Instituto Federal de Santa Catarina

Engenharia de Telecomunicações - Processamento de Sinais Digitais

Professor: Marcos Moecke

Aluno: André Felippe Weber

Relatório do AE1 - Projeto de Filtros Digitais IIR

RESUMO

Este relatório visa demonstrar os cálculos necessários para desenvolver um filtro passa-baixas (*Low Pass* - LP) do tipo Chebyshev I e um filtro passa faixa (*Band Pass* - BP) do tipo Butterworth. Assim como, apresentar e os resultados obtidos no cálculo da ordem dos filtros, pólos, protótipo H(p), Filtro analógico H(s) e Filtro digital H(z) representando-os graficamente, com o auxílio do software Matlab.

Introdução

Este relatório descreve passo a passo como projetar um filtro passa-baixas (*Low Pass* - LP) do tipo Chebyshev I e um filtro passa faixa (*Band Pass* - BP) do tipo Butterworth. Nos dois casos, as etapas seguidas para calcular o filtro desde o protótipo até o filtro digital são as mesmas, mudando apenas as fórmulas utilizadas em cada caso.

Portanto, será demonstrado que para projetar um filtro é necessário primeiramente calcular a ordem deste e os seus pólos utilizando fórmulas que podem ser encontradas no capítulo 4 do livro *Introduction to Digital Signal Processing Filter Design* (B.A. Shenoi, 2006), para que seja, então, possível criar um protótipo analógico LP H(p) de cada filtro.

Com o protótipo calculado, é possível encontrar a função transferência H(s) para o filtro final desejado. No caso deste projeto, um filtro LP do tipo Chebyshev I na primeira etapa e um BP do tipo Butterworth na segunda etapa. E então, finalmente, utilizando a transformação bilinear a passagem do filtro analógico H(s) para digital H(z) é demonstrada e todos os filtros e seus pólos podem ser plotados utilizando o software Matlab.

Passa baixa do tipo Chebyshev I

1. Especificações

Para que seja possível projetar o filtro algumas informações são necessárias, como por exemplo as frenqûencia de passagem(W_p) e de rejeição(W_s) . Para este projeto, as seguintes informações serão consideradas:

A_p	A_s	G_p	W_p	W_s
1 dB	35 dB	0 dB	0.4	0.8

Tabela 2 - Especificações para um passa baixa do tipo Chebyshev I .

Onde:

A_p - Atenuação máxima na banda de passagem (dB);
A_s - Atenuação mínima na banda de rejeição (dB);
G_p - Ganho médio na banda de passagem (dB).

2 Filtro protótipo H(p)

Um filtro protótipo tem como característica ser passa baixas e possuir frequência de corte igual a 1 (um). Portanto, para iniciar o projeto do protótipo as frequências e magnitudes devem ser normalizadas de modo a obter a frequência de corte unitária.

2.1. Cálculo da ordem do filtro

A ordem de um filtro determinará a atenuação que ele terá, isto é, quanto maior a ordem, mais abrupta será a queda após a frequência de corte [1] e o filtro se torna mais seletivo, conforme ilustrado na Figura 1.

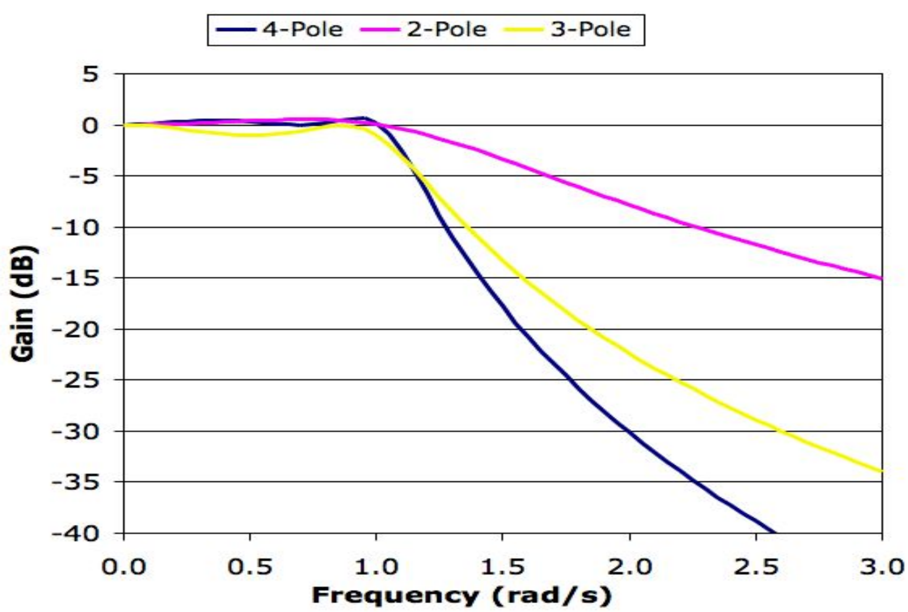

Figura 1 - Atenuação. Disponível em: <http://alignment.hep.brandeis.edu/Lab/Filter/Filter.html
> Acesso em out. 2016.

