Pesquisa Operacional

Prof. Dr. Ricardo Cardoso de Oliveira

CRONOGRAMA DAS AULAS

Fonte da imagem:

Aula 2: 06/03 – Formulação de problemas de Pesquisa Operacional

Aula 3: 13/03 – Resolução de problemas de Programação Linear (método gráfico)

Aula 4: 20/03 – Resolução de problemas de Programação Linear (método Simplex)

Aula 5: 27/03 – Resolução de problemas de Programação Linear (método Simplex)

Aula 6: 03/04 – Resolução de problemas de Programação Linear (uso do Excel)

Aula 7: 10/04 – Teoria dos jogos

Aula 8: 17/04 – Introdução à teoria das filas

Aula 9: 24/04 – Introdução à teoria das filas

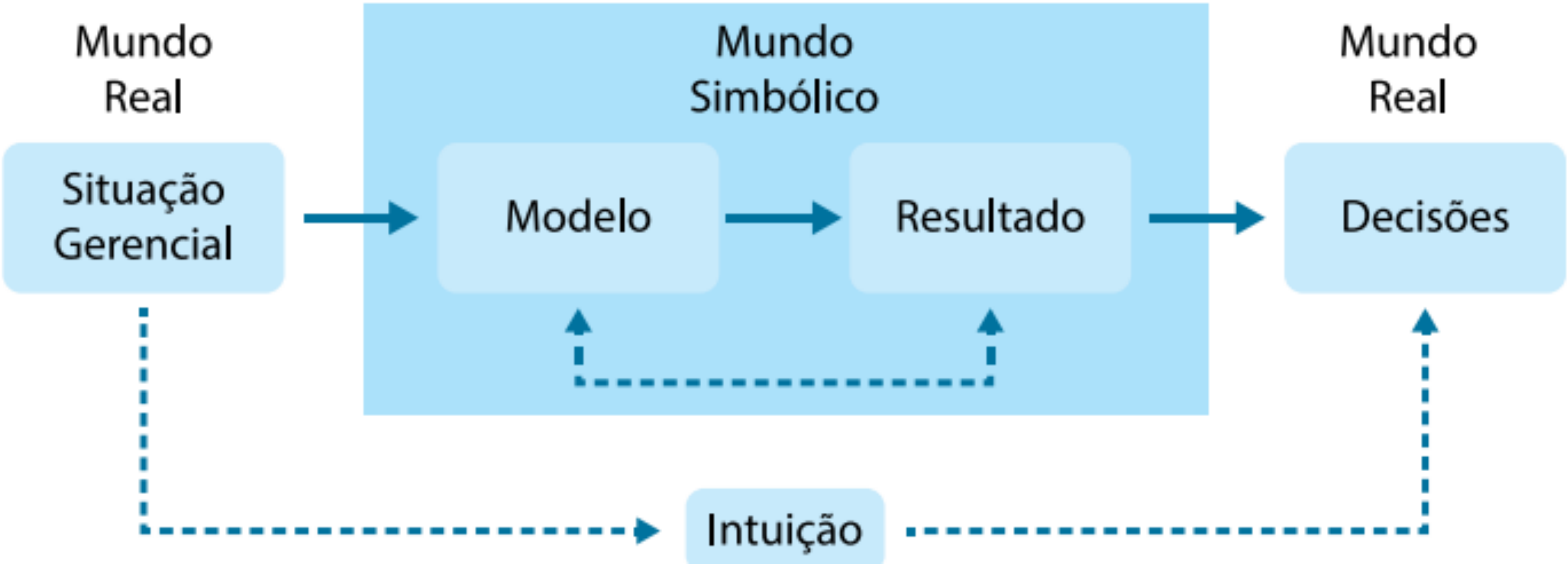


Figura – Processo de tomada de decisão.

