

Programação Linear

Prof. André Luís Marques Marcato

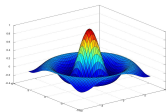
▶ andre.marcato@ufjf.edu.br

Universidade Federal de Juiz de Fora



Engenharia - UFJF

Primeiro Semestre de 2018



Agenda da Apresentação

- 1 Introdução
 - Histórico
 - Modelagem Matemática
 - Exemplos
- 2 Solução Gráfica
 - Função Objetivo, Região Viável, Análise de Sensibilidade
- 3 Formulação Matricial
 - c , A , B , A_{eq} , B_{eq} , lowerbound, upper bound



Histórico



Jean Baptiste Joseph Fourier (matemático Francês). Ele publicou um trabalho sobre a resolução de sistemas de equações lineares. Este trabalho é considerado o primeiro sobre programação linear.

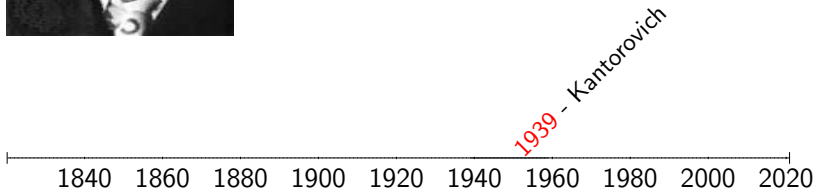
1827 - Fourier

1840 1860 1880 1900 1920 1940 1960 1980 2000 2020

Histórico



Leonide Kantorovich (matemático e economista Russo). Formulou e resolveu um problema de programação linear, mas seu trabalho permaneceu desconhecido até 1959.

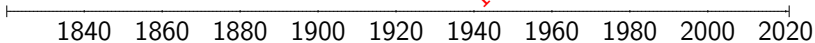


Histórico



O termo programação linear foi criado pelo economista Holandês Tjallinging Koopmans em uma conversa com Datzig na Califórnia em 1948. Ele formulou modelos de programação linear aplicados em economia clássica.

1939 - Koopmans

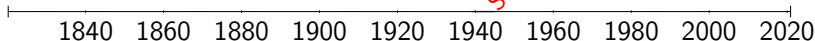


Histórico

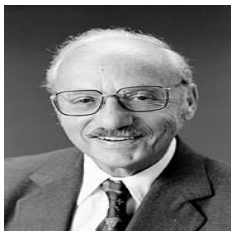


Durante a Segunda Guerra Mundial, modelos de programação linear foram projetados e resolvidos em aplicações voltadas para planejamento militar.

Second War

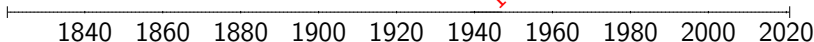


Histórico

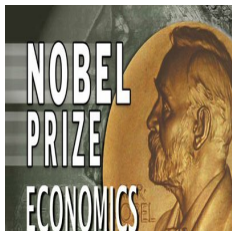


Em 1947, George Dantzig desenvolveu o Método Simplex, propondo a Formulação Geral de Problemas de Programação Linear. Ele trabalhava como matemático consultor para o Pentágono.

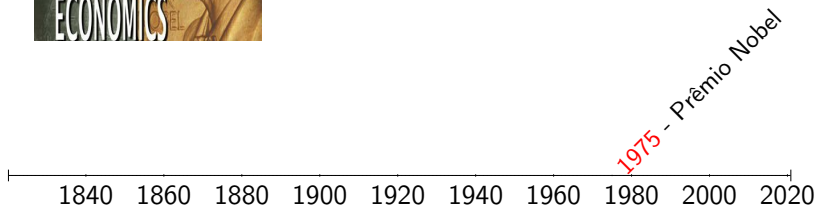
1947 - Dantzig



Histórico



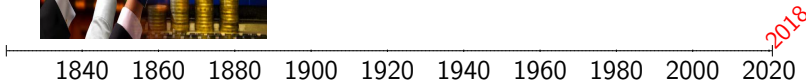
Em 1975, Kantorovich e Koopmans receberam o Prêmio Nobel em Ciências Econômicas pelo trabalho desenvolvido na área de programação linear.



