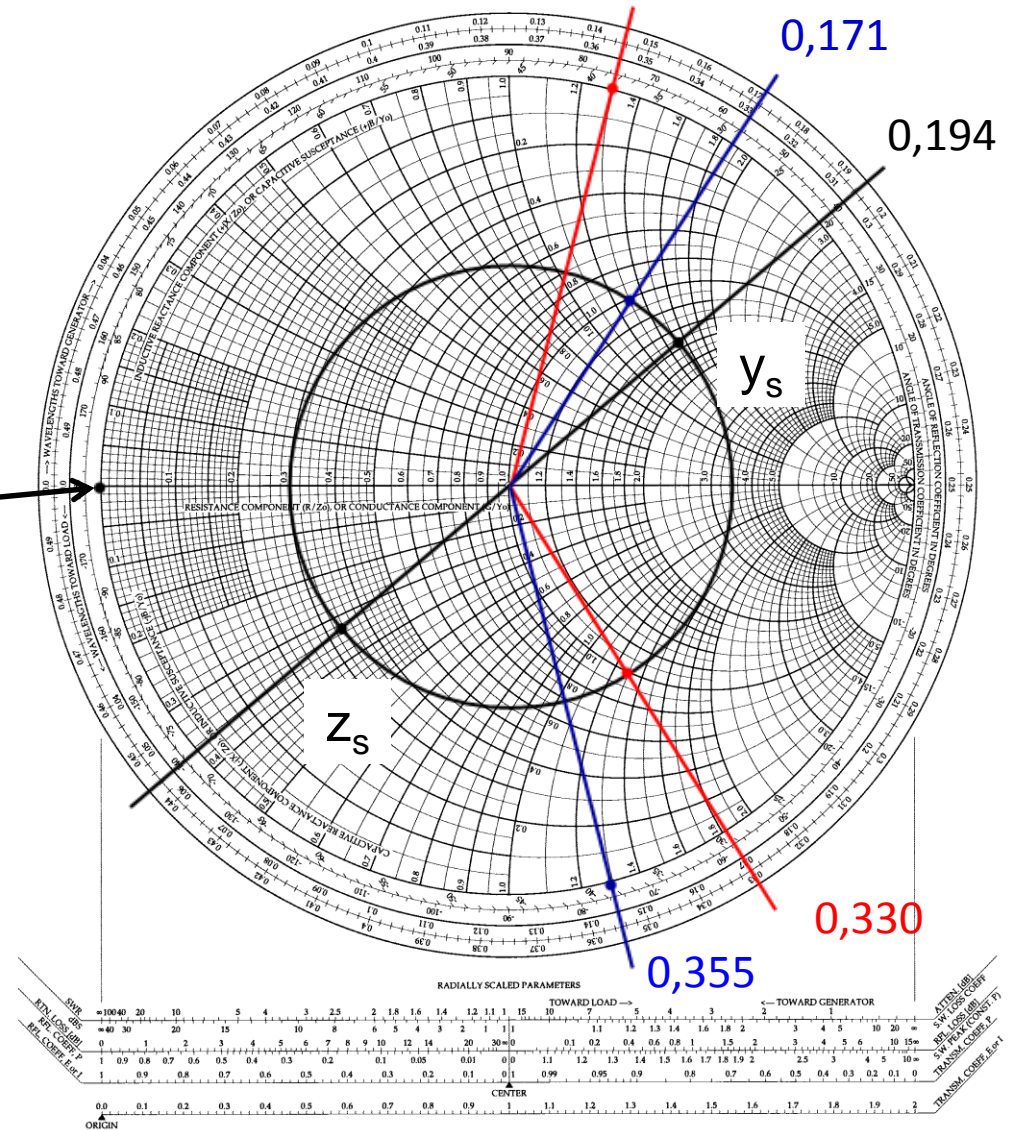
$$\begin{cases} d_a = 0,136 \lambda \\ \ell_{sta} = 0,145 \lambda \end{cases}$$

