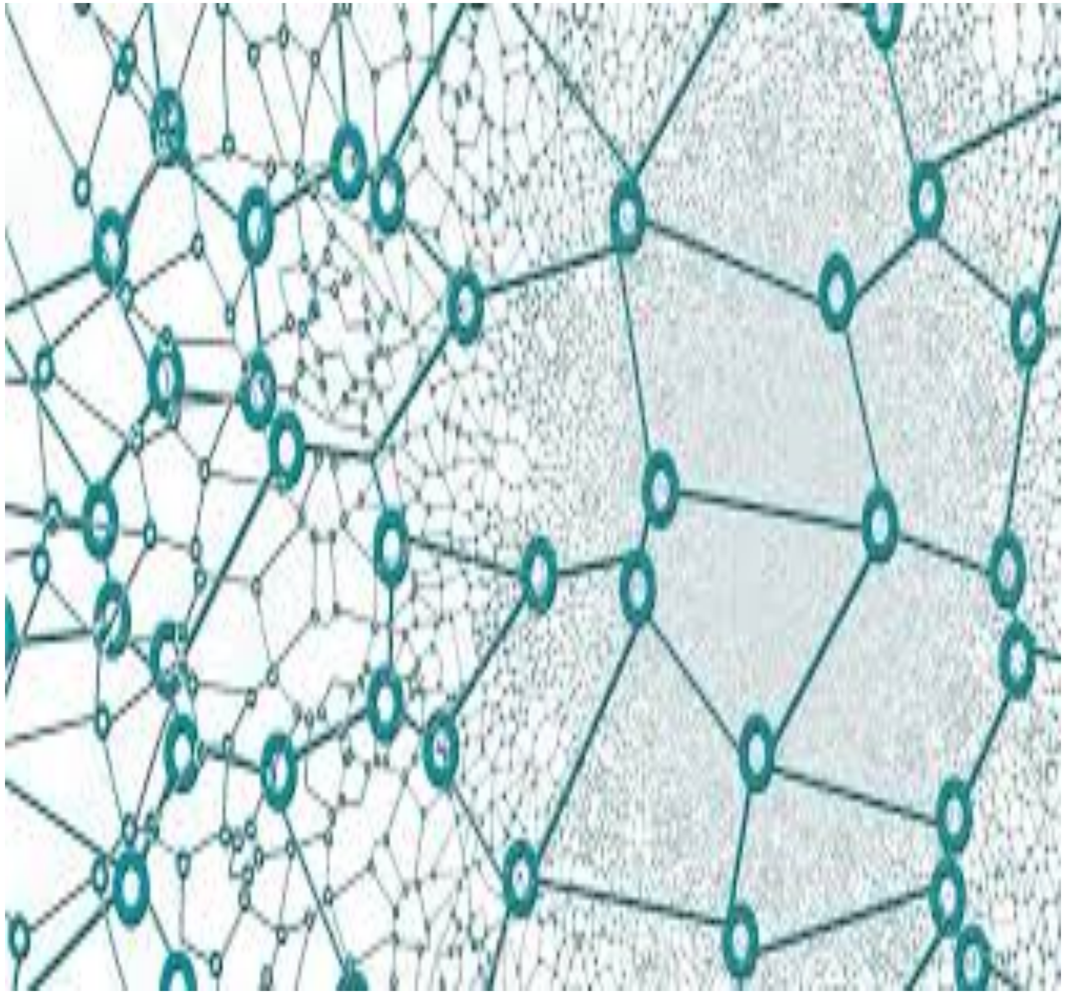
Pesquisa Operacional

Prof. Dr. Ricardo Cardoso de Oliveira

SOLUÇÃO ÓTIMA DE UM PROBLEMA DE PESQUISA OPERACIONAL

Teorema - A solução ótima de um problema de Programação Linear é dada pelo ponto extremo que compõe um dos vértices do polígono de regiões viáveis do modelo.

