Introdução à Pesquisa Operacional

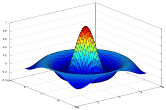
Prof. André Luís Marques Marcato

andre.marcato@ufjf.edu.br

Universidade Federal de Juiz de Fora

Engenharia - UFJF

Primeiro Semestre de 2018



Agenda da Apresentação

Pesquisa Operacional

- Investigação Operacional
- Operational Research
- Operations Research
- Outras Denominações
  - Programação Matemática
  - Otimização

Principais Sociedades de PO

- 
  - Sobrapo (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional)
- 
  - INFORMS (Institute for Operations Research and Management Science)
  - EURO (The Association of European Operational Research Societies)
  - APDIO (Associação Portuguesa de Investigação Operacional)
  - IFORS (International Federation of Operational Research Societies)
  - ALIO (Assoación Latino-Ibero-Americana de Investigatión Operativa)

O que é otimizar?

Pergunta: O que é otimizar?

Significado de Otimizar

v.t. Dar a algo (uma máquina, uma empresa, uma situação) um rendimento ótimo, criando-lhe as condições mais favoráveis ou tirando (dele ou dela) o melhor partido possível; tornar (algo) ótimo ou ideal.

O que é otimizar?

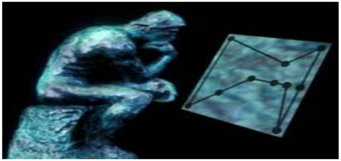
Pergunta: O que é otimizar?

EXTRAIR A MELHOR SOLUÇÃO POSSÍVEL DE UM DETERMINADO PROBLEMA/SITUAÇÃO

Histórico

2ª Guerra Mundial (1934-1945)

OTIMIZAÇÃO COMO RAMO CIENTÍFICO

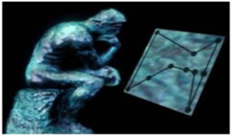


PESQUISA OPERACIONAL

Investigação de forma sistemática e racional dos processos envolvidos na realização de uma atividade produtiva (bélica ou não)

Histórico

PESQUISA OPERACIONAL



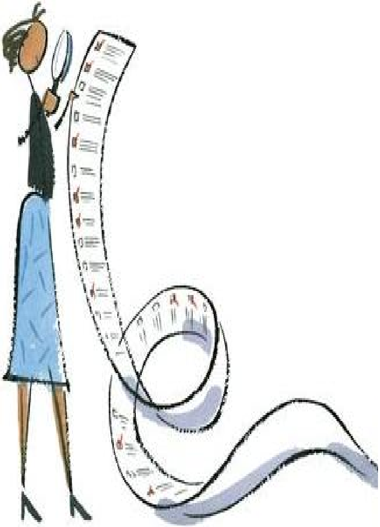
OTIMIZAÇÃO COMO RAMO CIENTÍFICO

Tomada de decisão em diversas áreas do conhecimento

IFORS 2014 - Technical Program (3 em 3 anos)

- Railway Scheduling Problems
- Routing Problems with Profits and Other Applications
- Airline/Airport Optimisation in Operations and Scheduling
- Supply Chain Planning
- Offshore Upstream Logistics
- City Logistic Operations
- Models for Gas and Electricity Markets
- Energy and Environmental Management
- Dynamical Systems and Mathematical Modelling
- Optimization Methods for Smartgrid Management
- Optimization Methods in Transportation Systems
- E muito, muito mais !!!!

IFORS 2014 - Technical Program (3 em 3 anos)



Modelagem a Partir de um Sistema Real

Modelagem para a Tomada de Decisão

a) Variáveis de decisão
- Contínuas
  - Pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo.
- Discretas ou Inteiras
  - Ex. Dimensionamento da escala ideal de funcionários por turno de trabalho, Unidades a fabricar de cada tipo de caminhão em uma indústria automobilística
- Binárias (0 ou 1)
  - Ex. Decidir entre construir ou não uma usina ou linha de transmissão.

Modelagem para a Tomada de Decisão

b) Parâmetros
  - São valores previamente conhecidos
  - Ex. Demanda de cada produto para um problema de mix de produção
  - Ex. Custo para a produção de determinado tipo de móvel

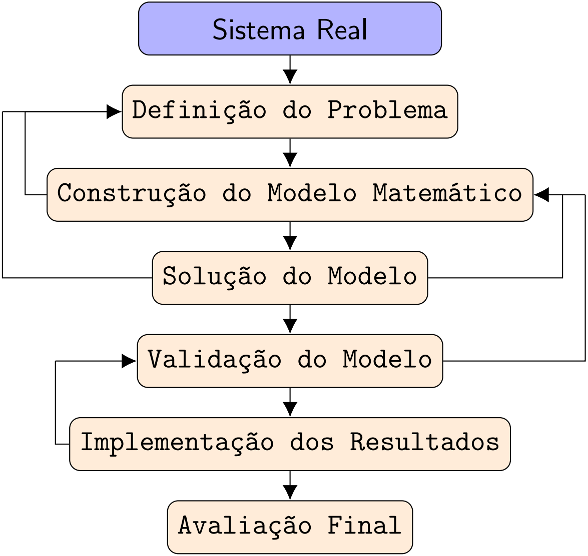
c) Função objetivo
  - Função matemática que determina o valor alvo que se pretende alcançar
  - Ex. Minimização do custo de operação de um sistema hidrotérmico
  - Ex. Maximização do tempo entre a passagem de dois robôs por um ponto em um problema de patrulhamento
  - Ex. Maximização do fluxo de potência em uma linha de transmissão
  - Ex. Minimixação da LOLP (Loss of Load Probability) em um problema de confiabilidade

Modelagem para a Tomada de Decisão

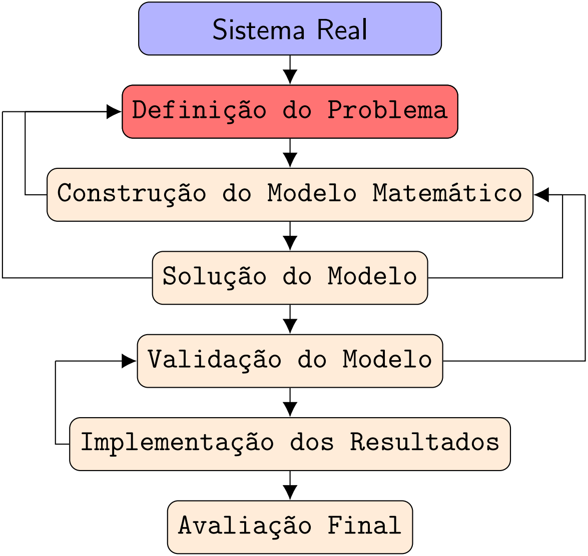
d) Restrições

- Conjunto de equações ou inequação que as variáveis de decisão devem satisfazer.
- Ex. Limitações físicas do sistema
- Ex. Capacidade máxima de produção
- Ex. Número máximo de colaboradores
- Ex. Risco a ser assumido pelo investidor
- Canalização: Limites inferiores e superiores das variáveis de decisão.

