TPC#2
Data de entrega: 28 de Abril de 2022
Autores: Óscar Sobén Celada (100%); Carlos Lacerda (100%); André Couto (100%)

1. (a)
$$\mathcal{A}(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + R_3(h) \Leftrightarrow \alpha_0 = \mathcal{A}(h) - \alpha_1 h - \alpha_2 h^2 - R_3(h)$$
Assim, $-\alpha_1 h - \alpha_2 h^2 - R_3(h) = \mathcal{O}(h)$, pelo que $\mathcal{A}(h)$ é uma aproximação de 1^a ordem para α_0.

(b) Consideremos a série de Taylor de grau 2 com Resto de Lagrange
$$f(x+\epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{f''(x)}{2}\epsilon^2 + \frac{f'''(c)}{6}\epsilon^3$$
Para $x = x_0$ e $\epsilon = h$ vem
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(c)}{6}h^3$$
Assim, com
$$\begin{cases} \alpha_0 = f(x_0) \\ \alpha_1 = f'(x_0) \\ \alpha_2 = \frac{f''(x_0)}{2} \\ R_3(h) = \frac{f'''(c)}{6}h^3 \end{cases}$$
obtemos o pretendido.

(c) Seja $\delta \in (0,1)$
$$\delta\mathcal{A}(h) = \delta\alpha_0 + \delta\alpha_1 h + \delta\alpha_2 h^2 + \delta R_3(h)$$
Como $R_3(h) \leq Ch^3$, então $\delta R_3(h) \leq \delta C h^3$
$$\mathcal{A}(\delta h) = \alpha_0 + \alpha_1\delta h + \alpha_2\delta^2 h^2 + R_3(\delta h)$$
Como $R_3(h) \leq Ch^3$, então $R_3(\delta h) \leq C\delta^3 h^3$
Assim,
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\delta h) - \delta\mathcal{A}(h) &\leq \alpha_0(1-\delta) - \alpha_2 h^2\delta(1-\delta) + Ch^3(\delta^3 - \delta) \\ &= \alpha_0(1-\delta) - \alpha_2 h^2\delta(1-\delta) - Ch^3\delta(\delta-1)(\delta+1)\end{aligned}$$
Logo,
$$\frac{\mathcal{A}(\delta h) - \delta\mathcal{A}(h)}{1-\delta} \leq \alpha_0 - \alpha_2 h^2\delta - Ch^3\delta(\delta+1)$$
Portanto,
$$\mathcal{B}(h) = \frac{\mathcal{A}(\delta h) - \delta\mathcal{A}(h)}{1-\delta}$$
é uma nova aproximação para α_0.

(d) Pela alínea anterior,
$$\mathcal{B}(h) \leq \alpha_0 - \alpha_2 h^2\delta - Ch^3\delta(\delta+1)$$
Logo, $\alpha_2 h^2\delta + Ch^3\delta(\delta+1) = \mathcal{O}(h^2)$ pelo que, $\mathcal{B}(h)$ é uma aproximação de 2^a ordem para α_0.

2. (a) Se $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ então $w_2(x) > 0$, se $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$ então $w_2(x) < 0$. Logo, $w_2(x)$ muda de sinal no intervalo e portanto não se pode aplicar o teorema do valor médio ao integral do erro, por requerer a não mudança de sinal como condição.

(b)

$$\begin{aligned}
\int_a^b w_2(x) &= \int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b) \\
&= \int_a^b x^3 - x^2\frac{3}{2}(a+b) + x(\frac{(a+b)^2}{2} + ab) - ab\frac{a+b}{2} \\
&= [\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\frac{3}{2}(a+b) + \frac{x^2}{2}(\frac{(a+b)^2}{2} + ab) - xab\frac{a+b}{2}]_a^b \\
&= \frac{b^4}{4} - (\frac{ab^3}{2} + \frac{b^4}{2}) + (\frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^4}{4} + ab^3) - (\frac{a^2b^2}{2} + \frac{ab^3}{2}) \\
&- (\frac{a^4}{4} - (\frac{ba^3}{2} + \frac{a^4}{2}) + (\frac{a^2b^2}{4} + \frac{a^4}{4} + ab^3) - (\frac{a^2b^2}{2} + \frac{ba^3}{2})) \\
&= -\frac{b^2a^2}{4} - (-\frac{b^2a^2}{4}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Concluimos então

$$\begin{aligned}
E_2(f) &= \int_a^b f[a, \frac{a+b}{2}, b, x]w_2(x)dx \\
&= \int_a^b f[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3]w_2(x) + f[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3, x](x-x_3)w_2(x)dx \\
&= f[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3]\int_a^b w_2(x)dx + \int_a^b f[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3, x]w_3(x)dx \\
&= \int_a^b f[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3, x]w_3(x)dx
\end{aligned}$$

(c) Com x_3 definido no enunciado, $w_3(x) = (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)$ que é sempre negativo no intervalo $[a, b]$, portanto não muda de sinal.

