

Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Geometrie

Bachelorarbeit

Der Vier-Farben-Satz

Andre Löffler

Abgegeben am DD.month.YYYY



Betreuer:
Dr. Theo Grundhöfer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Definitionen	5
2.1	Topologische Definitionen	5
2.2	Kombinatorische Definitionen	7
3	Übergang zwischen Topologie und Kombinatorik	13
4	Vorüberlegungen	14
4.1	Einschränkungen für minimale Gegenbeispiele	14
5	Der Beweis von Appel und Haken	16
5.1	Die Konfigurationen	16
5.2	Reduzierbarkeit	18
6	Der Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas	19
6.1	Konfigurationen	19
7	Umformulierungen	21
	Literatur	22

1 Einleitung

Die Formulierung des Vier-Farben Satzes geht auf eine Beobachtung zurück, die Francis Guthrie im Jahr 1852 machte. Francis Guthrie studierte Rechtswissenschaften, war Hobbybotaniker und hatte einen Abschluss als Mathematiker. Er versuchte, eine Landkarte der Grafschaften Englands zu illustrieren, und kam zu einer recht anschaulichen Vermutung, die Mathematiker 150 Jahre lang beschäftigen sollte.

Francis' Bruder Frederick Guthrie wand sich am 23. Oktober 1852 mit diesem Problem an seinen Lehrer Augustus de Morgan, der zu dieser Zeit am University College in London unterrichtet.¹ Fasziniert von dieser Problematik schrieb de Morgan einen Brief an Sir William Rowan Hamilton. Dieser Notiz ist die erste schriftliche Formulierung des Vierfarbenproblems zu entnehmen:

Satz 1.1 (historische Formulierung):

A student of mine asked me to day to give him reason for a fact which I did not know was a fact, and do not yet. He says, that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured – four colours may be wanted but not more. The following is his care in which four are wanted. [...]

Query cannot a necessity for five or more be invented. As far as I see at this moment, if four ultimate compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them inclose the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for colour meeting colour except at a point. [Fri94]

Die ursprüngliche Fragestellung lautet also: Kann man eine beliebige Landkarte so einfärben, dass keine zwei Länder, die sich den Abschnitt einer Grenzlinie teilen, die gleiche Farbe haben, wenn man die Farbpalette auf vier Farben beschränkt? Eine Landkarte lässt sich als mathematisches Konstrukt auffassen, jedoch bedarf es dazu einiger Überlegungen. R. und G. Fritsch definieren eine Landkarte \mathcal{L} als “[...] eine endliche Menge von Jordanbögen in der Ebene \mathbb{R}^2 derart, dass der Durchschnitt von je zwei verschiedenen Jordanbögen in \mathcal{L} entweder leer oder ein gemeinsamer Randpunkt dieser Jordanbögen ist.” [Fri94] Diese Definition erscheint auf den ersten Blick eigenartig, benutzt sie doch keinen der zu erwartenden Begriffe wie “Land” oder “Grenze”.

Die historische Formulierung wirkt nach heutigen Maßstäben etwas geschwollen und ist sprachlich nicht mehr zeitgemäß. Heute werden Aussagen zumeist prägnanter abgefasst. Bei [Fri94] findet

¹Um alle beteiligten Personen, ihre Lebensläufe und ihr Zusammenwirken besser kennenzulernen empfiehlt sich die Lektüre des ersten Kapitels von [Fri94]

man eine aktuelle Variante auf Seite 87:

Satz 1.2 (topologische Formulierung):

Es seien \mathcal{L} eine Landkarte, $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ die Menge der Länder von \mathcal{L} und $n \in \mathbb{N}$. Eine n -Färbung von \mathcal{L} ist eine Abbildung $\varphi : \mathcal{M}_{\mathcal{L}} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Eine n -Färbung ist *zulässig*, wenn benachbarte Länder immer verschiedene Werte (“Farben”) haben.

Um dies korrekt erfassen und schließlich auch beweisen zu können, werden topologische Resultate wie der Jordansche Kurvensatz benutzt. Diese wiederum erfordern zahlreiche Vorüberlegungen, die sich sehr umfangreich gestalten und wenig zum eigentlichen Beweis beitragen. Stattdessen werden wir eine andere Formulierung des Vier-Farben-Satzes benutzen, die kombinatorisch motiviert ist.

Satz 1.3 (Graphentheoretische Formulierung):

Jeder planare Graph ohne Schleifen ist 4-färbbar.

Diese Variante wirft einige Fragen nach Begrifflichkeiten auf, welche jedoch bei genauerer Betrachtung leicht verständlich sind. Im nächsten Abschnitt werden wir uns zunächst den allgemeinen Definitionen widmen, die nötig sind, um diese Problematik graphentheoretisch angehen zu können. Danach werfen wir einen Blick auf den älteren Beweis von Appel und Haken, um den Ausgangspunkt für die Arbeit von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas darzulegen. Im Anschluss werden wir diese Arbeit nachvollziehen, indem die wesentlichen Schritte, die “Reduktion” und die “Zwangsläufigkeit”, genauer beleuchtet werden. Abschließend werden noch einige Umformulierungen und Anwendungen des Vier-Farben-Satzes diskutiert.

