UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

Parabolic Partial Differential Equations

Yeison Gomez

Juan Jose Ruiz

Santiago Ruiz

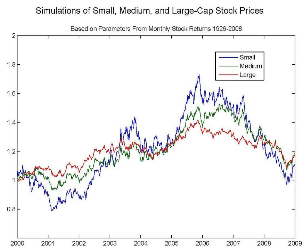
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Parabolic Partial Differential Equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u = 0$$

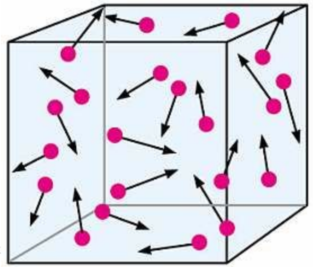
Finanzas

Modelo de Black-Scholes



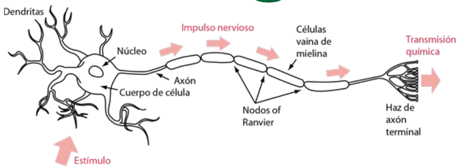
Física

Estadística



Ecuación de Fokker-Planck

Fisiología

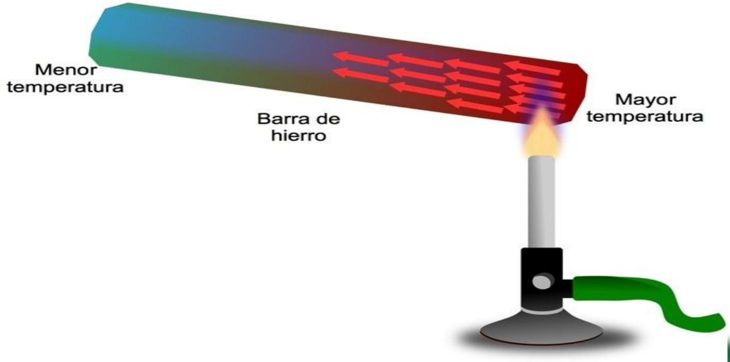


Método de diferencias progresivas

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

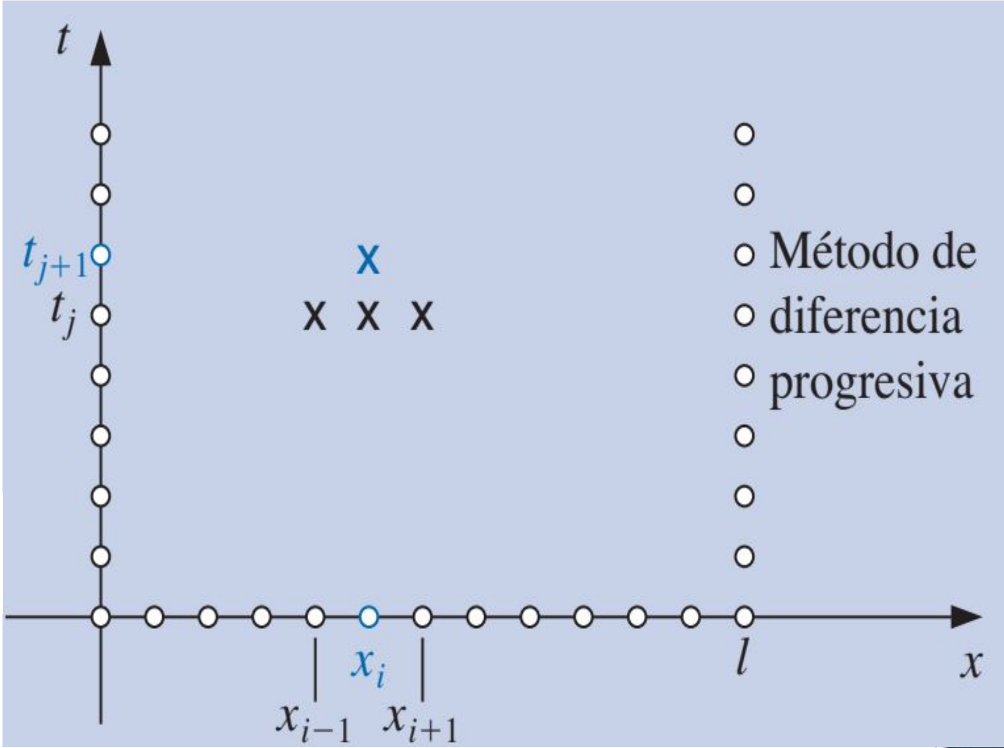
sujeta a las condiciones

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \quad \text{y} \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l.$$



tamaño de paso: $h = l/m;$ $k = T/N;$

$$x_i = ih, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, m,$$
$$t_j = jk, \text{ para } j = 0, 1, \ldots .$$



