

Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Institut für Mathematik  
Lehrstuhl für Mathematik III  
Geometrie

## Bachelorarbeit

# Der Vier-Farben-Satz

Andre Löffler

Abgegeben am DD.month.YYYY



Betreuer:  
Dr. Theo Grundhöfer

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Definitionen</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Topologische Definitionen . . . . .                                   | 5         |
| 2.2      | Kombinatorische Definitionen . . . . .                                | 7         |
| <b>3</b> | <b>Übergang zwischen Topologie und Kombinatorik</b>                   | <b>14</b> |
| <b>4</b> | <b>Vorüberlegungen</b>  | <b>15</b> |
| 4.1      | Einschränkungen für minimale Gegenbeispiele . . . . .                 | 15        |
| 4.2      | Die Birkhoff-Zahl . . . . .   | 16        |
| <b>5</b> | <b>Der Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas</b>          | <b>18</b> |
| 5.1      | Konfigurationen . . . . .   | 18        |
| 5.2      | Reduzierbarkeit . . . . .   | 22        |
| 5.3      | Zwangsläufigkeit . . . . .  | 29        |
| 5.4      | Der Algorithmus . . . . .   | 36        |
| <b>6</b> | <b>Der Beweis von Appel und Haken</b>                                 | <b>39</b> |
| 6.1      | Allgemeine Reduzierbarkeit . . . . .                                  | 39        |
| 6.2      | Die Konfigurationen nach Appel & Haken . . . . .                      | 42        |
| <b>7</b> | <b>Fazit</b>  | <b>45</b> |
|          | Literatur . . . . .   | 48        |
| <b>8</b> | <b>Anhang</b>   | <b>51</b> |
| 8.1      | Konfigurationen nach Robertson, Sanders, Seymour und Thomas . . . . . | 51        |

# 1 Einleitung

Die Formulierung des Vier-Farben Satzes geht auf eine Beobachtung zurück, die Francis Guthrie im Jahr 1852 machte. Francis Guthrie studierte Rechtswissenschaften, war Hobbybotaniker und hatte einen Abschluss als Mathematiker. Er versuchte, eine Landkarte der Grafschaften Englands zu illustrieren, und kam zu einer recht anschaulichen Vermutung, die Mathematiker 150 Jahre lang beschäftigen sollte.

Francis' Bruder Frederick Guthrie wand sich am 23. Oktober 1852 mit diesem Problem an seinen Lehrer Augustus de Morgan, der zu dieser Zeit am University College in London unterrichtet.<sup>1</sup> Fasziniert von dieser Problematik schrieb de Morgan einen Brief an Sir William Rowan Hamilton. Dieser Notiz ist die erste schriftliche Formulierung des Vierfarbenproblems zu entnehmen:

## **Satz 1.1 (historische Formulierung):**

A student of mine asked me to day to give him reason for a fact which I did not know was a fact, and do not yet. He says, that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured – four colours may be wanted but not more. The following is his care in which four are wanted. [...]

Query cannot a necessity for five or more be invented. As far as I see at this moment, if four ultimate compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them inclose the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for colour meeting colour except at a point. [Fri94]

Die ursprüngliche Fragestellung lautet also: Kann man eine beliebige Landkarte so einfärben, dass keine zwei Länder, die sich den Abschnitt einer Grenzlinie teilen, die gleiche Farbe haben, wenn man die Farbpalette auf vier Farben beschränkt? Eine Landkarte lässt sich als mathematisches Konstrukt auffassen, jedoch bedarf es dazu einiger Überlegungen. R. und G. Fritsch definieren eine Landkarte  $\mathcal{L}$  als “[...] eine endliche Menge von Jordanbögen in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  derart, dass der Durchschnitt von je zwei verschiedenen Jordanbögen in  $\mathcal{L}$  entweder leer oder ein gemeinsamer Randpunkt dieser Jordanbögen ist.” [Fri94] Diese Definition erscheint auf den ersten Blick eigenartig, benutzt sie doch keinen der zu erwartenden Begriffe wie “Land” oder “Grenze”.

Die historische Formulierung wirkt nach heutigen Maßstäben etwas geschwollen und ist sprachlich nicht mehr zeitgemäß. Heute werden Aussagen zumeist prägnanter abgefasst. Bei [Fri94] findet

---

<sup>1</sup>Um alle beteiligten Personen, ihre Lebensläufe und ihr Zusammenwirken besser kennenzulernen empfiehlt sich die Lektüre des ersten Kapitels von [Fri94]

man eine aktuelle Variante auf Seite 87:

**Satz 1.2 (topologische Formulierung):**

Es seien  $\mathcal{L}$  eine Landkarte,  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  die Menge der Länder von  $\mathcal{L}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  $n$ -Färbung von  $\mathcal{L}$  ist eine Abbildung  $\varphi : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Eine  $n$ -Färbung ist *zulässig*, wenn benachbarte Länder immer verschiedene Werte (“Farben”) haben.

Um dies korrekt erfassen und schließlich auch beweisen zu können, werden topologische Resultate wie der Jordansche Kurvensatz benutzt. Diese wiederum erfordern zahlreiche Vorüberlegungen, die sich sehr umfangreich gestalten und wenig zum eigentlichen Beweis beitragen. Stattdessen werden wir eine andere Formulierung des Vier-Farben-Satzes benutzen, die kombinatorisch motiviert ist.

**Satz 1.3 (Graphentheoretische Formulierung):**

Jeder planare Graph ohne Schleifen ist 4-färbbar.

Diese Variante wirft einige Fragen nach Begrifflichkeiten auf, welche jedoch bei genauerer Betrachtung leicht verständlich sind. Im nächsten Abschnitt werden wir uns zunächst den allgemeinen Definitionen widmen, die nötig sind, um diese Problematik graphentheoretisch angehen zu können. Danach zeigen wir die Äquivalenz von 1.2 und 1.3 und beschreiben die Resultate und Überlegungen, welche beiden hier vorgestellten Beweisen zugrunde liegen. Im Anschluss erläutern wir die Arbeit von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas in den wesentlichen Schritten “Reduktion” und “Zwangsläufigkeit”. Im Anschluss vergleichen wir den neueren Beweis mit dem Vorgänger von Appel & Haken, wobei wir uns auf die Unterschiede konzentrieren wollen. Abschließend werden noch einige Umformulierungen und Anwendungen des Vier-Farben-Satzes diskutiert.

## 2 Definitionen

### 2.1 Topologische Definitionen

Ohne genauer auf die topologischen Grundlagen einzugehen, wollen wir trotzdem die Äquivalenz zwischen 1.2 und 1.3 zeigen. Dazu bedarf es allerdings eines Mindestmaßes an Begrifflichkeiten, die im folgenden erläutert werden.

Wesentlich für die Frage, ob eine Landkarte färbbar ist, ist die Frage, was eine solche eigentlich ist. Der Vollständigkeit halber ist also hier nochmals die Definition zu nennen, die bereits aus der Einleitung bekannt ist, sowie einige zusätzliche Begriffe.

**Definition 1 (Jordanbogen, Endpunkt):**

Eine Teilmenge  $C$  der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist ein *Jordanbogen*, wenn es eine injektive stetige Abbildung  $c : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$  mit  $C = \{c(t) | t \in [0, 1]\}$  gibt. Ferner bezeichnet man die Endpunkte eines Jordanbogens mit  $c_j(0)$  und  $c_j(1)$ .

Damit können wir nun eine Landkarte als mathematisches Konstrukt erklären.

**Definition 2 (Landkarte, Ecke, neutrale Punkte, Neutralitätsmenge, Land):**

- Eine *Landkarte*  $\mathcal{L}$  ist eine endliche Menge von Jordanbögen in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  derart, dass der Durchschnitt von je zwei verschiedenen Jordanbögen in  $\mathcal{L}$  entweder leer oder ein gemeinsamer Endpunkt dieser Jordanbögen ist.
- Die Anzahl aller Jordanbögen einer Karte  $\mathcal{L}$  bezeichnen wir mit  $k_{\mathcal{L}}$ .
- Ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$  ist eine *Ecke*  $v_i$  von  $\mathcal{L}$ , wenn er Endpunkt eines Jordanbogens von  $\mathcal{L}$  ist. Mit  $v_{\mathcal{L}}$  bezeichnen wir die Anzahl der Ecken von  $\mathcal{L}$ .
- Ein *neutraler Punkt* ist ein Punkt der zu einem Jordanbogen von  $\mathcal{L}$  gehört.
- Die *Neutralitätsmenge*  $N_{\mathcal{L}}$  von  $\mathcal{L}$  ist die Menge aller ihrer neutralen Punkte, also die Vereinigung aller Jordanbögen von  $\mathcal{L}$ .

- Ein *Land* von  $\mathcal{L}$  ist eine Bogenkomponente des Komplements der Neutralitätsmenge von  $\mathcal{L}$ , das heißt, von  $\mathbb{R}^2 \setminus N_{\mathcal{L}}$ . Die Anzahl aller Länder ist mit  $f_{\mathcal{L}}$  bezeichnet.

Eine besondere Form von Landkarten wird für unsere späteren Betrachtungen besonders relevant sein:

**Definition 3 (Reguläre Landkarte):**

Eine Landkarte  $\mathcal{L}$  ist *regulär*, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Sie ist nicht leer,
- $N_{\mathcal{L}}$  ist zusammenhängend,
- sie enthält keinen Jordanbogen  $B$ , der zwei Komponenten verbindet, die in der Landkarte  $\mathcal{L} \setminus \{B\}$  nicht verbunden wären,
- es gibt keine Ecke, die Endpunkt von nur einem Jordanbogen ist,
- je zwei Länder berühren höchstens einen gemeinsamen Jordanbogen.

Zusätzlich brauchen wir noch ein weiteres Konstrukt, das sich direkt aus Landkarten ableiten lässt.

**Definition 4 (duale Landkarte):**

Eine Landkarte  $\mathcal{L}^*$  heißt *dual* zu der Landkarte  $\mathcal{L}$ , wenn gilt:

1. Keine Ecke von  $\mathcal{L}^*$  ist ein neutraler Punkt von  $\mathcal{L}$ .
2. Jedes Land von  $\mathcal{L}$  enthält genau eine Ecke von  $\mathcal{L}^*$ .
3. Zwei Ecken von  $\mathcal{L}^*$  sind genau dann durch eine Kante in  $\mathcal{L}^*$  verbunden, wenn sie in benachbarten Ländern von  $\mathcal{L}$  liegen.
4. Eine Kante von  $\mathcal{L}^*$  enthält nur Punkte der beiden Länder von  $\mathcal{L}$ , denen ihre Ecken angehören, und genau einen inneren Punkt einer gemeinsamen Grenzlinie dieser Länder.

Das zu jeder Landkarte mit mindestens zwei Ländern stets eine duale Landkarte existiert, lässt sich ebenfalls [Fri94] entnehmen. Bei der dualen Landkarte handelt es sich um ein Konstrukt, das von einem Graphen im kombinatorischen Sinne nicht mehr weit entfernt ist, wie nach der Lektüre der nächsten Abschnitte ersichtlich wird. Anschaulich betrachtet entspricht das Dualisieren einer Karte dem Wählen einer Hauptstadt für jedes Land und dem Verbinden dieser Städte durch Autobahnen, die sich nicht kreuzen.

Eine Besonderheit stellen folgende Landkarten dar.

**Definition 5 (Kubische Landkarte):**

Eine Landkarte heißt *kubisch*, wenn sie regulär ist und alle Ecken zwischen genau drei Ländern liegen.

Für nichtleere und zusammenhängende Landkarten gilt die wohl bekannte *Eulersche Polyederformel*

$$v_{\mathcal{L}} - k_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{L}} = 2$$

welche wir hier ohne Beweis angeben. Damit lässt sich die folgende Ungleichung zeigen, welche für den Beweis des Vier-Farben-Satzes von elementarer Bedeutung ist.

**Satz 2.1 (Summe der Eckengrade):**

Für reguläre Landkarten gilt:

$$\sum_{r=1}^{v_{\mathcal{L}}} (6 - d_{\mathcal{L}}(v_r)) \geq 12$$

*Beweis.* Mit der Eulerschen Polyederformel gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{v_{\mathcal{L}}} (6 - d_{\mathcal{L}}(v_r)) &= 6 \cdot v_{\mathcal{L}} - 2 \cdot k_{\mathcal{L}} \\ &= 6 \cdot v_{\mathcal{L}} - 6 \cdot k_{\mathcal{L}} + 4 \cdot k_{\mathcal{L}} \\ &\geq 6 \cdot v_{\mathcal{L}} - 6 \cdot k_{\mathcal{L}} + 6 \cdot f_{\mathcal{L}} \\ &= 6 \cdot (v_{\mathcal{L}} - k_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{L}}) \\ &= 12 \end{aligned}$$

□

Diese Resultate lassen sich ebenfalls leicht auf die Strukturen der Kombinatorik übertragen.

## 2.2 Kombinatorische Definitionen

Um über Graphen und deren Färbbarkeit sinnvoll reden zu können, müssen zuerst einige gebräuchliche Definitionen gemacht werden.

**Definition 6 (Graph, Knoten, Kante):**

- Ein *Graph*  $G$  ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei  $V$  eine endliche Menge ist, deren Elemente *Knoten* genannt werden, und  $E$  eine endliche Menge bestehend aus Kanten sind.

- Eine *Kante*  $e \in E$  ist eine zweielementige Teilmenge von  $V$ , also  $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ .
- Die Menge der Knoten eines Graphen  $G$  wird auch mit  $V(G)$  bezeichnet, die Menge der Kanten mit  $E(G)$ .

Oft werden wir auch die Bausteine einer Landkarte  $\mathcal{L}$  als Knoten- und Kantenmenge verwenden. Die Ecken von  $\mathcal{L}$  werden zu den Knoten des Graphen, die Jordanbögen von  $\mathcal{L}$  zu den Kanten des Graphen. Im weiteren betrachten wir vorwiegend endliche Graphen, außer es wird explizit anders angegeben. Auch schließt diese Definition Schleifen explizit aus. Schleifen sind Kanten, bei denen  $u = v$  gilt. Schleifen müssen bei Färbbarkeitsüberlegungen ausgeschlossen werden, denn könnte ein Knoten zu sich selbst benachbart sein, wäre es nicht möglich, für benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben zu wählen.

Um nun Bedingungen an die Färbbarkeit von Graphen stellen zu können, müssen noch die folgenden Begriffe definiert werden.

**Definition 7 (Inzidenz, Adjazenz, Knotengrad, vollständiger Graph):**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Dann sind die folgenden Bezeichnungen gebräuchlich:

- Ein Knoten  $v \in V$  heißt *inzident* zu einer Kante  $e \in E$ , wenn eines der Elemente von  $e$  der Knoten  $v$  ist, also  $v \in e$ .
- Zwei verschiedene Knoten  $u, v$  heißen *adjazent*, wenn sie zur gleichen Kante inzident sind, d.h.  $\{u, v\} \in E$ .
- Für einen Knoten  $v$  ist der *Grad* von  $v$  definiert als die Anzahl der Kanten, die zu  $v$  adjazent sind. Es gilt  $d_G(v) = \#\{\{v, b\} \in E | b \in V\}$ .
- Ein Graph  $G$  heißt *vollständig*, wenn gilt:  $E = \binom{V}{2} = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ .

Für eine interessante Struktur benachbarter Knoten gibt es eine gebräuchliche Bezeichnung, auf die wir später zurückgreifen werden.

**Definition 8 (Pfad, einfacher Pfad,  $u, v$ -Pfad, disjunkte Pfade, Kreis, Ring, zusammenhängender Graph,  $k$ -facher Knotenzusammenhang):**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- Eine Folge  $Q = (v_1, \dots, v_r)$  von Knoten heißt *Pfad*, wenn die auftretenden Knoten paarweise verschieden, aber je zwei aufeinanderfolgende benachbart sind. Dann ist  $\#Q$  die Länge des Pfades und die Verbindungskanten heißen *Glieder*.
- Ein Pfad heißt *einfach*, wenn zwei seiner Knoten nur dann benachbart sind, wenn sie im Pfad aufeinanderfolgenden. Oder genauer: Für die Indizes  $j_1, j_2 \in \{1, \dots, r\}$  mit  $|j_1 - j_2| > 1$  sind die Knoten des Pfades  $v_{j_1}$  und  $v_{j_2}$  nicht benachbart.



- Ein Pfad  $Q$  heißt  $u, v$ -Pfad, wenn  $u, v \in Q$  und sowohl  $u$  als auch  $v$  beide Grad kleiner 2 besitzen.
- Zwei Pfade heißen *disjunkt*, wenn sie keine Knoten, die nicht erstes oder letztes Element der jeweiligen Folge sind, gemeinsam haben.
- Ein Pfad heißt *Kreis*, wenn  $v_1$  und  $v_r$  ebenfalls benachbart sind.
- Ein *Ring* ist ein Kreis, der zusätzlich einfach ist.
- Ein Graph  $G$  heißt *zusammenhängend*, wenn für jedes Paar von Knoten  $u, v \in V$  ein Pfad  $(u, \dots, v)$  existiert.
- Ein Graph  $G$  heißt  $k$ -fach *knotenzusammenhängend*, wenn mindestens  $k$  Knoten gelöscht werden müssen, damit der  $G$  nicht mehr zusammenhängend ist.

