TÉCNICO LISBOA

LEEC

Ano Letivo 2021/2

PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS (PROE)

CONCEITOS FUNDAMENTAIS (Revisão)

Custódio Peixeiro

Novembro 2021

Este documento foi concebido para servir de guia nas aulas e apenas como tal deverá ser utilizado no estudo da matéria.

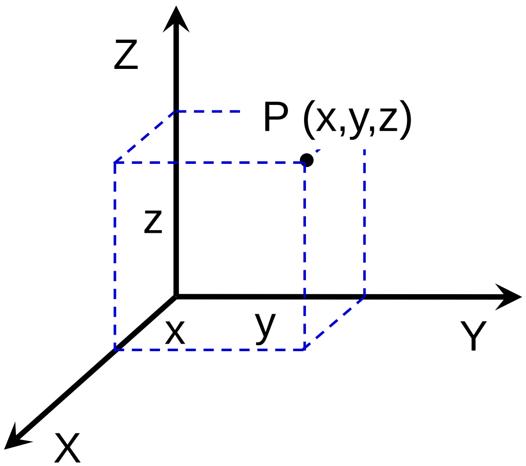
Sumário

Notação

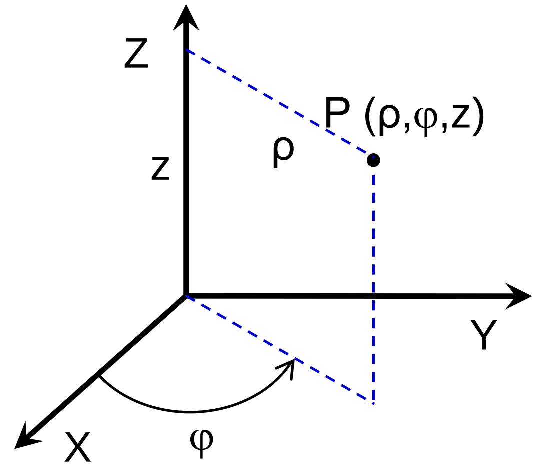
- Vetor $\mathbf{E}$ ou $\underset{\sim}{\mathrm{E}}$
- Versor $\hat{\mathbf{x}}$ ou $\underset{\sim}{\hat{\mathrm{x}}}$
- Tensor $\underset{\approx}{\mathrm{E}}$
- Amplitude Complexa $\overline{\mathrm{E}}$ $(\overline{\mathbf{E}}$ ou $\underset{\sim}{\overline{\mathrm{E}}})$
- Produto interno $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Produto externo $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
- Operadores Diferenciais $\left(Nabla \quad \nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right)$
  - Gradiente $\nabla \mathrm{A}$
  - Divergência $\nabla \cdot \mathbf{A}$
  - Rotacional $\nabla \times \mathbf{A}$
  - Laplaciano $\nabla^2 \mathbf{A}$

Sistemas de Coordenadas

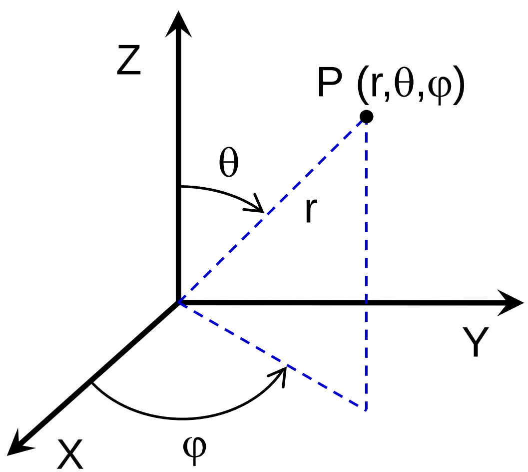
Retangulares (x,y,z)



Cilíndricas (ρ,φ,z)



Esféricas (r,θ,φ)



Unidades e Constantes

- Sistema MKSA racionalizado (subconjunto de SI)

- Permeabilidade (magnética) do vácuo

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$$

- Permitividade (elétrica) do vácuo

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ \mathrm{F.m^{-1}}$$

- Velocidade da luz no vácuo

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}} = 3\times 10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Prefixos de Unidades

10^{-3}	mili (m)	10^{+3}	kilo (k)
10^{-6}	micro (μ)	10^{+6}	Mega (M)
10^{-9}	nano (n)	10^{+9}	Giga (G)
10^{-12}	pico (p)	10^{+12}	Tera (T)
10^{-15}	femto (f)	10^{+15}	Peta (P)