Histórico



Atualmente, problemas de prog. linear são resolvidos 1.000.000 de vezes mais rapidamente que 1985. Além disto, problemas com mais de 1.000.000 variáveis e restrições são prontamente resolvidos.



Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

➡ Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.



Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

- ➡ Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.
- ➡ Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.



Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

- ➡ Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.
- ➡ Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.
- ➡ Manter a precisão numérica para a obtenção de resultados significativos.



Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

- ➡ Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.
- ➡ Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.
- ➡ Manter a precisão numérica para a obtenção de resultados significativos.

A partir de 1957, todos estes aspectos foram solucionados!



Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

➡ Identificação das variáveis;



Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- ➡ Identificação das variáveis;
- ➡ Identificação dos objetivos.



Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- ➡ Identificação das variáveis;
- ➡ Identificação dos objetivos.
- ➡ Identificação dos aspectos restritivos.



Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- ➡ Identificação das variáveis;
- ➡ Identificação dos objetivos.
- ➡ Identificação dos aspectos restritivos.

O modelo é uma tentativa de representação da realidade e sua complexidade depende do grau de exatidão requerido.



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1

Um agricultor deseja cultivar duas variedades de cereais, **A** e **B**, em um área restrita a 100 ares ($100m^2$). Sendo que:

- 1 are do cereal **A** produz 8 sacas
- 1 are do cereal **B** produz 10 sacas

Para o plantio, cada cereal:

- Tipo **A** precisa de 3 homens-hora de trabalho por are
- Tipo **B** precisa de 2 homens-hora de trabalho por are

sendo que se dispõe até 240 homens-hora de trabalho para o cultivo e o custo da mão de obra é de \$200 (unidades monetárias) por homem-hora.

A demanda máxima é limitada pelo mercado a 480 sacas do cereal tipo **A**, vendido a \$150/saca, e 800 sacas do cereal **B**, vendido a \$120/saca.

O agricultor deseja otimizar a área de cultivo de forma a **MAXIMIZAR O LUCRO**.



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Variáveis do Problema

As variáveis estão relacionadas ao tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo do cereal tipo **A** e **B**. Logo podemos definir;

- x_1 : área destinada ao plantio do cereal Tipo **A**
- x_2 : área destinada ao plantio do cereal Tipo **B**



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

$$\text{FOB} = \text{MAX LUCRO} = \text{MAX RECEITAS} - \text{CUSTOS}$$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

$$\text{FOB} = \text{MAX LUCRO} = \text{MAX RECEITAS} - \text{CUSTOS}$$

$$\bullet \quad x_1: \text{Receitas: } \textit{receitas} = \overset{(150 \times 8)}{1200} x_1 + \overset{(120 \times 10)}{1200} x_2$$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

$$FOB = \text{MAX LUCRO} = \text{MAX RECEITAS} - \text{CUSTOS}$$

$$x_1: \text{Receitas: } receitas = \overset{(150 \times 8)}{1200} x_1 + \overset{(120 \times 10)}{1200} x_2$$

$$x_2: \text{Custos: } custos = \overset{(200 \times 3)}{600} x_1 + \overset{(200 \times 2)}{400} x_2$$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

$$FOB = \text{MAX LUCRO} = \text{MAX RECEITAS} - \text{CUSTOS}$$

$$x_1: \text{Receitas: } receitas = \overset{(150 \times 8)}{1200} x_1 + \overset{(120 \times 10)}{1200} x_2$$

$$x_2: \text{Custos: } custos = \overset{(200 \times 3)}{600} x_1 + \overset{(200 \times 2)}{400} x_2$$

$$FOB = \max(600x_1 + 800x_2)$$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares

- $x_1 + x_2 \leq 100$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações de devido à demanda de mercado



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações de devido à demanda de mercado
 - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações de devido à demanda de mercado
 - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**
 - $10x_2 \leq 800$ ou $x_2 \leq 80$ para o cereal tipo **B**



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações de devido à demanda de mercado
 - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**
 - $10x_2 \leq 800$ ou $x_2 \leq 80$ para o cereal tipo **B**