$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_j),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = 0,$$

así que el método usa los cocientes de diferencias (12.7) y (12.8) es

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0,$$

donde w_{ij} aproxima a $u(x_i, t_j)$

$$w_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{ij} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}),$$

Así, obtenemos

$$w_{0,0} = f(x_0), \quad w_{1,0} = f(x_1), \quad \ldots w_{m,0} = f(x_m).$$

Luego generamos la siguiente t-fila por

$$\begin{aligned}
w_{0,1} =& u(0, t_1) = 0; \\
w_{1,1} =& \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{2,0} + w_{0,0}); \\
w_{2,1} =& \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{2,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{3,0} + w_{1,0}); \\
&\vdots \\
w_{m-1,1} =& \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) w_{m-1,0} + \alpha^2 \frac{k}{h^2}(w_{m,0} + w_{m-2,0}); \\
w_{m,1} =& u(m, t_1) = 0.
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

$$A = \begin{bmatrix} (1-2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & (1-2\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & (1-2\lambda) \end{bmatrix},$$

donde $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$. Si hacemos

$$\mathbf{w}^{(j)} = A\mathbf{w}^{(j-1)}, \quad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots,$$

error de truncamiento

$$\mathbf{w}^{(1)} = A\left(\mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{e}^{(0)}\right) = A\mathbf{w}^{(0)} + A\mathbf{e}^{(0)}.$$

$$\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

condicionalmente estable

Método de diferencias regresivas

Este método se usa para que sea **incondicionalmente estable.**

Entonces consideremos diferencias implícitas partiendo del uso del cociente de diferencias regresivas.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j)$$

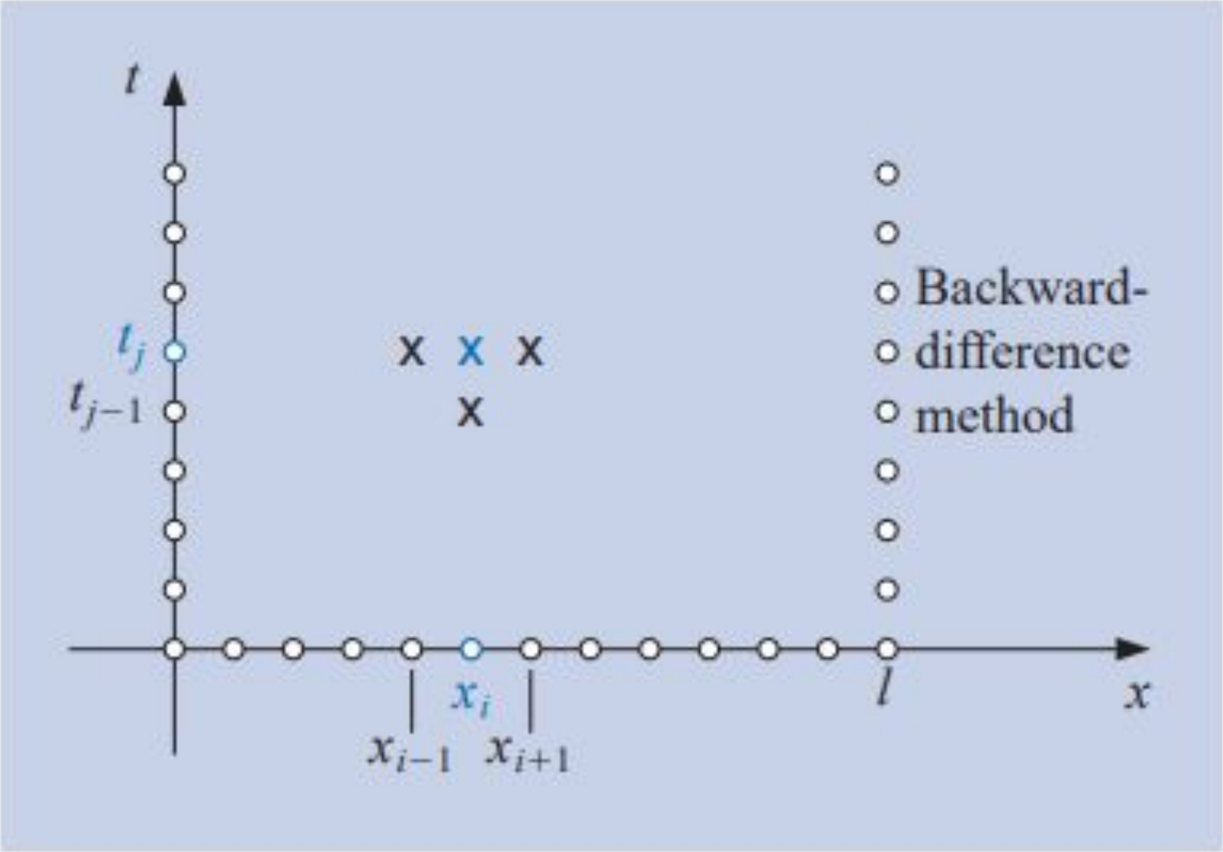
where μ_j is in (t_{j-1}, t_j)