Fases do Estudo da Pesquisa Operacional

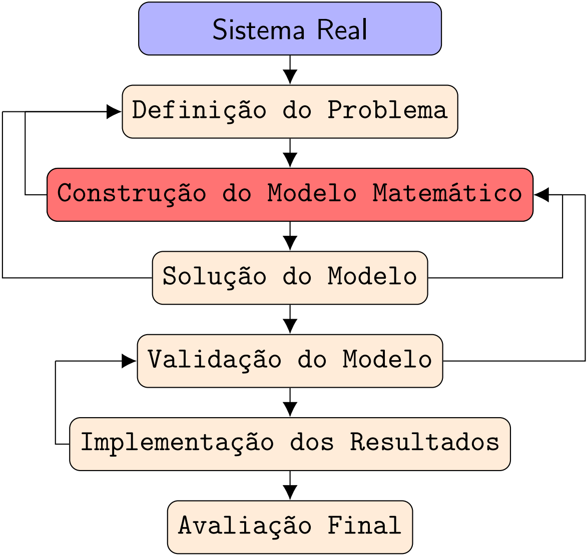


Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Etapa de definição dos objetivos a serem alcançados e os possíveis caminhos para a solução do modelo.

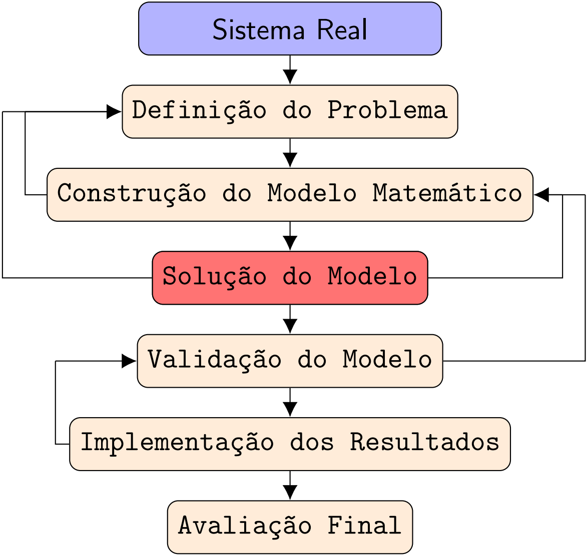
Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Representação do sistema real através da definição de:

- Variáveis
- Função objetivo
- Equações
- Inequações
- Tipo Modelo
- Tipo Variáveis

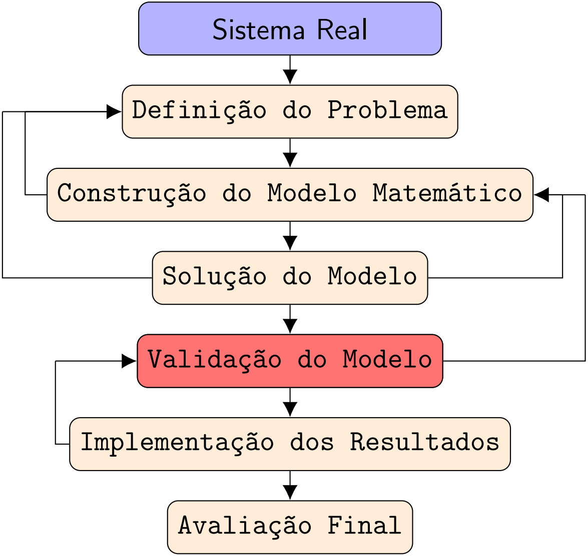
Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Utilização de diversas técnicas de otimização para a resolução do modelo matemático desenvolvido. Exemplos:

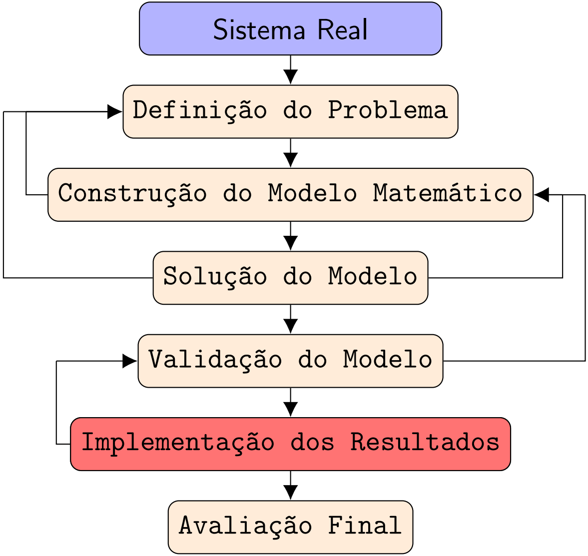
- Programação Linear
- Programação Dinâmica
- Bat Search Algorithm

Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



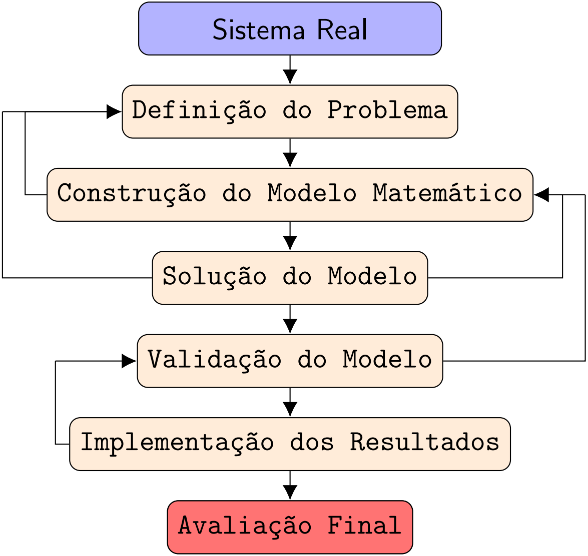
Um modelo pode ser considerado válido se conseguir prever com precisão aceitável, o comportamento do sistma real em estudo.

Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



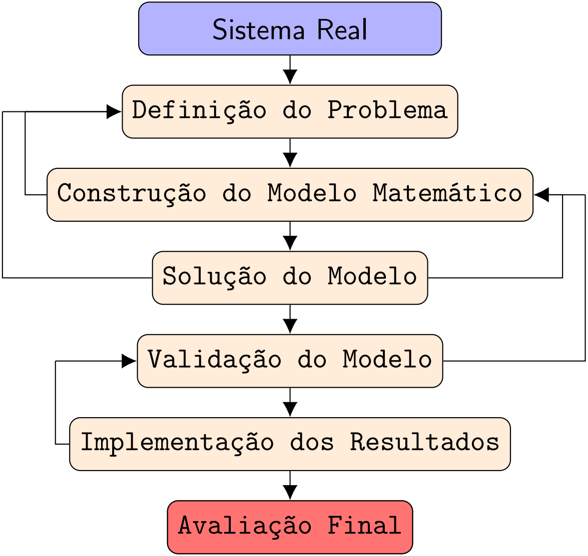
Detectar e corrigir possíveis mudanças nos valores da nova solução, podendo o modelo ter que ser validado novamente.

Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Verificar se o objetivo final foi alcançado.

Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Verificar se o objetivo final foi alcançado.