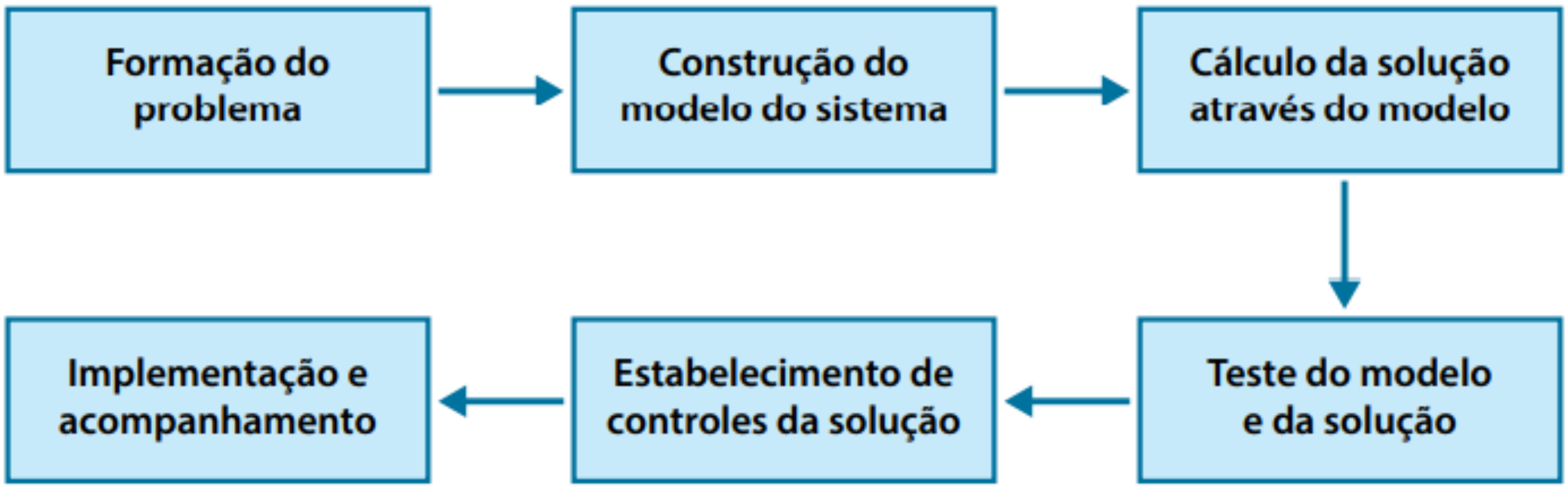


Figura – Fases de estudo em PO.

Modelo: é a representação matemática, simbólica ou descritiva de uma dada situação problema, com o objetivo de determinar o melhor resultado possível para a decisão. A estrutura básica de um modelo de PO é composta por uma função objetivo e por um conjunto de restrições.

max min

Função objetivo: é parte do modelo que explica o que se pretende atingir com a decisão.

Restrições: é um conjunto de equações e inequações matemáticas que limita os recursos produtivos, financeiros, mão de obra e etc.

Variáveis controláveis: são aquelas que o decisor pode atuar para atingir seus objetivos.

Variáveis não controláveis: aquelas não é possível ter controle, mas que, afetam as consequências ou resultados de uma decisão.