Neste projeto foi obtido um filtro de ordem 3 calculado com a Fórmula 1 que é a utilizada para o encontrar a ordem de um protótipo do tipo Chebyshev I:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{(10^{(As/10)}-1)/(10^{(Ap/10)}-1)}}{\cosh^{-1} os}$$

Fórmula 1.

Cálculo para matlab:

```
n = ceil(acosh(sqrt((10^(As/10) - 1)/(10^(Ap/10)-1)))/acosh(os));
```

Onde:

n será a ordem do filtro;

A_s é a atenuação em dB na frequência de *stopband;*

A_p é a atenuação em dB na frequência de passagem;

os é frequência de rejeição do filtro protótipo encontrado de acordo com as equações da fórmula 2.

$$\lambda p = 2 \times \tan(\omega p/2);$$

Fórmula 2a.

$$\lambda s = 2 \times \tan(\omega s/2);$$

Fórmula 2b.

$$os = \lambda s/\lambda p;$$

Fórmula 2c.

Cálculo para matlab:

```
ls = 2*tan(ws/2);
lp = 2*tan(wp/2);
os = ls/lp;
```

2.2. Cálculo dos Pólos e zeros

A ordem do filtro está diretamente relacionado com os seus pólos já que o número de pólos de um filtro será igual a ordem dele e quanto mais seletivo é o filtro mais os pólos se aproximam do eixo imaginário.

Os resultados dos cálculos feitos para encontrar os pólos do protótipo H(p) deste projeto estão representados graficamente na Figura 1 e foram calculados de acordo com a Fórmula 3.

$$Pk = -\sinh(\phi_2)\times\sin(\phi_1)+j\cosh(\phi_2)\times\cos(\phi_1)$$

Fórmula 3.

Onde :

n = é a ordem do filtro;

k = 1, 2, 3, . . ., n;

ε controla a máxima variação (ripple) na banda de passagem e é calculado de acordo com a Fórmula 4

$$\epsilon = \sqrt{10^{Ap/10} - 1}$$

Fórmula 4.

$$\phi_1 = \frac{(2k-1) \times \pi}{2n}$$

Fórmula 5.

$$\phi_2 = \frac{1}{n} \times \sinh^{-1}\left(\frac{q}{\epsilon}\right)$$

Fórmula 6.

Cálculo para matlab:

```
epsilon = sqrt(10^(Ap/10)-1);
fi2 = (1/n)*asinh(1/epsilon);
for k =[1:n]
    fi1 = ((2*k-1)*pi)/(2*n);
    pk(k) = -sinh(fi2)*sin(fi1) + 1j*cosh(fi2)*cos(fi1);
end
```