Tipo Modelo e Tipo Variável

Tabela: Características dos Problemas de Programação Linear, Não Linear, Binária, Inteira e suas Extensões

Tipo do Modelo	Tipo da Variável
Programação Linear (PL)	Contínua
Prog.Linear Inteira (PLI)	Discreta
Prog.Linear Inteira Mista (PLIM ou PIM)	Discreta e Contínua
Prog.Linear Binária (PLB ou PB)	Binária
Prog.Linear Binária Mista (PLBM ou PBM)	Binária e Contínua
Prog.Não Linear (PNL)	Contínua
Prog.Não Linear Inteira (PNLI)	Discreta
Prog.Não Linear Inteira Mista (PNLIM)	Discreta e Contínua
Prog.Não Linear Binária Mista (PNLBM)	Binária e Contínua
Prog.Não Linear Inteira Binária (PNLIB)	Discreta e Binária

Tipo Modelo e Tipo Variável

Tabela: Características dos Problemas de Programação Linear, Não Linear, Binária, Inteira e suas Extensões

Tipo do Modelo	FOB e Restricoes
Programação Linear (PL)	Lineares
Prog.Linear Inteira (PLI)	Lineares
Prog.Linear Inteira Mista (PLIM ou PIM)	Lineares
Prog.Linear Binária (PLB ou PB)	Lineares
Prog.Linear Binária Mista (PLBM ou PBM)	Lineares
Prog.Não Linear (PNL)	Ao menos uma não linear
Prog.Não Linear Inteira (PNLI)	Ao menos uma não linear
Prog.Não Linear Inteira Mista (PNLIM)	Ao menos uma não linear
Prog.Não Linear Binária Mista (PNLBM)	Ao menos uma não linear
Prog.Não Linear Inteira Binária (PNLIB)	Ao menos uma não linear

Modelos/Técnicas de Solução

- Modelos
  - Determinísticos
    - Prog.Linear
    - Prog.em Redes
    - Prog.Binária/Inteira
    - Multiobjetivo
    - Prog.Não Linear
    - Prog.Dinâmica Determinística
  - Estocásticos
    - Teoria das Filas
    - Modelos de Simulação
    - Teoria dos Jogos
    - Prog. Dinâmica Estocástica
  - Outras Técnicas
    - Apoio à Decisão ou Multicritério (AHP)
    - Análise da Envoltória de Dados (DEA)
    - Inteligência Artificial
    - Intelig. Computacional
    - Heurísticas e Metaheurísticas
    - Outras

Modelos/Técnicas de Solução

- Modelos
  - Determinísticos
    - Prog.Linear
    - Prog.em Redes
    - Prog.Binária/Inteira
    - Multiobjetivo
    - Prog.Não Linear
    - Prog.Dinâmica Determinística
  - Estocásticos
    - Teoria das Filas
    - Modelos de Simulação
    - Teoria dos Jogos
    - Prog. Dinâmica Estocástica
  - Outras Técnicas
    - Apoio à Decisão ou Multicritério (AHP)
    - Análise da Envoltória de Dados (DEA)
    - Inteligência Artificial
    - Intelig. Computacional
    - Heurísticas e Metaheurísticas
    - Outras

Variáveis de Decisão

- São as variáveis manipuladas pelo método de otimização durante a busca pela solução ótima
- O processo de otimização procura sucessivos valores das variáveis de decisão até o objetivo (meta) ser alcançado
- Essas variáveis podem ser contínuas, inteiras ou binárias
- As variáveis podem ser positivas e/ou negativas

Critério de Decisão

A busca pela solução ótima tem que ser norteada por um critério.
O critério mais comum é o econômico.

- Maximizar Lucros

- Minimizar Custos

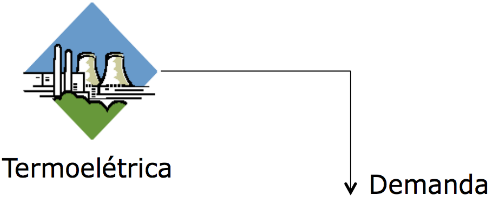
Otimização Multi-Objetivo

Quando existe mais de um critério, sabendo-se que, muitas vezes, os critérios podem ser conflitantes

Otimização Multi-Objetivo

Exemplo

Atender a demanda (MWh) ao menor custo de operação possível e ainda minimizar o volume de CO_2 lançado na atmosfera.



Função Objetivo

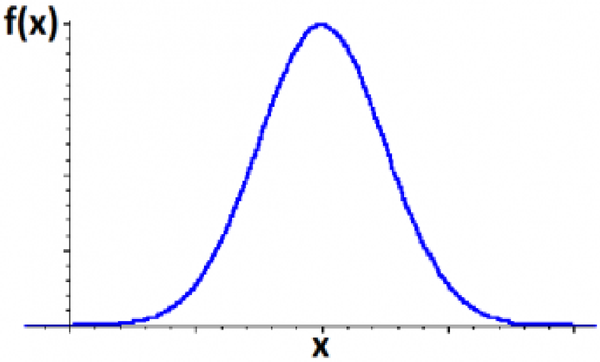
É a expressão matemática do critério de otimização descrita em termos das variáveis de decisão do problema.

Tabela: Classificação da FOB

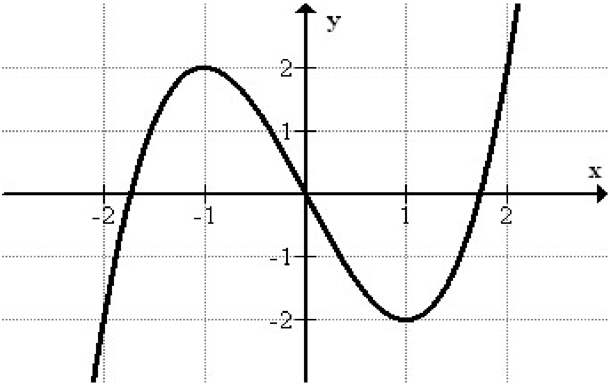
Continuidade	Contínua
	Descontínua
	Discreta
Modalidade	Unimodal
	Multimodal
Convexidade	Côncava ou Convexa
	Côncava e Convexa
	Nem Côncava e Nem Convexa

Além disto, a FOB pode ser linear ou não linear e Mono-objetivo ou Multi-objetivo.

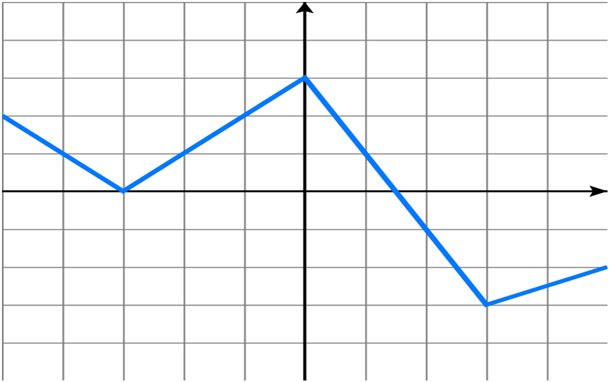
FOB Contínua em todos os pontos



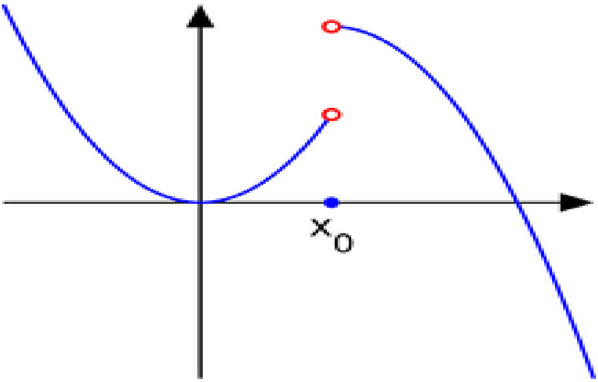
FOB Contínua em todos os pontos



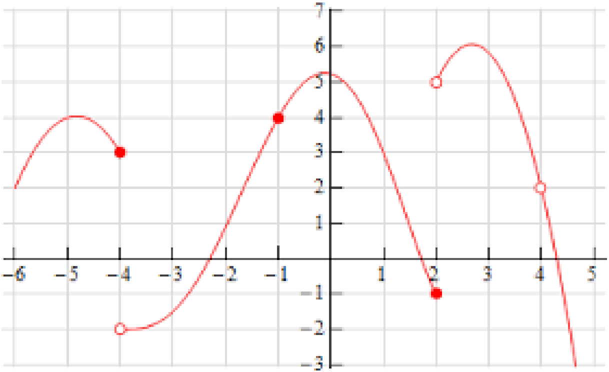
FOB Contínua, mas não diferenciável, em todos os pontos