El método de diferencias progresivas resultante es:

$$\frac{w_{ij} - w_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0,$$

Para:

$$i = 1, 2, \ldots, m - 1 \text{ y } j = 1, 2, \ldots .$$


t
t_j
t_{j-1}
Backward-
difference
method
x_i
x_{i-1}
x_{i+1}
l
x

λ denote the quantity $\alpha^2(k/h^2)$

El método de las diferencias regresivas queda:

$$(1+2\lambda)w_{ij} - \lambda w_{i+1,j} - \lambda w_{i-1,j} = w_{i,j-1}$$

Sujeto de las condiciones:

$$w_{i,0} = f(x_i) \qquad\qquad w_{m,j} = w_{0,j} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (1+2\lambda) & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & (1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \end{bmatrix}$$

Heat Equation Backward-Difference

To approximate the solution to the parabolic partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

subject to the boundary conditions

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

and the initial conditions

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l :$$

INPUT endpoint l; maximum time T; constant α; integers $m \geq 3$, $N \geq 1$.

OUTPUT approximations $w_{i,j}$ to $u(x_i, t_j)$ for each $i = 1, \ldots, m-1$ and $j = 1, \ldots, N$.

Step 1 Set $h = l/m$;
$k = T/N$;
$\lambda = \alpha^2 k/h^2$.

Step 2 For $i = 1, \ldots, m-1$ set $w_i = f(ih)$. (*Initial values.*)
(*Steps* 3–11 *solve a tridiagonal linear system using Algorithm* 6.7.)

Step 3 Set $l_1 = 1 + 2\lambda$;
$u_1 = -\lambda/l_1$.

Step 4 For $i = 2, \ldots, m-2$ set $l_i = 1 + 2\lambda + \lambda u_{i-1}$;
$u_i = -\lambda/l_i$.

Step 5 Set $l_{m-1} = 1 + 2\lambda + \lambda u_{m-2}$.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Step 6 For $j = 1, \ldots, N$ do Steps 7–11.

Step 7 Set $t = jk$; (*Current* t_j.)

$$z_1 = w_1/l_1.$$

Step 8 For $i = 2, \ldots, m-1$ set $z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i$.

Step 9 Set $w_{m-1} = z_{m-1}$.

Step 10 For $i = m-2, \ldots, 1$ set $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.

Step 11 OUTPUT (t); (*Note*: $t = t_j$.)

For $i = 1, \ldots, m-1$ set $x = ih$;

OUTPUT (x, w_i). (*Note*: $w_i = w_{i,j}$.)

Step 12 STOP. (*The procedure is complete.*)

Método de Crank-Nicolson

Un método más prometedor se deriva al promediar el método de diferencias progresivas en el j-ésimo paso en t,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} = 0,$$

que tiene error de truncamiento local

$$\tau_F = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j) + O(h^2),$$

y el método de diferencias regresivas en el $(j + 1)$ésimo paso en t,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} = 0,$$

que tiene error de truncamiento local

$$\tau_B = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{u}_j) + O(h^2).$$

Si suponemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \hat{\mu}_j) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, \mu_j),$$

entonces, el método de diferencia promediado,

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{k} - \frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] = 0,$$

tiene error de truncamiento local de orden $O(k^2 + h^2)$, siempre y cuando, por supuesto, se satisfagan las condiciones de diferenciabilidad comunes.

Esto se conoce como el **método de Crank-Nicolson** y se representa en forma de matriz

$$A\mathbf{w}^{(j+1)} = B\mathbf{w}^{(j)}, \quad \text{para cada } j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12.15}$$

