Лабораторная работа №4:

Условная оптимизация

Задача 2: Оптимизация с нелинейными ограничениями методом SLSQP

Постановка задачи: Минимизация нелинейной функции с ограничениями типа неравенств и равенств.

Целевая функция:
$f(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_0 x_1 + x_0 + x_1$

Ограничения:

- $1 - x_0 - 2x_1 \geq 0$
- $1 - x_0^2 - x_1 \geq 0$
- $1 - x_0^2 + x_1 \geq 0$
- $x_0^2 + x_1^2 = 1$

Используемые методы

Последовательное квадратичное программирование (SLSQP)

Теория метода:
SLSQP решает задачу путем последовательной аппроксимации квадратичными подзадачами:

1. **Формулировка подзадачи**: На каждой итерации решается:
   $\min_d \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla f(x_k)^T d$
   при условиях:
   $\nabla g_i(x_k)^T d + g_i(x_k) \leq 0$
   $\nabla h_j(x_k)^T d + h_j(x_k) = 0$
2. **Обновление матрицы Гессе**: Матрица H_k аппроксимирует гессиан лагранжиана:
   $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$
3. **Критерии остановки**: Метод использует условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ) как критерий оптимальности.

Алгоритм решения подзадачи:

- Линеаризация ограничений вокруг текущей точки
- Решение квадратичной задачи программирования
- Обновление переменных с учетом размера шага

Преимущества для данной задачи:

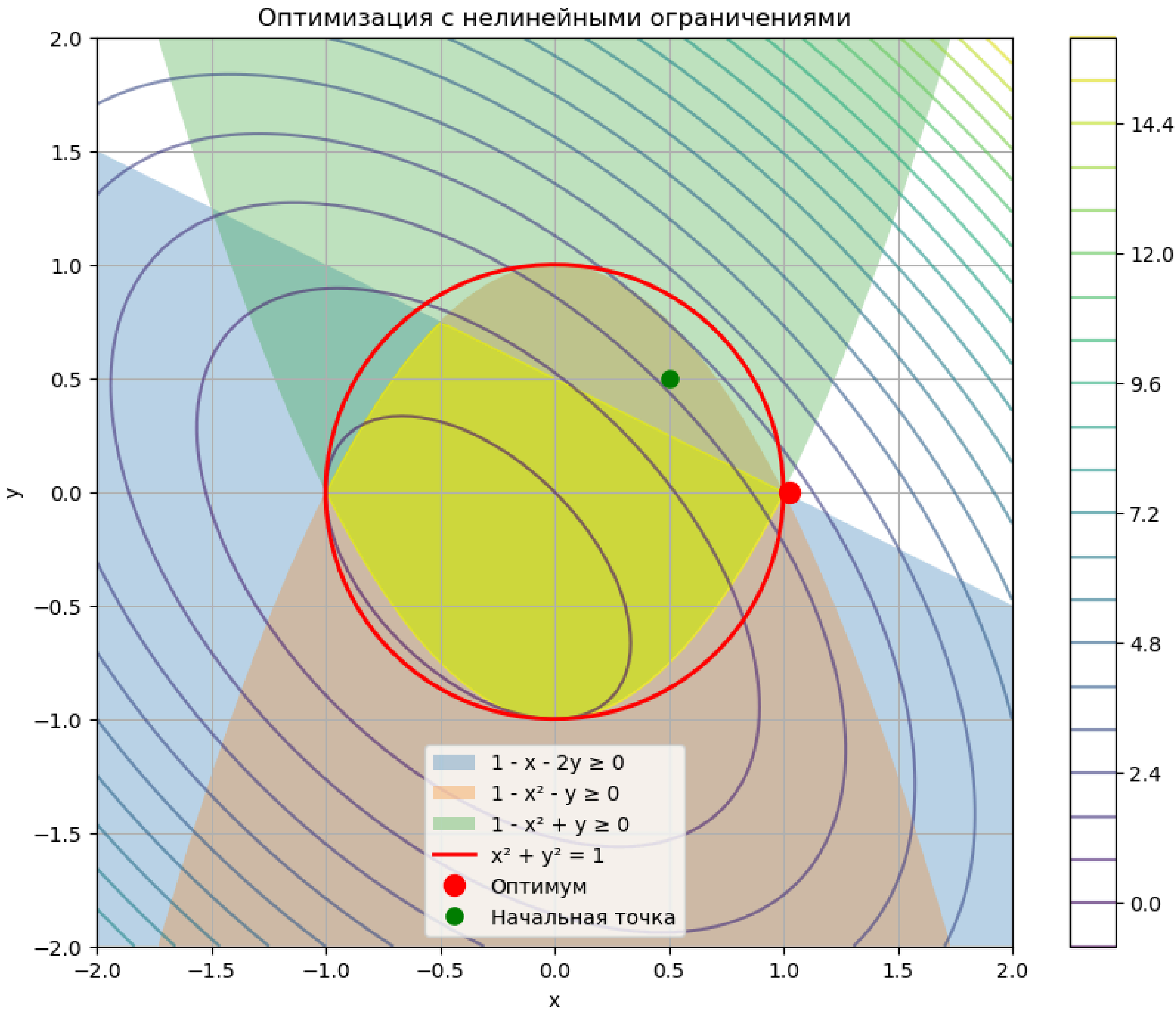
- Эффективен для задач со смешанными ограничениями

- Быстрая сходимость вблизи решения
- Хорошо масштабируется для задач средней размерности

Условия Каруша-Куна-Таккера (ККТ)

Для оптимальной точки x^* должны существовать множители Лагранжа λ^*, μ^* такие что:

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x^*) + \sum \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \\
&g_i(x^*) \leq 0, \quad h_j(x^*) = 0 \\
&\lambda_i^* \geq 0 \\
&\lambda_i^* g_i(x^*) = 0
\end{aligned}$$



Визуализация результатов:

Строится контурный график целевой функции с выделением области допустимых решений. Отображаются все ограничения и отмечается найденный оптимум. Область допустимых решений закрашивается для наглядности.