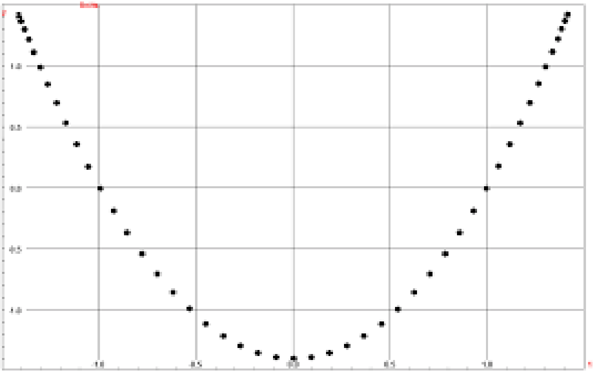
FOB Descontínua



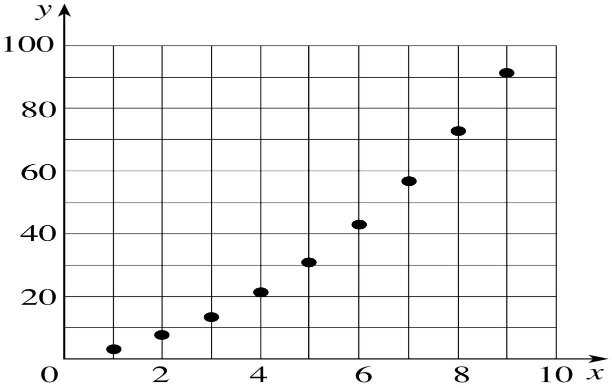
FOB Descontínua



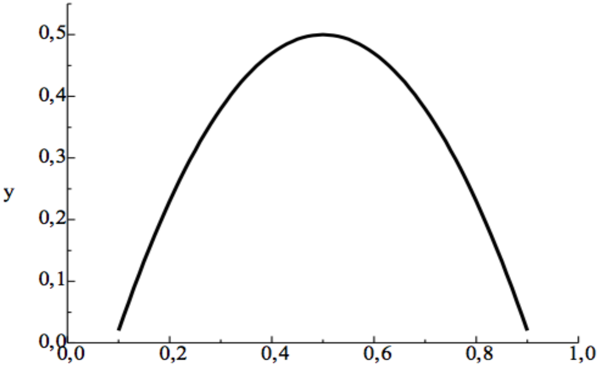
FOB Discreta



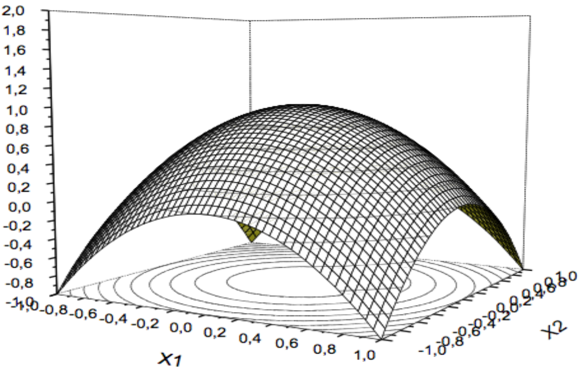
FOB Discreta



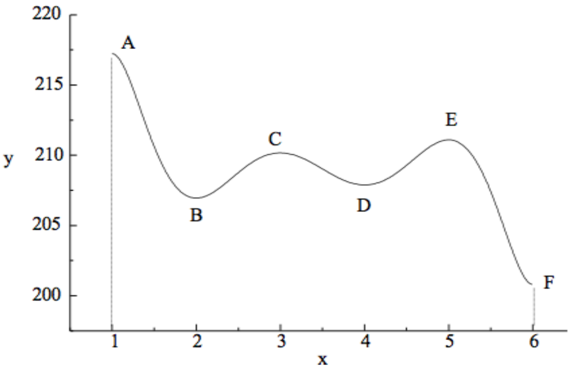
Unimodal em 1 Dimensão



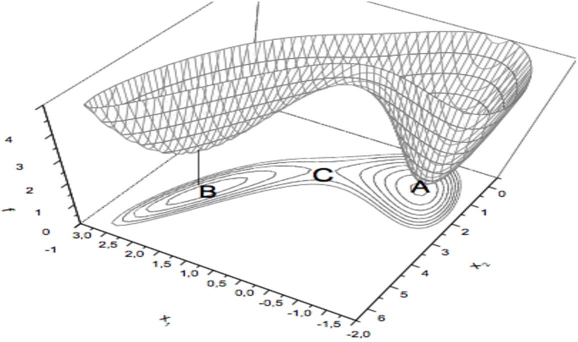
Unimodal em 2 Dimensões



Multimodal em 1 Dimensão

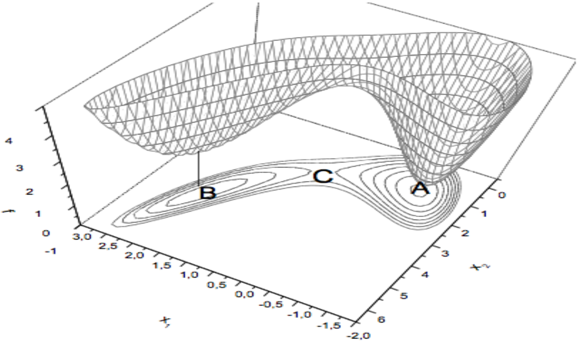


Multimodal em 2 Dimensões



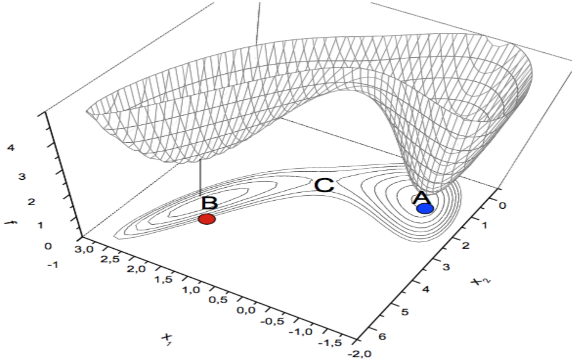
Funções Multimodais

Sendo o objetivo a minimização da função $f(x_1, x_2)$ apresentada. Quantas soluções existem?



Funções Multimodais

Sendo o objetivo a minimização da função $f(x_1, x_2)$ apresentada. Quantas soluções existem?

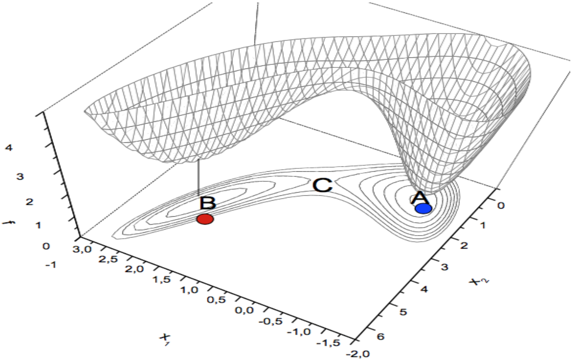


Funções Multimodais

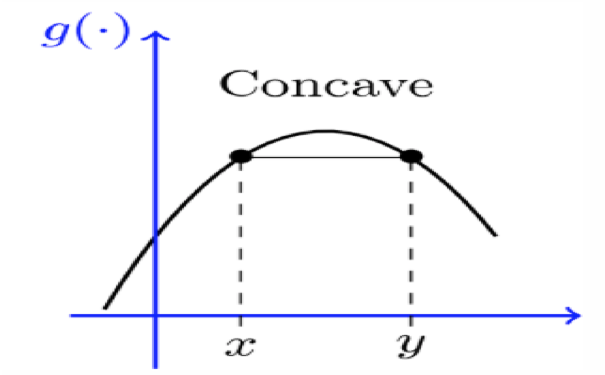
Sendo o objetivo a minimização da função $f(x_1, x_2)$ apresentada. Quantas soluções existem?

