# Лабораторная работа №4:

# Условная оптимизация

**Дисциплина:** Методы оптимизации

**Цель работы:** Изучение и практическое освоение методов условной оптимизации для решения задач нелинейного программирования с ограничениями.

## Задача 3: Оптимизация инвестиционного портфеля

**Постановка задачи:** Минимизация риска инвестиционного портфеля при заданной ожидаемой доходности.

**Целевая функция** (минимизация риска):
$f(w) = w^T \Sigma w$

где $w$ - веса активов в портфеле, $\Sigma$ - матрица ковариаций.

**Ограничения:**

- $\sum w_i = 1$ (полностью инвестированный портфель)
- $\mu^T w \geq R$ (требуемая доходность)
- $w_i \geq 0$ (запрет коротких позиций)

## Определение μ

В задаче оптимизации инвестиционного портфеля **μ** (мю) представляет собой **вектор ожидаемых доходностей** активов, входящих в портфель.

## Математическая формализация

Если портфель состоит из n активов, то:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

где:

- $\mu_i$ - ожидаемая доходность i-го актива
- n - количество активов в портфеле

## Роль в задаче оптимизации

### В ограничениях

Параметр μ используется в ограничении на минимальную доходность портфеля:
$\mu^T w \geq R$

где:

- $w$ - вектор весов активов в портфеле
- $R$ - целевая минимальная доходность портфеля
- $\mu^T w$ - скалярное произведение, дающее ожидаемую доходность всего портфеля

### Экономическая интерпретация

**μ представляет собой:**

- Ожидаемую доходность каждого актива за определенный период
- Может быть рассчитана на основе исторических данных или экспертных прогнозов
- Является ключевым параметром в модели Марковица

## Пример из задачи

В представленной задаче:
$$\mu = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.12 \\ 0.10 \end{bmatrix}$$

Это означает:

- Актив 1 имеет ожидаемую доходность 8%
- Актив 2 имеет ожидаемую доходность 12%
- Актив 3 имеет ожидаемую доходность 10%

## Связь с другими параметрами

**μ взаимодействует с:**

- Матрицей ковариаций Σ - характеризует риск активов
- Весами w - определяет структуру портфеля
- Целевой доходностью R - задает требование к портфелю

## Значение в финансовой теории

Параметр μ является фундаментальным в современной портфельной теории, так как:

- Позволяет количественно оценить потенциальную прибыль
- Используется для построения эффективной границы
- Помогает найти оптимальный баланс между риском и доходностью

Таким образом, μ - это количественная мера ожидаемой доходности активов, которая вместе с матрицей ковариаций Σ полностью определяет свойства портфеля в рамках модели Марковица.

# Используемые методы

## Квадратичное программирование

**Теория метода:**
Задача оптимизации портфеля является задачей квадратичного программирования:

1. **Выпуклая задача**: Функция риска $w^T \Sigma w$ выпукла, так как матрица $\Sigma$ положительно полуопределена
2. **Эффективная граница**: Решение задачи для различных $R$ дает множество эффективных портфелей
3. **Метод решения**: SLSQP эффективен для этой задачи благодаря:
    - Квадратичной целевой функции
    - Линейным ограничениям
    - Выпуклости задачи

## Математические основы

**Матрица ковариаций:**
$\Sigma = \mathbb{E}[(r - \mu)(r - \mu)^T]$

где $r$ - вектор случайных доходностей активов.

**Оптимальность по Марковицу:**

- Минимальный риск для заданной доходности
- Максимальная доходность для заданного уровня риска

## Численные методы решения

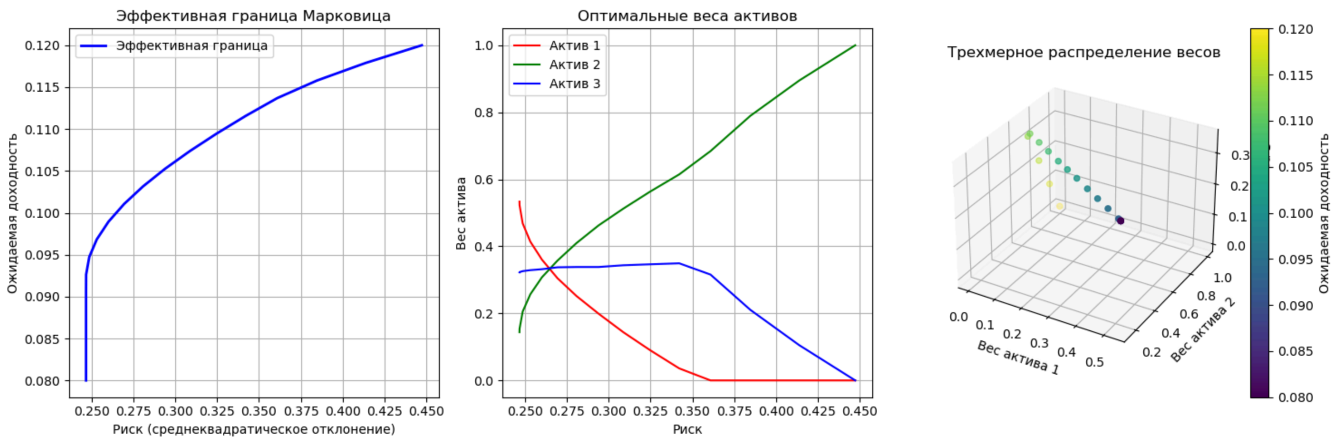
**Подход с параметризацией:**

1. Задание сетки целевых доходностей $R_k$
2. Решение задачи квадратичного программирования для каждого $R_k$
3. Построение эффективной границы

**Особенности реализации:**

- Использование ограничений на веса (неотрицательность)
- Учет бюджетного ограничения (сумма весов = 1)
- Обеспечение требуемой доходности

**Код реализации:**




```
Оптимальные веса портфеля (доходность 9%):
Актив 1: 0.5336
Актив 2: 0.1439
Актив 3: 0.3225
Ожидаемая доходность: 0.0922
Риск: 0.2468
```

# Расчет ковариационной матрицы активов для задачи оптимизации портфеля

## Определение ковариационной матрицы

Ковариационная матрица $\Sigma$ представляет собой квадратную матрицу, где:

- Диагональные элементы $\sigma_{ii}$ - это **дисперсии** доходностей отдельных активов
- Недиагональные элементы $\sigma_{ij}$ - это **ковариации** между доходностями активов i и j

Математически для n активов:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

## Формулы расчета

**Дисперсия** доходности актива i:
$\sigma_{ii} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (r_{i,t} - \mu_i)^2$

**Ковариация** между активами i и j:
$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (r_{i,t} - \mu_i)(r_{j,t} - \mu_j)$

где:

- $T$ - количество временных периодов
- $r_{i,t}$ - доходность актива i в период t
- $\mu_i$ - средняя доходность актива i

**Визуализация результатов:**

Строится график эффективной границы Марковица, показывающий зависимость между риском и доходностью. Дополнительно отображается динамика изменения весов активов вдоль эффективной границы и трехмерная диаграмма распределения весов.