

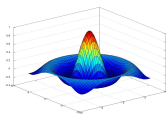
# Casos Especiais e Dualidade

Professores André L.M. Marcato, Ivo C.da Silva Jr, João A.Passos Filho

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

[andre.marcato@ufjf.edu.br](mailto:andre.marcato@ufjf.edu.br), [ivo.junior@ufjf.edu.br](mailto:ivo.junior@ufjf.edu.br), [joao.passos@ufjf.edu.br](mailto:joao.passos@ufjf.edu.br)

Primeiro Semestre de 2018

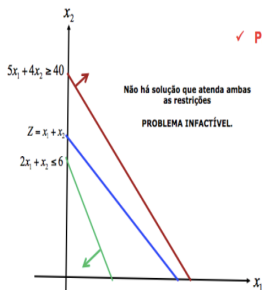


# Agenda da Apresentação

- 1 Casos Especiais
  - Problema com Múltiplas Soluções
  - Problema Ilimitado
  - Problema Sem Solução
  - Empate na Escolha (entrar ou sair da base)



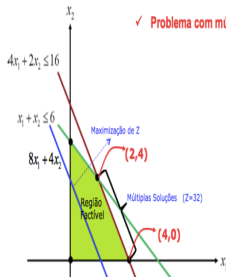
# Casos Especiais em PL - Como Identificar no Tableau?



## Observações:

✓ Problema sem solução

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \\ 5x_1 + 4x_2 &\geq 40 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



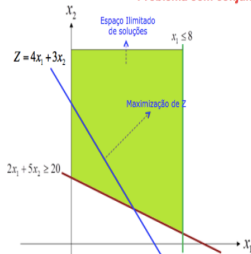
## Observações:

✓ Problema com múltiplas soluções

$$\begin{aligned} \max Z &= 8x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a} \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Observações:

✓ Problema com conjunto ilimitado de soluções



$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \\ 2x_1 + 5x_2 &\geq 20 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

# Caso Especial: Múltipla Solução

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótima, o coeficiente de uma das variáveis não-básicas (VNB) for nulo na linha referente a expressão da FOB.



# Caso Especial: Múltipla Solução

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótima, o coeficiente de uma das variáveis não-básicas (VNB) for nulo na linha referente a expressão da FOB.

Exemplo:

$$\max z = 8x_1 + 4x_2$$

*Sujeito a :*

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## Caso Especial: Múltipla Solução

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótima, o coeficiente de uma das variáveis não-básicas (VNB) for nulo na linha referente a expressão da FOB.

Exemplo:

$$\max z = 8x_1 + 4x_2$$

*Sujeito a :*

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Observações:**

✓ Problema com múltiplas soluções

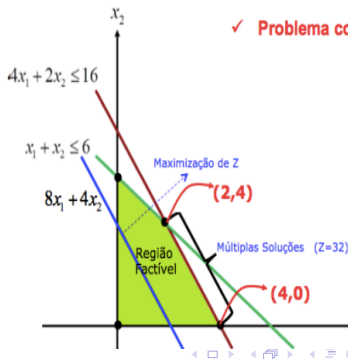
$$\max Z = 8x_1 + 4x_2$$

s.a

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.  
Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável	Nº da	Coeficientes					Constantes
Básica	Equação	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	
x <sub>1</sub>	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
x <sub>4</sub>	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

# Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.  
Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes					Constantes
		z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	
x <sub>1</sub>	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
x <sub>4</sub>	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32



# Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.  
Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes					Constantes
		z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
$x_4$	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

Como  $x_2$  (VNB) tem coeficiente igual a zero, sua entrada não altera o valor de Z (FOB).

# Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.  
Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes					Constantes
		z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
$x_4$	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

Como  $x_2$  (VNB) tem coeficiente igual a zero, sua entrada não altera o valor de Z (FOB).

- Sai  $x_4$  e entra  $x_2$

# Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.  
Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável Básica	Nº da Equação	z	Coeficientes				Constantes
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
$x_4$	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

Como  $x_2$  (VNB) tem coeficiente igual a zero, sua entrada não altera o valor de Z (FOB).

- Sai  $x_4$  e entra  $x_2$

Variável Básica	Nº da Equação	z	Coeficientes				Constantes
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	2
$x_2$	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	2	4
z	3	1	0	0	2	0	32

# Caso Especial: Múltipla Solução

- Tableau ótimo em um problema de Maximização.  
Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável	Nº da	Coeficientes					Constantes
Básica	Equação	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	4
$x_4$	2	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	2
z	3	1	0	0	2	0	32

Como  $x_2$  (VNB) tem coeficiente igual a zero, sua entrada não altera o valor de Z (FOB).