Mínimo Local

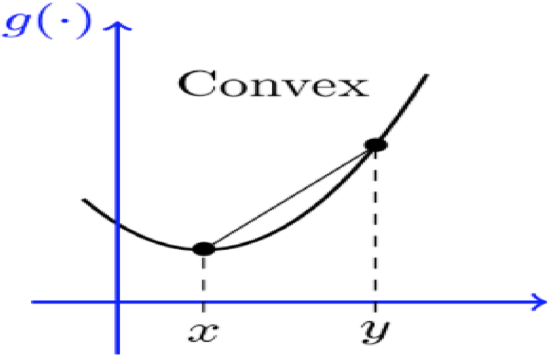
Mínimo Global



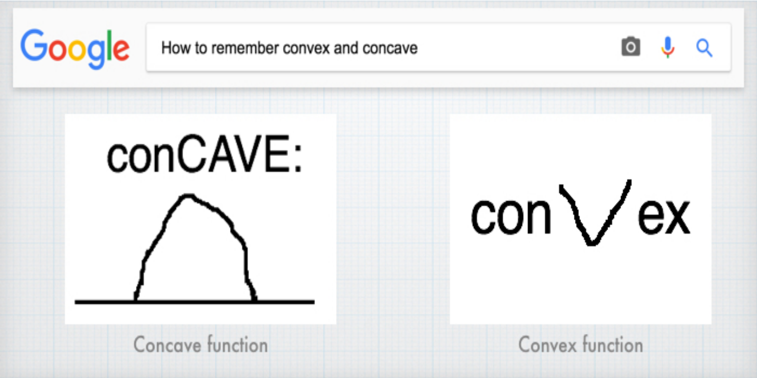
Função Côncava



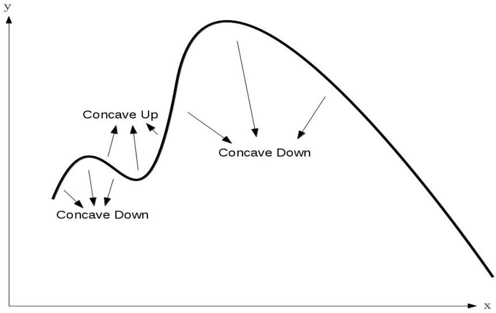
Função Convexa



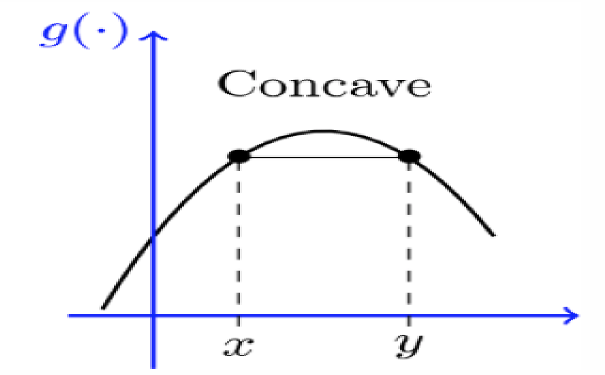
Função Côncava/Convexa



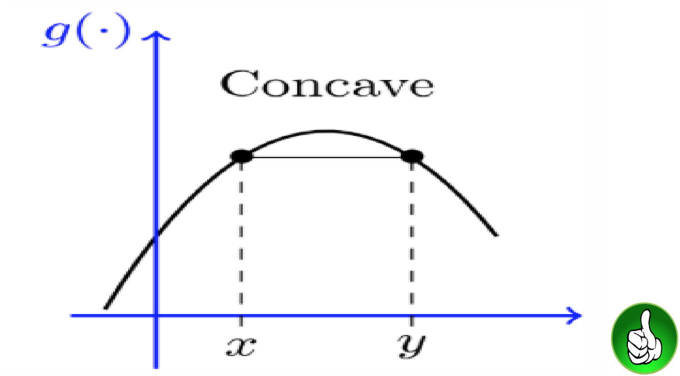
Nem Côncava, Nem Convexa



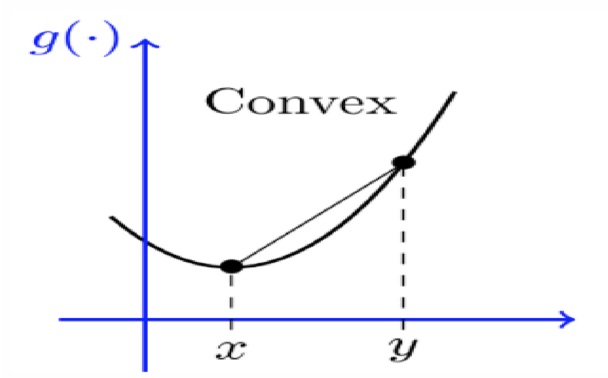
Função Côncava - Garantia de Ótimo Global?



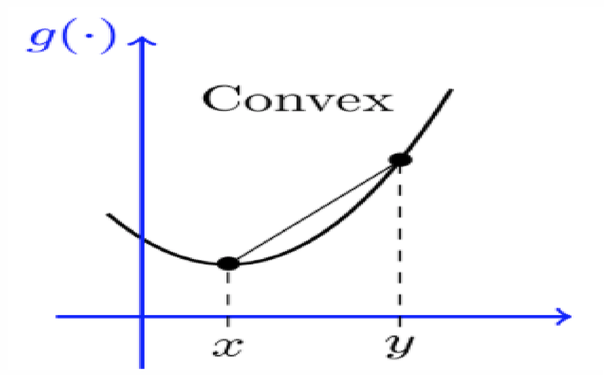
Função Côncava - Garantia de Ótimo Global?



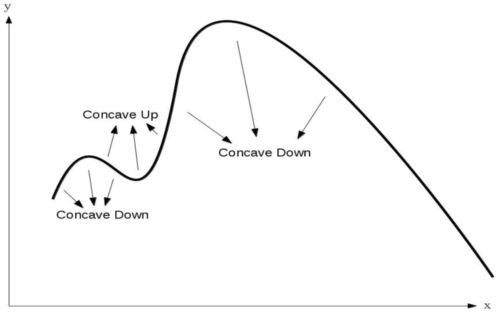
Função Convexa - Garantia de Ótimo Global?



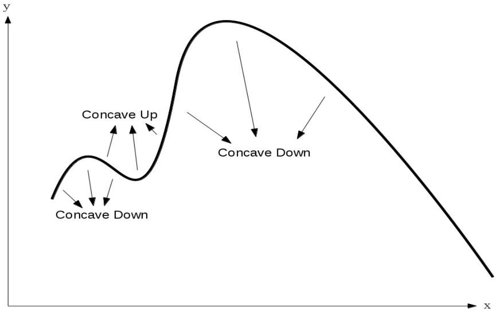
Função Convexa - Garantia de Ótimo Global?



Nem Côncava, Nem Convexa - Garantia de Ótimo Global?



