Introdução à Computação Gráfica
Geometria

Adaptação: João Paulo Pereira

António Costa

Autoria: Claudio Esperança

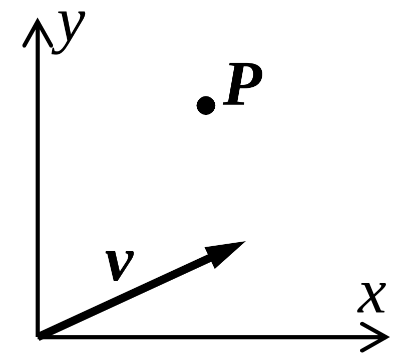
Paulo Roma Cavalcanti

Pontos e Vectores (2D)

- Ponto: Denota posição no plano
- Vector: Denota deslocamento, isto é, inclui a noção de direcção e magnitude
- Ambos são normalmente expressos por pares de coordenadas (em 2D) mas <u>não são a "mesma coisa"</u>

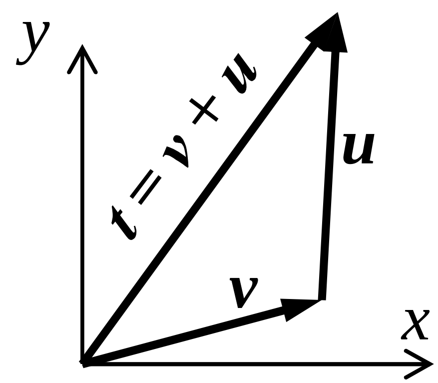
$$P = (x_P, y_P)$$

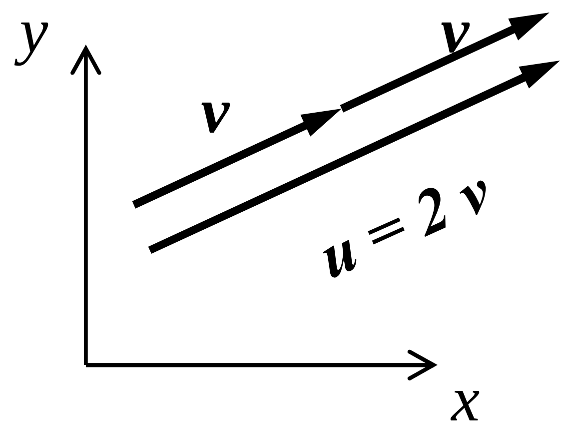
$$\vec{v} = (x_v, y_v)$$

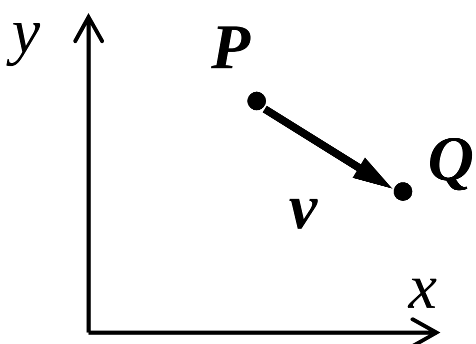


Operações com Pontos e Vectores (2D)

- Soma de vectores
  $t = v + u$
- Multiplicação de vector por escalar
  $u = 2\,v$
- Subtracção de pontos
  $v = Q - P$
- Soma de ponto com vector
  $Q = P + v$







Transformações

- Transformação é uma função que faz corresponder pontos de um espaço Euclidiano a outros (ou possivelmente os mesmos) pontos do mesmo espaço
- Se uma transformação é linear, então
  - Se um conjunto de pontos pertence a uma recta, depois de transformados eles também pertencerão a uma recta
  - Se um ponto P guarda uma relação de distância com dois outros pontos Q e R, então essa relação de distância é mantida pela transformação
- Transformação faz corresponder a origem à origem?
  - Sim: Transformação *Linear*
  - Não: Transformação *Linear Afim*: Translações são permitidas

Transformações Lineares em 2D

- Uma transformação linear

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

- Uma transformação linear afim

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

Forma Matricial

- Mais conveniente para uso em computador. Sejam

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

- Então uma transformação linear afim pode ser escrita $T(P) = P'$ em que

$$P' = A \times P + D$$

Transformação de Vectores

- Um vector não está aplicado a um ponto no espaço
- Uma transformação linear afim aplicada a um vector não inclui translação
- Demonstração: Seja V um vector e V' a sua imagem sob a transformação linear afim. Então:

$$V = Q - P \Leftrightarrow V' = Q' - P'$$

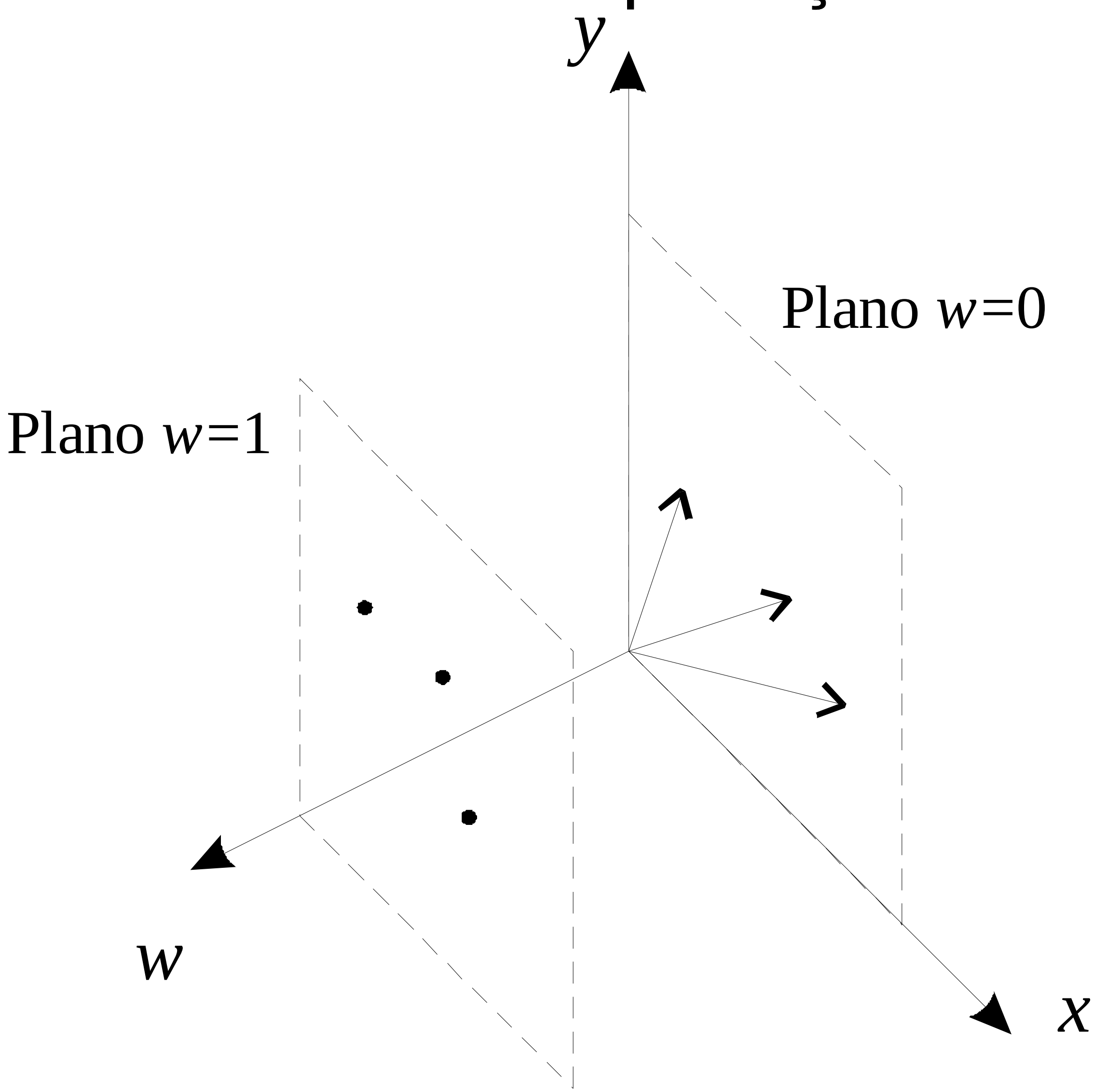
$$\begin{aligned} V' &= Q' - P' \\ &= (A \times Q + D) - (A \times P + D) \\ &= A \times (Q - P) \\ &= A \times V \end{aligned}$$

Coordenadas Homogéneas

- A transformação de vectores é operacionalmente diferente da de pontos
- Coordenadas homogéneas permitem unificar o tratamento
- Problema é levado para uma dimensão superior:
  - Coordenada extra $w = 0$ para vectores e $w = 1$ para pontos
  - Termos independentes formam uma coluna extra na matriz de transformação

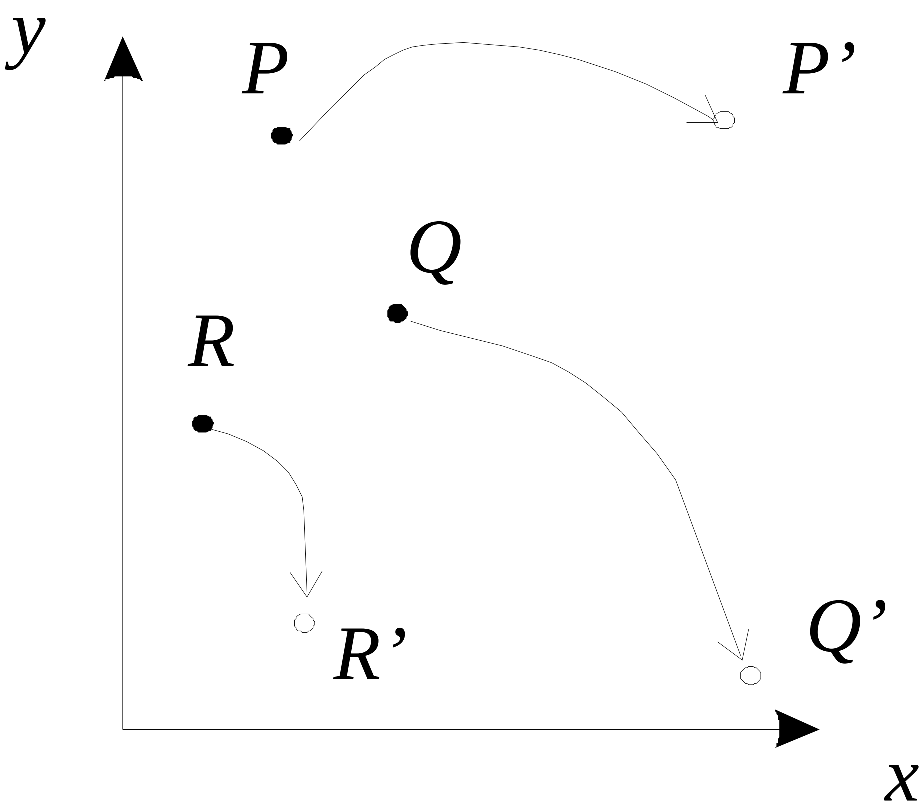
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogéneas - Interpretação