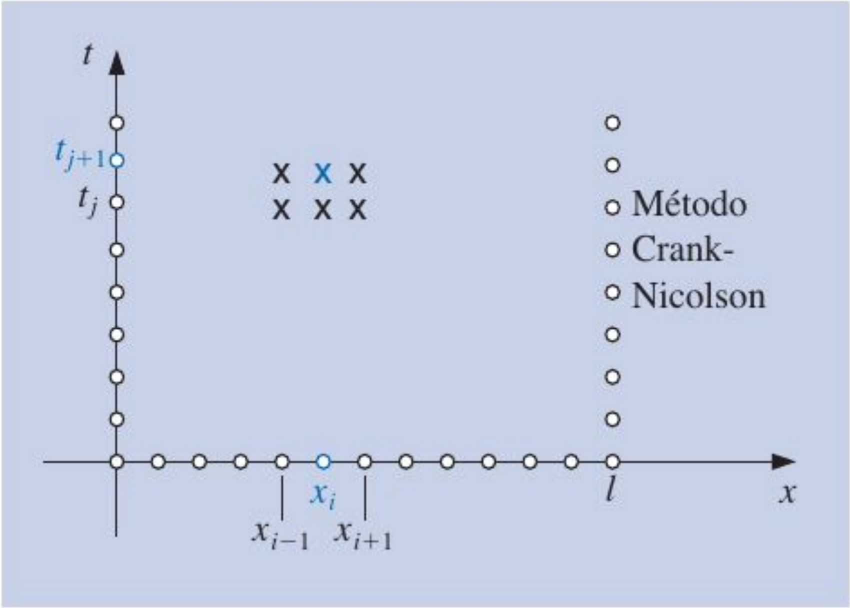
donde

$$\lambda = \alpha^2 \frac{k}{h^2}, \quad \mathbf{w}^{(j)} = (w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m-1,j})^t,$$

y las matrices A y B están dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} (1+\lambda) & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & (1+\lambda) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{2} & (1-\lambda) \end{bmatrix}$$

Figura 12.11



Para aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l:$$

ENTRADA extremo l; tiempo máximo T; constante α; enteros $m \geq 3$, $N \geq 1$.

SALIDA aproximaciones $w_{i,j}$ para $u(x_i, t_j)$ para cada $i = 1, \dots, m-1$ y $j = 1, \dots, N$..

Paso 1 Determine $h = l/m$;

$$k = T/N;$$
$$\lambda = \alpha^2 k/h^2;$$
$$w_m = 0.$$

Paso 2 Para $i = 1, \ldots, m-1$ determine $w_i = f(ih)$. (*Valores iniciales.*)

(*Los pasos* 3–11 *resuelven un sistema lineal tridiagonal por medio del algoritmo* 6.7.)

Paso 3 Determine $l_1 = 1 + \lambda$;

$$u_1 = -\lambda/(2l_1).$$

Paso 4 Para $i = 2, \ldots, m-2$ determine $l_i = 1 + \lambda + \lambda u_{i-1}/2$;

$$u_i = -\lambda/(2l_i).$$

Paso 5 Determine $l_{m-1} = 1 + \lambda + \lambda u_{m-2}/2$.

Paso 6 Para $j = 1, \ldots, N$ haga los pasos 7–11.

Paso 7 Determine $t = jk$; (*Actual* t_j.)

$$z_1 = \left[(1-\lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2\right] \Big/ l_1.$$

Paso 8 Para $i = 2, \ldots, m-1$ determine

$$z_i = \left[(1-\lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1})\right] \Big/ l_i.$$

Paso 9 Determine $w_{m-1} = z_{m-1}$.

Paso 10 Para $i = m-2, \ldots, 1$ determine $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.

Paso 11 SALIDA (t); (*Nota:* $t = t_j$.)
Para $i = 1, \ldots, m-1$ establezca $x = ih$;
SALIDA (x, w_i). (*Nota:* $w_i = w_{i,j}$.)

Paso 12 PARE. (*El procedimiento está completo*.)

Matrices tridiagonales

Las matrices de ancho de banda 3 se presentan cuando $p = q = 2$, reciben el nombre de **tridiagonales** porque tienen la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La multiplicación relacionada con $A = LU$ nos da, además de las entradas 0,

$$a_{11} = l_{11};$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1}, \quad \text{para cada } i = 2, 3, \ldots, n; \tag{6.13}$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, \quad \text{para cada } i = 2, 3, \ldots, n; \tag{6.14}$$

y

$$a_{i,i+1} = l_{ii}u_{i,i+1}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{6.15}$$

Una solución para este sistema se encuentra al utilizar primero la ecuación (6.13) para obtener los términos fuera de la diagonal diferentes a cero en L y después, con las ecuaciones (6.14) y (6.15) para obtener de manera alternativa el resto de las entradas en U y L. Una vez que se calcula una entrada L o U, la entrada correspondiente en A no es necesaria. Por lo que, las entradas en A se pueden sobrescribir mediante las entradas en L y U con el resultado de que no se requiere almacenamiento nuevo.

Factorización de Crout para sistemas lineales tridiagonales

Para resolver el sistema lineal $n \times n$

$$
\begin{array}{lrcl}
E_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & & = a_{1,n+1}, \\
E_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & & = a_{2,n+1}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
E_{n-1}: & a_{n-1,n-2}x_{n-2} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & & = a_{n-1,n+1}, \\
E_n: & a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n & & = a_{n,n+1},
\end{array}
$$

que se supone que tiene una solución única:

ENTRADA la dimensión n; las entradas de A.

SALIDA la solución $x_1, \ldots, x_n$.

