

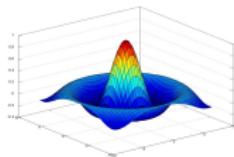
# O Método Simplex

Professores André L.M. Marcato, Ivo C.da Silva Jr, João A.Passos Filho

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

[andre.marcato@ufjf.edu.br](mailto:andre.marcato@ufjf.edu.br), [ivo.junior@ufjf.edu.br](mailto:ivo.junior@ufjf.edu.br), [joao.passos@ufjf.edu.br](mailto:joao.passos@ufjf.edu.br)

Primeiro Semestre de 2018



# Agenda da Apresentação

## 1 Método Simplex

- Descrição Geral
- Forma Padrão
- Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## 2 Fluxograma do Tableau

- Problema de Maximização
- Problema de Minimização
- Exemplo Minimização

## 3 Enumeração Exaustiva

- Exemplo

## 4 Casos Especiais

- Restrições de Igualdade / Maior ou Igual

# Histórico

## George Dantzig

George Bernard Dantzig foi um matemático, que introduziu o algoritmo simplex e é considerado "pai da programação linear".



**Nascimento:** 8 de novembro de 1914, Portland

**Falecimento:** 13 de maio de 2005, Stanford

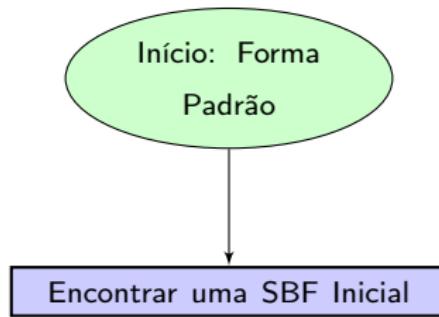
**Prêmio:** Prêmio Teoria John von Neumann

**Educação:** Universidade da Califórnia em Berkeley, Universidade de Maryland, Universidade de Michigan

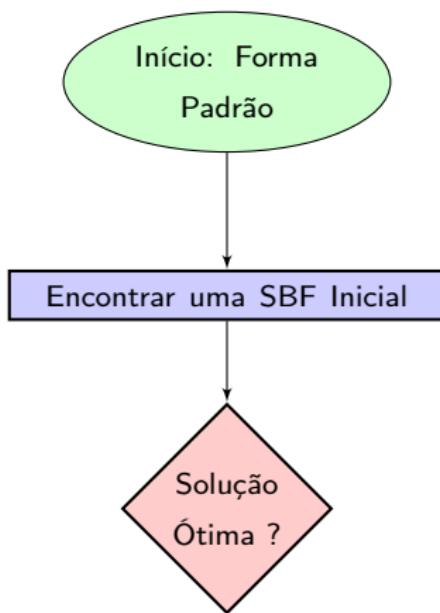
## Descrição Geral Simplex

## Início: Forma Padrão

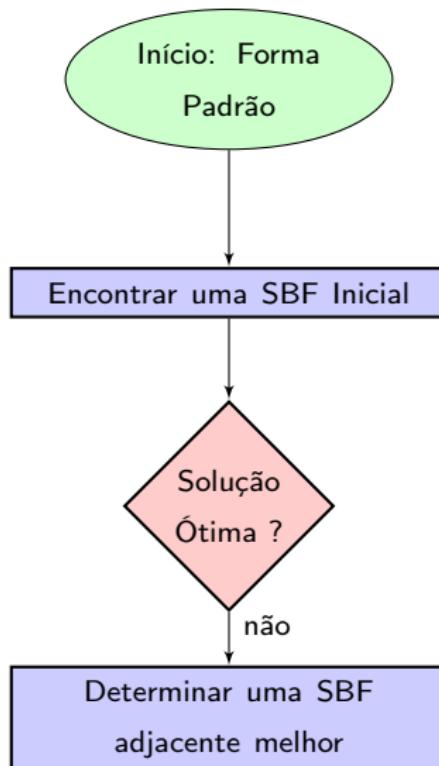
# Descrição Geral Simplex (SBF = Solução Básica Factível)



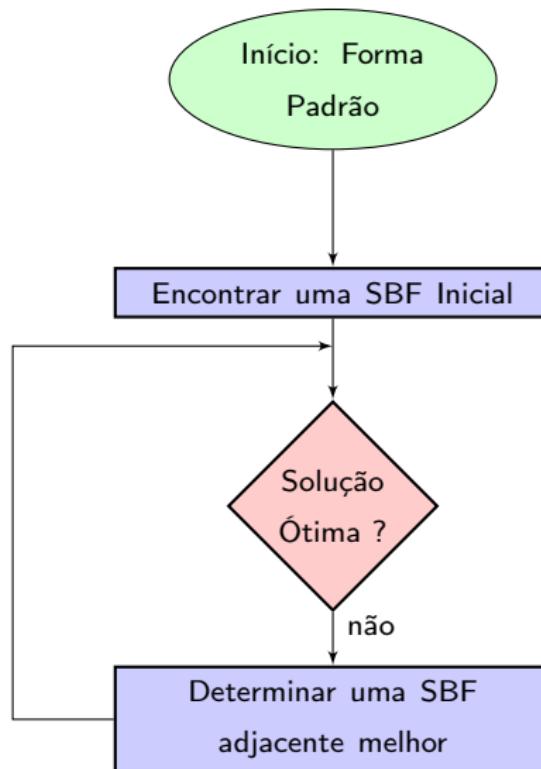
## Descrição Geral Simplex (SBF = Solução Básica Factível)



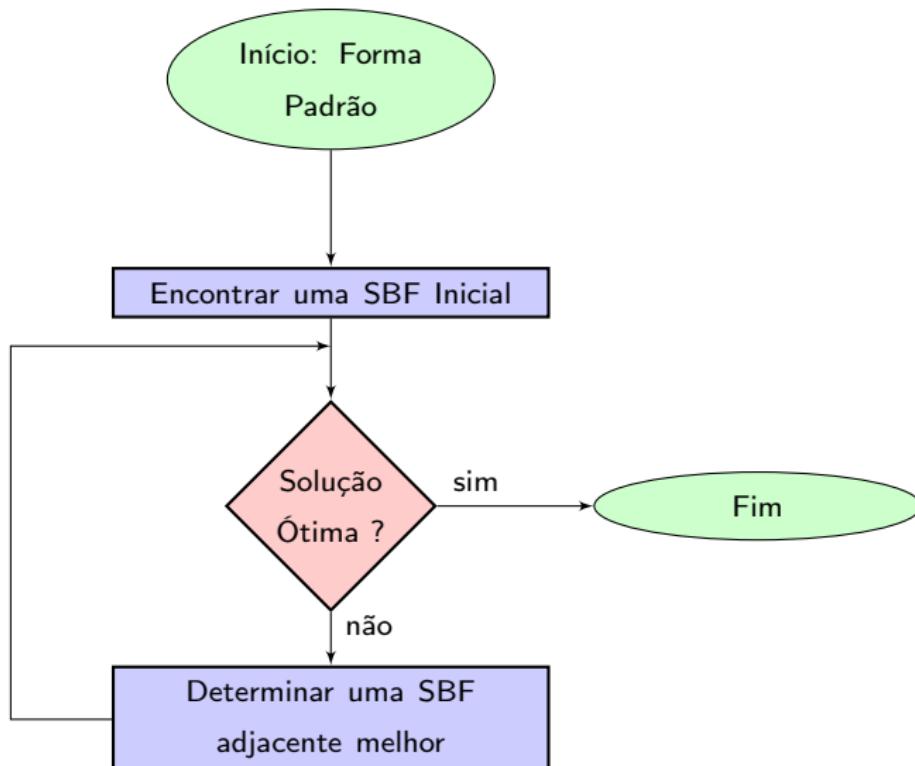
# Descrição Geral Simplex (SBF = Solução Básica Factível)



# Descrição Geral Simplex (SBF = Solução Básica Factível)



# Descrição Geral Simplex (SBF = Solução Básica Factível)



# Forma Padrão

## Forma Geral/Original

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax \{=, \leq, \geq\} b$$

$$x \geq 0$$

# Forma Padrão

## Forma Geral/Original

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax \{=, \leq, \geq\} b$$

$$x \geq 0$$



## Forma Padrão

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

# Forma Padrão

## Forma Geral/Original

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax \{=, \leq, \geq\} b$$

$$x \geq 0$$



## Forma Padrão

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

- Os termos independentes das restrições devem ser não negativos ( $b \geq 0$ ).

# Forma Padrão

## Forma Geral/Original

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax \{=, \leq, \geq\} b$$
$$x \geq 0$$



## Forma Padrão

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

- Os termos independentes das restrições devem ser não negativos ( $b \geq 0$ ).
- Todas as restrições na forma de igualdade (exceção: não-negatividade).

# Forma Padrão

## Forma Geral/Original

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax \{=, \leq, \geq\} b$$

$$x \geq 0$$



## Forma Padrão

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

- Os termos independentes das restrições devem ser não negativos ( $b \geq 0$ ).
- Todas as restrições na forma de igualdade (exceção: não-negatividade).
- Não-negatividade: As variáveis de decisão  $x$  devem ser não negativas.

# Forma Padrão

## Forma Geral/Original

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax \{=, \leq, \geq\} b$$

$$x \geq 0$$



## Forma Padrão

$$\max Z = c^T x$$

s.a.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

- Os termos independentes das restrições devem ser não negativos ( $b \geq 0$ ).
- Todas as restrições na forma de igualdade (exceção: não-negatividade).
- Não-negatividade: As variáveis de decisão  $x$  devem ser não negativas.



Sempre é possível escrever um PPL na forma padrão!

