UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTRONICĂ, TELECOMUNICAȚII
ȘI TEHNOLOGII INFORMAȚIONALE
B-dul V. Pârvan, Nr. 2, 300223, TIMIŞOARA, ROMANIA
tel/fax: +40-(0)256-403291/5, e-mail: etc@upt.ro, http://www.etc.upt.ro

Seminar 1 - PTDM

Incertitudine de măsurare și erori. Analiza statistică a erorilor de măsurare.

1. Introducere: definiția măsurării, instrumentul de măsurare, erori de măsurare, caracterizarea instrumentelor de măsurare, acuratețe și precizie, rezoluție, sensibilitate, domeniul de măsură, fiabilitate.
2. Incertitudinea de măsurare: incertitudine de tip A și B, valoare medie, mediană, deviația standard, intervale de încredere.
3. Aplicații: impactul instrumentului de măsură asupra circuitului (Pb1, Pb2), caracterizări ale unor echipamente de măsurare (Pb3, Pb4), evaluarea sensibilității unui dispozitiv de măsurare (Pb5), evaluarea caracteristicilor de histereză ale unui aparat de măsurare (Pb6), evaluarea incertitudinii de măsurare cu ajutorul unui set de date (Pb7, Pb8), evaluarea incertitudinii de măsurare în cazul evaluării indirecte a unor parametri (Pb9), propagarea erorilor în cazul măsurărilor indirecte (Pb10).

1. Introducere

Măsurarea este o operație experimentală prin care o mărime fizică este comparată cu o unitate de măsură de aceeași natură, considerată mărime de referință. Pentru mărimea fizică măsurată se folosește termenul de măsurand, iar unitatea de măsură se poate prezenta sub forma unui etalon. Mărimea fizică de măsurat (măsurandul) reprezintă o caracteristică bine definită a unui fenomen sau a unui material, ea putând fi constantă sau variabilă în timp. Mărimile fizice de aceeași natură, ca de exemplu lungimea, lățimea și înălțimea, se evaluează folosind aceeași unitate de măsură.

Instrumentul de măsurare reprezintă mijlocul tehnic prin care se stabilește raportul dintre valoarea măsurandului și unitatea de măsură. Pe lângă stabilirea acestui raport, mijlocul de măsurare poate asigura și stocarea, prelucrarea sau/și transmiterea unor informații privind rezultatul măsurării. Aceste informații privind măsurandul trebuie să aibă un caracter obiectiv, independent de investigator (experimentator).

În funcție de *acuratețea de măsurare* pe care acestea o pot asigura, se poate vorbi despre două categorii de instrumente: *instrumente primare* (numite și *instrumente de referință*), respectiv *instrumente secundare* (desemnate ca *instrumente de lucru*). Instrumentele din prima categorie asigură o foarte bună calitate a procesului de măsurare, astfel încât indicația lor, *X*, reprezintă *valoarea convențională* a măsurandului în condițiile precizate de temperatură, zgomot, interferențe etc. Chiar și aceste instrumente, de mare acuratețe, prezintă o anumită eroare de măsurare, așa încât indicația lor este doar o aproximare pentru *valoarea adevărată*, X_0, a mărimii de măsurat, în condițiile date.

Pornind de la imaginea următoare, definim câteva elemente de bază, care trebuie cunoscute în vederea înțelegerii, din punct de vedere ingineresc, a *procesului de măsurare*.

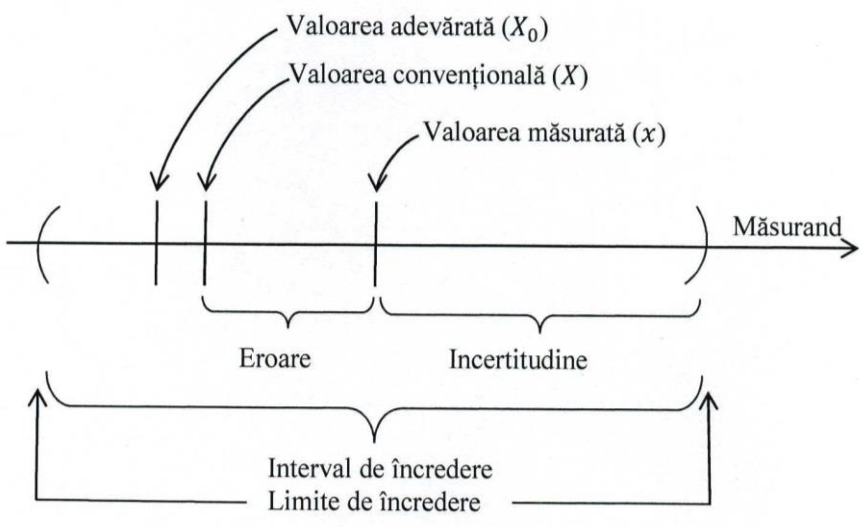

Fig.1.1 Explicativă privind noțiunea de măsurare.

Datorită performanțelor tehnice ale instrumentelor primare (de referință), diferența dintre valoarea convențională, *X,* indicată de un astfel de instrument, și valoarea adevărată, X_0, a mărimii de măsurat, este neglijabilă. De aceea, despre valoarea convențională se spune că este „convențional adevărată”. Pentru valoarea convențională se folosește și denumirea de valoare nominală. Fig.1.1 sugerează ideea că valoarea convențională este apropiată de valoarea adevărată. Se observă, de asemenea, că pentru mărimea de măsurat se folosește și termenul *măsurand*.

Valoarea măsurată, *x*, indicată de un instrument de lucru (utilizat pe scară largă) diferă mai mult sau mai puțin de valoarea *X,* obținută cu intrumentul de înaltă acuratețe. Abaterea poate fi în plus sau în minus, astfel încât diferența

$$\Delta = x - X \tag{1.1}$$

numită *eroare absolută* (desemnată simplu, *Eroare*, în Fig.1.1) este o mărime cu semn, având aceeași unitate de măsură ca și valorile măsurată (*x*) și convențională (*X*). Desigur, *aceeași eroare absolută* este mai semnificativă dacă măsurandul are o valoare convențională (adevărată) mai mică. De exemplu, dacă, măsurând două lungimi, X_1 = 10 m respectiv X_2 = 100 m, cu aceeași eroare absolută Δ = 1 m, este clar că prima măsurare, x_1 = 11 m, prezintă o eroare mai semnificativă decât cea de a doua, x_2 = 101 m.

Altfel spus, semnificația erorii de măsurare trebuie *apreciată relativ la valoarea convențională a măsurandului*. În acest scop se definește *eroarea relativă*, *δ*, ca raport dintre eroarea absolută și valoarea convențională („adevărată”) a măsurandului:

$$\delta = \Delta/X \cong \Delta/x. \tag{1.2}$$

Aproximarea din relația (1.2) este acceptabilă în contextul în care eroarea absolută este relativ mică, astfel încât să putem considera $x \cong X$. Ca, de exemplu, în măsurările ipotetice de mai sus, $\delta_1 = 1m/10m \cong 1m/11m \cong 0{,}1$ respectiv $\delta_2 = 1m/100m \cong 1m/101m \cong 0{,}01$. În mod evident, eroarea relativă este mult mai mare (semnificativă) în cazul primei măsurări decât în cazul celei de a doua: $\delta_1 \cong 0{,}1 \gg \delta_2 \cong 0{,}01$.

Eroarea relativă este o mărime adimensională cu semn. De exemplu, dacă în cazul ipotetic considerat anterior, am fi obținut $x_1 = 9\,m$, respectiv $x_2 = 99\,m$, ar fi rezultat valorile: $\Delta = -1\,m$; $\delta_1 \cong -0{,}1$; $\delta_2 \cong -0{,}01$. Cum tot în cazul primei măsurări eroarea relativă este mai mare, este clar că erorile relative *trebuie comparate nu algebric, ci ca valori absolute*: $|\delta_1| \gg |\delta_2|$.

Eroarea relativă poate fi exprimată și *în procente*, conform relației:

$$\delta_{\%} = \delta \cdot 10^2\ [\%]. \tag{1.3}$$

Astfel, în exemplul considerat anterior, s-ar fi obținut: $\delta_{1\%} = 0{,}1 \cdot 100 = 10\%$ și $\delta_{2\%}$ = 1%. Dacă *eroarea relativă* este extrem de mică, este justificată exprimarea ei *în părți pe milion* (*parts per million*), în acord cu relația:

$$\delta_{ppm} = \delta \cdot 10^6\ [ppm]. \tag{1.4}$$

De exemplu, o eroare relativă infimă, $\delta = 0{,}00005$, se exprimă mai convenabil în părți pe milion: $\delta_{ppm} = 0{,}00005 \cdot 10^6 = 50\ ppm$.

În practică, există destule situații în care, din lipsa unor echipamente de măsurat performante, valoarea acceptată ca fiind cea reală este *valoarea nominală.* Pe un rezistor putem citi valoarea de 100 Ω, aceasta reprezentând referința noastră în utilizarea acelei componente. Trebuie să știm că acest număr se obține prin aproximare/rotunjire. Chiar dacă adițional rezistorul este caracterizat printr-un parametru numit toleranță (0,5%, 1%, 5% etc.), în foarte multe cazuri, valoarea nominală, așa cum este scrisă, este luată în considerare când utilizăm sau măsurăm componenta.