Fonte da imagem:



EXERCÍCIO 1

Uma fábrica produz dois refrigerantes: A e B. Para produzi-los, utilizam-se vários recursos, entre os quais os extratos e a água são os mais limitantes, devido a problemas ecológicos. Para produzir um litro de refrigerante A, o processo envolve a dissolução de um pacote de extrato (denominado delta) em um litro de água, além de outros recursos que não são limitantes. Já para a produção de um litro do refrigerante B, além da dissolução de um pacote de extrato (denominado gama) em um litro de água, exige mais um litro de água para o processo de arrefecimento, além de outros recursos que não são limitantes.

Sabe-se que

i) o lucro gerado por litro de A é de R$5, enquanto que o lucro por litro de B é R$ 2.
ii) o fornecedor de extratos só consegue entregar 3.000 pacotes de extrato delta e 4.000 pacotes de extrato gama, semanalmente.
iii) há um fator ambiental limitante de 9.000 litros de água por semana.

Denominando-se de x_1 a quantidade de litros de refrigerante A e de x_2 a quantidade de litros de refrigerante B a serem produzidos, qual deverá ser o plano de produção semanal viável para gerar o maior lucro a essa fábrica, dentro das condições apresentadas?

Solução: sejam x_1 e x_2 as quantidades, em litros, dos refrigerantes A e B produzidos, respectivamente. O modelo é escrito como:

$$\text{Máx } L(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2$$

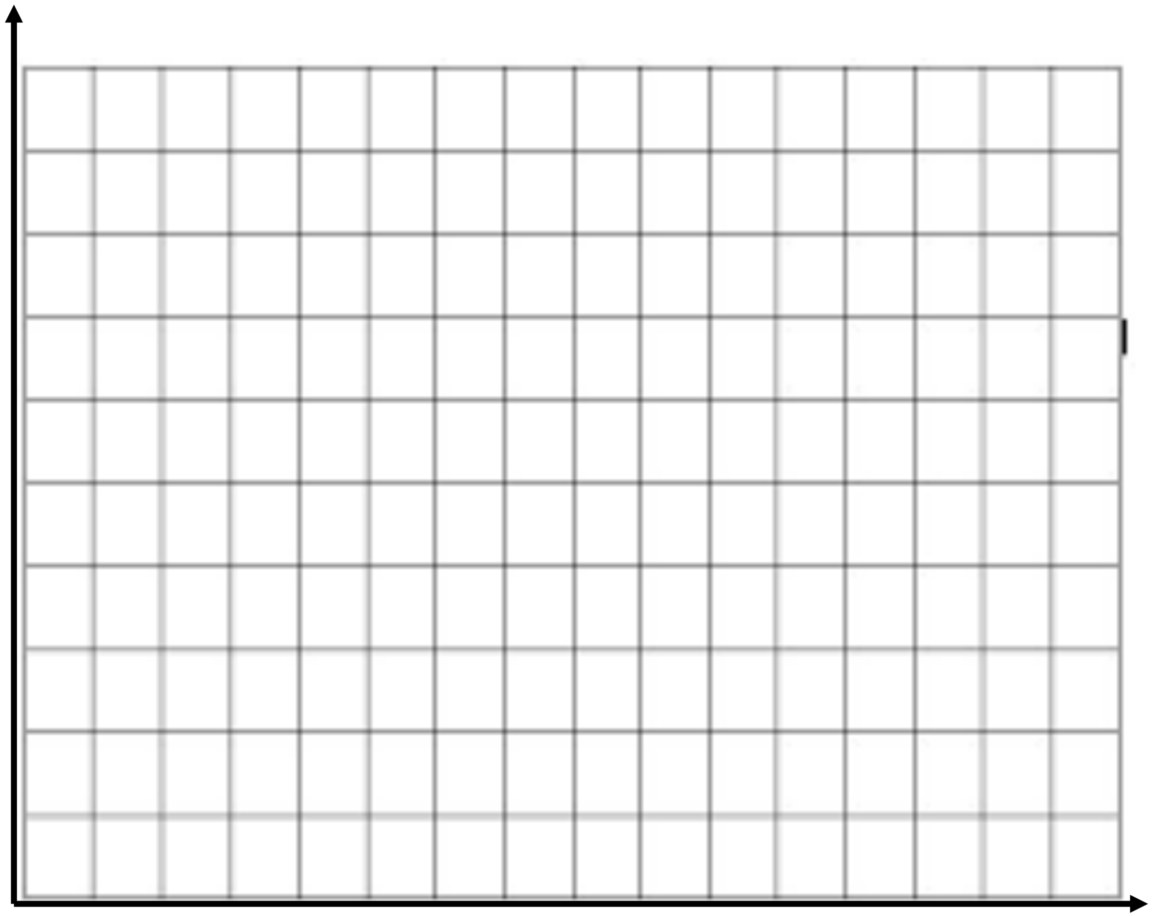
Sujeito a

$$x_1 \leq 3.000$$
$$x_2 \leq 4.000$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 9000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Máx } L(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2$$

Sujeito a

$$x_1 \leq 3.000$$
$$x_2 \leq 4.000$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 9000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Fonte da imagem:

Fonte da imagem:

Exercício 2

Uma indústria produz dois produtos: A e B. Cada um deles deve ser processado por duas máquinas, M_1 e M_2. Devido à programação de outros produtos, que também utilizam essas máquinas, a máquina M_1 tem 24 horas de tempo disponível para