# Formulação Padrão

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$n$  variáveis de decisão e  $m$  restrições de igualdade.

# Formulação Padrão

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$n$  variáveis de decisão e  $m$  restrições de igualdade.

# Formulação Padrão

$$\max z = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$n$  variáveis de decisão e  $m$  restrições de igualdade.

# Formulação Padrão

$$\max z = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]_{1 \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

*n* variáveis de decisão e *m* restrições de igualdade.

# Formulação Padrão

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x} &= \mathbf{B}_{\text{eq}} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$n$  variáveis de decisão e  $m$  restrições de igualdade.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

# Relação entre Maximização e Minimização



# Relação entre Maximização e Minimização



- Qualquer que seja o formato do PPL, sempre é possível transformá-lo no formato padrão apresentado.
- Como é a relação entre minimização e maximização?

# Relação entre Maximização e Minimização



$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow \min(-z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow \max(-z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

# Relação Entre Inequações e Equações

Restrições de Menor ou Igual - Variável de Folga ( $+S_i$ )

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \geq \infty \end{cases}$$

# Relação Entre Inequações e Equações

## Restrições de Menor ou Igual - Variável de Folga ( $+S_i$ )

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \leq \infty \end{cases}$$

## Restrições de Maior ou Igual - Variável de Excesso ( $-S_i$ )

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \leq \infty \end{cases}$$

# Tratamento de Limites das Variáveis

## Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x'_j \Rightarrow x_j = x'_j + LB \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

# Tratamento de Limites das Variáveis

## Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x'_j \Rightarrow x_j = x'_j + LB \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

## Limite Superior ou *Upper Bound*

$$x_j \leq UB \Leftrightarrow \begin{cases} UB - x_j = x'_j \Rightarrow x_j = UB - x'_j \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

# Tratamento de Limites das Variáveis

## Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x'_j \Rightarrow x_j = x'_j + LB \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

## Limite Superior ou *Upper Bound*

$$x_j \leq UB \Leftrightarrow \begin{cases} UB - x_j = x'_j \Rightarrow x_j = UB - x'_j \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

$$-\infty \leq x_j \leq \infty \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = x'_j - x''_j \\ x'_j \geq 0 \text{ e } x''_j \geq 0 \end{cases}$$

# Exemplo 1

**Forma Original**

$$\max Z = 3x_1 + 2.5x_2 + 1.2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# Exemplo 1

**Forma Original**

$$\max Z = 3x_1 + 2.5x_2 + 1.2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Forma Padrão**

$$\max Z = 3x_1 + 2.5x_2 + 1.2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_6 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

## Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

## Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

# Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

## Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + S_2 = 0$$

## Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + S_2 = 0$$

$$2x_3 - x_4 - 2x_5 + S_3 = 7$$

## Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + S_2 = 0$$

$$2x_3 - x_4 - 2x_5 + S_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

# Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + S_2 = 0$$

$$2x_3 - x_4 - 2x_5 + S_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 = -x'_3$$

## Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + S_2 = 0$$

$$2x_3 - x_4 - 2x_5 + S_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 = -x'_3$$

$$x_4 = x'_4 - x''_4$$

# Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + S_2 = 0$$

$$2x_3 - x_4 - 2x_5 + S_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 = -x'_3$$

$$x_4 = x'_4 - x''_4$$

$$x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, S_1, S_2, S_3, x_5 \geq 0$$

## Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 - x'_3 - 3(x'_4 - x''_4) + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 - x'_3 - 2(x'_4 - x''_4) - x_5 + S_2 = 0$$

$$-2x'_3 - (x'_4 - x''_4) - 2x_5 + S_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 - (x'_4 - x''_4) + x_5 = 8$$

$$x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, S_1, S_2, S_3, x_5 \geq 0$$

# Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

## Programa em Matlab

```

1  clear all; close all; clc;
2  c = [-2 1 1 -3 1];
3  A = [-1 -2 1 -1 -3; ...
4      4 0 1 -2 -1; ...
5      0 0 2 -1 -2];
6  B = [-5; 0 ; 7];
7  Aeq = [3 1 0 -1 1];
8  Beq = 8;
9  LB = [0      0 -inf -inf  0];
10 UB = [inf inf      0 inf  inf];
11 [x, fval, exitflag] = ...
    linprog(c,A,B,Aeq,Beq,LB,UB);

```

# Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

## Programa em Matlab

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

x =

```
0.0000
0.0000
-0.0000
-2.6667
5.3333
```

fval =

```
-13.3333
```

exitflag =

1

## Exemplo 2

Coloque o PPL abaixo na forma padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5$$

$$4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7$$

$$3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_3 \leq 0$$

$x_4$  qualquer

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

## Programa em Matlab

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

x =

$$0.0000 \text{ } x1$$

$$0.0000 \text{ } x2$$

$$-0.0000 \text{ } x3$$

$$-2.6667 \text{ } x4$$

$$5.3333 \text{ } x5$$

fval =

$$-13.3333 \text{ } +13.3333$$

exitflag =

$$1 \text{ } \textcolor{red}{OK!!!}$$

# Exemplo 2

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 - x'_3 - 3(x'_4 - x''_4) + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 - x'_3 - 2(x'_4 - x''_4) - x_5 + S_2 = 0$$

$$-2x'_3 - (x'_4 - x''_4) - 2x_5 + S_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 - (x'_4 - x''_4) + x_5 = 8$$

$$x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, S_1, S_2, S_3, x_5 \geq 0$$

## Programa em Matlab

```

1  clear all; close all; clc;
2  c = [-2 1 -1 -3 +3 1 0 0 0];
3  A = [];
4  B = [];
5  Aeq = [
6    1 2 1 1 -1 3 -1 0 0; ...
7    4 0 -1 2 2 -1 0 1 0; ...
8    0 0 -2 -1 1 -2 0 0 1; ...
9    3 1 0 -1 1 1 0 0 0; ...
10   ];
11 Beq = [ 5; 0; 7; 8];
12 LB = [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
13 UB = [ inf inf inf inf inf ...
14   inf inf];
14 [x,fval, exitflag] = ...
linprog(c,A,B,Aeq,Beq,LB,UB);

```

# Exemplo 2

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 - x'_3 - 3(x'_4 - x''_4) + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 - x'_3 - 2(x'_4 - x''_4) - x_5 + S_2 = 0$$

$$-2x'_3 - (x'_4 - x''_4) - 2x_5 + S_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 - (x'_4 - x''_4) + x_5 = 8$$

$$x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, S_1, S_2, S_3, x_5 \geq 0$$

## Programa em Matlab

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

x =

```
0.0000
0.0000
0.0000
0
2.6667
5.3333
8.3333
0.0000
15.0000
```

fval =

-13.3333

exitflag =

1

# Exemplo 2

Resposta: PPL Escrito na Forma Padrão.

$$\max Z = -2x_1 + x_2 - x'_3 - 3(x'_4 - x''_4) + x_5$$

Sujeito a:

$$x_1 + 2x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 + 3x_5 - S_1 = 5$$

$$4x_1 - x'_3 - 2(x'_4 - x''_4) - x_5 + S_2 = 0$$

$$-2x'_3 - (x'_4 - x''_4) - 2x_5 + S_3 = 7$$

$$3x_1 + x_2 - (x'_4 - x''_4) + x_5 = 8$$

$$x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, S_1, S_2, S_3, x_5 \geq 0$$

## Programa em Matlab

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

x =

```
0.0000 x1
0.0000 x2
0.0000 x3'
0  x4'
2.6667 x4"
5.3333 x5
8.3333 s1
0.0000 s2
15.0000 s3
```

fval =

-13.3333 +13.3333

exitflag =

1 OK!!!

# Solução Básica Inicial

## Observações

- 1 A passagem para forma padrão se faz pelo simples acréscimo de uma variável de folga ou excesso para cada inequação existente

# Solução Básica Inicial

## Observações

- 1 A passagem para forma padrão se faz pelo simples acréscimo de uma variável de folga ou excesso para cada inequação existente
- 2 A forma padrão resultante consiste em um sistema que tenha uma **solução básica inicial** mais fácil de ser encontrada:

# Solução Básica Inicial

## Observações

- 1 A passagem para forma padrão se faz pelo simples acréscimo de uma variável de folga ou excesso para cada inequação existente
- 2 A forma padrão resultante consiste em um sistema que tenha uma solução básica inicial mais fácil de ser encontrada:

**Solução Básica Inicial (ESTRATÉGIA):**

Anular as variáveis originais

Obter os valores das variáveis de folga e excesso

# Solução Básica Inicial

## Observações

- 1 A passagem para forma padrão se faz pelo simples acréscimo de uma variável de folga ou excesso para cada inequação existente
- 2 A forma padrão resultante consiste em um sistema que tenha uma solução básica inicial mais fácil de ser encontrada:

**Solução Básica Inicial (ESTRATÉGIA):**

Anular as variáveis originais

Obter os valores das variáveis de folga e excesso

- 3 As **variáveis nulas** recebem o nome de **NÃO BÁSICAS (VNB)**
- 4 As **variáveis não nulas** recebem o nome de **BÁSICAS (VB)**

# Exemplo: Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# Exemplo: Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Forma Padrão**



$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_6 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

# Exemplo: Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Forma Padrão**



$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_6 = 15$$

$$x_6 = -x_6^*$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

# Exemplo: Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Forma Padrão**



$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6^* = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6^* \geq 0$$

# Exemplo: Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Padrão



$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6^* = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6^* \geq 0$$

Solução Básica Factível Inicial ???

