Universidade do Minho
Licenciatura em Engenharia Informática

Investigação Operacional

Trabalho Prático 1 - Grupo

André Silva - A87958 Armando Silva - A87949
Filipa Rebelo - A90234 Joana Oliveira - A87956
João Nunes - A87972

Março 2022





Conteúdo

1 Introdução

No âmbito da unidade curricular de Investigação Operacional, neste primeiro trabalho prático, foi-nos proposta a formulação e modelação de um problema.

Problema que consiste em inspecionar todas as linhas de transporte de energia elétrica em alta tensão com a utilização de um drone desde um ponto inicial até a um ponto final. O objetivo final pretendido é que encontremos um percurso ótimo que permita ao drone percorrer todas as linhas na menor distância possível.

Para nos ajudar na resolução deste problema, foi nos fornecida uma tabela com as distâncias euclidianas entre todos os vértices. Utilizamos ainda o *software* de programação linear *LPSolve*.

2 Formulação do Problema

2.1 Remoção de arestas

Inicialmente é nos pedido para remover algumas arestas com base em parâmetros definidos no enunciado. Tendo em conta estes parâmetros e o número 90234 (maior número de aluno do grupo), removemos as arestas B, C e E, originando o seguinte grafo:

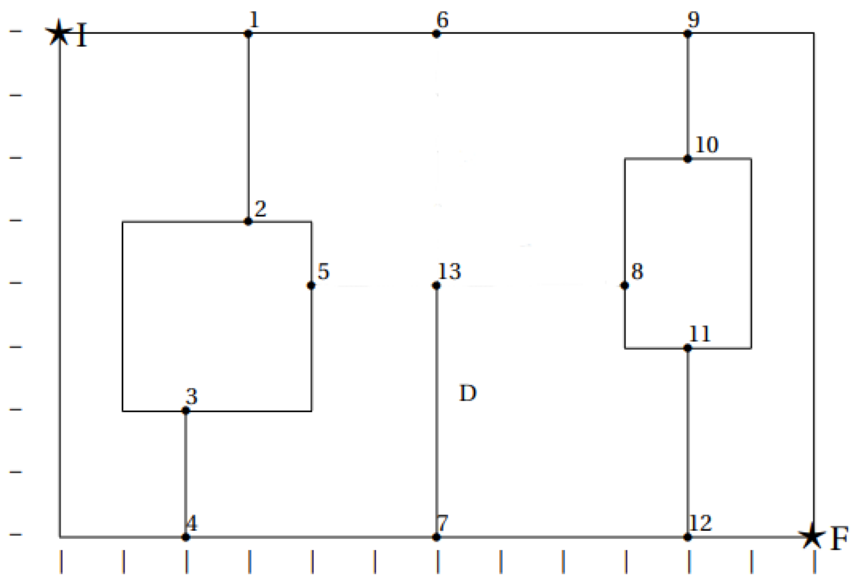

Figura 1. Grafo inicial

2.2 Descrição do problema e objetivo

Este projeto tem como objetivo determinar o percurso que começa do ponto *I e termina no ponto *F, percorrendo todas as arestas da rede pelo menos uma vez e minimizando a distância percorrida.

Neste problema pretende-se que um drone inspecione linhas de alta tensão para verificar se há vegetação a interferir com as mesmas. Para tal, o drone deve atravessar todas as arestas pelo menos uma vez, ou então reposicionar-se pelo ar, ou seja, por exemplo, ir do ponto 1 para o ponto 3.

De forma a cumprir o pedido, é necessário saber que um caminho *Euleriano* é um caminho que atravessa todas as arestas exatamente uma vez, de um ponto a outro. Além disso, uma condição necessária para a existência destes caminhos é que existam dois vértices de grau ímpar e os restantes de grau par, no nosso caso o ponto *I e *F terão que ter grau ímpar.

Como é possível ver no grafo obtido após a remoção das arestas, este não se trata de um grafo *Semi-Euleriano* pois existem mais do que dois vértices de grau ímpar e por isso, é impossível determinar um caminho *Euleriano*. A solução será então duplicar arestas ou criar novas arestas que o drone possa percorrer pelo ar, de forma a tornar o grafo *Semi-Euleriano*.

