Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Geometrie

Bachelorarbeit

Der Vier-Farben-Satz

Andre Löffler

Abgegeben am DD.month.YYYY

Betreuer:
Dr. Theo Grundhöfer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Formulierung des Vier-Farben Satzes geht auf eine Beobachtung zurück, die Francis Guthrie im Jahr 1852 machte. Francis Guthrie war gelernter Jurist, Hobbybotaniker und Mathematiker. Als er versuchte, eine Landkarte der Grafschaften Englands zu illustrieren und kam zu einer recht anschaulichen Vermutung, die Mathematiker 150 Jahre lang beschäftigen sollte.
Francis' Bruder Frederick Guthrie wand sich am 23. Oktober 1852 mit diesem Problem an seinen Lehrer Augustus de Morgan, der zu dieser Zeit am University College in London unterrichtet.[1]
Fasziniert von dieser Problematik schrieb de Morgan einen Brief an Sir William Rowan Hamilton. Dieser Notiz ist die erste schriftliche Formulierung des Vierfarbenproblems zu entnehmen:

Satz 1.1 (historische Formulierung):
A student of mine asked me to day to give him reason for a fact which I did not know was a fact, and do not yet. He says, that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary <u>line</u> are differently coloured – four colours may be wanted but not more. The following is his care in which four <u>are</u> wanted. [...]
Query cannot a necessity for five or more be invented. As far as I see at this moment, if four <u>ultimate</u> compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them inclose the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for colour meeting colour except at a point. [Fri94]

Die ursprüngliche Fragestellung lautet also: Kann man eine beliebige Landkarte so einfärben, dass keine zwei benachbarten Länder die gleiche Farbe haben, wenn man die Farbpalette auf vier Farben beschränkt? Eine Landkarte lässt sich als mathematisches Konstrukt auffassen, jedoch bedarf es dazu einiger Überlegungen. R. und G. Fritsch definieren eine Landkarte $\mathcal{L}$ als "[...] eine endliche Menge von Jordanbögen in der Ebene $\mathbb{R}^2$ derart, dass der Durchschnitt von je zwei verschiedenen Jordanbögen in $\mathcal{L}$ entweder leer oder ein gemeinsamer Randpunkt dieser Jordanbögen ist." [Fri94]
Diese erscheint auf den ersten Blick eigenartig, benutzt sie keines der zu erwartenden Worte wie "Land" oder "Grenze".

[1] Um alle beteiligten Personen, ihre Lebensläufe und ihr Zusammenwirken besser kennenzulernen empfiehlt sich die Lektüre des ersten Kapitels von [Fri94]

Die historische Formulierung wirkt nach heutigen Maßstäben etwas geschwollen und ist sprachlich nicht mehr zeitgemäß. Heute werden Aussagen zumeist prägnanter abgefasst. Bei [Fri94] findet man eine aktuelle Variante auf Seite 87:

Satz 1.2 (topologische Formulierung):
Es seien $\mathcal{L}$ eine Landkarte und $n \in \mathbb{N}$. Eine *n-Färbung* von $\mathcal{L}$ ist eine Abbildung $\varphi : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \to \{1, \cdots, n\}$. Eine n-Färbung ist *zulässig*, wenn benachbarte Länder immer verschiedene Werte ("Farben") haben.

Um dies korrekt erfassen und schließlich auch beweisen zu können, werden topologische Resultate wie der Jordansche Kurvensatz zu Rate gezogen. Diese wiederum erfordern zahlreiche Vorüberlegungen, die sich sehr umfangreich gestalten und wenig zum eigentlichen Beweis beitragen. Stattdessen werden wir eine andere Formulierung des Vier-Farben-Satzes benutzen, die kombinatorisch motiviert ist.

Satz 1.3 (Graphentheoretische Formulierung):
Jeder planare Graph ohne Schleifen ist 4-färbbar.

Diese Variante wirft einige Fragen nach Begrifflichkeiten auf, welche jedoch bei genauerer Betrachtung leicht verständlich sind. Im nächsten Abschnitt werden wir uns zunächst den allgemeinen Definitionen widmen, die nötig sind um diese Problematik graphentheoretisch angehen zu können. Danach werfen wir einen Blick auf den älteren Beweis von Appel und Haken, um den Ausgangspunkt für die Arbeit von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas darzulegen. Im Anschluss werden wir diese Arbeit nachvollziehen, indem die wesentlichen Schritte, die "Reduktion" und die "Zwangsläufigkeit", genauer beleuchtet werden. Abschließend werden noch einige Umformulierungen und Anwendungen des Vier-Farben-Satzes diskutiert.