Ringe werden im Allgemeinen als wesentlicher Beitrag von Birkhoff auf dem Weg zur Lösung des 4-Farben-Problems angesehen, zuerst erwähnt wurden sie in [Bir13].

Einiges Handwerkszeug ist noch nötig, um Strukturen prägnant und kurz beschreiben zu können.

**Definition 9 (Teilgraph  $G \setminus X$ ,  $G \setminus Y$ ):**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $X \subseteq V$  eine Teilmenge der Knoten und  $Y \subseteq E$  eine Teilmenge der Kanten. Weiter sei  $F$  die Menge der Kanten  $f$  aus  $V$  mit  $f \cap X \neq \emptyset$ . Der Graph  $G \setminus X = (V \setminus X, E \setminus F)$  unterscheidet sich von  $G$  derart, dass alle Knoten der Menge  $X$  und alle zu diesen Knoten adjazenten Kanten gelöscht werden. Ebenso ist  $G \setminus Y = (V, E \setminus Y)$  der Graph, bei dem alle Kanten aus  $Y$  entfernt wurden.

Man sagt auch, ein Graph  $K = (E', V')$  ist Teilgraph von  $G = (E, V)$ , falls gilt:  $E' \subseteq E$  und  $V' \subseteq V$ .

**Definition 10 (Kontraktion):**

Durch *Kontraktion* erhält man aus einem Graphen einen anderen Graphen, indem man zwei adjazente Knoten  $v_1$  und  $v_2$  zusammenfasst. Man sagt, man kontrahiert  $v_2$  auf  $v_1$ , wenn man  $v_2$  aus dem ursprünglichen Graphen entfernt und alle Kanten, zu denen  $v_2$  inzident ist, zu  $v_1$  führt. Dabei werden die Kanten zu Knoten entfernt, wenn der entsprechende Knoten bereits zu  $v_1$  adjazent war, um Mehrfachkanten zu verhindern.

Betrachtet man diesen Vorgang aus topologischer Sicht, entspricht eine Kontraktion einer Vereinigung zweier benachbarter Länder in der dualen Landkarte durch Aufheben ihrer gemeinsamen Grenze.

Da das Problem der 4-Färbbarkeit von Graphen von der Geographie motiviert ist, betrachten wir als Raum für unsere Knoten nur den  $\mathbb{R}^2$ , also die Ebene.

**Definition 11 (Planarität):**

Ein Graph heißt *planar*, wenn seine Kanten so in der Ebene durch Jordanbögen darstellbar sind, dass sich diese höchstens in ihren Endpunkten schneiden.

Damit man sich planare Graphen noch leichter vorstellen kann, fügen wir hier noch folgendes Resultat ein.

**Satz 2.2 (Wagner und Fáry):**

Jeder Graph kann durch einen Homöomorphismus der Ebene auf sich in einen Streckengraphen überführt werden.

Dieser Satz liefert uns, dass es sich bei diesen Jordanbögen tatsächlich stets um gerade Verbindungsstrecken handeln kann. Für den Beweis dieses Resultats verweisen wir auf [Fri94, Seite 113], da er nur der Darstellung von Graphen nutzt und wenig zum eigentlichen Beweis beiträgt.

Planarität von Graphen wirkt auf den ersten Blick wie ein topologischer Begriff, jedoch gelang es Kuratowski, eine rein kombinatorische Charakterisierung von Planarität zu liefern.

**Satz 2.3 (Kuratowski):**

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er zusammenhängend ist und sich durch (möglicherweise) mehrfache Kontraktion nicht in einen der beiden Graphen  $K_{3,3}$  oder  $K_5$  überführen lässt.

Auch dieser Beweis findet sich in der gängigen Literatur und wird daher an dieser Stelle nicht geführt. Jedoch wollen wir die beiden genannten Graphen kurz aufzeigen. Auf der linken Seite ist die übliche Darstellung des  $K_5$  zu finden, auf der rechten Seite die des  $K_{3,3}$ .

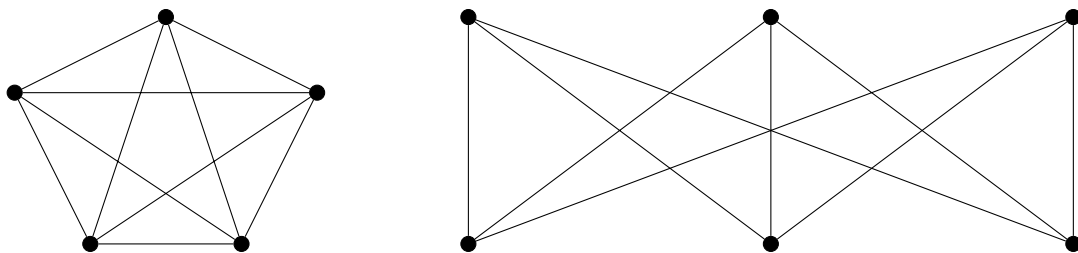


Abbildung 2.1: Der  $K_5$  und der  $K_{3,3}$

Wir werden die Jordanbögen der Darstellung eines Graphen ebenfalls als *Kanten* bezeichnen. In der Ebene ist es leicht, die durch diese Kanten getrennten Flächen zu betrachten. Das führt uns zur folgenden Definitionen.

**Definition 12 (Zeichnung):**

Sei  $K = (V, E)$  ein Graph. Wir bezeichnen eine Zeichnung des Graphen  $K$  mit  $G(K)$  und meinen damit seine Darstellung durch Jordanbögen in der Ebene.

Hier benennen wir den eigentlichen Graphen mit  $K$ , weil wir uns später hauptsächlich für die Darstellung von sogenannten Konfigurationen interessieren.

**Definition 13 (Facette, Außenfacette, Innenfacetten):**

Sei  $G$  ein in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  gezeichneter Graph. Sei  $J_G$  die Vereinigung aller Jordanbögen dieser Darstellung.

- Eine *Facette* ist eine Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^2 \setminus J_G$ . Alle Punkte der Kanten, die die Facette umfassen heißen ebenfalls inzident zu dieser Facette.
- Die unbeschränkte Facette, die von keiner Menge von Kanten vollständig umschlossen ist, wird *Außenfacette* genannt.
- Jede Facette, die nicht die Außenfacette ist, heißt *Innenfacette*.

Um die Eindeutigkeit der Außenfacette zu beweisen, bedarf es eigentlich des Jordanschen Kurvensatzes. Dieser kann bei [Fri94, Seite 53] nachgelesen werden.

Weiter gibt es einige gebräuchliche Namenskonventionen für Knoten, um deren Lage im Graphen genauer zu charakterisieren.

**Definition 14 (Außenknoten, Innenknoten, Außenkreis, Außenring):**

Sei  $G$  ein in der Ebene gezeichneter Graph.

- Jeder Knoten, der inzident zur Außenfacette von  $G$  ist, wird *Außenknoten* genannt.
- Jeder Knoten von  $G$ , der kein Außenknoten ist, ist ein *Innenknoten*.
- Der *Außenkreis* von  $G$  ist der Kreis, der alle Außenknoten von  $G$  durchläuft.
- Ein *Außebring* ist ein Außenkreis, der zusätzlich einfach ist.

Für unsere Betrachtungen ist eine besondere Form von Facetten interessant.

**Definition 15 (Dreieck, Triangulation, Beinahe-Triangulation, Facettenmenge  $F(T)$ ):**

Sei  $G$  ein in der Ebene gezeichneter Graph.

- Eine Facette ist genau dann ein *Dreieck*, wenn genau drei Knoten zu ihr inzident sind. Ein Ring ist genau dann ein Dreieck, wenn er aus drei Knoten besteht. Auch als Dreieck bezeichnen wir die drei Kanten zwischen je zwei der drei Knoten.
- Eine *Beinahe-Triangulation* ist ein nichtleerer, planarer Graph  $G$ , bei dem jede Innenfacette ein Dreieck ist.

- Ein Beinahe-Triangulation ist eine *Triangulation*, wenn zusätzlich auch die Außenfacette ein Dreieck ist.
- Ist  $T$  eine Triangulation, so bezeichnet  $F(T)$  die Menge aller Facetten (innen und außen). Ist hingegen  $T$  eine Beinahe-Triangulation, so ist  $F(T)$  nur die Menge aller Innenfacetten.

Zeichnet man die Kanten eines planaren Graphen als gerade Linien, so entspricht diese Definition genau dem, was man sich unter einem Dreieck vorstellt. Dass dies auch tatsächlich möglich ist, ergibt sich aus Satz 2.2.

**Definition 16 (Färbung, Farben, Gültigkeit):**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- Eine *Färbung* ist eine Abbildung  $f : V \mapsto \mathbb{N}$ , die jedem Knoten eines Graphen eine natürliche Zahl zuordnet.
- Die Elemente von  $C = f(V)$  nennt man *Farben*.
- Eine Färbung heißt *gültig*, wenn sie keinem Paar adjazenter Knoten  $u, v \in V$  die gleiche Farbe zuordnet, also  $c(u) \neq c(v)$  für  $\{u, v\} \in E$ .

**Definition 17 ( $k$ -Färbbarkeit):**

Ein Graph  $G$  heißt  *$k$ -färbbar*, wenn es eine gültige Färbung von  $G$  mit höchstens  $k$  Farben gibt.

Aus dieser Definition ergibt sich auch direkt, dass jeder  $k$ -färbbare Graph auch  $(k + 1)$ -färbbar ist. Nun haben wir alle nötigen Definitionen zusammen, um unsere ersten Resultate zu zeigen. Das erste dient vor allem der vereinfachten Veranschaulichung, das zweite werden wir später noch benötigen.

**Satz 2.4 (Vollständiger Graph mit fünf Knoten):**

Es existiert kein vollständiger planarer Graph mit fünf Knoten.

*Beweis.* Es seien  $v_1, \dots, v_5$  fünf Ecken in der Ebene. Für jedes Paar  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  mit  $i < j$  sei eine Kante  $k_{i,j}$  zwischen  $v_i$  und  $v_j$  gegeben. Dieser Graph hat 10 Kanten, von denen insgesamt 7 entweder  $v_1$  oder  $v_5$  oder beide als Endpunkt haben. Wir zeigen nun, dass sich mindestens eine der 3 übrigen Kanten eine der anderen Kanten überkreuzen muss.

Durch Zusammensetzen erhält man drei Pfade  $P_i = k_{1,i} \cup k_{i,5}$  für  $i = 2, 3, 4$ , die die Knoten  $v_1$  und  $v_5$  verbinden, die sich aber weder untereinander noch mit  $k_{1,5}$  schneiden. O.B.d.A. sei  $P_3$  der Pfad derart, dass von den beiden anderen einer in der Facette  $F$  und der andere außerhalb der Facette  $F$  begrenzt von  $k_{1,5} \cup P_3$  liegt. Damit muss die Kante  $k_{2,4}$  zwischen  $v_2$  und  $v_4$  mindestens einen inneren Punkt  $y$  mit dem Rand von  $F$  gemeinsam haben, also mit einer der Kanten  $k_{1,5}, k_{1,3}, k_{3,5}$ . Da  $k_{2,4}$  keine der drei beteiligten Ecken trifft, muss  $y$  ein innerer Punkt einer dieser Kanten sein.  $\square$

Dieser Beweis ist ebenfalls in [Fri94, Satz 4.1.2] zu finden, allerdings in einer topologischen Variante mittels Jordanbögen.

**Satz 2.5 (Weiske):**

Es gibt keine Landkarte  $\mathcal{L}$  mit fünf paarweise benachbarten Ländern.

*Beweis.* Angenommen, es gäbe eine solche Landkarte. Betrachte dazu die zu  $\mathcal{L}$  duale Landkarte. Diese ist ein Graph mit 5 Ecken, die paarweise verbunden sind. Einen solchen Graphen kann es aber nach Satz 2.4 nicht geben. Widerspruch.  $\square$

### 3 Übergang zwischen Topologie und Kombinatorik

Zunächst müssen wir uns noch davon überzeugen, dass die topologische Formulierung (Satz 1.2) und die kombinatorische Formulierung (Satz 1.3) des Vier-Farben-Problems auch tatsächlich äquivalent sind. Dazu hilft uns folgender Satz:

**Satz 3.1 (Äquivalenz der Formulierungen):**

Der topologische Vier-Farben-Satz ist genau dann wahr, wenn jeder planare Graph ohne Schleifen eine zulässige 4-Färbung besitzt.

*Beweis nach [Fri94].* Dass diese Bedingung hinreichend ist, ergibt sich, wenn man die Definition der dualen Landkarte betrachtet. Betrachte dazu eine Landkarte und einen Graphen, dessen Knotenzahl der Anzahl der Länder entspricht. Ordne nun jedem Land eindeutig einen Knoten zu. Füge nun Kanten zwischen den Knoten hinzu, deren Länder in der dualen Landkarte benachbart sind. Jedes Land der dualen Karte kann auf einen Knoten im Graphen abgebildet werden. Ist der Graph 4-färbbar, ist es somit auch die Landkarte.

Die Notwendigkeit zeigen wir, indem wir zeigen, dass es kein minimales Gegenbeispiel geben kann. Angenommen, der topologische Vier-Farben-Satz sei wahr. Betrachte einen Graphen  $G = (V, \mathcal{L})$ , der ein Gegenbeispiel für die 4-Färbbarkeit ist, derart dass die Anzahl seiner Knoten minimal ist. Nun zeigen wir, dass wir für die Landkarte  $\mathcal{L}$  annehmen können, dass sie regulär und vollständig ist. Ist  $\mathcal{L}$  nicht vollständig, so können wir endlich viele Kanten hinzunehmen, ohne die Eckenzahl erhöhen zu müssen, und erhalten den vollständigen Graphen  $G' = (V, \mathcal{L}')$ . Dadurch wird das zu lösende Problem höchstens schwieriger. Wir können also  $G$  als vollständig annehmen.

Ein minimales Gegenbeispiel hat nach Satz 2.4 mindestens fünf Knoten, ein vollständiger Graph mit höchstens zwei Gebieten hat höchstens drei Ecken. Also hat  $G$  mindestens zwei Facetten und ist somit regulär.

Nun wählen wir eine zu  $\mathcal{L}$  duale Landkarte  $\mathcal{L}^*$ . Sie besitzt nach Voraussetzung eine gültige 4-Färbung der Länder. Da  $\mathcal{L}$  regulär ist, ist  $\mathcal{L}$  auch dual zu  $\mathcal{L}^*$  und somit erhalten wir aus der 4-Färbung von  $\mathcal{L}^*$  eine 4-Färbung der Ecken von  $G$ . Somit ist  $G$  kein minimales Gegenbeispiel.  $\square$

## 4 Vorüberlegungen

### 4.1 Einschränkungen für minimale Gegenbeispiele

Um sich dem Problem zu nähern brauchen wir eine Vorstellung davon, wie ein minimales Gegenbeispiel aussehen muss. Dazu schränken wir zunächst unsere Bemühungen auf eine besondere Klasse von Graphen ein.

**Definition 18 (normaler Graph):**

Ein planarer Graph heißt *normal*, wenn er ein regulärer, vollständiger Graph mit geraden Jordanbögen ist, bei dem jede Facette außer der Außenfacette ein Dreieck ist.

Ein normaler Graph ist also insbesondere eine Beinahe-Triangulation. Ohne wesentliche Einschränkung kann man sich bei der Untersuchung dieses Problems auf Triangulationen beschränken, da sich jeder Graph durch Kontraktion und das Entfernen von Kanten aus einer Triangulation bilden lässt, wenn diese nur ausreichend – aber immernoch endlich – viele Knoten besitzt. Durch das Verringern der Knoten- und Kantenanzahl wird dabei das zu lösende Problem nur leichter.

Da wir versuchen, mit möglichst wenig Knoten auszukommen, ist es wenig sinnvoll, eine obere Schranke zu suchen. Daher schließen wir zu kleine oder zu einfache Graphen mit den folgenden Resultaten aus.

**Proposition 4.1 (Sechs Knoten):**

Ein minimales Gegenbeispiel hat mindestens sechs Knoten.

*Beweis.* Betrachte einen Graphen mit fünf Ländern. Nach Satz 2.4 gibt es zwei nicht adjazente Knoten. Diese können dann gleich gefärbt werden. Für die übrigen drei Knoten bleiben drei unterschiedliche Farben übrig.  $\square$

**Proposition 4.2 (Adjazente Nachbarn):**

Wenn ein Knoten eines beliebigen Graphen mehr als drei Nachbarn hat, so hat dieser Knoten zwei Nachbarn, die nicht adjazent sind.

*Beweis.* Sei  $G$  ein Graph und  $v_0$  ein Knoten mit den Nachbarn  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Nach Satz 2.4 gibt es in  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$  zwei nicht adjazente Knoten, von denen nach Voraussetzung keiner  $v_0$  seien

kann. □

**Satz 4.3 (Fünf verschiedene Nachbarn):**

Bei einem minimalen Gegenbeispiel hat jeder Knoten mindestens fünf verschiedene Nachbarn.

*Beweis.* Es sei  $G$  ein minimales Gegenbeispiel. Dass es keinen Knoten mit weniger als vier Nachbarn geben kann, erkennt man leicht. Bleiben die Knoten mit genau vier Nachbarn zu untersuchen. Sei  $v_0$  einer dieser Knoten und seine Nachbarn  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Nach Satz 4.2 können wir annehmen, dass  $v_1$  und  $v_3$  nicht adjazent sind. Durch Kontraktion von  $v_1$  und  $v_3$  auf  $v_0$  erhalten wir den Knoten  $v'$ . Der so entstehende Graph  $G'$  enthält zwei Knoten weniger und besitzt somit eine zulässige 4-Färbung.