Por fim, deparamo-nos com o problema de selecionar quais as arestas a serem duplicadas ou criadas de forma a que o drone percorra a menor distância possível. Com estas novas arestas conseguimos transformar o grafo num grafo *Semi-Euleriano*, em que existem exatamente dois vértices de grau ímpar, e assim, obter uma solução ótima.

		x	0	3	3	2	2	4	6	6	9	10	10	10	10	6	12
		y	8	8	5	2	0	4	8	0	4	8	6	3	0	4	0
x	y		I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	F
0	8	I	0,00	3,00	4,24	6,32	8,25	5,66	6,00	10,00	9,85	10,00	10,20	11,18	12,81	7,21	14,42
3	8	1		0,00	3,00	6,08	8,06	4,12	3,00	8,54	7,21	7,00	7,28	8,60	10,63	5,00	12,04
3	5	2			0,00	3,16	5,10	1,41	4,24	5,83	6,08	7,62	7,07	7,28	8,60	3,16	10,30
2	2	3				0,00	2,00	2,83	7,21	4,47	7,28	10,00	8,94	8,06	8,25	4,47	10,20
2	0	4					0,00	4,47	8,94	4,00	8,06	11,31	10,00	8,54	8,00	5,66	10,00
4	4	5						0,00	4,47	4,47	5,00	7,21	6,32	6,08	7,21	2,00	8,94
6	8	6							0,00	8,00	5,00	4,00	4,47	6,40	8,94	4,00	10,00
6	0	7								0,00	5,00	8,94	7,21	5,00	4,00	4,00	6,00
9	4	8									0,00	4,12	2,24	1,41	4,12	3,00	5,00
10	8	9										0,00	2,00	5,00	8,00	5,66	8,25
10	6	10											0,00	3,00	6,00	4,47	6,32
10	3	11												0,00	3,00	4,12	3,61
10	0	12													0,00	5,66	2,00
6	4	13														0,00	7,21
12	0	F															0,00

Figura 2. Tabela das distâncias euclidianas

2.3 Escolha de variáveis de decisão

Com base no que foi anteriormente dito, podemos concluir que as nossas variáveis de decisão serão as arestas constituídas pelos vértices ímpares e pelo vértice de partida da rede (*I,1,2,3,4,7,9,10,11,12,13), isto é, todos os Xi_j onde i e j são vértices ímpares, ou então, vértices de partida ou chegada, que estão ligados seguindo a tabela de distâncias euclidianas. Assim sendo, teremos então 66 variáveis de decisão.

2.4 Restrições e função objetivo

As restrições estão formuladas de forma a que cada vértice apenas esteja ligado a um outro vértice. Assim é assegurada a condição de que todos os vértices têm grau par, exceto os vértices de partida e chegada, e de que há o menor número de novas ligações possíveis, de forma a cumprir os requisitos da solução ótima.

A função objetivo contém os custos de todas as arestas a serem possivelmente replicadas ou criadas, permitindo minimizar a distância percorrida pelo drone. Em consequência, através das ligações de menor custo, é possível deduzir um caminho *Euleriano* a selecionar e a sua distância total.

3 Modelo do Problema

3.1 Variáveis de decisão

Xi_j expressa a possibilidade de adicionar arestas ao grafo, de modo a torná-lo *Semi-Euleriano*, tendo por isso os seus pares apenas vértices de grau ímpar, com exceção do ponto *I e *F que têm grau par. Além disso não é ainda possível que i = j, por não representar uma aresta válida, nem arestas repetidas, ou seja, caso exista X1_2, não existirá X2_1, uma vez que ambas representam a mesma aresta. Para representar esta possibilidade utilizamos então variáveis binárias, sendo que 1 corresponde a uma aresta selecionada e 0 a uma aresta não selecionada.

$$Xi\_j = \begin{cases} 1, & \text{se os vértices i e j estão emparelhados.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

```
/* Variáveis De Decisão */
bin
xI_1    xI_2    xI_3    xI_4    xI_7    xI_9    xI_10   xI_11   xI_12   xI_13   xI_F
x1_2    x1_3    x1_4    x1_7    x1_9    x1_10   x1_11   x1_12   x1_13   x1_F
x2_3    x2_4    x2_7    x2_9    x2_10   x2_11   x2_12   x2_13   x2_F
x3_4    x3_7    x3_9    x3_10   x3_11   x3_12   x3_13   x3_F
x4_7    x4_9    x4_10   x4_11   x4_12   x4_13   x4_F
x7_9    x7_10   x7_11   x7_12   x7_13   x7_F
x9_10   x9_11   x9_12   x9_13   x9_F
x10_11  x10_12  x10_13  x10_F
x11_12  x11_13  x11_F
x12_13  x12_F
x13_F;
```

Figura 3. Variáveis de decisão

3.2 Parâmetros

Os parâmetros são os dados do problema que não podem ser alterados. Neste caso estes dados são as distâncias euclidianas, Ci_j, entre todos os vértices e ainda o mapa que o drone irá percorrer, obtido através do maior número de aluno do grupo.