2 Definitionen

Um über die Färbbarkeit von Graphen reden zu können, müssen zuerst einige gebräuchliche Definitionen gemacht werden.

Definition 1 (endlicher Graph, Knoten, Kante):
Ein *endlicher Graph* G ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine endliche Menge bestehend aus Knoten und E eine endliche Menge bestehend aus Kanten sind. Ein *Knoten* $v \in V$ ist ein Punkt im Raum. Eine *Kante* $e \in E$ ist eine zweielementige Teilmenge von V, wobei E die Menge aller dieser Teilmengen ist, also $E = \{\{u, v\} | u, v \in V\}$.

Im weiteren wird jeder Graph endlich sein, außer es wird explizit angegeben. Um nun Bedingungen an die Färbbarkeit von Knoten stellen zu können, muss noch definiert werden, wie diese zusammenhängen.

Definition 2 (Inzidenz, Adjazenz, Knotengrad):
Ein Knoten $v \in V$ heißt *inzident* zu einer Kante $e \in E$, wenn mindestens einer der Endpunkte von e der Knoten v ist. Zwei Knoten u, v heißen *adjazent*, wenn sie zur gleichen Kante inzident sind. Für einen Knoten v ist der *Grad* von v definiert als die Anzahl der Kanten, die zu v inzident sind. Es gilt $d_G(v) = \sharp\{\{a, b\} \in E | a = v \wedge b = v\}$.

Definition 3 (Schleife):
Eine Schleife ist eine Kante, deren beide Endpunkte der gleiche Knoten sind.

Schleifen müssen bei Färbbarkeitsüberlegungen ausgeschlossen werden, denn könnte ein Knoten zu sich selbst benachbart sein, wäre es nicht möglich, für benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben zu wählen.

Da das Problem der 4-färbbarkeit von Graphen von der Geographie motiviert ist, betrachten wir als Raum für unsere Knoten nur den $\mathbb{R}^2$, also die Ebene.

Definition 4 (Planarität):
Ein Graph heißt *planar*, wenn er sich so in die Ebene einbetten lässt, dass sich zwei Kanten höchstens in ihrem gemeinsamen Endpunkt schneiden.

In der Ebene ist es leicht, die durch die Kanten getrennten Flächen zu betrachten. Das führt uns zur folgenden Definitionen.

Definition 5 (Facette, Außenfacette):
Eine Fläche in der Ebene heißt *Region* oder *Facette*, falls sie vollständig von Kanten eingeschlossen ist. Die Endknoten der Kanten, die die Region umfassen heißen ebenfalls inzident zu dieser Region. Der unbeschränkte Rest der Ebene, der von keiner Menge von Kanten vollständig umschlossen ist, wird *Außenfacette* genannt.

Für unsere Betrachtungen ist eine besondere Formen von Facetten interessant.

Definition 6 (Dreieck, Triangulation, Beinahe-Triangulation):
Eine Region ist genau dann ein *Dreieck*, wenn genau drei Knoten zu ihr inzident ist. Ein planarer Graph ist eine *Triangulation*, wenn er schleifenfrei und jede seiner Facetten ein Dreieck ist. Eine *Beinahe-Triangulation* ist ein nichtleerer, schleifenfreier, planarer Graph G, bei dem jede endliche Facette ein Dreieck ist.

Zeichnet man die Kanten eines planaren Graphen als gerade Linien, so entspricht diese Definition genau dem, was man sich unter einem Dreieck vorstellt. Der Unterschied zwischen einer Triangulation und einer Beinahe-Triangulation liegt lediglich in der Form der Außenfacette des Graphen.

Definition 7 (Färbung, Farben, Gültigkeit):
Eine *Färbung* $f : V \to C \subset \mathbb{N}^0$ ist eine Abbildung, die jedem Knoten eines Graphen ein Element der endlichen Teilmenge $C = \{[0, n] \subset \mathbb{N} | n \in \mathbb{N}\}$ der natürlichen Zahlen zuordnet. Die Elemente von C nennt man *Farben*. Eine Färbung heißt *gültig*, wenn sie keinem Paar adjazenter Knoten $u, v \in V$ die gleiche Farbe zuordnet, also $c(u) \neq c(v)$.

Definition 8 (k-Färbbarkeit):
Ein Graph G heißt *k-färbbar*, wenn für eine gültige Färbung von G höchstens k Farben nötig sind. Insbesondere gilt dann: $\forall v \in V : f(v) < k$.

