

Pesquisa Operacional

Prof. Dr. Ricardo Cardoso de Oliveira



CRONOGRAMA DAS AULAS

Fonte da imagem:

Aula 2: 06/03 – Formulação de problemas de Pesquisa Operacional

Aula 3: 13/03 – Resolução de problemas de Programação Linear (método gráfico)

Aula 4: 20/03 – Resolução de problemas de Programação Linear (método Simplex)

Aula 5: 27/03 – Resolução de problemas de Programação Linear (método Simplex)

Aula 6: 03/04 – Resolução de problemas de Programação Linear (uso do Excel)

Aula 7: 10/04 – Teoria dos jogos

Aula 8: 17/04 – Introdução à teoria das filas

Aula 9: 24/04 – Introdução à teoria das filas

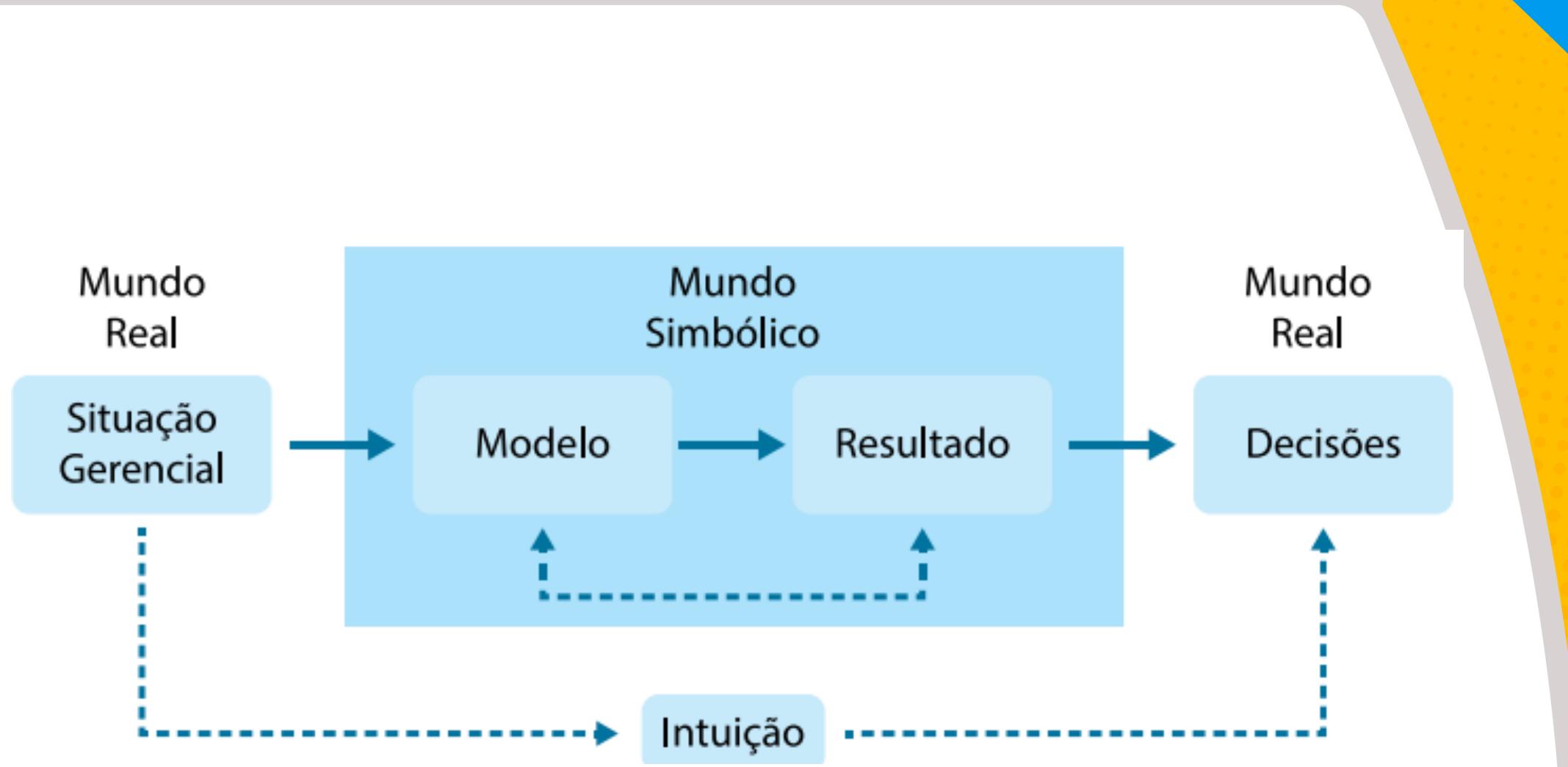


Figura – Processo de tomada de decisão.

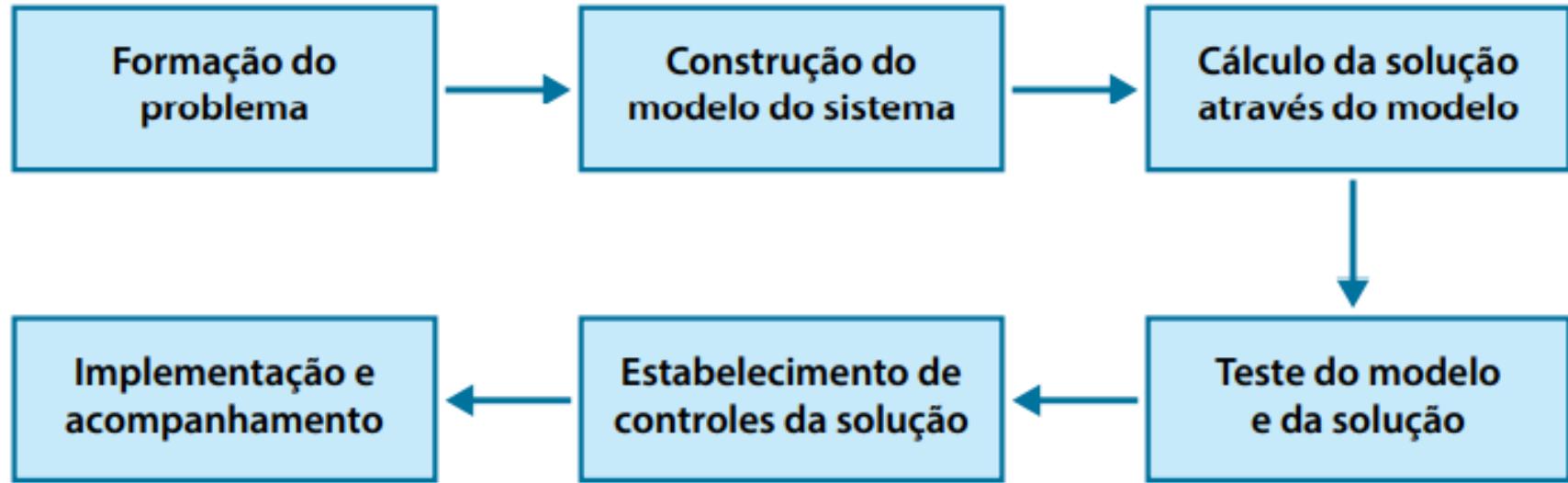


Figura – Fases de estudo em PO.



Modelo: é a representação matemática, simbólica ou descritiva de uma dada situação problema, com o objetivo de determinar o melhor resultado possível para a decisão. A estrutura básica de um modelo de PO é composta por uma função objetivo e por um conjunto de restrições.

Max min

Função objetivo: é parte do modelo que explica o que se pretende atingir com a decisão. ✓

Restrições: é um conjunto de equações e inequações matemáticas que limita os recursos produtivos, financeiros, mão de obra e etc.

Variáveis controláveis: são aquelas que o decisor pode atuar para atingir seus objetivos.

Variáveis não controláveis: aquelas não é possível ter controle, mas que, afetam as consequências ou resultados de uma decisão.



