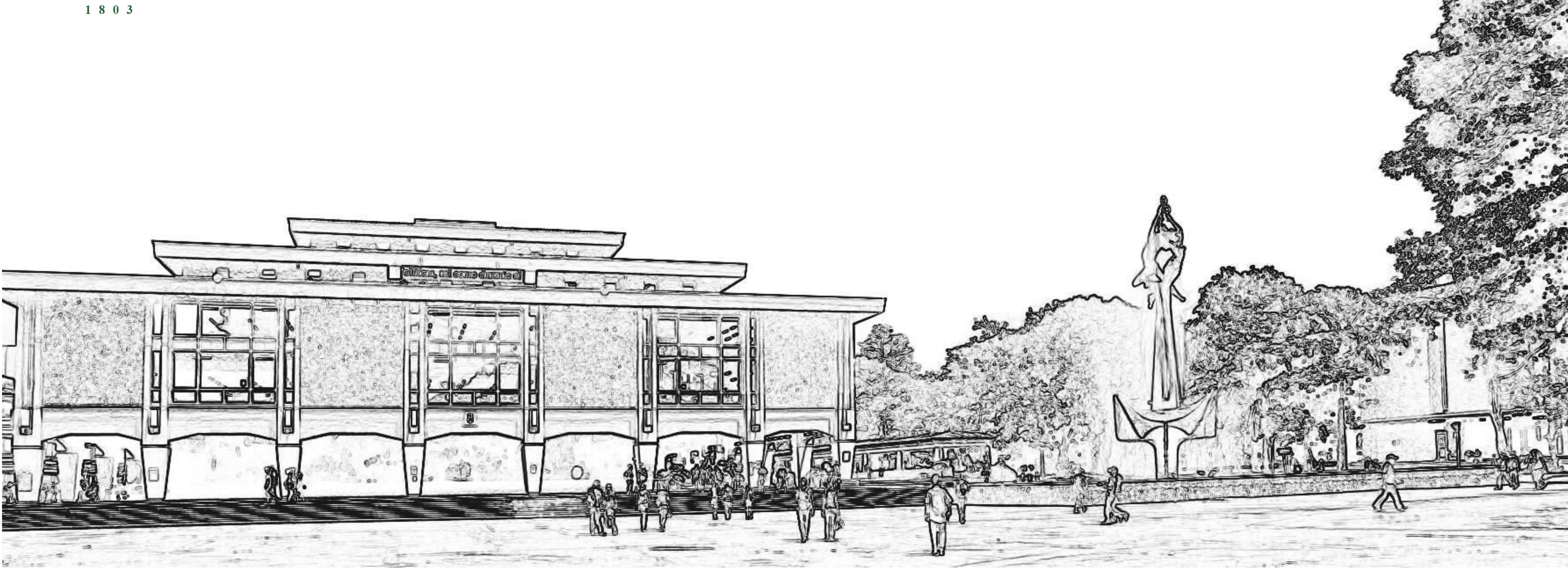
UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803



Parcial III: Ecuación de Poisson

Por: Alejandro Restrepo, Carlos Granada y Sebastián Ramirez

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Marco Teórico

Ecuación de Poisson en un rectángulo.

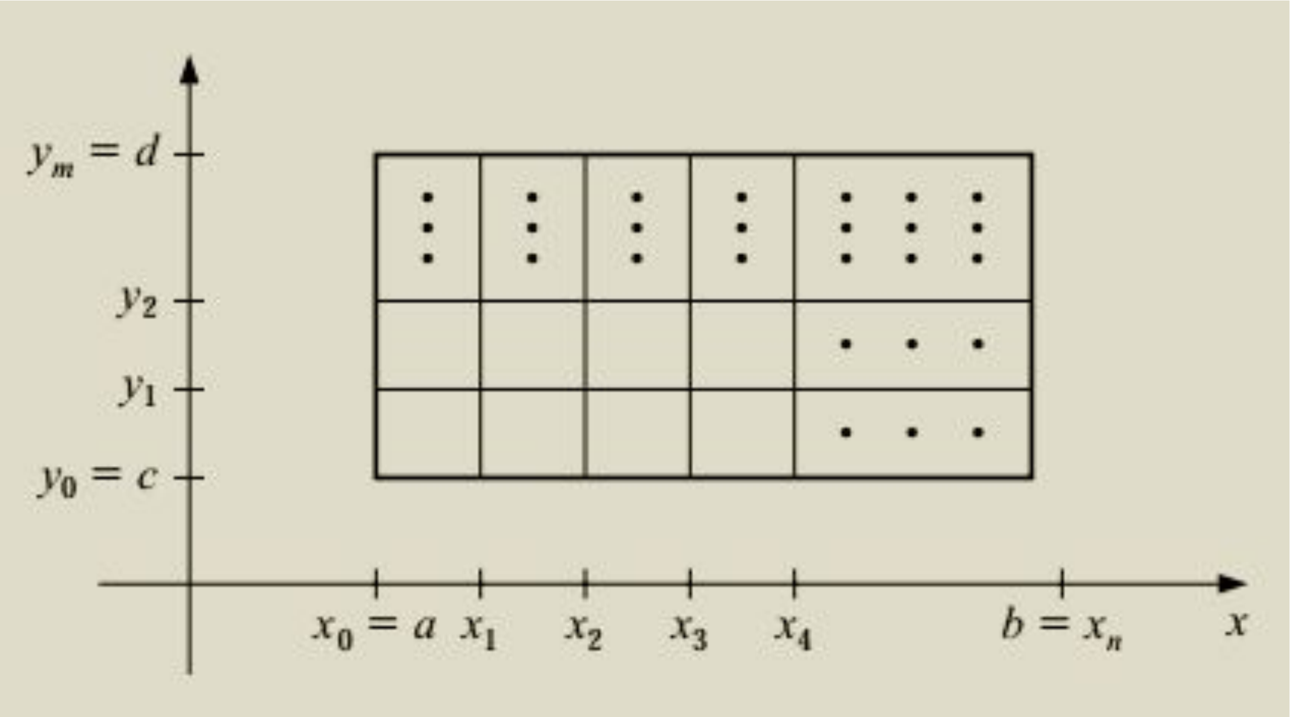
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y)$$