Calculul erorii absolute conform relației (1.1) presupune măsurarea comparativă, a aceleiași mărimi, cu un instrument de lucru uzual și cu un aparat etalon. Eventual cu scopul verificării din punct de vedere metrologic a mijlocului de măsurare mai puțin performant. În mod uzual, deoarece fiecare măsurare este afectată de erori, se stabilește o *limită* a erorilor de măsurare pentru instrumentul de lucru folosit. Aceasta se numește *incertitudine de măsurare* (concept tratat mai jos). Domeniul de valori în care se presupune că se află valoarea adevărată a măsurandului se numește *interval de încredere*, iar marginile

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTRONICĂ, TELECOMUNICAȚII
ȘI TEHNOLOGII INFORMAȚIONALE
B-dul V. Pârvan, Nr. 2, 300223, TIMIŞOARA, ROMANIA
tel/fax: +40-(0)256-403291/5, e-mail: etc@upt.ro, http://www.etc.upt.ro

acestui interval se numesc *limite de încredere*. Valoarea adevărată a măsurandului se află în intervalul de încredere doar cu o anumită probabilitate, numită *nivel de încredere*.

De cele mai multe ori, erorile de măsurare pot fi caracterizate ca fiind *erori grosolane, erori aleatorii* sau *erori sistematice*. Prin urmare, putem afirma că procesul de măsurare pe care îl efectuăm este caracterizat de erori de măsurare care se încadrează în categoriile de mai sus.

Erorile grosolane sunt cauzate de greșeli în folosirea instrumentelor de măsurare, nerespectării metodelor de măsurare, lipsei de pricepere etc. Ele pot fi recunoscute și eliminate pe baza faptului că manifestarea lor face ca rezultatele operațiilor de măsurare să fie aberante.

Erorile sistematice se caracterizează prin aceea că, la repetarea procesului de măsurare, *rămân constante sau variază în mod previzibil*. Astfel, în cazul erorilor sistematice, cauzele sunt deseori cunoscute. Se poate proceda la corecții care să elimine/diminueze acele erori. Două exemple de apariție a erorilor sistematice, cu posibilitatea corectării acestora, sunt ilustrate în legătură cu metoda volt-ampermetrică de măsurare a rezistențelor (Fig. 1.2). Aici discutăm despre calculul indirect al valorii unei rezistențe, atunci când putem măsura curentul și tensiunea într-un circuit simplu.

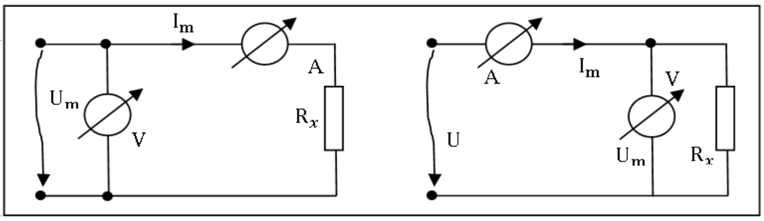

Fig.1.2 Explicativă privind apariția erorilor sistematice.

În prima schemă din Fig.1.2, tensiunea măsurată de voltmetru, U_m, apare pe rezistența necunoscută, R_x, înseriată cu rezistența internă a ampermetrului, R_a. Ca urmare, rezistența determinată ca raportul dintre tensiunea și curentul măsurate, va fi $R_m = \frac{U_m}{I_m} = R_x + R_a$. Deși rezistența ampermetrului este mică, ea apare ca o eroare sistematică în procesul de măsurare a rezistenței R_x. Dar această eroare sistematică poate fi corectată, dacă se cunoaște R_a. Pentru determinarea valorii R_a vom utiliza cartea tehnică a aparatului. Dacă pentru măsurarea rezistenței R_x s-ar folosi al doilea aranjament din Fig.1.2, tensiunea măsurată de voltmetru apare chiar pe rezistența necunoscută, R_x. Dar, în acest caz, chiar dacă rezistența internă a voltmetrului, R_v, este mare, curentul măsurat de ampermetru are o componentă care trece prin voltmetru. Ca urmare, rezistența măsurată cu acest aranjament, $R_m = \frac{U_m}{I_m} = R_x R_v/(R_x + R_v)$, va fi sistematic mai mică decât R_x. Și în acest caz, eroarea sistematică poate fi corectată dacă se cunoaște R_v.

Erorile aleatorii sunt o componentă a erorilor de măsurare caracterizate prin caracterul lor imprevizibil. La repetarea de un număr mare de ori (teoretic - infinit) a măsurării aceleiași mărimi, în aceleași condiții, eroarea aleatorie va prezenta o distribuție statistică. Aceste erori nu sunt introduse de către măsurand, însă periodic pot afecta rezultatele măsurării. Influența erorilor aleatorii poate fi redusă prin mărirea numărului de măsurări (sau prelevarea mai multor eșantioane) și medierea valorilor obținute.

Dacă discutăm despre performanțele sistemului de măsurare (sau ale instrumentului de măsurare), erorile întâlnite se numesc *erori instrumentale*. În Fig. 1.3 sunt prezentate patru tipuri de erori cauzate de instrumentul de măsurat, a căror explicație rezidă în abaterea caracteristicii de transfer static a aparatului.

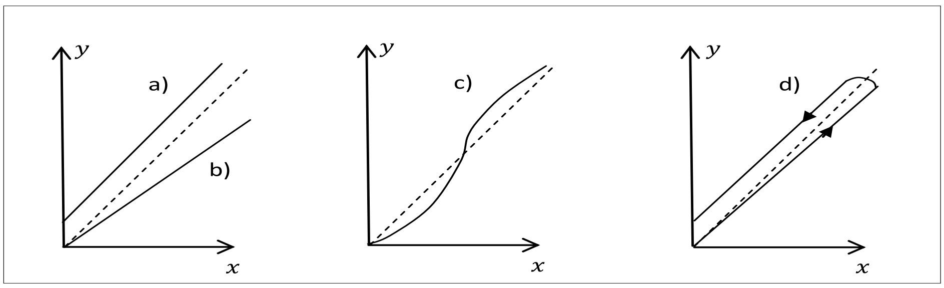

Fig.1.3 Explicativă privind erorile instrumentale.

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTRONICĂ, TELECOMUNICAȚII
ŞI TEHNOLOGII INFORMAȚIONALE
B-dul V. Pârvan, Nr. 2, 300223, TIMIŞOARA, ROMANIA
tel/fax: +40-(0)256-403291/5, e-mail: etc@upt.ro, http://www.etc.upt.ro

Forma ideală a caracteristicii de transfer static, $y = f(x)$, a unui aparat de măsură, este reprezentată cu linie întreruptă în cele trei grafice din Fig.1.3. În cazul a), caracteristica reală a instrumentului este translatată față de cea ideală. Instrumentul de măsurat prezintă o așa-numită *eroare de zero*, sau de *offset*. Erorile de acest tip pot fi eliminate dacă aparatul permite *reglajul de zero,* prin care indicația instrumentului se aduce la zero atunci când măsurandul are valoare nulă. Instrumentele digitale moderne permit efectuarea unor proceduri automate de calibrare, prin care, la nivel de calcul intern, se ajustează anumiți coeficienți în vederea eliminării erorilor de tip a). O caracteristică statică de tipul b) determină o *eroare de proporționalitate* (de *sensibilitate* sau de *amplificare*). Pentru aducerea caracteristicii de tip b) la forma ideală, ar trebui crescută amplificarea aparatului de măsură. O caracteristică statică de tipul c) se abate de la forma ideală a dreptei, iar astfel de aparat prezintă *erori de neliniaritate.* Astfel de erori apar și din cauza prezumpției de răspuns liniar a sistemului de măsurare. Însă prin consultarea documentației tehnice a aparatului putem determina eroarea de neliniaritate, deseori prezentată ca procent din domeniul de măsură. În sfârșit, o caracteristică de tipul d) prezintă o dedublare, în sensul că indicația instrumentului de măsură depinde de sensul de variație (creștere sau scădere) a măsurandului. Prin urmare, aparatul nu indică aceeași valoare a măsurandului dacă s-a ajuns la acea valoare mai întâi de la un nivel inferior, apoi de la un nivel superior. Un bun exemplu este procesul de măsurare a temperaturii unui lichid utilizând un termometru. Dacă lichidul ajunge la temperatura *X ˚C* prin încălzire, termomentrul va indica valoarea măsurată x_1. Apoi, lichidul își continuă încălzirea. În final, lichidul revine la temperatura *X ˚C* prin răcire, iar termomentrul va indica valoarea măsurată x_2. În acest caz, spunem că aparatul prezintă *erori de histerezis.*

În practica inginerească, tot cu privire la performanțele sistemului de măsurare, vom întâlni situații în care valorile obținute sunt analizate din perspectiva a două noțiuni: *acuratețe și precizie*. În limbajul comun, cei doi termeni par deseori interschimbabili, atât în limba română, cât și în limba engleză. *Din punct de vedere tehnic însă, semnificația lor este diferită*.

Acuratețea de măsurare reprezintă calitatea unui instrument de a indica o valoare cât mai apropiată de valoarea convențional adevărată a măsurandului. Evaluarea acurateții de măsurare nu se realizează cu ajutorul unei exprimări numerice, ci permite evaluarea instrumentului de măsură din punct de vedere calitativ. Caracteristicilor de acuratețe ale unui dispozitiv le sunt asociate *intervale de incertitudine a măsurării.* Aceste intervale (vezi Fig.1.1) reprezintă dispersia valorilor posibile pe care măsurandul le poate avea. Ca observație suplimentară, menționăm că există manuale și documentații tehnice în care specificația de incertitudine este notată ca fiind acuratețea dispozitivului. În general, cu cât incertitudinea de măsurare a unui dispozitiv este mai redusă, cu atât acuratețea este mai bună.

Nu trebuie să facem confuzie între *incertitudinea de măsurare* și *eroarea absolută*. Aceasta din urmă se exprimă prin calculul unei diferențe (vezi relația 1.1) și permite evaluarea valorilor măsurate (x) versus valoarea convențională (X), punctual pentru fiecare măsurare.

Dacă utilizăm un multimetru care *are incertitudinea specificată pentru domeniul de măsură*, trebuie să știm că valoarea indicată va fi afectată de erori din ce în ce mai semnificative, pe măsură ce distanța între valoarea maximă a domeniului și valoarea măsurandului crește.