Solução b

$$\begin{cases} d_b = 0,477 \lambda \\ \ell_{stb} = 0,355 \lambda \end{cases}$$

The Complete Smith Chart

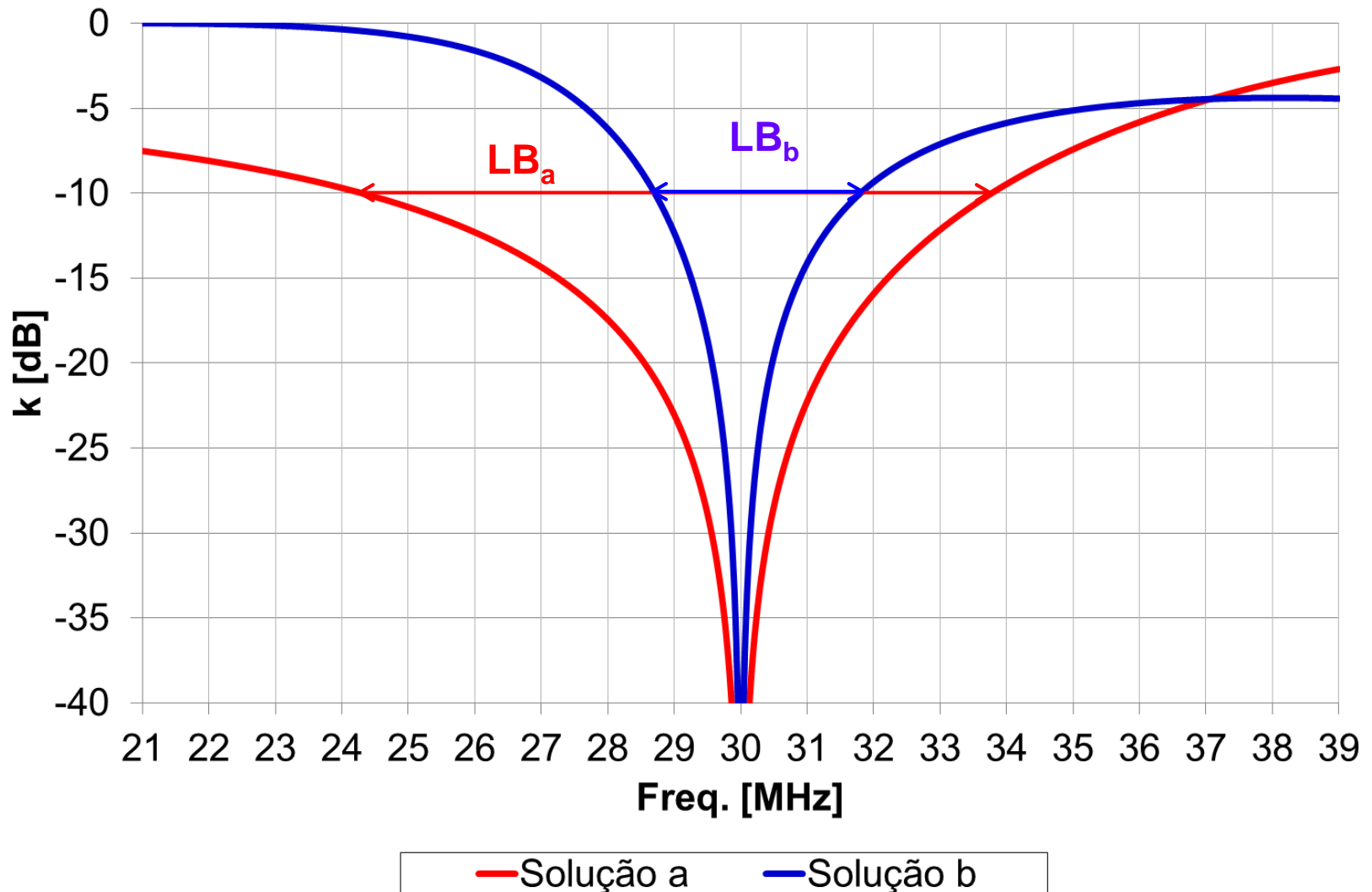
Black Magic Design 0,145



# Adaptação de Impedâncias (8)

48/55

$f=30$  MHz,  $\lambda=10$  m (k=-10 dB 10% de potência reflectida)