$$(x,y) \in D = [a,b] \times [c,d]$$

$$u(x,y) = g(x,y),\ (x,y) \in \partial D$$

Solución numérica

1. Discretizar el rectángulo



$$x_i = a + ih, y_j = c + jk;\ i = 0, \ldots, n\ j = 0, \ldots, m$$

$$h = \frac{b-a}{n},\ k = \frac{d-c}{m}$$

Dadas las condiciones de frontera

$$u(a, y_j) = g(a, y_j)$$
$$u(b, y_j) = g(b, y_j)$$
$$u(x_i, c) = g(x_i, c)$$
$$u(x_i, d) = g(x_i, d)$$

$$i = 0, \ldots, n$$
$$j = 0, \ldots, m$$

Buscamos encontrar la solución en los puntos de la grilla

$$u(x_i, y_j)$$

$$i = 0, \ldots, n$$

$$j = 0, \ldots, m$$

2. Aproximar la segunda derivada

2. Aproximar la segunda derivada

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 f''(x_0) + h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$

2. Aproximar la segunda derivada

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 f''(x_0) + h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + h^2 f''(x_0) - h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$

2. Aproximar la segunda derivada

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \cancel{h f'(x_0)} + h^2 f''(x_0) + \cancel{h^3 f'''(x_0)} + O(h^4)$$

$$+$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \cancel{h f'(x_0)} + h^2 f''(x_0) - \cancel{h^3 f'''(x_0)} + O(h^4)$$

2. Aproximar la segunda derivada

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 f''(x_0) + h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + h^2 f''(x_0) - h^3 f'''(x_0) + O(h^4)$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Aplicando a las derivadas respecto a x, y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i - h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h, y_j)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j - k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + k)}{k^2} + O(k^2)$$

Aplicando a las derivadas respecto a x, y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j)}{k^2} + O(k^2)$$

3. Método de diferencias finitas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} + \underbrace{O(h^2)}_{=0}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{k^2} + \underbrace{O(k^2)}_{=0}$$

Evaluando la ecuación en los puntos de la grilla y renombrando

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

$$w_{ij} = u(x_i, y_j)$$

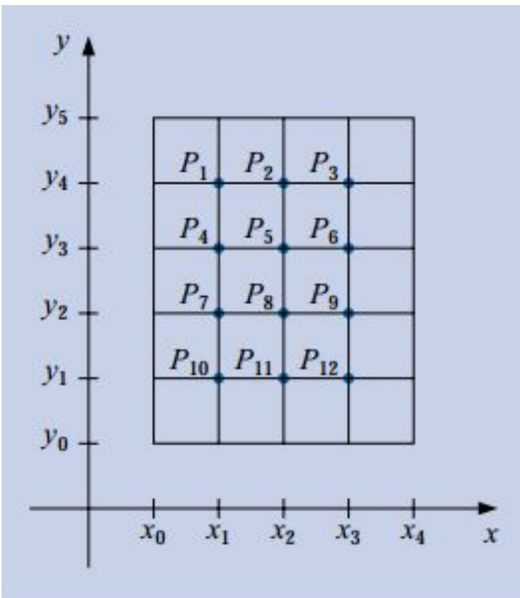
Se reduce a la siguiente ecuación.

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right] w_{i,j} - (w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$

$$-\left(\frac{h}{k}\right)^2 (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

¡Considerando todos los i,j es un sistema de ecuaciones lineales!

Se indexan los puntos de manera más sencilla



$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

¡Tipo de sistema al que se suele llegar!