Presupunem că utilizăm un voltmetru pentru a măsura o tensiune *X* = 100 V. Pe domeniul de 100 V, aparatul prezintă o incertitudine de ± 1%. Prin urmare, considerăm o valoare afișată în intervalul 99 V – 101 V ca fiind un rezultat mulțumitor.

Apoi, utilizând același aparat și același domeniu de măsură, încercăm să măsurăm o tensiune *X* = 10 V. Prin urmare, obținem o valoare afișată în intervalul 9 V – 11 V.

În primul caz, raportându-ne la valoarea măsurandului, eroarea maximă posibilă introdusă de aparat poate fi de 1% (vezi discuția despre eroarea relativă). În cel de-al doilea caz, raportându-ne la valoarea măsurandului, eroarea maximă posibilă introdusă de aparat poate fi 10%. Desigur, putem îmbunătăți acuratețea de măsurare prin selectarea domeniului de măsurare potrivit.

Dacă utilizăm un multimetru care *are incertitudinea specificată pentru valoarea afișată,* avem avantajul că eroarea se păstrează constantă, indiferent de valoarea măsurandului. În același experiment, un alt voltmetru indică o tensiune măsurată de 100 V, apoi indică o tensiune măsurată de 10 V. Conform manualului tehnic, aparatul prezintă o incertitudine de ± 1% din valoarea indicată. Nu are importanță domeniul pe care lucrăm. Valoarea indicată de 100 V corespunde intervalului 99 V – 101 V, iar valoarea indicată de 10 V corespunde intervalului 9,9 V - 10,1 V.

Prin urmare, dacă este posibil, alegeți un aparat de măsură pentru care intervalul de incertitudine (în unele manuale - acuratețe) este specificat ca procent din valoarea afișată pe ecran.

Precizia de măsurare reprezintă o exprimare a consistenței în apropierea valorilor indicate de instrument. Este o altă caracteristică utilizată în evaluarea calitativă a unui instrument. Cu alte cuvinte, precizia instrumentului se manifestă în situația în care după un număr suficient de mare de citiri ale aceluiași măsurand, în aproximativ aceleași condiții, obținem valori similare. O precizie foarte bună asigură o răspândire nesemnificativă numeric a valorilor măsurate. Totodată, prin analiza acestei caracteristici în timp, putem evalua *stabilitatea instrumentală* (modificarea caracteristicilor metrologice ale instrumentului, cu trecerea timpului).

În context industrial este posibil ca o discuție despre *precizia* unui sistem de măsurare să includă termenii de *repetabilitate* și/sau *reproductibilitate*. Aceștia din urmă sunt moduri diferite de a evalua precizia unui sistem, în funcție de condițiile experimentale. Discutăm despre *repetabilitate* în cazul în care procedurile noastre de măsurare au avut loc în aceleași condiții de mediu, locație și s-au desfășurat pe o perioadă scurtă de timp. Repetabilitatea poate fi afectată de variații locale ale unor parametri de mediu (de exemplu temperatură sau umiditate). Din aceste motive, în unitățile industriale de producție există sisteme de reglare care monitorizează foarte strict condițiile de mediu în care funcționează echipamentele electronice. Discutăm despre *reproductibilitate* dacă procedurile noastre de măsurare au avut loc în condiții de mediu diferite, în locații diferite și s-au desfășurat pe o perioadă extinsă de timp. Putem să ne imaginăm că un sistem de măsurare complex a fost demontat, mutat între două locații geografice, apoi repus în funcțiune în condiții similare de mediu. Însă sistemul este operat de alte persoane, anumite componente au fost reinstalate sau metoda de măsurare utilizată a suferit modificări.

În cazul în care am efectuat sute de măsurări (teoretic un număr infinit) ale aceleiași mărimi fizice, *a căror valoare medie dorim să o raportăm la valoarea convențional adevărată,* vom discuta despre *justețea măsurării.* Nu trebuie să confundăm acest termen cu acuratețea de măsurare. Justețea măsurării poate fi afectată de erori sistematice, însă nu și de erorile aleatorii. Efectele acestora din urmă vor fi insignifiante, datorită numărului mare de valori mediate.

Prin Fig. 1.4 putem caracteriza instrumentația utilizată din punctul de vedere al parametrilor prezentați anterior.

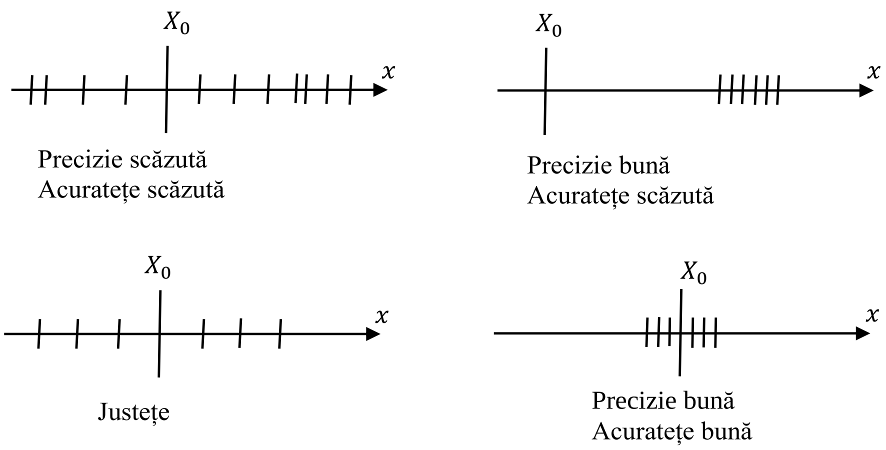

Fig.1.4 Explicativă privind acuratețea, precizia și justețea rezultatelor măsurărilor.

În cazul cel mai simplu, după utilizarea unui instrument pentru măsurarea repetitivă a unui măsurand, constatăm o acuratețe și precizie de măsurare extrem de scăzute (imagine stânga-sus). Totuși, un instrument poate furniza valori cu o răspândire minimă, deci precizie foarte bună, dar având o acuratețe scăzută (imagine dreapta-sus). În acest caz, o posibilă concluzie poate fi că aparatul prezintă *eroare de zero.* Desigur, rezultatul mediat al multiplelor valori măsurate poate să prezinte acuratețe (imagine stânga-jos). Cu alte cuvinte, procesul de măsurare este just. În final, un instrument „bun” oferă acuratețe și precizie conform cerințelor experimentale (imagine dreapta-jos).

Alți termeni de bază pe care îi vom întâlni în discuțiile tehnice din domeniul instrumentației și măsurărilor sunt prezentați în cele ce urmează:

- *Rezoluția* – termenul indică cantitatea minimă de modificare a măsurandului pe care aparatul o poate detecta la intrare. Totuși, această minimă modificare sesizabilă depinde de performanțele convertorului analog-digital care implementează eșantionarea valorilor măsurandului. Iar aceasta poate fi superioară rezoluției oferite de afișajul aparatului. Rezoluția unui aparat digital este în mod uzual asociată cu unitatea de măsură a celui mai puțin semnificativ digit al afișajului. Acest digit indică cea mai mică variație a măsurandului care poate fi prezentată utilizatorului. Astfel, dacă discutăm despre rezoluția unui aparat de măsură, ne referim la acea valoare minimă de modificare a măsurandului pe care o putem percepe cu ajutorul indicației aparatului. Dacă discutăm despre rezoluția unui senzor, de exemplu, facem referire la valoarea minimă de modificare a măsurandului care generează o variație a semnalului de ieșire. Totodată, devine evident faptul că rezoluția unui dispozitiv de măsurare pe care îl alegem trebuie să fie mai mică decât variația minim acceptabilă a măsurandului;

- *Sensibilitatea* – termenul face referire la cât de mult se modifică semnalul de ieșire (de indicație) al unui dispozitiv atunci când măsurandul se schimbă cu o anumită cantitate. Astfel, sensibilitatea este un raport între variația răspunsului sistemului (sau ceea ce avem la ieșire) și variația măsurandului (sau ceea ce avem la intrarea sistemului). Reținem ideea că sensibilitatea unui dispozitiv nu este uniformă pe întregul domeniu de măsură. Dispozitivul AD22100 este utilizat pentru măsurarea temperaturii mediului ambiant. Răspunsul său reprezintă o tensiune în intervalul 0,25 V – 4,75 V, care acoperă un domeniu de măsură de 200 ˚C în intervalul -50 ˚C – 150 ˚C. Analizând aceste date vom observa că sensibilitatea teoretică a senzorului este de 22,5 mV/˚C. Acesta își modifică semnalul de ieșire cu pasul de 22,5 mV pentru fiecare schimbare cu un ˚C a temperaturii mediului ambiant. Frecvent, sensibilitatea unui dispozitiv poate să fie raportată și la alți parametri de intrare. Un senzor de presiune, pe lângă sensibilitatea la măsurandul în cauză, poate avea o sensibilitate și la temperatura mediului ambiant. Un exemplu va fi prezentat ulterior.
  Dacă se lucrează cu aparate de măsură analogice, termenul de sensibilitate este utilizat deseori în relație cu rezistența internă a aparatului. În cazul unui voltmetru analogic, rezistența internă pe un anumit domeniu de măsură se calculează în Ω/V. Presupunem că în manualul unui voltmetru analogic avem specificația de sensibilitate egală cu 12.000 Ω/V la măsurarea tensiunii continue. Dacă setăm domeniul de măsură ca fiind 6 V, atunci rezistența internă a aparatului devine 72 kΩ. După cum vom vedea într-un exemplu de mai jos, de aceasta vom ține cont atunci când lucrăm cu aparatul, deoarece este un parametru extrem de important;
- *Domeniul de măsură* – reprezintă acel interval de valori pentru care dispozitivul de măsurare este capabil să furnizeze informații cu privire la valoarea măsurandului. Limita maximă a domeniului poartă denumirea internațională de *full scale range*. Valoarea minimă a domeniului poartă denumirea internațională de *threshold* (sau prag). Există situații în care un dispozitiv de măsurare nu oferă indicații (sau răspunsul este nul) într-o zonă a domeniului în care valorile măsurandului ar trebui să poată fi evaluate. În acest caz discutăm despre *zonă/bandă moartă a domeniului* sau *dead space/band*. Instrumentele de măsură care prezintă erori de histerezis sunt afectate de fenomenul *dead space*. Un bun exemplu în acest caz este un contor de măsurare a debitului apei prin intermediul unui rotor. Însă mecanismul intern al contorului este afectat de uzură. În situația în care apa curge foarte încet, este posibil ca rotorul să nu reacționeze, iar astfel să nu fie măsurat debitul. Măsurarea se declanșează doar atunci când debitul apei atinge un prag minim. Pentru toate valorile de debit existente anterior, indicația aparatului a fost nulă;
- *Fiabilitatea* – este un termen întâlnit des în context industrial. Fiabilitatea unui sistem de măsurare (sau a unui echipament) rezidă în probabilitatea ca acesta să funcționeze la un nivel de performanță acceptat/validat, pentru o anumită perioadă de timp, chiar dacă este afectat de uzură și operează în condiții de mediu fluctuante. Nivelul de performanță agreat poate face referire, de exemplu, la acuratețea și precizia de măsurare. Sau la alți parametri agreați de către echipa tehnică. În general, fiabilitatea se raportează prin ceea ce numim *rata de eșec* (sau *failure rate*).