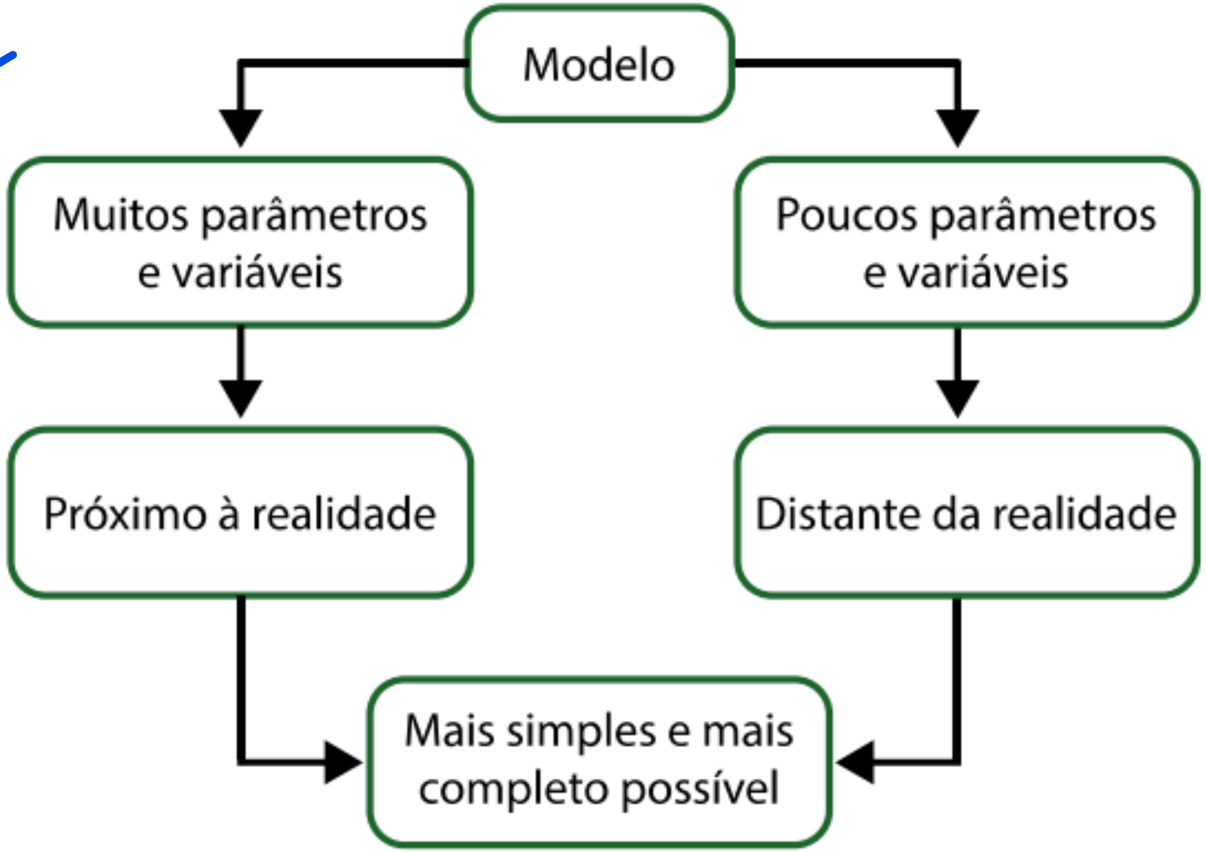


Figura – Complexidade dos modelos.

Exercício 1

Uma indústria produz dois produtos: A e B. Cada um deles deve ser processado por duas máquinas, M_1 e M_2. Devido à programação de outros produtos, que também utilizam essas máquinas, a máquina M_1 tem 24 horas de tempo disponível para os produtos A e B, enquanto a máquina M_2 tem 16 horas de tempo disponível.

Para produzir uma unidade do produto A, gastam-se 4 horas em cada uma das duas máquinas M_1 e M_2. Para produzir uma unidade do produto B, gastam-se 6 horas na máquina M_1 e 2 horas na máquina M_2.

Cada unidade vendida do produto A gera lucro de R$ 80 e cada unidade do produto B, um lucro de R$ 60. Existe uma previsão máxima de demanda para o produto B de 3 unidades, não havendo restrições quanto à demanda do produto A.

Escreva o modelo matemático para determinação de quantas unidades dos produtos de A e B que devem ser produzidos, de forma a maximizar o lucro e, ao mesmo tempo, obedecer a todas as restrições.

Solução: inicialmente, vamos resumir as informações em uma tabela.

Produto	Horas gastas em M_1	Horas gastas em M_2	Demanda máxima	Lucro unitário (R$)
A	4	4	-	80,00
B	6	2	3	60,00
Horas disponíveis	24	16		

Sejam x e y as quantidades (em unidades) dos produtos A e B, respectivamente, que devem ser produzidos por essa indústria de tal forma que seu lucro seja máximo com essa produção.

Fonte da imagem:

Solução: inicialmente, vamos resumir as informações em uma tabela.

QTE **Produto**	**Horas gastas em M_1**	**Horas gastas em M_2**	**Demanda máxima**	**Lucro unitário (R$)**
x **A**	4	4	ilimitada	80
y **B**	6	2	3	60
Horas disponíveis	24	16	-	-

Sejam x e y as quantidades (em unidades) dos produtos A e B, respectivamente, que devem ser produzidos por essa indústria de tal forma que seu lucro seja máximo com essa produção.

Vamos determinar a função objetivo:

$\max(Z) = 80.x + 60.y$

RM1: $4.x + 6.y =< 24$
Rm2: $4.x + 2.y =< 16$
R3: $y =< 3$
R4 $x >= 0$
R5: $y >= 0$

Fonte da imagem:

Solução: inicialmente, vamos resumir as informações em uma tabela.

