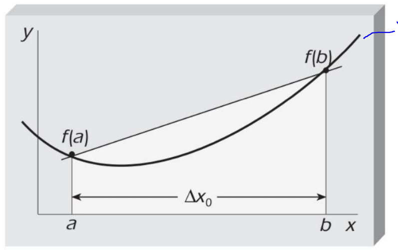
Regla trapezoidal



Aproximación del área bajo una curva con un solo trapezoide.

El área bajo la curva $f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$ es aproximada por el área debajo de una línea recta trazada entre los puntos $f(a)$ y $f(b)$. El área es entonces la aproximación a la integral y es el área de un trapezoide, el cual es

$$I \approx [\text{Valor promedio de } f \text{ en el intervalo}]\,[\text{ancho del intervalo}]$$

$$I \approx \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a) = T_0$$

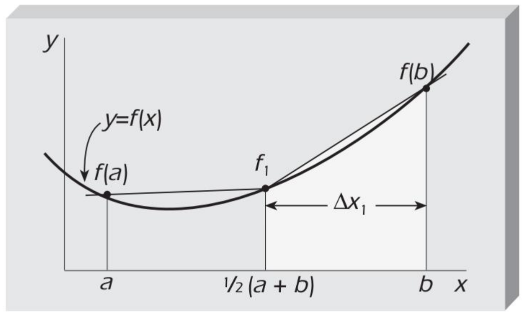
Esta es la regla trapezoidal para un panel T_0

Para mejorar la precisión de la aproximación al área bajo la curva, a continuación el intervalo se divide a la mitad y la función es aproximada por segmentos de línea recta en cada mitad. El área en este caso es aproximada por dos trapezoides

$$I \approx T_1 = \left[\frac{1}{2}\left(f(a)+f_1\right)\Delta x_1\right] + \left[\frac{1}{2}\left(f_1+f(b)\right)\Delta x_1\right]$$

$$I \approx T_1 = \frac{\Delta x_1}{2}\left[f(a)+2f_1+f(b)\right]$$

donde $\Delta x_1 = \frac{(b-a)}{2}$ $\quad f_1 = f(x=a+\Delta x_1)$



Aproximación al área con dos paneles.

Hay que observar que cuando se suman las áreas de los trapezoides, los lados en $f(a)$ y $f(b)$ son lados sólo del primer y último trapezoide, mientras que f_1 es un lado para los dos trapezoides, y por tanto cuenta doble, lo que explica el factor de 2 en la ecuación anterior

o también podemos expresar $T_1 = \frac{T_0}{2} + \Delta x_1 f_1$

Para incrementar más aún la precisión, el intervalo simplemente se subdivide en un número mayor de paneles. Es obvio que el resultado para n paneles es

$$I \approx T_n = \frac{1}{2}\Delta x_n\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f(b)\right]$$

Pero el número de paneles debe ser una potencia de 2 $n=2^k$. Como $2\Delta x_2 = \Delta x_1$ se puede observar que $f(a+2\Delta x_2) = f(a+x_1)$

$\Delta x_n = \frac{(b-a)}{n}$ $\quad f_i$: la función evaluada en cada uno de los puntos interiores

f_i: $f(x=a+i\Delta x_n)$

Ejemplo: $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ Analíticamente el valor de esta integral es $\ln(2) = 0.69314718$

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)(2-1) = 0.75$$

entonces haciendo un uso repetido de la ecuación

$k=1$ $\quad \Delta x_1 = \frac{1}{2}$

$$T_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{1}{2}\left(f\left(1+\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{0.75}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.5}\right) = 0.70833$$

$k=2$ $\quad \Delta x_2 = \frac{1}{4}$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.75}\right) = 0.6970238$$

$k=3$ $\quad \Delta x_3 = \frac{1}{8}$

$$T_3 = \frac{T_2}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1.125} + \frac{1}{1.375} + \frac{1}{1.625} + \frac{1}{1.875}\right) = 0.69412185$$

A medida que aumentemos k nos acercamos al valor deseado.

Así que la ecuación puede ser generalizada como

$$T_k = \frac{1}{2}T_{k-1} + \Delta x_k \sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\Delta x_k)$$

donde $\Delta x_k = \frac{b-a}{2^k}$ el procedimiento será:

1) Calcular T_0
2) Aplicar de manera repetida la anterior ecuación