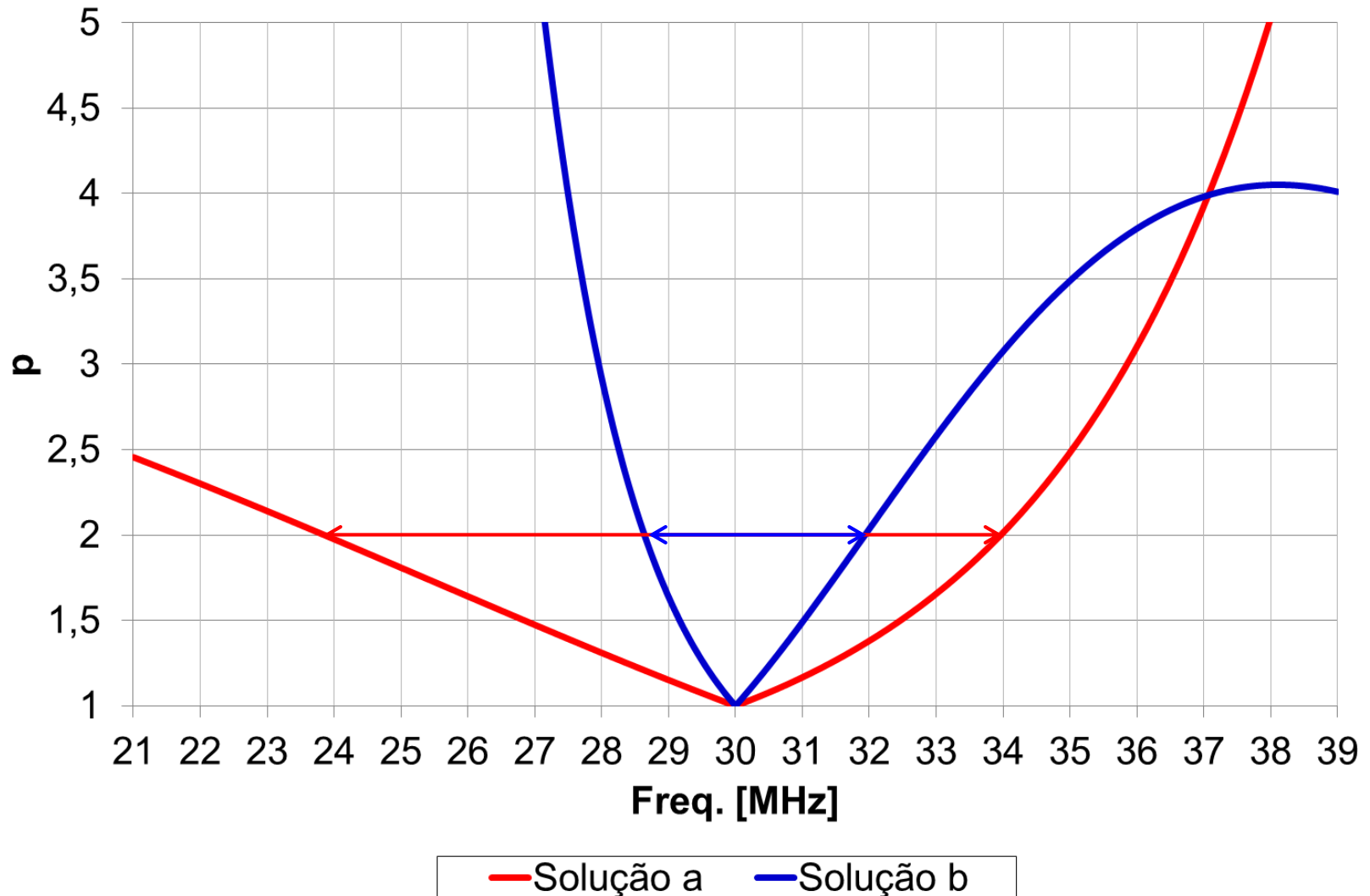




# Adaptação de Impedâncias (9)

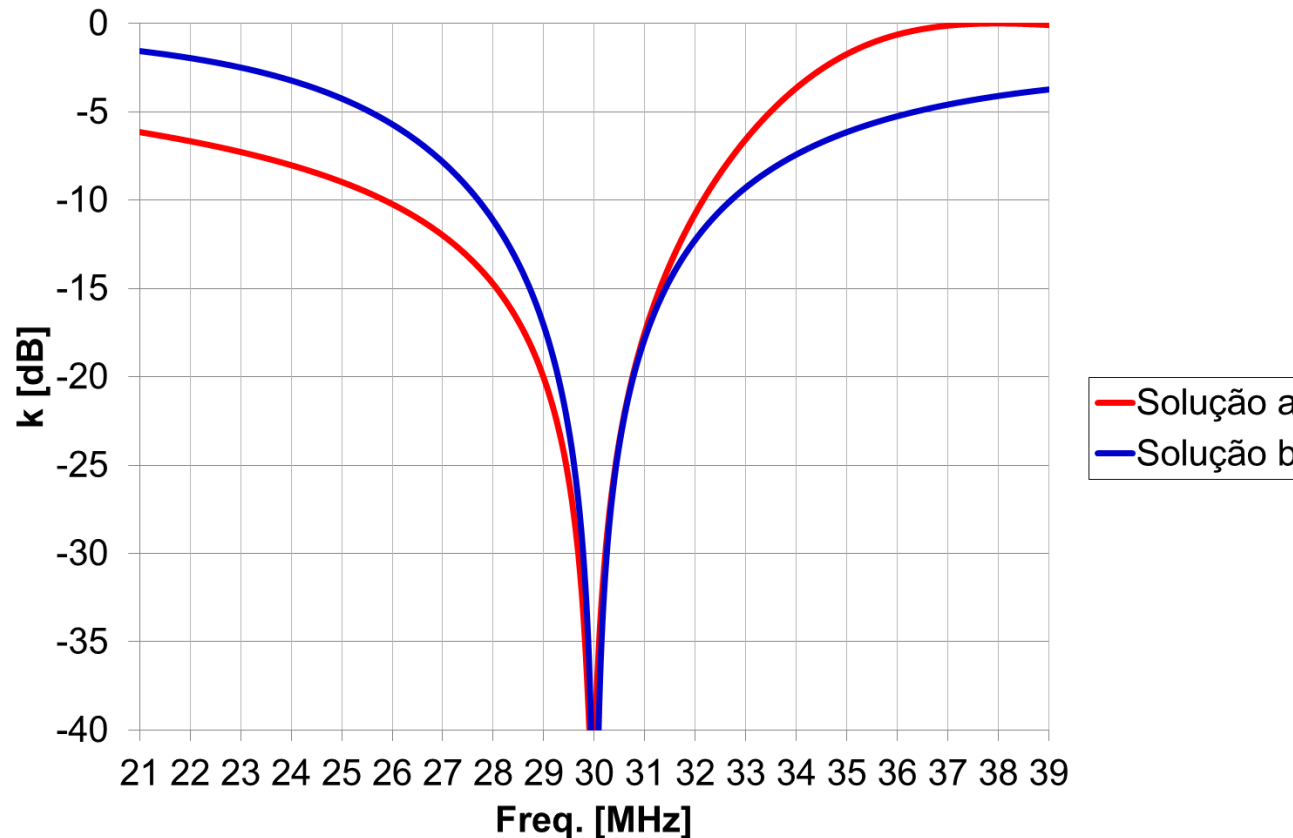
49/55

$f=30$  MHz,  $\lambda=10$  m    ( $k=-10$  dB  $\approx 0,32$   $\longrightarrow$   $p=1,93\approx 2$ )



Exemplo 2 ( $f=30$  MHz,  $z_s=1/3+j1/3$ , “stub” CC)