Produto	Horas gastas em M_1	Horas gastas em M_2	Demanda máxima	Lucro unitário (R$)
A	4	4	Ilimitada	80
B	6	2	3	60
Horas disponíveis	24	16	-	-

Agora, vamos escrever as restrições:

Fonte da imagem:

Exercício 2 (ENADE)

Uma fábrica produz dois refrigerantes: A e B. Para produzi-los, utilizam-se vários recursos, entre os quais os extratos e a água são os mais limitantes, devido a problemas ecológicos.

Para produzir um litro de refrigerante A, o processo envolve a dissolução de um pacote de extrato (denominado Delta) em um litro de água, além de outros recursos que não são limitantes.

Já a produção de um litro de refrigerante B, além da dissolução de um pacote de extrato (denominado Gama) em um litro de água, exige mais um litro de água para o processo de arrefecimento, além de outros recursos que não são limitantes.

Fonte da imagem:

Sabe-se que:

a) O lucro gerado por litro de A é R$ 5, enquanto que o lucro por litro de B é R$ 2.

b) O fornecedor de extratos só consegue entregar 3 000 pacotes de extrato Delta e 4 000 pacotes de extrato Gama, semanalmente.

c) Há um fator ambiental limitante de 9 000 litros de água por semana.

Denominando de X1 a quantidade de litros de refrigerante A e, de X2, a quantidade de litros de refrigerante B a serem produzidos, qual deverá ser o plano de produção semanal viável para gerar o maior lucro a essa fábrica, dentro das condições apresentadas?

Fonte da imagem:

QTE	Refri	EXTRATO	ÁGUA	LUCRO	LIM. EXTRATO / SEM	LIM H_2O
x_1	A	1A	1	R$ 5,00	3000	9K l
x_2	B	1B	1 + 1	R$ 2,00	4000	

Função Obj $\max(Z) = 5.x_1 + 2.x_2$ ← MAX LUCRO

Restrições:

$x_1 \leq 3000$

$x_2 \leq 4000$

$x_1 + 2x_2 \leq 9000$

restrição de extrato para A
restrição de extrato para B
restrição total de água para A e B

$\tilde{N} - \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

FORMA CANÔNICA

Fonte da imagem:

O problema do transporte logístico

O problema do transporte é muito utilizado em logística. Consiste em minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer n diferentes destinos a partir de m diferentes fornecedores.