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Função Objetivo



Área Cultivo



Mão de Obra



Produção Cereal **A**



Produção Cereal **B**



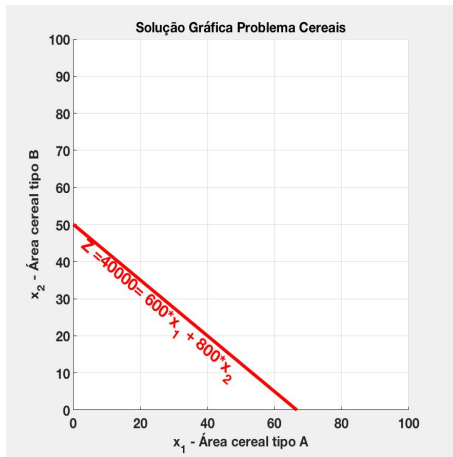
Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

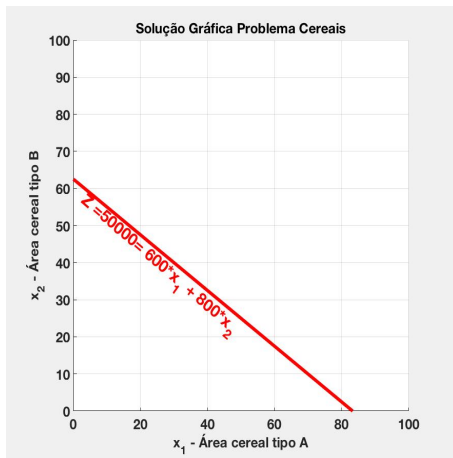
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

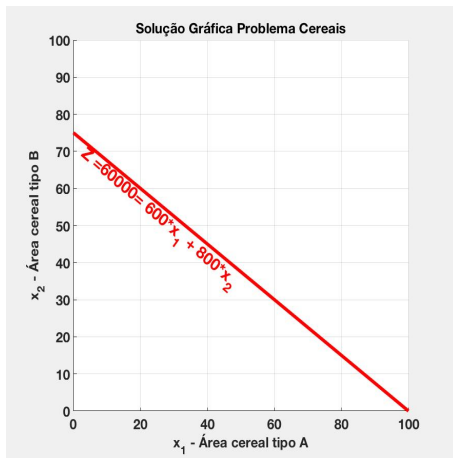
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

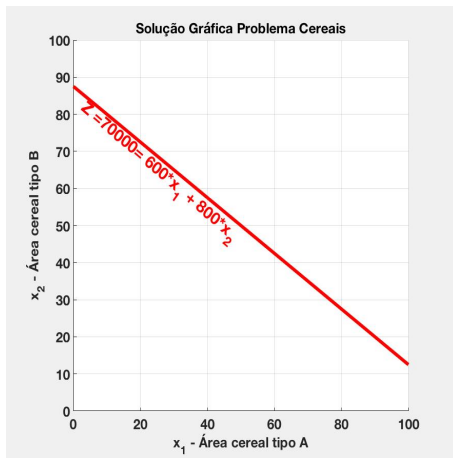
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

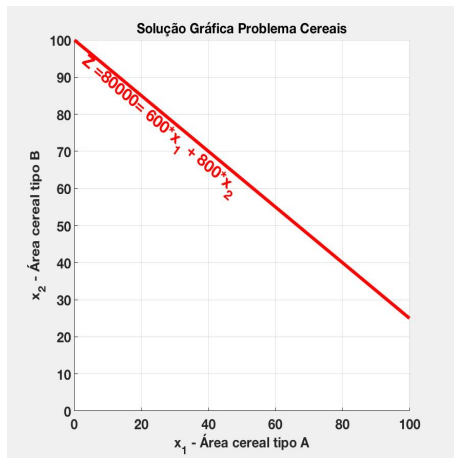
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

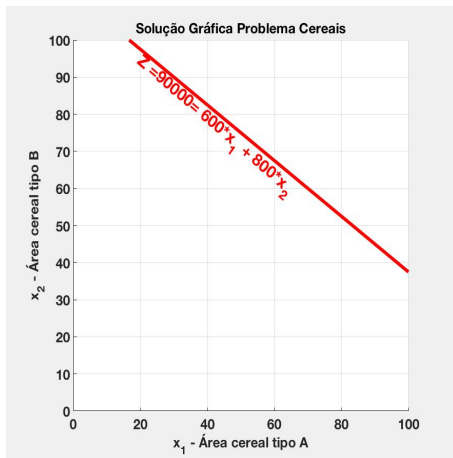
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