Aus dieser lässt sich eine zulässige 4-Färbung für  $G$  erzeugen: wir weisen den Knoten  $v_1$  und  $v_3$  die gleiche Farbe wie  $v'$  zu. Alle übrigen Knoten übernehmen ihre Färbung aus  $G'$ . Dann sind für die Nachbarn von  $v_0$  nur drei Farben verbraucht worden, es bleibt also eine übrig. □

Es scheint also lohnenswert, Knoten eines bestimmten Grades genauer zu betrachten. Das führt uns zu folgender Definition und folgendem Resultat, welches eine weitere Einschränkung für minimale Gegenbeispiele liefert.

**Definition 19 ( $k$ -Stern):**

Ein Teilgraph eines Graphen heißt  $k$ -Stern, wenn er aus einem Knoten  $v \in V$  mit  $d_G(v) = k$  und seinen  $k$  Nachbarn sowie den zugehörigen Kanten besteht.

**Satz 4.4 (Anzahl der 5-Sterne):**

Ein minimales Gegenbeispiel enthält keine 4-Sterne aber mindestens zwölf 5-Sterne.

*Beweis.* Enthält ein Graph einen 4-Stern, so besitzt die duale Landkarte ein Land mit vier Nachbarn, kann also nach Satz 4.3 kein minimales Gegenbeispiel sein. Die Anzahl der 5-Sterne ergibt sich aus der Ungleichung in Satz 2.1. □

## 4.2 Die Birkhoff-Zahl

Die Birkhoff-Zahl wurde 1972 von Thomas Saaty in [Saa77] eingeführt.

**Definition 20 (Birkhoff-Zahl):**

Die *Birkhoff-Zahl* ist die Anzahl der Länder, die eine Landkarte mindestens haben muss, um nicht mit vier Farben färbbar zu sein.

Heute müsste die Birkhoff-Zahl also wohl auf  $\infty$  gesetzt werden, da Guthries Vermutung als bewiesen angesehen werden kann. Stattdessen versteht man darunter eine vom Kalenderdatum abhängige



Größe. Die Birkhoff-Zahl am Tag  $t$  war  $b$ , wenn zum Zeitpunkt  $t$  bewiesen war, dass ein Gegenbeispiel mindestens  $b$  Länder haben muss. So lautet für die Jahre 1852 – 1879 die Birkhoff-Zahl 6.

Die Birkhoff-Zahl ist für das eigentliche Problem nur von geringer Bedeutung, da parallel dazu auch die Reduzibilitätstheorie verfeinert wurde. Sie wird hier nur genannt, um den historischen Verlauf des Problems darzustellen.

|                       | t              | b  |
|-----------------------|----------------|----|
| B.G. Weiske           | vor 1852       | 6  |
| A.B. Kempe            | 1879           | 13 |
| P. Franklin           | 1922           | 26 |
| C.N. Reynolds         | 1926           | 28 |
| P. Franklin           | 1938           | 32 |
| C.E. Winn             | 1940           | 36 |
| O. Ore & J.G. Stemple | 1968           | 41 |
| W.R. Stromquist       | Juli 1973      | 45 |
| J. Mayer              | September 1973 | 48 |
| W.R. Stromquist       | 1974           | 52 |
| J. Mayer              | 1975           | 96 |

Abbildung 4.1: Die Birkhoff-Zahl im Laufe der Zeit

## 5 Der Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas

Die Grundidee des Beweises besteht darin, eine bestimmte Menge von 633 sogenannten Konfigurationen aufzustellen und dann zu zeigen, dass kein Element dieser Menge in einem minimalen Gegenbeispiel vorkommen kann – dieser erste Schritt wird *Reduzierbarkeit* (engl.: reducibility) genannt. Damit folgt der Beweis der Idee seiner Vorgänger, allerdings mit dem Unterschied, dass jedes minimale Gegenbeispiel eine *intern 6-fach zusammenhängende Triangulation* ist.

Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass in jeder intern 6-fach zusammenhängenden Triangulation eine der oben genannten Konfigurationen vorkommen muss – auch *Zwangsläufigkeit* (eng.: unavoidability) genannt. Zusammen zeigt dies, dass es kein minimales Gegenbeispiel geben kann und der Vierfarbensatz somit wahr ist.

Der wesentliche Unterschied zum später vorgestellten Beweis von Appel & Haken liegt darin, auf welche Art die Zwangsläufigkeit hergestellt wird.

### 5.1 Konfigurationen

Ein minimales Gegenbeispiel ist ein planarer Graph  $G$ , der nicht 4-färbbar ist, derart dass aber jeder planare Graph  $G'$  mit  $|V(G')| + |E(G')| < |V(G)| + |E(G)|$  eine gültige 4-Färbung besitzt. Unser Ziel ist also, zu zeigen, dass es keinen solchen Graphen  $G$  geben kann.

Aus den allgemeinen Vorüberlegungen wissen wir, dass jedes minimale Gegenbeispiel nur Knoten mit Grad mindestens 5 hat. So sieht man leicht, dass jedes minimale Gegenbeispiel 5-fach knotenzusammenhängend ist. Zusätzlich stellen wir noch eine weitere Anforderung an ein mögliches minimales Gegenbeispiel.

**Definition 21 (Kurzreis, intern 6-fach zusammenhängende Triangulation):**

Sei  $T$  eine Triangulation.

- Ein Kreis  $C$  in einer Triangulation heißt *Kurzreis* (engl.: short circuit), wenn  $\#V(C) \leq 5$  gilt. Die Kanten von  $C$  teilen dann  $T$  in einen inneren Bereich  $I$  und einen äußeren Bereich  $O$  mit  $I, O \subset V(T)$ .<sup>1</sup> Sollte  $\#V(C) = 5$  gelten, so liegen sowohl in  $I$  als auch in

---

<sup>1</sup>Anschaulich gesprochen: Betrachtet man eine planare Darstellung von  $T$  und durchläuft die Kanten von  $C$  im Uhrzeigersinn, so liegen genau die Punkte in  $I$ , die sich für jede Kante rechts von dieser befinden. In  $O$  liegen alle Knoten, die weder zu  $C$  noch zu  $I$  gehören.

$O$  mindestens zwei Knoten.

- Wir nennen eine 6-fach knotenzusammenhängende Triangulation *intern 6-fach zusammenhängend*, wenn sie keine Kurzkreise beinhaltet.

Das führt zu folgendem Resultat:

**Satz 5.1:**

Jedes minimale Gegenbeispiel ist eine intern 6-fach zusammenhängende Triangulation.

Um genauer zu verstehen, warum der Graph 6-fach zusammenhängend sein muss, empfiehlt sich die Lektüre von [Bir13]. Birkhoff schaffte es bereits 1913 zu zeigen, dass schwächer zusammenhängende Konfigurationen 4-färbbar sind. Dazu bediente er sich der Resultate von A. B. Kempe – Ketten, die mit einer beschränkten Auswahl an Farben färbbar sind, und Ringen, die eine Karte in eine innere und eine äußere Region teilen. Diese werden später in Kapitel 6.1 genauer beschrieben.

Später werden wir einen Algorithmus kennenlernen, der eine Färbung für eine Triangulation mit Kurzkreis liefert. Daraus lässt sich dann auch der Beweis für Satz 5.1 ableiten.

Als nächstes folgt eine Definition, die fundamental für unseren Beweis ist. Der Begriff der Konfiguration taucht ebenfalls bei Appel & Haken auf, jedoch besitzt eine Konfiguration dort andere Eigenschaften.

**Definition 22 (Konfiguration):**

Eine Konfiguration  $K$  besteht aus einer Beinahe-Triangulation  $G(K)$  und einer Zuordnung  $\gamma_K : V(G(K)) \mapsto \mathbb{Z}_+$  mit folgenden Eigenschaften:

- Für jeden Knoten  $v$  besteht  $G(K) \setminus \{v\}$  aus höchstens zwei Zusammenhangskomponenten. Gibt es genau zwei, so ist  $\gamma_K(v) = d_G(v) + 2$ .
- Für jeden Knoten  $v$ , der nicht zur Außenfacette inzident ist, gilt  $\gamma_K(v) = d_G(v)$ . Für die anderen Knoten  $v'$  gilt  $\gamma_K(v') > d_G(v')$ . In beiden Fällen gilt wegen Satz 4.3 zusätzlich  $\gamma_K(v) \geq 5$ .
- Sei  $A$  die Menge aller Knoten  $v \in V(G(K))$ , die zur Außenfacette inzident sind und für die  $G(K) \setminus \{v\}$  zusammenhängend ist. Die *Ringgröße*  $k$  von  $K$  ist definiert als

$$k = \sum_{v \in A} (\gamma_K(v) - d_G(v) - 1).$$

Für jede Konfiguration gilt  $k \geq 2$ .

Um  $\gamma_K$  für jeden Knoten in einer planaren Zeichnung von  $G$  darzustellen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Die Offensichtliche wäre natürlich, neben jedem Knoten seinen Wert zu notieren, was jedoch sehr

schnell unübersichtlich wird. Stattdessen werden wir unseren Knoten verschiedene Formen geben, wie Abbildung 5.1 zu entnehmen ist.

|   |                    |
|---|--------------------|
| ● | $\gamma_K(v) = 5$  |
| · | $\gamma_K(v) = 6$  |
| ○ | $\gamma_K(v) = 7$  |
| □ | $\gamma_K(v) = 8$  |
| ▽ | $\gamma_K(v) = 9$  |
| ◇ | $\gamma_K(v) = 10$ |

Abbildung 5.1: Darstellung von Knoten in Konfigurationen

Später werden wir eine Menge aus 633 Konfigurationen betrachten, die für diesen Beweis essenziell sind. Eine vollständige Abbildungsliste findet sich in [RSST97, Seite 35] oder im Anhang dieser Arbeit.

**Definition 23 (Isomorphe Konfigurationen, gute Konfigurationen, auftretende Konfigurationen):**

- Zwei Konfigurationen  $K$  und  $L$  heißen *isomorph*, falls ein Homeomorphismus der Ebene existiert, der  $G(K)$  auf  $G(L)$  und  $\gamma_K$  auf  $\gamma_L$  abbildet.
- Jede Konfiguration, die zu einer der 633 Konfigurationen aus dem Anhang isomorph ist, bezeichnen wir als *gut*.
- Sei  $T$  eine Triangulation. Eine Konfiguration  $K$  *tritt in  $T$  auf*, wenn  $G(K)$  ein Teilgraph von  $T$  ist, jede Innenfacette von  $G(K)$  eine Innenfacette von  $T$  ist und  $\gamma_K(v) = d_T(v)$  für alle Knoten  $v$  von  $G(K)$  gilt.

Um zu zeigen, dass das eigentliche Problem stets lösbar ist, teilen wir die Suche nach einem minimalen Gegenbeispiel weiter auf. Somit ergeben sich diese beiden Aussagen:

**Satz 5.2 (Reduktion):**

Wenn eine Triangulation  $T$  ein minimales Gegenbeispiel ist, enthält  $T$  keine gute Konfiguration.

**Satz 5.3 (Zwangsläufigkeit):**

In jeder intern 6-fach zusammenhängenden Triangulation  $T$  lässt sich eine gute Konfiguration finden.

Kombiniert man die Aussagen der Sätze 5.1, 5.2 und 5.3, so sieht man, dass es kein minimales Gegenbeispiel geben kann und damit der Vier-Farben-Satz wahr sein muss. Auf 5.2 werden wir im

nächsten Abschnitt genauer eingehen, gefolgt von einem Abschnitt über 5.3. Danach erläutern wir noch die Resultate, welche dem Algorithmus für Satz 5.1 zu Grunde liegen.

Ein anderer Ansatz, sich der 4-Färbung von Graphen zu nähern, liegt darin, die Facetten auf Färbbarkeit zu untersuchen. Da in einem minimalen Gegenbeispiel jede Innenfacette ein Dreieck ist, benötigen wir eine neue Definition:

**Definition 24 (Trifärbung):**

Sei  $G$  eine Triangulation oder Beinahe-Triangulation,  $\kappa : E(G) \mapsto \{-1, 0, 1\}$  eine Funktion und  $r = \{e, f, g\} \subset E(G)$  ein Dreieck. Man sagt,  $r$  wird von  $\kappa$  *trigefärbt* (engl.: tri-coloured), wenn  $\{\kappa(e), \kappa(f), \kappa(g)\} = \{-1, 0, 1\}$  gilt. Wir sagen,  $\kappa$  ist eine *Trifärbung* von  $G$ , wenn jede Facette von  $G$  trifärbbar ist – oder nur jede Innenfacette, falls  $G$  nur eine Beinahe-Triangulation ist.

Statt wie üblich für die Farben der Facetten 1, 2, 3 zu wählen, benutzen wir hier  $-1, 0$  und  $1$ , um möglichst nahe am Algorithmus für 5.1 zu bleiben.

**Satz 5.4 (Trifärbung  $\Leftrightarrow$  4-Färbung):**

Eine Triangulation  $T$  ist genau dann 4-färbbar, wenn eine Trifärbung ihrer Facetten existiert.

Dass dies tatsächlich der Wahrheit entspricht, wurde bereits von Tait gezeigt, der Beweis ist [Tai80] zu entnehmen. Der Grund, auf die Färbung von Facetten zu wechseln liegt tatsächlich auch darin, dass ein Algorithmus, der eine Trifärbung bestimmt, leichter zu implementieren war. [RSST97, Seite 7]

Um 5.2 zu beweisen, werden wir für jede Triangulation  $T$ , die ein minimales Gegenbeispiel sein soll, eine nichtleere Teilmenge der Kanten von  $T$  wählen und diese kontrahieren um so eine Darstellung  $T'$  zu erhalten. Da  $T'$  echt kleiner als  $T$  ist, ist diese somit 4-färbbar. Diese Färbung werden wir dann dazu benutzen, eine Färbung für  $T$  zu konstruieren, sodass  $T$  kein minimales Gegenbeispiel gewesen sein kann. Kontrahiert man Kanten in einem Graphen, ergeben sich verschiedene Notationsprobleme, etwa ob nach der Kontraktion eine nichtkontrahierte Kante im ursprünglichen Graphen immer noch die gleiche Kante wie in der Kontraktion ist. Um die Notationsprobleme zu umgehen und die wesentlichen Schwierigkeiten nicht aus den Augen zu verlieren, brechen wir den Kontraktionsprozess in zwei Teile auf.

**Definition 25 (Zerstreute Menge, Trifärbung modulo  $X$ ):**

Sei  $G$  eine Triangulation oder Beinahe-Triangulation.

- Eine Teilmenge  $X \subseteq E(G)$  heißt *zerstreut* (engl.: sparse), wenn jede Innenfacette von  $G$  zu höchstens einer Kante aus  $X$  inzident und im Falle einer Beinahe-Triangulation die Außenfacette zu keiner Kante inzident ist.
- Wenn  $X \subseteq E(G)$  zerstreut ist, ist eine *Trifärbung von  $G$  modulo  $X$*  eine Abbildung  $\kappa : E(G) \setminus X \mapsto \{-1, 0, 1\}$  derart, dass für jede Facette von  $G$  (außer der Außenfacette bei Beinahe-Triangulationen), die zu den Kanten  $e, f, g$  inzident ist, gilt:

- (i)  $\{\kappa(e), \kappa(f), \kappa(g)\} = \{-1, 0, 1\}$ , falls  $e, f, g \notin X$
- (ii)  $\kappa(e) = \kappa(f)$ , falls  $g \in X$ .

Dieser Definition folgend ist eine Trifärbung gleichbedeutend mit einer Trifärbung modulo  $\emptyset$ .

**Satz 5.5 (Existenz einer Trifärbung):**

Sei  $T$  ein minimales Gegenbeispiel und sei  $X \subseteq E(T)$  zerstreut und nicht leer. Gibt es in  $T$  keinen Kreis  $C$  mit  $|E(C) \setminus X| = 1$ , so besitzt  $T$  eine Trifärbung modulo  $X$ .

*Beweis.* Sei  $F$  die Zeichnung der Knoten  $V(T)$  und der Kanten aus  $X$ . Seien  $Z_1, \dots, Z_k$  die Mengen der Knoten, die zu den  $k$  Facetten von  $F$  inzident sind. Sei nun  $S$  ein Graph mit  $V(S) = \{Z_1, \dots, Z_k\}$  und  $E(S) = E(T) \setminus X$ . Eine Kante  $e \in E(S)$  ist inzident zu  $Z_i$ , wenn  $e \cap Z_i \neq \emptyset$ . Da in  $T$  kein Kreis mit  $|E(C) \setminus X| = 1$  existiert, hat  $S$  keine Schleifen. Da  $S$  durch Kontraktion aus  $T$  entsteht, ist  $S$  auch planar. Da  $X$  nicht leer ist, gilt weiter  $|E(S)| + |V(S)| < |V(T)| + |E(T)|$  und da  $T$  ein minimales Gegenbeispiel war, besitzt  $S$  deshalb eine 4-Färbung. Somit existiert eine Abbildung  $\phi : V(T) \mapsto \{1, 2, 3, 4\}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für  $1 \leq i \leq k$  ist  $\phi(v)$  konstant für  $v \in Z_i$  und
- (ii) für jede Kante  $e = \{u, v\}$  von  $T$ ,  $e \notin X$ , gilt  $\phi(u) \neq \phi(v)$ .