Método de solución al sistema lineal

Método de solución al sistema lineal

$$Ax = b \qquad \Rightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j\right)$$

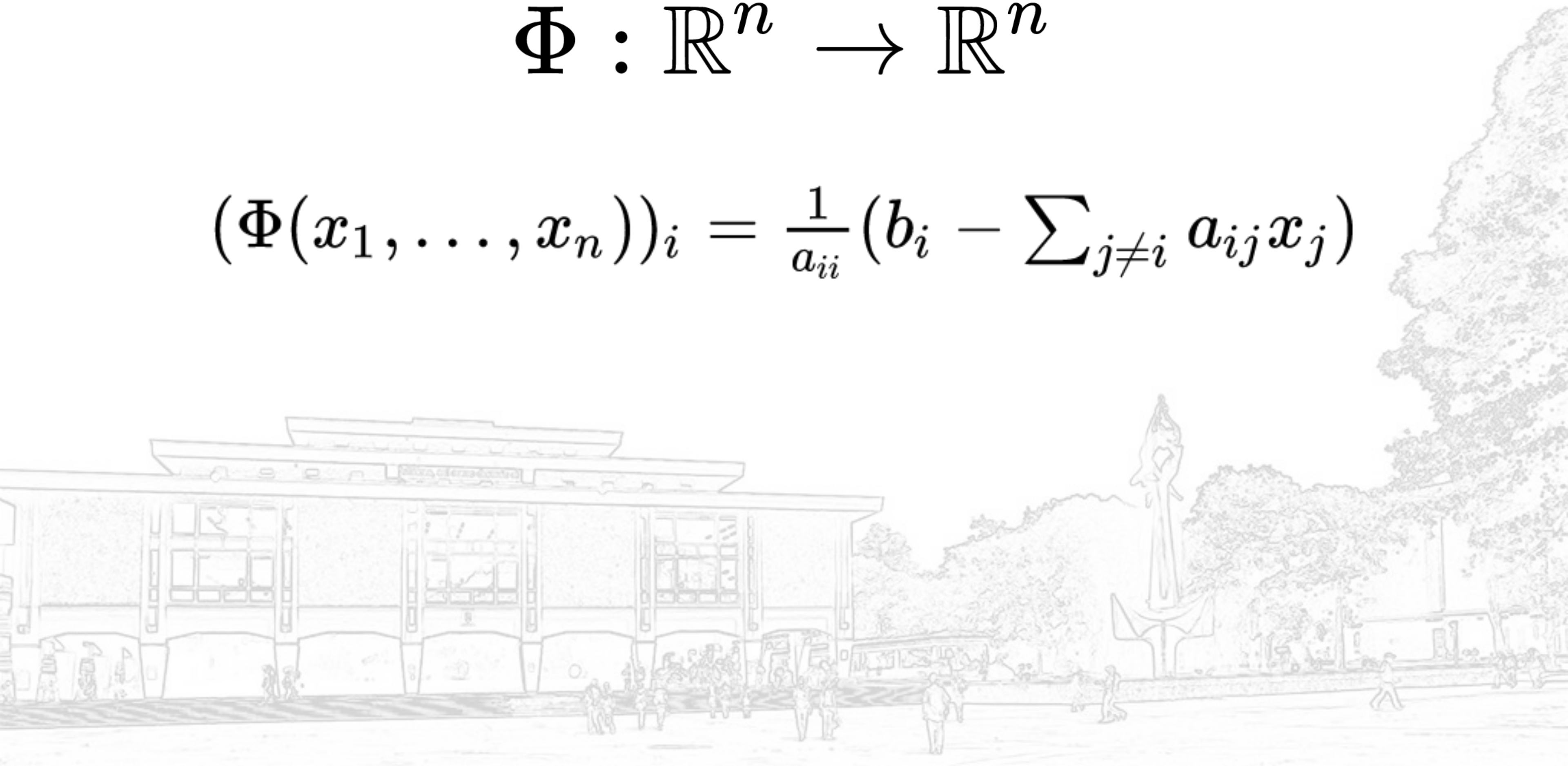
$$\Updownarrow$$

$(x_1, \ldots, x_n)$ es solución

Método de solución al sistema lineal

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(\Phi(x_1, \ldots, x_n))_i = \tfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \textstyle\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j\right)$$



Método de solución al sistema lineal

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(\Phi(x_1, \ldots, x_n))_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \textstyle\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j)$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ Es solución si y sólo si $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}$

Método de solución al sistema lineal

$$\vec{x}_0 = \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x}_{n+1} = \Phi(\vec{x}_n)$$

Converge al punto fijo cuando la matriz es diagonalmente dominante.

Método de solución al sistema lineal

Explícitamente:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum\nolimits_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

Donde:

$$\vec{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$$

Método de solución al sistema lineal

El método de Gauss-Seidel es una mejora:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{0 \leq j < i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{n \geq j > i} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right]$$