Modelação de Transformações

- Uma t.l.a. em 2D pode ser definida se dispusermos da imagem de 3 pontos do domínio



$$\begin{cases} x_{P'} = a.x_P + b.y_P + e \\ y_{P'} = c.x_P + d.y_P + f \\ x_{Q'} = a.x_Q + b.y_Q + e \\ y_{Q'} = c.x_Q + d.y_Q + f \\ x_{R'} = a.x_R + b.y_R + e \\ y_{R'} = c.x_R + d.y_R + f \end{cases}$$

Sistemas de coordenadas

- Um sistema de coordenadas para $\mathbf{R}^n$ é definido por um ponto (origem) e n vectores
- Ex.: Seja um sistema de coordenadas para $\mathbf{R}^2$ definido pelo ponto O e os vectores X e Y. Então
  - Um ponto P é dado por coordenadas x_P e y_P tais que

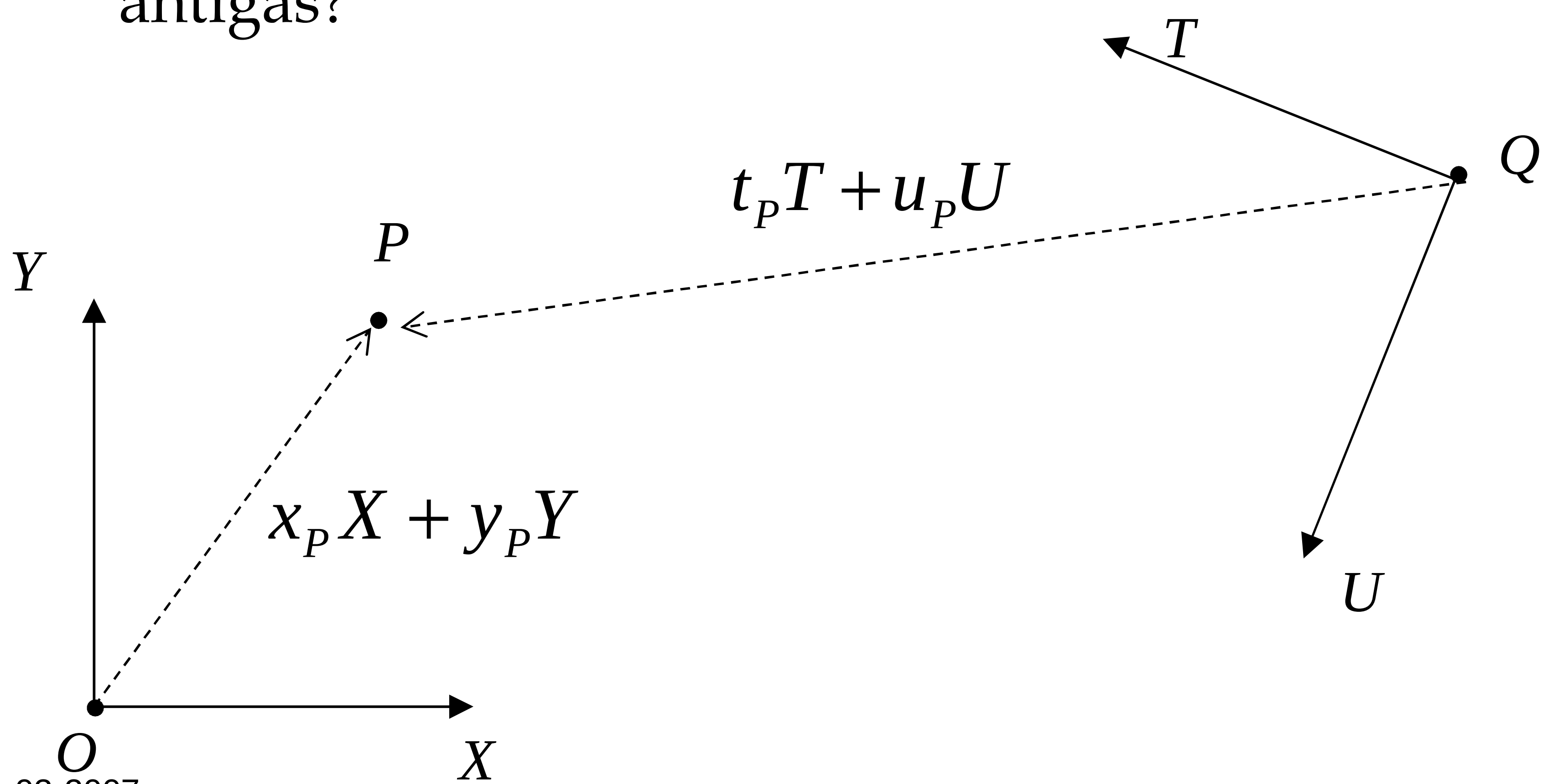
$$P = x_P.X + y_P.Y + O$$

  - Um vector V é dado por coordenadas x_V e y_V tais que

$$V = x_V.X + y_V.Y$$

Mudança de Sistema de Coordenadas

- Se estabelecemos um outro sistema (ex.: Q/T/U), como calcular as novas coordenadas em função das antigas?



Mudança de Sistema de Coordenadas

- Como calcular as coordenadas de um ponto P = (x_P, y_P) em O/X/Y dadas as coordenadas de P em Q/T/U, isto é, (t_P, u_P) ?

$$
\begin{aligned}
P &= t_P.T + u_P.U + Q \\
&= t_P.(x_T.X + y_T.Y) + u_P.(x_U.X + y_U.Y) + (x_Q.X + y_Q.Y + O) \\
&= (t_P.x_T + u_P.x_U + x_Q).X + (t_P.y_T + u_P.y_U + y_Q).Y + O
\end{aligned}
$$

Logo,

$$x_P = t_P.x_T + u_P.x_U + x_Q$$

$$y_P = t_P.y_T + u_P.y_U + y_Q$$