2 Definitionen

2.1 Topologische Definitionen

Ohne genauer auf die topologischen Grundlagen einzugehen, wollen wir trotzdem die Äquivalenz zwischen 1.2 und 1.3 zeigen. Dazu bedarf es allerdings eines Mindestmaßes an Begrifflichkeiten, die im folgenden erläutert werden.

Wesentlich für die Frage, ob eine Landkarte färbbar ist, ist die Frage, was eine solche eigentlich ist. Der Vollständigkeit halber ist also hier nochmals die Definition zu nennen, die bereits aus der Einleitung bekannt ist, sowie einige zusätzliche Begriffe.

Definition 1 (Jordanbogen, Endpunkt):

Eine Teilmenge C der Ebene \mathbb{R}^2 ist ein *Jordanbogen*, wenn es eine injektive stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $C = c(t) | t \in [0, 1]$ gibt. Für einen Jordanbogen j bezeichnet man die Endpunkte mit $c_j(0)$ und $c_j(1)$.

Damit können wir nun eine Landkarte als mathematisches Konstrukt erklären.

Definition 2 (Landkarte, Ecke, neutrale Punkte, Neutralitätsmenge, Land):

- Eine *Landkarte* \mathcal{L} ist eine endliche Menge von Jordanbögen in der Ebene \mathbb{R}^2 derart, dass der Durchschnitt von je zwei verschiedenen Jordanbögen in \mathcal{L} entweder leer oder ein gemeinsamer Endpunkt dieser Jordanbögen ist.
- Die Anzahl aller Jordanbögen einer Karte \mathcal{L} bezeichnen wir mit $k_{\mathcal{L}}$.
- Ein Punkt in \mathbb{R}^2 ist eine *Ecke* v_i von \mathcal{L} , wenn er Endpunkt einer Kante von \mathcal{L} ist. Mit $v_{\mathcal{L}}$ bezeichnen wir die Anzahl der Ecken von \mathcal{L} .
- Ein *neutraler Punkt* ist ein Punkt der zu einer Kante von \mathcal{L} gehört.
- Die *Neutralitätsmenge* $N_{\mathcal{L}}$ von \mathcal{L} ist die Menge aller ihrer neutralen Punkte, also die Vereinigung aller Jordanbögen von \mathcal{L} .

- Ein *Land* von \mathcal{L} ist eine Bogenkomponente des Komplements der Neutralitätsmenge von \mathcal{L} , das heißt, von $\mathbb{R}^2 \setminus N_{\mathcal{L}}$. Die Anzahl aller Länder ist mit $f_{\mathcal{L}}$ bezeichnet.

Eine besondere Form von Landkarten wird für unsere späteren Betrachtungen besonders relevant sein:

Definition 3 (Reguläre Landkarte):

Eine Landkarte \mathcal{L} ist *regulär*, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Sie ist nicht leer,
- $N_{\mathcal{L}}$ ist zusammenhängend,
- sie enthält keinen Jordanbogen B , die zwei Komponenten verbindet, die in der Landkarte $\mathcal{L} \setminus \{B\}$ nicht verbunden wären,
- es gibt keine Ecke, die Endpunkt von nur einem Jordanbogen ist,
- je zwei Länder berühren höchstens einen gemeinsamen Jordanbogen.

Zusätzlich brauchen wir noch ein weiteres Konstrukt, das sich direkt aus Landkarten ableiten lässt.

Definition 4 (duale Landkarte):

Eine Landkarte \mathcal{L}^* heißt *dual* zu der Landkarte \mathcal{L} , wenn gilt:

1. keine Ecke von \mathcal{L}^* ist ein neutraler Punkt von \mathcal{L} ,
2. jedes Land von \mathcal{L} enthält genau eine Ecke von \mathcal{L}^* ,
3. zwei Ecken von \mathcal{L}^* sind genau dann durch eine Kante in \mathcal{L}^* verbunden, wenn sie in benachbarten Ländern liegen,
4. eine Kante von \mathcal{L}^* enthält nur Punkte der beiden Länder von \mathcal{L} , denen ihre Ecken angehören, und genau einen inneren Punkt einer gemeinsamen Grenzlinie dieser Länder.

Das zu jeder Landkarte mit mindestens zwei Ländern stets eine duale Landkarte existiert, lässt sich ebenfalls [Fri94] entnehmen. Bei der dualen Landkarte handelt es sich um ein Konstrukt, das von einem Graphen im kombinatorischen Sinne nicht mehr weit entfernt ist, wie nach der Lektüre der nächsten Abschnitte ersichtlich wird. Anschaulich betrachtet entspricht das Dualisieren einer Karte dem Wählen einer Hauptstadt für jedem Land und dem Verbinden dieser Städte durch Autobahnen, die sich nicht kreuzen.

Eine Besonderheit stellen folgende Landkarten dar.

Definition 5 (Kubische Landkarte):

Eine Landkarte heißt *kubisch*, wenn sie regulär ist und alle Ecken zwischen genau drei Ländern liegen.

Für nichtleere und zusammenhängende Landkarten gilt die wohl bekannte *Eulersche Polyederformel*

$$v_{\mathcal{L}} - k_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{L}} = 2$$

welche wir hier ohne Beweis angeben. Damit lässt sich die folgende Ungleichung zeigen, welche für den Beweis des Vier-Farben-Satzes von elementarer Bedeutung ist.