- As **variáveis nulas** recebem o nome de **NÃO BÁSICAS (VNB)**
- As **variáveis não nulas** recebem o nome de **BÁSICAS (VB)**

# Exemplo: Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Padrão



$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6^* = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6^* \geq 0$$

Solução Básica Factível Inicial ???

$$VNB = \{x_1, x_2, x_3\} \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$

$$VB = \{x_4, x_5, x_6^*\} \Leftrightarrow x_4 = 40, x_5 = 60, x_6^* = 15$$

$$Z = 0$$

# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

Reescrever a expressão da FOB

$$\max Z = 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex



## Problema em Análise

## Problema na Forma Padrão

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

Achar SBF Inicial

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$



$$S_1 = 4 \quad x_1 = 0$$

$$S_2 = 12 \quad x_2 = 0$$

$$S_3 = 18 \quad Z = 0$$

# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

Achar SBF Inicial

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$



$$VNB = \{x_1, x_2\}$$

$$VB = \{S_1, S_2, S_3\}$$

## Atenção

A FOB deve ser sempre formada por VNB.

$$S_1 = 4 \quad x_1 = 0$$

$$S_2 = 12 \quad x_2 = 0$$

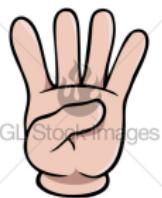
$$S_3 = 18 \quad Z = 0$$

# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

### Montar o TABLEAU Simplex

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$



G. Stock Images

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

$$S_1 = 4 \quad x_1 = 0$$

$$S_2 = 12 \quad x_2 = 0$$

$$S_3 = 18 \quad Z = 0$$

Tableau Simplex							
Base	Z	X1	X2	Variáveis básicas + Não Básicas+ FOB			Termos Constantes das equações
				S1	S2	S3	
S1							
S2							
S3							
Z							

Variáveis básicas + FOB

Variáveis básicas + FOB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$							
Restr.(2)	$S_2$							
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup>A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0						
Restr.(2)	$S_2$							
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1					
Restr.(2)	$S_2$							
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	b
Restr.(1)	S <sub>1</sub>	0	1	0				
Restr.(2)	S <sub>2</sub>							
Restr.(3)	S <sub>3</sub>							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1			
Restr.(2)	$S_2$							
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup>A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0		
Restr.(2)	$S_2$							
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	b
Restr.(1)	S <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0	
Restr.(2)	S <sub>2</sub>							
Restr.(3)	S <sub>3</sub>							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	b
Restr.(1)	S <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	S <sub>2</sub>							
Restr.(3)	S <sub>3</sub>							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0						
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	b
Restr.(1)	S <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	S <sub>2</sub>	0	0					
Restr.(3)	S <sub>3</sub>							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	b
Restr.(1)	S <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	S <sub>2</sub>	0	0	2				
Restr.(3)	S <sub>3</sub>							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0			
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup>A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1		
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup>A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup>A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
Restr.(3)	$S_3$							
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
Restr.(3)	$S_3$	0						
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
Restr.(3)	$S_3$	0	3					
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
Restr.(3)	$S_3$	0	3	2				
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
Restr.(3)	$S_3$	0	3	2	0			
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup>A FOB deve ser sempre formada por VNB



# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: **Tableau Simplex** Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
Restr.(3)	$S_3$	0	3	2	0	0		
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup> A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
Restr.(3)	$S_3$	0	3	2	0	0	1	
FOB <sup>1</sup>	Z							

<sup>1</sup>A FOB deve ser sempre formada por VNB



## Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

## Problema em Análise

$$\max Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabela: Tableau Simplex Preenchimento pelas linhas do Tableau

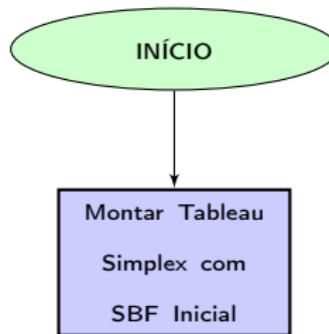
	Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
Restr.(1)	$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
Restr.(2)	$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
Restr.(3)	$S_3$	0	3	2	0	0	1	18
FOB <sup>1</sup>	Z	1	-3	-5	0	0	0	0

<sup>1</sup>A FOB deve ser sempre formada por VNB

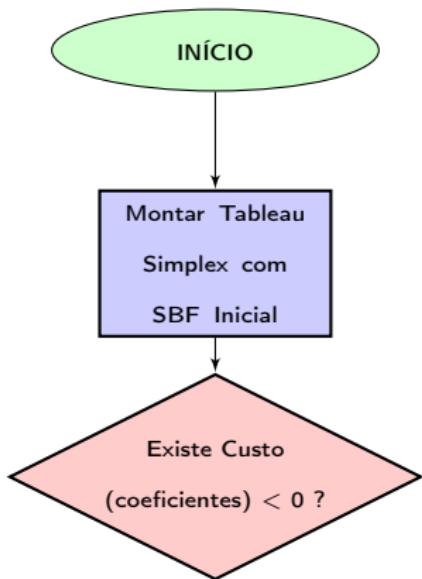
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



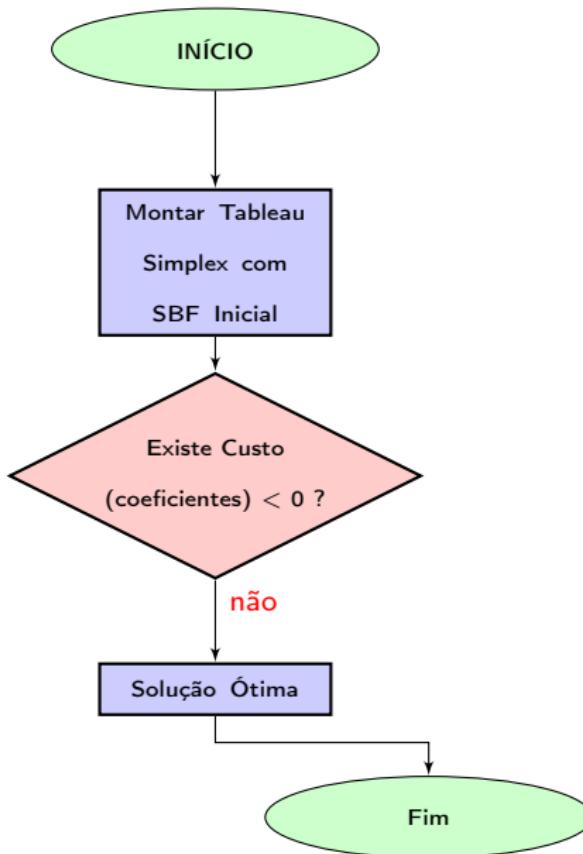
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



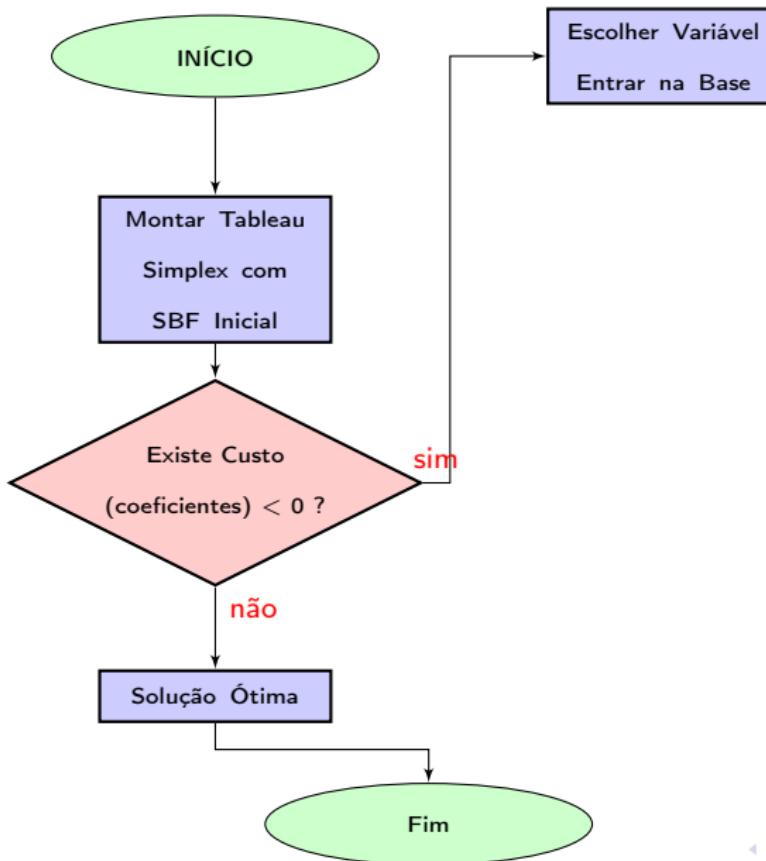
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