Einiges Handwerkszeug ist noch nötig, um Strukturen prägnant und kurz beschreiben zu können.

Definition 9 (Teilgraph $G \setminus X$, $G \setminus Y$):
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $X \subseteq V$ eine Teilmenge der Knoten und $Y \subseteq E$ eine Teilmenge der Kanten. Der Graph $G \setminus X = (E \setminus X, V)$ unterscheidet sich von G derart, dass alle Knoten der Menge X und alle zu diesen Knoten adjazenten Kanten gelöscht werden. Ebenso ist $G \setminus Y = (V, E \setminus Y)$ der Graph, bei dem alle Kanten aus Y entfernt wurden.

Definition 10 (Kreis):
Ein Graph G heißt *Kreis*, wenn er nicht leer ist und für jeden Knoten $v \in V(G)$ gilt: $d_G(v) = 2$.

3 Übergang zwischen Topologie und Kombinatorik

Zunächst müssen wir uns jedoch davon überzeugen, dass diese Aussagen auch tatsächlich äquivalent sind. Dazu hilft uns folgender Satz: topologische Formulierung

Satz 3.1 (test):
Der topologische Vier-Farben-Satz ist genau dann wahr, wenn jeder Graph eine zulässige 4-färbung besitzt.

4 Der Beweis von Appel und Haken

5 Der Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas

Die Grundidee des Beweises besteht darin, eine bestimmte Menge von 633 Konfigurationen aufzustellen und dann zu zeigen, dass kein Element dieser Menge in einem minimalen Gegenbeispiel vorkommen kann, da es sonst von etwas Kleinerem ersetzt werden könnte, um so ein noch kleineres Gegenbeispiel zu finden – dieser erste Schritt wird *Reduzierbarkeit* genannt. Damit folgt der Beweis der Idee seiner Vorgänger, allerdings mit dem Unterschied, dass jedes minimale Gegenbeispiel eine *intern sechsfach zusammenhängende Triangulation* ist.
Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass in jeder intern sechsfach zusammenhängenden Triangulation eine der oben genannten Konfigurationen vorkommen muss – auch *Zwangsläufigkeit* genannt. Zusammen zeigt dies, dass es kein minimales Gegenbeispiel geben kann und der Vierfarbensatz somit wahr ist.
Der wesentliche Unterschied zum vorher vorgestellten Beweis von Appel & Haken liegt darin, auf welche Art die Zwangsläufigkeit hergestellt wird.

5.1 Die Konfigurationen

Ein minimales Gegenbeispiel ist ein planarer schleifenfreier Graph G, der nicht 4-färbbar ist, derart dass aber jeder planaren Graphen G' mit $|V(G')|+|E(G')| < |V(G)|+|E(G)|$ eine gültige 4-Färbung besitzt. Unser Ziel ist also, zu zeigen, dass es keinen solchen Graphen G geben kann.

Betrachtet man das Problem genauer, sieht mann, dass jedes minimale Gegenbeispiel eine Triangulation ist, die fast sechsfach zusammenhängend ist. Präzieser ist ein Graph G intern sechsfach zusammenhängend, wenn G mindestens sechs Knoten hat und wenn daraus, dass für jede Teilmenge $X \subseteq E(G)$ der Graph $G \setminus X$ nicht zusammenhängend ist, folgt, dass entweder $|X| \geq 6$ oder $|X| = 5$ und $G \setminus X$ aus genau 2 Komponenten besteht, von denen eine nur einen Knoten beinhaltet. Somit gilt für jeden Knoten v eines solchen Graphen $d_G(v) \geq 5$ gilt. Das führt zu folgendem Resultat:

Satz 5.1:
Jedes minimale Gegenbeispiel ist eine intern sechsfach zusammenhängende Triangulation.

Um genauer zu verstehen, warum der Graph sechsfach zusammenhängend sein muss, empfiehlt sich die Lektüre von [Bir13]. Birkhoff schaffte es bereits 1913 zu zeigen, dass schwächer zusammenhängende Konfigurationen reduzierbar und damit vierfärbbar sind. Dazu bediente er sich der Resultate von A. B. Kempe – Ketten, die mit einer beschränkten Auswahl an Farben färbbar sind, und Ringe, die eine Karte in eine innere und eine äußere Region teilen.