$$Ci\_j = \textit{custo da distância euclidiana entre i e j.}$$

3.3 Função objetivo

A função objetivo é de minimização, uma vez que queremos encontrar o emparelhamento de menor custo possível, sendo por isso necessário relacionar cada emparelhamento com o respetivo custo.

```
/* Função Objetivo */
min: 3 xI_1 + 4.24 xI_2 + 6.32 xI_3 + 8.25 xI_4 + 10 xI_7 + 10 xI_9 + 10.20 xI_10 + 11.18 xI_11 + 12.81 xI_12 + 7.21 xI_13 + 14.42 xI_F +
3 x1_2 + 6.08 x1_3 + 8.06 x1_4 + 8.54 x1_7 + 7 x1_9 + 7.28 x1_10 + 8.60 x1_11 + 10.63 x1_12 + 5 x1_13 + 12.04 x1_F +
 3.16 x2_3 + 5.10 x2_4 + 5.83 x2_7 + 7.62 x2_9 + 7.07 x2_10 + 7.28 x2_11 + 8.60 x2_12 + 3.16 x2_13 + 10.30 x2_F +
 2 x3_4 + 4.47 x3_7 + 10 x3_9 + 8.94 x3_10 + 8.06 x3_11 + 8.25 x3_12 + 4.47 x3_13 + 10.20 x3_F +
 4 x4_7 + 11.31 x4_9 + 10 x4_10 + 8.54 x4_11 + 8 x4_12 + 5.66 x4_13 + 10 x4_F +
 8.94 x7_9 + 7.21 x7_10 + 5 x7_11 + 4 x7_12 + 4 x7_13 + 6 x7_F +
 2 x9_10 + 5 x9_11 + 8 x9_12 + 5.66 x9_13 + 8.25 x9_F +
 3 x10_11 + 6 x10_12 + 4.47 x10_13 + 6.32 x10_F +
 3 x11_12 + 4.12 x11_13 + 3.61 x11_F +
 5.66 x12_13 + 2 x12_F +
 7.21 x13_F;
```

Figura 4. Função objetivo

3.4 Restrições

As restrições do problema devem assegurar que cada vértice apenas está emparelhado com um outro vértice. Isso significa que, caso os vértices 1 e 2 estejam emparelhados, os seus restantes emparelhamentos deverão ser iguais a 0.

```
/* Restrições */
xI_1 + xI_2 + xI_3 + xI_4 + xI_7 + xI_9 + xI_10 + xI_11 + xI_12 + xI_13 + xI_F = 1;
xI_1 + x1_2 + x1_3 + x1_4 + x1_7 + x1_9 + x1_10 + x1_11 + x1_12 + x1_13 + x1_F = 1;
xI_2 + x1_2 + x2_3 + x2_4 + x2_7 + x2_9 + x2_10 + x2_11 + x2_12 + x2_13 + x2_F = 1;
xI_3 + x1_3 + x2_3 + x3_4 + x3_7 + x3_9 + x3_10 + x3_11 + x3_12 + x3_13 + x3_F = 1;
xI_4 + x1_4 + x2_4 + x3_4 + x4_7 + x4_9 + x4_10 + x4_11 + x4_12 + x4_13 + x4_F = 1;
xI_7 + x1_7 + x2_7 + x3_7 + x4_7 + x7_9 + x7_10 + x7_11 + x7_12 + x7_13 + x7_F = 1;
xI_9 + x1_9 + x2_9 + x3_9 + x4_9 + x7_9 + x9_10 + x9_11 + x9_12 + x9_13 + x9_F = 1;
xI_10 + x1_10 + x2_10 + x3_10 + x4_10 + x7_10 + x9_10 + x10_11 + x10_12 + x10_13 + x10_F = 1;
xI_11 + x1_11 + x2_11 + x3_11 + x4_11 + x7_11 + x9_11 + x10_11 + x11_12 + x11_13 + x11_F = 1;
xI_12 + x1_12 + x2_12 + x3_12 + x4_12 + x7_12 + x9_12 + x10_12 + x11_12 + x12_13 + x12_F = 1;
xI_13 + x1_13 + x2_13 + x3_13 + x4_13 + x7_13 + x9_13 + x10_13 + x11_13 + x12_13 + x13_F = 1;
xI_F + x1_F + x2_F + x3_F + x4_F + x7_F + x9_F + x10_F + x11_F + x12_F + x13_F = 1;
```

Figura 5. Restrições

4 Interpretação da Solução Ótima

4.1 Solução ótima

Através da utilização do *LPSolve*, obtivemos a tabela (Figura 6), que nos permite saber quais as arestas que devem ser acrescentadas, de modo a que todos os vértices, com exceção do *I e *F que deverão ter grau ímpar, sejam de grau par e, consequentemente, obter a solução ótima.