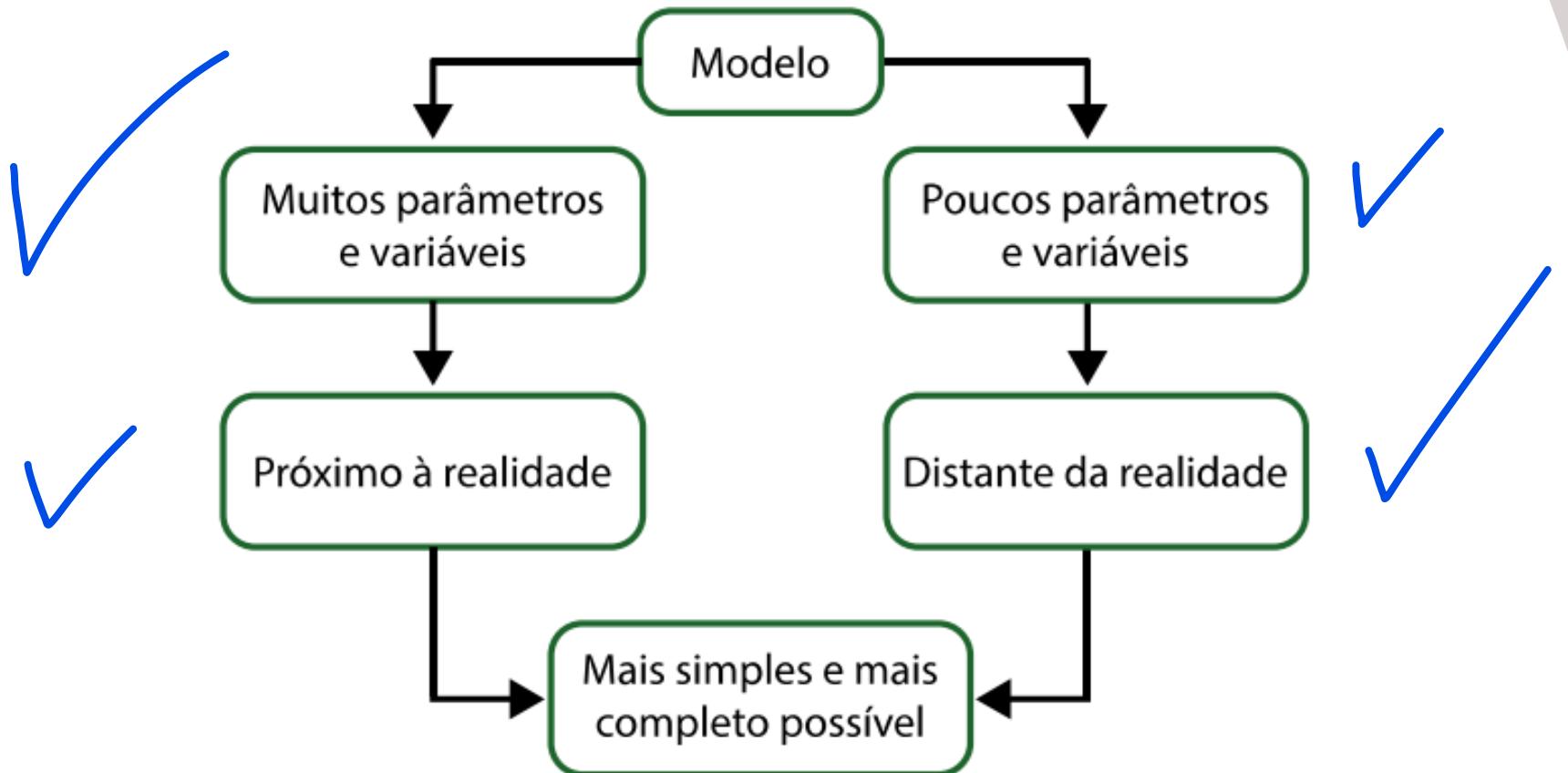


Figura – Complexidade dos modelos.

Exercício 1

Uma indústria produz dois produtos: A e B. Cada um deles deve ser processado por duas máquinas, M_1 e M_2 . Devido à programação de outros produtos, que também utilizam essas máquinas, a máquina M_1 tem 24 horas de tempo disponível para os produtos A e B, enquanto a máquina M_2 tem 16 horas de tempo disponível.