Für  $e = \{u, v\} \in E(S)$  definieren wir

$$\kappa(e) = \begin{cases} -1 & \text{für } \{\phi(u), \phi(v)\} = \{1, 2\} \text{ oder } \{3, 4\} \\ 0 & \text{für } \{\phi(u), \phi(v)\} = \{1, 3\} \text{ oder } \{2, 4\} \\ 1 & \text{für } \{\phi(u), \phi(v)\} = \{1, 4\} \text{ oder } \{2, 3\} \end{cases}$$

Dann ist  $\kappa$  eine Trifärbung von  $T$  modulo  $X$ , denn: Sei  $r$  eine Facette von  $T$ ,  $e = \{u, v\}, f = \{v, w\}, g = \{w, u\}$ . Sind  $e, f, g \notin X$ , so sind  $\phi(u), \phi(v), \phi(w)$  alle verschieden, also auch  $\{\kappa(e), \kappa(f), \kappa(g)\} = \{-1, 0, 1\}$ . Ist andererseits o.B.d.A.  $g \in X$ , so gilt  $\phi(u) = \phi(w)$  und  $\kappa(e) = \kappa(f)$ . [RSST97]  $\square$

## 5.2 Reduzierbarkeit

Wir wollen konsistente Kantenfärbungen definieren. Dazu beginnen wir diesen Abschnitt mit den dazu nötigen, hinführenden Definitionen:

**Definition 26 (Kantenfärbung, Match, signiertes Match, signiertes Matching,  $\theta$ -Passend):**

Sei  $R$  ein Kreis und  $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ .

- Eine *Kantenfärbung* von  $R$  ist eine Abbildung  $\kappa : E(R) \mapsto \{-1, 0, 1\}$ .

- Ein *Match*  $m$  ist eine Menge  $\{e, f\}$  von verschiedenen Kanten aus  $R$ .
- Ein *signiertes Match* (engl.: signed match)  $(m, \mu)$  ist ein Paar aus einem Match  $m$  und  $\mu = \pm 1$ .
- Ein *signiertes Matching* ist eine Menge  $M$  von signierten Matches, sodass für unterschiedliche  $(\{e, f\}, \mu), (\{e', f'\}, \mu') \in M$  gilt:

(i)  $\{e, f\} \cap \{e', f'\} = \emptyset$  und

(ii) nach dem Löschen von  $e'$  und  $f'$  liegen  $e$  und  $f$  in der gleichen Zusammenhangskomponente von  $R$ .

Ist  $M$  ein signiertes Matching, so ist  $E(M) := \{e \in E(R) \mid e \in m \text{ für ein } (m, \mu) \in M\}$ .

- Eine Kantenfärbung  $\kappa$  von  $R$  heißt  $\theta$ -passend für ein signiertes Matching  $M$  in  $R$ , wenn gilt:

(i)  $E(M) = \{e \in E(R) \mid \kappa(e) \neq \theta\}$  und

(ii) für alle  $(\{e, f\}, \mu) \in M$  gilt:  $\kappa(e) = \kappa(f) \Leftrightarrow \mu = 1$ .

Nun können wir die eigentlich gesuchte Definition aufstellen.

**Definition 27 (konsistente Kantenfärbung):**

Sei  $K$  ein Kreis und  $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ . Eine Menge  $\mathcal{C}$  von Kantenfärbungen von  $K$  heißt *konsistent*, wenn für jedes  $\kappa \in \mathcal{C}$  und jedes mögliche  $\theta$  ein signiertes Matching  $M$  existiert, so dass  $\kappa$   $\theta$ -passend für  $M$  ist, und  $\mathcal{C}$  jede Kantenfärbung, die für  $M$   $\theta$ -passend ist, enthält.

Die nächsten beiden Definitionen sowie Satz 5.6 dienen dazu, die Korrektheit eines Teilalgorithmus des Färbungsverfahrens zu zeigen. Mehr dazu findet sich im Anschluss.

**Definition 28 (Verpackung, Aufzug):**

Sei  $H$  eine Beinahe-Triangulation.

- Dann gibt es einen geschlossenen Pfad  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  durch die zur Außenfacette inzidenten Knoten. Dann existiert ein Kreis  $R$  der Länge  $k$  mit Kanten  $e_1, \dots, e_k$ , nicht notwendigerweise ein Kreis in  $H$ . Für  $i \leq i \leq k$  definieren wir einen Zeiger  $\phi(e_i) := f_i$ , wobei  $f_i$  die Kante zwischen  $v_{i-1}$  und  $v_i$  aus  $H$  ist. Wir sagen dann,  $\phi$  *verpackt*  $H$  in  $R$ .
- Ist  $\kappa$  eine Trifärbung von  $H$ , so setzen wir für alle  $e \in E(R) : \lambda(e) = \kappa(\phi(e))$ . Dann ist  $\lambda$  eine Kantenfärbung von  $R$  und wir nennen  $\lambda$  einen *Aufzug* von  $\kappa$  (durch  $\phi$ ).

**Satz 5.6 (Konsistente Aufzüge):**

Sei  $H$  eine Beinahe-Triangulation und  $R$  ein Kreis, in den  $H$  durch  $\phi$  verpackt ist. Sei  $\mathcal{C}$  die Menge aller Aufzüge von  $\phi$  von Trifärbungen von  $H$ . Dann ist  $\mathcal{C}$  konsistent.

*Beweis.* Sei  $e_1, \dots, e_k$  die Kanten von  $R$  und  $f_1, \dots, f_k$  die Kanten des geschlossenen Pfades um die Außenfacette von  $H$ . Sei  $\lambda \in \mathcal{C}$  und sei  $\theta \in \{-1, 0, 1\}$ . Zu zeigen ist, dass ein signiertes Matching  $M$  existiert, sodass  $\lambda$   $\theta$ -passend für  $M$  ist, und dass  $\mathcal{C}$  alle Kantenfärbungen beinhaltet, sodass  $R$  für  $M$   $\theta$ -passend ist. O.B.d.A. sei  $\theta = 0$ .

Da  $\lambda \in \mathcal{C}$  gilt, ist  $\lambda$  der Aufzug einer Trifärbung  $\kappa$  von  $H$ . Eine *Rippe* ist eine Folge  $g_0, r_1, g_1, r_2, \dots, r_t, g_t$ , wobei

- (i)  $g_0, \dots, g_t$  verschiedene Kanten von  $H$  sind,
- (ii)  $r_1, \dots, r_t$  verschiedene Facetten von  $H$  sind,
- (iii) falls  $t > 0$  gilt,  $g_0$  und  $g_t$  beide inzident zur Außenfacette von  $H$  sind, oder falls  $t = 0$  gilt,  $g_0$  zu keiner Innenfacette von  $H$  inzident ist,
- (iv) für  $1 \leq i \leq t$  gilt, dass  $r_i$  inzident zu den Facetten  $g_{i-1}$  und  $g_i$  ist und
- (v) für  $0 \leq i \leq t$  gilt, dass  $\kappa(g_i) \neq 0$  gilt.

Für jede Rippe sind die Werte von  $\kappa(g_0), \dots, \kappa(g_t)$  abwechselnd  $\pm 1$  und für jede Kante  $e$ , die nicht zur Rippe gehört aber inzident zu einer ihrer Facetten ist, gilt  $\kappa(e) = 0$ . Tauscht man die Vorzeichen von  $\kappa(g_0), \dots, \kappa(g_t)$ , so erhält man also eine neue Trifärbung von  $H$ .

Weiter sind alle Rippen disjunkt, sie teilen sich also weder Kanten noch Facetten. Für  $1 \leq i \leq k$  lässt sich jede Kante  $f_i$  entweder eindeutig einer Rippe zuordnen, wenn  $\kappa(f_i) = \pm 1$ , oder keiner Rippe zuordnen, wenn  $\kappa(f_i) = 0$ .

Wir verknüpfen jede Rippe  $g_0, r_1, g_1, r_2, \dots, r_t, g_t$  mit einem signierten Match  $(\{e_i, e_j\}, \mu)$ , wobei  $g_0 = f_i$  und  $g_t = f_j$  und  $\mu = +1$  oder  $-1$ , je nachdem ob  $t$  gerade oder ungerade ist, gilt. Die Menge aller dieser signierten Matches ist ein signiertes Matching  $M$  und  $\lambda$  ist  $\theta$ -passend für  $M$ .

Sei nun  $\lambda'$  eine beliebige Kantenfärbung von  $R$ , die  $\theta$ -passend für  $M$  ist, und definiere  $\kappa''(f_i) := \lambda'(e_i)$  (für  $1 \leq i \leq k$ ). Dreht man die Vorzeichen von  $\kappa$  in einigen Rippen um, so erhält man eine Trifärbung  $\kappa'$  von  $H$ , deren Einschränkung auf  $\{f_1, \dots, f_k\}$  die Trifärbung  $\kappa''$  ist. Daraus folgt, dass  $\lambda'$  ein Aufzug von  $\kappa'$  ist, also wie gefordert  $\lambda' \in \mathcal{C}$  gilt.  $\square$

Unser Ziel ist es, einen Algorithmus angeben zu können, der jede Triangulation  $T$  korrekt färbt und von dem wir zeigen können, dass er stets korrekt arbeitet. Aus 5.6 wird ein Teilalgorithmus abgeleitet, der in den folgenden beiden Fällen verwendet wird: wenn ein Kurzkreis in  $T$  gefunden wurde und im Fall, das nicht. Wird ein Kurzkreis  $C$  gefunden, so verpacken wir sein Inneres  $I$  in  $C$ , finden dann einen Aufzug für  $C$  und verbinden eine passende Kantenfärbung des Aufzugs mit der Kantenfärbung des restlichen Graphen. Wird dagegen kein Kurzkreis gefunden, so verpacken wir



jede auftretende Konfiguration  $K$  im Ring  $R$  ihrer freien Vervollständigung – als nächstes definiert – und gehen analog zum anderen Fall vor.

**Definition 29 (Freie Vervollständigung):**

Sei  $K$  eine Konfiguration. Eine Beinahe-Triangulation  $S$  heißt *freie Vervollständigung* von  $K$  mit Ring  $R$ , wenn

- (i)  $R$  ein induzierter Ring von  $S$  ist, der die Außenfacette von  $S$  begrenzt,
- (ii)  $G(K)$  ein induzierter Teilgraph von  $S$  ist,  $G(K) = S \setminus V(R)$  gilt, jede Facette von  $G(K)$  auch eine Facette von  $S$  ist, die Außenfacette von  $G(K)$  den Ring  $R$  und die Außenfacette von  $S$  beinhaltet,
- (iii) jeder Knoten  $v$  von  $S$ , der nicht in  $V(R)$  liegt, in  $S$  Knotengrad  $\gamma_K(v)$  hat.

Man kann leicht überprüfen, dass jede Konfiguration eine freie Vervollständigung besitzt. (Hier wird der Umstand benutzt, dass in der Definition von Konfiguration eine Ringgröße mindestens 2 gefordert ist – die Ringgröße ist dann genau die Länge des Rings in der freien Vervollständigung.) Gibt es zwei freie Vervollständigungen  $S_1$  und  $S_2$  von  $K$ , so existiert ein Homeomorphismus der Ebene, der  $G(K)$  punktweise fixiert und  $S_1$  auf  $S_2$  abbildet. Dazu verwendet man Eigenschaft (i) aus der Definition der Konfiguration. Es gibt also – bis auf Isomorphie – nur eine freie Vervollständigung, weswegen wir von *der* freien Konfiguration sprechen können.

Um die Anschauung des Lesers zu fördern folgt nun die Darstellung einer Konfiguration sowie ihrer freien Vervollständigung. Dabei folgen wir der Notation für die Knoten, wie sie in 5.1 dargestellt wurde.

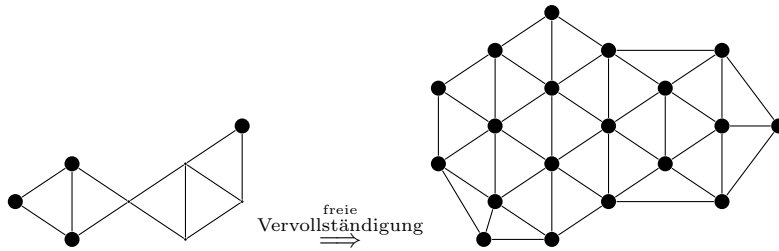


Abbildung 5.2: Eine Konfiguration und ihre freie Vervollständigung

**Definition 30 ( $D$ -Reduzibilität):**

Sei  $S$  die freie Vervollständigung einer Konfiguration  $K$  mit Ring  $R$ . Sei  $\mathcal{C}^*$  die Menge aller Kantenfärbungen von  $R$  und sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^*$  die Menge aller Beschränkungen von  $E(R)$  von Trifärbungen von  $S$ . Sei weiter  $\mathcal{C}'$  die größte konsistente Teilmenge von  $\mathcal{C}^* - \mathcal{C}$ . Die Konfiguration  $K$  heißt  *$D$ -reduzibel*, wenn gilt:  $\mathcal{C}' = \emptyset$ .

Wir werden später zeigen, dass keine  $D$ -reduzible Konfiguration in einem minimalen Gegenbeispiel vorkommen kann. In der gängigen Literatur gibt es noch andere Varianten, zu zeigen dass in einem

minimalen Gegenbeispiel keine Konfiguration vorkommen kann – etwa allgemeine  $C$ -Reduzibilität oder *block count*-Reduzibilität. Für unsere Zwecke benötigen wir zusätzlich lediglich einen Spezialfall der  $C$ -Reduzibilität.

**Definition 31 (Zusammenzug):**

Sei  $S$  die freie Vervollständigung einer Konfiguration  $K$  mit Ring  $R$  und sei  $\mathcal{C}'$  wie für die  $D$ -Reduzibilität gewählt. Sei  $X \subseteq E(S) - E(R)$ . Man sagt,  $X$  ist ein *Zusammenzug* (engl.: contract) von  $K$ , wenn  $X$  nicht leer ist,  $X$  zerstreut in  $S$  ist und keine Kantenfärbung aus  $\mathcal{C}'$  die Beschränkung von  $E(R)$  einer Trifärbung von  $S$  modulo  $X$  ist.

Es gibt noch weitere Reduktionsverfahren, die in diesem Beweis keine Verwendung finden. In Abschnitt 6.1 werden wir weiter darauf eingehen.

Eine weitere Bedingung für unsere minimalen Gegenbeispiele ist, dass kein Zusammenzug einer Konfiguration  $K$  vorkommen kann. Dies werden wir später weiter ausführen.

Mit Hilfe eines Computers wurde folgendes Resultat von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas gezeigt:

**Satz 5.7 (Reduzibilität der Konfigurationen):**

Für jede der 633 Konfigurationen  $K$ , die im Anhang (der Originalveröffentlichung) abgebildet sind, sei  $X$  die Menge der Kanten der freien Vervollständigung von  $K$ , die fett gedruckt sind. Gilt  $X \neq \emptyset$ , so ist  $K$   $D$ -reduzibel. Andernfalls gilt  $1 \leq \sharp X \leq 4$  und  $X$  ist ein Zusammenzug für  $K$ .

Aus diesem Ergebnis werden wir später Satz 5.2 herleiten.

Selbst wenn  $K$  eine Konfiguration ist, die in der Triangulation  $T$  auftritt, heißt das noch nicht, dass es eine Teildarstellung von  $T$  geben muss, die die freie Vervollständigung von  $K$  ist. Dies kann zu Schwierigkeiten führen, wenn wir versuchen, Erkenntnisse über  $T$  auf die freie Vervollständigung zu übertragen. Um Probleme beim Identifizieren der Komponenten von Graphen zu vermeiden, machen wir noch folgende Definition:

**Definition 32 (Projektion):**

Sei  $T$  eine Triangulation und  $S$  eine Beinahe-Triangulation. Eine *Projektion* von  $S$  auf  $T$  ist eine Abbildung  $\phi$  mit Definitionsmenge  $D(\phi) = V(S) \cup E(S) \cup F(S)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\phi$  bildet  $V(S)$  auf  $V(T)$ ,  $E(S)$  auf  $E(T)$  und  $F(S)$  auf  $F(T)$  ab.
- (ii) Für verschiedene  $u, v \in V(S)$  gilt genau dann  $\phi(u) = \phi(v)$ , wenn  $u, v$  beide inzident zur Außenfacette von  $S$  sind.
- (iii) Für verschiedene  $e, f \in E(S)$  gilt genau dann  $\phi(e) = \phi(f)$ , wenn  $e, f$  beide inzident zur Außenfacette von  $S$  sind.

(iv) Für verschiedene  $r, s \in F(S)$  gilt:  $\phi(r) \neq \phi(s)$ .

(v) Wenn  $x, y \in D(\phi)$  inzident in  $S$  sind, so sind  $\phi(x), \phi(y)$  auch inzident in  $T$ .

Die folgenden Resultate wollen wir ohne Beweis benutzen, da die Beweise beide langwierig sind und wenig zum Verständnis des eigentlichen Problems beitragen.

**Satz 5.8 (Existenz einer Projektion):**

Sei  $T$  eine Triangulation und  $K$  eine Konfiguration, die in  $T$  auftritt. Sei weiter  $S$  die freie Vervollständigung von  $K$ . Dann existiert eine Projektion  $\phi$  von  $S$  auf  $T$  derart, dass  $\phi(x) = x$  für alle  $x \in V(G(K)) \cup E(G(K)) \cup F(G(K))$ . Eine solche Projektion  $\phi$  heißt dann auch korrespondierende Projektion.

