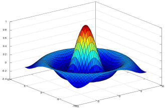
Casos Especiais e Dualidade

Professores André L.M. Marcato, Ivo C.da Silva Jr, João A.Passos Filho

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

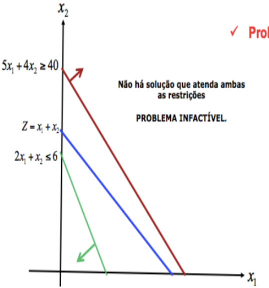
andre.marcato@ufjf.edu.br, ivo.junior@ufjf.edu.br, joao.passos@ufjf.edu.br

Primeiro Semestre de 2018



Agenda da Apresentação

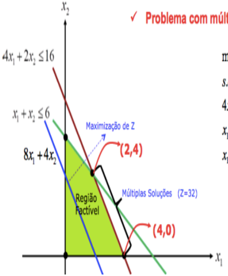
Casos Especiais em PL - Como Identificar no Tableau?



Observações:

✓ Problema sem solução

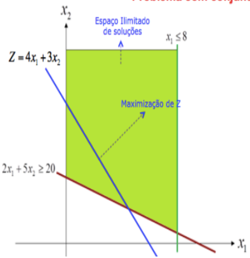
$$\max Z = x_1 + x_2$$
$s.a$
$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Observações:

✓ Problema com múltiplas soluções

$$\max Z = 8x_1 + 4x_2$$
$s.a$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Observações:

✓ Problema com conjunto ilimitado de soluções

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$
$s.a$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Caso Especial: Múltipla Solução

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótima, o coeficiente de uma das variáveis não-básicas (VNB) for nulo na linha referente a expressão da FOB.

Caso Especial: Múltipla Solução

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótima, o coeficiente de uma das variáveis não-básicas (VNB) for nulo na linha referente a expressão da FOB.

Exemplo:

$$\max z = 8x_1 + 4x_2$$
$$Sujeitoa:$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$
$$x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

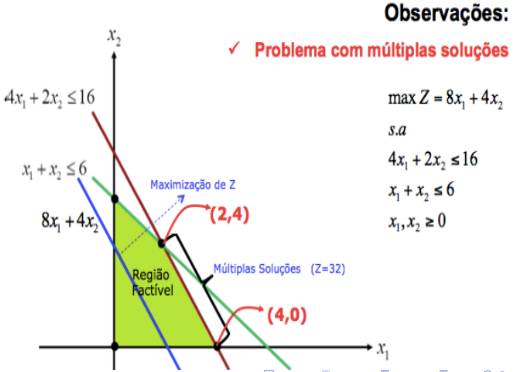
Caso Especial: Múltipla Solução

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótima, o coeficiente de uma das variáveis não-básicas (VNB) for nulo na linha referente a expressão da FOB.

Exemplo:

$$\max z = 8x_1 + 4x_2$$
$$Sujeitoa:$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$
$$x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.
  Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs $\geq$ 0.

Variável Básica	N^o da Equação	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
x_4	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.
  Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs $\geq$ 0.

Variável Básica	N^o da Equação	Coeficientes z	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
x_4	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização. Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs ≥ 0.

Variável Básica	Nº da Equação	z	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
x_4	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

Como x_2 (VNB) tem coeficiente igual a zero, sua entrada não altera o valor de Z (FOB).

Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.
  Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs ≥ 0.

Variável Básica	N^o da Equação	Coeficientes z	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
x_4	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

  Como x_2 (VNB) tem coeficiente igual a zero, sua entrada não altera o valor de Z (FOB).

- Sai x_4 e entra x_2

Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.
  Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs $\geq$ 0.

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes z	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
x_4	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

  Como x_2 (VNB) tem coeficiente igual a zero, sua entrada não altera o valor de Z (FOB).

- Sai x_4 e entra x_2

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes z	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	2
x_2	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	2	4
z	3	1	0	0	2	0	32

Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização. Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs $\geq$ 0.