Satz 2.1 (Summe der Eckengrade):

Für reguläre Landkarten gilt:

$$\sum_{r=1}^{v_{\mathcal{L}}} (6 - d_{\mathcal{L}}(v_r)) \geq 12$$

Beweis. Mit der Eulerschen Polyederformel gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{v_{\mathcal{L}}} (6 - d_{\mathcal{L}}(v_r)) &= 6 \cdot v_{\mathcal{L}} - 2 \cdot k_{\mathcal{L}} \\ &= 6 \cdot v_{\mathcal{L}} - 6 \cdot k_{\mathcal{L}} + 4 \cdot k_{\mathcal{L}} \\ &\geq 6 \cdot v_{\mathcal{L}} - 6 \cdot k_{\mathcal{L}} + 6 \cdot f_{\mathcal{L}} \\ &= 6 \cdot (v_{\mathcal{L}} - k_{\mathcal{L}} + f_{\mathcal{L}}) \\ &= 12 \end{aligned}$$

□

Diese Resultate lassen sich ebenfalls leicht auf die Strukturen der Kombinatorik übertragen.

2.2 Kombinatorische Definitionen

Um über Graphen und deren Färbbarkeit sinnvoll reden zu können, müssen zuerst einige gebräuchliche Definitionen gemacht werden.

Definition 6 (Graph, Knoten, Kante):

- Ein *Graph* G ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine endliche Menge ist, deren Elemente *Knoten* genannt werden, und E eine endliche Menge bestehend aus Kanten sind.

- Eine *Kante* $e \in E$ ist eine zweielementige Teilmenge von V , wobei E die Menge aller dieser Teilmengen ist, also $E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$.

Oft werden wir auch die Bausteine einer Landkarte \mathcal{L} als Knoten- und Kantenmenge verwenden. Die Ecken von \mathcal{L} werden zu den Knoten des Graphen, die Jordanbögen von \mathcal{L} zu den Kanten des Graphen. Im weiteren betrachten wir vorwiegend endliche Graphen, außer es wird explizit anders angegeben. Auch schließt diese Definition Schleifen explizit aus. Schleifen sind Kanten, bei denen $u = v$ gilt. Schleifen müssen bei Färbbarkeitsüberlegungen ausgeschlossen werden, denn könnte ein Knoten zu sich selbst benachbart sein, wäre es nicht möglich, für benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben zu wählen.

Um nun Bedingungen an die Färbbarkeit von Graphen stellen zu können, muss noch definiert werden, wie dessen Knoten zusammenhängen.

Definition 7 (Inzidenz, Adjazenz, Knotengrad, vollständiger Graph):

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann sind die folgenden Bezeichnungen gebräuchlich:

- Ein Knoten $v \in V$ heißt *inzident* zu einer Kante $e \in E$, wenn mindestens eines der Elemente von e der Knoten v ist, also $v \in e$.
- Zwei verschiedene Knoten u, v heißen *adjazent*, wenn sie zur gleichen Kante inzident sind, d.h. $\{u, v\} \in E$
- Für einen Knoten v ist der *Grad* von v definiert als die Anzahl der Kanten, die zu v adjazent sind. Es gilt $d_G(v) = \#\{\{v, b\} \in E | b \in V\}$.
- Ein Graph G heißt *vollständig*, wenn gilt: $E = \binom{V}{2} = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$.

Für eine interessante Struktur benachbarter Knoten gibt es eine gebräuchliche Bezeichnung, auf die wir später zurückgreifen werden.

Definition 8 (Pfad, einfacher Pfad, disjunkte Pfade, Kreis, Ring):

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Folge (v_1, \dots, v_r) von mindestens drei Knoten heißt *Pfad*, wenn die auftretenden Knoten paarweise verschieden, aber je zwei aufeinanderfolgenden benachbart sind. Dann ist r die Länge der Kette und die Verbindungskanten heißen Glieder.
- Ein Pfad heißt *einfach*, wenn zwei seiner Knoten nur dann benachbart sind, wenn sie im Pfad aufeinanderfolgenden. Oder genauer: Für die Indizes $j_1, j_2 \in \{1, \dots, r\}$ mit $|j_1 - j_2| > 1$ sind die Knoten des Pfades v_{j_1} und v_{j_2} nicht benachbart.
- Zwei Pfade heißen *disjunkt*, wenn sie keine Knoten, die nicht erstes oder letztes Element der jeweiligen Folge sind, gemeinsam haben.

- Ein Pfad heißt *Kreis*, wenn v_1 und v_r ebenfalls benachbart sind.
- Ein *Ring* ist ein Kreis, der zusätzlich einfach ist.

Ringe werden im Allgemeinen als wesentlicher Beitrag von Birkhoff auf dem Weg zur Lösung des 4-Farben-Problems angesehen, zuerst erwähnt in [Bir13].

Einiges Handwerkszeug ist noch nötig, um Strukturen prägnant und kurz beschreiben zu können.

