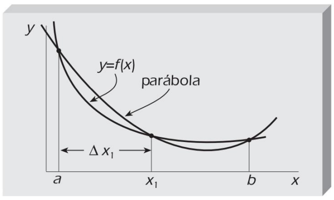
La regla de Simpson

Esta regla se basa en aproximar la función con segmentos parabólicos en lugar de líneas rectas



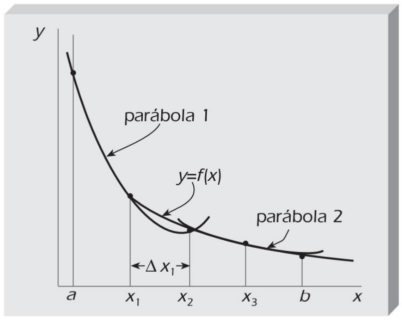
Área bajo una parábola trazada a través de tres puntos.

Si la curva $f(x)$ trazada en la figura es aproximada con una parábola trazada a través de 3 puntos $f(a)$, $f(b)$ y el valor de $f(x)$ en el punto intermedio del intervalo f_{mid}, puede demostrarse mediante cálculo que el área sombreada bajo la parábola, denotada como S_1 es:

$$S_1 = \frac{1}{3}\Delta x_1\left[f(a) + 4f(a+\Delta x_1) + f(b)\right] \quad \text{donde} \quad \Delta x_1 = \frac{b-a}{2}$$

Esta es la aproximación de la regla de simpson de primer orden donde $k=1$ y $n=2^1$ paneles.

El siguiente nivel de aproximación es reducir a la mitad el ancho del intervalo y dividirlo en 4 paneles



La aproximación de la regla de Simpson de segundo orden es el área bajo dos parábolas.

El área bajo la función $f(x)$ es aproximada entonces como el área bajo las dos parábolas mostradas en la figura

Puede mostrarse que el área bajo las dos parábolas es

$$S_2 = \frac{1}{3}\Delta x_2\left\{\left[f(a) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(b)\right]\right\}$$

$$S_2 = \frac{1}{3}\Delta x_2\left\{f(a) + 4\left[f(x_1) + f(x_3)\right] + 2f(x_2) + f(b)\right\}$$

$$\text{donde} \quad \Delta x_2 = \frac{b-a}{2^2} \qquad f_i = f(x = a + i\Delta x_2)$$

Este procedimiento puede extenderse a 8, 16, 32 o más paneles. La generalización para $n = 2^k$ paneles es:

$$S_k = \frac{1}{3}\Delta x_k\left[f(a) + 4\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\Delta x_k)}_{\text{solo nones}} + 2\underbrace{\sum_{i=2}^{n-2} f(a+i\Delta x_k)}_{\text{solo pares}} + f(b)\right]$$

Ejemplo: $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

$k=1 \quad n = 2^1 = 2 \quad \Delta x_1 = \frac{b-a}{2^1} = \frac{1}{2} \quad S_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left[1 + 4\left(\frac{1}{1.5}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0.69444$

$k=2 \quad n = 2^2 = 4 \quad \Delta x_2 = \frac{1}{4} \quad S_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)\left[1 + 4\left(\frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.75}\right) + 2\left(\frac{1}{1.5}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0.69325397$