Mudança de Sistema de Coordenadas

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U \\ y_T & y_U \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_P \\ u_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix}$$

- Usando coordenadas homogéneas:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U & x_Q \\ y_T & y_U & y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_P \\ u_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Para resolver o problema inverso:

$$\begin{bmatrix} t_P \\ u_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U & x_Q \\ y_T & y_U & y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações em 3D

- Vectores e pontos em 3D

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Transformação linear afim

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Rígidas

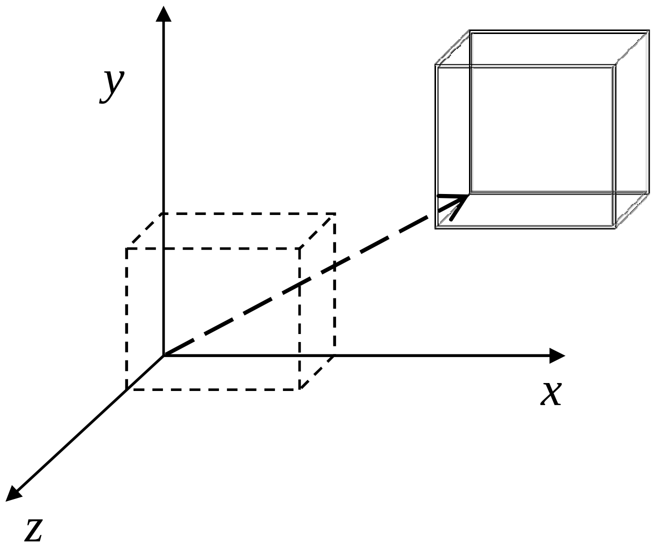
- Não modificam a forma (dimensões/ângulos) do objecto
- São compostas por uma rotação e uma translação

Submatriz de Rotação

Vector de Translação

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translação



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

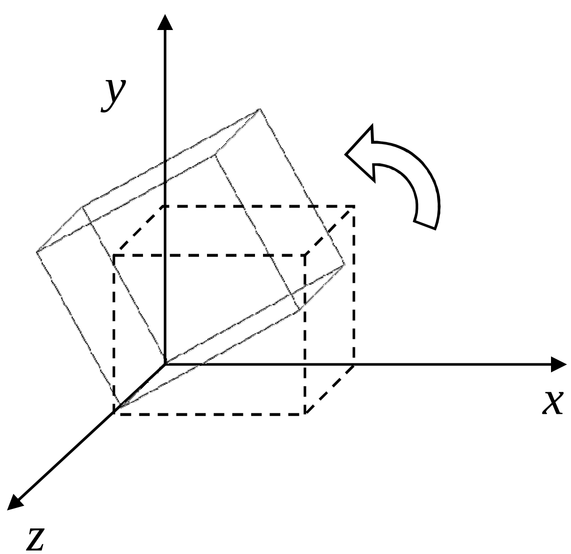
$$P' = T \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + t_x \\ P_y + t_y \\ P_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix} = P + t$$

