Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Mathematik III
Geometrie

Bachelorarbeit

Der Vier-Farben-Satz

Andre Löffler

Abgegeben am DD.month.YYYY

Betreuer:
Dr. Theo Grundhöfer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Definitionen **4**

3 Der Beweis von Appel und Haken **5**

4 Der Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas **6**

5 Umformulierungen **7**

1 Einleitung

2 Definitionen

Um über die Färbbarkeit von Graphen reden zu können, müssen zuerst einige gebräuchliche Begrifflichkeiten geklärt werden.

Definition 1 (Graph, Knoten, Kante):
Ein *Graph* G ist ein Tupel $G = (V, E)$, wobei V eine Menge bestehend aus Knoten und E eine Menge bestehend aus Kanten sind. Ein *Knoten* $v \in V$ ist ein Punkt im Raum. Eine *Kante* $e \in E$ ist eine zweielementige Teilmenge von V, wobei E die Menge aller dieser Teilmengen ist, also $E = \{\{u, v\}|u, v \in V\}$.

Um nun Bedingungen an die Färbbarkeit von Knoten stellen zu können, muss noch definiert werden, wie diese zusammenhängen.

Definition 2 (Inzidenz, Adjazenz, Knotengrad):
Ein Knoten $v \in V$ heißt *inzident* zu einer Kante $e \in E$, wenn mindestens einer der Endpunkte von e der Knoten v ist. Zwei Knoten u, v heißen *adjazent*, wenn sie zur gleichen Kante inzident sind. Für einen Knoten v ist der *Grad* von v definiert als die Anzahl der Kanten, die zu v inzident sind. Es gilt $\deg v = \sharp\{\{a, b\} \in E|a = v \wedge b = v\}$.

Diese Definition erlaubt sogenannte *Schleifen*, also Kanten bei der beide Enden an den gleichen Knoten anknüpfen. Diese werden wir aber später explizit ausschließen. Denn könnte ein Knoten zu sich selbst benachbart sein, wäre es nicht möglich, für benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben zu wählen.
Da das Problem der 4-färbbarkeit von Graphen von der Geographie motiviert ist, betrachten wir als Raum für unsere Knoten nur den $\mathbb{R}^2$, also die Ebene.

Definition 3 (Planarität):
Ein Graph heißt *planar*, wenn er sich so in die Ebene einbetten lässt, dass sich zwei Kanten höchstens in ihrem gemeinsamen Endpunkt schneiden.

Definition 4 (Färbung):

3 Der Beweis von Appel und Haken

4 Der Beweis von Robertson, Sanders, Seymour und Thomas

5 Umformulierungen

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel und Quellen als die angegebenen benutzt habe. Weiterhin versichere ich, die Arbeit weder bisher noch gleichzeitig einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt zu haben.

Würzburg, den ____________________, ______________________________

(Andre Löffler)