Letras Gregas

Δ - Delta

Φ - Fi

Γ - Gama

Λ - Lambda

Ω - Omega

Θ - Teta

α - Alfa

β - Beta

χ - Ki

δ - Delta

ε - Épsilon

γ - Gama

η - Eta

ϕ,φ - Fi

ι - Iota

λ - Lambda

μ - Mu

ν - Nu

π - Pi

θ - Teta

ρ - Rô

σ - Sigma

τ - Tau

υ - Úpsilon

ω - Omega

ξ - Csi

ψ - Psi

ζ - Zeta

Equações de Maxwell (1)

$$
\begin{cases}
\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\[2ex]
\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\[2ex]
\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\[2ex]
\nabla \cdot \mathbf{B} = 0
\end{cases}
$$

$\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow$ **Corrente de Deslocamento**

Lei de Ampere

Lei de Faraday

Lei de Gauss

E – Campo Elétrico [$V.m^{-1}$]

H – Campo Magnético [$A.m^{-1}$]

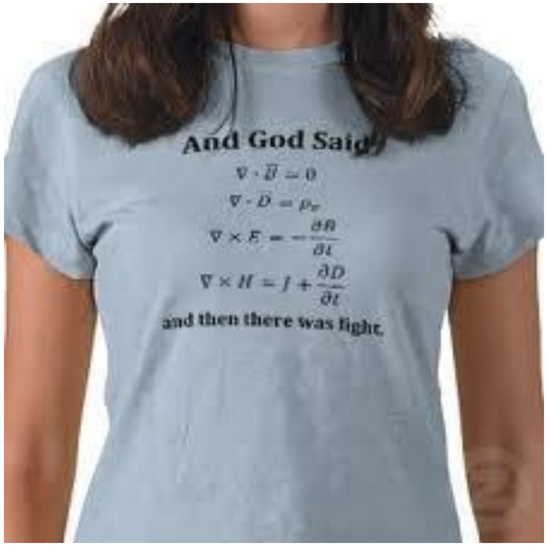
D – Deslocamento Elétrico [$C.m^{-2}$]

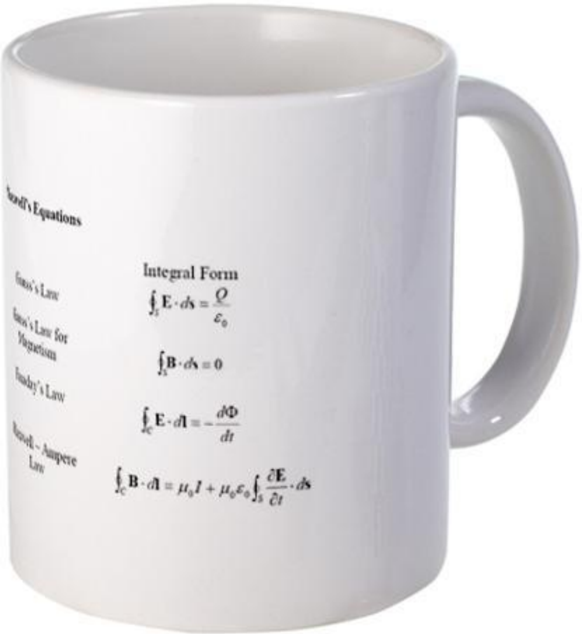
B – Indução Magnética [$T = Wb.m^{-2}$]

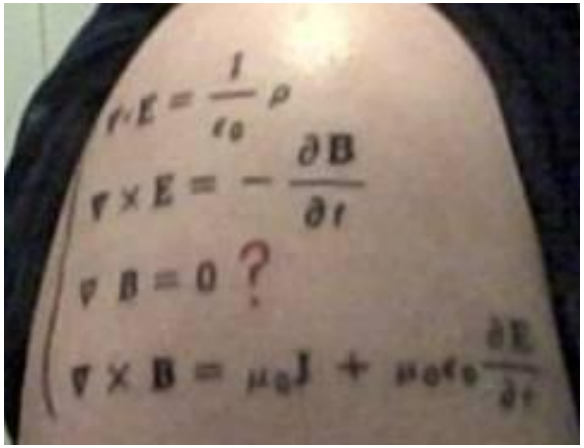
J – Densidade de Corrente [$A.m^{-2}$]

ρ – Densidade de Carga [$C.m^{-3}$]

Equações de Maxwell (2)







Relações Constitutivas (1)

$\mathbf{D} = \mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \qquad \mathbf{H} = \mathscr{G}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \qquad \mathbf{J} = \mathscr{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$

As equações de Maxwell, as relações constitutivas e a força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

mostram que os campos fundamentais (básicos) são E e B . Excepto para o vácuo, D e H dependem de um modelo do meio.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \qquad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad \mu = \mu_0 \mu_r \qquad \mu_r = 1 + \chi_m$$

P – (vetor) Polarização elétrica

M – (vetor) Magnetização

χ_e – suscetibilidade elétrica

χ_m – suscetibilidade magnética

Relações Constitutivas (2)

Vamos estudar meios simples: lineares, homogéneos, isotrópicos, invariáveis no tempo.