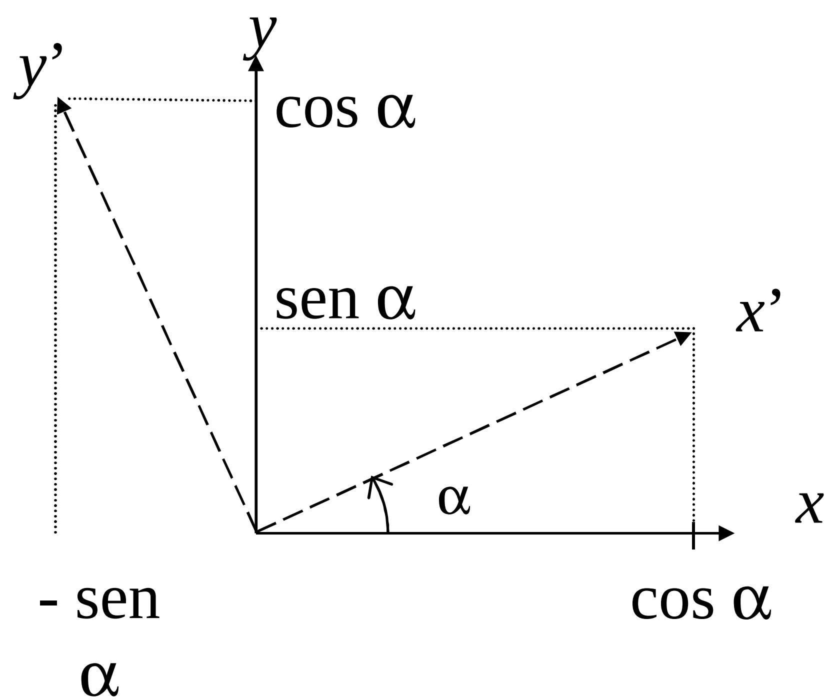
- As translações são comutativas:

  $P + t + v = P + v + t$

Rotação em torno do eixo *Z*

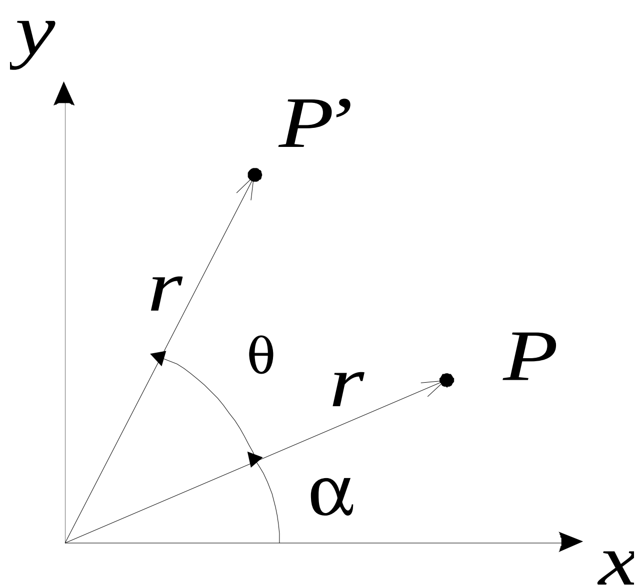
- Podemos ver que ao vector $(1,0,0)^T$ corresponde $(\cos \alpha, \text{sen } \alpha, 0)^T$ e que ao vector $(0,1,0)^T$ corresponde $(-\text{ sen } \alpha, \cos \alpha, 0)^T$





Rotação em torno do eixo *Z*

- Outra maneira de ver:



Sabemos que

$$P_x = r\cos\alpha \qquad P'_x = r\cos(\alpha+\theta)$$

$$P_y = r\sin\alpha \qquad P'_y = r\sin(\alpha+\theta)$$

Então

$$P'_x = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

$$P'_y = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta$$

Resultando que

$$P'_x = P_x\cos\theta - P_y\sin\theta$$

$$P'_y = P_x\sin\theta + P_y\cos\theta$$

Rotação em torno dos eixos coordenados

- Rotação em torno de Z é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Do mesmo modo, em torno dos eixos Y e X

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotações em geral

- Qualquer rotação pode ser definida por um eixo de rotação dado pelo vector unitário **u** = $(x, y, z)^T$ e um ângulo de rotação α
- Seja S a matriz

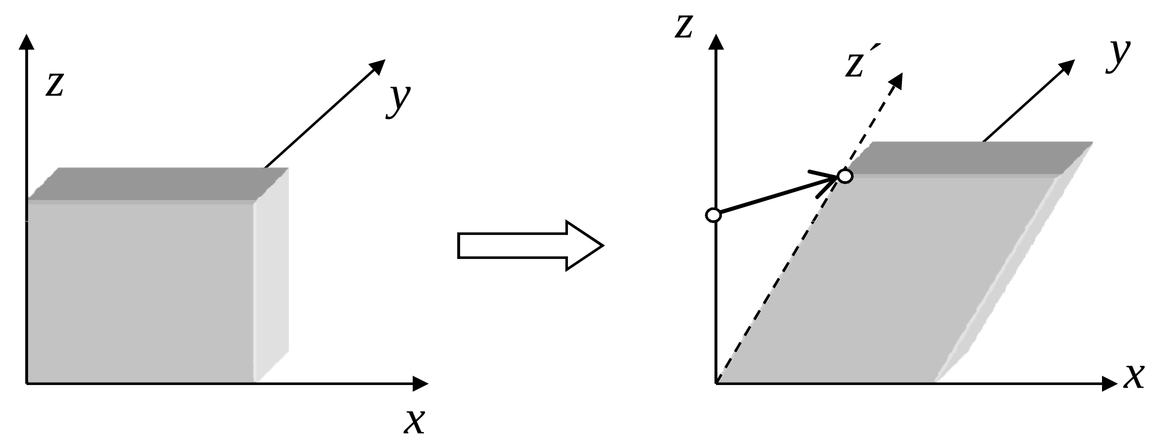
$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