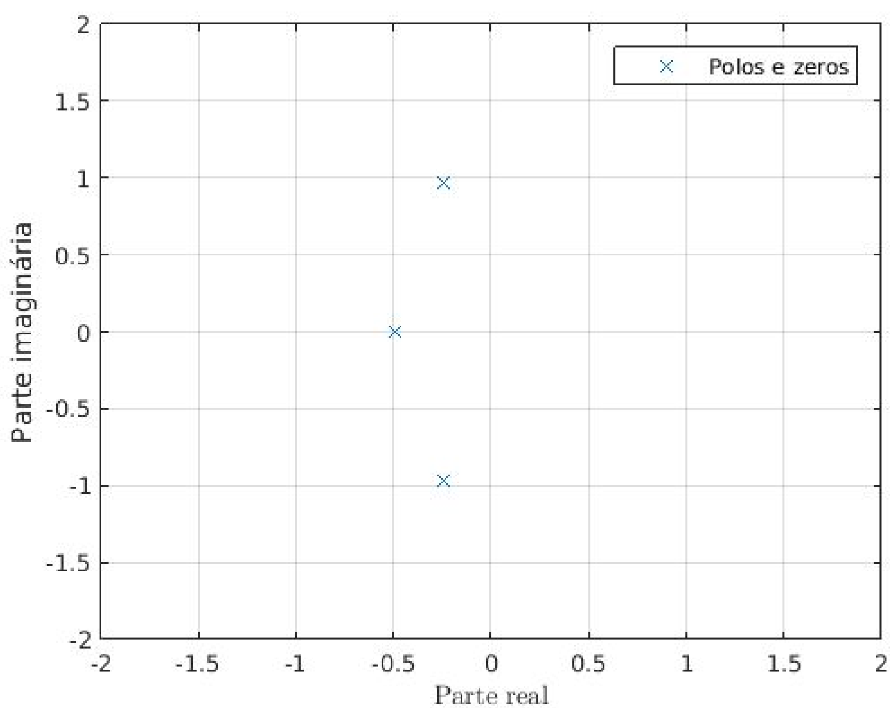

Figura 2 - Pólos e zeros

Na Figura 1 é possível observar os 3 pólos calculados (-0.24709 + 0.96600i, -0.49417 + 0.00000i e -0.24709 - 0.96600i) utilizando a Fórmula 3 já os zeros estão no infinito, e portanto não são representados. É válido lembrar que para um filtro ser estável todos os pólos devem estar no semi-plano esquerdo[2].

2.3 Obtenção da função H(p)

Utilizando os pólos encontrados anteriormente é possível criar o denominador polinomial D(p) do protótipo utilizando a fórmula 7 e então aplicá-lo na fórmula 8.

$$D(p) = \prod_{(k=1)}^{n} (p - pk)$$

Fórmula 7

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Fórmula 8

Para o protótipo sendo calculado o denominador D(p) encontrado é:

$$D(p) = 1.00000p^3 + 0.98834p^2 + 1.23841p + 0.49131$$

O numerador pode ser encontrado calculando-se o módulo do produtório dos polos:

$$N(p) = 0.49131$$

Cálculo para matlab:

```
D = real(poly(pk));
N = abs(prod(pk));
%Hp
Hp(p) = N./poly2sym(D, p);
```

Aplicando a fórmula 8 o seguinte protótipo pode ser plotado utilizando o software Matlab:

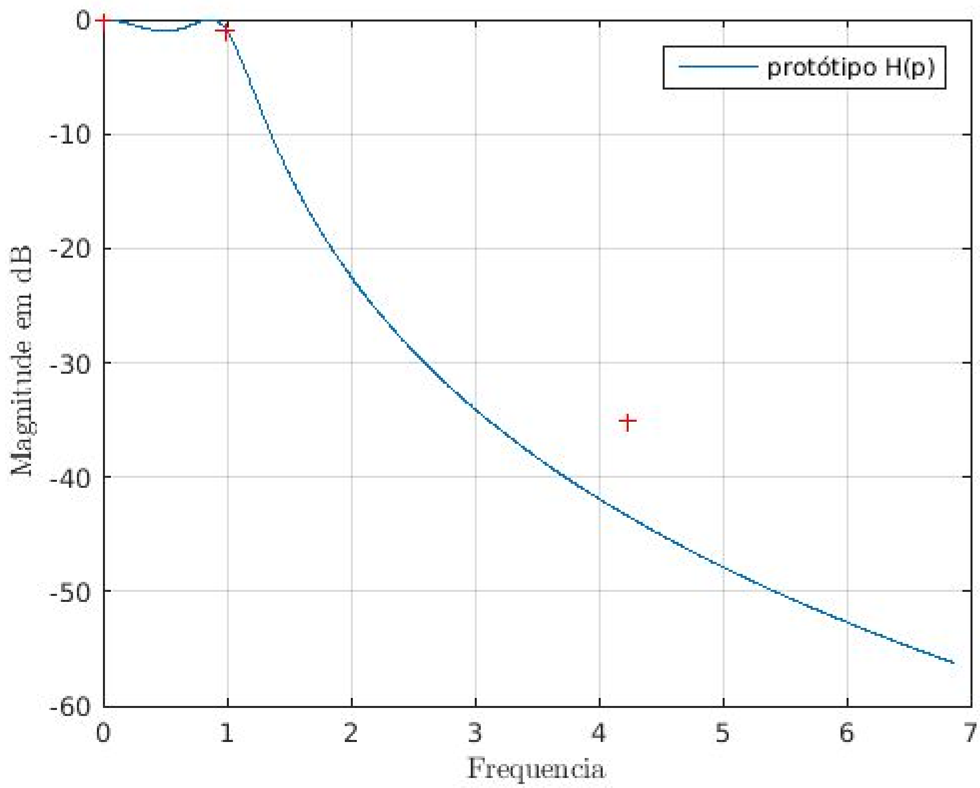

Figura 3 - Protótipo H(p)

É possível observar que a frequência de corte está em 1 e frequência de rejeição do filtro protótipo calculado utilizando a Fórmula 2 são mostrados em vermelho.