Enfim, já podendo aplicar o teorema do valor médio neste caso, temos

$$\begin{aligned}
E_2(f) &= \int_a^b f[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3, x]w_3(x)dx \\
&= f[a, \frac{a+b}{2}, b, x_3, x]\int_a^b w_3(x)dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b w_2(x)(x-\frac{a+b}{2})dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b w_2(x)xdx - \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\frac{a+b}{2}\int_a^b w_2(x)dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b x^4 - x^3\frac{3}{2}(a+b) + x^2(\frac{(a+b)^2}{2}+ab) - xab\frac{a+b}{2}dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\frac{3}{2}(a+b) + \frac{x^3}{3}(\frac{(a+b)^2}{2}+ab) - \frac{x^2}{2}ab\frac{a+b}{2}]_a^b \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(-\frac{b^5}{120} + \frac{5b^4a}{120} - \frac{10b^3a^2}{120} + \frac{10b^2a^3}{120} - \frac{5ba^4}{120} + \frac{a^5}{120}) \\
&= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}(\frac{b-a}{2})^5 \\
&= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5
\end{aligned}$$

Para algum $\xi \in [a,b]$. Assim, obtendo-se a expressão do erro da fórmula de Simpson.

3. (a) Por tentativa-erro escolhemos, por exemplo, $K = 610$ porque é o máximo dos dados da tabela e $r = 1$

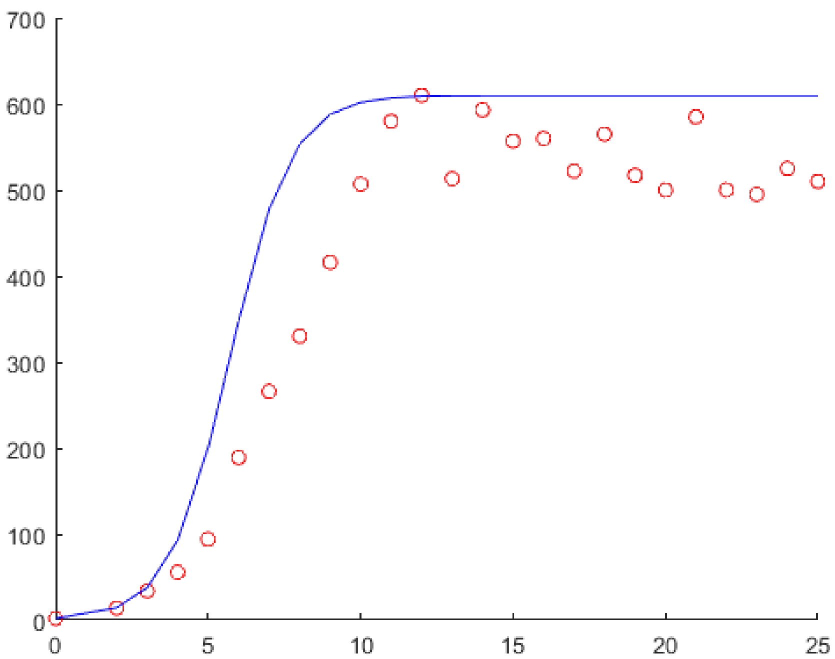

Figura 1: Gráfico dos dados experimentais (vermelho) e do modelo logístico (azul) com $K = 610$ e $r = 1$

(b) Usando o método dos mínimos quadrados obtemos $K = 542.9335$ e $r = 0.7916$ com erro menor que 10^{-8}.
A nova função está perto da função do apartado a), mas é mais correta porque está melhor situada entre os pontos máximos e mínimos dos dados da tabela. A função verde faz melhor o promédio entre os dados do problema que a função azul que está muito por acima que muitos máximos locais.

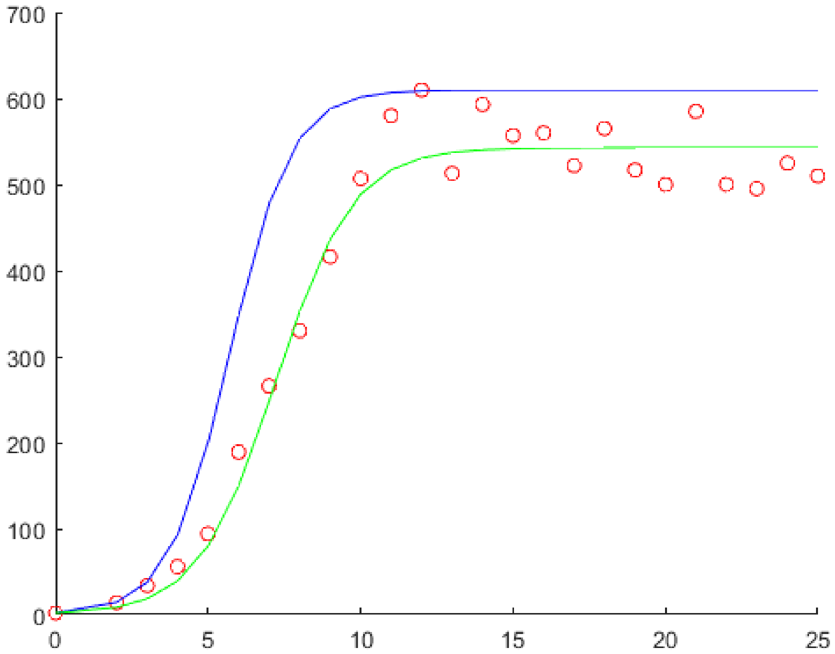

Figura 2: Gráfico dos dados experimentais (vermelho) e do modelo logístico (azul) com $K = 610$ e $r = 1$ e do modelo logístico (verde) com $K = 542.9335$ e $r = 0.7916$