$$rata\ de\ eșec = \frac{număr\ de\ eșecuri}{număr\ de\ măsurări \cdot perioada\ de\ observație} \tag{1.5}$$

Astfel, dacă stabilim perioada de observație ca fiind o săptămână, iar numărul de măsurări este de 100, din care 3 sunt greșite, putem aprecia *rata de eșec* a sistemului nostru ca fiind de 0,03/săptămână. Este foarte posibil ca același sistem să prezinte o rată de eșec diferită, în cazul în care va fi mutat într-o locație diferită, unde sunt condiții diferite de temperatură, umiditate, praf, coroziune etc. Menționăm că aplicarea relației (1.5) se poate face și în cazul în care evaluăm un proces de măsurare din care fac parte zece sisteme independende de același tip. În acest caz, parametrul *numărul de măsurări* devine egal cu numărul de sisteme, iar numărul de eșecuri se raportează cumulat.

Este foarte posibil ca evaluarea fiabilității unui sistem de măsurare să fie efectuată prin ceea ce în context industrial numim *First Pass Yield.* Cu alte cuvinte, dacă măsurăm anumiți parametri electrici ai unui produs electronic, în aceleași condiții de mediu și cu același sistem de măsurare, vom utiliza des relația

$$FPY_{\%} = \left(1 - \frac{număr\ de\ produse\ neconforme}{număr\ total\ de\ produse}\right) \cdot 100\ [\%]. \quad (1.6)$$

În funcție de cerințele industriale, putem întâlni situația în care *nivelul de performanță* agreat pentru un sistem de măsurare, după ajustări, calibrări și reglări finalizate, să fie un FPY ≥ 95 %. Desigur, aceste explicații trebuie privite ca generale. Ele pot fi adaptate pentru specificul unității industriale în care vor fi întâlnite.

Exemplu: din datele de catalog ale unui sistem de măsurare bazat pe un senzor de presiune aflăm că *domeniul de măsură* aferent este de 0 Pa – 1500 kPa. *Incertitudinea* de măsurare este de ± 2% din valoarea afișată, iar sistemul prezintă o *sensibilitate la temperatură* de ± 0,3%/˚C din valoarea afișată.

Din datele prezentate anterior putem deduce că sistemul nostru poate fi utilizat pentru măsurarea unor presiuni în domeniul 0 Pa – 1500 kPa. Iar dacă sistemul ar măsura și afișa valoarea *x = 150 kPa*, față de această valoare, măsurandul poate să aibă o valoare diferită *cu ± 3 kPa*. Iar dacă temperatura de lucru variază cu un ˚C, fără ca valoarea măsurandului să se modifice, va trebui să luăm în considerare o posibilă eroare suplimentară de ± 0,45 kPa.

Acest exemplu este relevant pentru a justifica eforturile pentru ca în unitățile de producție a sistemelor electronice să fie menținute condiții constante de temperatură, umiditate sau curățenie.

2. Incertitudinea de măsurare

În general, există o substituire între termenii *acuratețe, eroare* și *incertitudine* atunci când exprimăm rezultatele măsurărilor. Deseori vom întâlni situația în care evaluarea rezultatelor măsurării se va realiza fie prin utilizarea termenului de acuratețe, fie a termenului de incertitudine, după care putem vorbi din nou despre acuratețe, apoi despre eroare ș.a.m.d.

Incertitudinea de măsurare reprezintă un parametru numeric important, asociat dispersiei valorilor pe care un măsurand le poate avea în anumite condiții. Acest *interval* specifică valoarea maximă permisă până la care variabila *x* poate fi caracterizată ca fiind acceptabilă. Pe lângă faptul că *x* se poate modifica în funcție de condiții externe, chiar mijlocul nostru de măsurare este supus îmbătrânirii, uzurii, erorilor de zero, liniaritate, histereză, calibrării expirate etc. Procesul de măsurare sau metoda prin care lucrăm pot fi supuse erorilor *aleatorii sau sistematice*, pot fi supuse unor greșeli de citire a rezultatelor, pot fi supuse necunoașterii influenței condițiilor de mediu asupra sistemului de măsurare și, în fine, operatorul poate să nu prezinte consistență în execuția procedurilor aferente. *Toate aceste chestiuni, dar și altele, conduc la concluzia că niciodată nu putem avea încredere totală în valoarea măsurată.*

Vom utiliza termenul de *acuratețe* atunci când discutăm punctual despre performanțele unui instrument de măsurare comparate cu cele ale unui alt instrument de măsurare de același tip. De exemplu vom spune că am comparat, pe domeniul de măsurare de 20 V, două voltmetre. Și că voltmetrul *A* prezintă acuratețe mai bună decât voltmetrul *B*. Discutăm despre *eroare* atunci când evaluăm o valoare măsurată prin intermediul unor relații de tipul (1.1), (1.2) etc. Astfel, rezultatul unei măsurări prezintă *acuratețe mai bună* atunci când *eroarea este mai mică*. Sau când *intervalul de incertitudine este mai îngust*. Iar procesul de măsurare, incluzând aparatul de măsură, metoda, calculele aferente etc., este viabil *dacă se încadrează în limitele de incertitudine agreate*.

Incertitudinea de măsurare se clasifică în două tipuri. *Incertitudinea de tip A* și *inceritudinea de tip B*. Cele două categorii sunt clasificate în funcție de metoda de lucru pe care o abordăm pentru evaluarea rezultatelor.

Incertitudinea de tip A se determină pe baza analizei unui set de date prin intermediul unor metode statistice. Această analiză presupune existența unui set de date, obținute în condiții aparent similare, suficient de consistent astfel încât să putem aprecia cu o rezoluție satisfăcătoare caracteristicile sistemului nostru de măsurare. Cu alte cuvinte, utilizăm termenul de *incertitudine de tip A* când evaluăm un set zeci (sau chiar sute) de valori măsurate aparent în aceleași condiții de lucru. Cu ajutorul incertitudinii de tip A, vom caracteriza global acel set de valori.

Astfel, *valoarea medie* teoretică, aceea care caracterizează măsurandul *X*, poate fi estimată ca medie a celor *n* valori x_i obținute prin măsurare:

$$\mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i. \quad (1.7)$$

În continuare, vom evalua incertitudinea de măsurare asociată estimatorului μ. Estimarea variației de distribuție pentru valorile x_i, care descriu procesul nostru de măsurare, se calculează utilizând relația erorii medie pătratice (sau varianței) $s^2(x)$.

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2. \tag{1.8}$$

Deviația standard teoretică, numită uneori direct *incertitudine standard de tip A* (sau *abatere standard*), poate fi estimată ca radical al varianței.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{(n-1)}}. \tag{1.9}$$

Statistic, valoarea medie μ apare ca fiind cea mai probabilă dintre valorile măsurate. Dacă aplicația de măsurare permite, din punct de vedere al vitezei de execuției, se recomandă ca, la fiecare repetare a unei măsurări, să efectuăm *n = 10* prelevări de valori iar apoi să prezentăm valoarea medie ca fiind rezultatul execuției acelui pas.

Pentru a stabili *valoarea centrală a unui șir de valori măsurate*, se poate folosi așa-numita *mediană*, definită ca valoarea situată numeric la mijlocul șirului de valori măsurate (50% dintre valorile măsurate sunt mai mici, iar 50% sunt mai mari decât mediana. De exemplu, presupunând că s-a măsurat și aranjat în ordine crescătoare un număr impar de valori, $x_1, x_2, \ldots, x_9$, mediana va fi valoarea măsurată x_5. Dacă însă șirul valorilor măsurate și aranjate în ordine crescătoare cuprinde un număr par de valori, mediana poate fi determinată ca media aritmetică a valorilor centrale din șir. De pildă, pentru zece valori măsurate și aranjate în ordine crescătoare, $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, mediana se determină ca $(x_5 + x_6)/2$.

Incertitudinea de tip B se determină pe baza analizei metodelor experimentale și de măsurare utilizate. Aici discutăm despre cumularea unor factori care țin de experiența inginerească, de cunoașterea comportamentului unui sistem de măsurare din perspectiva unor proiecte anterioare; trebuie să luăm în considerare datele de calibrare ale aparatului, precum și tot ceea ce înseamnă judecată critică a metodelor utilizate.