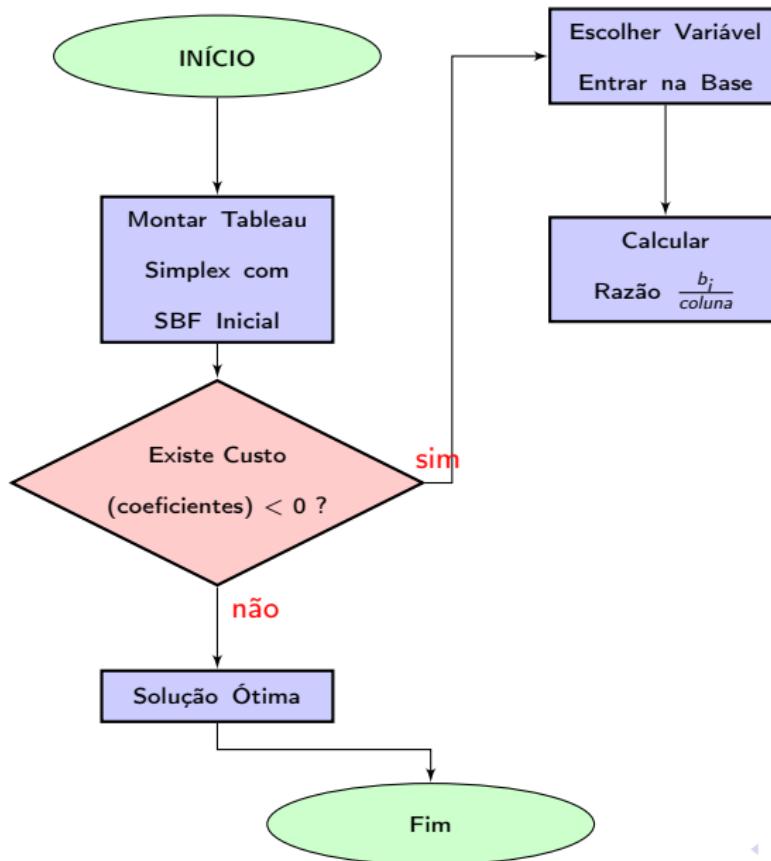
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



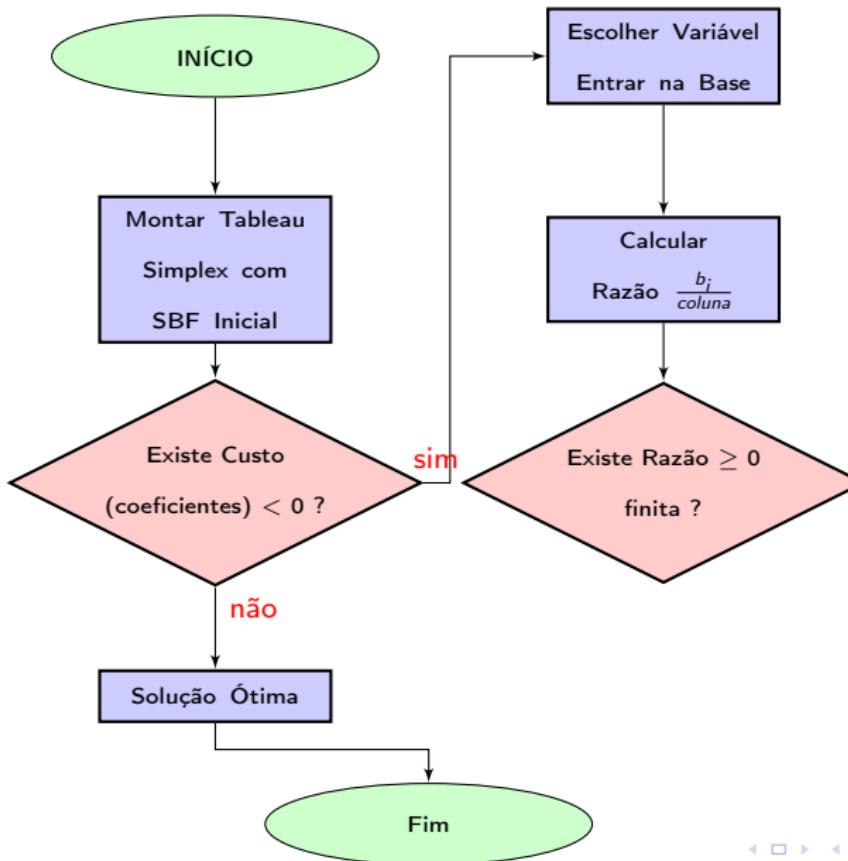
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



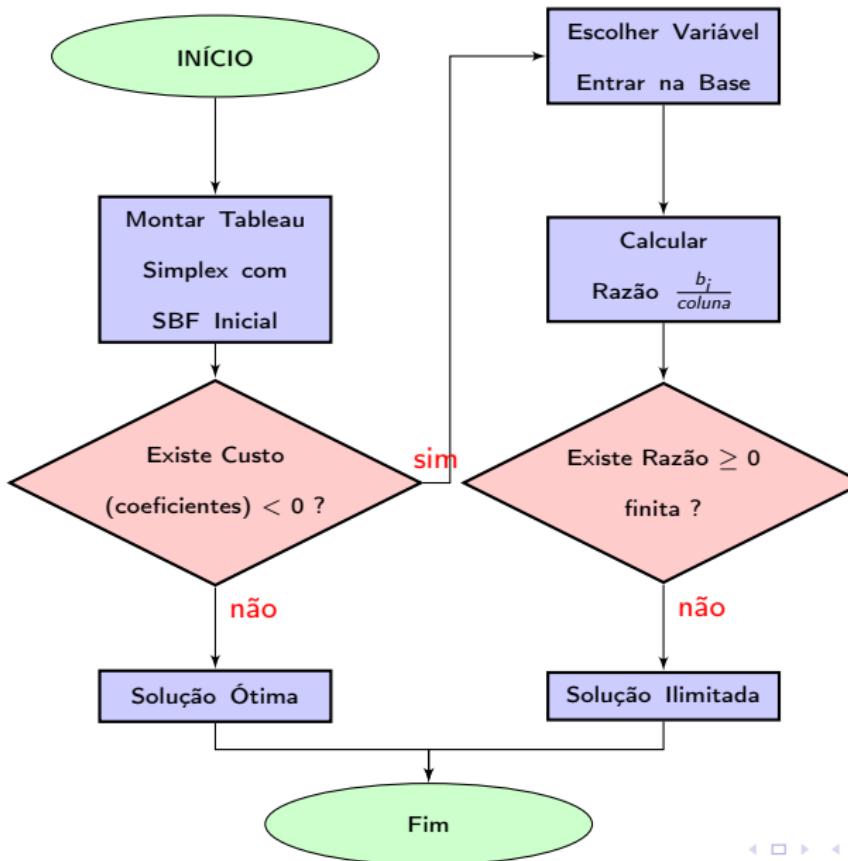
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



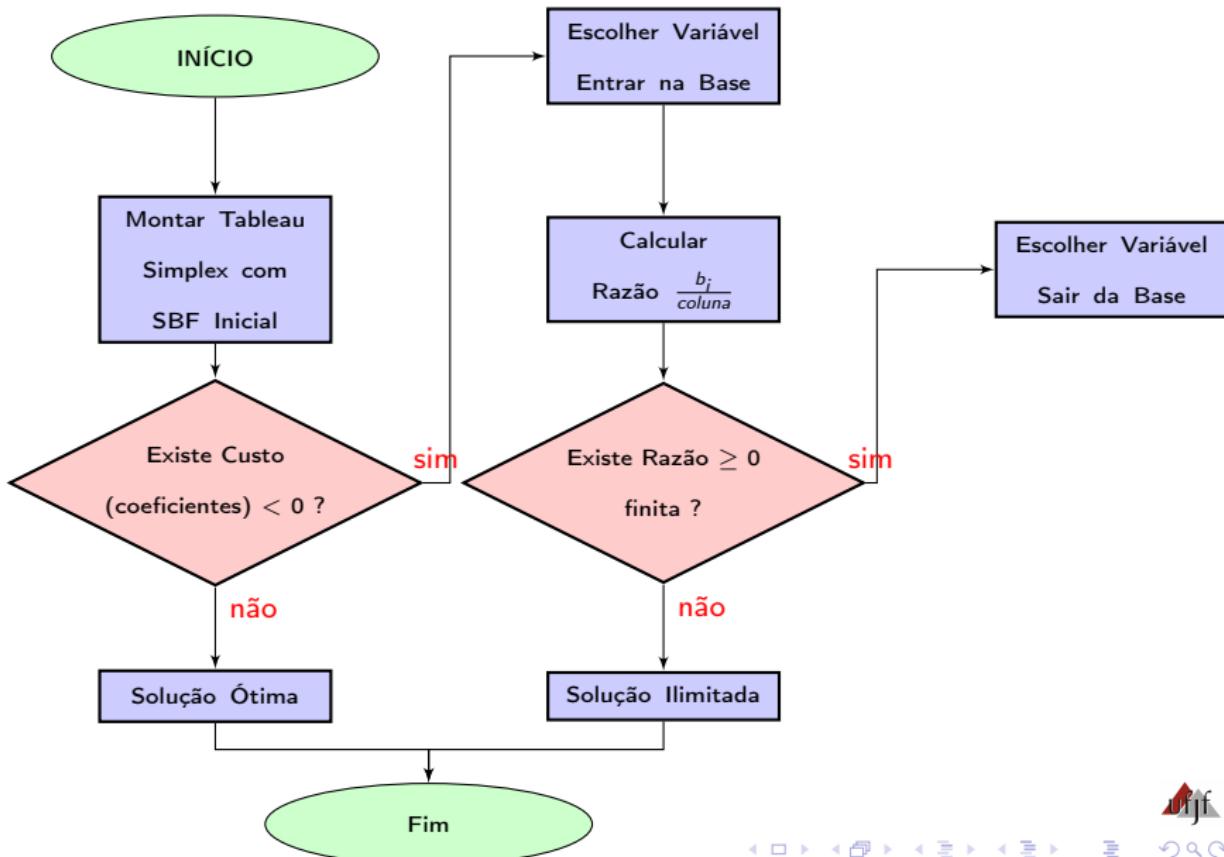
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