Nem Côncava, Nem Convexa - Garantia de Ótimo Global?



Examinando a Convexidade/Concavidade

A Função é

Côncava	Estritamente Côncava	Convexa	Estritamente Convexa
$f''(x) \leq 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) \geq 0$	$f''(x) > 0$

Funções Multivariadas

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

- A função multivariada é convexa se a sua matriz Hessiana é positiva semidefinda.
- A função multivariada é côncava se a sua matriz Hessiana é negativa semidefinda.
- Critério de Sylvester: Todos os menores principais devem ser positivos (convexa) ou negativos (côncava).

Funções Multivariadas

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

- A função multivariada é convexa se a sua matriz Hessiana é positiva semidefinda.
- A função multivariada é côncava se a sua matriz Hessiana é negativa semidefinda.
- Critério de Sylvester: Todos os menores principais devem ser positivos (convexa) ou negativos (côncava).

Funções Multivariadas

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

- A função multivariada é convexa se a sua matriz Hessiana é positiva semidefinda.
- A função multivariada é côncava se a sua matriz Hessiana é negativa semidefinda.
- Critério de Sylvester: Todos os menores principais devem ser positivos (convexa) ou negativos (côncava).

Funções Multivariadas

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

- A função multivariada é convexa se a sua matriz Hessiana é positiva semidefinda.
- A função multivariada é côncava se a sua matriz Hessiana é negativa semidefinda.
- Critério de Sylvester: Todos os menores principais devem ser positivos (convexa) ou negativos (côncava).

Examine a convexidade da seguinte função

$f(x) = -3x^2 - 4x + 4$

$f'(x) = -6x - 4$

$f''(x) = -6 < 0$ para todo x

A função é estritamente côncava.

Examine a convexidade da seguinte função

$f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2xe^{x^2}$

$f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} > 0$ para todo x

A função é estritamente convexa.

Examine a convexidade da seguinte função

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 3x_1 - 4x_2 + 20$$

$$H = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 12 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 60 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 240 > 0$$

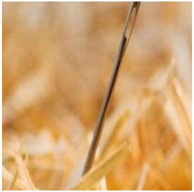
Matriz definida positiva. Função estritamente convexa.

Região de Solução nem Côncava nem Convexa

O problema tem várias soluções, porém a garantia da otimalidade global é comprometida.

Dependendo da região de solução e do tamanho do problema

Otimalidade Global



Agulha no Palheiro

Região de Solução nem Côncava nem Convexa

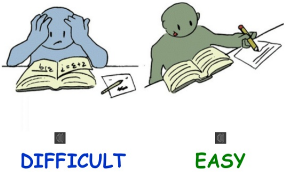
Encontre a solução ótima para o seguinte problema de otimização:

$$\text{Max } F(x,y) = x^2 + y^2 + 25(\sin^2 x + \sin^2 y)$$

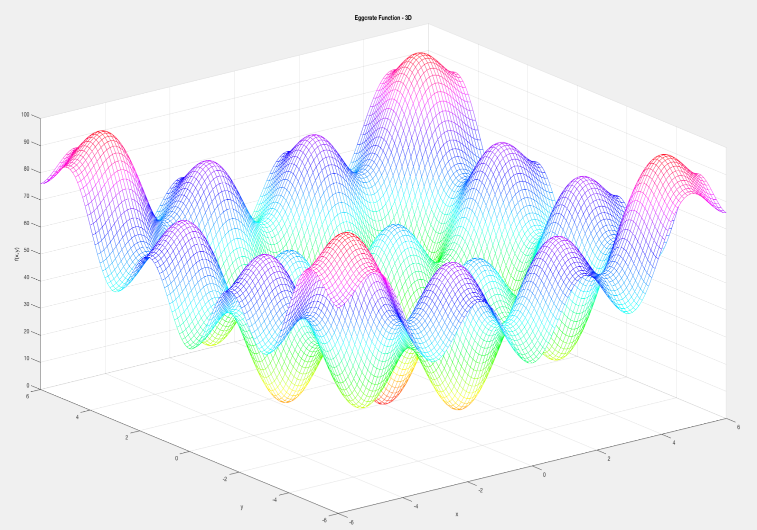
s.a.

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-6 \leq y \leq 6$$



Egg Crate Function

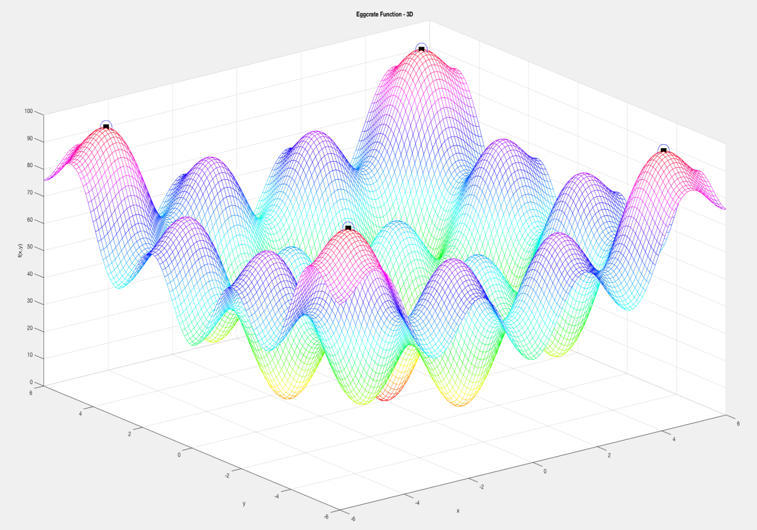


Egg Crate Function

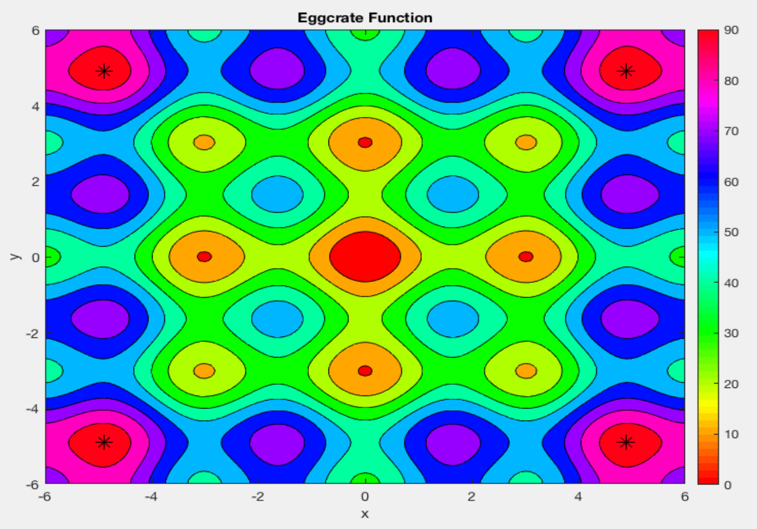
Código em Matlab

```
clear all; close all; clc;

x = [-6:0.1:6]; y = [-6:0.1:6];
[X,Y] = meshgrid(x,y);

egg_crate = @(x,y) x.^2 + y.^2 ...
    + 25*( sin(x).^2 + sin(y).^2 );
Z = egg_crate(X,Y);

grafico=mesh(x,y,Z); colormap(hsv);

title('Eggcrate Function - 3D');
xlabel('x','FontSize',14);
ylabel('y','FontSize',14);
zlabel('f(x,y)','FontSize',14);
grafico.Parent.FontSize = 14;
```