Para produzir uma unidade do produto A, gastam-se 4 horas em cada uma das duas máquinas M_1 e M_2 . Para produzir uma unidade do produto B, gastam-se 6 horas na máquina M_1 e 2 horas na máquina M_2 .

Cada unidade vendida do produto A gera lucro de R\$ 80 e cada unidade do produto B, um lucro de R\$ 60. Existe uma previsão máxima de demanda para o produto B de 3 unidades, não havendo restrições quanto à demanda do produto A.

Escreva o modelo matemático para determinação de quantas unidades dos produtos de A e B que devem ser produzidos, de forma a maximizar o lucro e, ao mesmo tempo, obedecer a todas as restrições.

Solução: inicialmente, vamos resumir as informações em uma tabela.

Produto	Horas gastas em M ₁	Horas gastas em M ₂	Demanda máxima	Lucro unitário (R\$)
A	4	4	-	80,00
B	6	2	3	60,00
Horas disponíveis	24	16		

Sejam x e y as quantidades (em unidades) dos produtos A e B, respectivamente, que devem ser produzidos por essa indústria de tal forma que seu lucro seja máximo com essa produção.



Solução: inicialmente, vamos resumir as informações em uma tabela.

PRODUTO	HORAS GASTAS EM M ₁	HORAS GASTAS EM M ₂	DEMANDA MÁXIMA	LUCRO UNITÁRIO (R\$)
A	4	4	ilimitada	80
B	6	2	3	60
Horas disponíveis	24	16	-	-

Sejam x e y as quantidades (em unidades) dos produtos A e B, respectivamente, que devem ser produzidos por essa indústria de tal forma que seu lucro seja máximo com essa produção.

Vamos determinar a função objetivo:

$$\max(Z) = 80.x + 60.y$$

$$RM1: 4.x + 6.y \leq 24$$

$$Rm2: 4.x + 2.y \leq 16$$

$$R3: y \leq 3$$

$$R4: x \geq 0$$

$$R5: y \geq 0$$

Solução: inicialmente, vamos resumir as informações em uma tabela.

Produto	Horas gastas em M ₁	Horas gastas em M ₂	Demandá máxima	Lucro unitário (R\$)
A	4 ✓	4 ✓	Ilimitada ✓	80 ✓
B	6 ✓	2 ✓	3 ✓	60 ✓
Horas disponíveis	24 ✓	16 ✓	-	-

Agora, vamos escrever as restrições:

Exercício 2 (ENADE)

Uma fábrica produz dois refrigerantes: A e B. Para produzi-los, utilizam-se vários recursos, entre os quais os extratos e a água são os mais limitantes, devido a problemas ecológicos.

Para produzir um litro de refrigerante A, o processo envolve a dissolução de um pacote de extrato (denominado Delta) em um litro de água, além de outros recursos que não são limitantes.

Já a produção de um litro de refrigerante B, além da dissolução de um pacote de extrato (denominado Gama) em um litro de água, exige mais um litro de água para o processo de arrefecimento, além de outros recursos que não são limitantes.

Sabe-se que:

- a) O lucro gerado por litro de A é R\$ 5, enquanto que o lucro por litro de B é R\$ 2.
- b) O fornecedor de extratos só consegue entregar 3 000 pacotes de extrato Delta e 4 000 pacotes de extrato Gama, semanalmente.
- c) Há um fator ambiental limitante de 9 000 litros de água por semana.

Denominando de X_1 a quantidade de litros de refrigerante A e, de X_2 , a quantidade de litros de refrigerante B a serem produzidos, qual deverá ser o plano de produção semanal viável para gerar o maior lucro a essa fábrica, dentro das condições apresentadas?