Pentru analiza incertitudinii de tip B, vom utiliza valori singulare, vom utiliza metode care analizează incertitudinea propagată prin calcule indirecte ale valorii unui anumit parametru, sau vom utiliza informații pe care le vom identifica în manualele tehnice.

După cum observăm, dacă în cazul incertitudinii de tip A lucrurile sunt relativ ușor de implementat, analiza incertitudinii de tip B depinde de complexitatea aplicației și de experiența inginerului. Nu vom insista asupra altor detalii. Pentru scopul acestui material, este suficient să cunoaștem cele două tipuri de incertitudine. Evident, trebuie să știm că rezultatele furnizate de un sistem de măsurare includ incertitudinea formată din contribuții din ambele clasificări.

3. Aplicații

Pb1. Această problemă aduce în discuție o situație de eroare sistematică (uneori numită eroare de metodă), prin care utilizarea unui multimetru nepotrivit aplicației de măsurare cauzează rezultate eronate.

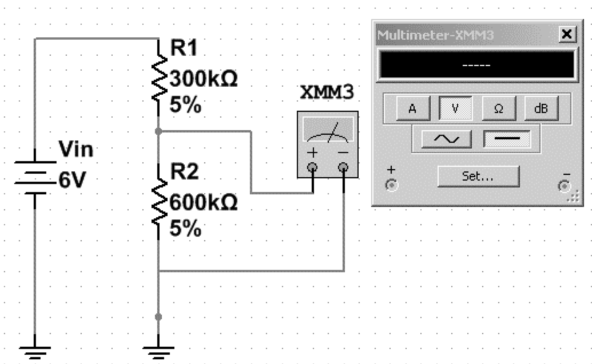

Fig.1.5 Montaj experimental pentru implementarea unui divizor de tensiune.

În montajul experimental din Fig.1.5 observăm următoarele componente: o sursă de tensiune continuă, V_{in}, care alimentează circuitul cu 6 V, două rezistențe conectate în serie (valori de sute de kΩ, toleranță 5%) și un voltmetru numeric care măsoară căderea de tensiune, în modul automat (AutoRange). Rezistența internă a voltmetrului, pe domeniul de măsură selectat, are valoarea de 1 MΩ. În manualul aparatului putem consulta specificația de incertitudine a măsurării, care pentru domeniile de 1 V, 3 V, 40 V și 400 V este de ± (0,5%+1).

a) Care este domeniul de măsură pe care lucrează aparatul în mod automat?

Regula de bază: pentru a reduce influența erorii maxime asupra valorii măsurate *x,* alegem ca domeniul pe care lucrează aparatul să fie cât mai apropiat, dar mai mare decât valoarea teoretică a măsurandului. În acest caz, aparatul selectează în mod automat domeniul de 40 V. Prin calculul teoretic al căderii de tensiune pe rezistența R_2, vom confirma selecția automată a domeniului de măsură.

b) Calculați valoarea teoretică a căderii de tensiune pe rezistența R_2.

Pentru calculul teoretic, vom ignora toleranțele rezistențelor din circuit, ignorăm rezistența firelor/conexiunilor din montaj, iar sursa de tensiune o considerăm ideală (generează exact tensiunea de 6 V, fără fluctuații).

Prin aplicarea directă a regulii divizorului de tensiune, avem:

$$U_{R2} = V_{in} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6V \cdot \frac{600k\Omega}{900k\Omega} = 4V$$

Prin urmare, considerăm ca valoare convențional adevărată rezultatul calculului teoretic. Tensiunea pe rezistența R_2 este egală cu 4 V, iar indicația aparatului de măsură va trebui să se apropie de această valoare.

c) Prin rularea simulării funcționării acestui circuit, observăm că indicația aparatului nostru este de 3,333V.

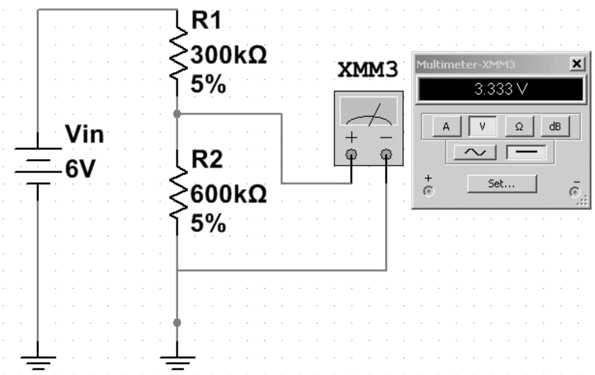

Fig.1.6 Montaj experimental pentru implementarea unui divizor de tensiune – simulare (*Ri* = 1 MΩ).

Calculați erorile Δ și $\delta_{\%}$, apoi prezentați în mod obiectiv valoarea măsurată. Care este explicația pentru apariția acestei erori, considerând că montajul experimental este realizat în mod corect? Cum putem micșora efectul erorii?

Pentru a prezenta în mod obiectiv valoarea măsurată, este nevoie să specificăm atât rezultatul afișat pe ecranul aparatului, cât și intervalul de incertitudine definit în manualul tehnic. Observăm că rezoluția de măsurare pe acest domeniu este de 1 mV. Apoi, vom menține aceeași unitate de măsură atât pentru exprimarea *x*, cât și pentru precizarea intervalului de incertitudine. Vom păstra același număr de cifre semnificative, chiar dacă este nevoie de rotunjirea valorilor rezultatelor.

$$U_{R2} = 3{,}333\ V \pm (0{,}5\% \cdot Domeniul + 1 \cdot 0{,}001\ V)$$

$U_{R2} = 3{,}333\ V \pm 0{,}201\ V$ sau $U_{R2} = (3{,}333\ \pm 0{,}201)\ V$

Δ = - 0,667 V sau – 667 mV, unde *X* = 4 V

$\delta_{\%} = \frac{-0,667V}{3,333V} \cdot 100$ =-20% sau mai clar ca valoare absolută $\delta_{\%}$ = 20%.

Precizăm că în montajul nostru rezistența internă a aparatului, *Ri*, este de 1 MΩ. Această componentă este conectată în paralel cu rezistența R_2. Prin urmare, rezistența echivalentă care apare în circuit este R_{ec}= 375 kΩ. Înlocuind în regula divizorului de tensiune valoarea R_{ec}, obținem U_{R2} = 3,333 V. Astfel, prin alegerea acestui aparat, nu vom putea măsura corect căderea de tensiune pe rezistența R_2. Putem spune că am introdus o *eroare sistematică* în modul nostru de măsurare. Practic, rezultatul eronat se repetă (și este aproximativ același) dacă încercăm să măsurăm de câteva ori cu acest aparat. Cunoaștem motivul apariției erorii și putem remedia rapid situația.

Prin utilizarea unui voltmetru cu rezistența internă *Ri* = 10 MΩ, obținem R_{ec} = 566 kΩ. Înlocuind R_{ec} în regula divizorului de tensiune, obținem U_{R2} = 3,922 V.

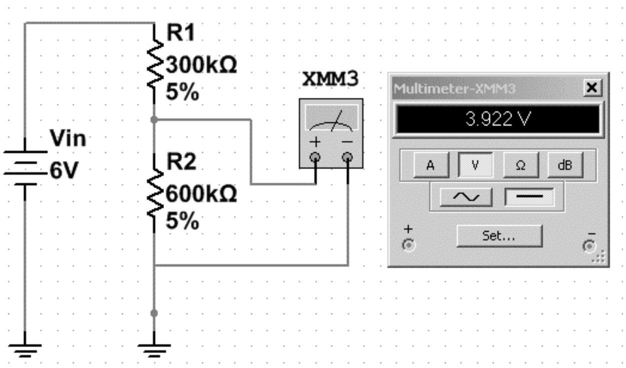

Fig.1.7 Montaj experimental pentru implementarea unui divizor de tensiune – simulare (*Ri* = 10 MΩ).

În acest caz, putem prezenta următoarele date:

$$U_{R2} = 3{,}922\ V \pm (0{,}5\% \cdot Domeniul + 1 \cdot 0{,}001\ V)$$

$$U_{R2} = 3{,}922\ V \pm 0{,}201\ V \text{ sau } U_{R2} = (3{,}922\ \pm 0{,}201)\ V$$

Δ = - 0,078 V sau – 78 mV, unde *X* = 4 V

$\delta_{\%} = \frac{-0,078V}{3,922V} \cdot 100 \cong$ -2% sau mai clar ca valoare absolută $\delta_{\%} \cong$ 2%.

Observați că intervalul de incertitudine la care ne putem aștepta, dacă lucrăm pe domeniul de 40V, este de ± 0,201 V. Această valoare este o caracteristică a aparatului care ține strict de domeniul pe care lucrăm. Dacă presupunem că aparatul nostru ar putea măsura tensiunea U_{R2} pe domeniul de 10 V, atunci intervalul de incertitudine calculat devine ± 0,051 V. Prin urmare, am fi îmbunătățit considerabil calitatea procedurii de măsurare dacă aparatul nostru ar fi putut lucra pe un domeniu mai apropiat de *X = 4 V.*

Raportat la Fig.1.1, considerăm că valoarea convențional adevărată a măsurandului nostru este *X = 4 V.* Cu multimetrul mai performant, am obținut rezultatul $U_{R2} = 3{,}922\ V$, dar am specificat și intervalul de incertitudine ± 0,201 V. Astfel, valoarea indicată de aparatul nostru poate prezenta o incertitudine maximă de 0,201 V (deci 4,123 V maximum, 3,721 V minimum). În tot cazul, valoarea convențional adevărată se încadrează în intervalul de incertitudine precizat.

Nu același lucru îl putem spune despre situația în care utilizăm primul multimetru. Astfel, $U_{R2} = 3{,}333\ V$, iar intervalul de incertitudine este tot ± 0,201 V. Valoarea convențional adevărată nu se încadrează în intervalul de incertitudine precizat.