3. Função transferência H(s)

Com o protótipo calculado é preciso fazer a transformação em frequência do filtro H(p) para encontrar a função transferência H(s). Isto é feito substituindo a variável ‘p’ do protótipo H(p) pela função $g(s) = \frac{S}{\omega p}$, isto é, $H(\left(\frac{S}{\omega p}\right)$ para fazer a transformação LP-LP. Simplificando e plotando o gráfico, o filtro da Figura 3 é obtido. Pode-se observar que as frequências foram restauradas com a substituição de ‘p’ por g(s).

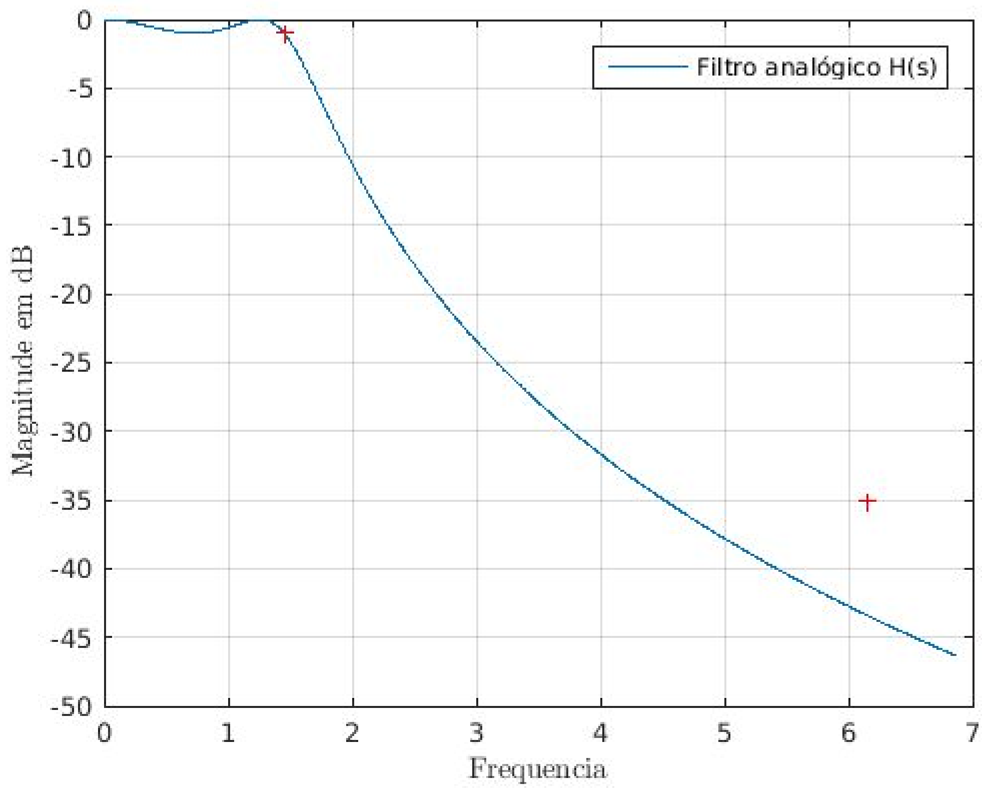

Figura 3 - Filtro analógico H(s)

Este passo conclui o projeto de um filtro analógico, porém, haverá ainda uma transformação deste filtro em um filtro digital.

4. Filtro digital H(z)

A forma mais utilizada para transformar H(s) em H(z) durante o projeto de filtros IIR (*Infinite Impulse Response*) é a transformação bilinear[3] definida na Fórmula 9 que substitui o ‘s’ de H(s) por uma equação em razão de $z = e^{j\omega T}$.

$$s = 2 \times \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$$

Fórmula 9.

Cálculo para matlab:

Hz(z) = Hs(2*(z-1)/(z+1));

Aplicando a transformação bilinear na função transferência H(s) encontrada anteriormente e plotando o filtro utilizando Matlab (Figura 4) é possível observar a variação característica do Chebyshev I na banda de passagem respeitando o valor de A_p e tendo 3 picos de máximo (Mesmo número da ordem do filtro). O filtro então começa a atenuar exatamente em cima frequência de passagem e passa com folga pela frequência de rejeição.