Um meio é caracterizado macroscopicamente por (ε, μ, σ).

$\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$ $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$ $\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E}$

$\varepsilon = \varepsilon_r\,\varepsilon_0$ **ε_r – Permitividade elétrica relativa (ao vácuo)**

$\mu = \mu_r\,\mu_0$ **μ_r – Permeabilidade magnética relativa (ao vácuo)**

Os meios podem ser:

- Não homogéneos
- Anisotrópicos – ε e/ou μ são tensores
- Variáveis no tempo

Existem meios (naturais e **artificiais**) com relações constitutivas mais complexas

Relações Constitutivas (3)

Exemplo 1 – Meios anisotrópicos

$$\mathbf{D} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} \qquad \underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

D e E não são paralelos

Muitas vezes é possível escolher um sistema de eixos de referência que tornam o tensor ε diagonal

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$ - meios biaxiais

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$ - meios uniaxial (eixo óptico z)

$\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$ - meios uniaxial (eixo óptico x)

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} \neq \varepsilon_{yy}$ - meios uniaxial (eixo óptico y)

Há meios magneticamente anisotrópicos $\quad \mathbf{B} = \underset{\approx}{\mu} \cdot \mathbf{H}$

Há meios que são simultaneamente eletricamente anisotrópicos e magneticamente anisotrópicos

Relações Constitutivas (4)

A anisotropia existe em meios materiais naturais e artificiais

Exemplos

- Madeira (anisotropia dielétrica)
- Safira, quartzo e outros cristais (anisotropia dieléctrica)
- (Alguns) Substratos usados no fabrico de circuitos impressos (FR4, por exemplo) (anisotropia dielétrica)
- Ferrites (anisotropia magnética)
- Ionosfera terrestre (anisotropia elétrica e magnética)
- Existem actualmente muito materiais artificiais que exibem anisotropia dielétrica, anisotropia magnética ou ambas, bem como valores de ε_r e/ou μ_r negativos (numa banda estreita)

Relações Constitutivas (5)

Exemplos de meios com relações constitutivas (ainda) mais complexas

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \underset{\approx}{\varepsilon}\cdot\mathbf{E} + \underset{\approx}{\xi}\cdot\mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \underset{\approx}{\varsigma}\cdot\mathbf{E} + \underset{\approx}{\mu}\cdot\mathbf{H} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{Meios bi-anisotrópicos}$$

Se (ε, ξ,ζ, μ) forem escalares os meios designam-se por bi-isotrópicos

Identidades Vetoriais e Teoremas Importantes

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

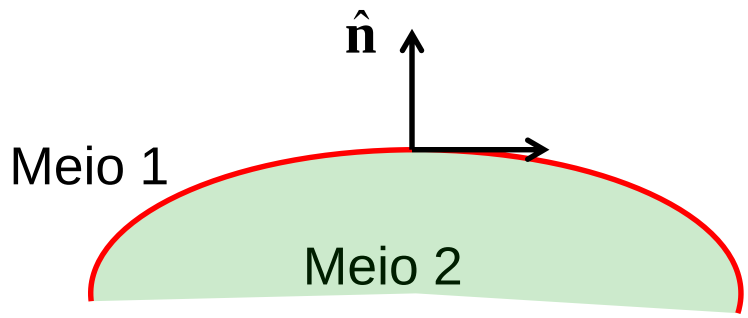
$$\nabla \times (\nabla A) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}$$ Teorema da Divergência

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{dS} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}$$ Teorema de Stokes

Condições nas Fronteiras (1)



$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E_1} - \mathbf{E_2}) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H_1} - \mathbf{H_2}) = \mathbf{J_s}$$

$\mathbf{J_S}$ – Densidade de corrente linear superficial

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D_1} - \mathbf{D_2}) = \rho_s$$

ρ_S – Densidade de carga superficial

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B_1} - \mathbf{B_2}) = 0$$

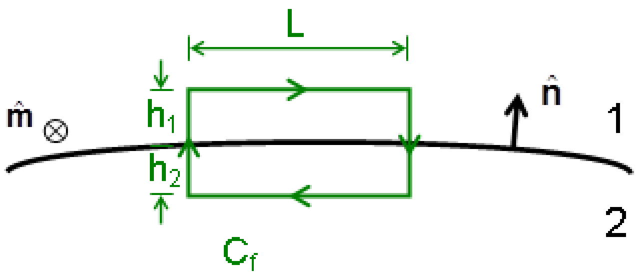
Condições nas Fronteiras (2)