Definition 9 (Teilgraph $G \setminus X$, $G \setminus Y$):

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $X \subseteq V$ eine Teilmenge der Knoten und $Y \subseteq E$ eine Teilmenge der Kanten. Weiter sei F die Menge der Kanten f aus V mit $f \cap X \neq \emptyset$. Der Graph $G \setminus X = (V \setminus X, E \setminus F)$ unterscheidet sich von G derart, dass alle Knoten der Menge X und alle zu diesen Knoten adjazenten Kanten gelöscht werden. Ebenso ist $G \setminus Y = (V, E \setminus Y)$ der Graph, bei dem alle Kanten aus Y entfernt wurden.

Definition 10 (Kontraktion):

Durch *Kontraktion* erhält man aus einem Graphen einen Teilgraphen, indem man zwei adjazente Knoten v_1 und v_2 zusammenfasst. Man sagt, man kontrahiert v_2 auf v_1 , wenn man v_2 aus dem ursprünglichen Graphen entfernt und alle Kanten, zu denen v_2 inzident ist, zu v_1 führt. Dabei werden jene Kanten zu Knoten entfernt, wenn diese bereits zu v_1 adjazent waren.

Betrachtet man diesen Vorgang aus topologischer Sicht, entspricht eine Kontraktion einer Vereinigung zweier benachbarter Länder durch Aufheben ihrer gemeinsamen Grenze.

Da das Problem der 4-Färbbarkeit von Graphen von der Geographie motiviert ist, betrachten wir als Raum für unsere Knoten nur den \mathbb{R}^2 , also die Ebene.

Definition 11 (Planarität):

Ein Graph heißt *planar*, wenn seine Kanten so in der Ebene durch Jordanbögen darstellbar sind, dass sich diese höchstens in ihren Endpunkten schneiden.

Damit man sich planare Graphen noch leichter vorstellen kann, fügen wir hier noch folgendes Resultat ein.

Satz 2.2 (Wagner und Fáry):

Jeder Graph kann durch einen Homöomorphismus der Ebene auf sich in einen Streckengraphen überführt werden.

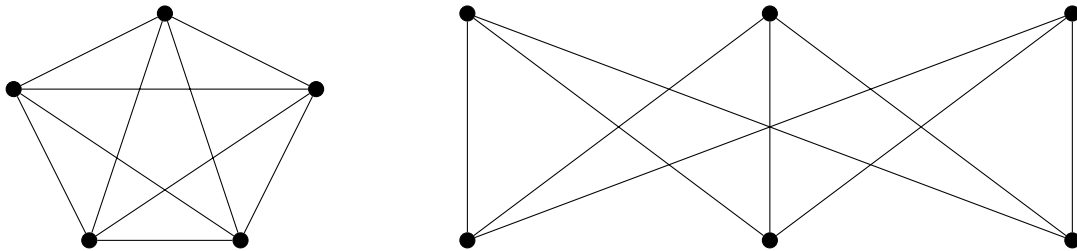
Dieser Satz liefert uns, dass es sich bei diesen Jordanbögen tatsächlich stets um gerade Verbindungsstrecken handeln kann. Für den Beweis dieses Resultats verweisen wir auf [Fri94, Seite 113], da er nur der Darstellung von Graphen nutzt und wenig zum eigentlichen Beweis beiträgt.

Planarität von Graphen wirkt auf den ersten Blick wie ein rein topologischer Begriff, jedoch gelang es Kuratowski, eine rein kombinatorische Charakterisierung von Planarität zu liefern.

Satz 2.3 (Kuratowski):

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er sich durch (möglicherweise) mehrfache Kontraktion nicht in einen der beiden Graphen $K_{3,3}$ oder K_5 überführen lässt.

Auch dieser Beweis findet sich in der gängigen Literatur und wird daher an dieser Stelle nicht geführt. Jedoch wollen wir die beiden genannten Graphen kurz aufzeigen. Auf der linken Seite ist die übliche Darstellung der K_5 zu finden, auf der rechten Seite die des $K_{3,3}$.



Wir werden die Jordanbögen der Darstellung eines Graphen ebenfalls als *Kanten* bezeichnen. In der Ebene ist es leicht, die durch diese Kanten getrennten Flächen zu betrachten. Das führt uns zur folgenden Definitionen.

Definition 12 (Facette, Außenfacette):

Sei G ein in der Ebene \mathbb{R}^2 gezeichneter Graph. Sei J_G die Menge der Jordanbögen dieser Darstellung.

- Eine *Facette* ist eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus J_G$. Die Endpunkte der Kanten, die die Facette umfassen heißen ebenfalls inzident zu dieser Facette.
- Der unbeschränkte Rest der Ebene, der von keiner Menge von Kanten vollständig umschlossen ist, wird *Außenfacette* genannt.

Um die Außenfacette vollständig charakterisieren zu können, bedarf es eigentlich des Jordanschen Kurvensatzes. Dieser kann bei [Fri94, Seite 53] nachgelesen werden.

Weiter gibt es einige gebräuchliche Namenskonventionen für Knoten, um deren Lage im Graphen genauer zu charakterisieren.

Definition 13 (Außenknoten, Innenknoten):

Sei G ein in der Ebene gezeichneter Graph.

- Jeder Knoten, der inzident zur Außenfacette von G ist, wird *Außenknoten* genannt.

- Jeder Knoten von G , der kein Außenknoten ist, ist automatisch ein *Innenknoten*.

Für unsere Betrachtungen ist eine besondere Form von Facetten interessant.