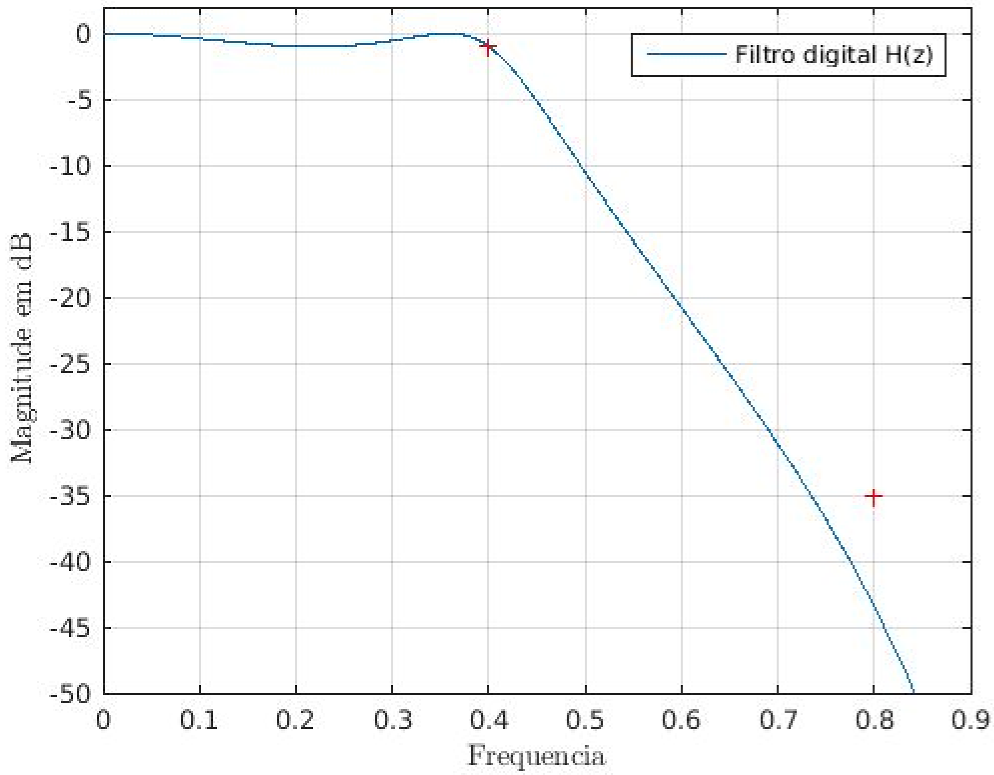

Figura 4 - Filtro digital H(z)

Passa faixa do tipo Butterworth

1. Especificações

As especificações assim como o processo de desenvolvimento do filtro é parecido com o feito anteriormente para o LP Chebyshev I alterando-se apenas algumas fórmulas utilizadas e, por ser um filtro passa faixa, a quantidade de frequências de passagem e rejeição.

A_p	A_s	G_p	W_{p1}	W_{p2}	W_{s1}	W_{s2}
0.1 dB	20 dB	-3 dB	0.3	0.4	0.2	0.6

Tabela 2 - Especificações para um passa faixa do tipo Butterworth.

2 Filtro protótipo H(p)

Assim como no LP Chebyshev o filtro protótipo será um passa baixas e possuirá frequência de corte igual a 1 (um). Portanto, para iniciar o projeto do protótipo as frequências e magnitudes devem ser normalizadas de modo a obter a frequência de corte unitária.

2.1. Cálculo da ordem do filtro

Utilizando a fórmula 10 para calcular a ordem do filtro Butterworth com as especificações dadas para este projeto resulta em um n ≥ 4.

$$n \geq \frac{\log\left((10^{(As/10)} - 1)/(10^{(Ap/10)} - 1)\right)}{2 \times \log os}$$

Fórmula 10.

Cálculo para matlab:

n = ceil(log10((10^(As/10)-1)/(10^(Ap/10)-1))/(2*log10(os)))

Onde:

n será a ordem do filtro;

A_s é a atenuação em dB na frequência de *stopband;*

A_p é a atenuação em dB na frequência de passagem;

os é frequência de rejeição do filtro protótipo encontrado de acordo com a Fórmula 11, que utiliza as frequências de acordo com a Fórmula 2c.

$$os = abs\left(\frac{1}{B} \times \frac{\left(\omega_0{}^2 - \frac{ls_1{}^2}{ls_1}\right)}{ls_1}\right)$$

Fórmula 11.

Cálculo para matlab:

os = abs((1/B)*(((w0^2)-(ls1^2))/ls1));

2.2. Cálculo dos Pólos e zeros

Os resultados dos cálculos feitos para encontrar os pólos do protótipo H(p) deste projeto estão representados graficamente na Figura 1 e foram calculados de acordo com a Fórmula 12.

$$Pk = \epsilon^{-1/n} \exp\left[j \times \frac{2k + n - 1}{2n} \times \pi\right]$$

Fórmula 12.