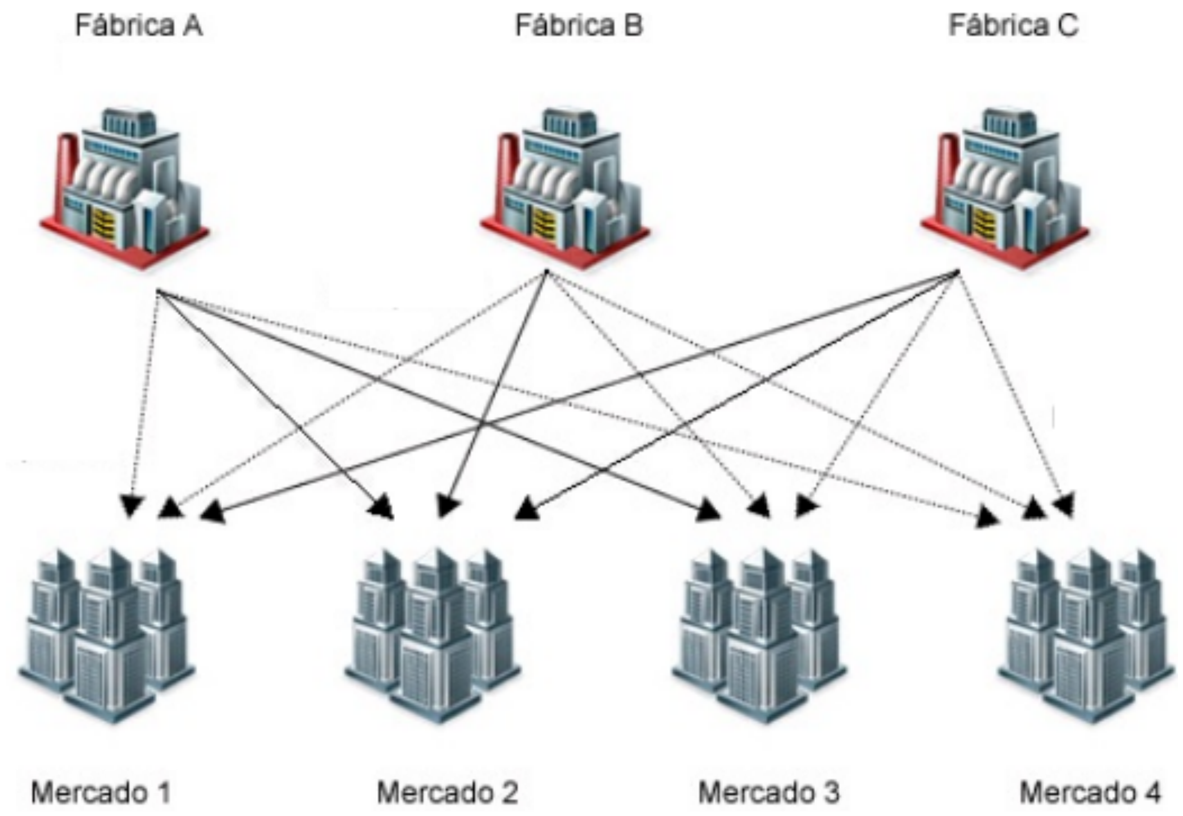


Figura – O modelo de transportes.

Fonte da imagem:

O problema do transporte logístico

O problema na forma canônica é:

custo

$$\text{minimizar } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeita a:

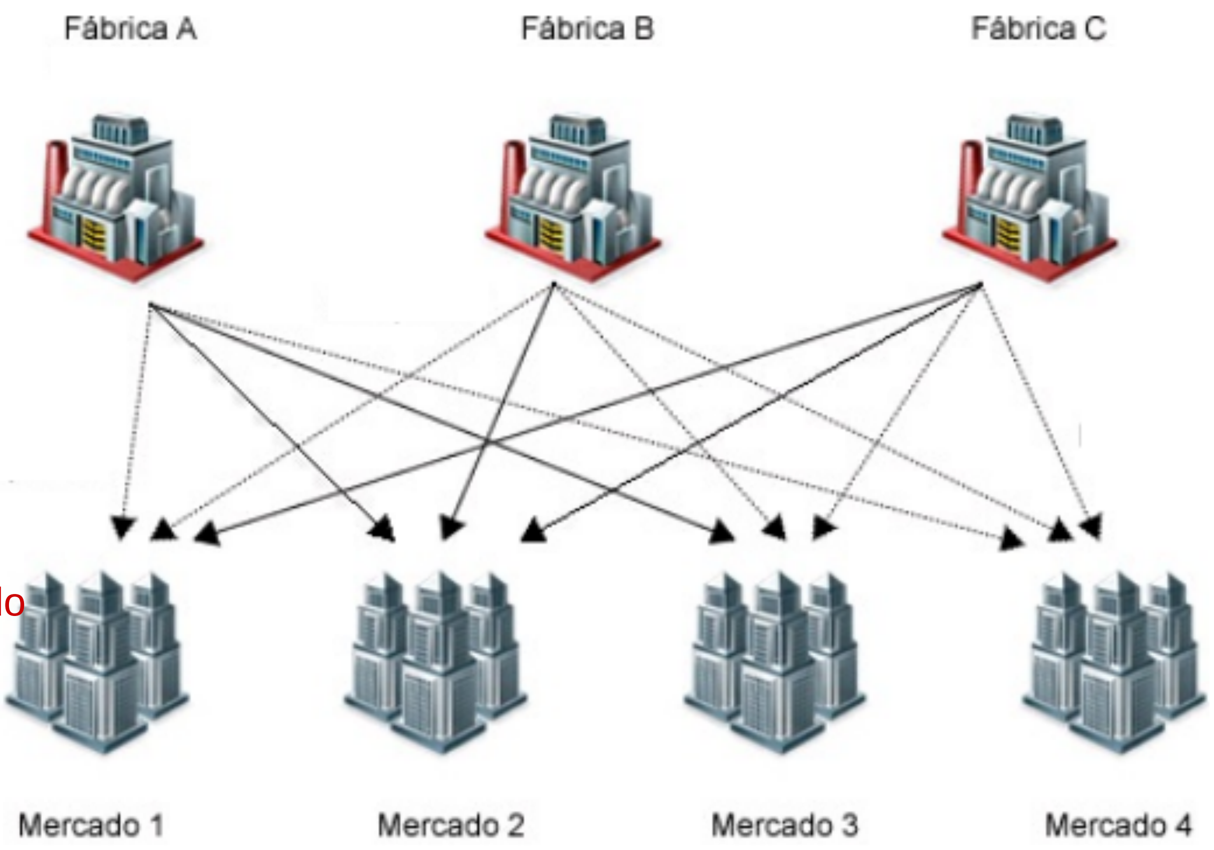
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