Definition 14 (Dreieck, Triangulation, Beinahe-Triangulation):

Sei G ein in der Ebene gezeichneter Graph.

- Eine Facette ist genau dann ein *Dreieck*, wenn genau drei Knoten zu ihr inzident sind. Ein Ring ist genau dann ein Dreieck, wenn er aus drei Knoten besteht.
- Ein planarer Graph ist eine *Triangulation*, wenn er schleifenfrei und jede seiner Facetten ein Dreieck ist.
- Eine *Beinahe-Triangulation* ist ein nichtleerer, schleifenfreier, planarer Graph G , bei dem jede beschränkte Facette ein Dreieck ist.

Zeichnet man die Kanten eines planaren Graphen als gerade Linien, so entspricht diese Definition genau dem, was man sich unter einem Dreieck vorstellt. Dass dies auch tatsächlich möglich ist, werden wir am Ende des Kapitels kurz diskutieren. Der Unterschied zwischen einer Triangulation und einer Beinahe-Triangulation liegt lediglich in der Form der Außenfacette des Graphen.

Definition 15 (Färbung, Farben, Gültigkeit):

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine *Färbung* ist eine lineare Abbildung $f : V \leftarrow \mathbb{N}$, die jedem Knoten eines Graphen eine natürliche Zahl zuordnet.
- Die Elemente von $C = f(V)$ nennt man *Farben*.
- Eine Färbung heißt *gültig*, wenn sie keinem Paar adjazenter Knoten $u, v \in V$ die gleiche Farbe zuordnet, also $c(u) \neq c(v)$ für $\{u, v\} \in E$.

Definition 16 (k -Färbbarkeit):

Ein Graph G heißt *k -färbbar*, wenn für eine gültige Färbung von G mit höchstens k Farben gibt.

Aus dieser Definition ergibt sich auch direkt, dass jeder k -färbbare Graph auch $(k + 1)$ -färbbar ist. Nun haben wir alle nötigen Definitionen zusammen, um unsere ersten Resultate zu zeigen. Das erste dient vor allem der vereinfachten Veranschaulichung, das zweite werden wir später noch benötigen.

Satz 2.4 (Vollständiger Graph mit fünf Knoten):

Es existiert kein vollständiger planarer Graph mit fünf Knoten.

Beweis. Es seien v_1, \dots, v_5 fünf Ecken in der Ebene. Für jedes Paar $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $i < j$ sei eine Kante $k_{i,j}$ zwischen v_i und v_j gegeben. Dieser Graph hat 10 Kanten, von denen insgesamt 7 entweder v_1 oder v_5 oder beide als Endpunkt haben. Wir zeigen nun, dass sich mindestens eine der 3 übrigen Kanten eine der anderen Kanten überkreuzen muss.

Durch Zusammensetzen erhält man drei Pfade $P_i = k_{1,i} \cup k_{i,5}$ für $i = 2, 3, 4$, die die Knoten v_1 und v_5 verbinden, die sich aber weder untereinander noch mit $k_{1,5}$ schneiden. O.B.d.A. sei P_3 der Pfad derart, dass von den beiden anderen einer in der Facette F und der andere außerhalb der Facette F begrenzt von $k_{1,5} \cup P_3$ liegt. Damit muss die Kante $k_{2,4}$ zwischen v_2 und v_4 mindestens einen inneren Punkt y mit dem Rand von F gemeinsam haben, also mit einer der Kanten $k_{1,5}, k_{1,3}, k_{3,5}$. Da $k_{2,4}$ keine der drei beteiligten Ecken trifft, muss y ein innerer Punkt einer dieser Kanten sein. \square

Dieser Beweis ist ebenfalls in [Fri94, Satz 4.1.2] zu finden, allerdings in einer topologischen Variante mittels Jordanbögen.

Satz 2.5 (Weiske):

Es gibt keine Landkarte \mathcal{L} mit fünf paarweise benachbarten Ländern.

Beweis. Angenommen, es gäbe eine solche Landkarte. Betrachte dazu die zu \mathcal{L} duale Landkarte. Diese ist ein Graph mit 5 Ecken, die paarweise verbunden sind. Einen solchen Graphen kann es aber nach Vollständiger Graph mit fünf Knoten nicht geben. Widerspruch. \square

3 Übergang zwischen Topologie und Kombinatorik

Zunächst müssen wir uns noch davon überzeugen, dass die topologische Formulierung (Satz 1.2) und die kombinatorische Formulierung (Satz 1.3) des 4-Farben-Problems auch tatsächlich äquivalent sind. Dazu hilft uns folgender Satz:

Satz 3.1 (Äquivalenz der Formulierungen):

Der topologische Vier-Farben-Satz ist genau dann wahr, wenn jeder planare Graph eine zulässige 4-Färbung besitzt.

Beweis nach [Fri94]. Dass diese Bedingung hinreichend ist, ergibt sich, wenn man die Definition der dualen Landkarte betrachtet. Betrachte dazu eine Landkarte und einen Graphen, dessen Knotenzahl der Anzahl der Länder entspricht. Ordne nun jedem Land eindeutig einen Knoten zu. Füge nun Kanten zwischen den Knoten hinzu, deren Länder in der dualen Landkarte benachbart sind. Jedes Land der dualen Karte kann auf einen Knoten im Graphen abgebildet werden. Ist der Graph 4-färbbar, ist es somit auch die Landkarte.