os produtos A e B, enquanto a máquina M_2 tem 16 horas de tempo disponível. Para produzir uma unidade do produto A, gastam-se 4 horas em cada uma das duas máquinas M_1 e M_2. Para produzir uma unidade do produto B, gastam-se 6 horas na máquina M_1 e 2 horas na máquina M_2. Cada unidade vendida do produto A gera lucro de R$ 80 e cada unidade do produto B, um lucro de R$ 60. Existe uma previsão máxima de demanda para o produto B de 3 unidades, não havendo restrições quanto à demanda do produto A. Determine quantas unidades dos produtos de A e B que devem ser produzidos, de forma a maximizar o lucro e, ao mesmo tempo, obedecer a todas as restrições.

O problema na forma canônica é:

$$\text{maximizar} \quad L = 80x + 60y$$

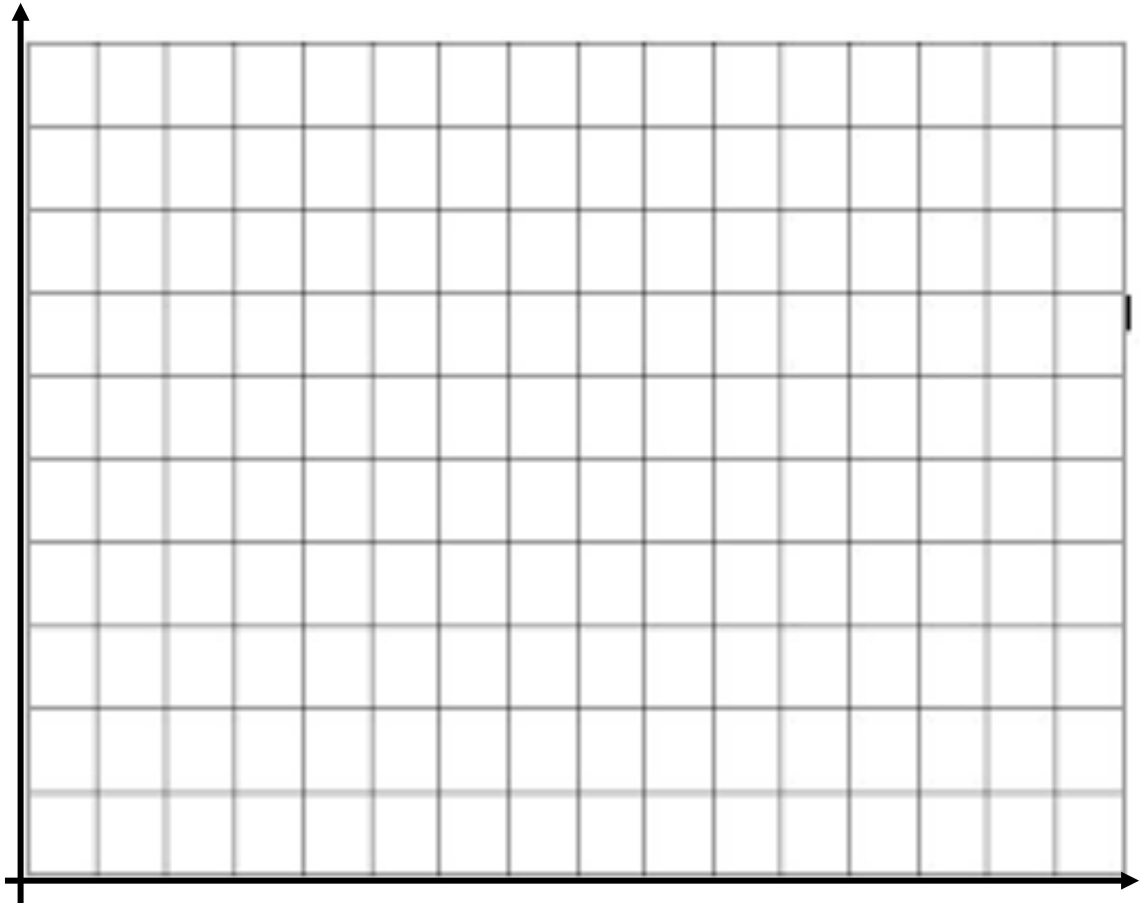
Sujeita a:

$$4x + 6y \leq 24$$
$$4x + 2y \leq 16$$
$$y \leq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

$$\text{máx} \quad L = 80x + 60y$$

Sujeita a:

$$4x + 6y \leq 24$$
$$4x + 2y \leq 16$$
$$y \leq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$



Fonte da imagem:

Fonte da imagem:

Exercício 3

Um fabricante de um determinado produto químico possuiu duas fábricas onde esse produto é fabricado. A fábrica X pode produzir no máximo 60 toneladas por semana e a fábrica Y 80 toneladas por semana. O fabricante deseja produzir um total de pelo menos 100 toneladas por semana. A quantidade de partículas poluentes encontrada por semana na atmosfera sobre uma cidade vizinha foi de 20 kg por tonelada produzida pela fábrica X e 30 kg por tonelada produzida pela fábrica Y. Com base nessas informações, escreva a formulação matemática completa para esse problema a fim de minimizar a quantidade total de partículas poluidoras na atmosfera.

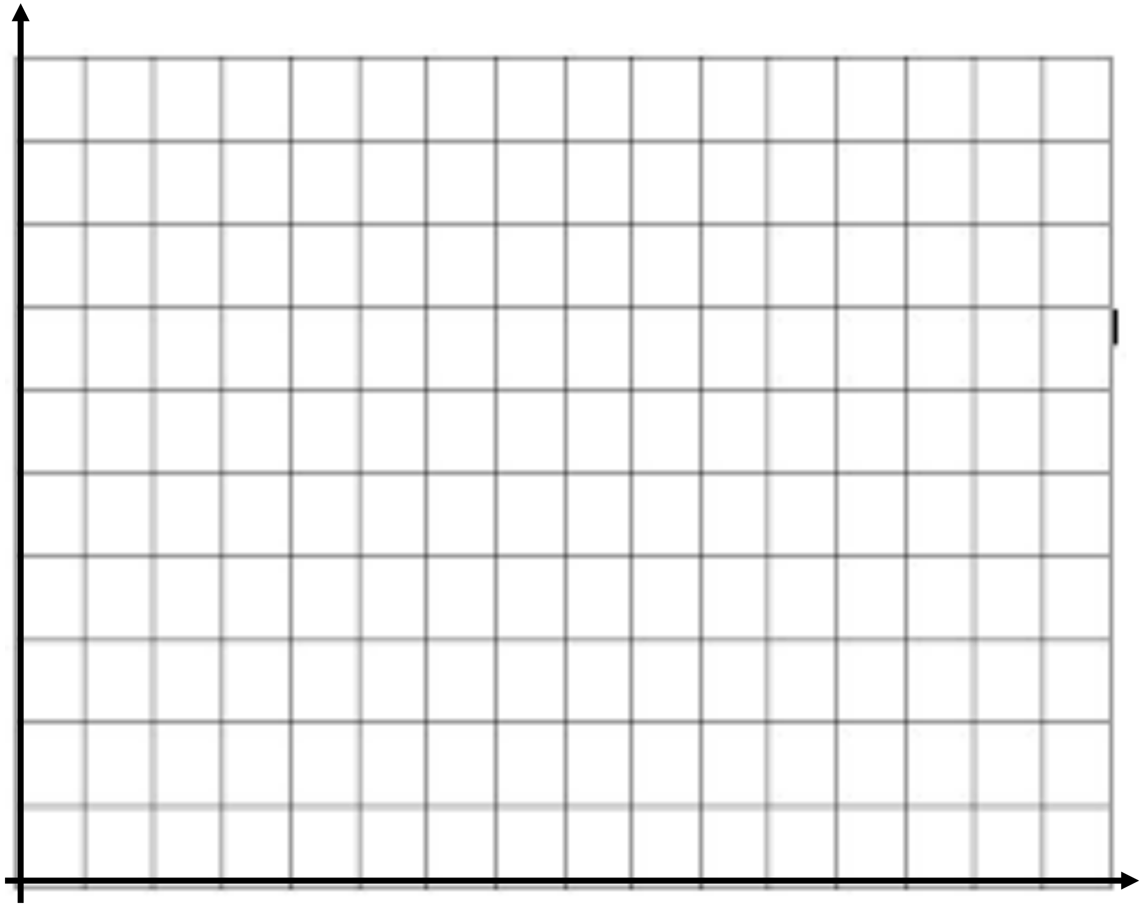
Fonte da imagem:

O problema na forma canônica é:

$$\min \quad R = 20x + 30y$$

Sujeita a:

$$x \leq 60$$
$$y \leq 80$$
$$x + y \geq 100$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$



Fonte da imagem:

Fonte da imagem:

Fonte da imagem:

Exemplo 4

Um investidor tem à sua disposição dois tipos de investimento que estão descritos segundo sua rentabilidade esperada e o seu risco, apresentados abaixo.

Investimento	Rentabilidade esperada	Risco
Opção 1	2,0%	2,5%
Opção 2	3,5%	4,0%

Essas opções de investimento não possuem correlação, então tanto o risco quanto a rentabilidade da carteira podem ser obtidos através de suas médias ponderadas. O cliente deseja obter uma rentabilidade mínima de 2,5%, mas quer atingir essa rentabilidade ao menor risco possível, investindo todo o seu capital. Além disso, pelo menos 20% do capital total deve ser investido na opção 1. Considere as seguintes variáveis de decisão: P_i - a percentagem do total investido na opção i (valores entre 0 e 1)

Fonte da imagem:

O problema na forma canônica é:

minimizar $R = 0,025P_1 + 0,04\ P_2$

Sujeita a:

$$0,02P_1 + 0,035P_2 \geq 0,025$$

$$P_1 \geq 0,20$$

$$P_1 + P_2 = 1$$

$$P_1 \geq 0$$

$$P_2 \geq 0$$

O problema na forma canônica é:

$$\text{minimizar} \quad R = 0{,}025P_1 + 0{,}04\,P_2$$

Sujeita a:

$$0{,}02P_1 + 0{,}035P_2 \geq 0{,}025$$
$$P_1 \geq 0{,}20$$
$$P_1 + P_2 = 1$$
$$P_1 \geq 0$$
$$P_2 \geq 0$$