Egg Crate Function



Egg Crate Function - Máximos Locais e Globais



Egg Crate Function

Código em Matlab

```
clear all; close all; clc;

x = [-6:0.1:6]; y = [-6:0.1:6];
[X,Y] = meshgrid(x,y);

egg_crate = @(x,y) x.^2 + y.^2 ...
    + 25*( sin(x).^2 + sin(y).^2 );
Z = egg_crate(X,Y);

grafico=mesh(x,y,Z); colormap(hsv);

title('Eggcrate Function - 3D');
xlabel('x','FontSize',14);
ylabel('y','FontSize',14);
zlabel('f(x,y)','FontSize',14);
grafico.Parent.FontSize = 14;
```

Região de Solução nem Côncava nem Convexa

Ackley Function (caso bi-dimensional):

Max

$$F(x,y) = -20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos 2\pi x + \cos 2\pi y)} + e + 20$$

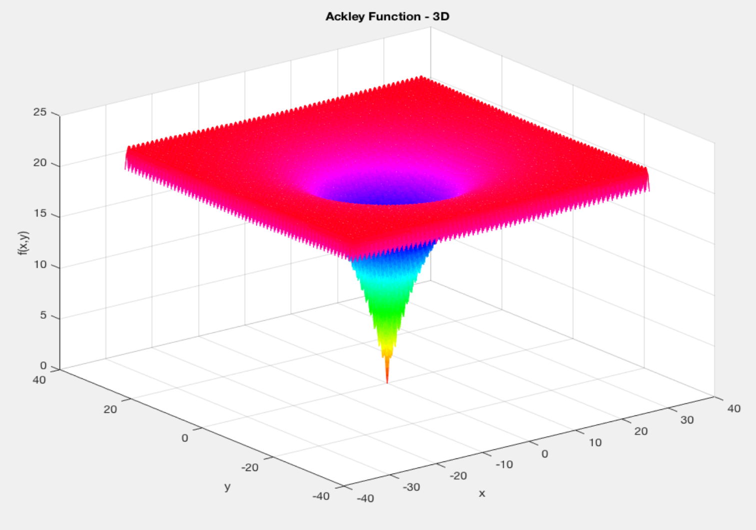
s.a.

$$-32 \le x \le 32$$

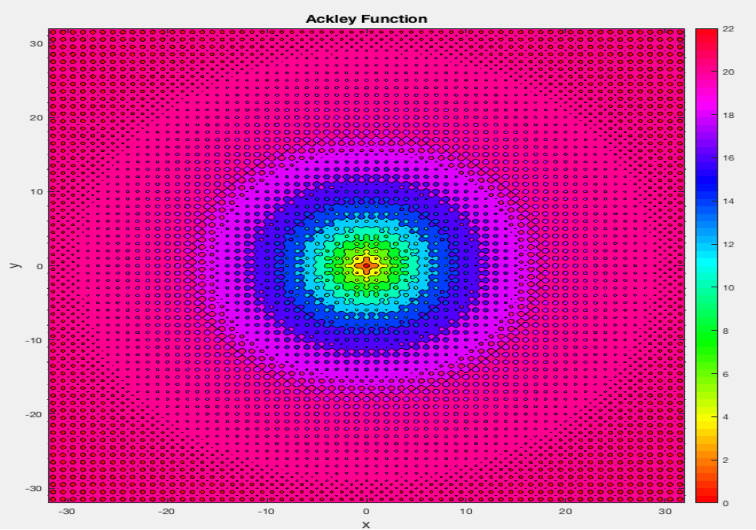
$$-32 \le y \le 32$$

É uma função não convexa muito utilizada para testar a performance de algoritmos de otimização.

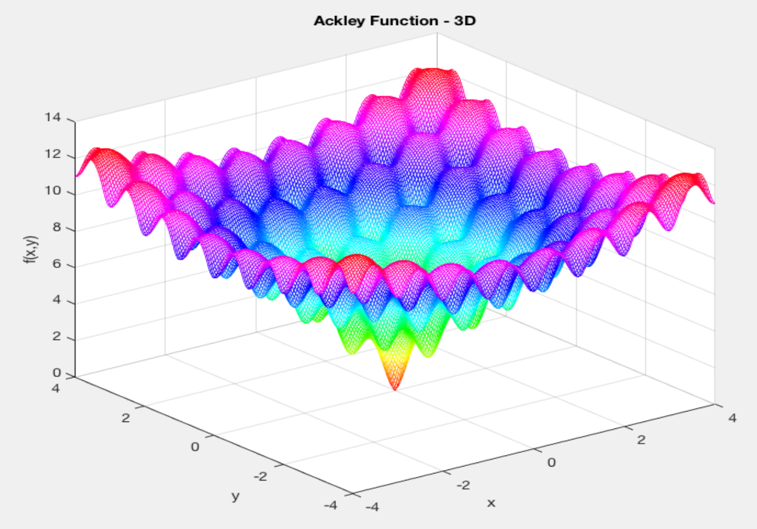
Ackley Function



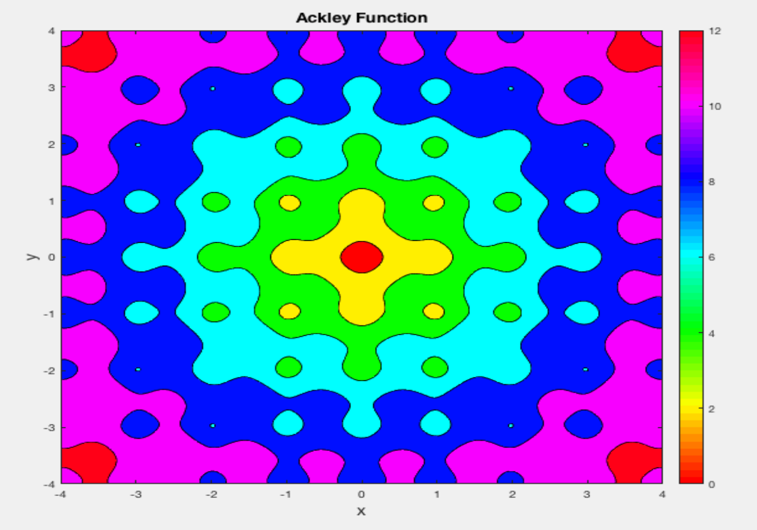
Ackley Function



Ackley Function



Ackley Function



Restrições

São os limites impostos pelas leis/regras que regem o modelo. Há 3 tipos de restrições:

- Restrições de igualdade: $h(x) = 0$

  São as equações do próprio modelo matemático.
- Restrições de desigualdade: $g(x) \leq 0$

  São os limites impostos às funções do modelo matemático.
- Restrições de canalização: $\text{xmin} \leq x \leq \text{xmax}$

  São os limites impostos às variáveis de decisão.

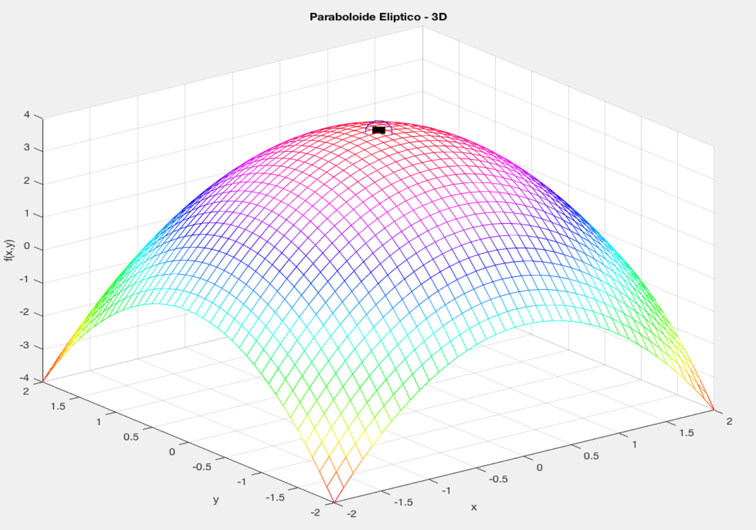
As restrições podem ser lineares e/ou não lineares.