- Então a submatriz de Rotação M é dada por

$$\mathrm{M} = \mathrm{uu}^{\mathrm{T}} + (\cos\alpha)(\mathrm{I} - \mathrm{uu}^{\mathrm{T}}) + (\sin\alpha)\mathrm{S}$$

Inclinação ("*shear*")

- É uma transformação de deformação onde um eixo é "entortado" em relação aos restantes

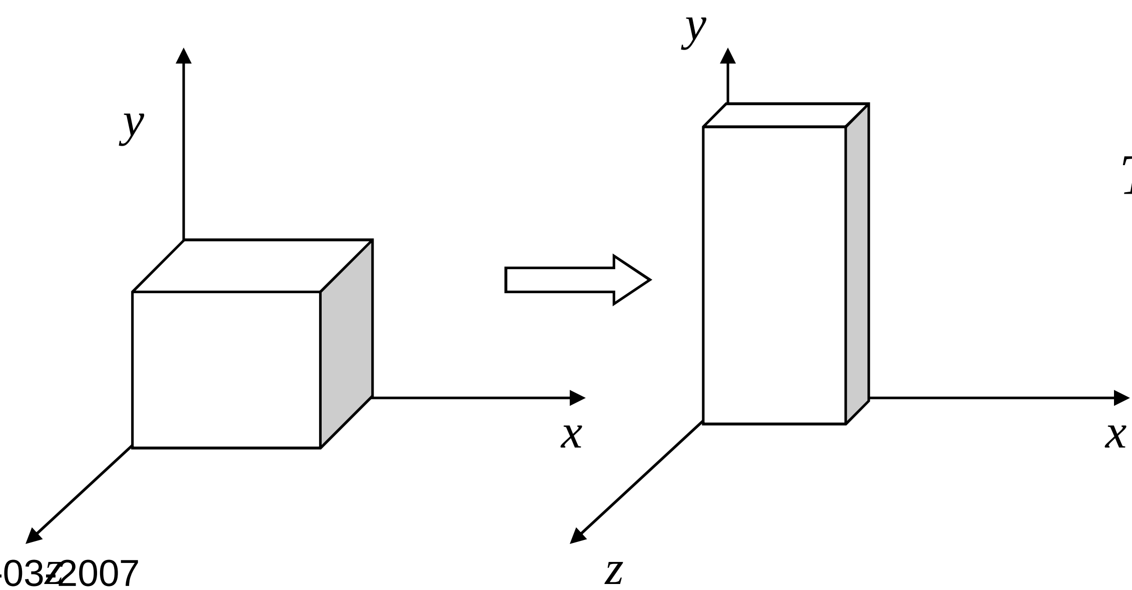


- Se o vector unitário do eixo z é transformado em $[Sh_x\ Sh_y\ 1\ 0]^T$, então a matriz de transformação é dada por

$$T_{inclinação} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Sh_x & 0 \\ 0 & 1 & Sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escalamento

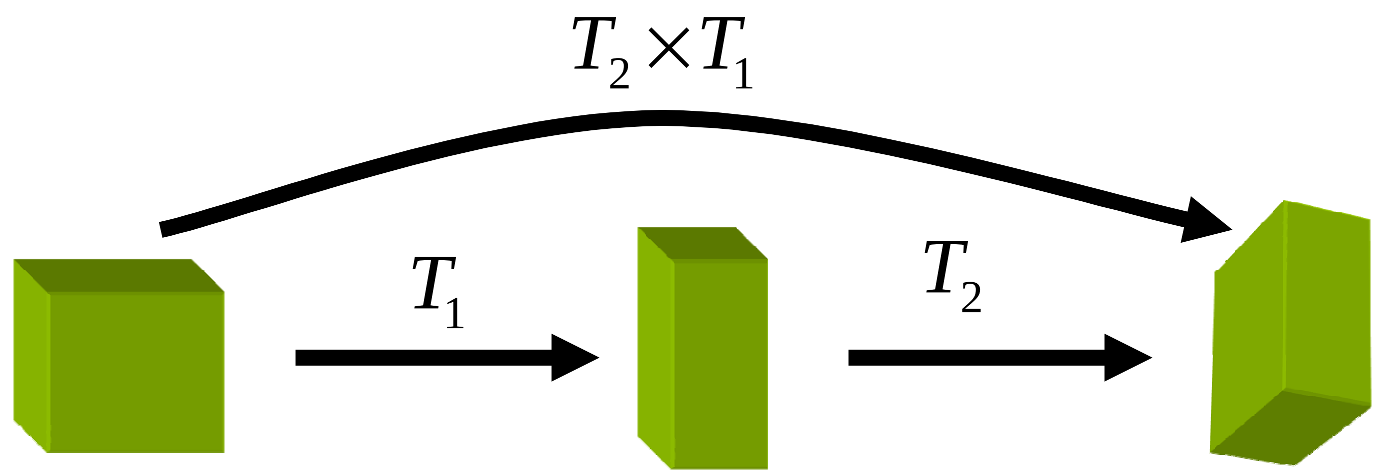
- Especificado por três factores (S_x, S_y , S_z) que multiplicam os vectores unitários x, y, z
- Escalamento não é uma transformação rígida
- Escalamento uniforme (S_x = S_y = S_z) é uma operação ortogonal ou homotética, isto é, preserva os ângulos
- Para obter reflexão em torno do plano y=0, usar os factores de escala (1, -1, 1)



$$T_{escala} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de transformações em 3D