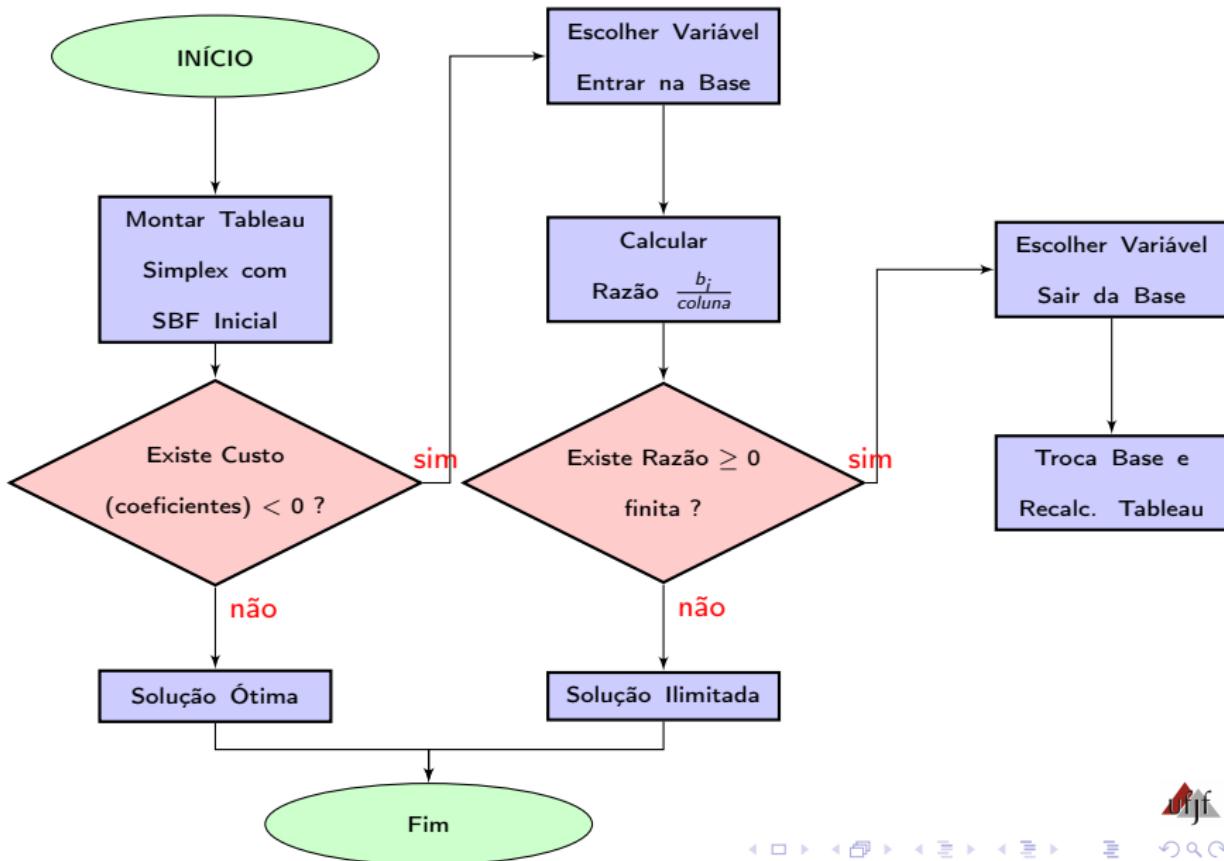
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



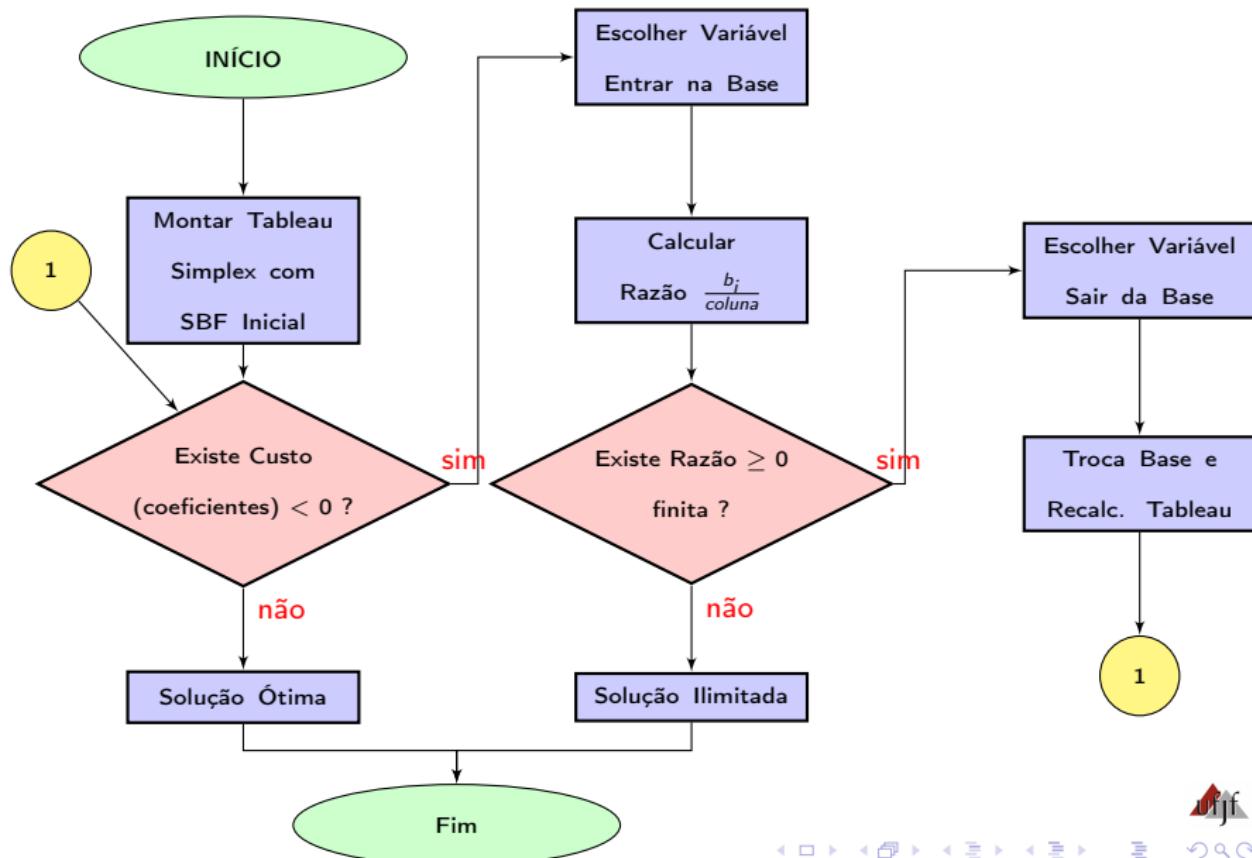
# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



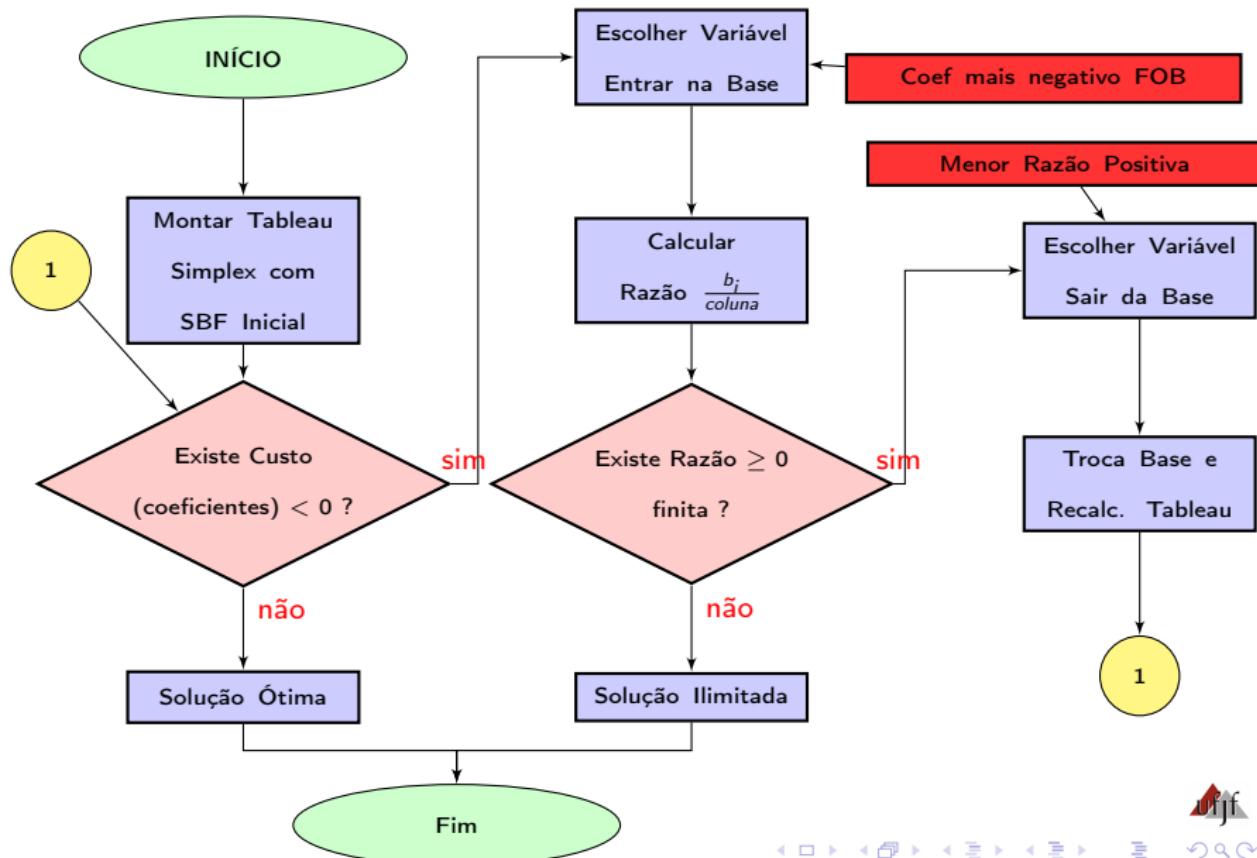
## Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO

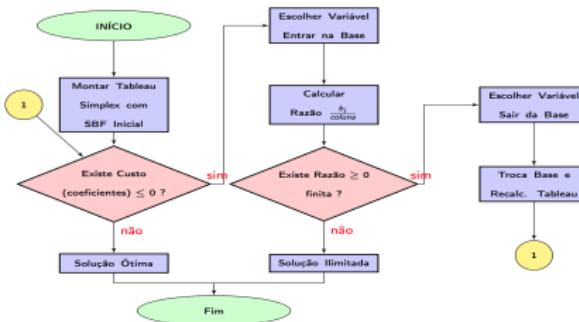




# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
$S_3$	0	3	2	0	0	1	18
Z	1	-3	-5	0	0	0	0

Parte da Solução Básica Fácil (SBF) inicial.