Analisando os pólos da Figura 1 é possível observar que eles se distribuem de uma maneira menos elíptica neste tipo de filtro se comparado aos do tipo Chebyshev I. Estão representados neste gráfico os 4 pólos calculados (-0.61226 + 1.47813i, -1.47813 + 0.61226i, -1.47813 - 0.61226i e -0.61226 - 1.47813i) já os zeros, como aconteceu no primeiro filtro, estão no infinito, e portanto não são representados.

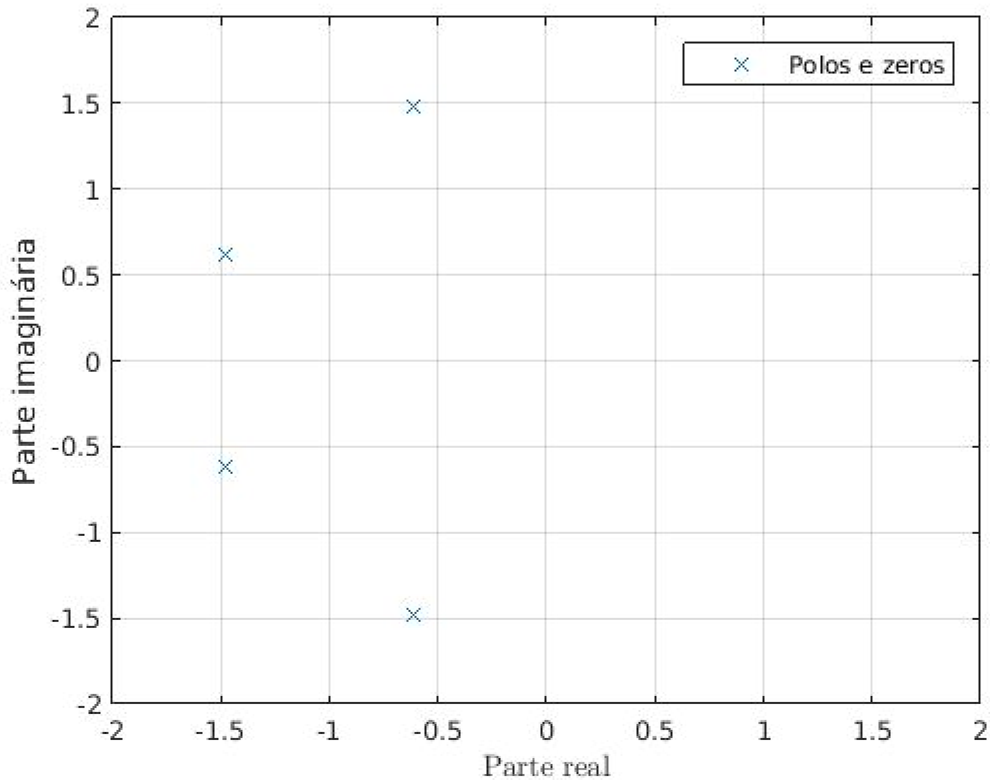

Figura 5 - Pólos e zeros

2.3 Obtenção da função H(p)

O denominador pode ser encontrado utilizando-se novamente a fórmula 7 já o numerador deverá ser multiplicado por H0 pois o ganho dado é igual a -3 e não zero, onde H0 = $10^{Gp/20}$. Para o protótipo sendo calculado o denominador D(p) encontrado é:

$$D(p) = 1.0000p^4 + 4.1808p^3 + 8.7395p^2 + 10.7017p + 6.5522$$

O numerador pode ser encontrado calculando-se o módulo do produtório dos polos:

$$N(p) = 4.6386$$

Cálculo para matlab:

```
D = real(poly(pk));
N = abs(prod(pk))*H0;;

%Hp

Hp(p) = N./poly2sym(D, p);
```

Aplicando o nominador e o denominador encontrados na fórmula 8 resulta no seguinte grafico:

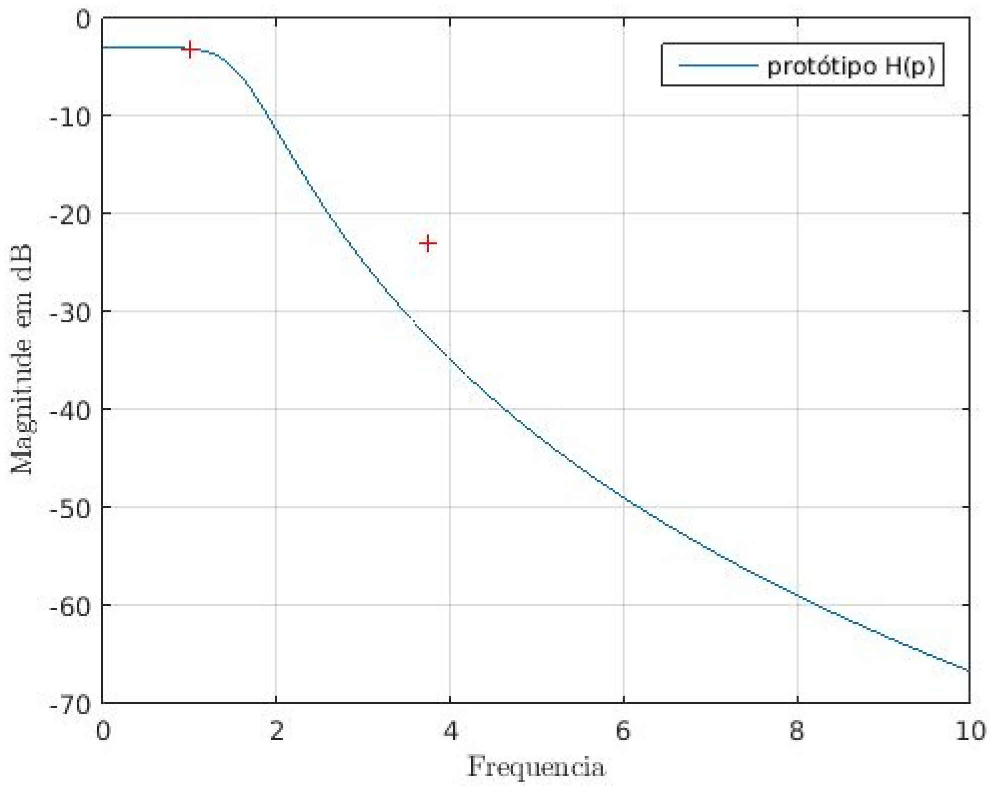

Figura 6 - Protótipo H(p)

É possível observar que a frequência de corte está em 1 e frequência de rejeição do filtro protótipo calculado utilizando a Fórmula 2 são mostrados em vermelho. Também é interessante ressaltar que mesmo calculando um filtro passa faixas o protótipo sempre será do tipo passa baixa.

3. Função transferência H(s)

Com o protótipo calculado é preciso fazer a transformação em frequência do filtro H(p) para encontrar a função transferência H(s) da mesma forma como ocorreu no projeto do filtro LP. Porém a variável 'p' do protótipo H(p) deverá ser substituída pela função $g(s) = \frac{1}{B} * \left[\left(s^2 + \omega_0^2\right)/s\right]$, isto é, H($\frac{1}{B} * \left[\left(s^2 + \omega_0^2\right)/s\right]$) para fazer a transformação LP-BP onde B é a banda de passagem do filtro especificado ($B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$) e $\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1} * \omega_{p2}}$. O filtro analógico resultante (Figura 7) passa exatamente por cima dos pontos de frequência de passagem e com pouca folga pelo primeiro ponto de frequência de rejeição porém com bastante folga pelo segundo ponto W_s.