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes z	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
x_4	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

Como x_2 (VNB) tem coeficiente igual a zero, sua entrada não altera o valor de Z (FOB).

- Sai x_4 e entra x_2

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes z	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	2
x_2	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	2	4
z	3	1	0	0	2	0	32

Com a entrada x_2 na base o valor de Z (FOB) não se altera.

Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau simplex (em qualquer iteração), não há a possibilidade de retirar nenhuma VB devido aos coeficientes negativos ou nulos na coluna referente a VNB que entratá na base.

Exemplo:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

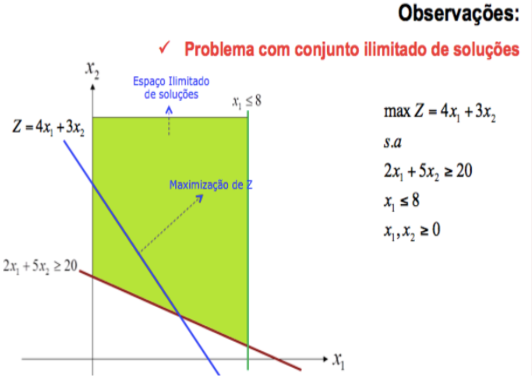
Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau simplex (em qualquer iteração), não há a possibilidade de retirar nenhuma VB devido aos coeficientes negativos ou nulos na coluna referente a VNB que entratá na base.

Exemplo:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$
Sujeito a:
$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

- Tableau 2ª Iteração, problema de Maximização. Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs ≥ 0.

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes w	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes
x_2	1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
x_4	2	0	1	0	0	1	8
w	3	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{172}{5}$

Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

- Tableau 2ª Iteração, problema de Maximização. Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs $\geq$ 0.

Variável Básica	Nº da Equação	w	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes	
x_2	1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$= -4$
x_4	2	0	1	0	0	1	8	$= \infty$
w	3	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{172}{5}$	

Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

- Tableau 2ª Iteração, problema de Maximização. Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs ≥ 0.

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes w	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes	
x_2	1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$= -4$
x_4	2	0	1	0	0	1	8	$= \infty$
w	3	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{172}{5}$	

x_3 deve entrar na base - maior coeficiente negativo em w (FOB). Entretanto, todos os elementos de sua coluna são negativos ou nulos, não há como uma variável básica (x_2 ou x_4) sair da base.

Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

- Tableau 2ª Iteração, problema de Maximização. Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs ≥ 0.

Variável Básica	Nº da Equação	w	x_1	x_2	x_3	x_4	Constantes	
x_2	1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$= -4$
x_4	2	0	1	0	0	1	8	$= \infty$
w	3	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{172}{5}$	

x_3 deve entrar na base - maior coeficiente negativo em w (FOB). Entretanto, todos os elementos de sua coluna são negativos ou nulos, não há como uma variável básica (x_2 ou x_4) sair da base.

Valor da Função Objetivo Ilimitado!

Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótimo, a solução final tiver pelo menos uma variável artificial com valor não nulo na base.

Exemplo:

$$\max z = x_1 + x_2$$

Sujeito a:

$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

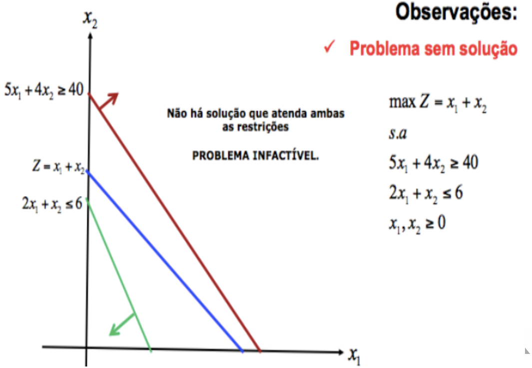
Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótimo, a solução final tiver pelo menos uma variável artificial com valor não nulo na base.