$d_a=0,24$  m,  $\ell_{sta}=3,95$  m,  $d_b=3,64$  m,  $\ell_{stb}=1,05$  m



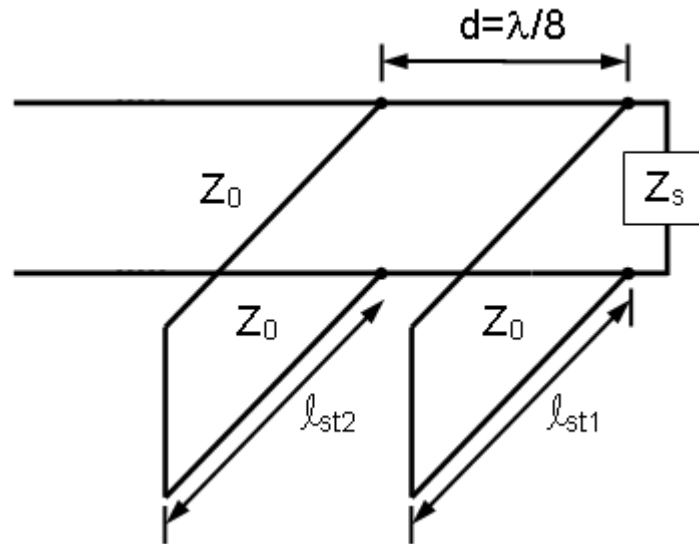
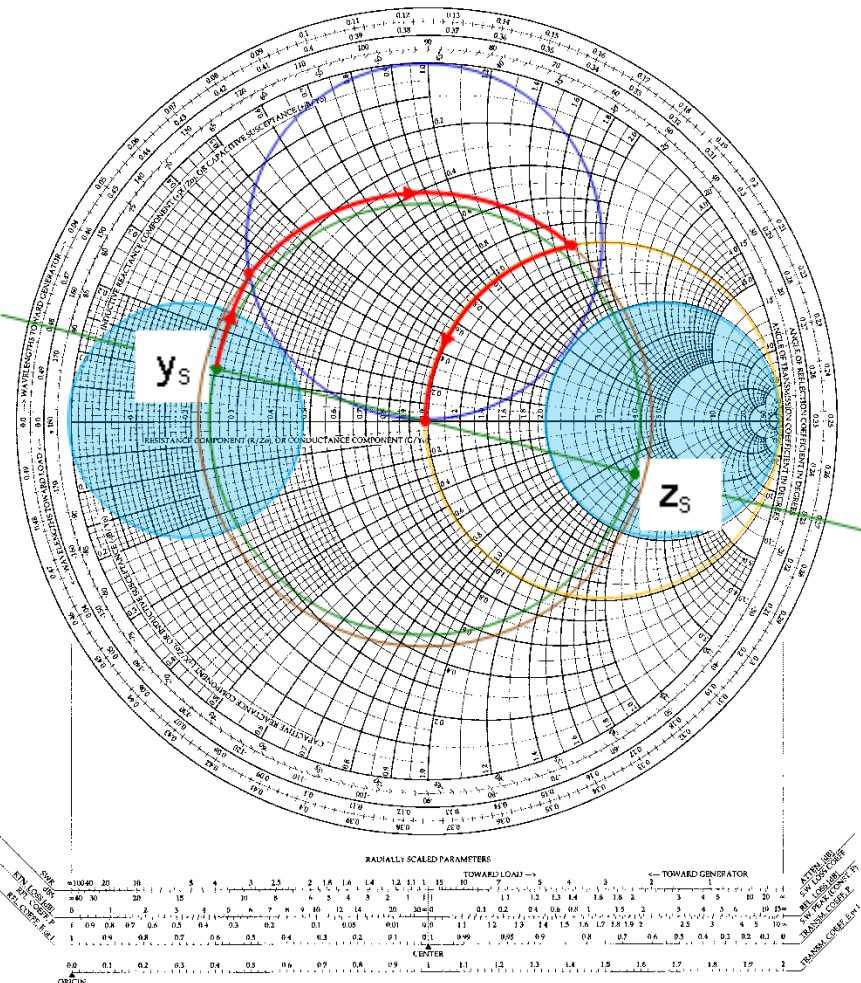
Regra geral tem maior LB a solução com menores troços desadaptados.  
Nem sempre é possível avaliar a melhor solução sem calcular a curva  $k(f)$ .

# Adaptação de Impedâncias (11)

51/55

## “Stub” Duplo ( $l_{st1}$ , $l_{st2}$ )

The Complete Smith Chart  
Black Magic Design



- Tem a vantagem das posições dos “stubs” serem fixas
- Existe uma gama de cargas (círculo azul) que não pode ser adaptada (tanto menor quanto menor  $d$ )
- Quando tal acontece pode-se usar um “stub” triplo