(*Los pasos 1-3 configuran y resuelven* $L\mathbf{z} = \mathbf{b}$.)

Paso 1 Determine $l_{11} = a_{11}$;

$$u_{12} = a_{12}/l_{11};$$

$$z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}.$$

Paso 2 Para $i = 2, \ldots, n-1$ determine $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$; (*i-ésima fila de L.*)

$$l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}u_{i-1,i};$$

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1}/l_{ii}; \text{ } ((i+1)\text{-}\textit{ésima columna de } U.)$$

$$z_i = (a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1})/l_{ii}.$$

Paso 3 Determine $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$; (*enésima fila de L.*)

$$l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}.$$

$$z_n = (a_{n,n+1} - l_{n,n-1}z_{n-1})/l_{nn}.$$

(*Pasos 4 y 5 resuelven* $U\ \mathbf{x} = \mathbf{z}$.)

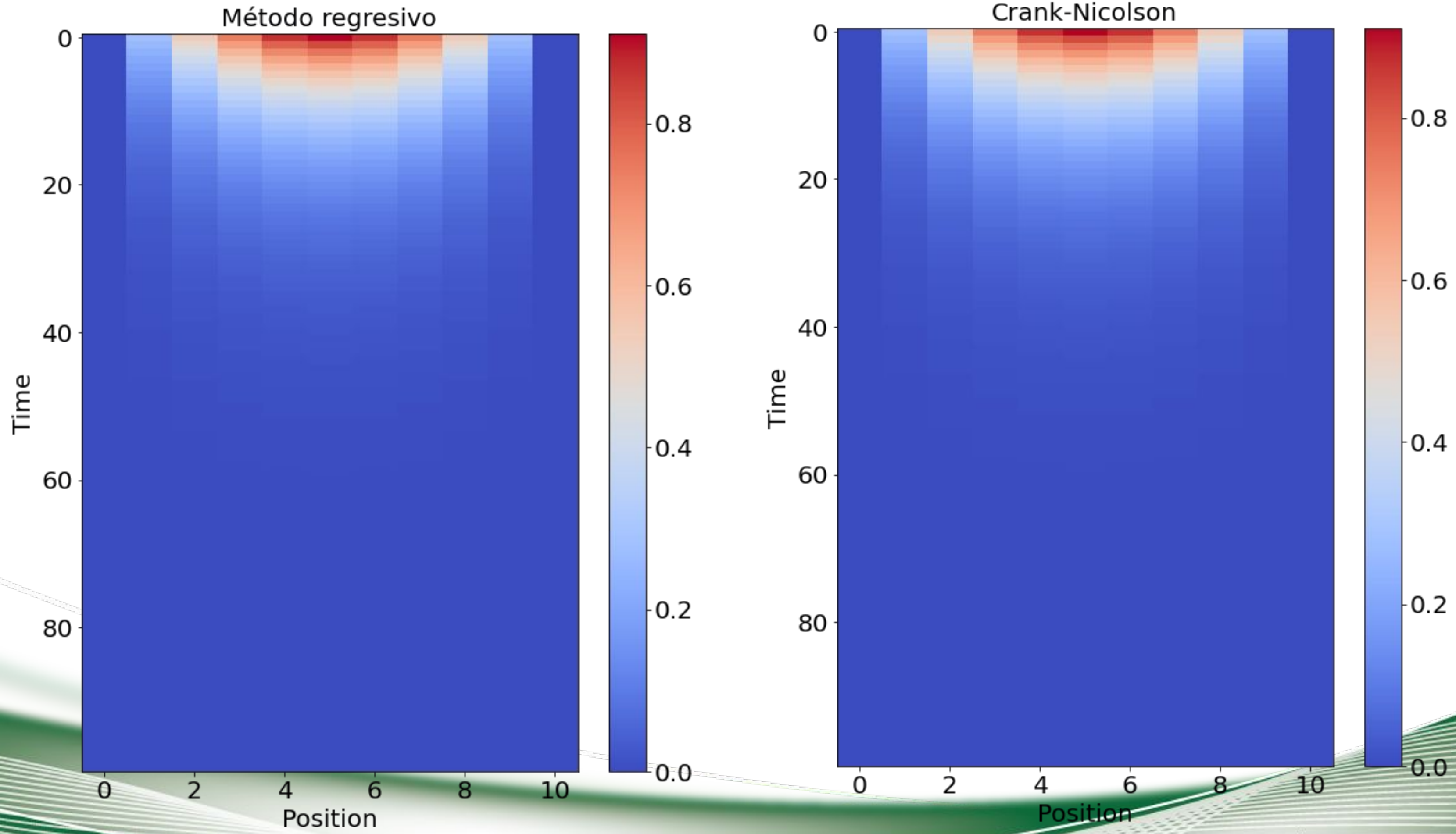
Paso 4 Determine $x_n = z_n$.

