Exemplo: A soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2.

$$\sum_{i=1}^{n}(2 \cdot i - 1) = n^2, \forall n$$

Base: para $n = 0$ é trivial, pois a soma dos 0 primeiros numeros é $= 0^2$

Passo Indutivo: assumimos $\sum_{i=1}^{k}(2 \cdot i - 1) = k^2$ como verdade para provar $\sum_{i=1}^{k+1}(2 \cdot i - 1) = k^2 + 2k + 1$ ou $(k+1)^2$

podemos decompor em: $\sum_{i=1}^{k+1}(2 \cdot i - 1) = \sum_{i=1}^{k}(2 \cdot i - 1) + (2k+1)$ e aplicar a h.i: $k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$

2.1: Mostre que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Base: para $n = 0$ é trivial, pois a soma dos 0 primeiros numeros é $\frac{0(0+1)}{2}$

Passo Indutivo: assumimos $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2})$ como verdade para provar $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ ou $\frac{(k^2)+3k+2}{2}$

podemos decompor em: $\sum_{i=0}^{k+1} i = \sum_{i=0}^{k} i + (k+1)$ e aplicar a h.i: $\frac{k(k+1)}{2}) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$ simplificando: $\frac{k^2+k}{2} + \frac{2k+2}{2} = \frac{(k^2)+3k+2}{2}$

2.2: Mostre que:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Base: para $n = 0$ é trivial, pois a soma dos 0 primeiros numeros é $\frac{0(0+1)(0+2)}{3}$

Passo Indutivo: assumimos $\sum_{i=0}^{k} i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3})$ como verdade para provar $\sum_{i=0}^{k+1} i(i+1) = \frac{(k+1((k+1)+1)((k+1)+2))}{3}$ ou $\frac{((k^2)+3k+2)(k+3)}{3} = \frac{((k^3)+3k^2+2k)}{3} + \frac{((3k^2)+9k+6)}{3} = \frac{(k^3)+(6k^2)+11k+6}{3}$

podemos decompor em: $\sum_{i=0}^{k+1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{k} i(i+1) + ((k^2)+3k+2)$ e aplicar a h.i: $\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + ((k^2)+3k+2) = \frac{((k^2)+k)(k+2)}{3} + \frac{3((k^2)+3k+2)}{3}$ simplificando: $\frac{(k^3)+(3k^2)+2k}{3} + \frac{(3k^2)+9k+6}{3} = \frac{(k^3)+(6k^2)+11k+6}{3}$

Indução Generalizada

Exemplo: Prove que:

$$2^n < n!, \forall n \geq 4.$$

Base: para $n = 4$ é trivial, pois $2^4 = 16$ e $4! = 24$

Passo Indutivo: assumimos $2^k < k!, \forall k \geq 4$ como verdade para provar $2^{k+1} < k+1!, \forall k \geq 4$

podemos decompor em: $2^{k+1} = (2)(2^k)$ que pela h.i é $< (2)(2!)$Agora, note que para $k \geq 4$, temos $2 \cdot k! < (k+1)!$, pois:

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k! \quad \text{e} \quad k+1 \geq 4+1 = 5 \quad \text{para } k \geq 4.$$

Logo:

$$2^{k+1} < (k+1)!.$$

Concluímos que a desigualdade é válida para $k+1$. Assim, por indução matemática, temos:

$$2^n < n!, \forall n \geq 4.$$

2.5: Prove que a soma dos n primeiros números naturais é igual a

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Base: para $n = 1$ é trivial, pois a soma dos 1 primeiros numeros é $\frac{1(1+1)}{2}$

Passo Indutivo: assumimos $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2})$ como verdade para provar $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ ou $\frac{(k^2)+3k+2}{2}$ E isso já foi provado no 2.1

2.6: Prove que a soma dos n primeiros quadrados é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ou seja, mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Base: para $n = 1$ é trivial, pois a soma dos 1 primeiros numeros é $\frac{1(1+1)((2)(1)+2)}{6}$

Passo Indutivo: assumimos $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6})$ como verdade para provar $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1((k+1)+1)(2(k+1)+1))}{6}$ ou $\frac{((k^2)+3k+2)(2k+4)}{6} = \frac{((2k^3)+6k^2+4k)}{6} + \frac{((4k^2)+12k+8)}{6} = \frac{(2k^3)+(10k^2)+16k+8}{6}$

podemos decompor em: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + ((k^2) + 2k + 1)$ e aplicar a h.i: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + ((k^2) + 2k + 1) = \frac{((k^2)+k)(2k+1)}{6} + \frac{6((k^2)+2k+1)}{6}$ simplificando: $\frac{(2k^3)+(3k^2)+k}{6} + \frac{(6k^2)+12k+6}{6} = \frac{(2k^3)+(9k^2)+13k+6}{6}$