Escoar tudo que é produzido

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

Atender todas as demandas

$$x_{ij} \geq 0$$



- o mercado é atendido exatamente com aquilo que ele pede. A fábrica não retém estoque;
- a fábrica fabrica tudo o que produz, é despachado - zero estoque - caso ideal;

Fonte da imagem:

Exercício 2 3

Uma empresa brasileira e produtora de sucos cítricos está interessada em otimizar os custos de transporte de seus produtos para seu mercado consumidor. A empresa possui 3 regiões produtoras no Brasil e 5 regiões destinos (mercado consumidor).

A tabela a seguir apresentar as regiões produtoras, consumidoras e, também, os custos de transportes entre origens e destinos. A empresa tem o interesse em escoar toda a produção, atendendo aos mercados consumidores e custo de transporte mínimo. Com base nessas informações, desenvolva um modelo que descreva a situação problema.

Suco X_{ij}

5 j

		Mercado consumidor					Produção $\times 1000\ m^3$
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US$/m³	52	77	145	280	267	771
Paraná	US$/m³	60	85	150	285	272	964
Nordeste	US$/m³	110	135	115	301	287	193
[redacted] do setor	1.000 m³	18	7	1.680	159	64	1.927
[redacted] do setor	US$ M	9	4	840	79	32	964

3 i

DEMANDA

Fonte da imagem:

Fonte da imagem:

Solução: nessa situação as variáveis de decisão devem ser relacionadas com as quantidades enviadas das regiões produtoras para os mercados consumidores. Para tal denotaremos de x_{ij} o número de milhares de metros cúbicos de suco da região produtora i (1 = São Paulo; 2 = Paraná; 3 = Nordeste) para o mercado consumidor j (1 = Argentina; 2 = Chile; 3 = Alemanha; 4 = Japão; 5 = China).

	Argentina (1)	**Chile (2)**	**Alemanha (3)**	**Japão (4)**	**China (5)**
São Paulo (1)	X11	X12	X13	X14	X15
Paraná (2)	X21	X22	X23	X24	X25
Nordeste (3)	X31	X32	X33	X34	X35

Fonte da imagem:

Solução: agora, vamos escrever a função objetivo.

		Mercado consumidor					Produção $\times 1000\ m^3$
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US$/m³	X11 52	X12 77	X13 145	X14 280	X15 267	771
Paraná	US$/m³	X21 60	X22 85	X23 150	X24 285	X25 272	964
Nordeste	US$/m³	X31 110	X32 135	X33 115	X34 301	X35 287	193
~~Exportação~~ do setor	1.000 m³	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US$ M	9	4	840	79	32	964

Solução: no problema as restrições serão divididas em dois grupos:

i) toda a produção deve ser escoada.

ii) toda demanda deverá ser atendida

Fonte da imagem:

Solução: agora, vamos escrever as restrições de **escoamento de toda produção**.

		Mercado consumidor					Produção $\times 1000\ m^3$
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US$/m³	52	77	145	280	267	771
Paraná	US$/m³	60	85	150	285	272	964
Nordeste	US$/m³	110	135	115	301	287	193
Exportação do setor	1.000 m³	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US$ M	9	4	840	79	32	964

Fonte da imagem:

Solução: agora, vamos escrever as restrições de **atendimento de toda demanda**.

		Mercado consumidor					Produção $\times 1000\ m^3$
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US$/m³	52	77	145	280	267	771
Paraná	US$/m³	60	85	150	285	272	964
Nordeste	US$/m³	110	135	115	301	287	193
Exportação do setor	1.000 m³	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US$ M	9	4	840	79	32	964

Fonte da imagem:

Solução: agora, vamos escrever as restrições de não negatividade.