Definition 11 ([):
Konfiguration] Eine Konfiguration K besteht aus einer Beinahe-Triangulation $G(K)$ und einer Zuordnung $\gamma_K : V(G(K)) \mapsto \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Für jeden Knoten v hat $G(K) \setminus v$ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten. Gibt es genau zwei, so ist $\gamma_K(v) = d(v) + 2$.

ii) Für jeden Knoten v, der nicht zur Außenfacette inzident ist, gilt $\gamma_K(v) = d(v)$. Für die anderen Knoten v' gilt $\gamma_K(v) > d(v)$. In beiden Fällen gilt zusätzlich $\gamma_K(v) \geq 5$.

iii) K hat Ringgröße ≥ 2. Die *Ringgröße* von K ist definiert als $\sum_v (\gamma_K(v) - d(v) - 1)$ für alle Knoten v, die zur Außenfacette inzident sind und für die $G(K) \setminus v$ zusammenhängend ist.

Zwei Konfigurationen K und L heißen *isomorph*, falls ein Homeomorphismus existiert, der $G(K)$ auf $G(L)$ und γ_L auf γ_L abbildet. Später werden wir eine Menge aus 633 Konfigurationen betrachten, die für diesen Beweis essenziell sind. Jede Konfiguration, die zu einer dieser 633 isomorph ist, bezeichnen wir als *gut*.

Um das eigentliche Problem zu beweisen, teilen wir die Suche nach einem minimalen Gegenbeispiel weiter auf. Somit ergeben sich diese beiden Aussagen:

Satz 5.2:
Wenn T ein minimales Gegenbeispiel ist, enthält T keine gute Konfiguration.

Satz 5.3:
In jeder intern sechsfach zusammenhängenden Triangulation T lässt sich eine gute Konfiguration finden.

Kombiniert man die Aussagen der Sätze 5.1, 5.2 und 5.3, so sieht man, dass es kein minimales Gegenbeispiel geben kann und damit der Vier-Farben-Satz wahr ist. Auf 5.2 werden wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen, gefolgt von einem Abschnitt über 5.3.

5.2 Reduzierbarkeit

Definition 12 (freie Vervollständigung):
Sei K eine Konfiguration. Eine Beinahe-Triangulation S heißt *freie Vervollständigung* von K *mit dem Ring* R, wenn

i) R ein induzierter Ring von S ist, der die Außenfacette von S begrenzt,

ii) $G(K)$ ein induzierter Teilgraph von S ist, $G(K) = S \setminus V(R)$ gilt, jede Facette von $G(K)$ auch eine Facette von S ist, die Außenfacette von $G(K)$ den Ring R und die Außenfacette von S beinhaltet,

iii) jeder Knoten v von S, der nicht in $V(R)$ liegt, in S Knotengrad $\gamma_K(v)$ hat.

Man kann leicht überprüfen, dass jede Konfiguration eine freie Vervollständigung hat. (Hier benutzen wir den Umstand, dass in der Definition von Konfiguration die Ringgröße ≥ 2 ist – die Ringgröße ist genau die Länge des Rings in der Freien Vervollständigung, wie der Leser nachprüfen kann.) Gibt es weiterhin zwei freie Vervollständigungen S_1, S_2 von K, so existiert ein Homeomorphismus, der $G(K)$ punktweise fixiert und S_1 auf S_2 abbildet. Dazu verwendet man Eigenschaft i) aus der Definition von Konfiguration. Also gibt es eigentlich nur eine freie Vervollständigung, weswegen wir ohne Unklarheiten von *der* freien Konfiguration sprechen können.

Sei R ein Kreis. Es gibt das Konzept der *Kontinuität* für eine Menge von 4-Färbungen von R, welches auf Kempe [Kem79] und Birkhoff [Bir13] zurückgeht. Wir benötigen hier nicht das vollständige Konzept, sondern nennen nur die Eigenschaften, die wir brauchen. Sie lauten:

6 Umformulierungen

Literaturverzeichnis

[Bir13] Birkhoff, George D.: The Reducibility of Maps. In: *American Journal of Mathematics* 35 (1913), S. 115–128

[Fri94] Fritsch, R.: *Der Vierfarbensatz.* Mannheim : BI Wissenschaftsverlag, 1994

[Kem79] Kempe, A. B.: On the geographical problem of the four colors. In: *American Journal of Mathematics* 2 (1879), S. 193–200

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel und Quellen als die angegebenen benutzt habe. Weiterhin versichere ich, die Arbeit weder bisher noch gleichzeitig einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt zu haben.

Würzburg, den ____________________, ____________________________________

(Andre Löffler)