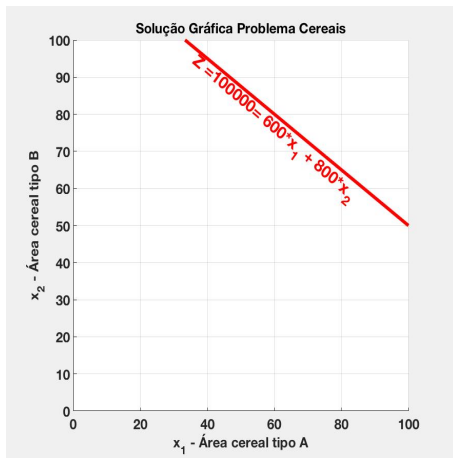
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

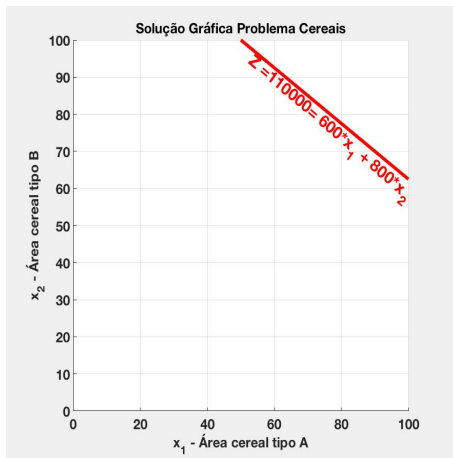
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

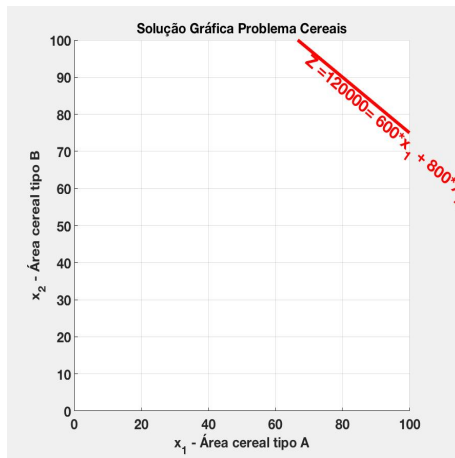
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

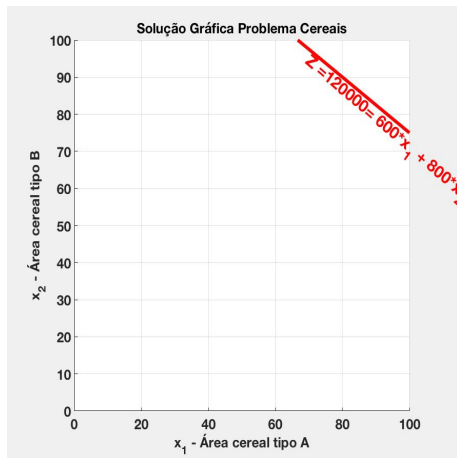
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

Objetivo

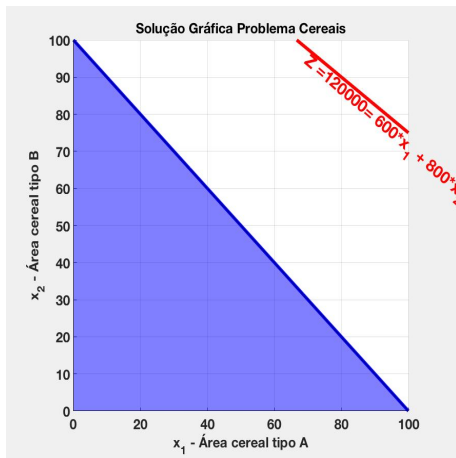
Área



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{array}{ll}\max Z = 600x_1 + 800x_2 & \text{Objetivo} \\ \text{sujeito a} & \\ x_1 + x_2 \leq 100 & \text{Área}\end{array}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