- Sai  $x_4$  e entra  $x_2$

Variável	Nº da	Coeficientes					Constantes
Básica	Equação	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_1$	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	2
$x_2$	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	2	4
z	3	1	0	0	2	0	32

Com a entrada  $x_2$  na base o valor de Z (FOB) não se altera.

## Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau simplex (em qualquer iteração), não há a possibilidade de retirar nenhuma VB devido aos coeficientes negativos ou nulos na coluna referente a VNB que entrará na base.

Exemplo:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau simplex (em qualquer iteração), não há a possibilidade de retirar nenhuma VB devido aos coeficientes negativos ou nulos na coluna referente a VNB que entrará na base.

Exemplo:

**Observações:**

✓ Problema com conjunto ilimitado de soluções

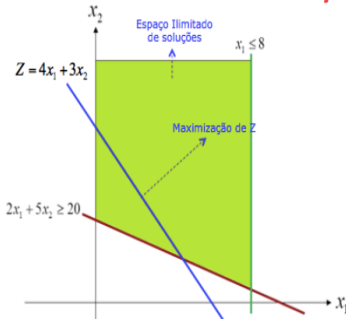
$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

s.a

$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

- Tableau 2ª Iteração, problema de Maximização. Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes					Constantes
		w	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_2$	1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
$x_4$	2	0	1	0	0	1	8
w	3	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{172}{5}$

## Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

- Tableau 2ª Iteração, problema de Maximização. Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável	Nº da	Coeficientes					Constantes	
Básica	Equação	w	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
$x_2$	1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$= -4$
$x_4$	2	0	1	0	0	1	8	$= \infty$
w	3	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{172}{5}$	



## Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

- Tableau 2ª Iteração, problema de Maximização. Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável Básica	Nº da Equação	Coeficientes					Constantes	
		w	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
$x_2$	1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$= -4$
$x_4$	2	0	1	0	0	1	8	$= \infty$
w	3	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{172}{5}$	

$x_3$  deve entrar na base - maior coeficiente negativo em w (FOB). Entretanto, todos os elementos de sua coluna são negativos ou nulos, não há como uma variável básica ( $x_2$  ou  $x_4$ ) sair da base.

## Caso Especial: Conjunto Ilimitado de Soluções (unbounded)

- Tableau 2ª Iteração, problema de Maximização. Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável	Nº da	Coeficientes					Constantes	
Básica	Equação	w	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
$x_2$	1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$= -4$
$x_4$	2	0	1	0	0	1	8	$= \infty$
w	3	1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{172}{5}$	

$x_3$  deve entrar na base - maior coeficiente negativo em w (FOB). Entretanto, todos os elementos de sua coluna são negativos ou nulos, não há como uma variável básica ( $x_2$  ou  $x_4$ ) sair da base.

Valor da Função Objetivo Ilimitado!

## Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótimo, a solução final tiver pelo menos uma variável artificial com valor não nulo na base.

Exemplo:

$$\max z = x_1 + x_2$$

Sujeito a:

$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

Como identificar esta situação no Tableau Simplex?

Quando, na forma tableau ótimo, a solução final tiver pelo menos uma variável artificial com valor não nulo na base.

Exemplo:

$$\max z = x_1 + x_2$$

Sujeito a:

$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



**Observações:**

✓ Problema sem solução

$$\max Z = x_1 + x_2$$

s.a

$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## Caso Especial: Problema Sem Solução Ótima

$$\max z = x_1 + x_2$$

Sujeito a:

$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max z = x_1 + x_2 + Ma_1$$

Sujeito a:

$$5x_1 + 4x_2 - x_3 + a_1 = 40$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, a_1 \geq 0$$

- Tableau ótimo no prob. Maxim. Convergência  $\Leftrightarrow$  Coef. das VNBs  $\geq 0$ .

Variável	Nº da	Coeficientes						Constantes
Básica	Equação	w	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$a_1$	
$a_1$	1	0	-3	0	-1	-4	1	16
$x_2$	2	0	2	1	0	1	0	6
w	3	1	$3M + 1$	0	-M	$M + 1$	0	$-16M + 6$

- Observe que  $a_1$  possui valor não nulo ( $= 16$ ). Ou seja, a solução final encontrada não é ótima, uma vez que a solução encontrada não corresponde à formulação original (FOB Original).



# Empate na Escolha da Variável para Entrar ou Sair da base



Empate para entrar na base



Empate para sair da Base



# Empate na Escolha da Variável para Entrar ou Sair da base

➡ Empate para entrar na base

➡ Empate para sair da Base



## Empate na Escolha da Variável para Entrar ou Sair da base



Empate para entrar na base



Empate para sair da Base



Consequência:  $\pm$  iterações dependendo da escolha.



Fim