Die Notwendigkeit zeigen wir, indem wir zeigen, dass es kein minimales Gegenbeispiel geben kann. Angenommen, der topologische Vier-Farben-Satz sei wahr. Betrachte einen Graphen $G = (V, \mathcal{L})$, der ein Gegenbeispiel für die 4-Färbbarkeit ist, derart dass die Anzahl seiner Knoten minimal ist. Nun zeigen wir, dass wir für die Landkarte \mathcal{L} annehmen können, dass sie regulär und vollständig ist. Ist \mathcal{L} nicht vollständig, so können wir endlich viele Kanten hinzunehmen, ohne die Eckenzahl erhöhen zu müssen, und erhalten den vollständigen Graphen $G' = (V, \mathcal{L}')$. Dadurch wird das zu lösende Problem höchstens schwieriger. Wir können also G als vollständig annehmen.

Ein minimales Gegenbeispiel hat nach Satz 2.4 mindestens fünf Knoten, ein vollständiger Graph mit höchstens zwei Gebieten hat höchstens drei Ecken. Also hat G mindestens zwei Facetten und ist somit regulär.

Nun wählen wir eine zu \mathcal{L} duale Landkarte \mathcal{L}^* . Sie besitzt nach Voraussetzung eine gültige 4-Färbung der Länder. Da \mathcal{L} regulär ist, ist \mathcal{L} auch dual zu \mathcal{L}^* und somit erhalten wir aus der 4-Färbung von \mathcal{L}^* eine 4-Färbung der Ecken von G . Somit ist G kein minimales Gegenbeispiel. \square

4 Vorüberlegungen

4.1 Einschränkungen für minimale Gegenbeispiele

Um sich dem Problem zu nähern brauchen wir eine Vorstellung davon, wie ein minimales Gegenbeispiel aussehen muss. Dazu schränken wir zunächst unsere Bemühungen auf eine besondere Klasse von Graphen ein.

Definition 17 (normaler Graph):

Ein planarer Graph heißt *normal*, wenn er ein regulärer, vollständiger Graph mit geraden Jordanbögen ist, bei dem jede Facette außer der Außenfacette ein Dreieck ist.

Ein normaler Graph ist also insbesondere eine Triangulation. Ohne wesentliche Einschränkung kann man sich bei der Untersuchung dieses Problems auf Triangulationen beschränken, da jeder Graph durch Kontraktion und das Entfernen von Kanten aus einer Triangulation bilden lässt, wenn diese nur ausreichend – aber immernoch endlich – viele Knoten besitzt. Durch das Verringern der Knoten- und Kantenanzahl wird dabei das zu lösende Problem nur leichter.

Da wir versuchen, mit möglichst wenig Knoten auszukommen, ist es wenig sinnvoll, eine obere Schranke zu suchen. Daher schließen wir zu kleine oder zu einfache Graphen mit den folgenden Resultaten aus.

Proposition 4.1 (Sechs Knoten):

Ein minimales Gegenbeispiel hat mindestens sechs Knoten.

Beweis. Betrachte einen Graphen mit fünf Ländern. Nach dem Vollständiger Graph mit fünf Knoten gibt es zwei nicht adjazente Knoten. Diese können dann gleich gefärbt werden. Für die übrigen drei Knoten bleiben drei unterschiedliche Farben übrig. \square

Proposition 4.2 (Adjazente Nachbarn):

Wenn ein Knoten eines beliebigen Graphen mehr als drei Nachbarn hat, so hat es zwei Nachbarn, die nicht adjazent sind.

Beweis. Sei G ein Graph und v_0 ein Knoten mit den Nachbarn v_1, v_2, v_3, v_4 . Nach dem Vollständiger Graph mit fünf Knoten gibt es in v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 zwei nicht adjazente Knoten, von denen nach

Voraussetzung keiner v_0 sein kann. \square

Satz 4.3 (Fünf verschiedene Nachbarn):

Bei einem minimalen Gegenbeispiel hat kein Knoten weniger als fünf verschiedene Nachbarn.

Beweis. Es sei G ein minimales Gegenbeispiel. Dass es keinen Knoten mit weniger als vier Nachbarn geben kann, erkennt man leicht. Bleiben die Knoten mit genau vier Nachbarn zu untersuchen. Sei v_0 einer dieser Knoten und seine Nachbarn v_1, v_2, v_3, v_4 . Nach Adjazente Nachbarn können wir annehmen, dass v_1 und v_3 nicht adjazent sind. Durch Kontraktion von v_1 und v_3 auf v_0 erhalten wir den Knoten v' . Der so entstehende Graph G' enthält zwei Knoten weniger und besitzt somit eine zulässige 4-Färbung.

Aus dieser lässt sich eine zulässige 4-Färbung für G erzeugen: wir weisen den Knoten v_1 und v_3 die gleiche Farbe wie v' zu. Alle übrigen Knoten übernehmen ihre Färbung aus G' . Dann sind für die Nachbarn von v_0 nur drei Farben verbraucht worden, es bleibt also eine übrig. \square

Weiter gilt für ein minimales Gegenbeispiel folgende Einschränkung:

Satz 4.4 (Anzahl der 5-Sterne):

Ein minimales Gegenbeispiel enthält keine 4-Sterne aber mindestens zwölf 5-Sterne.