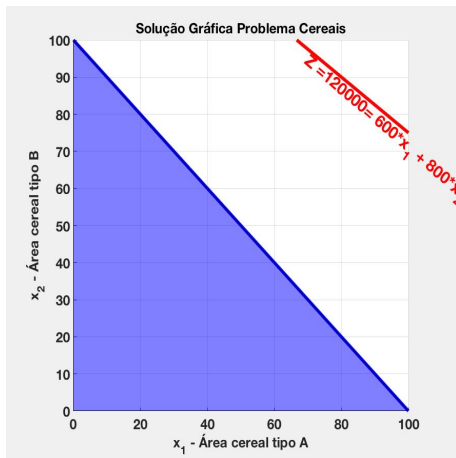
$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

Objetivo

Área

Mão de Obra



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

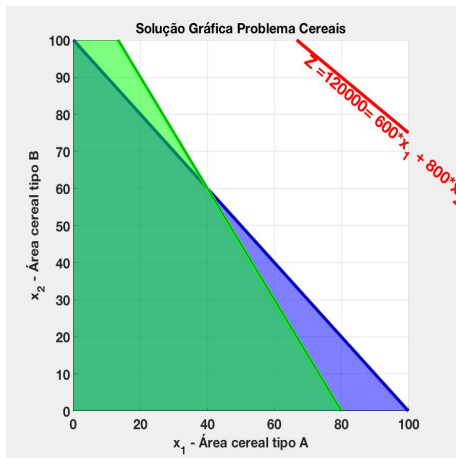
$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

Objetivo

Área

Mão de Obra



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

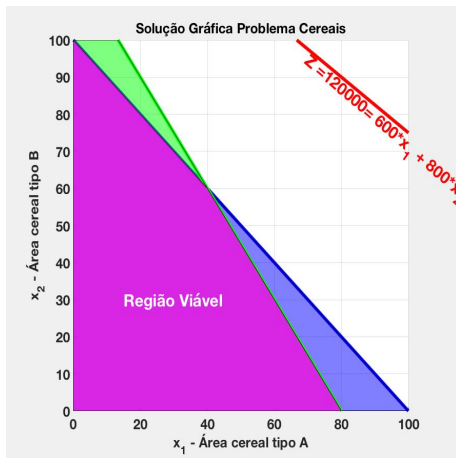
$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

Objetivo

Área

Mão de Obra



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

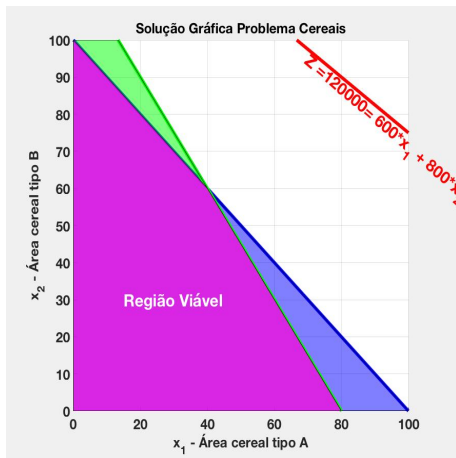
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

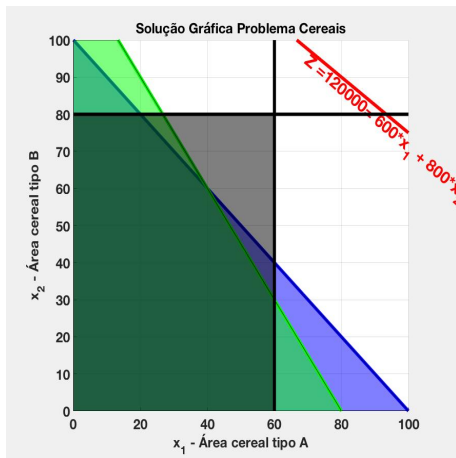
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