Paso 5 Para $i = n-1, \ldots, 1$ determine $x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$.

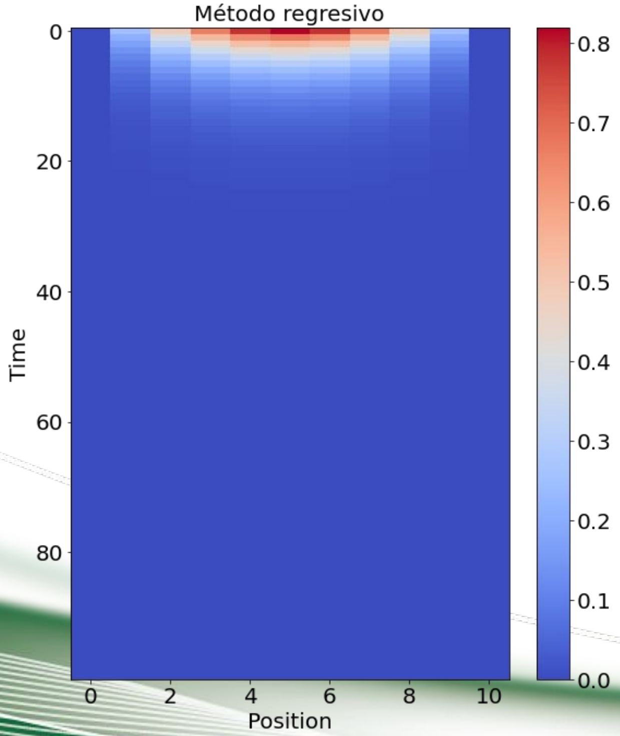
Paso 6 SALIDA $(x_1, \ldots, x_n)$;
PARE.