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1 8 0 3

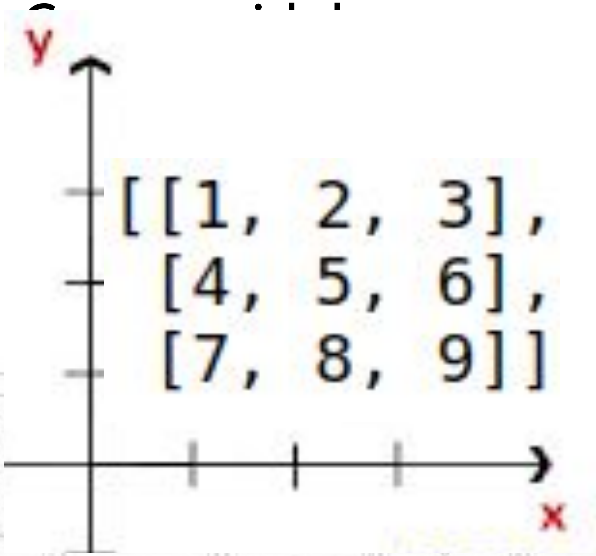
Algoritmos y simulación

Estructura Base

```cpp
// Ecuación de Poisson
#ifndef EC_ELIPT
#define EC_ELIPT

#include<vector>
using namespace std;

class EcEliptica{

    public:
    EcEliptica(double, double, double, double, unsigned int, unsigned int);
    void Mesh();
    void imprimir();
    void guardar();
    int GaussSeidel(double(*)(double, double),double(*)(double, double,double, double,double, double));
    void error(double(*)(double, double));

    private:
    double a,b,c,d,Tol,h,k;
    unsigned int n,m,N;
    vector<vector<double>> W;
    vector<double> x;
    vector<double> y;
};

#endif
```

Mesh un paréntesis import

La forma como se llena la grilla es de vital importancia para entender el código central de




```
void EcEliptica::Mesh(){

    h = (b - a)/n;
    k = (d - c)/m;

    for(int j=0;j<=m-1;j++){
        y.push_back(c+j*k);
    }
    for(int i=0;i<=n-1;i++){
        x.push_back(a+i*h);
    }

    for (int j = 0; j<=m-1; j++){
        vector<double> vf;
        for (int i = 0; i<=n-1; i++){
            vf.push_back(0);
        }
        W.push_back(vf);
    }

};
```

Ejemplo 12.1.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d,$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad \text{if } x = a \text{ or } x = b \qquad u(x,y) = g(x,y) \quad \text{if } y = c \text{ or } y = d$$

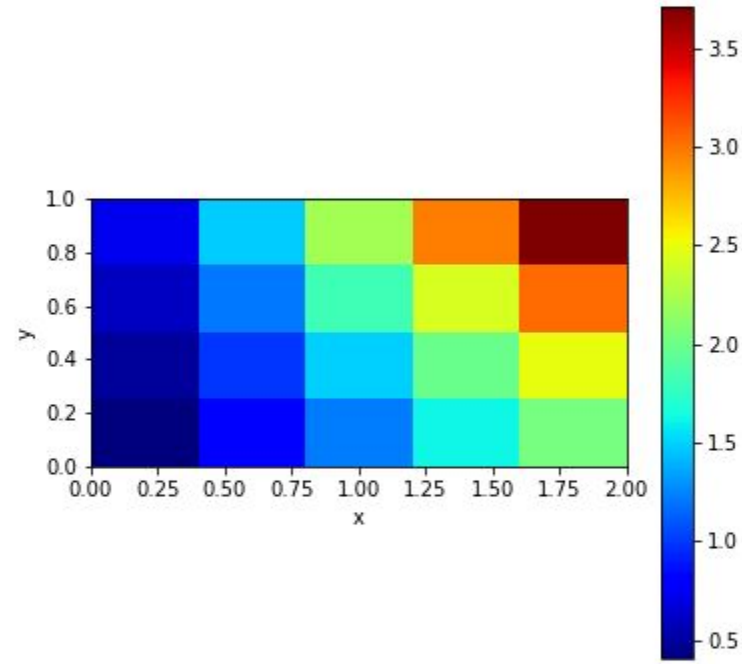
Sea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = xe^y,$$