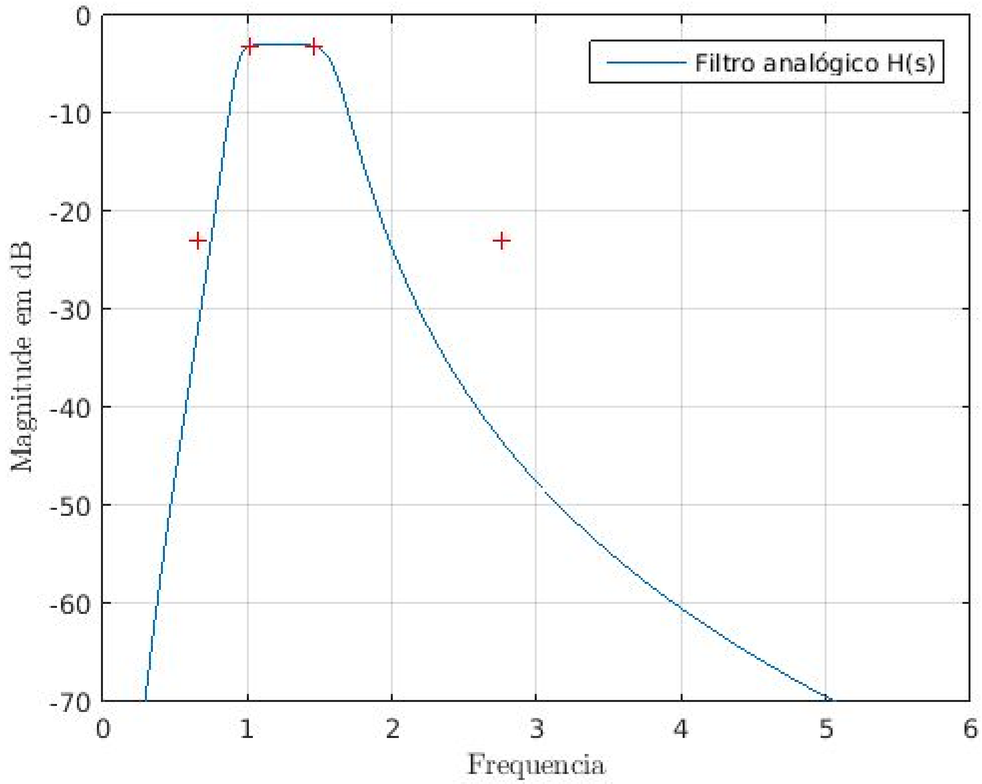

Figura 7 - Filtro analógico

4. Filtro digital H(z)

Para realizar a mudança do filtro analógico H(s) em um filtro digital H(z) a transformação binomial (Fórmula 9) é novamente utilizada gerando o filtro da Figura 8. É possível observar que ao contrário do que ocorre no filtro Chebyshev I no Butterworth quase não há variação na banda de passagem. Isto pode ser observado também no comportamento constante do filtro na banda de passagem. E, finalmente, como já ocorria no filtro analógico há um certa folga nas duas bandas de rejeição

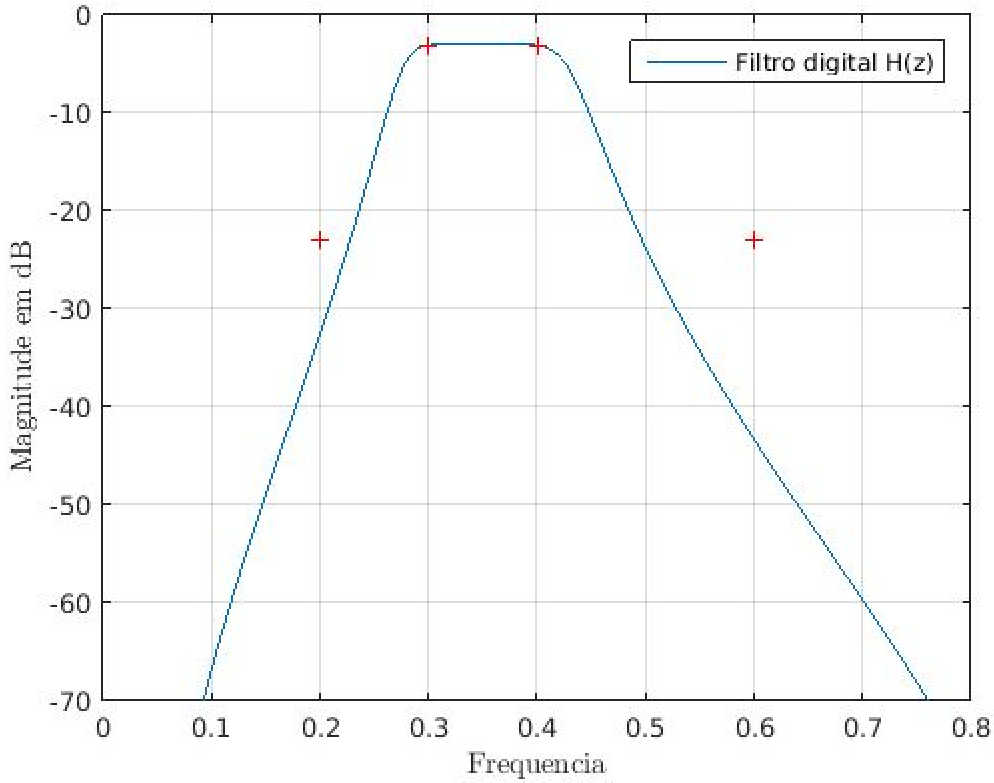

Figura 8 - Filtro digital

Referências

1 - IAZZETTA, Fernando. **Filtros.** Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/audio/filtros/filtros.html>. Acesso em: 10 out. 2016.

2 - DIAS, Prof. Dr. Morgado. **filtros1.pdf.** Madeira, 2006. Color. Disponível em: <http://cee.uma.pt/edu/el2/acetatos/filtros1.pdf>. Acesso em: 10 out. 2016.

3 - B.A, SHENOI **Introduction to signal processing and filter design.** New Delhi: Wiley-indian, 2006.

4 - BOAVENTURA, Prof. Wallace do Couto. **FILTROS ANALÓGICOS.** Minas Gerais. Color. Disponível em: <http://www.cpdee.ufmg.br/~wventura/procsin/1sem2011/Filtros analogicos-1.pdf>. Acesso em: 10 out. 2016.