

# Progetto Bayes + Computational

## INTRO

• modello problema differenziale:  $u(\underline{x}) = F(\underline{\theta}, \underline{x})$ ,  $\underline{x} \in D$

• dati: osservazioni di  $u$  soluzione in diversi punti del dominio + errore di misurazione

$$\{y_i = F(\underline{\theta}, \underline{x}_i) + \varepsilon_i\}_{i=1}^n, \quad \underline{x}_i \in D$$

• se assumiamo  $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

$\Downarrow$

likelihood:  $y_i | \underline{\theta} \stackrel{ind}{\sim} N(F(\underline{\theta}, \underline{x}_i), \sigma^2)$

• obiettivo: trovare  $\underline{\theta} | y$

• approccio bayesiano: fissiamo prior per  $\underline{\theta}$ , stima posterior  $\underline{\theta} | y$

## MULTI-LEVEL MCMC

• approccio MCMC: problema!

a ogni iterazione risolve problema diff.

$$u(\underline{x}) = F(\underline{\theta}^*, \underline{x}) \quad (\underline{\theta}^* \text{ proposto})$$

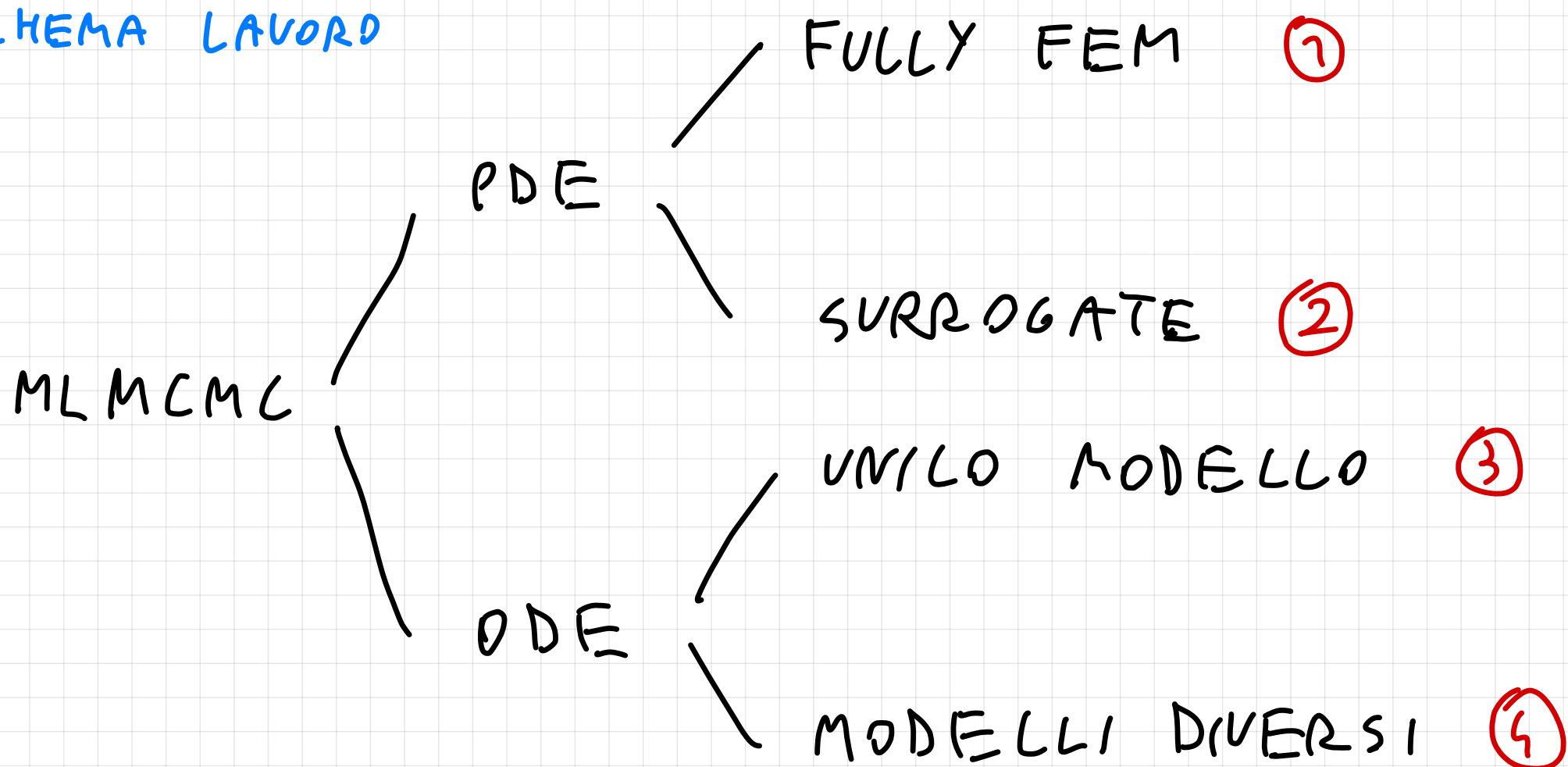
$\Rightarrow$  molto oneroso!

