Mestrado em Métodos Quantitativos para a Decisão Económica e Empresarial

U.C.: Simulação e Otimização

Trabalho 1C

Outubro 2022

Trabalho realizado por:

Acácio Rebocho nº48976

André Catarino nº56788

Dinis Duarte nº56540

Inês Caseiro nº48764

João Pinheiro nº50410

1C.1

S	N=|S|	Verificação	Corte
$S = \{x_1, x_2\}$	2	$(x_1, x_2) = (1,1) \Rightarrow 6 + 3 + 5 = 14 \ > 12$ $(x_1, x_2) = (0,1) \Rightarrow 0 + 6 = 6 \ < 12$ $(x_1, x_2) = (1,0) \Rightarrow 7 + 0 = 7 \ < 12$	$x_1 + x_2 \leq 2 - 1$ $\Leftrightarrow$ $x_1 + x_2 \leq 1$
$S = \{x_2, x_3, x_4\}$	3	$(x_2, x_3, x_4) = (1,1,1) \Rightarrow 7 + 6 + 3 = 16 \ > 12$ $(x_2, x_3, x_4) = (0,1,1) \Rightarrow 3 + 5 = 8 \ < 12$ $(x_2, x_3, x_4) = (1,0,1) \Rightarrow 6 + 5 = 11 \ < 12$ $(x_2, x_3, x_4) = (1,1,0) \Rightarrow 6 + 3 = 9 \ < 12$	$x_2 + x_3 + x_4 \leq 3 - 1$ $\Leftrightarrow$ $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$

R: Dois cortes de cobertura mínima possíveis para a restrição, $7x_1 + \ 6x_2 + \ 3x_3 + \ 5x_4 \ \leq 12$, em PLB são os seguintes: $x_1 + x_2 \leq 1$ e $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$.

1C.2

Fixação de Variáveis:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_7 - x_9 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + 4x_7 \geq 4 \\ x_6 + x_7 \leq 1 \\ x_2 + 2x_5 + 3x_8 + 2x_9 \geq 4 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 3x_8 \leq 5 \\ x_j = \ \{0, 1\}, j \ = 1, \ldots, 9 \end{cases} \rightarrow x_7 = 1 \quad \rightarrow x_6 = 0 \quad \longrightarrow x_1 = x_3 = 1 \ \wedge \ x_9 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 1 \ (redundante) \\ x_2 + 5 \geq 4 \\ 1 \leq 1 \ (redundante) \\ x_2 + 2x_5 + 3x_8 \geq 4 \\ 2 + 2x_4 + x_5 - 1 - 3x_8 \leq 5 \\ x_j = \ \{0, 1\}, j \ = 2,4,5,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \geq -1 \ (redundante) \\ x_2 + 2x_5 + 3x_8 \geq 4 \\ 2x_4 + x_5 - 3x_8 \leq 4 \\ x_j = \ \{0, 1\}, j \ = 2,4,5,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_5 + 3x_8 \geq 4 \\ \\ 2x_4 + x_5 - 3x_8 \leq 4 \\ x_j = \ \{0, 1\}, j \ = 2,4,5,8 \end{cases}$$

Algoritmo “Apertar” restrição e Remoção de Restrições Redundantes:

➔ $x_2 + 2x_5 + 3x_8 \geq 4 \Leftrightarrow -x_2 - 2x_5 - 3x_8 \leq \ -4$

K=1

1. $S = \sum_{j:a_j > 0} a_j = 0$

2. $a_2 = -1; \ S = 0 \ < \ b + |a_2| = -4 + |-1| = -3 \ \ (condição \ não \ satisfeita)$

K=2

1. $S = \sum_{j:a_j>0} a_j = 0$

2. $a_5 = -2;\ S = 0\ <\ b + |a_5| = -4 + |-2| = -2\ \ (condição\ não\ satisfeita)$

K=3

1. $S = \sum_{j:a_j>0} a_j = 0$

2. $a_8 = -3;\ S = 0\ <\ b + |a_8| = -4 + |-3| = -1\ \ (condição\ não\ satisfeita)$

K=3=n Fim (Restrição não pode ser alterada)

Algoritmo "Apertar" restrição:

$2x_4 + x_5 - 3x_8 \leq 4.$

K=1

1. $S = \sum_{j:a_j>0} a_j = 2 + 1 = 3$
2. $a_4 = 2;\ S = 3\ <\ b + |a_4| = 4 + |2| = 6\ \ (condição\ satisfeita)$
3. $a_4 = 2 > 0\ \rightarrow \begin{cases} a'_4 = S - b =\ 3 - 4 = 1 =\ a_4 \\ b' = S - a_1 = 3 - 2 = 1 = b \end{cases}$
4. Nova Restrição: $-x_4 + x_5 - 3x_8 \leq 1$

K=2

1. $S = \sum_{j:a_j>0} a_j = 1$
2. $a_5 = 1;\ S = 1\ <\ b + |a_5| = 1 + |1| = 2\ \ (condição\ satisfeita)$
3. $a_5 = 1 > 0\ \rightarrow \begin{cases} a'_5 = S - b =\ 1 - 1 = 0 =\ a_5 \\ b' = S - a_1 = 1 - 1 = 0 = b \end{cases}$
4. Nova Restrição: $-x_4 - 3x_8 \leq 0$