As variáveis com valor 1 correspondem à duplicação das arestas que compõem o caminho mais curto entre os vértices de cada par. As variáveis com valor 0 não fazem parte da solução ótima.

Variables	MILP ...	result
	17,16	17,16
xI_1	1	1
x2_13	1	1
x3_4	1	1
x7_11	1	1
x9_10	1	1
x12_F	1	1
xI_2	0	0
xI_3	0	0
xI_4	0	0
xI_7	0	0
xI_9	0	0

⋮

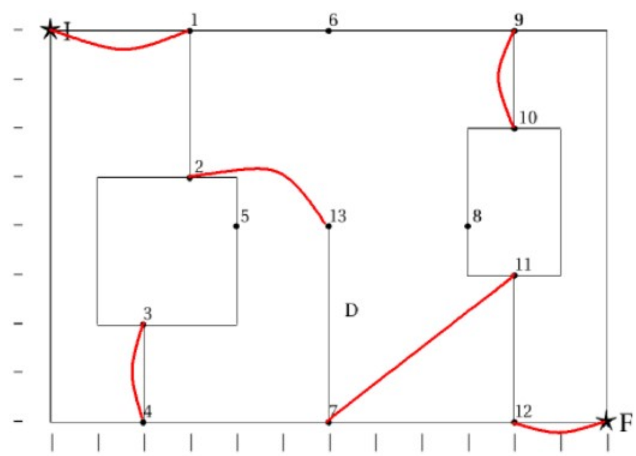

Figura 6. Solução ótima obtida no LPSolve com o grafo ótimo ao lado

Através da tabela mencionada anteriormente foi possível obter um grafo onde se pode verificar que todos os seus vértices são de grau par, exceto o *I e o *F que são de grau ímpar, concluindo-se assim que se trata de um grafo *Semi-Euleriano*.

As arestas a vermelho correspondem às arestas representadas pelo valor 1 na tabela da Figura 6, ou seja, correspondem a arestas duplicadas ou criadas.

4.2 Percurso

Através da solução ótima obtida é possível verificar que existem inúmeras possibilidades de percursos a efetuar que percorram todas as arestas.

Um possível percurso seria:

$$\mathrm{I} \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 13 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow I \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 12 \rightarrow F$$

4.3 Distância total percorrida

Para calcular a distância total percorrida é necessário ter em consideração a distância percorrida nas linhas de alta tensão e o custo de percorrer as arestas duplicadas ou criadas.

A distância percorrida nas linhas de alta tensão corresponde a:

$$10 + 2 + 6 + 2 + 4 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 2 + 3 + 5 + 2 + 10 + 2 = 73$$

O custo de percorrer as arestas duplicadas ou criadas corresponde ao valor obtido no *LPSolve*. Assim, a distância total percorrida é:

$$73 + 17.16 = 90.16$$

5 Validação do Modelo

É necessário agora validar o modelo obtido, garantindo assim que a solução é admissível e adequada ao sistema real.

Através da imagem do lado direito da figura 6 torna-se fácil perceber que todas as restrições foram respeitadas, como se pode perceber pelos emparelhamentos escolhidos, pois para cada vértice foi escolhido apenas um arco.

Constraints	MILP ...	result
	17,16	17,16
R1	1	1
R2	1	1
R3	1	1
R4	1	1
R5	1	1
R6	1	1
R7	1	1
R8	1	1
R9	1	1
R10	1	1
R11	1	1
R12	1	1

Figura 7. Resultado das Restrições

Provamos também que a solução ótima é admissível pois a distância percorrida pelo drone não é nula nem negativa e também é superior à soma do comprimento de todas as arestas do grafo inicial.

$$\text{Distância Percorrida} = 90.16 \text{ (Capítulo 4.3)}$$
$$\text{Soma das arestas} = 73$$

É possível também verificar que a solução é adequada a realidade do problema, pois esta permite que o drone faça um caminho contínuo e fluído, respeitando o critério da minimização da distância percorrida pelo drone.

6 Conclusão

Dado por concluído o primeiro trabalho prático desta unidade curricular, consideramos importante realçar todos os pontos positivos e negativos, e ainda, efetuar uma análise crítica final do trabalho realizado.

Para atingirmos este objetivo, o grupo teve de passar por algumas dificuldades, principalmente com o desenvolvimento das restrições. Portanto, o grupo considera que termos conseguido, depois de várias tentativas, alcançar a melhor solução ótima com o menor número de variáveis de decisão possível e com todas as restrições impostas respeitadas é um ponto bastante positivo no nosso projeto.

O grupo considera que a realização deste trabalho prático foi fundamental para melhorar a capacidade de formular e modelar problemas deste tipo.

Para concluir, consideramos que o projeto realizado é positivo, dado que cumpre com todos os requisitos propostos.