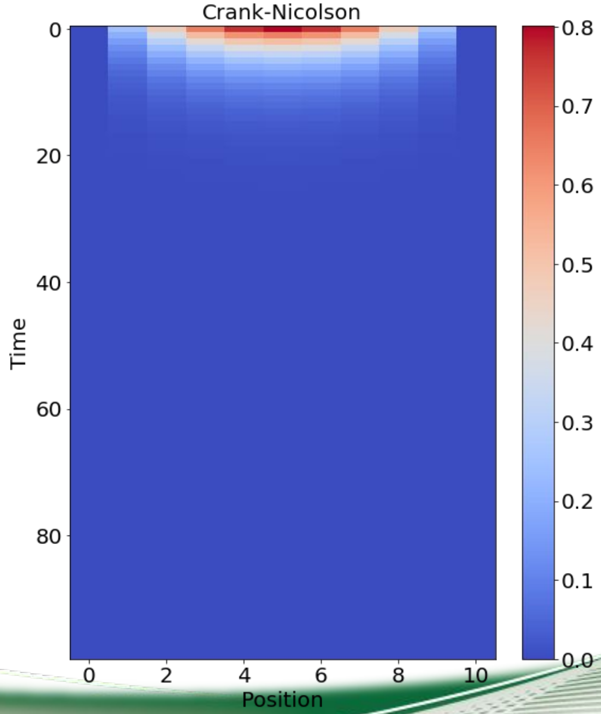
Resultados

Alpha = 1

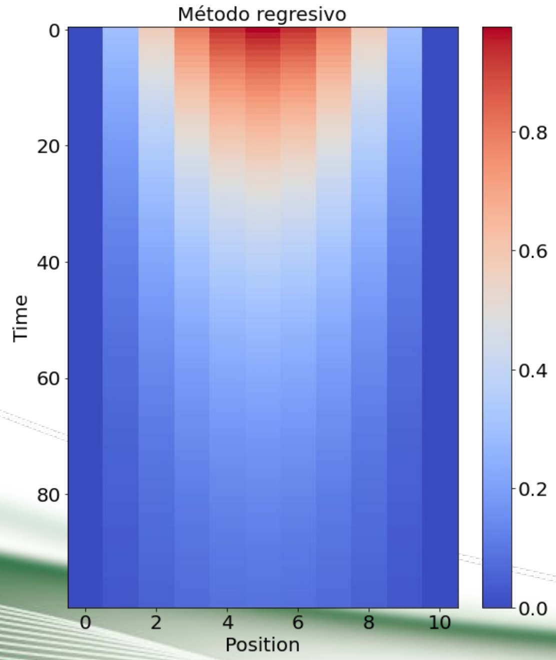

Método regresivo
Time
Position
Crank-Nicolson
Time
Position

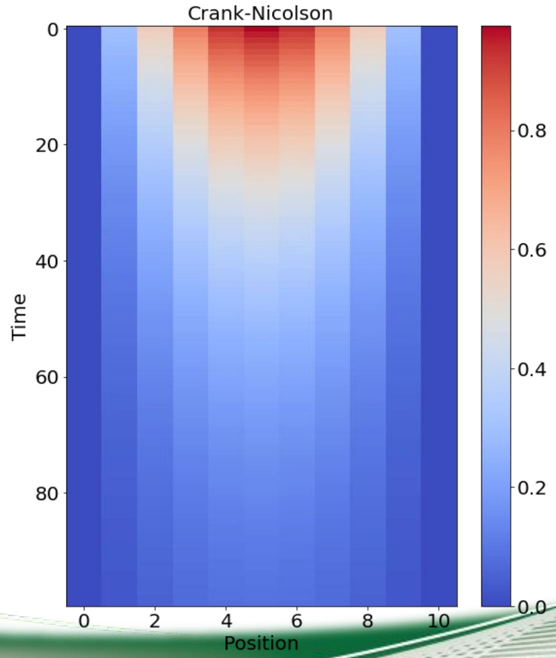
```cpp
// void funcion(l, m , N , T, alpha  )
cout<<"Metodo de diferencias regresivas\n"<<endl;
parabolic.regresivas(1, 10, 100, 1, 1.5  );

cout<<"\n\nMetodo de Crank-Nicolson\n"<<endl;
parabolic.crankNicolson(1, 10, 100, 1, 1.5  );
```



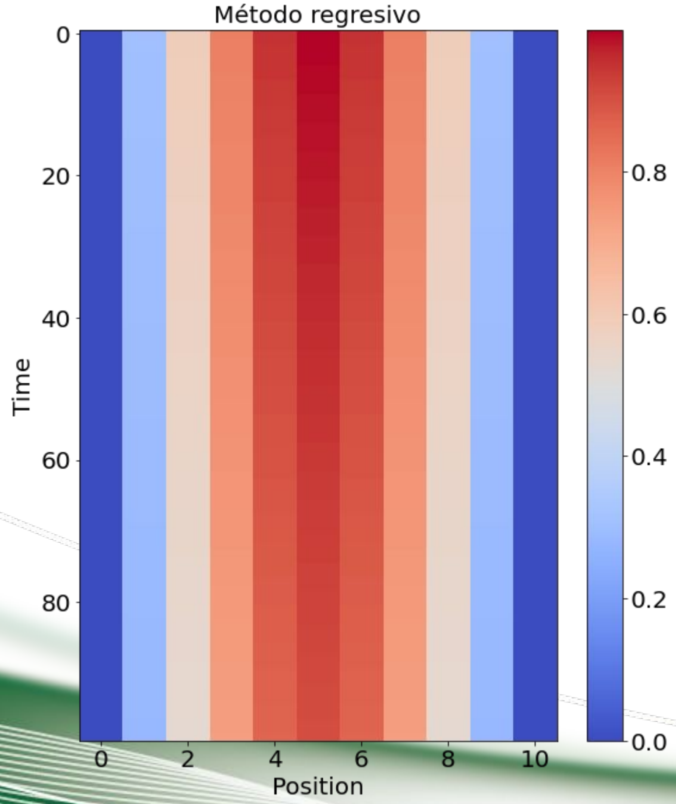


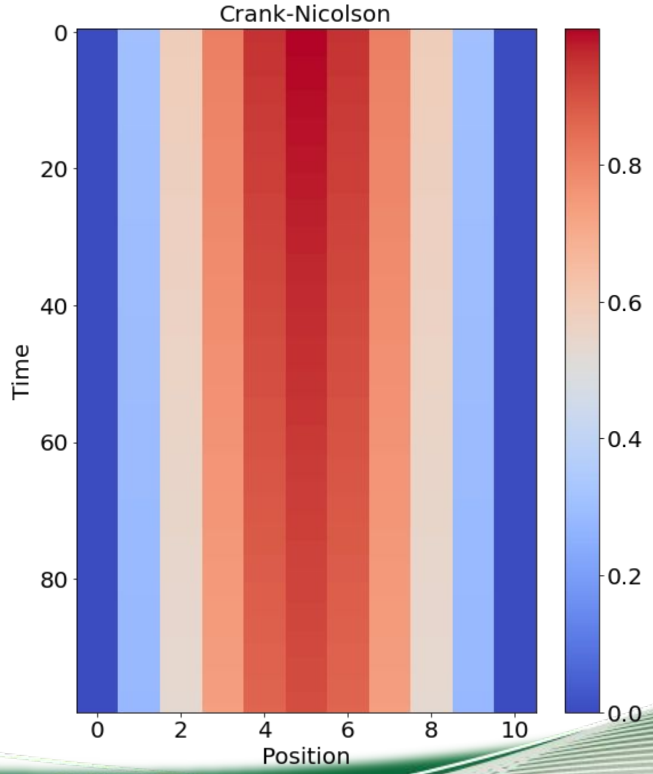
```cpp
// void funcion(l, m , N , T, alpha  )
cout<<"Metodo de diferencias regresivas\n"<<endl;
parabolic.regresivas(1, 10, 100, 1, 0.5  );

cout<<"\n\nMetodo de Crank-Nicolson\n"<<endl;
parabolic.crankNicolson(1, 10, 100, 1, 0.5  );
```