Exemplo:

$$\max z = x_1 + x_2$$
Sujeito a:
$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

$$\max z = x_1 + x_2$$
Sujeito a:
$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

$$\max z = x_1 + x_2$$
Sujeito a:
$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max z = x_1 + x_2 + Ma_1$$
Sujeito a:
$$5x_1 + 4x_2 - x_3 + a_1 = 40$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, a_1 \geq 0$$

Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + x_2 \\ &\text{Sujeito a:} \\ &5x_1 + 4x_2 \geq 40 \\ &2x_1 + x_2 \leq 6 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + x_2 + Ma_1 \\ &\text{Sujeito a:} \\ &5x_1 + 4x_2 - x_3 + a_1 = 40 \\ &2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

- Tableau ótimo no prob. Maxim. Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs ≥ 0.

Variável Básica	N^o da Equação	Coeficientes w	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Constantes
a_1	1	0	-3	0	-1	-4	1	16
x_2	2	0	2	1	0	1	0	6
w	3	1	$3M+1$	0	$-M$	$M+1$	0	$-16M+6$

Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ &\text{Sujeito a:} \\ 5x_1 + 4x_2 &\geq 40 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 + Ma_1 \\ &\text{Sujeito a:} \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 + a_1 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Tableau ótimo no prob. Maxim. Convergência $\Leftrightarrow$ Coef. das VNBs ≥ 0.

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes w	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Constantes
a_1	1	0	-3	0	-1	-4	1	16
x_2	2	0	2	1	0	1	0	6
w	3	1	$3M+1$	0	-M	$M+1$	0	$-16M+6$

- Observe que a_1 possui valor não nulo ($=16$). Ou seja, a solução final encontrada não é ótima, uma vez que a solução encontrada não corresponde à formulação original (FOB Original.

Empate na Escolha da Variável para Entrar ou Sair da base

- Empate para entrar na base
- Empate para sair da Base

Empate na Escolha da Variável para Entrar ou Sair da base

- Empate para entrar na base
- Empate para sair da Base

Empate na Escolha da Variável para Entrar ou Sair da base

- Empate para entrar na base
- Empate para sair da Base

Conseqüência: $\pm$ iterações dependendo da escolha.

Motivações da Dualidade

- A dualidade foi uma das descobertas mais importantes no desenvolvimento da Programação Linear

Motivações da Dualidade

- A dualidade foi uma das descobertas mais importantes no desenvolvimento da Programação Linear
- Onde é utilizada?

Motivações da Dualidade

- A dualidade foi uma das descobertas mais importantes no desenvolvimento da Programação Linear
- Onde é utilizada?
  - Casos em que a resolução do problema primal é difícil, de forma que a transformação do problema primal em dual facilitaria a resolução.

Motivações da Dualidade

- A dualidade foi uma das descobertas mais importantes no desenvolvimento da Programação Linear
- Onde é utilizada?
  - Casos em que a resolução do problema primal é difícil, de forma que a transformação do problema primal em dual facilitaria a resolução.

> Deve-se optar pelo problema, primal ou dual, que tiver o menor número de restrições.

Motivações da Dualidade

- A dualidade foi uma das descobertas mais importantes no desenvolvimento da Programação Linear
- Onde é utilizada?
  - Casos em que a resolução do problema primal é difícil, de forma que a transformação do problema primal em dual facilitaria a resolução.

    > Deve-se optar pelo problema, primal ou dual, que tiver o menor número de restrições.

  - Sensibilidades fornecidas pelos multiplicadores de lagrange (variáveis duais) em relação à FOB.

Regras de Transformação Primal $\Leftrightarrow$ Dual

O problema primal deve estar na forma canônica

Regras de Transformação Primal $\Leftrightarrow$ Dual

O problema primal deve estar na forma canônica

Maximização - Forma Canônica

$\max z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Sujeito a:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & \leq & b_n
\end{array}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots n$

Regras de Transformação Primal $\Leftrightarrow$ Dual

O problema primal deve estar na forma canônica

Minimização - Forma Canônica

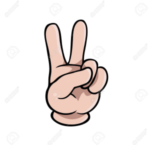
$\min z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Sujeito a:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & \geq & b_n
\end{array}
$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots n$

Regras de Transformação Primal $\Leftrightarrow$ Dual



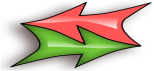
Se o problema primal é de minimização, o dual será de maximização e vice-versa.