**Satz 5.9 (Darstellung als Beinahe-Triangulation):**

Sei  $T$  eine Triangulation und  $K$  eine Konfiguration, die in  $T$  auftritt. Sei  $S$  die freie Vervollständigung von  $K$  mit Ring  $R$ . Sei weiter  $\phi$  eine korrespondierende Projektion von  $S$  auf  $T$ . Sei  $H$  die planare Darstellung  $T$ , die man erhält, wenn man die Knoten aus  $V(G(K))$  entfernt, und bezeichne als Außenfacette die Facette von  $H$ , die  $V(G(K))$  enthält. Dann ist  $H$  eine Beinahe-Triangulation, und die Einschränkung von  $\phi$  auf  $E(R)$  verpackt  $H$  in  $R$ .

**Definition 33 (Sehen):**

Sei  $G$  eine planare Zeichnung eines Graphen. Sei  $v \in V(G)$  und  $e \in E(G)$ . Man sagt:  $v$  *sieht*  $e$ , wenn sowohl  $v$  als auch  $e$  inzident zur gleichen Innenfacette sind, aber  $v$  nicht inzident zu  $e$  ist.

**Definition 34 (Dreibein):**

Sei  $S$  die freie Vervollständigung einer Konfiguration  $K$  und sei  $X \subseteq E(S)$  zerstreut in  $S$  und  $\sharp X = 4$ . Ein Knoten  $v$  aus  $S$  heißt *Dreibein* von  $X$ , wenn gilt:

(i)  $v \in V(G(K))$ ,

(ii) es gibt mindestens drei weitere Knoten in  $S$ , die zu  $v$  adjazent sind und zu Kanten aus  $X$  inzident sind und

(iii) wenn  $\gamma_K(v) = 5$ , dann sieht  $v$  nicht jede Kante aus  $X$ .

**Satz 5.10 (Existenz eines Kurzkreises):**

Sei  $T$  eine Triangulation und  $K$  eine Konfiguration, die in  $T$  auftritt. Sei  $S$  die freie Vervollständigung von  $K$  und sei  $\phi$  die korrespondierende Projektion von  $S$  auf  $T$ . Sei  $X \subseteq E(S)$  zerstreut in  $S$  und  $\sharp X \leq 4$  und wenn  $\sharp X = 4$  gilt, so gebe es ein Dreibein für  $X$ . Gibt es einen Kreis  $C$  in  $T$  mit  $|E(C) - \phi(X)| \leq 1$ , so gibt es einen Kurzkreis in  $T$ .

*Beweis.* Sei  $X' = \phi(X) \cap E(C)$ . Da  $X$  in  $S$  zerstreut ist, ist keine Kante aus  $X$  inzident zur Außenfacette von  $S$ . Also ist jede Kante aus  $X$  inzident zu zwei verschiedenen Innenfacetten von

$S$ . Nach Satz 5.8 gilt für jede Facette  $t$  von  $T$ , die zu einer Kante aus  $X'$  inzident ist,  $t = \phi(r)$ , wobei  $r$  eine Innenfacette von  $S$  ist. Also ist  $X'$  auch zerstreut in  $T$ .

Angenommen,  $C$  sei kein Kurzkreis in  $T$ . Es gilt:  $\sharp E(C) \leq \sharp X + 1 \leq 5$ . Also teilt  $C$  den Graphen in ein Äußeres  $O$  und ein Inneres  $I$  mit  $C \subseteq I$ , sodass  $|I \cap V(T)| \leq 1$  bzw.  $I \cap V(T) = \emptyset$ , falls  $\sharp E(C) \leq 4$ . Es ist aber jede Kante aus  $X'$  inzident zu einem Dreieck aus  $T$ , das in  $I$  liegt, und alle diese Dreiecke sind verschieden, da  $X'$  zerstreut in  $T$  ist. Somit beinhaltet  $I$  mindestens  $\sharp X' \geq \sharp E(C) - 1$  Dreiecke von  $T$ . Falls  $\sharp E(C) \leq 4$  gilt, so ist dies jedoch nicht möglich, da  $E(C) \cap I = \emptyset$  gilt. Also gilt  $\sharp E(C) = 5$ ,  $\sharp X = 4$ , es existiert eindeutig ein Knoten  $t$  aus  $T$  in  $I$ ,  $d_T(t) = 5$ , und  $t$  sieht jede Kante aus  $C$ .

Da  $\sharp X = 4$ , gibt es wegen unserer Annahme ein Dreibein  $v \in V(S)$  für  $X$ . Entweder gilt also  $d_K(v) \geq 6$  oder es gibt eine Kante in  $X$ , die  $v$  in  $S$  nicht sieht, da  $v$  ein Dreibein ist. In beiden Fällen folgt dann  $v = \phi(v) \neq t$ . Da aber  $v = \phi(v)$  mindestens drei unterschiedliche Nachbarn in  $C$  hat, und jeder Knoten aus  $C$  adjazent zu  $t$  ist, folgt daraus, dass  $T$  einen Kurzkreis haben muss. Entweder gibt es also einen weiteren Kreis, der ein Kurzkreis ist, oder  $C$  selbst ist ein Kurzkreis.  $\square$

### Satz 5.11 (Dreibeine in den Konfigurationen):

Sei  $K$  eine der 633 Konfiguration aus dem Anhang, sei  $S$  deren freie Vervollständigung und sei  $X$  die Menge der Kanten der Zeichnung, die dick gedruckt sind. Wenn  $\sharp X = 4$  gilt, so gibt es ein Dreibein für  $X$ .

Die Menge der Konfigurationen ist endlich und für die meisten von ihnen gilt  $\sharp X \leq 3$ . Somit bleiben nur wenige Konfigurationen übrig, bei denen sich der Wahrheitsgehalt von Satz 5.11 von Hand überprüfen lässt. Robertson, Sanders, Seymour und Thomas benutzten hierzu einen Computer-Algorithmus. Dabei stellt sich bei solchen Datensätzen natürlich die Frage nach banalen Tippfehlern und abweichenden Begrifflichkeiten. Tatsächlich wurden die Konfigurationen in einer Datei gespeichert und diese wurde für alle Algorithmen, die im Zuge des gesamten Beweises auftreten, benutzt. Stößt man beim Überprüfen der Konfigurationen aus dem Anhang auf einen Fehler, ist dieser auf einen Fehler in der Darstellung des Graphen zurückzuführen. Um also die Korrektheit zu verifizieren, müsste jeder Verweis auf den Anhang durch einen Verweis auf die Datei ersetzt und der Computeralgorithmus von Hand ausgeführt werden.<sup>2</sup>

Nun können wir uns daran machen Satz 5.2 zu beweisen.

*Beweis zu Satz 5.2.* Sei  $K$  eine gute Konfiguration, die in  $T$  auftritt. Sei  $S$  die freie Vervollständigung von  $K$  mit Ring  $R$  und sei  $\phi$  eine korrespondierende Projektion von  $S$  auf  $T$ . Sei  $X$  die Menge der Kanten aus  $K$ , die im Anhang im Fettdruck dargestellt sind. Sei  $H$  gewählt gemäß 5.9 und sei  $\psi$  die Einschränkung von  $\phi$  auf  $E(R)$ .

Nach Satz 5.9 ist  $H$  somit eine Beinahe-Triangulation und  $\psi$  verpackt  $H$  in  $R$ . Sei weiter  $\mathcal{C}^*$  die Menge aller Kantenfärbungen von  $R$  und sei  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}^*$  die Menge aller Aufzüge von Trifärbungen von  $H$  durch  $\psi$ .

Nach Satz 5.6 ist  $\mathcal{C}_1$  konsistent. Weiter sei  $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}^*$  die Menge aller Einschränkungen von  $E(R)$

<sup>2</sup>Eine Sammlung aller verwendeten Algorithmen und Dateien findet sich unter <http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/ftpinfo.html> zum Download.

von Trifärbungen von  $S$ . Nach Satz 5.4 besitzt  $T$  keine Trifärbung, somit folgt  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ . Sei nun  $\mathcal{C}_3$  die größte konsistente Teilmenge von  $\mathcal{C}^* - \mathcal{C}_2$ . Da  $\mathcal{C}_1$  konsistent ist und  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$  gilt, folgt  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_3$ .

Man kann  $H$  so durch Kanten erweitern, dass sich eine Triangulation  $T'$  ergibt. Da  $T$  ein minimales Gegenbeispiel ist, besitzt  $T'$  – und somit auch  $H$  – eine Trifärbung. Also ist  $\mathcal{C}_1$  nicht leer und somit ist auch  $\mathcal{C}_3$  nicht leer. Weiterhin ist  $K$  auch nicht  $D$ -reduzibel.

Nach Satz 5.7 gilt für  $X$  sowohl  $1 \leq \#X \leq 4$  als auch, dass  $X$  ein Zusammenhang von  $K$  ist. Somit ist  $X$  zerstreut in  $S$ .

Nach Satz 5.1 besitzt  $T$  keinen Kurzkreis. Kombiniert man 5.11 und 5.10, so sieht man, dass es in  $T$  keinen Kreis  $C$  mit  $|E(C) - \phi(X)| = 1$  geben kann. Aber nach Satz 5.5 besitzt  $T$  eine Trifärbung modulo  $\phi(X)$ , die wir  $\kappa$  nennen. Die Einschränkung von  $K$  auf  $E(H)$  ist eine Trifärbung von  $H$ , da nach Wahl von  $H$  gilt:  $\phi(X) \cap E(H) = \emptyset$ . Sei  $\lambda$  der Aufzug von  $\kappa$  durch  $\psi$ . Es gilt  $\lambda \in \mathcal{C}_1$  und somit auch  $\lambda \in \mathcal{C}_3$ . Sei nun  $e \in E(S)$  eine Kante und definiere  $\kappa'(e) = \kappa(\phi(e))$ . Dann ist  $\kappa'$  eine Trifärbung von  $S$  modulo  $X$  und  $\lambda$  ist ihre Einschränkung auf  $R$ . Dies liefert einen Widerspruch dazu, dass  $X$  ein Zusammenhang von  $S$  ist. Dies zeigt das gesuchte Resultat.  $\square$

## 5.3 Zwangsläufigkeit

Dieser Abschnitt widmet sich dem Beweis von Satz 5.3.

### Definition 35 (Wagenrad, Radnabe):

Eine Konfiguration  $W$  heißt *Wagenrad* (engl.: cartwheel), wenn es einen Knoten  $w$ , genannt *Radnabe* (engl.: hub), und zwei Kreise  $C_1, C_2$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) es gilt  $\{w\} \cap C_1 = \emptyset, \{w\} \cap C_2 = \emptyset$  und  $C_2 \cap C_1 = \emptyset$ , aber  $\{w\} \cup C_1 \cup C_2 = V(G(W))$ ,
- (ii)  $C_1$  und  $C_2$  sind Teilgraphen von  $G(W)$  und die Außenfacette von  $C_2$  ist die Außenfacette von  $G(W)$ ,
- (iii)  $w$  ist adjazent zu allen Knoten von  $C_1$  aber keinem Knoten von  $C_2$ .

Es gibt folglich also vier Sorten von Kanten in einem Wagenrad: Kanten von  $C_1$ , Kanten von  $C_2$ , Kanten zwischen  $w$  und  $C_1$  sowie Kanten zwischen  $C_1$  und  $C_2$ . Zur Veranschaulichung noch eine Darstellung eines Wagenrades.

Die folgende Proposition geht zurück auf Birkhoff, genauer nachzulesen in [Bir13].

### Proposition 5.12 (Eindeutiges Wagenrad):

Sei  $T$  eine intern 6-fach zusammenhängende Triangulation und sei  $w$  ein Knoten von  $T$ . Dann gibt es in  $T$  genau ein Wagenrad mit Radnabe  $w$ .

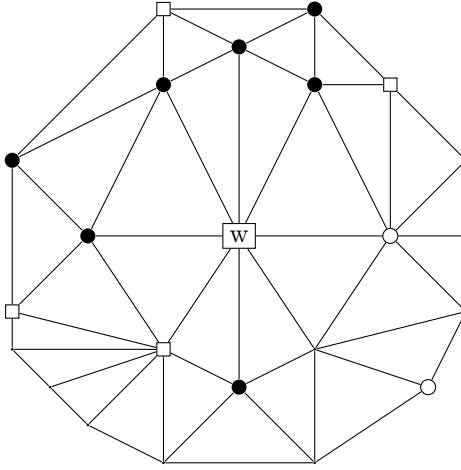


Abbildung 5.3: Darstellung eines Wagenrads

**Definition 36 (Auftretendes Wagenrad):**

Sei  $W$  ein Wagenrad. Eine Konfiguration  $K$  tritt in  $W$  auf, wenn  $G(K)$  eine Teilzeichnung von  $G(W)$  ist, jede Innenfacette von  $K$  eine Innenfacette von  $W$  ist und  $\gamma_K(v) = \gamma_W(v)$  für alle  $v \in V(G(K))$  gilt.

**Definition 37 (Fluss, Wert, Quelle, Senke,  $N_{\mathcal{P}}(W)$ ,  $\mathcal{W}_T$ ):**

Ein Fluss  $P$  (engl.: pass) ist ein 4-Tupel  $(K, r, s, t)$  mit

- einer Konfiguration  $K$ ,
- einer Zahl  $r \in \mathbb{N}$ ,
- zwei verschiedenen benachbarten Knoten  $s$  und  $t$  aus  $G(K)$  und
- für alle  $v \in V(G(K))$  gibt es einen  $s, v$ -Pfad und einen  $t, v$ -Pfad in  $G(K)$ , beide mit Länge höchstens 2.

Wir setzen  $r(P) = r$ ,  $s(P) = s$ ,  $t(P) = t$  und  $K(P) = K$ . Weiter nennen  $r$  den Wert von  $P$ , sowie  $s$  seine Quelle und  $t$  seine Senke. Eine Menge von Flüssen bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}$  und wir schreiben  $P \sim \mathcal{P}$ , wenn  $P$  zu einem Fluss aus  $\mathcal{P}$  isomorph ist.

Sei  $W$  ein Wagenrad mit Radnabe  $w$ . Dann definieren wir

$$N_{\mathcal{P}}(W) = 10(6 - \gamma_W(w)) + \sum (r(P) : P \sim \mathcal{P}, P \text{ tritt auf in } W, t(P) = w) - \sum (r(P) : P \sim \mathcal{P}, P \text{ tritt auf in } W, s(P) = w).$$

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{W}_T$  die Menge aller Wagenräder, die in  $T$  auftreten.

Ein Fluss  $P$  tritt in einer Triangulation  $T$  auf, wenn  $K(P)$  in  $T$  auftritt. Weiter tritt ein Fluss  $P$  in einem Wagenrad  $W$  auf, wenn  $K(P)$  in  $W$  auftritt.

Dies führt uns zu folgendem Resultat:

**Satz 5.13 (Summe aller  $N_{\mathcal{P}}(W)$ ):**

Sei  $T$  eine intern 6-fach zusammenhängende Triangulation und sei  $\mathcal{P}$  eine Menge von Flüssen.

Dann gilt:

$$\sum_{W \in \mathcal{W}_T} N_{\mathcal{P}}(W) = 120.$$

*Beweis.* Nach Satz 5.13 tritt für jeden Knoten  $v \in V(T)$  eindeutig ein Wagenrad  $W_v \in \mathcal{W}_T$  in  $T$  auf. Sei nun  $P$  ein Fluss mit Quelle  $s$ , der in  $T$  auftritt. Zu zeigen ist zunächst, dass  $P$  in  $W_s$  auftritt.

Seien dazu  $H = G(K(P))$  und  $G = G(W_s)$ . Nach Definition von Wagenrädern gilt  $V(H) \subseteq V(G)$ , da  $V(G)$  jeden Knoten  $v \in T$  enthält, für den es einen  $s, v$ -Pfad der Länge höchstens 2 in  $T$  gibt. Auch gilt  $E(H) \subseteq E(G)$ , denn es gilt  $E(H) \subseteq E(T)$ , sowie dass  $G$  eine Teilzeichnung von  $T$  ist. Sei weiter  $f$  eine Innenfacette von  $H$ . Dann ist  $f$  auch eine Facette von  $T$ , da  $P$  in  $T$  auftritt.

Zu zeigen bleibt, dass  $f$  eine Innenfacette von  $G$  ist. Angenommen,  $f$  wäre die Außenfacette. Dann ist  $f$  ein Teil der Außenfacette von  $G$ . Jede Kante aus  $T$ , die zu  $f$  inzident ist, ist eine Kante aus  $G$ , also ist  $f$  die Außenfacette von  $G$ . Da also jede Facette von  $G$  eine Facette von  $T$  ist, gilt  $G = T$ , was nicht möglich ist, da  $W_s$  Ringgröße mindestens 2 hat. Also ergibt sich ein Widerspruch. Somit muss  $f$  eine Innenfacette von  $G$  sein, also muss  $P$  in  $W_s$  auftreten, wie gefordert.