Componentes Tangenciais

$A = L\,(h_1 + h_2)$

$L,\ h_1,\ h_2 \ll$

$\mathbf{dS} = \hat{\mathbf{m}}\, dA$



- C_f é o contorno fechado que define A
- Lados de dimensão L paralelos à interface 1-2
- $\dfrac{\partial B}{\partial t}$ finito

Teorema de Stokes
+
Lei de Faraday

$$\oint_{C_f} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{dS} = \iint_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{dS}$$

$$\lim_{h_1,h_2\to 0} \oint_{C_f} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = L\,(E_{1t} - E_{2t}) = \lim_{h_1,h_2\to 0} \iint_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{dS} = 0 \qquad E_{1t} = E_{2t}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E_1} - \mathbf{E_2}) = 0}$$

No caso do campo magnético

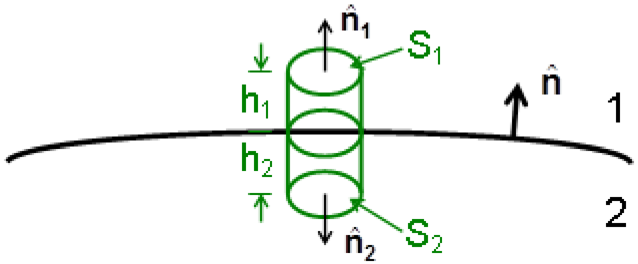
$$\oint_{C_f} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dl} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{dS} = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{dS}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H_1} - \mathbf{H_2}) = \mathbf{J_s}}$$

Condições nas Fronteiras (3)

Componentes Normais

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_2$$



- S3 é a superfície lateral do cilindro (pequeno)
- $S = S_1 + S_2 + S_3$ define o volume V

Teorema da Divergência
+
Lei de Gauss

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = 0$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\, dS + \iint_{S_3} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3\, dS = 0 \qquad \lim_{h_1,h_2 \to 0} \iint_{S_3} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_3\, dS = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad \boxed{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0}$$

No caso do campo elétrico

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, dV = \rho \qquad D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \qquad \boxed{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S}$$

Condições nas Fronteiras (4)

Casos Particulares

Dieléctricos Perfeitos ($\mathbf{J_s} = \rho_s = 0$)

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E_1} - \mathbf{E_2}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{E_{1t}} = \mathbf{E_{2t}} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{D_{1t}}}{\varepsilon_1} = \frac{\mathbf{D_{2t}}}{\varepsilon_2}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H_1} - \mathbf{H_2}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H_{1t}} = \mathbf{H_{2t}} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{B_{1t}}}{\mu_1} = \frac{\mathbf{B_{2t}}}{\mu_2}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D_1} - \mathbf{D_2}) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{D_{1n}} = \mathbf{D_{2n}} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1 \mathbf{E_{1n}} = \varepsilon_2 \mathbf{E_{2n}}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B_1} - \mathbf{B_2}) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B_{1n}} = \mathbf{B_{2n}} \quad \rightarrow \quad \mu_1 \mathbf{H_{1n}} = \mu_2 \mathbf{H_{2n}}$$

Condutores Perfeitos ($\mathbf{E_2} = \mathbf{D_2} = \mathbf{H_2} = \mathbf{B_2} = 0$)

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E_1} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{E_{1t}} = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H_1} = \mathbf{J_s}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D_1} = \rho_s$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B_1} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B_{1n}} = \mathbf{0}$$

Marcos Históricos (OE e Aplicações) (1)

- 1844 - Primeira ligação telegráfica (Washington a Baltimore, ≈ 65 km)
- 1850 – Primeiro cabo submarino (Canal de Inglaterra)
- 1858 – Primeiro cabo submarino transatlântico (Irlanda – Terra Nova)
- 1864 – Equações de Maxwell (James Clerk Maxwell)
- 1887 – Detecção (experimental) de OE (Heinrich Hertz)
- 1895 – Primeiras experiências de transmissão de OEs à distância (Guglielmo Marconi)
- 1901 – Primeira radio comunicação transatlântica (entre Poldhu, Cornualha e S. João da Terra Nova) (Marconi)
- 1920 – Primeiras transmissões comerciais de radiodifusão

Marcos Históricos (OE e Aplicações) (2)

- 1940 – Primeiras utilizações (práticas) de radar (2ª Guerra Mundial)
- 1944 – Primeiro computador electrónico digital
- 1951 – Primeira emissão comercial de televisão a cores
- 1957 – Primeiro satélite artificial (Sputnik 1, URSS)
- 1962 – Primeiro satélite comercial de comunicações (Telstar 1, EUA)
- 1975 – Primeiro ligação comercial por fibra ótica
- 1981 – Primeiro computador pessoal
- 1983 – Sistema GPS para aplicações não militares
- 1991 – Sistema GSM (Europa)

Espetro Eletromagnético