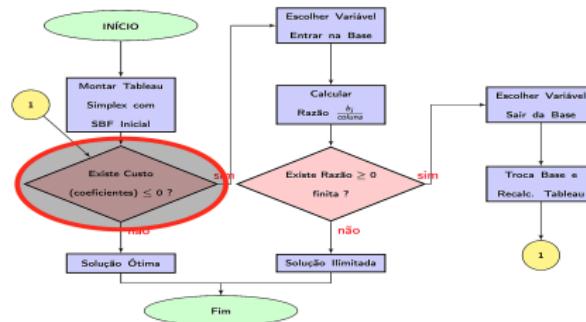




# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
$S_3$	0	3	2	0	0	1	18
Z	1	-3	-5	0	0	0	0

Verificar se a solução é ótima!  
(Linha de Z).





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

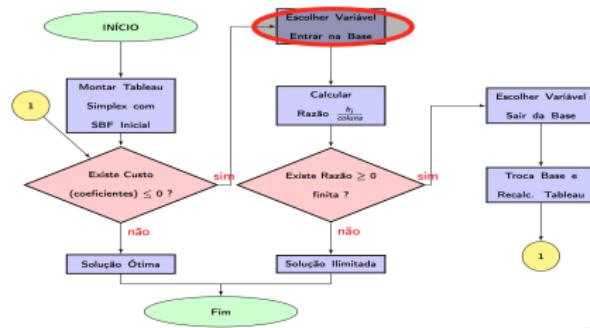
Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
$S_3$	0	3	2	0	0	1	18
Z	1	-3	-5	0	0	0	0



Entra

Base

Escolhe variável com coeficiente mais negativo na FOB para entrar na base.





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

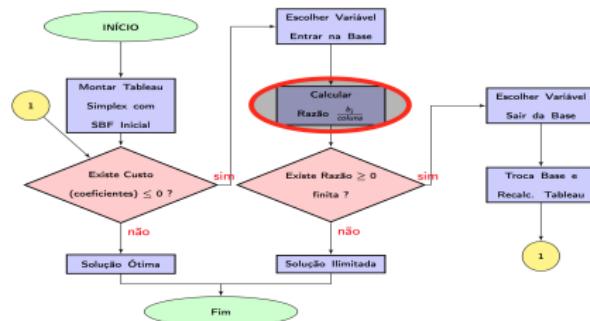
Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b	
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4	$4 \div 0 = \infty$
$S_2$	0	0	2	0	1	0	12	$12 \div 2 = +6$
$S_3$	0	3	2	0	0	1	18	$18 \div 2 = +9$
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	



Entra

Base

Para cada linha do Tableau calcular razão  $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ .





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

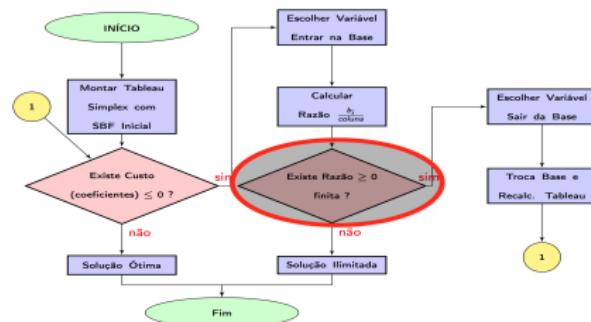
Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b	
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4	$4 \div 0 = \infty$
$S_2$	0	0	2	0	1	0	12	$12 \div 2 = +6$ ←
$S_3$	0	3	2	0	0	1	18	$18 \div 2 = +9$ ←
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	

↑

Entra

Base

Verifica se existe razão positiva e finita.





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$S_2$	0	0	2	0	1	0	12
$S_3$	0	3	2	0	0	1	18
Z	1	-3	-5	0	0	0	0



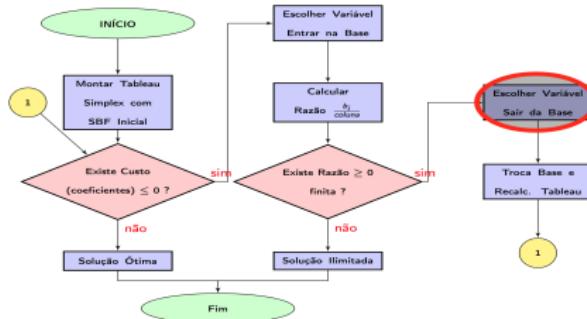
Entra  
Base

$$4 \div 0 = \infty$$

$$12 \div 2 = +6 \quad \leftarrow \text{Sai Base}$$

$$18 \div 2 = +9$$

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$X_2$	0	0	2	0	1	0	12
$S_3$	0	3	2	0	0	1	18
Z	1	-3	-5	0	0	0	0



Entra  
Base

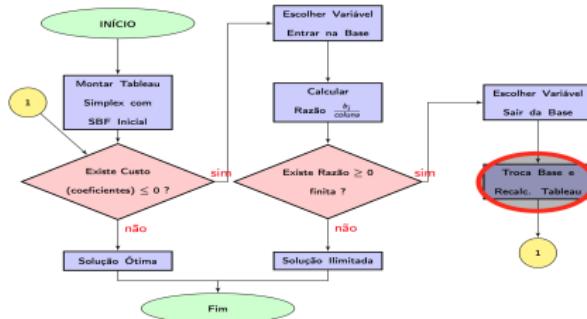
$$4 \div 0 = \infty$$

$$12 \div 2 = +6 \quad \leftarrow \text{Sai Base}$$

$$18 \div 2 = +9$$

## Troca de Base

Cada linha da tabela deve possuir apenas uma VB com coeficiente unitário.





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

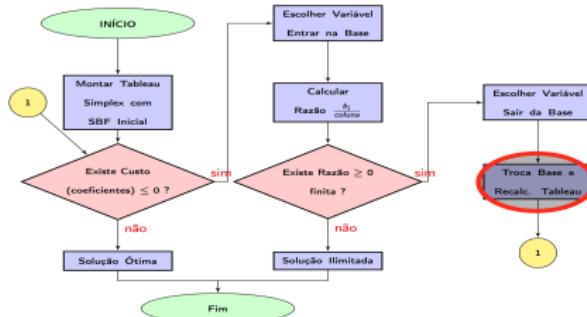
Base	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	b
S <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0	4
X <sub>2</sub>	0	0	2	0	1	0	12
S <sub>3</sub>	0	3	2	0	0	1	18
Z	1	-3	-5	0	0	0	0



Entra  
Base

Zerar a coluna de  $X_2$  com exceção da linha referente ao pivô que deve assumir o valor unitário. Para tanto:

$$\begin{aligned}
 \text{Linha}'_1 &= \text{Linha}_1 \\
 \text{Linha}'_3 &= \text{Linha}_3 - \text{Linha}_2 \\
 \text{Linha}'_4 &= \text{Linha}_4 + \frac{2}{5} \text{Linha}_2 \\
 \text{Linha}'_2 &= \frac{1}{2} \text{Linha}_2
 \end{aligned}$$



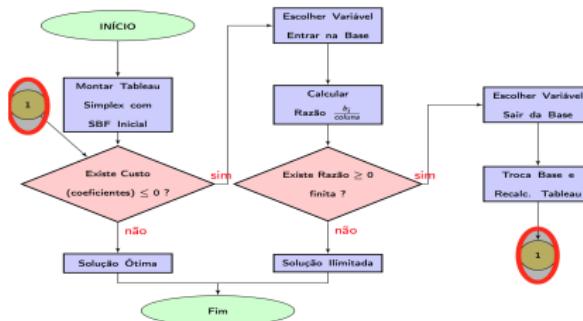


# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6
$S_3$	0	3	0	0	-1	1	6
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30

Novo Tableau !!!!

Linhas com apenas uma VB com coeficiente unitário.

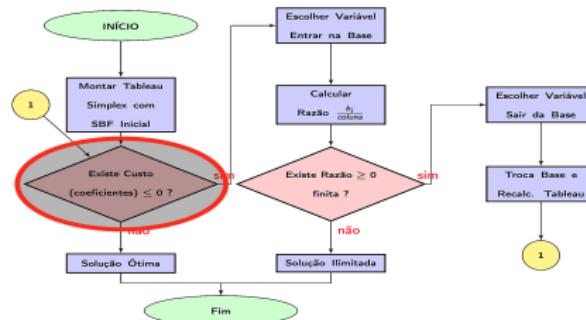




# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6
$S_3$	0	3	0	0	-1	1	6
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30

Verificar se a solução é ótima!  
(Linha de Z).