Beweis. Enthält ein Graph einen 4-Stern, so besitzt die duale Landkarte ein Land mit vier Nachbarn, kann also nach Satz 4.3 kein minimales Gegenbeispiel sein. Die Anzahl der 5-Sterne ergibt sich aus der Ungleichung in Satz 2.1 \square

5 Der Beweis von Appel und Haken

5.1 Die Konfigurationen

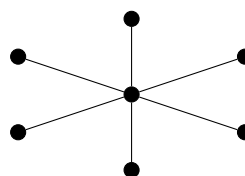
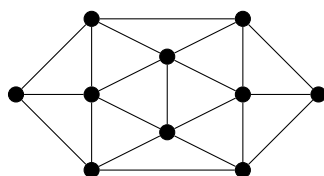
Eine Klasse von Graphen ist für den Beweis des Vier-Farben-Satzes wesentlich: Die Konfigurationen. Sie treten vor allem als Untergraphen der normalen Graphen auf. Zuerst wollen wir festhalten, was eine Konfiguration eigentlich ist.

Definition 18 (Konfiguration):

Ein planarer Graph C heißt *Konfiguration*, wenn

- er regulär ist,
- die Außenknoten einen Ring der *Ringgröße* $k \geq 4$ bilden,
- innere Knoten existieren,
- die beschränkten Gebiete von Dreiecken begrenzt werden,
- jedes Dreieck Grenze eines Gebiets ist.

Um eine bessere Vorstellung für diese Graphen zu bekommen, betrachten wir zunächst einige Beispiele. Ein nicht-triviales Beispiel für eine Konfiguration ist der *Birkhoff*-Diamant mit insgesamt 10 Knoten (linkes Bild).



Andere Beispiele für Konfigurationen sind *Sterne*. Sie besitzen genau einen inneren Punkt (*„Zentrum“*) und einen Ring von äußeren Punkten, die alle mit dem Zentrum durch eine Kante verbunden sind. Ein Stern heißt k -Stern, wenn er genau k äußere Knoten besitzt. Einen 6-Stern findet man im rechten Bild.

Definition 19 (Äquivalente Konfigurationen):

Zwei Konfigurationen $C' = (V', E')$ und $C'' = (V'', E'')$ heißen *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $\varphi : V' \rightarrow V''$ gibt, die in beide Richtungen die Adjazenzstruktur erhält.

Nun können wir davon sprechen, dass ein Graph eine Konfiguration enthält, indem wir folgende Definition bemühen:

Definition 20 (enthaltene Konfiguration):

Man sagt, ein Graph G *enthält* eine Konfiguration C , wenn es einen geschlossenen Pfad K gibt, sodass der von den Knoten von K und den im Innengebiet liegenden Knoten von K Untergraph C_K von G eine zu C äquivalente Konfiguration ist.

5.2 Reduzierbarkeit

Definition 21 (freie Vervollständigung):

Sei K eine Konfiguration. Eine Beinahe-Triangulation S heißt *freie Vervollständigung* von K mit dem Ring R , wenn

- i) R ein induzierter Ring von S ist, der die Außenfacette von S begrenzt,
- ii) $G(K)$ ein induzierter Teilgraph von S ist, $G(K) = S \setminus V(R)$ gilt, jede Facette von $G(K)$ auch eine Facette von S ist, die Außenfacette von $G(K)$ den Ring R und die Außenfacette von S beinhaltet,
- iii) jeder Knoten v von S , der nicht in $V(R)$ liegt, in S Knotengrad $\gamma_K(v)$ hat.

Man kann leicht überprüfen, dass jede Konfiguration eine freie Vervollständigung hat. (Hier benutzen wir den Umstand, dass in der Definition von Konfiguration die Ringgröße ≥ 2 ist – die Ringgröße ist genau die Länge des Rings in der Freien Vervollständigung, wie der Leser nachprüfen kann.) Gibt es weiterhin zwei freie Vervollständigungen S_1, S_2 von K , so existiert ein Homeomorphismus, der $G(K)$ punktweise fixiert und S_1 auf S_2 abbildet. Dazu verwendet man Eigenschaft i) aus der Definition von Konfiguration. Also gibt es eigentlich nur eine freie Vervollständigung, weswegen wir ohne Unklarheiten von *der* freien Konfiguration sprechen können.

Sei R ein Kreis. Es gibt das Konzept der *Kontinuität* für eine Menge von 4-Färbungen von R , welches auf Kempe [Kem79] und Birkhoff [Bir13] zurückgeht. Wir benötigen hier nicht das vollständige Konzept, sondern nennen nur die Eigenschaften, die wir brauchen. Sie lauten:

6 Der Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas

Die Grundidee des Beweises besteht darin, eine bestimmte Menge von 633 sogenannten Konfigurationen aufzustellen und dann zu zeigen, dass kein Element dieser Menge in einem minimalen Gegenbeispiel vorkommen kann – dieser erste Schritt wird *Reduzierbarkeit* genannt. Damit folgt der Beweis der Idee seiner Vorgänger, allerdings mit dem Unterschied, dass jedes minimale Gegenbeispiel eine *intern 6-fach zusammenhängende Triangulation* ist.

Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass in jeder intern sechsfach zusammenhängenden Triangulation eine der oben genannten Konfigurationen vorkommen muss – auch *Zwangsläufigkeit* genannt. Zusammen zeigt dies, dass es kein minimales Gegenbeispiel geben kann und der Vierfarbensatz somit wahr ist.

Der wesentliche Unterschied zum vorher vorgestellten Beweis von Appel & Haken liegt darin, auf welche Art die Zwangsläufigkeit hergestellt wird.

6.1 Konfigurationen

Ein minimales Gegenbeispiel ist ein planarer schleifenfreier Graph G , der nicht 4-färbbar ist, derart dass aber jeder planaren Graphen G' mit $|V(G')| + |E(G')| < |V(G)| + |E(G)|$ eine gültige 4-Färbung besitzt. Unser Ziel ist also, zu zeigen, dass es keinen solchen Graphen G geben kann.

Aus den allgemeinen Vorüberlegungen wissen wir, dass jedes minimale Gegenbeispiel nur Knoten mit Grad mindestens fünf hat. So sieht man leicht, dass jedes minimale Gegenbeispiel 5-fach knotenzusammenhängend und bis auf die Knoten mit Grad genau fünf sogar 6-fach. Wir nennen einen Kreis C in einer Triangulation mit fünf oder weniger Knoten einen *Kurzkreis* (engl.: short circuit), wenn sowohl Knoten im inneren als auch im äußeren Bereich von C liegen und wenn für genau fünf Knoten in jedem Bereich mindestens zwei Knoten liegen. Wir nennen eine Triangulation intern 6-fach zusammenhängend, wenn sie keine Kurzkreise beinhaltet. Das führt zu folgendem Resultat:

Satz 6.1:

Jedes minimale Gegenbeispiel ist eine intern 6-fach zusammenhängende Triangulation.

Um genauer zu verstehen, warum der Graph 6-fach zusammenhängend sein muss, empfiehlt sich die

Lektüre von [Bir13]. Birkhoff schaffte es bereits 1913 zu zeigen, dass schwächer zusammenhängende Konfigurationen reduzierbar und damit vierfärbbar sind. Dazu bediente er sich der Resultate von A. B. Kempe – Ketten, die mit einer beschränkten Auswahl an Farben färbbar sind, und Ringen, die eine Karte in eine innere und eine äußere Region teilen.

Definition 22 (Konfiguration):

Eine Konfiguration K besteht aus einer Beinahe-Triangulation $G(K)$ und einer Zuordnung $\gamma_K : V(G(K)) \mapsto \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) Für jeden Knoten v hat $G(K) \setminus v$ höchstens zwei Zusammenhangskomponenten. Gibt es genau zwei, so ist $\gamma_K(v) = d(v) + 2$.
- ii) Für jeden Knoten v , der nicht zur Außenfacette inzident ist, gilt $\gamma_K(v) = d(v)$. Für die anderen Knoten v' gilt $\gamma_K(v) > d(v)$. In beiden Fällen gilt zusätzlich $\gamma_K(v) \geq 5$.
- iii) K hat Ringgröße ≥ 2 . Die *Ringgröße* von K ist definiert als $\sum_v (\gamma_K(v) - d(v) - 1)$ für alle Knoten v , die zur Außenfacette inzident sind und für die $G(K) \setminus v$ zusammenhängend ist.

Zwei Konfigurationen K und L heißen *isomorph*, falls ein Homeomorphismus existiert, der $G(K)$ auf $G(L)$ und γ_K auf γ_L abbildet. Später werden wir eine Menge aus 633 Konfigurationen betrachten, die für diesen Beweis essenziell sind. Jede Konfiguration, die zu einer dieser 633 isomorph ist, bezeichnen wir als *gut*.

Um das eigentliche Problem zu beweisen, teilen wir die Suche nach einem minimalen Gegenbeispiel weiter auf. Somit ergeben sich diese beiden Aussagen:

Satz 6.2:

Wenn T ein minimales Gegenbeispiel ist, enthält T keine gute Konfiguration.

Satz 6.3:

In jeder intern 6-fach zusammenhängenden Triangulation T lässt sich eine gute Konfiguration finden.

Kombiniert man die Aussagen der Sätze 6.1, 6.2 und 6.3, so sieht man, dass es kein minimales Gegenbeispiel geben kann und damit der Vier-Farben-Satz wahr ist. Auf 6.2 werden wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen, gefolgt von einem Abschnitt über 6.3.

7 Umformulierungen

Literaturverzeichnis

- [Bir13] BIRKHOFF, George D.: The Reducibility of Maps. In: *American Journal of Mathematics* 35 (1913), S. 115–128
- [Fri94] FRITSCH, R.: *Der Vierfarbensatz*. Mannheim : BI Wissenschaftsverlag, 1994
- [Kem79] KEMPE, A. B.: On the geographical problem of the four colors. In: *American Journal of Mathematics* 2 (1879), S. 193–200

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel und Quellen als die angegebenen benutzt habe. Weiterhin versichere ich, die Arbeit weder bisher noch gleichzeitig einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt zu haben.

Würzburg, den _____, _____
(Andre Löffler)