Da also jeder Fluss, der in einem der Wagenrad von  $T$  auftritt, auch in  $T$  selbst auftritt gilt:

$$\sum (r(P) : P \sim \mathcal{P}, P \text{ tritt auf in } T) = \sum_{v \in V(T)} \Sigma(r(P) : P \sim \mathcal{P}, P \text{ tritt auf in } W_v, s(P) = v)$$

Diese Gleichheit gilt auch, wenn man  $s(P)$  durch  $t(P)$  ersetzt. Somit ergibt sich

$$\sum_{v \in V(T)} N_{\mathcal{P}}(W_v) = \sum_{v \in V(T)} 10(6 - \gamma_W(v)).$$

Für jeden Knoten  $v \in V(T)$  gilt:  $\gamma_W(v) = d_T(v)$ . Setzte außerdem  $\sharp V(T) = n$ . Somit ergibt sich nach der eulerschen Polyederformel:

$$\sum_{v \in V(T)} \gamma_W(v) = \sum_{v \in V(T)} d_T(v) = 2 \cdot \sharp E(T) = 6n - 12$$

und durch Einsetzen erhält man

$$\sum_{v \in V(T)} N_{\mathcal{P}}(W_v) = 60n - 10(6n - 12) = 120,$$

was zu zeigen war. □

Aus Satz 5.13 folgt direkt das folgende Lemma.

**Lemma 5.14 (positives  $N_{\mathcal{P}}(W)$ ):**

Sei  $T$  eine intern 6-fach zusammenhängende Triangulation und sei  $\mathcal{P}$  eine Menge von Flüssen. Dann tritt in  $T$  ein Wagenrad  $W$  auf mit  $N_{\mathcal{P}}(W) > 0$ .

Unser Ziel dieses Abschnitts ist also dies zu zeigen:

**Satz 5.15 (gute Konfiguration im Wagenrad):**

In jedem Wagenrad  $W$  mit  $N_{\mathcal{P}}(W) > 0$  tritt eine gute Konfiguration auf.

Satz 5.3 folgt also direkt aus 5.14 und 5.15. Nun müssen wir also die Menge von Flüssen  $\mathcal{P}$  einer Triangulation weiter untersuchen und die Korrektheit von Satz 5.15 zeigen. Für eine Triangulation enthält die Menge  $\mathcal{P}$  unendlich viele Flüsse, welche sich aber glücklicherweise leicht anhand von sogenannten Regeln in 32 Klassen einteilen lassen.

**Definition 38 (Regel):**

Eine *Regel* ist ein 6-Tupel  $(G, \beta, \delta, r, s, t)$ , wobei

- $G$  eine Beinahe-Triangulation ist und für jeden Knoten  $v \in V(G)$  der Graph  $G \setminus \{v\}$  zusammenhängend ist,
- $\beta$  eine Abbildung von  $V(G)$  auf  $\mathbb{Z}_+$  ist,
- $\delta$  eine Abbildung von  $V(G)$  auf  $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$  derart ist, dass  $\beta(v) \leq \delta(v)$  gilt,
- $r \in \mathbb{N}$  und
- $s$  und  $t$  unterschiedliche adjazent Knoten in  $G$  sind und für jeden Knoten  $v \in V(G)$  ein  $v, s$ -Pfad  $Q_s$  und ein  $v, t$ -Pfad  $Q_t$  jeweils mit Länge höchstens 2 existieren, sodass für jeden Knoten  $w \in (Q_s \cup Q_t) \setminus \{s, t, v\}$  gilt:  $\delta(w) \leq 8$ .

**Definition 39 (Gehorchen):**

Sei  $P$  ein Fluss und  $R = (G, \beta, \delta, r, s, t)$  eine Regel. Man sagt,  $P$  *gehört*  $R$ , wenn  $P$  isomorph zu einem Fluss  $(K, r, s, t)$  ist, mit  $G(K) = G$  und  $\beta(v) \leq \gamma_K(v) \leq \delta(v)$  für jeden Knoten  $v \in V(G)$ .

Nun erweitern wir die Knotendefinitionen aus Abbildung 5.1, um Regeln in den Darstellungen unserer Konfigurationen abbilden zu können. Betrachtet man das Paar  $(\beta(v), \delta(v))$ , so stellt man fest, dass drei Fälle eintreten können:

- (a)  $5 \leq \beta(v) = \delta(v) \leq 8$  oder
- (b)  $\beta(v) = 5$  und  $6 \leq \delta(v) \leq 8$  oder



(c)  $5 \leq \beta(v) \leq 8$  und  $\delta(v) = \infty$ .

Der Fall (a) tritt am häufigsten ein, weswegen wir in diesem Fall nichts ändern oder hinzufügen. Für (b) erkennt man, dass  $\gamma(v) = \delta(v)$  gilt. In diesem Fall notieren wir ein “−” neben dem betreffenden Knoten. Im Fall (c) gilt  $\gamma(v) = \beta(v)$  und wir setzen ein “+” neben den Knoten.

Zusätzlich markieren wir noch die Knoten  $s$  und  $t$  sowie die Zahl  $r$ , indem wir die sie verbindende Kante entweder mit einer einfachen Pfeilspitze ( $r = 1$ ) oder einer doppelten Pfeilspitze ( $r = 2$ ) versehen, die auf  $t$  zeigt. Für alle Regeln, die wir zum Einteilen aufstellen, benutzen wir entweder  $r = 1$  oder 2.

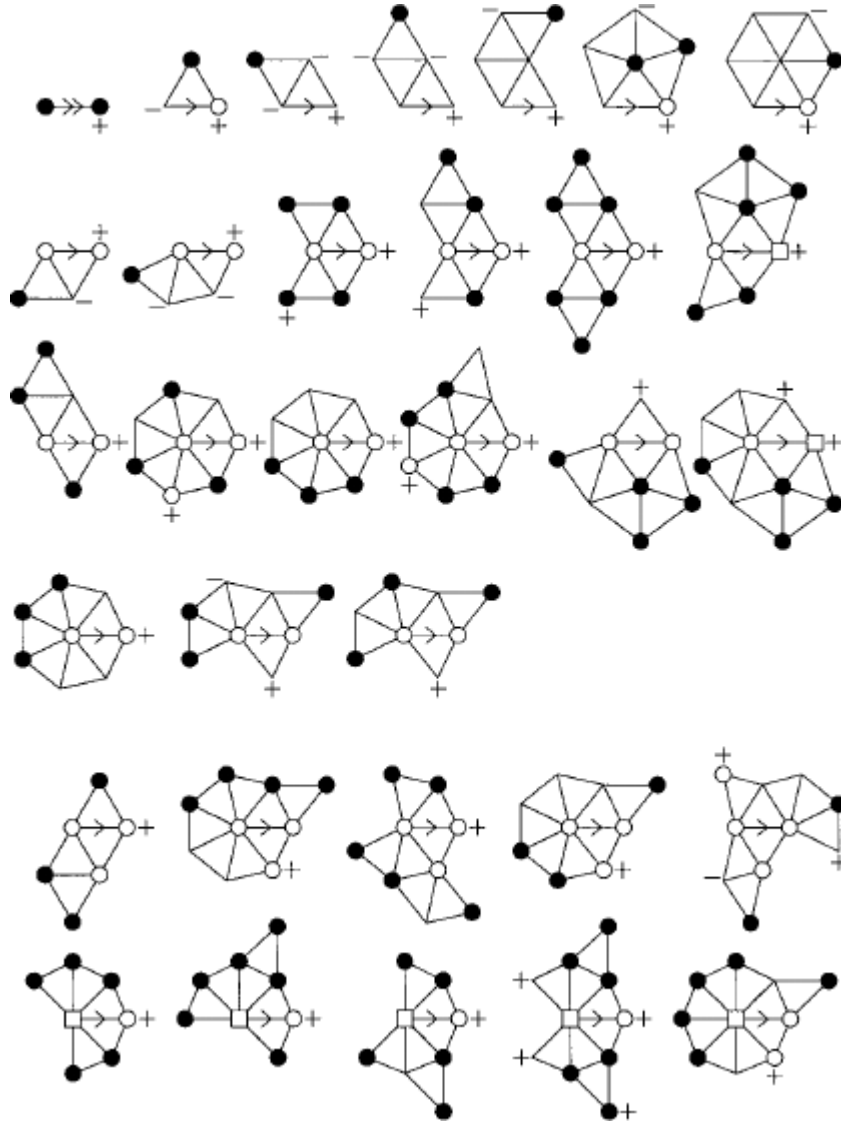


Abbildung 5.4: Darstellung der 32 Regeln, übernommen aus [RSST97]

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts benutzen wir  $\mathcal{P}$  nurnoch, um eine Menge von Flüssen zu beschreiben, die einer Regel gehorcht. Dazu ist zu bemerken, dass jeder Fluss genau einer Regel gehorcht, jedoch gibt es für einen Fluss  $P$  einige wenige Darstellungen, die einer Regel folgen, deren Isomorphismus von  $P$  auf  $(K, r, s, t)$  aber nicht eindeutig ist – zum Beispiel bei den Regeln 10 oder

31. In solchen Fällen zählen wir den Fluss  $P$  nur ein mal zu  $\mathcal{P}$ , da es sich bei  $\mathcal{P}$  nicht um eine Multimenge handelt.

Flüsse, die der Regel 1 gehorchen, haben den Wert  $r = 2$ , für alle anderen gilt  $r = 1$ . Weiter unterscheiden sich die ersten sieben Regeln von den anderen. Folgt ein Fluss  $P$  einer dieser Regeln, so gilt für die Quelle  $s$   $\gamma_P(s) \in \{5, 6\}$ , während in allen anderen Regel für Quelle  $s$  und Senke  $t$  folgendes gilt:  $\gamma_P(s) \in \{7, 8\}$  und  $\gamma_P(t) \geq 7$ . Die ersten sieben Regeln folgen einer gewissen Systematik. Alle anderen Regeln wurden jedoch durch ungeordnetes Durchprobieren aufgestellt und folgen daher keinem besonderen Muster.

Nun müssen wir noch zeigen, dass unsere Wahl von  $\mathcal{P}$  für Satz 5.15 geeignet ist. Um dies zu erreichen, zerlegen wir Satz 5.15 in drei Fälle, die wir Anhand des Grads der Radnabe  $v$  des Wagenrads  $W$  unterscheiden:

- $d_W(v) \leq 6$ ,
- $7 \leq d_W(v) \leq 11$  und
- $d_W(v) \geq 12$ .

Für den ersten dieser Fälle benötigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 5.16:**

Sei  $W$  ein Wagenrad mit Radnabe  $w$  mit  $d_W(w) \in \{5, 6\}$ . Für  $k = 1, \dots, 32$  seien  $p_k$  und  $q_k$  die Summen über die Werte  $r(P)$  aller Flüsse  $P$ , die der Regel  $k$  gehorchen und in  $W$  auftreten, bei denen  $w$  die Quelle bzw. Senke von  $P$  ist. Angenommen, es tritt keine gute Konfiguration in  $W$  auf, dann gilt:

- (i)  $p_1 = q_2 + q_3$
- (ii)  $p_3 = q_4$
- (iii)  $p_4 = q_5 + q_6$
- (iv)  $p_5 = q_7$

*Beweis.* Sei  $X$  die Menge aller Tripel  $(x, y, z)$  von Knoten, die mit  $w$  benachbart sind, derart, dass sie alle unterschiedlich sind und  $y$  sowohl zu  $x$  als auch zu  $z$  adjazent ist und  $\gamma_W(x) = 5$  gilt. Setze  $p_1 = \sharp X$ . Sei weiter  $q_2$  die Anzahl aller Tripel  $(x, y, z) \in X$ , für die  $\gamma_W(y) \geq 7$  gilt, und  $q_3$  die Menge der Tripel  $(x, y, z) \in X$  mit  $\gamma_W(y) \leq 6$  und  $\gamma_W(z) \geq 6$ . Da in  $W$  nach Voraussetzung keine guten Konfigurationen auftreten, gibt es kein Tripel  $(x, y, z) \in X$  mit  $\gamma_W(y) \leq 6$  und  $\gamma_W(z) = 5$ . Somit gilt  $q_2 + q_3 = \sharp X = p_1$ .

Für den Fall, dass  $\gamma_W(w) = 5$  gilt, sind  $p_3, p_4, p_5, q_4, q_5, q_6, q_7$  alle 0 und somit (ii), (iii) und (iv) wahr. Im weiteren sei also  $\gamma_W(w) = 6$ .

Sei nun  $X$  die Menge der Tripel  $(x, y, z)$  von Knoten, die mit  $w$  benachbart sind, derart, dass sie alle unterschiedlich sind,  $y$  adjazent zu sowohl  $x$  als auch  $z$  ist,  $\gamma_W(x) \leq 6$ ,  $\gamma_W(y) \leq 6$  und  $\gamma_W(u) = 5$  gilt, wobei  $u$  der andere Knoten – nicht  $w$  – ist, der sowohl zu  $x$  als auch  $y$  adjazent ist. Setze  $p_3 = \sharp X$ . Da nach Annahme keine gute Konfiguration in  $W$  auftritt, gilt für jedes dieser Tripel  $\gamma_W(z) \geq 6$ . Somit gilt  $q_4 = \sharp X = p_3$ , was (ii) zeigt.

Die Beweise für (iii) und (iv) verlaufen sehr ähnlich, weswegen hier nicht weiter darauf eingegangen wird.  $\square$

Aus 5.16 leiten wir Folgendes her.

**Satz 5.17 (gute Konfiguration im Wagenrad I):**

Sei  $W$  ein Wagenrad mit  $N_{\mathcal{P}}(W) > 0$  und Radnabe  $w$  mit  $d_W(w) \in \{5, 6\}$ . Dann tritt eine gute Konfiguration in  $W$  auf.

*Beweis.* Seien für die Radnabe  $w$  die Werte  $p_k$  und  $q_k$  definiert für  $k = 1, \dots, 32$ , genau wie in 5.16.

Angenommen, es trete keine gute Konfiguration in  $W$  auf. Wir werden  $N_{\mathcal{P}}(W) = 0$  zeigen, was einen Widerspruch darstellt. Sei zuerst  $\gamma_W(w) = 5$ . Dann sind die  $p_k = 0$  für  $k = 2, \dots, 32$  und ebenfalls die  $q_k = 0$  für  $k = 4, \dots, 32$ . Somit ergibt sich wegen 5.16

$$N_{\mathcal{P}}(W) = 10 + p_1 - q_1 - q_2 - q_3 = 0$$

Sei nun  $\gamma_W(w) = 6$ . Dann folgt wieder aus 5.16

$$N_{\mathcal{P}}(W) = p_1 + p_3 + p_4 + p_5 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 - q_6 - q_7 = 0$$

In beiden Fällen erhalten wir unseren gesuchten Widerspruch durch einfaches Einsetzen.  $\square$

Nun wenden wir uns dem dritten Fall zu, also für Radnaben mit Grad mindestens 12. Dafür benötigen wir ein anderes Zwischenresultat.

**Lemma 5.18:**

Sei  $W$  ein Wagenrad mit Radnabe  $w$  und sei  $v$  ein zu  $w$  adjazenter Knoten. Wenn keine gute Konfiguration in  $W$  auftritt, ist die Summe über die  $r(P)$  aller Flüsse  $P \in \mathcal{P}$ , die in  $W$  auftreten und die Quelle  $v$  und Senke  $w$  haben, höchstens 5.

Der Beweis hierzu verwendet im wesentlichen die Annahme, dass keine gute Konfiguration auftreten darf und betrachtet für jeder der 32 Regeln die Anzahl  $R_k$  der Flüsse, die in  $W$  auftreten und der  $k$ -ten Regel folgen, sowie die Summe  $R$  aller  $R_k$  und zeigt, dass  $R \leq 5$  gilt. Dazu unterscheidet der Beweis zwischen verschiedenen Zusammensetzungen von  $R$  aus den  $R_k$  für die fünf verschiedenen Fälle von Werten, die  $\gamma_K(v)$  annehmen kann. Dies gestaltet sich sehr lang und trägt wenig zum Verständnis des eigentlichen Problems bei. Deshalb wird für den vollständigen Beweis auf [RSST97, Seite 21, Lemma 4.7] verwiesen.

Daraus leiten wir unser nächstes Teilresultat ab.

**Satz 5.19 (gute Konfiguration im Wagenrad II):**

Sei  $W$  ein Wagenrad mit  $N_{\mathcal{P}}(W) > 0$  und mit Radnabe  $w$  mit  $d_W(w) \geq 12$ . Dann tritt in  $W$  eine gute Konfiguration auf.

*Beweis.* Angenommen, es würde keine gute Konfiguration in  $W$  auftreten. Setze  $d = \gamma_W(w)$  und sei  $D$  die Menge aller zu  $w$  adjazenter Knoten. Für alle  $v \in D$  sei  $R(v)$  die Summe aller  $r(P)$ , wobei  $P \in \mathcal{P}$  ein Fluss mit Quelle  $v$  und Senke  $w$  ist, der in  $W$  auftritt. Dann gilt nach 5.18, dass  $\sum_{v \in D} R(v) \leq 5 \cdot d$ . Somit gilt

$$N_{\mathcal{P}}(W) = 10(6 - d) + \sum_{v \in V} R(v) \leq 10(6 - d) + 5d = 60 - 5d \leq 0,$$

was ein Widerspruch ist. □

Damit sind zwei der drei Teile unseres ursprünglichen Ziels – nämlich Satz 5.15 und damit auch Satz 5.3 zu zeigen – geschafft. Damit bleibt noch die folgende Aussage.