• MLMCMC:   
 / LIVELLO COARSE: veloce | poco accurato   
 \ LIVELLO FINE: lento | molto accurato

risolvono problema a diversi livelli di precisione

• i sample generati dal coarse sono proposti al fine   
  $\Rightarrow$  aumentare prob. accettazione / ESS del fine   
 (sampling più efficiente)

# SCHEMA LAVORO



## PDE

Equazione Comelt (Diffusione / Trasporto)

img 01 (equazione)    img 02 (soluzione)

a)  $\mu$ : DIFFUSIONE  vs 

b)  $\theta$ : DIREZIONE TRASPORTO

1) COARSE: FEM Solver griglia  $16 \times 16$

2) FINE: FEM Solver griglia  $32 \times 32$

img 03

indagini: 1) campionamento dati (numero & posizione)

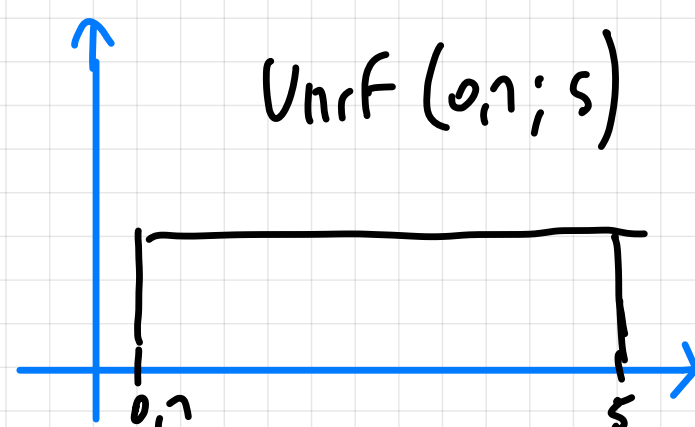
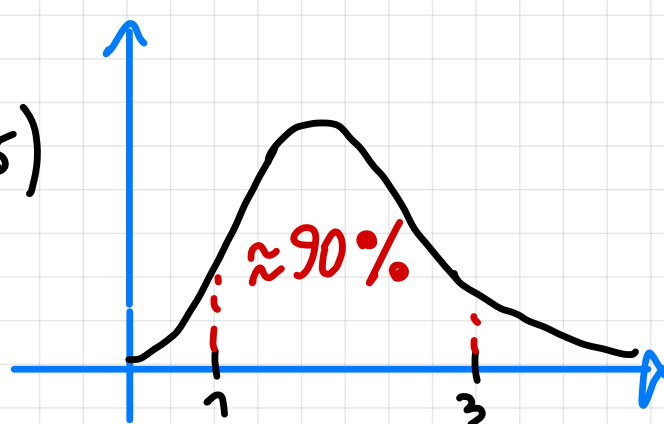
2) setting likelihood ( $\sigma$  coarse vs Fine)

3) setting prior ( $\mu, \theta$ )

img 04 / img 05  
(likelihood)

$\Gamma(10, 5)$

img 06 / img 07



problema: soluzione coarse troppo onerosa  
img 08 (Barre)

soluzione:

② { COARSE: SURROGATE (NEURAL NETWORK)  
FINE: FEM solver griglia  $32 \times 32$   
img 09 (Barre)

ODE

Modello Epidemiologico Compartmentale

SIR img 10

SEIR img 11

③ { COARSE:  $\Delta t = T$   
FINE:  $\Delta t = T/2$  (img 12)

indagini: 1) griglie diverse

2) setting prior

3) varianza nota vs incognita (parametro)

4) range funzionamento

④ { COARSE: SIR (img 13)  
FINE: SEIR

trasformazione parametri (SEIR)  $(\sigma, \nu, \beta)$   $\rightarrow$  parametri (SIR)  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\beta})$

tali che:

a) stesso tempo di max contagi

b) stessi valori asintotici

indagini: 1) range funzionamento / competitività SIR/SEIR  
2) setting prior  
3) guadagno computazionale