K=3

1. $S = \sum_{j:a_j>0} a_j = 0$
2. $a_8 = 3;\ S = 0\ <\ b + |a_1| = 0 + |-3| = 3\ (condição\ satisfeita)$
3. $a_8 = 3 < 0\ \rightarrow\ a_0 = b - S = 0 - 0 = 0$
4. $-x_4 \leq 0\ \Leftrightarrow\ x_4 \geq 0$

Após este procedimento, temos o seguinte problema equivalente ao inicial com menos restrições funcionais:

Min z = $3x_1 + 5x_2 +\ 8x_3 + 6x_4 + 4x_5 + x_6 + 6x_7 +\ x_8 + 4\,x_9$

s.a.: $\begin{cases} x_2 + 2x_5 + 3x_8 \geq 4 \\ x_4 \geq 0 \;\; (redundante) \\ x_j = \{0,1\}, j = 2,4,5,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_5 + 3x_8 \geq 4 \\ x_j = \{0,1\}, j = 2,5,8 \end{cases}$

$\{x_2 + 2x_5 + 3x_8 \geq 4 \longrightarrow x_8 = 1 \;\wedge (x_5 = 1 \vee x_2 = 0)$ (é indiferente ser $x_2\ ou\ x_5 = 1$, no entanto como se trata de um problema de minimização e x_5 tem o menor coeficiente, então definimos $x_5 = 1$).

Em relação à variável x_4, que não foi fixado nenhum valor, considerando, mais uma vez, o problema inicial e tendo em conta as variáveis com valores já fixados, a variável x_4 conseguiria satisfazer as restrições quer assumisse valor 1 ou valor 0, logo sendo um problema de minimização, definimos $x_4 = 0$.

Solução ótima: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = (1{,}0{,}1{,}0{,}1{,}0{,}1{,}1{,}0), com\ Z^* = 22$.

1C.3

Em conformidade com o enunciado consideramos x2 e x3 como as variáveis básicas na solução ótima da relaxação linear do PLI considerado no enunciado, em que será possível obter o sistema em que as VB têm associadas a matriz identidade de ordem 2:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 27 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_5 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_5 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{11}{3} \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_5 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3}x_1 + 5x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 = \frac{37}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{15}x_1 + x_3 + \frac{1}{15}x_4 - \frac{4}{15}x_5 = \frac{37}{15} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Utiliza-se a variável fracionária de menor índice: $x_2 \rightarrow \frac{7}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{11}{3}$, escolhe-se a equação do sistema onde x_2 apresenta coeficiente com valor 1.

- Separar parte inteira da fracionária:

$\frac{7}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{11}{3} \notin \mathbb{Z}$

$$x_1\left(2 + \frac{1}{3}\right) + x_2 + x_4\left(-1 + \frac{2}{3}\right) + x_5\left(0 + \frac{1}{3}\right) = 3 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - x_4 - 3 = -\frac{x_1}{3} - \frac{2x_4}{3} - \frac{x_5}{3} + \frac{2}{3}$$

Temos o seguinte corte de Gomery: $-\frac{x_1}{3} - \frac{2x_4}{3} - \frac{x_5}{3} + \frac{2}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(-x_1 - 2x_4 - x_5 + 2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$-x_1 - 2x_4 - x_5 \leq -2 \Leftrightarrow x_1 + 2x_4 + x_5 \geq 2$, que na forma aumentada será equivalente:

$\rightarrow \; x_1 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 2$

Novo Problema Relaxado com Restrição do Corte:

$Min\, Z \;= 8x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$s.a. \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_5 = 16 \\ x_1 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_j \geq 0, j = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$$

Recorrendo ao solver do Excel para resolver o problema relaxado com a restrição do corte, chegamos à seguinte solução ótima: $x_{RL}^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(0, 4, \frac{12}{5}, 1, 0, 0\right)$ com um valor ótimo $z_{RL}^* = 17{,}6$.

Uma vez que a solução ótima da relaxação linear após a introdução de um corte ainda não é inteira ($x_3 \notin \mathbb{Z}$) e estando perante um problema de minimização, conclui-se que o valor ótimo do novo problema relaxado com a restrição de corte é menor ou igual ao valor ótimo que seria obtido ao resolver o PLI.

Sabendo então que a solução ótima da relaxação linear após a introdução deste primeiro corte ainda não é inteira, nomeadamente a variável x_3, é possível afirmar que seria necessário introduzir um novo corte.

Para tal, primeiramente define-se que as variáveis básicas, as variáveis não nulas na solução ótima da relaxação linear com o 1º Corte, são x_2, x_3 e x_4. Teríamos, posteriormente, de chegar a um sistema em que as variáveis básicas têm associadas a matriz identidade de ordem 3, e como x_3 é a variável fracionária, o corte seria introduzido nesta variável. Para isso escolher-se-ia a equação do sistema cujas variáveis básicas têm associadas a matriz identidade de ordem 3 em que o coeficiente de x_3 é igual a 1 e separar-se-ia a parte inteira da parte fracionária. A restrição para o segundo corte seria obtida através da inequação onde "parte fracionária ≤ 0".

Depois de obtida a restrição para o segundo corte, seria introduzida à formulação do problema, onde já está o primeiro corte, na forma aumentada. Onde mais uma vez iriamos utilizar o solver do Excel para obter a solução ótima e o respetivo valor ótimo. Sendo este processo repetido até todas as variáveis serem inteiras.