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

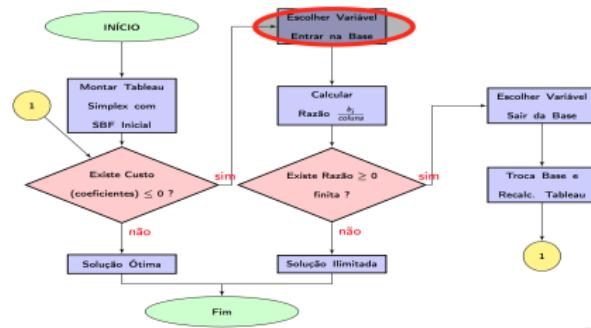
Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6
$S_3$	0	3	0	0	-1	1	6
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30



Entra

Base

Escolhe variável com coeficiente mais negativo na FOB para entrar na base.





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

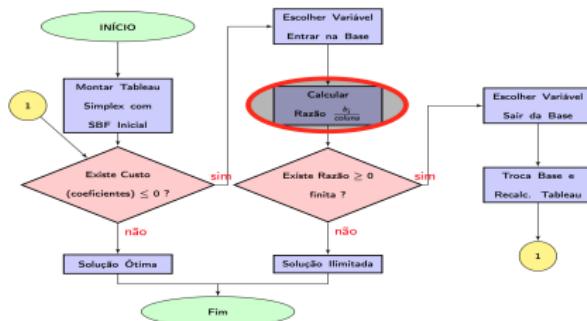
Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6
$S_3$	0	3	0	0	-1	1	6
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30



Entra

Base

Para cada linha do Tableau calcular razão  $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ .





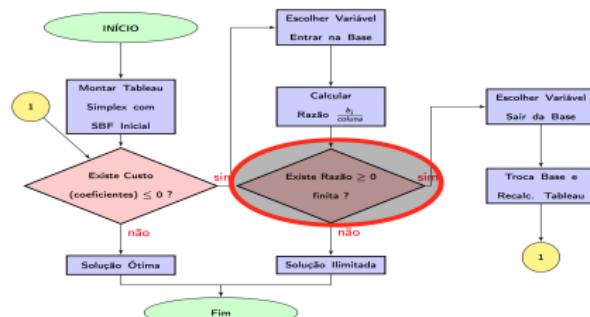
# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b	
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4	$4 \div 1 = +4$ ←
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6	$6 \div 0 = \infty$
$S_3$	0	3	0	0	-1	1	6	$6 \div 3 = +2$ ←
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30	

↑

Entra  
Base

Verifica se existe razão positiva e finita.





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	1	0	1	0	0	4
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6
$S_3$	0	3	0	0	-1	1	6
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30



Entra

Base

$$4 \div 1 = +4$$

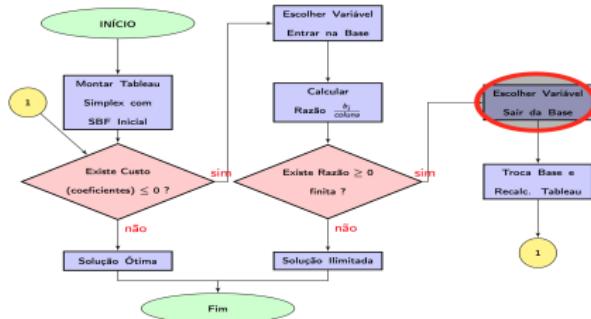
$$6 \div 0 = \infty$$

$$6 \div 3 = +2$$



Sai Base

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	b
S <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0	4
X <sub>2</sub>	0	0	1	0	1/2	0	6
X <sub>1</sub>	0	3	0	0	-1	1	6
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30



Entra

Base

$4 \div 1 = +4$

$6 \div 0 = \infty$

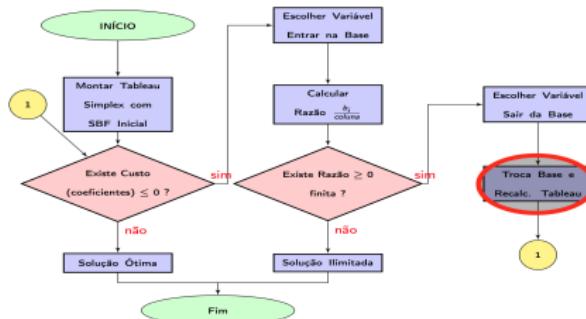
$6 \div 3 = +2$



Sai Base

## Troca de Base

Cada linha da tabela deve possuir apenas uma VB com coeficiente unitário.





# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	b
S <sub>1</sub>	0	1	0	1	0	0	4
X <sub>2</sub>	0	0	1	0	1/2	0	6
X <sub>1</sub>	0	3	0	0	-1	1	6
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30



Entra

Base

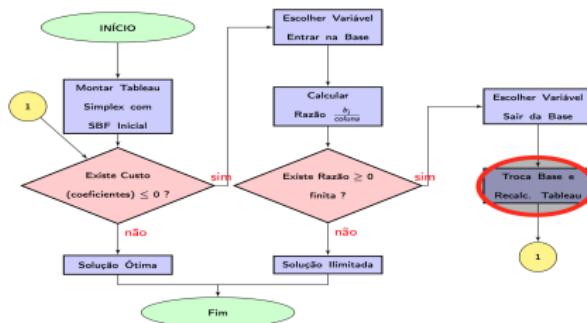
Zerar a coluna de  $X_1$  com exceção da linha referente ao pivô que deve assumir o valor unitário. Para tanto:

$$\text{Linha}'_1 = \text{Linha}_1 - \frac{1}{3} \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}'_2 = \text{Linha}_2$$

$$\text{Linha}'_4 = \text{Linha}_4 + \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}'_3 = \frac{1}{3} \text{Linha}_3$$



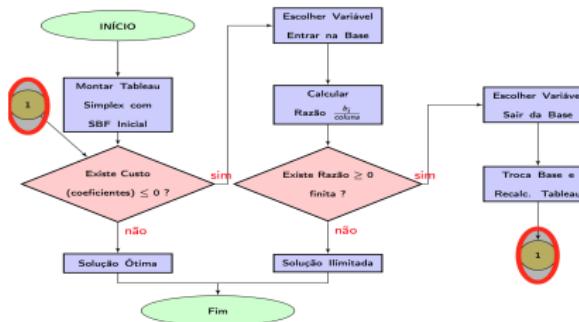


# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6
$X_1$	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36

Novo Tableau !!!!

Linhas com apenas uma VB com coeficiente unitário.

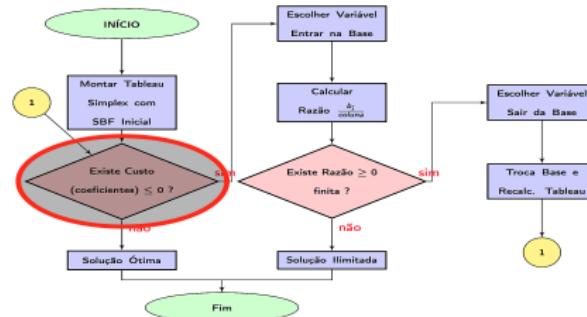




# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6
$X_1$	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36

Verificar se a solução é ótima!  
(Linha de Z).

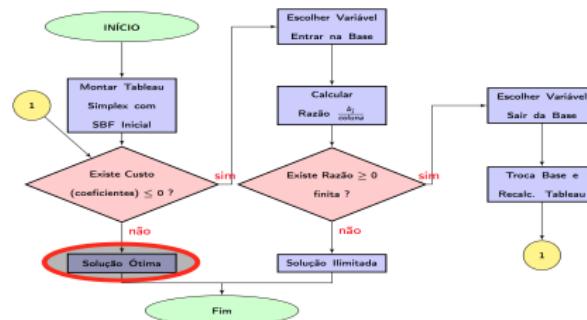




# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
$X_2$	0	0	1	0	$1/2$	0	6
$X_1$	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36

OPTIMAL SOLUTION  
FOUND !!!!