## Características (Típicas) de Linhas de Transmissão

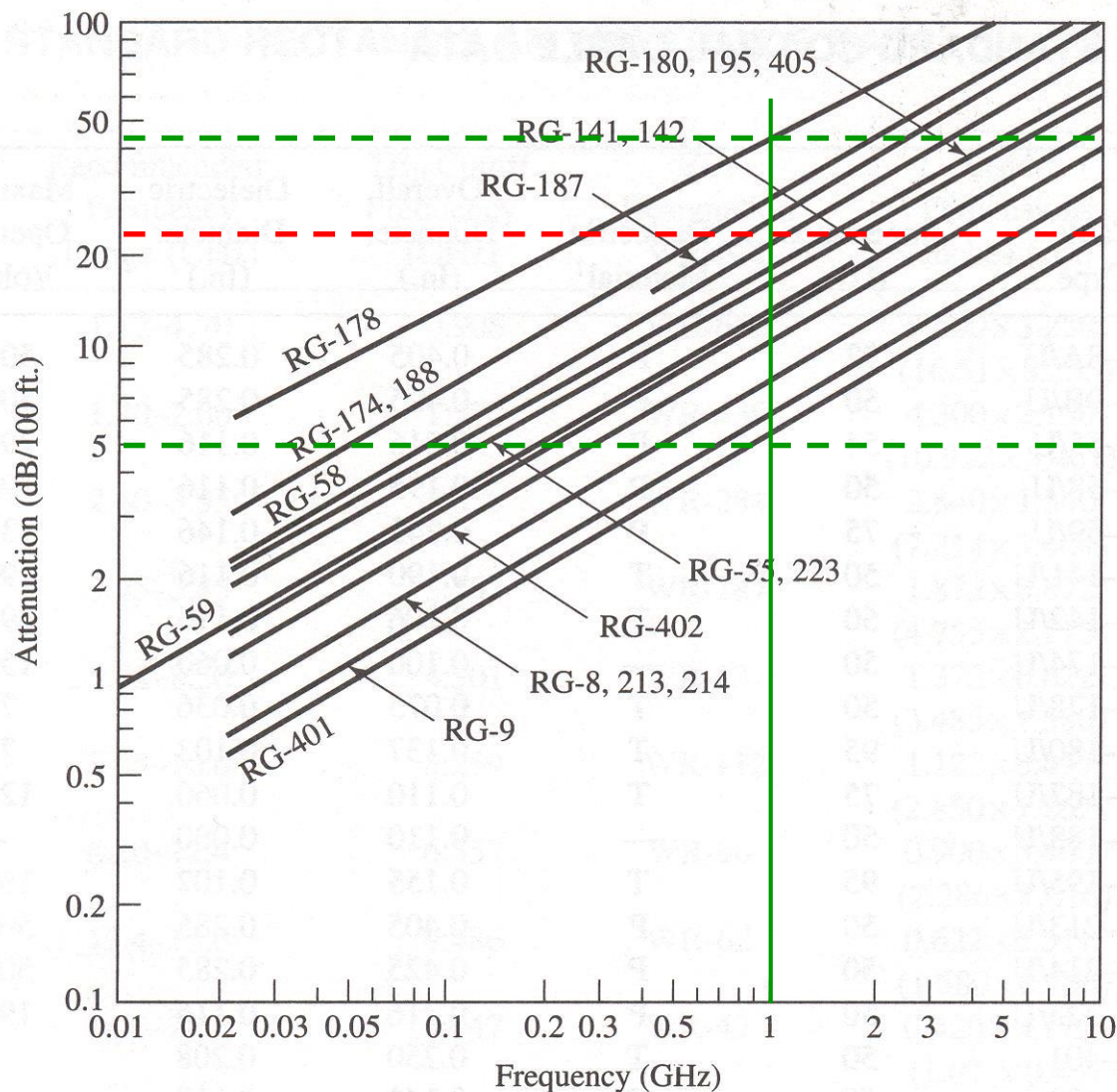
Características	Linha Bifilar	Cabo Coaxial	Linha Micro-tira
Modos	TEM*	TEM*	Quase-TEM*
Frequência	Baixa	Até Média	Até Alta
Dispersão	Nenhuma	Nenhuma	Pequena
Largura de Banda	Grande	Grande	Grande
Perdas	Baixas	Médias	Altas
Capacidade de Potência	Grande	Grande	Pequena
Volume	Grande	Grande	Pequeno
Fabrico (Custo)	Difícil	Médio	Baixo
Integração de Componentes	Difícil	Difícil	Fácil

\* Também suportam modos TE, TM ou híbridos

# Aplicações de Linhas de Transmissão (2)

53/55

## Atenuação de cabos coaxiais (norma) RG-# (ou RG-#U)



## Aplicações

- **Linha bifilar**
  - Linhas de distribuição de energia (sobretudo em média e alta tensão)
  - Linhas telefónicas aéreas (zonas rurais)
  - Alimentação de dipolos
- **Cabo coaxial**
  - Redes de computadores
  - Redes de distribuição de TV (internas e externas)
  - Equipamentos de telecomunicações
  - Instrumentação e controle
- **Linha microtira**
  - Aparelhos electrónicos de produção em massa (vídeo, áudio, “gadgets”)
  - Electrónica integrada (carros, aviões, navios, etc.)
  - Equipamento de telecomunicações



## Exemplos de Aplicações