Observație. În experimentul nostru am ales să ignorăm valorile toleranțelor celor două rezistențe. În practica inginerească se acceptă acest mod de lucru. Pentru aplicații în care întâlnim cerințe stricte cu privire la performanțele sistemului de măsurare, trebuie să fim atenți la cazurile extreme pe care montajul nostru le poate genera. Astfel, R_1 ar putea avea valoarea minimă de 285 kΩ și ar fi conectat în serie cu R_2 cu valoarea maximă de 630 kΩ. Atunci, *X = 4,13 V*. Sau R_1 = 315 kΩ, R_2 = 570 kΩ și *X* =

3,86 V. De aici se modifică toate calculele anterioare, precum și condițiile de validare experimentală. Așa încât trebuie să avem în vedere regulile generale precizate în continuare.

Pentru minimizarea efectului erorilor sistematice în cazul utilizării voltmetrelor, reținem următoarele reguli importante.

- Vom analiza cu atenție aplicația de măsurare atunci când întâlnim rezistențe având valori minimale de ordinul sutelor de kΩ sau de ordinul MΩ-ilor;
- Domeniul pe care lucrăm trebuie să fie cât mai apropiat, dar mai mare decât valoarea reală a măsurandului;
- Rezistența de intrare (uneori denumită *impedanță de intrare*) a aparatului trebuie să fie cât mai mare, comparativ cu rezistența de pe care culegem tensiunea.

Pb2. Care este descrierea corectă pentru următoarea situație? Presupunem că dorim să măsurăm intensitatea curentului electric într-un circuit cu ajutorul unul ampermetru. Ce putem afirma despre diferența între valoarea intensității curentului din circuit înainte și după inserarea ampermetrului? Diferența este cu atât mai mare cu cât este mai mare (1) rezistența internă a aparatului sau (2) rezistența circuitului electric.

a) (1) A, (2) A;   b) (1) F, (2) F;   c) (1) A, (2) F;   d) (1) F, (2) A.

Răspuns corect - c). Rezistența internă a ampermetrului trebuie să fie cât mai mică, astfel încât să nu afecteze valoarea intensității curentului (vezi Fig.1.2 și discuția despre erorile sistematice).

Pb3. Dacă un sistem de măsurare nu prezintă repetabilitate, asta înseamnă că (1) setul valorilor măsurate, pentru evaluarea aceluiași măsurand, prezintă fluctuații aleatorii sau (2) seturile valorilor măsurate, pentru evaluarea unor măsuranzi diferiți, prezintă fluctuații aleatorii.

a) (1) A, (2) A;   b) (1) F, (2) F;   c) (1) A, (2) F;   d) (1) F, (2) A.

Răspuns corect - c). Discutăm despre repetabilitate atunci când evaluăm sistemul în aplicații de măsurări repetate ale aceluiași măsurand (vezi Fig.1.4 și discuția despre precizie). Dacă setul de valori generate prezintă o împrăștiere semnificativă a rezultatelor, putem concluziona că nu există repetabilitate. Dacă sistemul nostru generează mai multe seturi de date, corespunzătoare unor măsuranzi diferiți, și observăm câteva valori fluctuante (în seturi diferite), nu putem spune că sistemul nu prezintă repetabilitate. Este foarte posibil ca într-un anumit set să identificăm câteva valori care pot fi caracterizate ca erori aleatorii, însă restul valorilor din set să fie strâns grupate în jurul valorii *X.*

Pb4. Într-un context de discuții cu privire la un sistem de măsurare și validare a unor produse electronice (de exemplu echipament de tip *In Circuit Tester* sau *Flying Probe*), întâlnim caracterizarea acestuia ca având fiabilitate de 0,02. Cum putem explica această concluzie?

Răspuns: vom analiza rezultatul din punctul de vedere al relației (1.5). Înainte de toate, vom stabili care este perioada de timp pentru care este valabilă evaluarea. Și câte produse electronice au fost măsurate și validate cu ajutorul sistemului nostru. Dacă presupunem că evaluarea se face pe o perioadă de o lună și au fost testate 3.000 de produse electronice, atunci concluzionăm că sistemul nostru a raportat valori greșite în 60 de cazuri. De la această concluzie putem evalua dacă sistemul de măsurare are o problemă, sau dacă respectivele produse electronice au fost defecte.

Pb5. Un senzor de culoare este testat în condiții de laborator la o temperatură constantă *t = 20 ˚C.* Valorile de tensiune generate de senzor în funcție de lungimea de undă a culorii sunt prezentate mai jos.

Lungime de undă, λ nm:	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
Tensiune de ieșire, mV:	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTRONICĂ, TELECOMUNICAȚII
ȘI TEHNOLOGII INFORMAȚIONALE
B-dul V. Pârvan, Nr. 2, 300223, TIMIŞOARA, ROMANIA
tel/fax: +40-(0)256-403291/5, e-mail: etc@upt.ro, http://www.etc.upt.ro

a) Care este sensibilitatea senzorului în condiții de laborator?

Pentru calculul sensibilității senzorului, în condiții de laborator, vom determina panta dreptei reprezentate de valorile măsurandului în relație cu tensiunea de ieșire. În acest caz, avem sensibilitatea de 0,1 mV/nm și un răspuns liniar al senzorului pe tot domeniul de măsurare. Practic, senzorul își modifică semnalul de ieșire cu pasul de 0,1 mV pentru fiecare schimbare cu un *nm* a lungimii de undă.

Ulterior, senzorul este utilizat într-un mediu de lucru la o temperatură constantă *t = 25 ˚C.* În acest caz, valorile de tensiune generate de senzor în funcție de lungimea de undă a culorii sunt prezentate mai jos.

Lungime de undă, λ nm:	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600
Tensiune de ieșire, mV:	7	11	14	22	29	32	34	42	46	52	54	60	69

În Fig.1.8 observăm răspunsul senzorului în condiții de lucru în laborator și în mediu exterior.

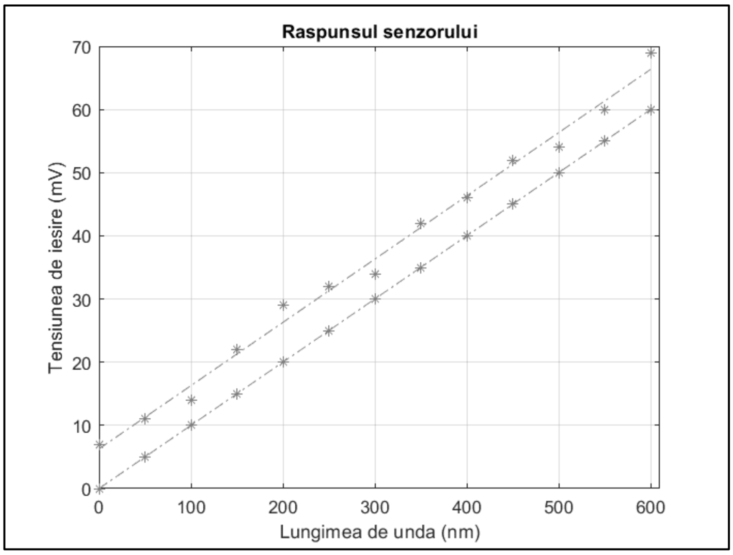

Fig.1.8 Răspunsul senzorului de culoare în condiții de laborator și în exterior.

Dacă vom analiza noile valori experimentale, vom constata că senzorul prezintă o eroare de zero (sau *drift*) deoarece el generează 7 mV la o lungime de undă egală cu 0 nm. Apoi, răspunsul senzorului nu este liniar. Prin urmare, trebuie să luăm în considerare caracterul de neliniaritate. Este clar faptul că senzorul nostru prezintă o sensibilitate adițională la temperatură.

Eroarea de zero este de 7 mV/5 ˚C, deci aproximativ 1,4 mV/˚C. Ecuația de aproximare liniară obținută cu ajutorul valorilor măsurate experimental este $y = 0{,}10011 \cdot x + 6{,}2747$. Această relație a fost obținută prin intermediul programului MATLAB. Dacă vom calcula eroarea absolută între sensibilitatea senzorului în condiții de laborator comparativ cu ceea ce avem în condiții externe, obținem Δ = 0,00011 mV/nm. Putem astfel estima că influența temperaturii mediului ambiant asupra sensibilității senzorului este 0,00011 mV/nm la 5˚C. Așa încât senzorul nostru 0,000022 mV/nm la fiecare ˚C. Suplimentar, pentru fiecare valoare a lungimii de undă pentru care avem corespondența cu tensiunea de ieșire oferită de senzor, putem calcula eroarea relativă.

În Fig.1.8, în cazul caracteristicii obținută pentru *t = 25 ˚C,* observăm valorile măsurate dispersate. Diferențele între aceste valori și dreapta de aproximare poartă numele de erori de neliniaritate. Cu ajutorul acestora se poate evalua care este lungimea de undă pentru care răspunsul senzorului prezintă eroarea cea mai semnificativă.

Pb6. În cadrul unui experiment de măsurare a tensiunii generate de o sursă ideală, constatăm că voltmetrul utilizat prezintă indicații diferite în funcție de sensul de creștere a măsurandului. Mai jos avem datele obținute pe cale experimentală prin creșterea liniară a tensiunii în domeniul
0 V – 5 V, iar apoi prin descreșterea liniară a tensiunii în domeniul 5 V – 0 V. Evaluați eroarea de histereză a aparatului de măsură pentru acest domeniu de măsură.