DTE	Reuni	EXTRATO	ÁGUA	LUCRO	Lim. EXTRATO / Sess	LIMH2O
x_1	A	1Δ	1	R\$ 5,00	3000	
x_2	B	1♂	1 + 1	R\$ 2,50	4000	91kl

Função Obj $\max(z) = 5x_1 + 2x_2 \leftarrow \text{MATERIAL} + \text{LUCRO}$

Restrições:

restrição de extrato para A

restrição de extrato para B

restrição total de água para A e B

$$\begin{array}{l|l} x_1 \leq 3000 & x_1 + 2x_2 \leq 9000 \\ x_2 \leq 4000 & \end{array}$$

$\approx -$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

FORMA CONVÔNICA

O problema do transporte logístico

O problema do transporte é muito utilizado em logística. Consiste em minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer n diferentes destinos a partir de m diferentes fornecedores.

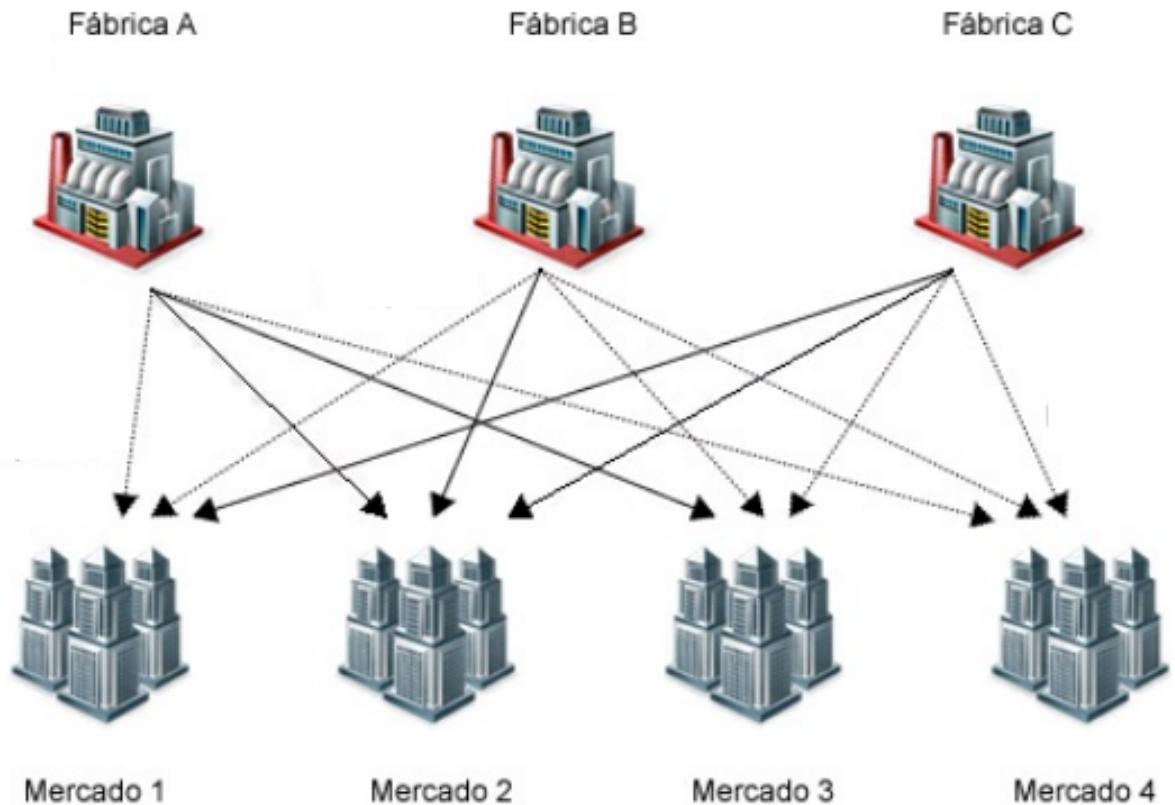


Figura – O modelo de transportes.