$$0 < x < 2, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(2,y) = 2e^y,$$

$$u(x,0) = x, \quad u(x,1) = ex,$$

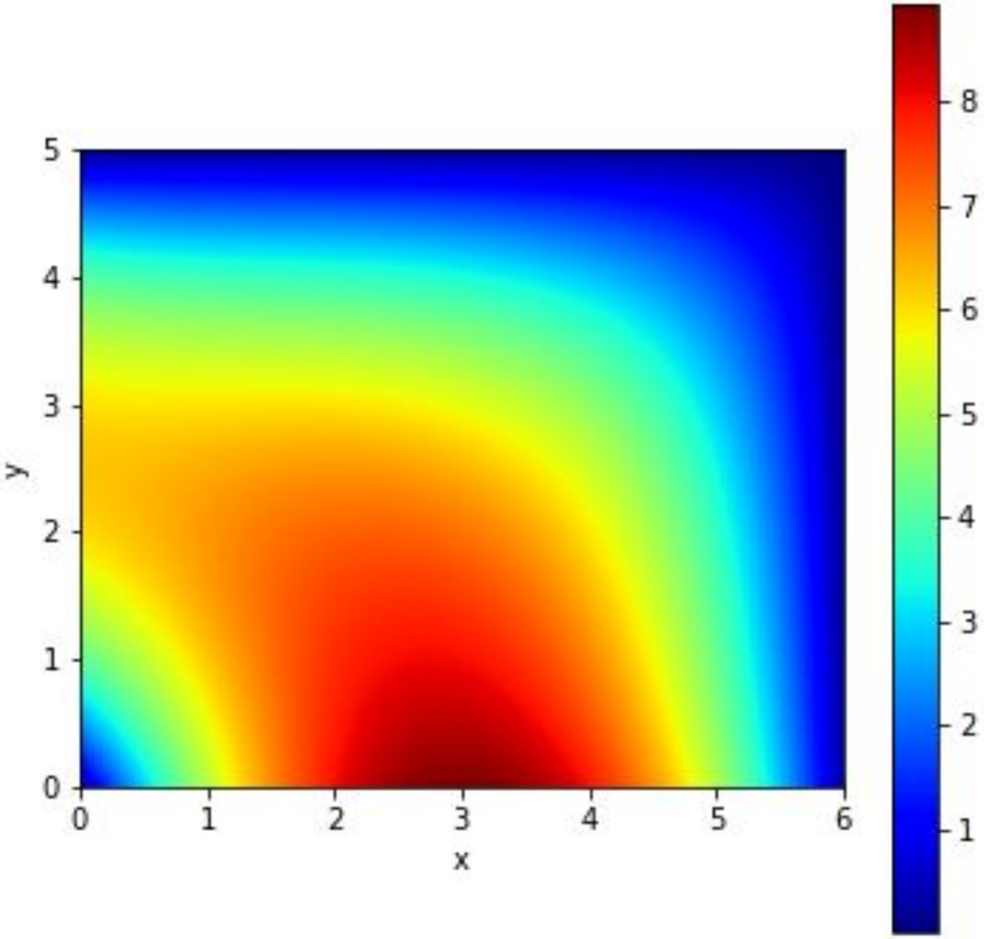


UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

1803

Aplicaciones

Ejercicio 12.1.8



Ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{q}{K},$$

Condiciones de frontera:

$$u(x,0) = x(6-x),\ u(x,5) = 0, \quad 0 \le x \le 6,$$

$$u(0,y) = y(5-y),\ u(6,y) = 0, \quad 0 \le y \le 5,$$

$$n = m = 100$$

Convergencia en: **31331 iteraciones**
Orden de magnitud del error: ----

Cargas puntuales

Ecuación:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = -\rho(x, y) \qquad \epsilon_0 = 1$$

Aproximación de cargas puntuales en un dipolo:

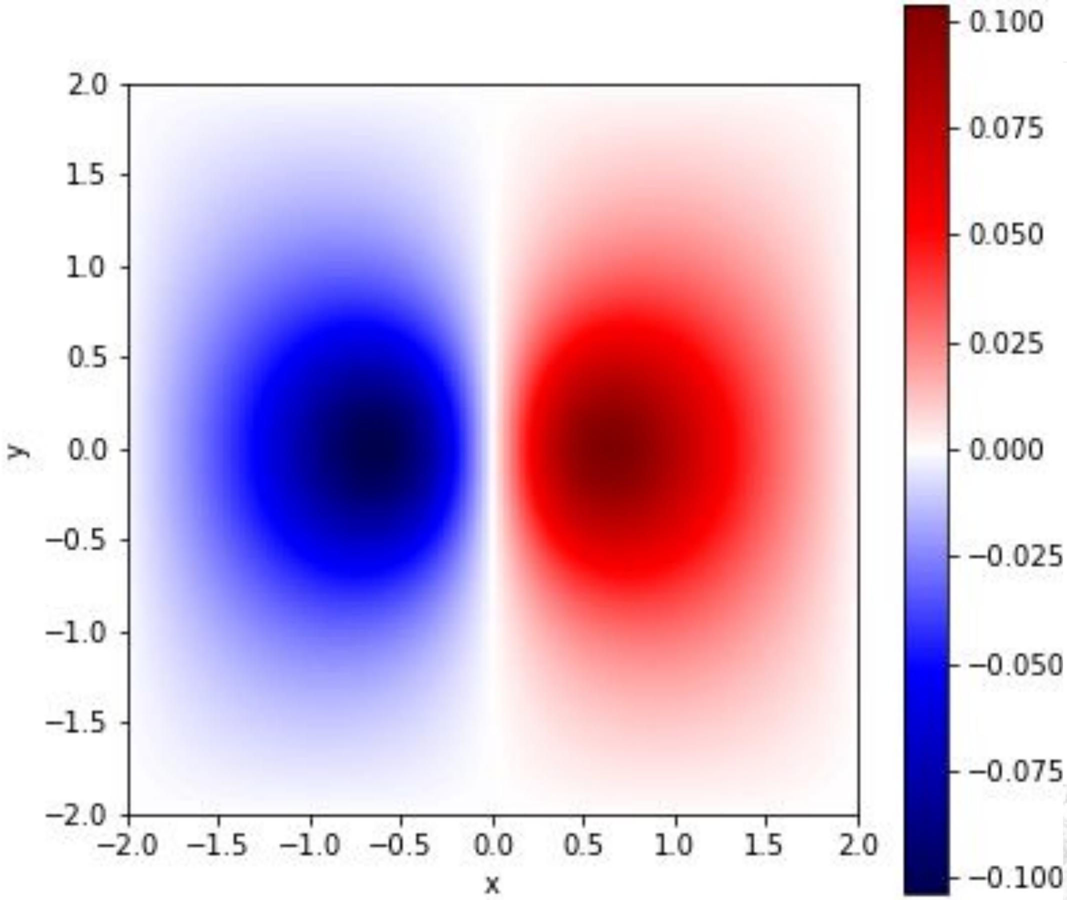
$$\rho(x, y) = \pm\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

$$\rho(x, y) \approx e^{-\left(\frac{(x-0.5)^2}{2\times 0.1} + \frac{y^2}{2\times 0.1}\right)} - e^{-\left(\frac{(x+0.5)^2}{2\times 0.1} + \frac{y^2}{2\times 0.1}\right)}$$