- Na nossa notação, usamos a pré-multiplicação:
  - $P' = T \times P$
- Para compor 2 transformações temos:
  - Se $P' = T_1 \times P$ e $P'' = T_2 \times P'$, então, $P'' = T_2 \times T_1 \times P$



Geometria Afim

- Composta dos elementos básicos
  - escalares
  - pontos - denotam posição
  - vectores - denotam deslocamento (direcção e magnitude)
- Operações
  - escalar · vector = vector
  - vector + vector ou vector – vector = vector
  - ponto – ponto = vector
  - ponto + vector ou ponto – vector = ponto

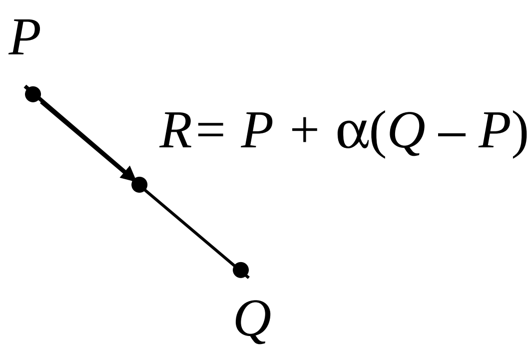
Combinações Afim

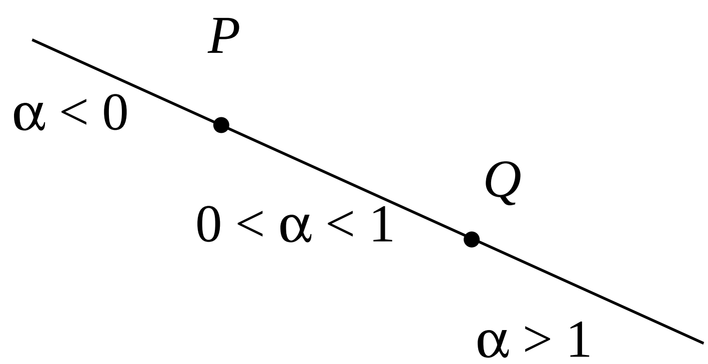
- Maneira especial de combinar pontos

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_n P_n$$

$$\text{onde } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

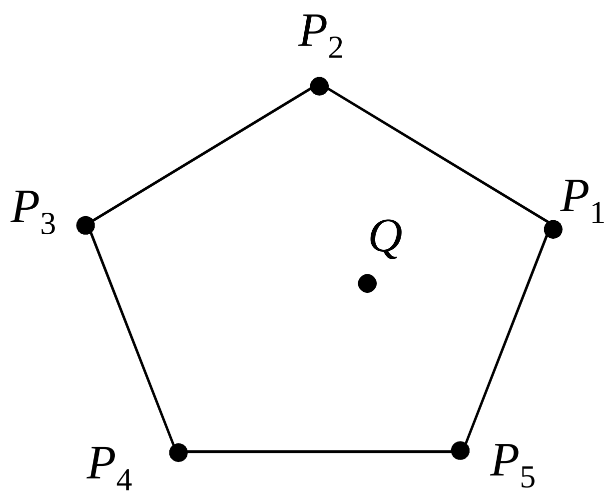
- Para 2 pontos P e Q poderíamos ter uma combinação afim $R = (1 - \alpha)P + \alpha Q = P + \alpha(Q - P)$





Combinações Convexas

- Combinações afim onde se garante que todos os coeficientes α_i são positivos (ou nulos)
- Usa-se esse nome porque qualquer ponto que é uma combinação convexa de n outros pontos pertence à <u>envolvente convexa</u> desses pontos



Geometria Euclidiana

- Extensão da geometria afim pela adição de um operador chamado *produto interno*
- Produto interno é um operador que transforma um par de vectores num escalar. Tem as seguintes propriedades:
  - Positividade : $(u,u) \geq 0$ e $(u,u) = 0$ sse $u=0$
  - Simetria: $(u,v) = (v,u)$
  - Bilinearidade: $(u,v+w)= (u,v)+ (u,w)$ e

    $(u,\alpha v)= \alpha(u,v)$

Geometria Euclidiana

- Normalmente usamos o produto escalar como operador de produto interno:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$$

- Comprimento de um vector é definido como:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- Vector unitário (normalizado):

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

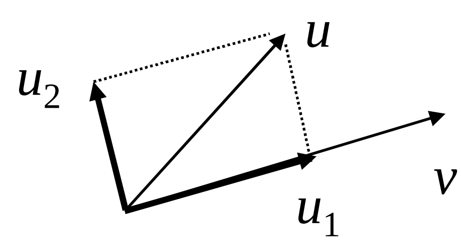
Geometria Euclidiana

- Distância entre dois pontos P e Q = $|Q - P|$
- O ângulo entre dois vectores pode ser determinado por

$$\hat{a}ngulo\ (\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}(\hat{u} \cdot \hat{v})$$