O problema do transporte logístico

O problema na forma canônica é:

$$\text{minimizar } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Sujeita a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$$

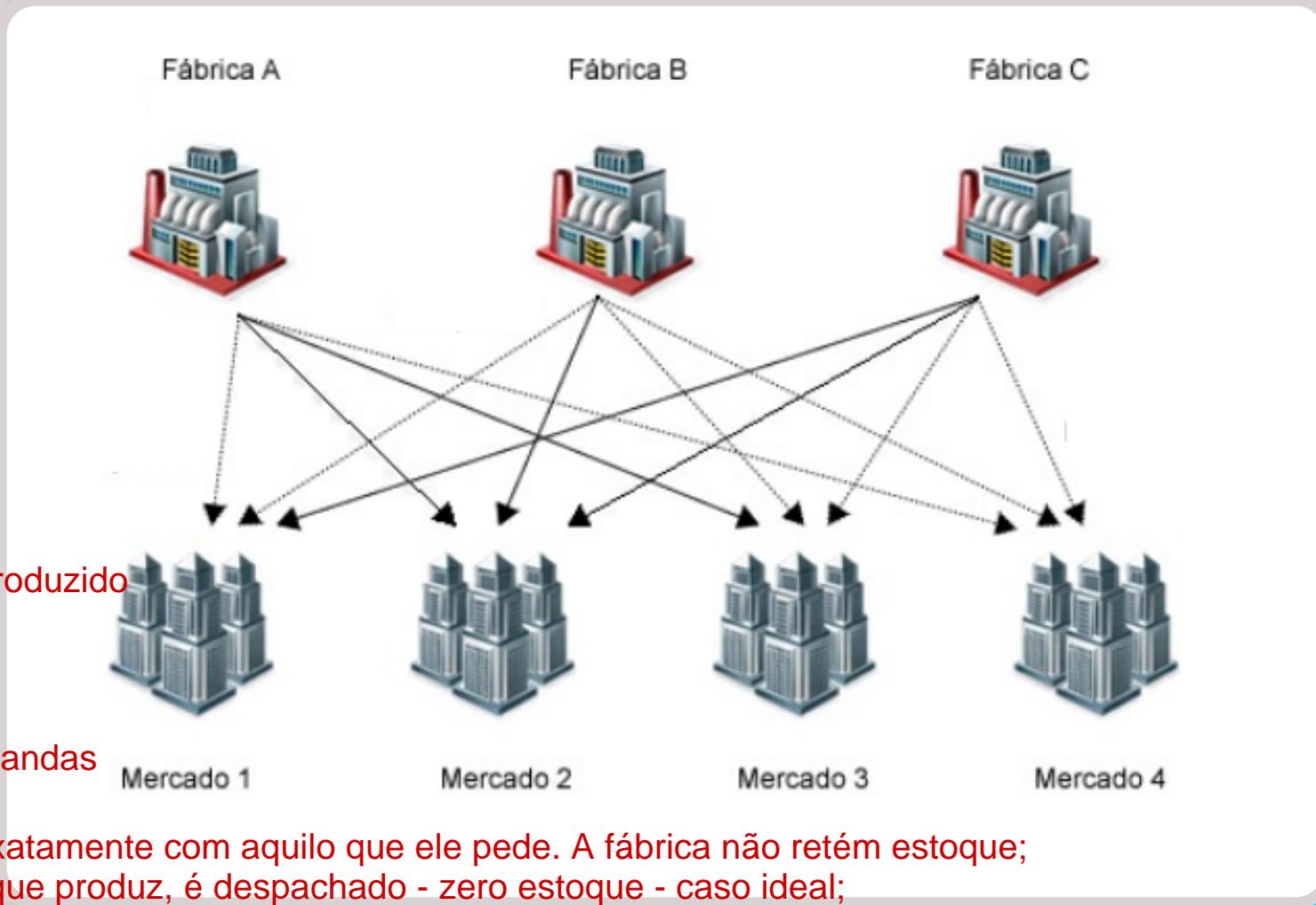
Escoar tudo que é produzido

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$$

Atender todas as demandas

$$x_{ij} \geq 0$$

- o mercado é atendido exatamente com aquilo que ele pede. A fábrica não retém estoque;
- a fábrica fabrica tudo o que produz, é despachado - zero estoque - caso ideal;



Exercício 2 3

Uma empresa brasileira e produtora de sucos cítricos está interessada em otimizar os custos de transporte de seus produtos para seu mercado consumidor. A empresa possui 3 regiões produtoras no Brasil e 5 regiões destinos (mercado consumidor).