		Mercado consumidor					Produção $\times 1000\ m^3$
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US$/m³	52	77	145	280	267	771
Paraná	US$/m³	60	85	150	285	272	964
Nordeste	US$/m³	110	135	115	301	287	193
Exportação do setor	1.000 m³	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US$ M	9	4	840	79	32	964

$\rightarrow$ $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35} \geq 0$

Fonte da imagem:

Solução: a forma canônica do modelo é

$$\text{Minimizar}\quad Z = 52x_{11} + 77x_{12} + 145x_{13} + 280x_{14} + 267x_{13} + 60x_{21} + 85x_{22} + 150x_{23} + 285x_{24} + 272x_{25} + 110x_{31} + 135x_{32} + 115x_{33} + 301x_{34} + 287x_{35}$$

Sujeito a

- tudo o que foi produzido em termos de quantidade de sucos são distribuídos para as 5 regiãos consumidoras que SÃO PAULO atende!!!

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 771$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 964$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 193$$

- tudo o que é produzido é escoado
- todo a demanda é atendida
- por isso não tem < >

24 equações

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 18$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1680$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 159$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 64$$

demanda por Mercado consumidor em m³ de suco com a capacidade que cada região produtora pode enviar.

- Todas as regiões consumidoras recebem das 3 regiões produtoras;

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35} \geq 0$$

Fonte da imagem:

Exercício ~~3~~ 4

Uma refinaria produz dois tipos de combustíveis, X e Y, que precisam ser trabalhados em duas unidades de processamento. A produção de 1 litro do combustível X necessita de 4 minutos na Unidade de Processamento 1 (UP1) e 2 minutos na Unidade de Processamento 2 (UP2). Um litro do combustível Y precisa de 3 minutos na UP1 e 1 minuto na UP2. A UP1 tem uma disponibilidade máxima de 240 minutos, e a UP2 pode ser usada, no máximo, por 100 minutos por turno de trabalho.

Considerando que a empresa obtém uma margem de contribuição de R$ 5,00 por litro com a venda do combustível X e R$ 3,00 por litro com o combustível Y, escreva um problema de pesquisa operacional que maximiza a margem de contribuição da refinaria, obtida com a produção dos dois combustíveis em um turno de trabalho.

Fonte da imagem:

Atenção: Considere as informações a seguir para responder aos exercícios 4 a 6.

Um investidor tem à sua disposição dois tipos de investimento que estão descritos segundo sua rentabilidade esperada e o seu risco, apresentados abaixo.

Essas opções de investimento não possuem correlação, então tanto o risco quanto a rentabilidade da carteira podem ser obtidos através de suas médias ponderadas. O cliente deseja obter uma rentabilidade mínima de 2,5%, mas quer atingir essa rentabilidade ao menor risco possível, investindo todo o seu capital. Além disso, pelo menos 20% do capital total deve ser investido na opção 1.

Considere as seguintes variáveis de decisão: P_i - a percentagem do total investido na opção i (valores entre 0 e 1)

Fonte da imagem:

Fonte da imagem:

Exercício 4 (CESGRANRIO)

Qual a função-objetivo que pode ser utilizada na modelagem do caso, de maneira a minimizar o risco da carteira?

(A) $\text{Min } 0{,}025P_1 + 0{,}04P_2$

(B) $\text{Min } 0{,}02P_1 + 0{,}035P_2$

(C) $\text{Min } \dfrac{P_1}{0{,}025} + \dfrac{P_2}{0{,}04}$

(D) $\text{Min } \dfrac{P_1}{0{,}02} + \dfrac{P_2}{0{,}035}$

(E) $\text{Min } P_1 + P_2$

Fonte da imagem:

Exercício 5 (CESGRANRIO)

A inequação que representa a restrição rentabilidade míni-
ma é dada por

(A) $P_1 + P_2 \geq 0{,}025$

(B) $0{,}025P_1 + 0{,}04P_2 \geq 0{,}025$

(C) $\dfrac{P_1}{0{,}025} + \dfrac{P_2}{0{,}04} \geq 0{,}025$

(D) $0{,}02P_1 + 0{,}035P_2 \geq 2{,}5$

(E) $0{,}02P_1 + 0{,}035P_2 \geq 0{,}025$

Fonte da imagem:

Exercício 6

A restrição que representa a condição de que todo o capital do cliente será investido é

(A) $P_1 + P_2 > 1$

(B) $P_1 + P_2 < 1$

(C) $P_1 + P_2 \leq 100$

(D) $P_1 + P_2 = 1$

(E) $P_1 + P_2 = 100$

Fonte da imagem:

Para próxima aula...

Assistir aos vídeos sobre solução de sistemas de equações lineares.

Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=n0g3wAUsxD8
Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=UKOgQAPRoww

BONS ESTUDOS