Solución exacta de un dipolo:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-0.5)^2 + y^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x+0.5)^2 + y^2}}$$

Cargas puntuales



Ecuación:

$$\nabla^2\phi(x,y) = -\rho(x,y)$$

Condiciones de frontera:

$$\phi(-2,y) = \phi(2,y) = 0 \qquad -2 \leq y \leq 2$$

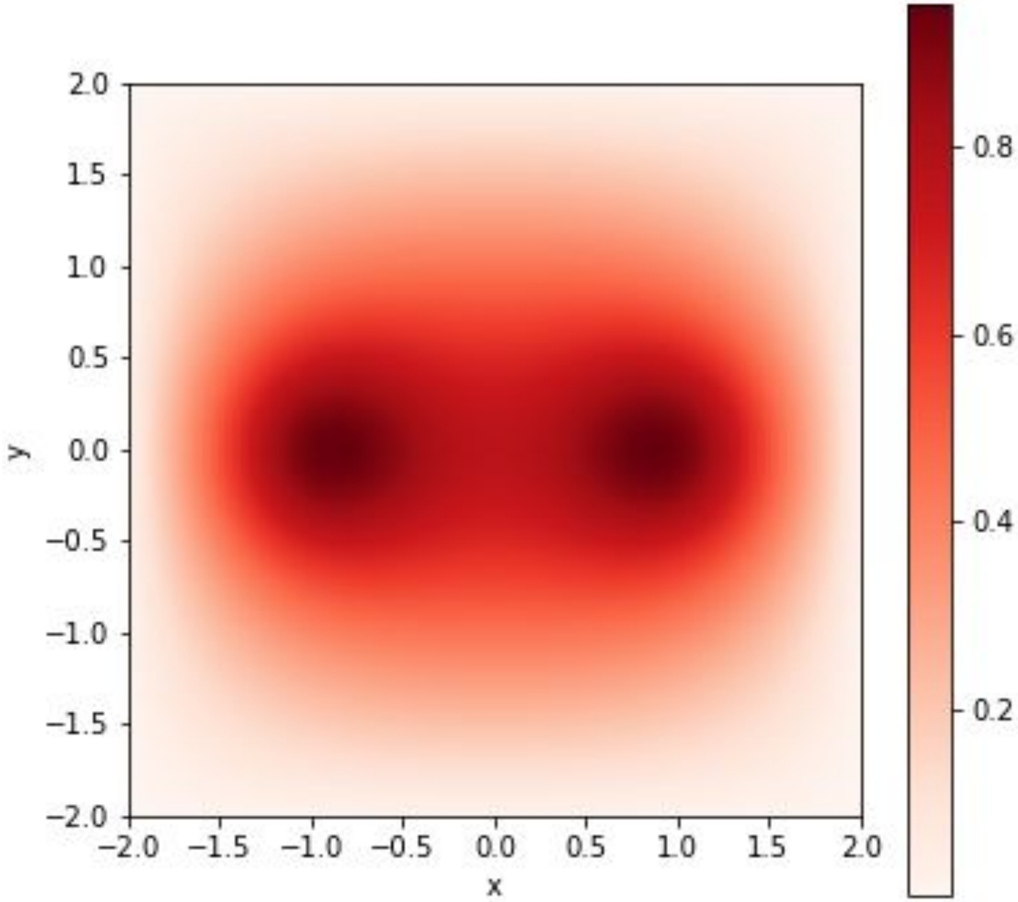
$$\phi(x,-2) = \phi(x,2) = 0 \qquad -2 \leq x \leq 2$$

$$n = m = 100$$

Convergencia en: **27818 iteraciones**

Orden de magnitud del error: 10^{-2}-10^{-3}

Cargas puntuales



Ecuación:

$$\nabla^2\phi(x,y) = -\rho(x,y)$$

Condiciones de frontera:

$$\phi(-2,y) = \phi(2,y) = 0 \qquad -2 \le y \le 2$$

$$\phi(x,-2) = \phi(x,2) = 0 \qquad -2 \le x \le 2$$

$$n = m = 100$$

Convergencia en: **27818 iteraciones**
Orden de magnitud del error: 10^{-1}-10^{-3}

Mecánica de fluidos

Ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \phi \qquad 1)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad 2)$$

Aplicando divergencia en 1) y tomando $\phi = 0$ **:**

$$\nabla^2 p = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v})$$

Mecánica de fluidos

Campo de velocidades a resolver:

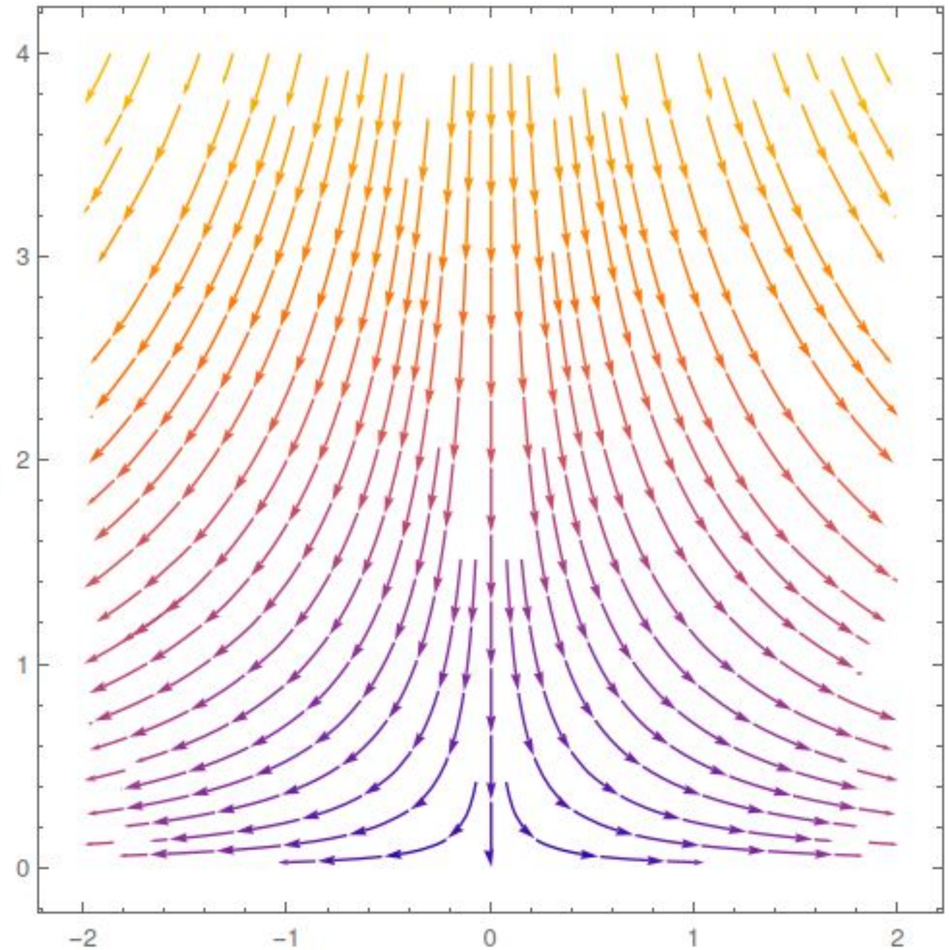
$$\mathbf{v} = (x, -y)$$

Para este campo:

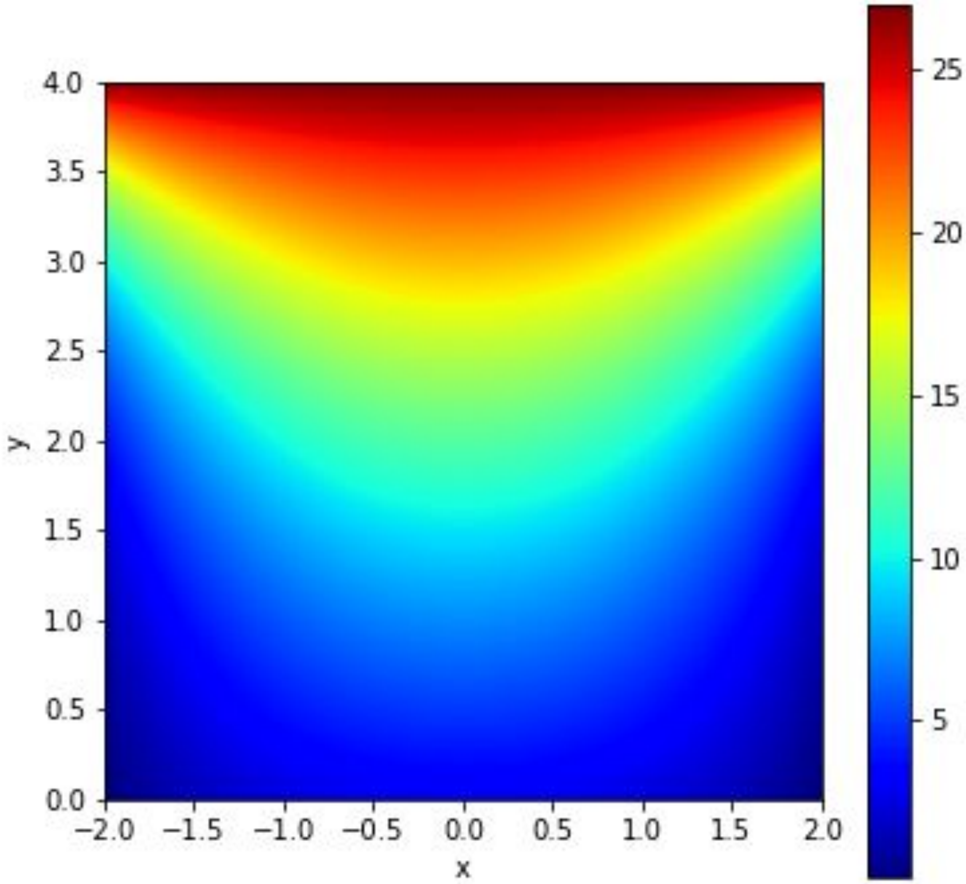
$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (x, y)$$