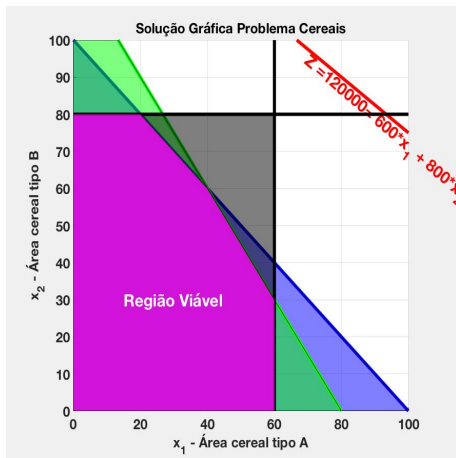
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

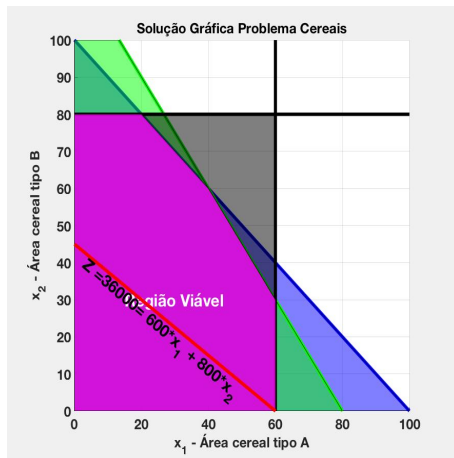
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

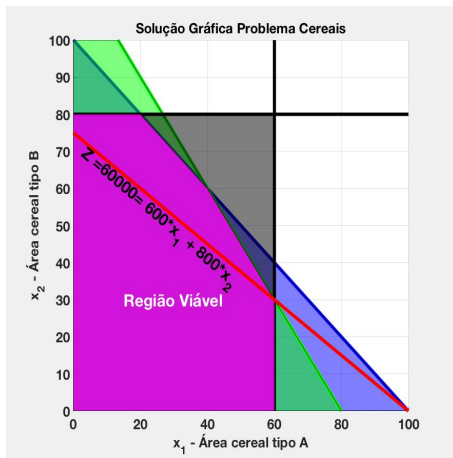
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

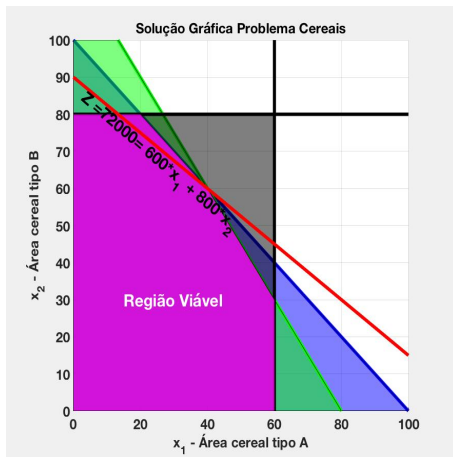
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

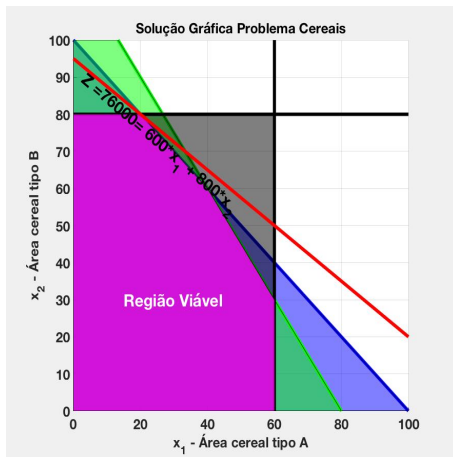
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

Área

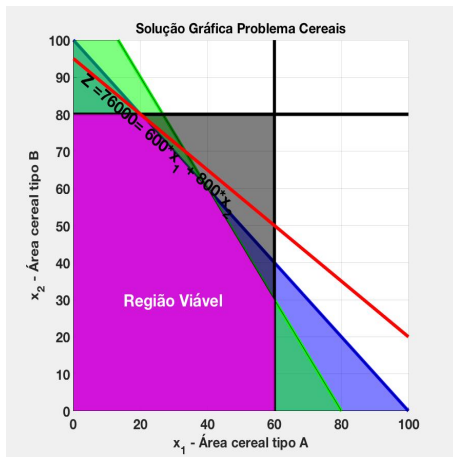
Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção

Solução Ótima: $X_1 = 20$ e
 $X_2 = 80$!!!



Fim