Valori tensiune generată, V:	0	1	2	3	4	5
Valori tensiune măsurată, V:	0	0,9	1,9	2,8	3,9	5

Valori tensiune generată, V:	5	4	3	2	1	0
Valori tensiune măsurată, V:	5	3,8	2,9	1,9	0,9	0

Analizând valorile măsurate vom constata că pentru sensul crescător $\Delta = 0; 0{,}1; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}1; 0\ V$, iar pentru sensul descrescător $\Delta = 0; 0{,}2; 0{,}1; 0{,}1; 0{,}1; 0\ V$. Eroarea maximă de histereză se observă atunci când tensiunea generată de sursă are valorile 3 V și 4 V. În aceste situații diferența maximă este de 0,3 V. Ceea ce reprezintă o eroare maximă de histereză egală cu 6%.

Pb7. Pentru evaluarea tensiunii generate de o sursă fixă cu valoarea nominală 4,5 V, utilizăm un multimetru care prezintă incertitudinea de măsurare ca fiind 0,1% din valoarea indicată. Cu ajutorul multimetrului efectuăm un set de 30 de măsurări ale căror valori sunt redate mai jos. Prezentați valoarea estimată pentru tensiunea generată *X*, precum și incertitudinea de măsurare asociată. Calculați $\delta_{\%}$ și precizați intervalul de incertitudine aferent măsurării cu numărul 18. Rezultatele se vor prezenta utilizând 3 cifre semnificative.

Tabelul 1.1 Rezultatele procesului de măsurare.

Nr.	*x*	Nr.	*x*	Nr.	*x*
1	4,53	11	4,58	21	4,57
2	4,48	12	4,47	22	4,57
3	4,55	13	4,53	23	4,58
4	4,49	14	4,61	24	4,41
5	4,49	15	4,49	25	4,50
6	4,58	16	4,42	26	4,54
7	4,52	17	4,41	27	4,42
8	4,51	18	4,52	28	4,46
9	4,49	19	4,51	29	4,55
10	4,49	20	4,52	30	4,57

Vom analiza un set de valori măsurate în aceleași condiții de lucru și cu același aparat. Prin urmare putem aprecia că posibilele contribuții la incertitudinea de măsurare provin de la performanțele tehnice ale aparatului sau de la aceleași condiții de mediu. *Valoarea medie* experimentală caracterizează cel mai bine măsurandul *X* și poate fi determinată cu ajutorul relației (1.7). Astfel, $\mu = 4{,}51\ V$. Prin calculul *deviației standard* putem obține intervalul de incertitudine. Astfel, $\sigma = 0{,}05\ V$. În urma acestui experiment, estimăm valoarea tensiunii generate de sursa fixă ca fiind (4,51 ± 0,05) V. În cazul măsurării cu numărul 18, *x = 4,52 V* având un interval de incertitudine de ± 4,5 mV. Observăm că valoarea măsurată x_{18} = *(4,52 ± 0,0045) V* se încadreză în evaluarea prezentată cu ajutorul incertitudinii de măsurare de tip A. Pentru ilustrarea valorii x_{18} am utilizat reprezentarea incertitudinii cu patru ~~cifre~~ zecimale. În mod uzual, reprezentarea ar fi trebuit să aibă o rotunjire la două ~~cifre~~ zecimale, asemenea valorii măsurate. Având în vedere performanțele foarte bune ale dispozitivului prin eroarea maximum posibilă de 4,5 mV, uneori se poate ignora intervalul de incertitudine și se poate preciza doar valoarea măsurată.

Dacă valorile măsurate prezintă o densitate de probabilitate normală (gaussiană), putem aprecia că aproximativ 68,3% din valorile măsurate se regăsesc în intervalul $\mu \pm \sigma$, că aproximativ 95,5% din valorile măsurate se regăsesc în intervalul $\mu \pm 2 \cdot \sigma$ și că aproximativ 99,7% din valorile măsurate se regăsesc în intervalul $\mu \pm 3 \cdot \sigma$. În context industrial, este posibil să întâlnim discuția despre așa numitele *intervale/niveluri de încredere* în care funcționează o soluție de măsurare. Un nivel de încredere de „un sigma” înseamnă că se așteaptă ca acel echipament să furnizeze date măsurate din care aproximativ 68,3% să fie plasate în intervalul admis ca fiind acceptabil $\mu \pm \sigma$. În cele mai multe situații, nivelul de încredere utilizat pentru validarea unei soluții de măsurare industrială este de „doi sigma”. Soluția de măsurare va fi acceptată dacă valorile furnizate se găsesc în procent de cel puțin 95% între limitele intervalului $\mu \pm 2 \cdot \sigma$. În exemplul nostru, dacă analizăm valorile măsurate individual și constatăm că ele se încadrează în nivelul de încredere „doi sigma”, vom declara ca acceptabilă soluția.

Pb8. Pentru setul de date obținut la problema anterioară, determinați *intervalele de încredere* ca limite de acceptanță a sistemului de măsurare și evaluați diferența între valoarea medie și valoarea măsurandului, convențional adevărată *X*.

Este foarte posibil ca pentru un anumit experiment să obținem mai multe seturi de date (să spunem că fiecare set conține câte 30 de valori măsurate) care prezintă distribuție gaussiană. Astfel, vom avea mai multe valori medii calculate, acestea formând la rândul lor o distribuție gaussiană. Evident, între toate aceste valori medii și valoarea măsurandului *X* există diferențe. Teoretic, doar în cazul în care avem un set infinit de valori măsurate, valoarea medie a acestora este egală cu *X*.

Întrebarea care se pune este următoarea: pentru un set finit de date, care este deviația valorii medii μ față de valoarea măsurandului *X*? Relația (1.10) definește *eroarea standard a mediei unui set care conține n valori măsurate.* Acest tip de eroare definește deviația standard a mediei μ față de valoarea convențional adevărată *X.*

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{1.10}$$

Știm că $\mu = 4{,}51\,V$, $\sigma = 0{,}05\,V$ iar *n = 30*. Prin urmare, $\alpha \cong 0{,}009$ V. Presupunem că alegem să validăm soluția de măsurare pentru un interval de încredere de 95,5%. Asta înseamnă că stabilim magnitudinea erorii de acceptanță la $2 \cdot \alpha \cong 0{,}02\,V$. Putem concluziona că există o probabilitate de 95,5% ca *mediile seturilor de valori* obținute în urma utilizării sistemului nostru de măsurare să se regăsească în intervalul $X \pm 2 \cdot \alpha$. Astfel, am avut posibilitatea să stabilim un interval de validare care exprimă abaterea maximum acceptată a valorii medii μ față de valoarea măsurandului *X.* În final, putem estima valoarea măsurandului ca fiind *x = (4,51 ± 0,02) V.*

Observăm diferența în abordare față de problema anterioară. Inițial, validarea sistemului de măsurare s-a efectuat pe baza relației de abatere a valorilor măsurate față de μ. De aici au rezultat intervalele de încredere aferente și soluția de prezentare a valorii măsurandului ca fiind *x = (4,51 ± 0,05) V*. În a doua abordare, ne-am dorit evaluarea abaterii mediei μ față de valoarea convențional adevărată *X*. Și am estimat valoarea măsurandului ca fiind *x = (4,51 ± 0,02) V*, stabilind un interval de acceptanță mai strict. Pe baza cerințelor impuse pentru validarea soluției de măsurare, vom selecta una dintre cele două abordări. Desigur, există posibilitatea ca o companie să aibă o procedură diferită pentru evaluarea unui sistem de măsurare, însă situațiile prezentate sunt des întâlnite.

Pb9. Această problemă face referire la situația în care un sistem de măsurare estimează mai mulți parametri, iar pe baza acestora efectuăm o evaluare indirectă a măsurandului de interes. Două exemple relevante ar fi estimarea indirectă a valorii unei rezistențe, dacă am măsurat valoarea curentului și tensiunii din circuit, sau estimarea indirectă a valorii unei rezistențe serie echivalentă, dacă am măsurat individual mai multe rezistențe. Prin urmare, erorile sistematice și aleatorii care se manifestă la nivelul fiecărui parametru măsurat au un efect cumulat în calculul parametrului final. Astfel, ne propunem să discutăm câteva modalități (nu sunt singurele) de estimare a cumulului de erori de măsurare în situația determinării indirecte a valorii unui măsurand. Condiția importantă este ca aceste componente individuale să fie independente, fără o corelație între ele și fără să își schimbe valoarea prin modificarea altor variabile din circuit.

Presupunem că dorim să determinăm valoarea unei rezistențe *ca sumă* a altor două rezitențe. În Fig.1.7, rezistența totală teoretică a circuitului este R_e = 900 kΩ. Totuși, componentele individuale au toleranțele specificate de 5%. Cum determinăm eroarea rezultată prin calculul aditiv?

O primă soluție este aceea de a raporta eroarea maximum posibilă. Astfel, R_{1max} = 315 kΩ și R_{2max} = 630 kΩ. Și atunci R_{emax} = 945 kΩ. Dar R_{1min} = 285 kΩ și R_{2min} = 570 kΩ. Și atunci R_{emin} = 855 kΩ. Aceste valori au rezultat știind că incertitudinile absolute individuale sunt $\delta R_1 = 15\,k\Omega$ și $\delta R_2 = 30\,k\Omega$. În mod grosier, putem raporta valoarea măsurandului ca fiind:

$$R_e = (900 \pm 45)\,k\Omega$$

Concluzionăm că *eroarea maximum posibilă* atunci când adunăm două (sau mai multe) variabile de același fel este reprezentată de suma incertitudinilor individuale absolute.

Totuși, trebuie să ne punem problema că este puțin probabil ca cele două componente să prezinte simultan erori cu manifestare maximală. Ne putem gândi, deci, că modul de raportare prezentat anterior reprezintă *o supraestimare* a incertitudinii de măsurare δR_e.