$$\implies \boldsymbol{\nabla} \cdot (x, y) = 2$$

$$\implies \nabla^2 p = -2$$



Mecánica de fluidos



Ecuación:

$$\nabla^2 p(x,y) = -2$$

Condiciones de frontera:

$$p(-2,y) = p(2,y) = sinh(y) \quad 0 \leq y \leq 4$$

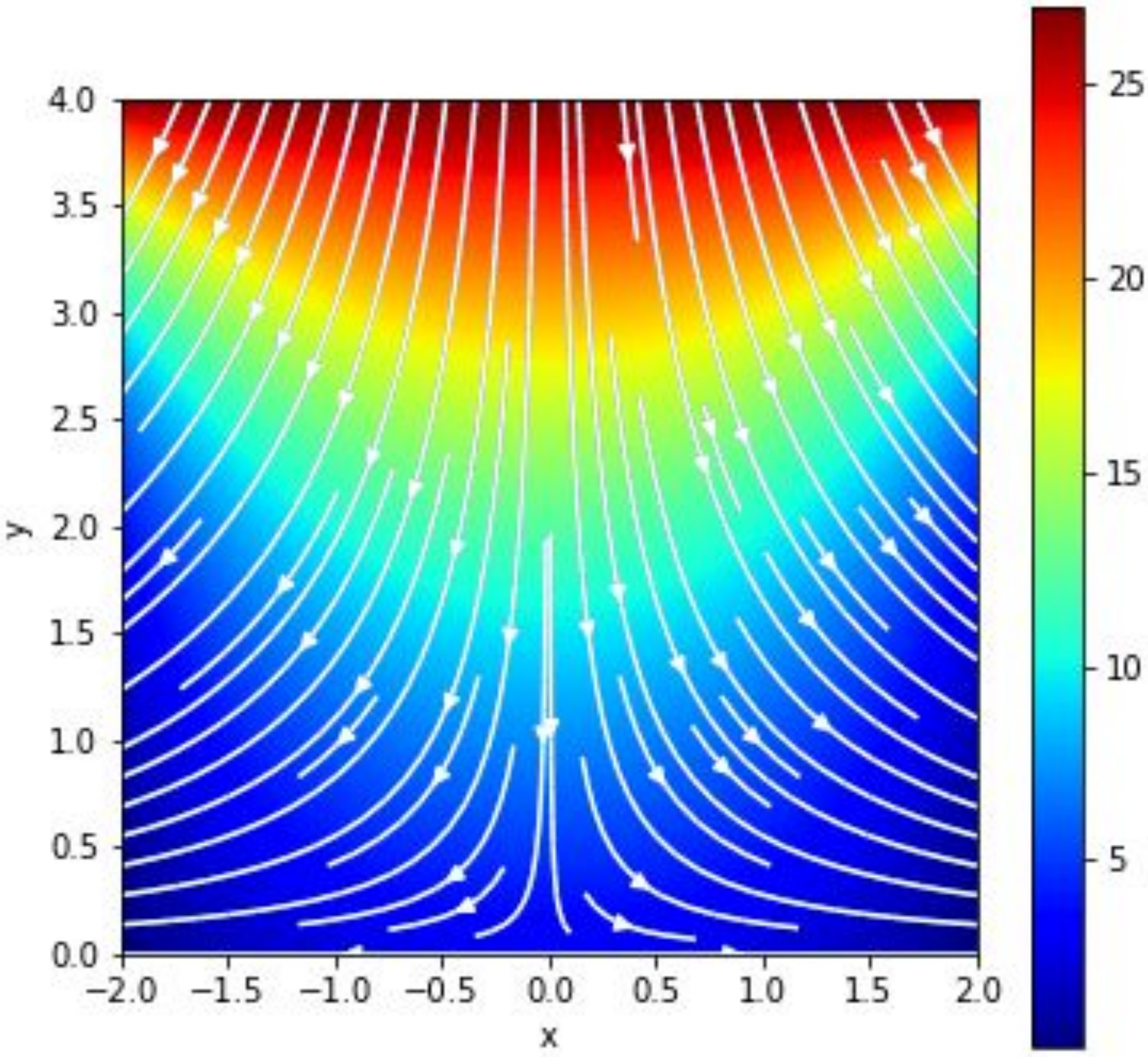
$$p(x,4) = sinh(4) \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$p(x,0) = -cosh(x) + cosh(2)$$

$$n = m = 100$$

Convergencia en: **31415 iteraciones**
Orden de magnitud del error: ---

Mecánica de fluidos



¡GRACIAS!