A tabela a seguir apresentar as regiões produtoras, consumidoras e, também, os custos de transportes entre origens e destinos. A empresa tem o interesse em escoar toda a produção, atendendo aos mercados consumidores custo de transporte mínimo. Com base nessas informações, desenvolva um modelo que descreva a situação problema.

Região produtora	Unidade	Mercado consumidor					Produção × 1000 m ³
		Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US\$/m ³	52	77	145	280	267	771
Paraná	US\$/m ³	60	85	150	285	272	964
Nordeste	US\$/m ³	110	135	115	301	287	193
do setor	1.000 m ³	18 -	7 -	1.680 -	159 -	64 -	1.927
do setor	US\$ M	9	4	840	79	32	964
DEMANDA							

Solução: nessa situação as variáveis de decisão devem ser relacionadas com as quantidades enviadas das regiões produtoras para os mercados consumidores. Para tal denotaremos de x_{ij} o número de milhares de metros cúbicos de suco da região produtora i ($1 = \text{São Paulo}; 2 = \text{Paraná}; 3 = \text{Nordeste}$) para o mercado consumidor j ($1 = \text{Argentina}; 2 = \text{Chile}; 3 = \text{Alemanha}; 4 = \text{Japão}; 5 = \text{China}$).

	Argentina (1)	Chile (2)	Alemanha (3)	Japão (4)	China (5)
São Paulo (1)	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
Paraná (2)	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}
Nordeste (3)	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}

Solução: agora, vamos escrever a função objetivo.

		Mercado consumidor					Produção × 1000 m ³
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US\$/m ³	X ₁₁ 52	X ₁₂ 77	X ₁₃ 145	X ₁₄ 280	X ₁₅ 267	771
Paraná	US\$/m ³	X ₂₁ 60	X ₂₂ 85	X ₂₃ 150	X ₂₄ 285	X ₂₅ 272	964
Nordeste	US\$/m ³	X ₃₁ 110	X ₃₂ 135	X ₃₃ 115	X ₃₄ 301	X ₃₅ 287	193
Exportação do setor	1.000 m ³	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US\$ M	9	4	840	79	32	964

Solução: no problema as restrições serão divididas em dois grupos:

- i) toda a produção deve ser escoada.
- ii) toda demanda deverá ser atendida

Solução: agora, vamos escrever as restrições de escoamento de toda produção.

		Mercado consumidor					Produção x 1000 m ³
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US\$/m ³	52	77	145	280	267	771
Paraná	US\$/m ³	60	85	150	285	272	964
Nordeste	US\$/m ³	110	135	115	301	287	193
Exportação do setor	1.000 m ³	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US\$ M	9	4	840	79	32	964

Solução: agora, vamos escrever as restrições de **atendimento de toda demanda.**

		Mercado consumidor					Produção x 1000 m ³
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US\$/m ³	52	77	145	280	267	771
Paraná	US\$/m ³	60	85	150	285	272	964
Nordeste	US\$/m ³	110	135	115	301	287	193
Exportação do setor	1.000 m ³	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US\$ M	9	4	840	79	32	964

Solução: agora, vamos escrever as restrições de não negatividade. ✓

		Mercado consumidor					Produção × 1000 m ³
Região produtora	Unidade	Argentina	Chile	Alemanha	Japão	China	
São Paulo	US\$/m ³	52	77	145	280	267	771
Paraná	US\$/m ³	60	85	150	285	272	964
Nordeste	US\$/m ³	110	135	115	301	287	193
Exportação do setor	1.000 m ³	18	7	1.680	159	64	1.927
Exportação do setor	US\$ M	9	4	840	79	32	964

→ $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35} \geq 0$

Solução: a forma canônica do modelo é

Minimizar $Z = 52x_{11} + 77x_{12} + 145x_{13} + 280x_{14} + 267x_{15} + 60x_{21} + 85x_{22} + 150x_{23} + 285x_{24} + 272x_{25} + 110x_{31} + 135x_{32} + 115x_{33} + 301x_{34} + 287x_{35}$

Sujeito a

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 771 \\x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 964 \\x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 193 \\x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 18 \\x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 7 \\x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1680 \\x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 159 \\x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 64\end{aligned}$$

- tudo o que foi produzido em termos de sucos são distribuídos para as 5 regiões consumidoras que SÃO PAULO atende!!!