- Projecção ortogonal: dados dois vectores u e v, deseja-se decompor u na soma de dois vectores u_1 e u_2 tais que u_1 é paralelo a v e u_2 é perpendicular a v

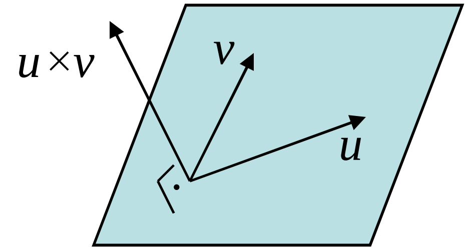
$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v} \qquad \vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1$$



Produto Vectorial (3D)

- Permite achar um vector perpendicular a outros dois vectores
- Útil na construção de sistemas de coordenadas

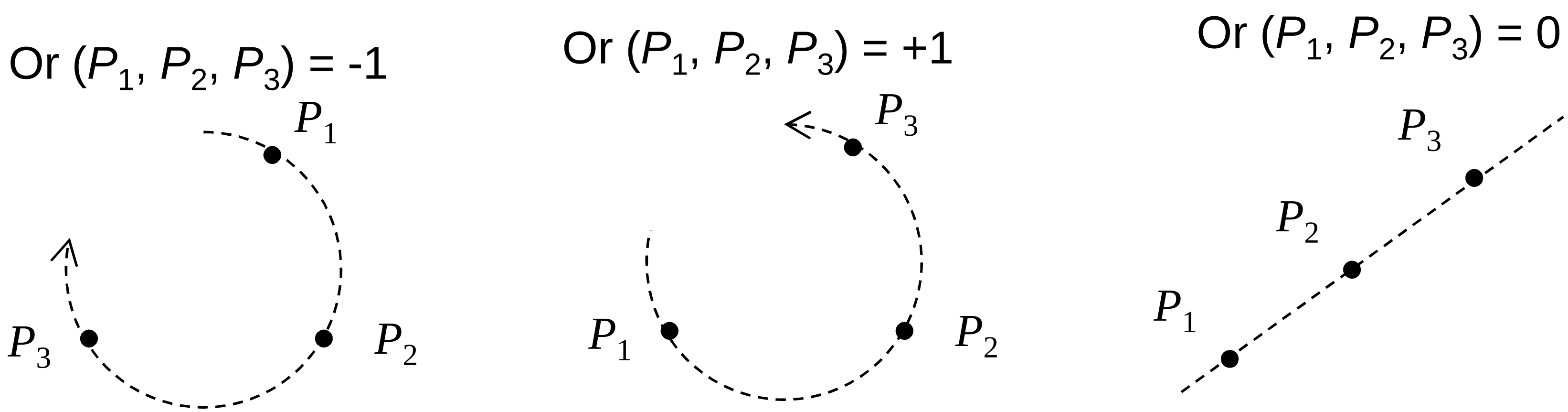
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$



- Propriedades (assume-se *u*, *v* linearmente independentes):
  - Antisimetria: $u \times v = -\, v \times u$
  - Bilinearidade: $u \times (\alpha v) = \alpha\,(u \times v)$ e $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
  - $u \times v$ é perpendicular tanto a u quanto a v
  - O comprimento de $u \times v$ é igual a área do paralelogramo definido por u e v, isto é, $|\, u \times v \,| = |\, u \,|\,|\, v \,| \sin\theta$

Orientação

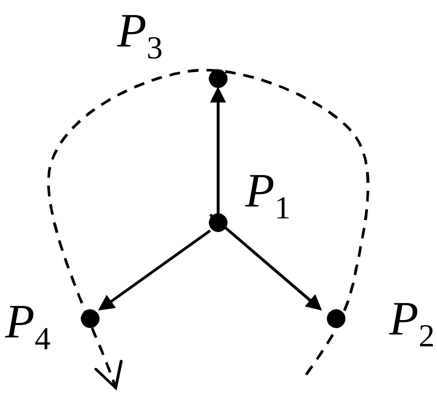
- Orientação de 2 pontos em 1D
  - $P_1 < P_2$, $P_1 = P_2$ ou $P_1 > P_2$
- Orientação de 3 pontos em 2D
  - O percurso P_1 , P_2 , P_3 é feito no sentido dos ponteiros do relógio, no sentido contrário ou são colineares



Orientação

- Orientação de 4 pontos em 3D
  - O percurso P_1 , P_2 , P_3 , P_4 define um parafuso segundo a regra da mão direita, mão esquerda ou são coplanares

Or (P_1, P_2, P_3, P_4) = +1



- *O conceito pode ser estendido a qualquer número de dimensões ...*

Determinação da Orientação

- A orientação de n+1 pontos num espaço n-dimensional é dada pelo sinal do determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas homogéneas dos pontos *com o 1 em primeiro lugar*

$$\mathrm{Or}_2(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{sign}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\right) \qquad \mathrm{Or}_3(P_1, P_2, P_3, P_4) = \mathrm{sign}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}\right)$$