Problema Primal

Encontre o vetor x de forma que:

$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$
Sujeito a:
$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y}$
$\mathbf{x} \geq 0$

x são as variáveis Primais



Problema Dual

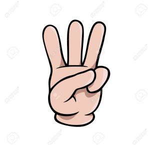
Encontre o vetor y de forma que:

$\min W$
Sujeito a:

$\mathbf{y} \geq 0$

y são as variáveis Duais

Regras de Transformação Primal $\Leftrightarrow$ Dual



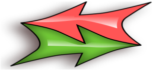
Os coeficientes transpostos da FOB do problema primal serão as constantes do lado direito das restrições do problema dual.

Problema Primal

Encontre o vetor x de forma que:

$$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$
Sujeito a:
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

x são as variáveis Primais



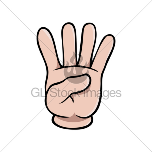
Problema Dual

Encontre o vetor y de forma que:

$$\min W$$
Sujeito a:
$$\geq \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \geq 0$$

y são as variáveis Duais

Regras de Transformação Primal $\Leftrightarrow$ Dual



As constantes do lado direito das restrições do problema primal serão os coeficientes da FOB do problema dual.

Problema Primal

Encontre o vetor x de forma que:

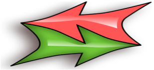
$$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

Sujeito a:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

x são as variáveis Primais



Problema Dual

Encontre o vetor y de forma que:

$$\min W = \mathbf{b}'\mathbf{y}$$

Sujeito a:

$$\geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

y são as variáveis Duais

Regras de Transformação Primal $\Leftrightarrow$ Dual

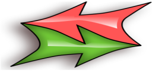
Os coeficientes transpostos das variáveis primais 'x' em cada uma das restrições do problema primal serão os coeficientes das variávies duais 'y' do problema dual.

Problema Primal

Encontre o vetor x de forma que:

$$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$
Sujeito a:
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

x são as variáveis Primais



Problema Dual

Encontre o vetor y de forma que:

$$\min W = \mathbf{b}'\mathbf{y}$$
Sujeito a:
$$\mathbf{A}'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \geq 0$$

y são as variáveis Duais

Regras de Transformação Primal $\Leftrightarrow$ Dual

Os coeficientes transpostos das variáveis primais 'x' em cada uma das restrições do problema primal serão os coeficientes das variávies duais 'y' do problema dual.

Problema Primal

Encontre o vetor x de forma que:

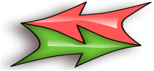
$$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

Sujeito a:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

x são as variáveis Primais



Problema Dual

Encontre o vetor y de forma que:

$$\min W = \mathbf{b}'\mathbf{y}$$

Sujeito a:

$$\mathbf{A}'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

y são as variáveis Duais

Regras de Transformação Primal ⇔ Dual

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Como fica a formulação dual do problema abaixo?

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Sujeito à:

$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$
$$x_1 \leq 60$$
$$x_2 \leq 80$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Como fica a formulação do problema apresentado?

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Como fica a formulação dual do problema abaixo?

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$
Sujeito à:
$x_1 + x_2 \leq 100$
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$
$x_1 \leq 60$
$x_2 \leq 80$
$x_1, x_2 \geq 0$

Já está na forma canônica?

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Como fica a formulação dual do problema abaixo?

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$
Sujeito à:
$x_1 + x_2 \leq 100$
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$
$x_1 \leq 60$
$x_2 \leq 80$
$x_1, x_2 \geq 0$

Já está na forma canônica?

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Como fica a formulação dual do problema abaixo?