Incertitudinea de măsurare în cazul anterior se poate exprima mai relevant prin:

$$\delta R_e = \sqrt{\delta R_1{}^2 + \delta R_2{}^2} \tag{1.11}$$

Astfel, $\delta R_e \cong 34\ k\Omega$ și $R_e = (900\ \pm 34)\ k\Omega$. Acest mod de estimare a incertitudinii absolute face uz de suma incertitudinilor individuale în cuadratură. Desigur, se înțelege că valorile măsurate pentru componentele individuale sunt necorelate (sau independente). Valoarea măsurată pentru R_1 nu depinde de valoarea măsurată pentru R_2 - și invers. Cu alte cuvinte, modificarea valorii lui R_1 nu afectează valoarea măsurată pentru R_2 - și invers.

În continuare, presupunem că am măsurat valoarea totală R_e = 900 kΩ și valoarea individuală R_1 = 300 kΩ. Ambele rezultate prezintă incertitudini de ± 5%. Cum putem prezenta valoarea rezistenței R_2, *ca diferență* între R_e și R_1?

Reținem aspectul că *eroarea maximum posibilă* în cazul diferenței între două (sau mai multe) valori măsurate, de același tip, se calculează tot prin suma incertitudinilor individuale absolute. Astfel, $\delta R_2 = 60\ k\Omega$. Deci $R_2 = (600\ \pm 60) k\Omega$, ceea ce reprezintă *o supraestimare* a incertitudinii de măsurare, dar este o modalitate de calcul întâlnită în context industrial.

Și în cazul diferenței, cu ajutorul relației (1.11) putem estima incertitudinea absolută, cu moderație, ca fiind $\delta R_2 \cong 47\ k\Omega$. Adică $R_2 = (600\ \pm 47)\ k\Omega$. După cum se observă, dacă vom calcula valoarea unui măsurand in mod indirect prin diferență, incertitudinile estimate sunt mai mari comparativ cu rezultatele obținute prin modul de calcul dedicat sumei variabilelor independente.

Calculul puterii consumate de un circuit se poate determina prin măsurarea tensiunii și curentului. Discutăm despre operația de *multiplicare* între valorile măsurate. Aceste valori sunt de tipuri diferite. Au unități de măsură diferite.

Presupunem că utilizăm un ampermetru și un voltmetru, ambele având o incertitudine de ± 1,5% din domeniul de măsură. Voltmetrul este setat pe domeniul de 100 V și indică 70 V. Ampermetrul este setat pe domeniul de 150 mA și indică 80 mA.

Ampermetrul prezintă, pe domeniul selectat, incertitudinea absolută de ± 2,25 mA. Raportându-ne la valoarea indicată, observăm că eroarea maximă introdusă este de 2,81%.

Voltmetrul prezintă, pe domeniul selectat, incertitudinea absolută de ± 1,5 V. Raportându-ne la valoarea indicată, observăm că eroarea maximă introdusă este de 2,14%.

Putem raporta *eroarea maxim posibilă* în cazul multiplicativ între două (sau mai multe) valori măsurate, de tipuri diferite, prin suma incertitudinilor individuale relative. Prin urmare, am putea scrie că puterea $P \cong 5{,}6\ W\ \pm 4{,}95\%$ sau $P \cong (5{,}6\ \pm 0{,}3)\ W$. Din nou, am oferit o soluție de prezentare care *supraestimează* incertitudinea de măsurare la calculul indirect al puterii consumate.

Prin relația (1.12) introducem o estimare optimă a incertitudinii în cazul calculului multiplicativ. După cum am observat, *nu vom utiliza valorile de incertitudine absolută* ci *valorile de incertitudine relativă* (sau fracțională).

$$\delta P = \sqrt{\left(\frac{\delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta R_2}{R_2}\right)^2} \tag{1.12}$$

În urma utilizării relației (1.12), obținem $\delta P \cong \pm 0{,}035$ sau $\delta P \cong 3{,}5\%$. Putem prezenta valoarea puterii ca fiind $P \cong (5{,}6\ \pm 0{,}2)\ W$, această estimare fiind statistic mai potrivită.

Pentru calculul indirect al valorii unei rezistențe, putem utiliza *raportul* între tensiunea măsurată pe rezistență și curentul măsurat prin rezistență.

Presupunem că tensiunea măsurată pe rezistență este $U = (2{,}6\ \pm 0{,}2)\ V$, iar curentul măsurat prin rezistență este $I = (0{,}65\ \pm 0{,}02)\ A$. Prin calculul valorilor incertitudinilor relative, obținem $\frac{\delta U}{U} \cong 7{,}7\ \%$ și $\frac{\delta I}{I} \cong 3{,}1\ \%$.

Putem raporta *eroarea maximum posibilă* în cazul raportului între două valori măsurate, de tipuri diferite, prin suma incertitudinilor individuale relative. Prin urmare, am putea scrie că puterea $R \cong 4\ \Omega\ \pm 10{,}8\ \%$ sau $R \cong (4\ \pm 0{,}4)\ \Omega$.

Totuși, o estimare mai potrivită din punct de vedere statistic ar fi dată, și în acest caz, de utilizarea relației (1.12). În urma calculelor, obținem $\delta R \cong \pm 0{,}084$ sau $\delta R \cong 8{,}4\ \%$. Putem prezenta valoarea rezistenței ca fiind $R \cong (4\ \pm 0{,}3)\ \Omega$.

Concluzionând, putem spune că o posibilă soluție pentru estimarea incertitudinii de măsurare în calculul indirect al unui parametru este aceea de a însuma incertitudinile relative. Indiferent dacă este vorba despre operații de multiplicare, multiplicare cu o constantă, împărțire, diferență sau ridicare la putere, în cazul în care nu cunoaștem o metodă de estimare mai eficientă, vom considera cazul cel mai defavorabil. Astfel, vom raporta incertitudinea totală, chiar dacă aceasta reprezintă o supraestimare.

Dacă, din contră, putem încadra calculul nostru într-unul din cazurile prezentate anterior, recomandarea este aceea de a utiliza calculul incertitudinilor în cuadratură. Desigur, calculul indirect al unor parametri poate include operații de ridicare la putere, multiplicare cu o constantă, înmulțiri exponențiale, funcții logaritmice etc. Pentru generalizarea modului de lucru în determinarea incertitudinilor de măsurare, vom utiliza o formă simplificată a *legii de propagare a erorilor* în cazul măsurărilor independente.

Pb10. O metodă des întâlnită în calculul incertitudinii pentru măsurările indirecte este numită *propagarea incertitudinilor sau erorilor.* Metoda permite calculul incertitudinii dacă măsurandul $Y = f(X_1, X_{2,} X_3, \dots, X_n)$. Cu alte cuvinte, relația pentru calculul măsurandului Y include alți parametri, fiecare contribuind în calculul final cu o anumită incertitudine relativă. Însă este important să știm că acest caz este cel al mărimilor independente. Practic, nu există o corelație între parametrii funcției *f.* Se poate dovedi că relația (1.13) reprezintă o formă simplificată generală a *legii de propagare a erorilor* în cazul măsurărilor independente.

$$(\delta Y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot \delta X_i\right)^2. \qquad (1.13)$$

În relația (1.12) întâlnim coeficienții de sensibilitate $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ (derivatele parțiale ale funcției *f*), dar și incertitudinile individuale δX_i asociate fiecărui măsurand considerat în calculul indirect al mărimii *Y*.

Pentru exemplificare, ne propunem să calculăm în mod indirect energia E_R disipată pe un rezistor ca produs al tensiunii măsurate pe rezistor $U = (2{,}6 \pm 0{,}2)\, V$ și al curentului măsurat prin rezistor $I = (20 \pm 1)\, mA$. Pentru ambele variabile, cunoaștem incertitudinile absolute. Putem aprecia că $E_R = f(U, I)$, fiecare componentă având incertitudinea individuală asociată.

$$\delta E_R = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial E_R}{\partial U} \cdot \delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial E_R}{\partial I} \cdot \delta I\right)^2}.$$

Termenul $\frac{\partial E_R}{\partial U}$ reprezintă derivata parțială a funcției *f* în raport cu variabila măsurată U. Astfel $\frac{\partial E_R}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U}(U \cdot I) = I$. În mod similar $\frac{\partial E_R}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I}(U \cdot I) = U$. Prin urmare:

$$\delta E_R = \pm \sqrt{(20\, mA \cdot 0{,}2\, V)^2 + (0{,}2\, V \cdot 1\, mA)^2} \cong \pm 4\, mW \text{ și } E_R \cong (52 \pm 4)\, mW.$$

Un ultim exemplu se referă la calculul indirect al rezistivității unui cablu pentru care am măsurat lungimea $L = (1 \pm 0{,}01)\, m$, aria secțiunii $A = (2 \cdot 10^{-6} \pm 1{,}5 \cdot 10^{-8})\, m^2$ și rezistența $R = (2 \pm 0{,}1)\, \Omega$. Rezistivitatea cablului $\rho = \frac{R \cdot A}{L} = 4 \cdot 10^{-4}\, \Omega \cdot m$. Observăm că pentru calculul $\delta\rho$ putem aplica relația (1.12). Astfel,

$$\delta\rho = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial L} \cdot \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial A} \cdot \delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial R} \cdot \delta R\right)^2}.$$

În continuare $\frac{\partial \rho}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{R \cdot A}{L}\right) = -\frac{R \cdot A}{L^2}$. În mod similar $\frac{\partial \rho}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{R \cdot A}{L}\right) = \frac{R}{L}$ și $\frac{\partial \rho}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R \cdot A}{L}\right) = \frac{A}{L}$.

$$\delta\rho = \pm \sqrt{\left(-\frac{R \cdot A}{L^2} \cdot \delta L\right)^2 + \left(\frac{R}{L} \cdot \delta A\right)^2 + \left(\frac{A}{L} \cdot \delta R\right)^2} \cong \pm 0{,}21 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot m \text{ și}$$

$$\rho = (400 \cdot 10^{-6} \pm 0{,}21 \cdot 10^{-6})\, \Omega \cdot m \text{ sau } \rho = (400 \pm 0{,}21)\, \mu\Omega \cdot m.$$