Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Geometrie

Bachelorarbeit

Der Vier-Farben-Satz

Andre Löffler

Abgegeben am DD.month.YYYY

Betreuer:
Dr. Theo Grundhöfer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Formulierung des 4-Farben Satzes geht auf eine Beobachtung zurück, die Francis Guthrie 1852 machte. Francis Guthrie war gelernter Jurist, Hobbybotaniker und Mathematiker. Als er versuchte, eine Landkarte der Grafschaften Englands zu illustrieren und kam zu der Vermutung, dass für beliebige Landkarten stets höchstens vier Farben ausreichen.
Francis' Bruder Frederick Guthrie wand sich damit Problem an seinen Lehrer Augustus de Morgan. Fasziniert von dieser Problematik schrieb de Morgan einen Brief an Sir William Rowan Hamilton. Dieser Notiz ist die erste schriftliche Formulierung des Vierfarbenproblems zu entnehmen:

Satz 1 (historische Formulierung):
A student of mine asked me to day to give him reason for a fact which I did not know was a fact, and do not yet. He says, that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary <u>line</u> are differently coloured – four colours may be wanted but not more. The following is his care in which four <u>are</u> wanted. [...]
Query cannot a necessity for five or more be invented. As far as I see at this moment, if four <u>ultimate</u> compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them inclose the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for colour meeting colour except at a point.

Die ursprüngliche Fragestellung lautet also: Kann man eine beliebige Landkarte so einfärben, dass keine zwei benachbarten Länder die gleiche Farbe haben, wenn man die Farbpalette auf vier Farben beschränkt?

2 Definitionen

Um über die Färbbarkeit von Graphen reden zu können, müssen zuerst einige gebräuchliche Begrifflichkeiten geklärt werden.

Definition 1 (Graph, Knoten, Kante):
Ein *Graph* G ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine Menge bestehend aus Knoten und E eine Menge bestehend aus Kanten sind. Ein *Knoten* $v \in V$ ist ein Punkt im Raum. Eine *Kante* $e \in E$ ist eine zweielementige Teilmenge von V, wobei E die Menge aller dieser Teilmengen ist, also $E = \{\{u, v\} | u, v \in V\}$.

Um nun Bedingungen an die Färbbarkeit von Knoten stellen zu können, muss noch definiert werden, wie diese zusammenhängen.

Definition 2 (Inzidenz, Adjazenz, Knotengrad):
Ein Knoten $v \in V$ heißt *inzident* zu einer Kante $e \in E$, wenn mindestens einer der Endpunkte von e der Knoten v ist. Zwei Knoten u, v heißen *adjazent*, wenn sie zur gleichen Kante inzident sind. Für einen Knoten v ist der *Grad* von v definiert als die Anzahl der Kanten, die zu v inzident sind. Es gilt $\deg v = \sharp\{\{a, b\} \in E | a = v \wedge b = v\}$.

Diese Definition erlaubt sogenannte *Schleifen*, also Kanten bei der beide Enden an den gleichen Knoten anknüpfen. Diese werden wir aber später explizit ausschließen. Denn könnte ein Knoten zu sich selbst benachbart sein, wäre es nicht möglich, für benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben zu wählen.
Da das Problem der 4-färbbarkeit von Graphen von der Geographie motiviert ist, betrachten wir als Raum für unsere Knoten nur den $\mathbb{R}^2$, also die Ebene.

Definition 3 (Planarität):
Ein Graph heißt *planar*, wenn er sich so in die Ebene einbetten lässt, dass sich zwei Kanten höchstens in ihrem gemeinsamen Endpunkt schneiden.

Definition 4 (Färbung, Farben, Gültigkeit):
Eine *Färbung* $f : V \to C \subset \mathbb{N}^0$ ist eine Abbildung, die jedem Knoten eines Graphen ein Element der endlichen Teilmenge C der natürlichen Zahlen zuordnet. Die Elemente von C nennt man *Farben*. Eine Färbung heißt *gültig*, wenn sie keinem Paar adjazenter Knoten die gleiche Farbe zugeordnet.

3 Der Beweis von Appel und Haken

4 Der Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas

5 Umformulierungen

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel und Quellen als die angegebenen benutzt habe. Weiterhin versichere ich, die Arbeit weder bisher noch gleichzeitig einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt zu haben.

Würzburg, den ____________________, ___________________________________

(Andre Löffler)