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Sujeito à:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 100 & \longrightarrow y_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 & \longrightarrow y_2 \\ x_1 &\leq 60 & \longrightarrow y_3 \\ x_2 &\leq 80 & \longrightarrow y_4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 & \end{aligned}$$

Para cada restrição do problema primal existe uma variável dual associada

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Como fica a formulação dual do problema abaixo?

$$
\begin{aligned}
\max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\
\text{Sujeito à:} & \\
x_1 + x_2 &\leq 100 \quad \longrightarrow y_1 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \quad \longrightarrow y_2 \\
x_1 &\leq 60 \quad \longrightarrow y_3 \\
x_2 &\leq 80 \quad \longrightarrow y_4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Primal

Encontre o vetor x de forma que:

$$
\begin{aligned}
&\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \\
&\text{Sujeito a:} \\
&\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y} \\
&\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Dual

Encontre o vetor y de forma que:

$$
\begin{aligned}
&\min W = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\
&\text{Sujeito a:} \\
&\mathbf{A}'\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \\
&\mathbf{y} \geq 0
\end{aligned}
$$

Formulação Dual:

$$
\begin{aligned}
&\min w = 100y_1 + 240y_2 + 60y_3 + 80y_4 \\
&\text{Sujeito à:} \\
&1y_1 + 3y_2 + 1y_3 + 0y_4 \geq 600 \quad \longrightarrow x_1 \\
&1y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 1y_4 \geq 800 \quad \longrightarrow x_2 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Apresente a formulação dual do problema abaixo:

$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$

Sujeito à:

$x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 20$

$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Apresente a formulação dual do problema abaixo:

$$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Já está na forma canônica ?

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Apresente a formulação dual do problema abaixo:

$$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Já está na forma canônica ?

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Apresente a formulação dual do problema abaixo:

$$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Canônica

$$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$$

Sujeito à:

$$-x_1 - 4x_2 + 0x_3 \geq -20$$
$$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Apresente a formulação dual do problema abaixo:

$$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Canônica

$$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$$

Sujeito à:

$$-x_1 - 4x_2 + 0x_3 \geq -20 \longrightarrow y_1$$
$$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5 \longrightarrow y_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Transformação Primal-Dual - Exemplos

Apresente a formulação dual do problema abaixo:

$$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$$
Sujeito à:
$$x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Canônica

$$\min z = -2.5x_1 + 3x_2 + x_3$$
Sujeito à:
$$-x_1 - 4x_2 + 0x_3 \geq -20 \longrightarrow y_1$$
$$2x_1 + 0x_2 - 3x_3 \geq 5 \longrightarrow y_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Canônica

$$\min w = -20y_1 + 5y_2$$
Sujeito à:
$$-y_1 + 2y_2 \leq -2.5 \longrightarrow x_1$$
$$-4y_1 + 0y_2 \leq 3 \longrightarrow x_2$$
$$0y_1 - 3y_2 \leq 1 \longrightarrow x_3$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

$\max = f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$

Sujeito à:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3$

$x_j \geq 0, j = 1, 2$

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

$\max = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$

Sujeito à:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3$

$x_j \geq 0, j = 1, 2$

Forma Canônica?

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

$\max = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$

Sujeito à:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$\boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2}$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3$

$x_j \geq 0, j = 1, 2$

Forma Canônica?

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

$$\max = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

Sujeito à:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$\boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2$$

Forma Canônica?

Claro ... que não!

Como obter a formulação dual de problemas com restrições de igualdade?