Restrições - Exemplo

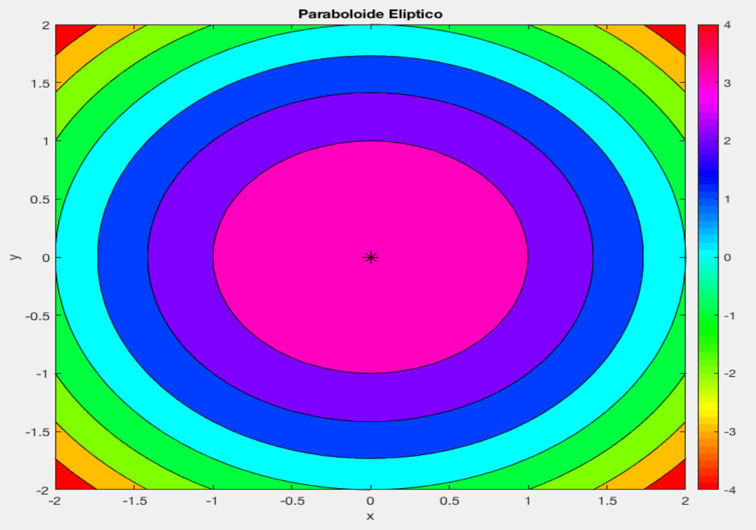
Parabolóide Elíptico - Superfície Quadrática

- Maximizar Z
- Sujeito a:
- $Z = -2x^2 - 2y^2 + 4$

Restrições - Exemplo



Restrições - Exemplo

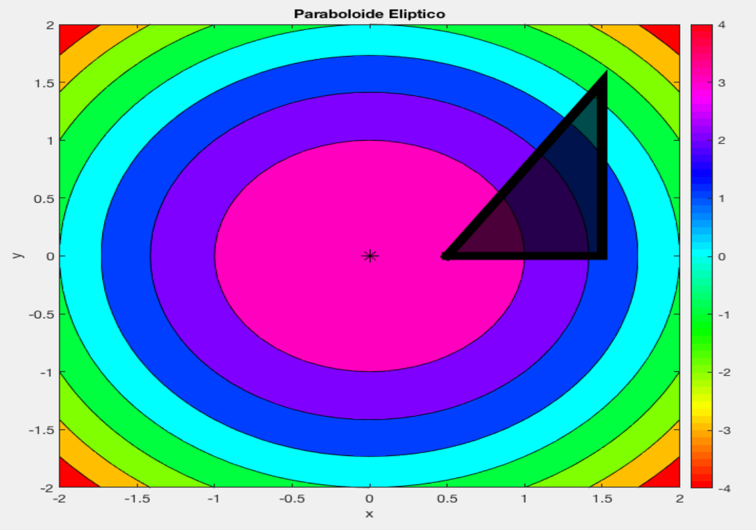


Restrições - Exemplo

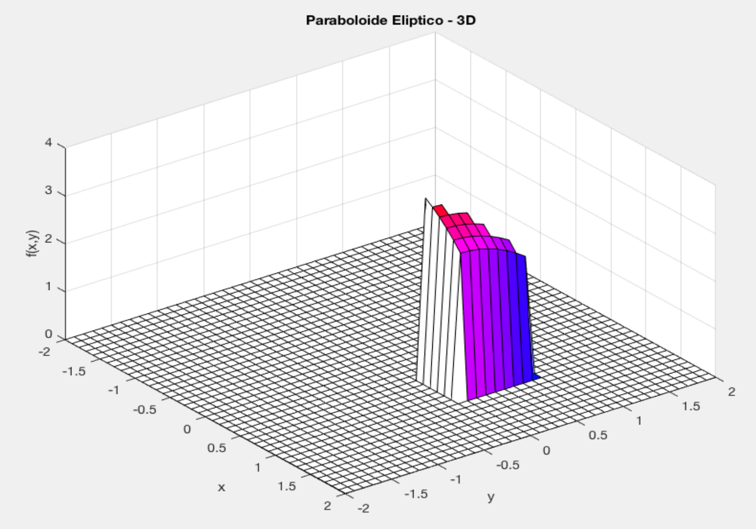
Parabolóide Elíptico - Superfície Quadrática

- Maximizar Z
- Sujeito a:
- $Z = -2x^2 - 2y^2 + 4$
- $x \leq 1$
- $y - 1.5x + 0.75 \leq 0$
- $y \geq 0$

Restrições - Exemplo - Região Viável



Restrições - Exemplo - Região Viável



Formulação Geral de um Problema de Otimização

Minimizar ou Minimizar $f(\mathbf{x})$

Sujeito a:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{x})(\leq, \geq)0$$
$$\mathbf{x_{min}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x_{max}}$$

Formulação Geral de um Problema de Otimização

Minimizar ou Minimizar $f(\mathbf{x})$ ★

Sujeito a:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \qquad (\lambda_1)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})(\leq, \geq))0 \qquad (\lambda_2)$$

$$\mathbf{x_{min}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x_{max}} \qquad (\lambda_3, \lambda_4)$$

★	Variáveis Primais
★	Variáveis Duais

Formulação pode ser LINEAR ou NÃO LINEAR

Exemplo de Problema de Otimização

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & Z = 3(x_1 + x_2 + \ldots + x_6) + 3{,}4(y_1 + y_2 + \ldots + y_6) + 0{,}25(e_1 + e_2 + \ldots + e_6) & \\
\text{sujeito a} & x_1 + y_1 + 500 = e_1 + 4000 & \\
 & x_2 + y_2 + e_1 = e_2 + 2000 & \\
 & x_3 + y_3 + e_2 = e_3 + 5000 & \\
 & x_4 + y_4 + e_3 = e_4 + 1000 & \\
 & x_5 + y_5 + e_4 = e_5 + 4000 & \\
 & x_6 + y_6 + e_5 = e_6 + 2000 & \\
 & x_t \leq 3000 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
 & y_t \leq 600 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
 & x_t, y_t, e_t \geq 0 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{array}
$$

Exemplo de Problema de Otimização

$$\text{Min} \quad Z = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_6) + 3{,}4(y_1 + y_2 + \dots + y_6) + 0{,}25(e_1 + e_2 + \dots + e_6)$$

$$\begin{array}{lll}
\text{sujeito a} & x_1 + y_1 + 500 = e_1 + 4000 & \\
 & x_2 + y_2 + e_1 = e_2 + 2000 & \\
 & x_3 + y_3 + e_2 = e_3 + 5000 & \\
 & x_4 + y_4 + e_3 = e_4 + 1000 & \\
 & x_5 + y_5 + e_4 = e_5 + 4000 & \\
 & x_6 + y_6 + e_5 = e_6 + 2000 & \\
 & x_t \leq 3000 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
 & y_t \leq 600 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
 & x_t, y_t, e_t \geq 0 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6
\end{array}$$

CURIOSIDADES

Resolução do problema de gerenciamento da carteira de um fundo de pensão holandes utilizando PL: 12,5 milhoes de restrições e 25 milhões de variáveis

Fim