**Satz 5.20 (gute Konfiguration im Wagenrad III):**

Sei  $W$  ein Wagenrad mit  $N_{\mathcal{P}}(W) > 0$  und mit Radnabe  $w$  mit  $d_W(w) \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$ . Dann tritt in  $W$  eine gute Konfiguration auf.

Diesen wesentlichen Schritt führten Robertson, Sanders, Seymour und Thomas in voller Länge aus – insgesamt etwa 13000 Zeilen. Dazu verfassten sie den Beweis in maschinenlesbarer Form, die von Hand nachprüfbar ist. Dieses Nachprüfen ist zumindest theoretisch möglich, jedoch raten die vier Autoren wegen der schieren Länge davon ab. Stattdessen empfehlen sie, die Korrektheit des angegebenen Beweisalgorithmus mit einem anderen Computerprogramm zu verifizieren, was bereits nach damaligem Stand der Technik innerhalb weniger Minuten möglich war.

Kombiniert man nun die Sätze 5.17, 5.19 und 5.20, so erhält man die Aussage 5.15. Daraus ergibt sich dann die Korrektheit der Aussage 5.3, die diesen Abschnitt motiviert hat.

## 5.4 Der Algorithmus

In diesem Abschnitt gehen wir soweit auf den von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas angegebenen Algorithmus ein, wie wir ihn für den Beweis von Satz 5.1 benötigen.

Dazu gehen wir weiter auf die bereits von Birkhoff gezeigten Resultate aus [Bir13] ein. Zunächst brauchen wir jedoch noch eine Definition.

**Definition 40 (Äquivalente Kantenfärbungen):**

Sei  $R$  ein Kreis und  $\kappa, \kappa'$  zwei Kantenfärbungen von  $R$ . Sei  $\lambda$  eine Permutation von  $\{-1, 0, 1\}$ .  $\kappa$  und  $\kappa'$  heißen *äquivalent*, wenn für jede Kante  $e \in E(R)$  gilt:  $\kappa'(e) = \lambda(\kappa(e))$ .

Zur Vereinfachung führen wir eine neue Schreibweise für Kantenfärbungen ein. Sei dazu  $R$  ein Kreis der Länge  $n$ , die Zahlen  $k_i \in \{-1, 0, 1\}$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und sei  $\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , derart dass  $\kappa(e_i) = k_i$  für jede Kante  $e_i$  des Kreises  $R$ .

**Lemma 5.21:**

Sei  $R$  ein Kreis der Länge 4 mit den Kanten  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , in dieser Reihenfolge. Sei  $\mathcal{C}_0$  die Menge aller Kantenfärbungen, die zu  $(0, 0, 0, 0)$  äquivalent sind. In gleicher Weise seien  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  die Mengen der Kantenfärbungen, die zu  $(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)$  äquivalent sind. Dann beinhaltet jede nichtleere konsistente Menge von Kantenfärbungen von  $R$  eine der Mengen  $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$  oder  $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_0$ .

**Lemma 5.22:**

Sei  $R$  ein Kreis der Länge 5 mit den Kanten  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$  in dieser Reihenfolge. Für  $1 \leq i \neq j \leq 5$  sei  $\mathcal{A}_{ij}$  definiert als die Äquivalenzklasse der Kantenfärbungen von  $R$ , äquivalent zu einer Kantenfärbung  $\kappa$  mit

$$\kappa(e_l) = \begin{cases} 1 & \text{falls } l = i \\ -1 & \text{falls } l = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $1 \leq i \leq 5$  sei  $\mathcal{C}_i = \mathcal{A}_{ij} \cup \mathcal{A}_{ik} \cup \mathcal{A}_{jk}$ , wobei für die beiden Kanten  $e_j, e_k \neq e_i$  die beiden Kanten sind, die je genau einen Endpunkt mit  $e_i$  gemeinsam haben. Seien weiter für  $1 \leq i \leq 5$  die Kanten aus  $R$ , die zu  $e_i$  unterschiedlich sind der Reihe nach mit  $e_a, e_b, e_c, e_d$  bezeichnet und sei  $\mathcal{D}_i = \mathcal{A}_{ac} \cup \mathcal{A}_{ad} \cup \mathcal{A}_{bc} \cup \mathcal{A}_{bd}$ . Sei weiter  $\mathcal{E} = \mathcal{A}_{12} \cup \mathcal{A}_{23} \cup \mathcal{A}_{34} \cup \mathcal{A}_{45} \cup \mathcal{A}_{51}$ .

Jede nichtleere konsistente Menge, die  $\mathcal{E}$  genügt, beinhaltet eine der Mengen

$$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_5, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_5, \mathcal{E}.$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{C}$  eine konsistente Menge.

- (i) Wenn  $\mathcal{A}_{12} \subseteq \mathcal{C}$  gilt, so beinhaltet  $\mathcal{C}$  eine der Mengen  $\mathcal{A}_{13}, \mathcal{A}_{15}$  und eine der Mengen  $\mathcal{A}_{23}, \mathcal{A}_{25}$ . Sei nun  $\kappa = (-1, 1, 0, 0, 0) \in \mathcal{C}$ . Da  $\mathcal{C}$  konsistent ist, existiert ein signiertes Matching  $M$  derart, dass  $\kappa$   $(-1)$ -passend für  $M$  ist und  $\mathcal{C}$  beinhaltet alle Kantenfärbungen, die  $(-1)$ -passend für  $M$  sind. Da  $\kappa$   $(-1)$ -passend für  $M$  ist, ist  $M$  also eines der beiden:

$$\{(\{e_2, e_3\}, -1), (\{e_4, e_5\}, 1)\} \text{ oder } \{(\{e_2, e_5\}, -1), (\{e_3, e_4\}, 1)\}$$

Ist  $M$  das erstere, so ist die Kantenfärbung  $(-1, 0, 1, 0, 0)$  für  $M$   $(-1)$ -passend und somit ein Element aus  $\mathcal{C}$ . Daher gilt dann auch  $\mathcal{A}_{13} \subseteq \mathcal{C}$ . An sonsten ist  $(-1, 0, 0, 0, 1)$  für  $M$   $(-1)$ -passend, also  $\mathcal{A}_{15} \subseteq \mathcal{C}$ . In ähnlicher Weise gibt es nur zwei signierte Matchings  $M'$ , für die  $\kappa$  1-passend ist. Daraus lässt sich analog ableiten, dass entweder  $\mathcal{A}_{23} \subseteq \mathcal{C}$  oder  $\mathcal{A}_{25} \subseteq \mathcal{C}$ .

(ii) Wenn  $\mathcal{A}_{13} \subseteq \mathcal{C}$  gilt, so beinhaltet  $\mathcal{C}$  eine der Mengen  $\mathcal{A}_{23}, \mathcal{A}_{35}$ .

Dieser Teil läuft ebenfalls sehr ähnlich zu den bereits geführten Schritten.

Sei nun  $\mathcal{C}$  eine konsistente Menge, die  $\mathcal{E}$  genügt. Wir können annehmen, dass eine der Mengen  $\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{23}, \mathcal{A}_{34}, \mathcal{A}_{45}, \mathcal{A}_{15}$ . Weiter gehen wir davon aus, dass nicht alle dieser Mengen in  $\mathcal{C}$  sind, da sonst  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$  gelten würde, wie gefordert. Aus Gründen der Symmetrie nehmen wir an, dass  $\mathcal{A}_{12} \subseteq \mathcal{C}$  und  $\mathcal{A}_{23} \not\subseteq \mathcal{C}$ . Aus (i) können wir nun annehmen, dass  $\mathcal{A}_{25} \subseteq \mathcal{C}$  gilt. Wenn auch  $\mathcal{A}_{15} \subseteq \mathcal{C}$  gilt, so ist  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ , wie gefordert. Also nehmen wir weiter an, dass  $\mathcal{A}_{15} \not\subseteq \mathcal{C}$ . Ebenfalls nach (i) ist dann  $\mathcal{A}_{13} \subseteq \mathcal{C}$ . Wegen (ii) gilt dann  $\mathcal{A}_{35} \subseteq \mathcal{C}$  und somit auch  $\mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{C}$ .  $\square$

Der von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas angegebene Algorithmus durchsucht die zu färbende Triangulation  $T$  nach Kurzkreisen. Tritt ein Kurzkreis in  $T$  auf, so verwendet er den Algorithmus, dem 5.6 zu Grunde liegt, teilt  $T$  anhand des Kreises in einen inneren und einen äußeren Teil und bestimmt für den inneren alle möglichen Färbungen. Das unter diesen Färbungen tatsächlich eine ist, die zusammen mit der Färbung des äußeren Teils eine gültige Färbung von ganz  $T$  ergibt, zeigen die obigen Resultate.

Damit muss dar also eine Triangulation, die ein Gegenbeispiel sein soll, keine Kurzkreise enthalten und ist somit intern 6-fach zusammenhängend.

## 6 Der Beweis von Appel und Haken

Nun widmen wir uns der Grundlage, auf die Robertson, Sanders, Seymour und Thomas aufbauten, als sie begannen, ihren Beweis zu entwickeln. Die Arbeit von Appel & Haken stammt aus dem Jahr 1976, zuerst von ihnen veröffentlicht im Illinois Journal of Mathematics – [AH77a] und [AH77b]. Beschäftigte man sich mit dem Vier-Farben-Problem, so kannte man diese Arbeit. Leider weißt sie zwei charakteristische Schwächen auf: Teile des Beweises sind nicht von Hand überprüfbar, sondern nur von einem Computer, und selbst der Teil, der von Hand durchführbar ist, ist so lang und komplex aufgebaut, dass es einer einzelnen Person sehr schwer fallen würde, dies auch zu tun.

Natürlich versuchten trotzdem Mathematiker weltweit, den Beweis von Appel & Haken zu prüfen und so den Vier-Farben-Satz zu verifizieren – so auch Robertson, Sanders, Seymour und Thomas. In der Einleitung ihres Veröffentlichung schrieben sie:

”We began by trying to read the A&H (Appel & Haken) proof, but very soon gave this up. To check that the members of their ‘unavoidable set’ were all reducible would require a considerable amount of programming, and *also* would require us to input by hand into the computer descriptions of some 1400 graphs; and this was not even part of their proof that was most controversial. We decided it would be easier, and more fun, to make up our own proof, using the same general approach as A&H. So we did.” [RSST97, Einleitung]

Zunächst betrachten wir nacheinander, die wesentlichen Bausteine des Beweises von Appel & Haken. Dazu wollen wir nicht zu sehr ins Detail gehen, sondern nur so weit wie nötig ist, die Verbesserungen der Methoden durch Robertson, Sanders, Seymour und Thomas zu erkennen.

### 6.1 Allgemeine Reduzierbarkeit

Der wichtigste Unterschied zwischen den beiden Beweisen besteht in der Wahl der angewendeten Reduzierbarkeitstheorien.

Um die folgenden Theorien verstehen zu können, geben wir in aller Kürze noch weitere Definitionen. Die bisher noch nicht genannten Reduktionen gehen auf Kempe zurück, die wichtigsten von ihm eingeführten und verwendeten Begriffe wollen wir ebenfalls klären.

**Definition 41 (Reduzent):**

Sei  $K$  eine Konfiguration mit den Außenecken  $v_1, \dots, v_r$  in zyklischer Anordnung. Ein Paar  $(S, \sigma)$ , bestehend aus einem Graphen  $S$  und einer surjektiven Abbildung  $\sigma$  von der Menge der Außenecken von  $K$  auf die Außenecken von  $S$  heißt *Reduzent* von  $K$ , wenn  $S$  weniger Ecken hat als  $C$  und zusätzlich folgendes gilt:

- $\sigma$  erhält die Nachbarschaftsrelation, d.h. für alle  $i = 1, \dots, k$  sind  $\sigma(v_i)$  und  $\sigma(v_{i+1})$  ebenfalls benachbart.
- Urbilder verschiedener Außenecken von  $S$  bezüglich  $\sigma$  trennen sich nicht gegenseitig, d.h. für  $i, j, k, l \in \{1, \dots, k\}$  mit

$$\sigma(v_i) = \sigma(v_j) \neq \sigma(v_k) = \sigma(v_l)$$

ist die Anordnung der Indizes  $i < k < j < l$  nicht möglich.

**Definition 42 (Kempe-Kette, Kempe-Netz, Kempe-Austausch):**

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $\chi$  eine Färbung von  $G$ .

- Eine *Kempe-Kette* ist ein Pfad in  $G$ , dessen Knoten abwechselnd mit den beiden Farben  $b, g \in \{1, 2, 3, 4\}$  gefärbt sind. Genauer spricht man auch von einer  $(b, g)$ -Kette.
- Ein *Kempe-Netz* von  $G$  ist ein Untergraph von  $G$ , bestehend aus allen Knoten und dazugehörigen Kanten, die mit den beiden Farben  $b, g \in \{1, 2, 3, 4\}$  gefärbt sind. Ein  $(b, g)$ -Netz von  $G$  besteht also aus allen  $(b, g)$ -Pfad von  $G$ . Die Knotenmenge eines Kempe-Netzes bezeichnet man mit  $V_K \subseteq V$ .
- Eine Färbung  $\tilde{\chi}$  entsteht durch *Kempe-Austausch* aus  $\chi$ , wenn in einem Kempe-Netz die Farben vertauscht werden. Die Färbung  $\tilde{\chi}$  ist also von der Form:

$$\tilde{\chi}(v) = \begin{cases} g & \text{falls } v \in V_K \text{ und } \chi(v) = b \\ b & \text{falls } v \in V_K \text{ und } \chi(v) = g \\ \chi(v) & \text{falls } v \in V \setminus V_K. \end{cases}$$

**Definition 43 (Menge aller Randfärbungen,  $\sigma$ -richtig,  $\sigma$ -verträglich, gut, Stufe-1-gut,  $\Phi$ -gut, Stufe- $n$ -gut):**

Sei  $K$  eine Konfiguration mit den Außenecken  $v_1, \dots, v_r$ ,  $G$  ein minimales Gegenbeispiel,  $(S, \sigma)$  ein Reduzent von  $K$  und  $\Psi(S)$  die Menge aller zulässigen Eckenfärbungen von  $S$ . Die *Menge aller Randfärbungen* für einen Graphen mit  $r$  Randknoten nennen wir  $\Psi(r)$ .

- $K$  ist nur dann  $\sigma$ -richtig in  $G$  eingebettet, wenn zwei Außenecken von  $K$ , die von  $\sigma$  gleich abgebildet werden, in  $G$  nicht benachbart sind.
- Eine Färbung  $\vartheta$  der Außenecken von  $K$  heißt  $\sigma$ -verträglich, wenn sie als Abbildung von



der Form  $\vartheta = \chi \circ \sigma$  für ein  $\chi \in \Psi(S)$  ist.

- Die Menge der  $\sigma$ -verträglichen Randfärbung bezeichnen wir mit  $\Phi(r, \sigma)$ .
- Eine Randfärbung ist *gut*, wenn sie sich in natürlicher Weise vom Rand auf den Rest des Graphen fortsetzen lässt.
- Mit  $\Psi_0(K)$  bezeichnen wir die Menge aller von Anfang an guten Randfärbungen.
- Für  $K$  ist eine Randfärbung *gut von Stufe 1*, wenn sie nicht von Anfang an gut ist, aber nach jeder Wahl eines Farbpaars jede Blockzerlegung einen Kempe-Austausch erlaubt, der sie in eine von Anfang an gute Randfärbung überführt. Die Menge aller dieser Randfärbungen heißt  $\Phi_1(K)$ .
- Eine Randfärbung heißt  $\Phi$ -*gut*, wenn sie nicht zu  $\Phi$  gehört, aber es ein Farbpaar gibt, dass man so wählen kann, dass für jede zugehörige Blockzerlegung ein Kempe-Austausch existiert, dass sie sich in ein Element aus  $\Phi$  transformieren lässt.
- Eine Randfärbung heißt *gut von Stufe  $n$* , wenn sie  $\Phi_n(K)$ -gut ist.

Für eine Konfiguration  $K$  ergibt sich also eine Folge von  $\Phi_{n-1}(K)$ . Da die Menge aller Randfärbungen  $\Phi(r)$  für jede Konfiguration endlich ist, wird diese Folge irgendwann stationär. Es gibt also einen Index  $n_0$ , sodass keine  $(n_0 + 1)$ -gute Randfärbung existiert. Nach Heesch setzen wir  $\Phi_{n_0}(K) = \overline{\Phi}(K)$ .

Diese Definition war vorher nicht nötig, da Robertson, Sanders, Seymour und Thomas ohne Reduktionen auskommen, die einen Reduzenten benötigen. Es gibt im wesentlichen vier Wege, zu zeigen, dass in einem minimalen Gegenbeispiel keine Konfigurationen auftreten:

**Definition 44 (A-, B-, C- und D-Reduzibilität):**

- **A-Reduzibilität**, benannt nach A. Errera  
Eine Konfiguration  $K$  heißt *A-reduzibel*, wenn sie einen Reduzenten besitzt, der die folgenden Eigenschaften besitzt:
  - $K$  kann in eine Minimaltriangulation nur  $\sigma$ -richtig eingebettet werden und
  - jede  $\sigma$ -verträgliche Randfärbung ist direkt durchfärbbar, das heißt, es gilt:  $\Phi(r, \sigma) \subset \Phi_0(K)$
- **B-Reduzibilität**, benannt nach Birkhoff  
Es sei  $K$  eine Konfiguration und  $(S, \sigma)$  ein Reduzent für  $K$ , derart dass  $K$  in ein minimales

Gegenbeispiel nur  $\sigma$ -richtig eingebettet werden kann.  $K$  heißt *B-reduzibel*, wenn jede  $\sigma$ -verträgliche Randfärbung entweder von Anfang an gut oder gut von Stufe 1 ist, also wenn gilt:  $\Phi(r, \sigma) \subset \Phi_1(K)$ .