Duas Abordagens de Formulação

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

1º Passo: Transformar as igualdades em desigualdades

$$\boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \end{array}}$$

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

2º Passo:
Transformar as desigualdades $\geq$ em $\leq$ (Prob. Maximização)
Transformar as desigualdades $\leq$ em $\geq$ (Prob. Minimização

Por exemplo: Se o problema for de maximização:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_3 \end{array}}$$

$$\Big\Downarrow \; x(-1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq -b_2 \\ -a_{31}x_1 - a_{22}x_2 \leq -b_3 \end{array}}$$

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

Forma Original:

$$
\begin{aligned}
&\max = f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2\\
&\text{Sujeito à:}\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \rightarrowtail y_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \rightarrowtail y_2\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \rightarrowtail y_3\\
&x_j \geq 0, j = 1, 2
\end{aligned}
$$

Forma Canônica:

$$
\begin{aligned}
&\max = f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2\\
&\text{Sujeito à:}\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \rightarrowtail y_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \rightarrowtail y_2'\\
&-a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq -b_2 \rightarrowtail y_2''\\
&-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \leq -b_3 \rightarrowtail y_3\\
&x_j \geq 0, j = 1, 2
\end{aligned}
$$

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

Forma Canônica

$$\max z = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

sujeito a:

$$\begin{array}{rl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 & \text{y1} \\
\boxed{\begin{array}{rl} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 & \text{y2'} \\ -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leq -b_2 & \text{y2''} \end{array}} & \\
-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \leq -b_3 & \text{y3} \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 &
\end{array}$$

Opção 1: Formulação Dual

$$\min \ w = b_1y_1 + b_2y_2^1 - b_2y_2^2 - b_3y_3$$

sujeito a:

$$\begin{array}{l}
a_{11}y_1 + \boxed{a_{21}y_2^1 - a_{21}y_2^2} - a_{31}y_3 \geq c_1 \\
a_{12}y_1 + \boxed{a_{22}y_2^1 - a_{22}y_2^2} - a_{32}y_3 \geq c_2 \\
y_1, y_2^1, y_2^2, y_3 \geq 0
\end{array}$$

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

Forma Canônica

$$\max z = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \quad \text{y1}$$
$$\boxed{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \quad \text{y2}}$$
$$-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \leq -b_3 \quad \text{y3}$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2$$

Opção 2: Formulação Dual

$$\min w = b_1 y_1 + b_2 y_2 - b_3 y_3$$

sujeito a:

$$a_{11}y_1 \boxed{+ a_{21}y_2} - a_{31} y_3 \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 \boxed{+ a_{22}y_2} - a_{32} y_3 \geq c_2$$
$$y_1, y_3 \geq 0$$
$$\boxed{y_2 \text{ livre}} \star$$

Caso Especial: Como tratar as restrições de igualdade?

Forma Canônica

$$\max z = f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 & y_2' \\ -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 &\le -b_2 & y_2'' \\ -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 &\le -b_3 & y_3 \\ x_j \ge 0, & \quad j = 1,2 \end{aligned}$$

Opção 1: Formulação Dual

$$\min\ w = b_1y_1 + b_2y_2^1 - b_2y_2^2 - b_3y_3$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2^1 - a_{21}y_2^2 - a_{31}y_3 &\ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2^1 - a_{22}y_2^2 - a_{32}y_3 &\ge c_2 \\ y_1, y_2^1, y_2^2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

OU

Opção 2: Formulação Dual

$$\min\ w = b_1y_1 + b_2y_2 - b_3y_3$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - a_{31}y_3 &\ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - a_{32}y_3 &\ge c_2 \\ y_1, y_3 &\ge 0 \\ y_2 \text{ livre} \end{aligned}$$

Resolução Tableau Opção 1

Observações em relação à dualidade

- As variáveis duais correspondentes as restrições de igualdade serão sempre livres ou irrestritas de sinal. Ou seja, poderão assumir valores negativos ou positivos.

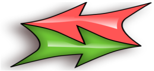
Observações em relação à dualidade

Problema Primal

Encontre o vetor x de forma que:

$\max Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$
Sujeito a:
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{y}$
$\mathbf{x} \geq 0$

x são as variáveis Primais



Problema Dual

Encontre o vetor y de forma que:

$\min W = \mathbf{b}'\mathbf{y}$
Sujeito a:
$\mathbf{A}'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{y} \geq 0$

y são as variáveis Duais

Solução Factível $Z \neq W$

Solução Ótima $Z = W$

Fim