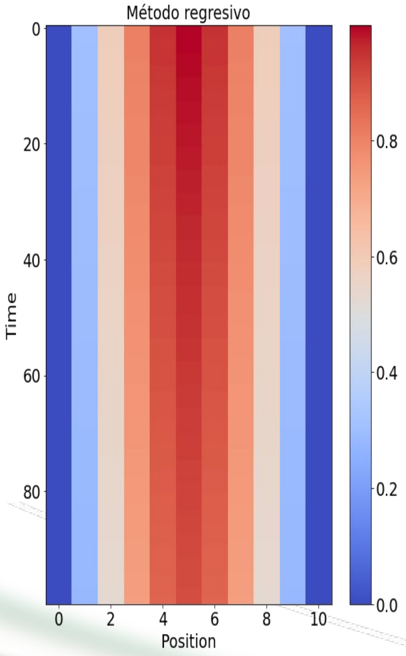
```
// void funcion(l, m , N , T, alpha  )
cout<<"Metodo de diferencias regresivas\n"<<endl;
parabolic.regresivas(1, 10, 100, 1, 0.1  );

cout<<"\n\nMetodo de Crank-Nicolson\n"<<endl;
parabolic.crankNicolson(1, 10, 100, 1, 0.1  );
```



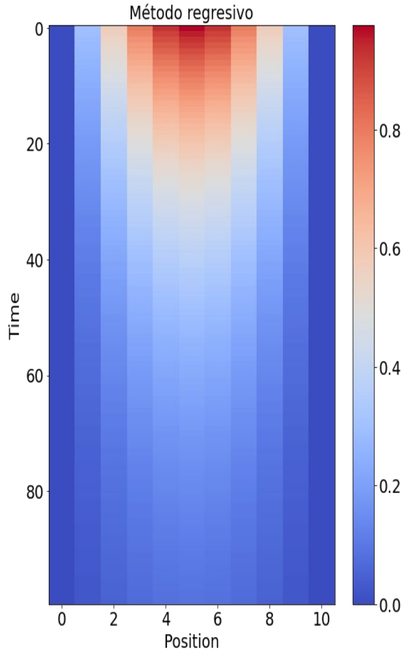


UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

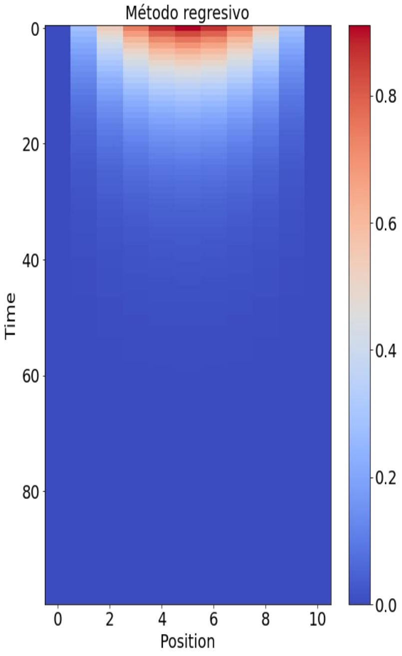
∝ =0.1



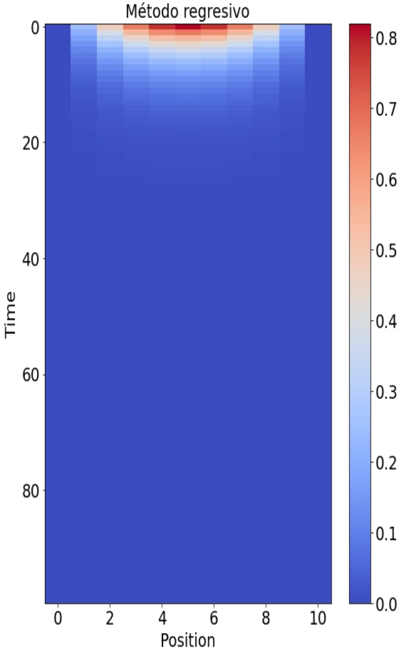
∝ =0.5



∝ = 1



∝ =1.5



Alpha es un índice que expresa la velocidad de cambio, y flujo de temperaturas, en un material hasta que alcanza el equilibrio térmico.

Muchas Gracias