- **C-Reduzibilität**, benannt nach C. E. Winn

Es sei  $K$  eine Konfiguration und  $(S, \sigma)$  ein Reduzent für  $K$ , derart dass  $K$  in ein minimales Gegenbeispiel nur  $\sigma$ -richtig eingebettet werden kann.  $K$  heißt *C-reduzibel*, wenn jede  $\sigma$ -verträgliche Randfärbung gut von irgendeiner Stufe ist, also:  $\Phi(r, \sigma) \subset \bar{\Phi}(K)$ .

- **D-Reduzibilität**

Von Heesch selbst entwickelt in [Hee69] veröffentlicht, nur um die zufällige alphabetische Reihenfolge einzuhalten D-Reduzibilität genannt. Sie bildet den Kern des Reduktionsschritts von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas und wurde deshalb schon in Definition 30 erläutert. In diesem Zusammenhang ist allerdings noch der Dürre-Heesch-Algorithmus zu nennen, der eine D-Reduktion durchführt. Eine Beschreibung des Algorithmus mit Teilen des Quellcodes findet sich etwa in [Fri94, Kapitel 6.4].

Appel & Haken verwendeten in ihrem Beweisversuch sowohl die D-Reduzibilität als auch den allgemeinen Fall der C-Reduzibilität. Auch verwendeten sie einen Computer, um für jede ihrer Konfigurationen den kürzest möglichen Reduktionsbeweis zu finden. Jedoch sind diese Reduktions-Beweise immernoch recht lang und die Menge ihrer Konfigurationen mächtiger als die von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas. Es erscheint also wenig wünschenswert, alle diese Beweise per Hand zu überprüfen.

Auch Robertson, Sanders, Seymour und Thomas nutzen die Hilfe von Computern, um ihre Resultate leichter überprüfen zu lassen. Allerdings sind in den 20 Jahren, die zwischen beiden Beweisen liegen, die Möglichkeiten, einen Computer zu nutzen und auch formell sicherzustellen, dass alles korrekt berechnet wurde, deutlich gewachsen. So existieren unabhängige Alternativumsetzungen der Algorithmen von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas, was bei Appel & Haken nicht der Fall ist.

Offensichtlich beeinflusst die Wahl der Reduzierbarkeitstheorien auch deutlich die Menge an zu untersuchenden Konfigurationen.

## 6.2 Die Konfigurationen nach Appel & Haken

Beide aktuellen Beweise der Vier-Farben-Vermutung folgen der Idee von Birkhoff. Er schilderte, dass es im wesentlichen drei Möglichkeiten gäbe: (1) die Vier-Farben-Vermutung ist falsch, (2) es könnte möglich sein, eine Menge von reduzierbaren Konfigurationen aufzustellen, sodass jeder planare Graph eine dieser Konfigurationen enthalten muss, oder (3) es gibt noch einen anderen, möglicherweise komplizierteren Ansatz, das Vier-Farben-Problem zu beweisen. [AH77a]

Da Appel & Haken ihre Reduzibilität auf andere Art und Weise prüfen, stellen sie auch andere

Anforderungen an ihre Konfigurationen. Dazu kann man die folgende und Definition 22 direkt mit einander vergleichen. Gemäß Birkhoff benutzen beide Teams den gleichen Begriff, jedoch fällt dieser bei Appel & Haken deutlich allgemeiner aus. Um Verwechslungen zu vermeiden, meinen wir ab jetzt eine Konfiguration im Sinne von Appel & Haken, wenn wir diese mit  $C$  bezeichnen – im Gegensatz zu einer Konfiguration nach Robertson, Sanders, Seymour und Thomas, welche stets mit  $K$  bezeichnet wurde.

**Definition 45 (Konfiguration):**

Ein planarer Graph  $C$  heißt *Konfiguration* im Sinne von Appel & Haken, wenn

- er regulär ist,
- die Außenknoten einen Ring der *Ringgröße*  $k \geq 4$  bilden,
- innere Knoten existieren,
- die beschränkten Gebiete von Dreiecken begrenzt werden,
- jedes Dreieck Grenze eines Gebiets ist.

Bei Robertson, Sanders, Seymour und Thomas betrachten wir eine Menge von 633 Konfiguration. Wegen der allgemeineren Definition bei Appel & Haken handelt es sich bei ihnen um 1482 einzelne Konfigurationen. Um eine bessere Vorstellung für diese Graphen zu bekommen, betrachten wir zunächst einige Beispiele. Ein nicht-triviales Beispiel für eine Konfiguration ist der *Birkhoff-Diamant* mit insgesamt 10 Knoten (linkes Bild).



Abbildung 6.1: Zwei Konfigurationen nach Appel & Haken: der Birkhoff-Diamant und ein 6-Stern

Andere Beispiele für Konfigurationen sind *Sterne*. Sie besitzen genau einen inneren Punkt (*„Zentrum“*) und einen Ring von äußeren Punkten, die alle mit dem Zentrum durch eine Kante verbunden sind. Ein Stern heißt  $k$ -Stern, wenn er genau  $k$  äußere Knoten besitzt. Einen 6-Stern findet man im rechten Bild.

**Definition 46 (Äquivalente Konfigurationen):**

Zwei Konfigurationen  $C' = (V', E')$  und  $C'' = (V'', E'')$  heißen *äquivalent*, wenn es eine Bijektion  $\varphi : V' \rightarrow V''$  gibt, die in beide Richtungen die Adjazenzstruktur erhält.

Nun können wir davon sprechen, dass ein Graph eine Konfiguration enthält, indem wir folgende Definition bemühen:

**Definition 47 (Enthaltene Konfiguration):**

Man sagt, ein Graph  $G$  *enthält* eine Konfiguration  $C$ , wenn es einen geschlossenen Pfad  $K$  gibt, sodass der von den Knoten von  $K$  und den im Innengebiet liegenden Knoten von  $K$  gebildete Teilgraph  $C_K$  von  $G$  eine zu  $C$  äquivalente Konfiguration ist.

Die Verallgemeinerung der Definition von Appel & Haken benötigt eine ausgefeiltere Theorie, wann eine Konfiguration enthalten ist, was sowohl das Finden als auch das bereits beschriebene Reduzieren verkompliziert. Das macht es schwerer, den Beweisschritten von Appel & Haken zu folgen, als es bei Robertson, Sanders, Seymour und Thomas der Fall war.

Auch machten Appel & Haken nicht davon gebrauch, dass Trifärbungen äquivalent zu 4-Färbungen sind. Die dadurch erhöhte Komplexität der nachzuvollziehenden Algorithmen und machte es noch schwerer, den Beweis tatsächlich “zu glauben”. Auch auf das Suchen von Wagenrädern verzichteten Appel & Haken, sodass sie für ihre Konfigurationen wesentlich größere Teilgraphen untersuchen mussten, als nur die zweite Nachbarschaft eines Knotens. Dadurch wuchsen nicht nur die einzelnen Konfigurationen, sondern auch ihre unvermeidbare Menge weiter an.

## 7 Fazit

Der eigentliche Beweis des Vier-Farben-Satzes wurde hier erbracht. Dazu haben wir uns mit den Grundlagen – sowohl topologisch als auch kombinatorisch – auseinandergesetzt. Dann haben wir in Kürze interessante historische Teilerfolge aufgezeigt. Wir sind den Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas im Detail nachvollzogen, soweit dies mit kombinatorischen Mitteln durchzuführen war. Allerdings wurde auf die genaue Analyse des eigentlichen Algorithmus sowie der Computerprogramme für 5.20 und 5.1 verzichtet. Dabei handelt es sich jedoch um Korrektheitsbeweise für Algorithmen, welche eher für eine Arbeit im Bereich der Informatik geeignet sind. Dann haben wir einen Blick auf den älteren Beweis von Appel & Haken geworfen, um die Unterschiede und Schwächen herauszustellen. Beschließen wollen wir diese Arbeit mit einigen Umformulierungen als Ausblick auf zukünftige Anwendungen der hier gezeigten Resultate.

Die Entstehung des Vier-Farben-Satzes ist motiviert durch das Färben von Landkarten. Jedoch ist es typisch für mathematische Probleme, dass ihre Lösung weitere Erkenntnisse liefert oder Fragen beantwortet, die auf den ersten Blick wenig mit dem eigentlichen Problem zu tun zu haben scheinen. Es ist allerdings noch offen, welche Probleme sich durch Übertragen auf das Vier-Farben-Problem lösen lassen. Deshalb liefern wir jetzt Resultate, deren Äquivalenz zum Vier-Farben-Problem bereits gezeigt wurde.

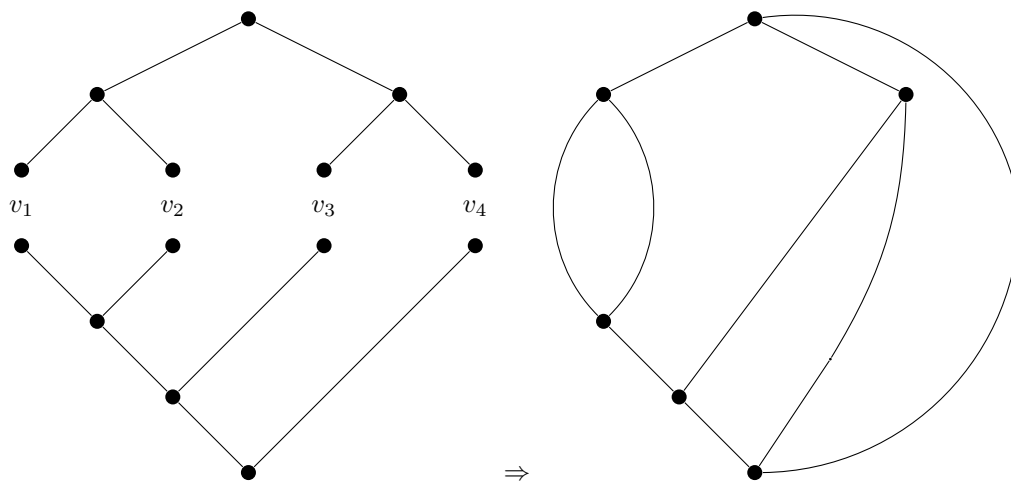


Abbildung 7.1: Äquivalenz zwischen 7.1 und 1.3

Zunächst betrachten wir das Vektor-Kreuzprodukt im  $\mathbb{R}^3$ , welches bekanntermaßen nicht assoziativ

ist. Also ist der folgende Ausdruck für  $k \geq 2$  nicht wohldefiniert:

$$v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k.$$

Um die Wohldefiniertheit herzustellen, ist es erforderlich, Klammern zu setzen, um die Reihenfolge der Multiplikationen festzulegen. Diese Klammersetzung nennen wir *Assoziation*, sie besteht aus  $k - 2$  Klammer-Paaren. Für  $k = 4$  wären also folgende Terme Beispiele für Assoziationen:

$$(v_1 \times v_2) \times (v_3 \times v_4) \text{ und } ((v_1 \times v_2) \times v_3) \times v_4.$$

Es stellt sich die Frage, ob es für zwei Vorgegebene Assoziationen eine Menge von Vektoren gibt, für die beide Assoziationen das gleiche Ergebnis liefern. Die triviale Lösung wäre natürlich  $v_1 = v_2 = \cdots = v_k$ . Aber gibt es noch weitere? Und auch solche Mengen, deren Auswertung des Kreuzprodukts nicht Null ist?

**Satz 7.1:**

Seien  $e_1, e_2, e_3$  die Einheitsvektoren im  $\mathbb{R}^3$ . Seien zwei Assoziationen zu  $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k$  gegeben. Dann gibt es für  $v_1 \cdots v_k$  eine Belegung mit  $e_1, e_2, e_3$  derart, dass beide Assoziationen das gleiche Ergebnis ungleich Null liefern.

Der Beweis erfolgte durch Kaufmann ([Kau90]), indem er zeigt, dass sich aus einer Instanz seines Problems eine Instanz des Vier-Farben-Problems erzeugen lässt. Dazu erzeugte er für die beiden Assoziationen ihren Berechnungsbaum. Diese haben die gleiche Menge von Blattknoten, nämlich die  $v_1, \dots, v_k$ . Er drehte einen der beiden Bäume und identifizierte die Blattknoten miteinander und ersetzte die so entstehenden Knoten durch in Kurven durchlaufende Kanten. Dann verband er noch die beiden Wurzeln der Bäume durch eine direkte Kante und erhielt so einen planaren Graphen ohne Schleifen, bei dem jede Kante zwischen zwei unterschiedlichen Facetten verläuft. Ein Beispiel findet sich in Abbildung 7.

Aus der existierenden Trifärbung des rechten Graphen mit den Farben 1, 2, 3 lässt sich eine Zuweisung der  $e_i$  auf die  $v_j$  herleiten. Und da die Färbung sich auf beide Berechnungsbäume anwenden lässt, sind auch die Auswertungen der Assoziationen gleich.

Weitere Resultate, die aus dem Vier-Farben-Satz hergeleitet werden konnten, stammen etwa aus der Lie-Algebra oder der Teilbarkeitstheorie. Auf diese wollen wir hier nicht weiter eingehen und nennen sie nur aus Gründen der Vollständigkeit.

**Satz 7.2:**

Sei  $G$  ein zusammenhängender kubischer Graph, dann gilt:  $W_{sl(2)}(G) = 0 \Rightarrow W_{sl(N)}^{top}(G) = 0$ .

Ein weiteres Resultat stammt von Matiyasevich (aus [Mat]):

**Satz 7.3:**

Es gibt lineare Funktionen  $A_k, B_k, C_k, D_k$  in 21 Variablen für  $k = 1, \dots, 986$  derart, dass der Vier-Farben-Satz äquivalent ist zu folgender Aussage: Für zwei Zahlen  $n, m \in \mathbb{N}$  existieren

$c_1, c_2, \dots, c_{20} \in \mathbb{N}$  sodass

$$\prod_{k=1}^{986} \left( \frac{A_k(m, c_1, c_2, \dots, c_{20}) + 7^n B_k(m, c_1, c_2, \dots, c_{20})}{C_k(m, c_1, c_2, \dots, c_{20}) + 7^n D_k(m, c_1, c_2, \dots, c_{20})} \right)$$

nicht durch 7 teilbar ist.

# Literaturverzeichnis

- [AH77a] APPEL, K. ; HAKEN, W.: Every planar map is Four Colorable. Part I Discharging. In: *Illinois Journal of Mathematics* 21 (1977), S. 429–490
- [AH77b] APPEL, K. ; HAKEN, W.: Every planar map is Four Colorable. Part II Reducibility. In: *Illinois Journal of Mathematics* 21 (1977), S. 491–567
- [Bir13] BIRKHOFF, George D.: The Reducibility of Maps. In: *American Journal of Mathematics* 35 (1913), S. 115–128
- [Fri94] FRITSCH, R.: *Der Vierfarbensatz*. Mannheim : BI Wissenschaftsverlag, 1994
- [Hee69] *Kapitel* Untersuchungen zum Vierfarbenproblem. In: HEESCH, H.: *Hochschulsriptum 810/a/b*. Mannheim : Bibliographisches Institut, 1969
- [Kau90] KAUFMANN, L. H.: Map coloring and the vector cross product. In: *Journal of Combinatorial Theory* 48 (1990), S. 145–154
- [Mat] MATIYASEVICH, Y.: The Four Colour Theorem as a possible corollary of binomial summation. – Manuscript
- [RSST97] ROBERTSON, N. ; SANDERS, D. ; SEYMOUR, P. ; THOMAS, R.: The Four-Colour Theorem. In: *Journal of Combinatorial Theory* 70 (1997), S. 2–44
- [Saa77] SAATY, T. L.: Thirteen colorful variations on Guthrie’s Four-color Conjecture. In: *Amer. Math. Monthly* 79 (1977), S. 2–43
- [Tai80] TAIT, P. G.: Note on a theorem in geometry of position. In: *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* 29 (1880), S. 657–660



# Abbildungsverzeichnis

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Der $K_5$ und der $K_{3,3}$ . . . . .   | 10 |
| 4.1 | Die Birkhoff-Zahl im Laufe der Zeit . . . . .                                 | 17 |
| 5.1 | Darstellung von Knoten in Konfigurationen . . . . .                           | 20 |
| 5.2 | Eine Konfiguration und ihre freie Vervollständigung . . . . .                 | 25 |
| 5.3 | Darstellung eines Wagenrads . . . . .   | 30 |
| 5.4 | Darstellung der 32 Regeln . . . . .   | 33 |
| 6.1 | Zwei Konfigurationen nach Appel & Haken: der Birkhoff-Diamant und ein 6-Stern | 43 |
| 7.1 | Äquivalenz zwischen 7.1 und 1.3 . . . . .                                     | 45 |

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel und Quellen als die angegebenen benutzt habe. Weiterhin versichere ich, die Arbeit weder bisher noch gleichzeitig einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt zu haben.

Würzburg, den \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_  
(Andre Löffler)

## 8 Anhang

### 8.1 Konfigurationen nach Robertson, Sanders, Seymour und Thomas