- tudo o que é produzido é escoado
- todo a demanda é atendida
- por isso não tem $<$

24 equações

demandas por Mercado consumidor em m³ de suco com a capacidade que cada região produtora pode enviar.

- Todas as regiões consumidoras recebem das 3 regiões produtoras;

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35} \geq 0$$

Exercício 4

Uma refinaria produz dois tipos de combustíveis, X e Y, que precisam ser trabalhados em duas unidades de processamento. A produção de 1 litro do combustível X necessita de 4 minutos na Unidade de Processamento 1 (UP1) e 2 minutos na Unidade de Processamento 2 (UP2). Um litro do combustível Y precisa de 3 minutos na UP1 e 1 minuto na UP2. A UP1 tem uma disponibilidade máxima de 240 minutos, e a UP2 pode ser usada, no máximo, por 100 minutos por turno de trabalho.

Considerando que a empresa obtém uma margem de contribuição de R\$ 5,00 por litro com a venda do combustível X e R\$ 3,00 por litro com o combustível Y, escreva um problema de pesquisa operacional que maximiza a margem de contribuição da refinaria, obtida com a produção dos dois combustíveis em um turno de trabalho.

Atenção: Considere as informações a seguir para responder aos exercícios 4 a 6.

Um investidor tem à sua disposição dois tipos de investimento que estão descritos segundo sua rentabilidade esperada e o seu risco, apresentados abaixo.

Essas opções de investimento não possuem correlação, então tanto o risco quanto a rentabilidade da carteira podem ser obtidos através de suas médias ponderadas. O cliente deseja obter uma rentabilidade mínima de 2,5%, mas quer atingir essa rentabilidade ao menor risco possível, investindo todo o seu capital. Além disso, pelo menos 20% do capital total deve ser investido na opção 1.

Considere as seguintes variáveis de decisão: P_i - a percentagem do total investido na opção i (valores entre 0 e 1)

Exercício 4 (CESGRANRIO)

Qual a função-objetivo que pode ser utilizada na modelagem do caso, de maneira a minimizar o risco da carteira?

(A) $\text{Min } 0,025P_1 + 0,04P_2$

(B) $\text{Min } 0,02P_1 + 0,035P_2$

(C) $\text{Min } \frac{P_1}{0,025} + \frac{P_2}{0,04}$

(D) $\text{Min } \frac{P_1}{0,02} + \frac{P_2}{0,035}$

(E) $\text{Min } P_1 + P_2$

Exercício 5 (CESGRANRIO)

A inequação que representa a restrição rentabilidade mínima é dada por

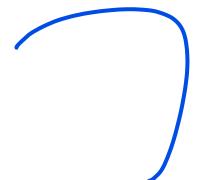
- (A) $P_1 + P_2 \geq 0,025$
- (B) $0,025P_1 + 0,04P_2 \geq 0,025$
- (C) $\frac{P_1}{0,025} + \frac{P_2}{0,04} \geq 0,025$
- (D) $0,02P_1 + 0,035P_2 \geq 2,5$
- (E) $0,02P_1 + 0,035P_2 \geq 0,025$



Exercício 6

A restrição que representa a condição de que todo o capital do cliente será investido é

- (A) $P_1 + P_2 > 1$
- (B) $P_1 + P_2 < 1$
- (C) $P_1 + P_2 \leq 100$
- (D) $P_1 + P_2 = 1$
- (E) $P_1 + P_2 = 100$



Para próxima aula...

Assistir aos vídeos sobre solução de sistemas de equações lineares.

Vídeo 1: <https://www.youtube.com/watch?v=n0g3wAUsxD8>

Vídeo 2: <https://www.youtube.com/watch?v=UKOgQAPRoww>

BONS ESTUDOS