$R1 : 0.02x + 0.035y = 0.025$

$R2 : x = 0.2$

$R3 : x + y = 1$

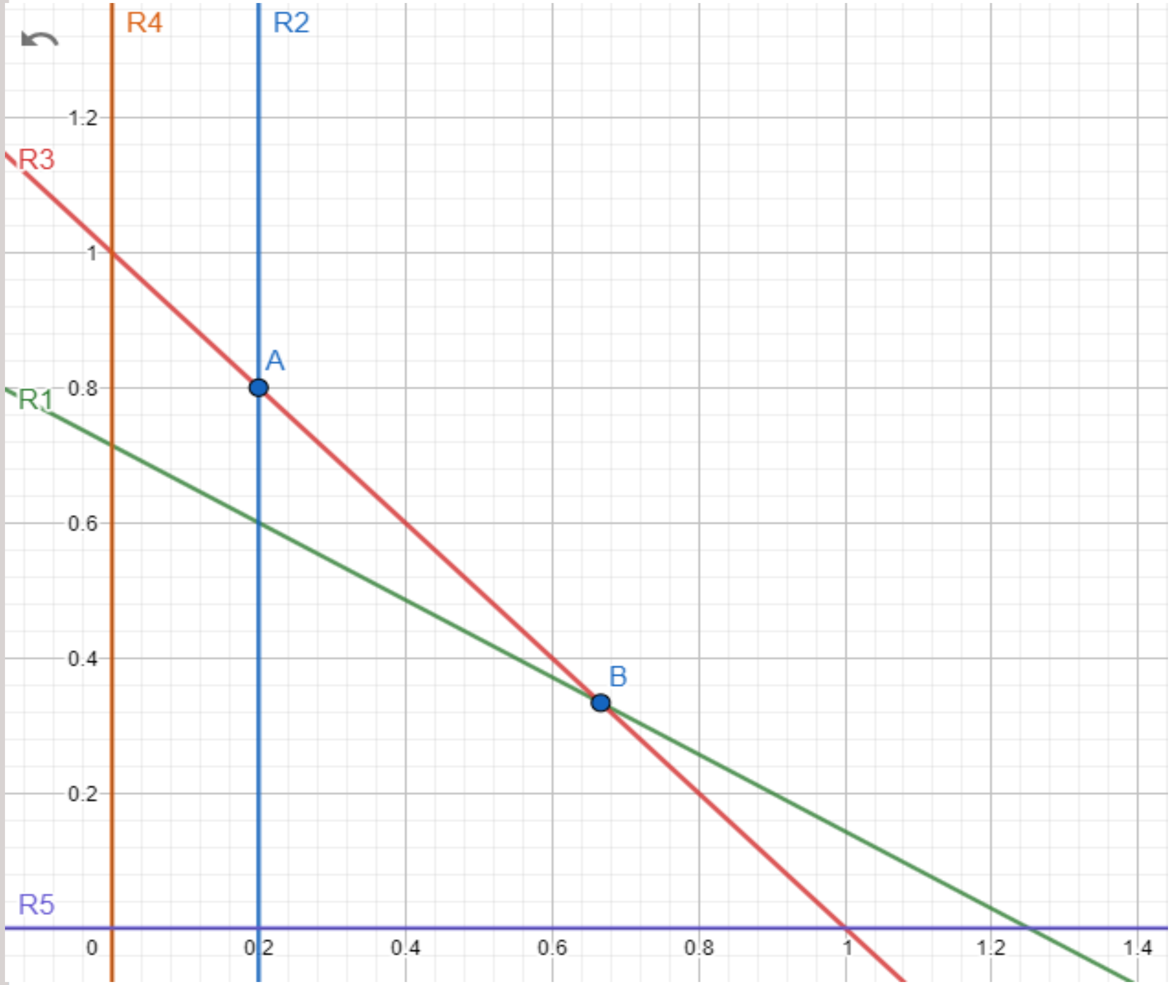
$R4 : x = 0$

$R5 : y = 0$

$A = (0.2, 0.8)$

$B = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Fonte da imagem:



Fonte da imagem:

BONS ESTUDOS