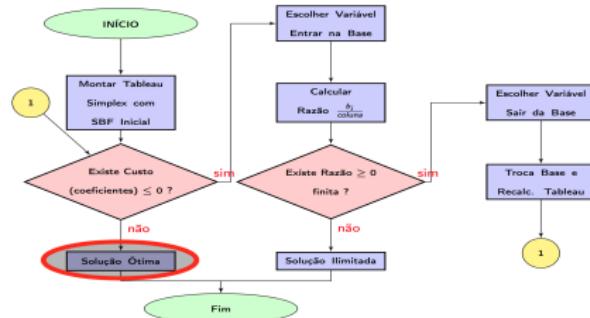




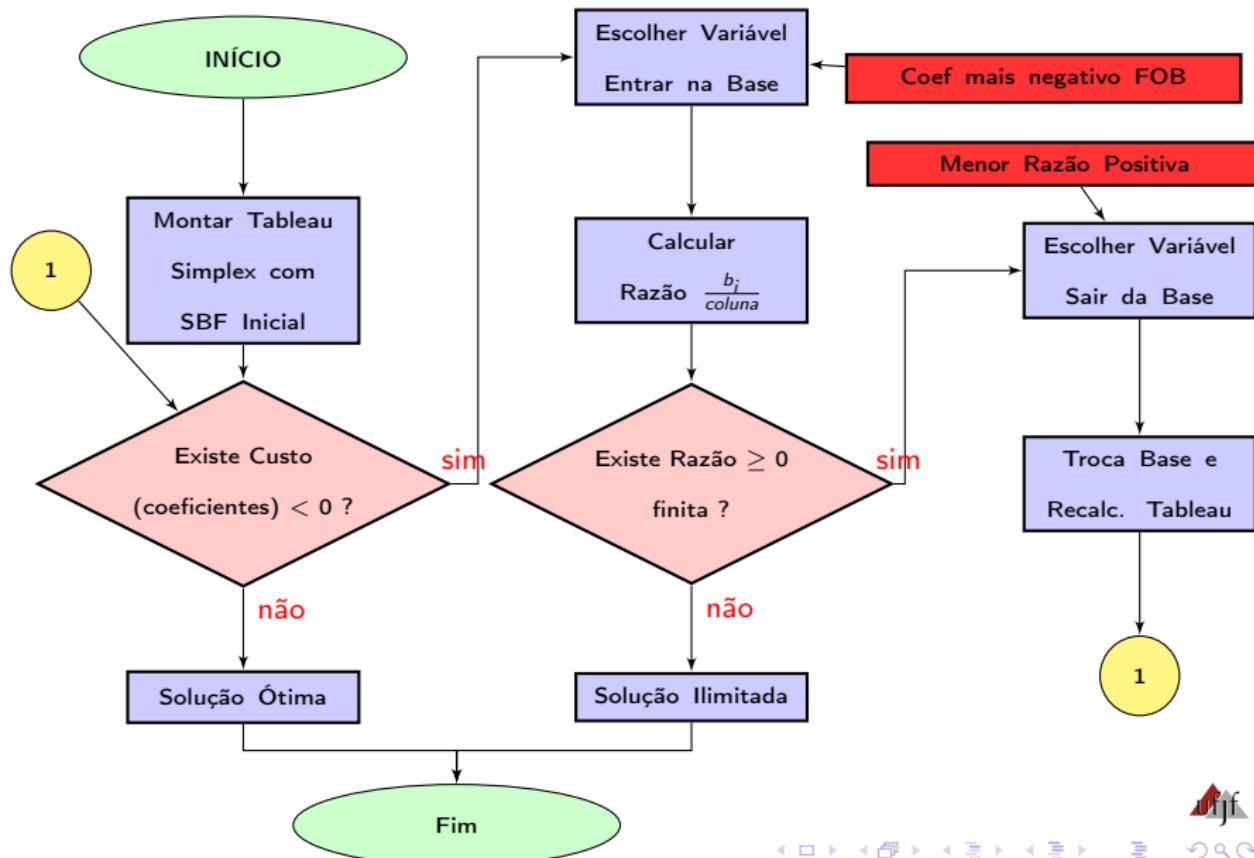
# Passos da Resolução do PPL via Tableau Simplex

Base	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	b
$S_1$	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
$X_2$	0	0	1	0	1/2	0	6
$X_1$	0	1	0	0	-1/3	1/3	2
Z	1	0	0	0	3/2	1	36

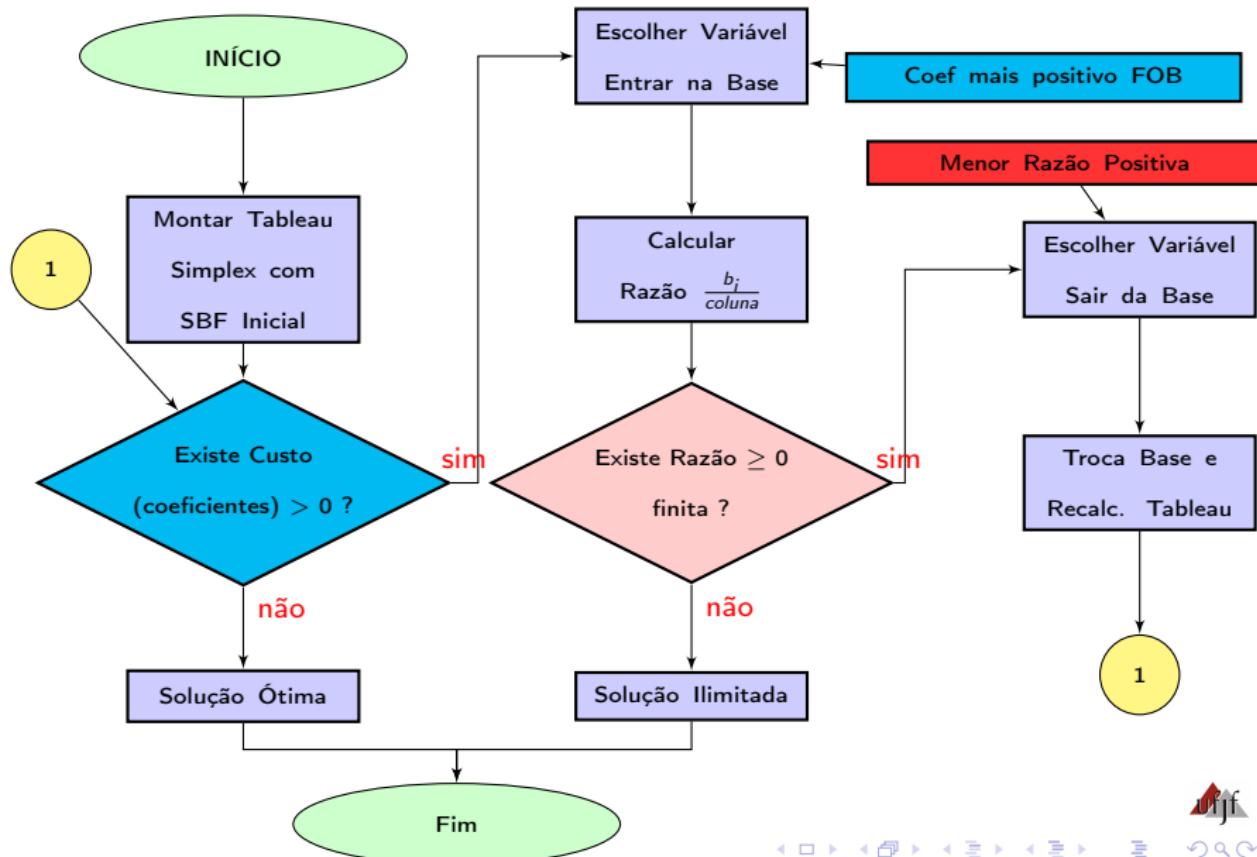
Tipo	Variável	Valor
VB	$X_1$	2
	$X_2$	6
	$S_1$	2
VNB	$S_2$	0
	$S_3$	0
FOB	Z	36



# Fluxograma Tableau Simplex - MAXIMIZAÇÃO



# Fluxograma Tableau Simplex - MINIMIZAÇÃO



# Exemplo Minimização

Utilize o Tableau Simplex para resolver o seguinte problema de programação linear:

$$\min Z = x_1 + x_2 - 4x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$

$$x_2 + x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# Exemplo Minimização



Reescrever a expressão da FOB

$$\min Z - x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$

Sujeito à:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$

$$x_2 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# Exemplo Minimização



## Problema na Forma Padrão

$$\min Z - x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$

Sujeito à:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$$

$$x_2 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

# Exemplo Minimização



## Achar SBF Inicial

$$\text{VNB} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{VB} \begin{cases} x_4 = 9 \\ x_5 = 2 \\ x_6 = 4 \end{cases}$$

# Exemplo Minimização



## Montar o Tableau Simplex

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0

Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0

# Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0



Entra

Base

Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9	$9 \div 2 = 4,5$
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2	$2 \div (-1) = -2$
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0	

↑  
Entra  
Base

Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9	$9 \div 2 = 4,5$
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2	$2 \div (-1) = -2$
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0	

↑

Entra

Base

← Sai Base

Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9	$9 \div 2 = 4,5$
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2	$2 \div (-1) = -2$
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0	

↑

Entra  
Base

← Sai Base

Zerar coluna de  $X_3$  com exceção da linha referente a  $X_6$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9	$9 \div 2 = 4,5$
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2	$2 \div (-1) = -2$
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0	

↑

Entra  
Base

← Sai Base

Zerar coluna de  $X_3$  com exceção da linha referente a  $X_6$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

$$\text{Linha}'_1 = \text{Linha}_1 - 2 * \text{Linha}_3$$

Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9	$9 \div 2 = 4,5$
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2	$2 \div (-1) = -2$
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0	

↑

Entra  
Base

← Sai Base

Zerar coluna de  $X_3$  com exceção da linha referente a  $X_6$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

$$\text{Linha}_1' = \text{Linha}_1 - 2 * \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}_2' = \text{Linha}_2 + 1 * \text{Linha}_3$$

Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9	$9 \div 2 = 4,5$
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2	$2 \div (-1) = -2$
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0	

↑

Entra  
Base

← Sai Base

Zerar coluna de  $X_3$  com exceção da linha referente a  $X_6$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

$$\text{Linha}_1' = \text{Linha}_1 - 2 * \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}_2' = \text{Linha}_2 + 1 * \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}_3' = \text{Linha}_3$$

Exemplo Minimização - 1<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	1	1	2	1	0	0	9	$9 \div 2 = 4,5$
$x_5$	0	1	1	-1	0	1	0	2	$2 \div (-1) = -2$
$x_6$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
$z$	1	-1	-1	4	0	0	0	0	

↑  
Entra  
Base

← Sai Base

Zerar coluna de  $X_3$  com exceção da linha referente a  $X_6$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

$$\text{Linha}'_1 = \text{Linha}_1 - 2 * \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}'_2 = \text{Linha}_2 + 1 * \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}'_3 = \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}'_4 = \text{Linha}_4 - 4 * \text{Linha}_3$$

# Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16

Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16



Entra

Base

Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1	$1 \div 3 = 0.33$ 
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6	$6 \div 0 = \infty$
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div (-1) = -4$
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16	



Entra

Base

Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1	$1 \div 3 = 0.33$
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6	$6 \div 0 = \infty$
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div (-1) = -4$
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16	

↑

Entra

Base

Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1	$1 \div 3 = 0.33$ 
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6	$6 \div 0 = \infty$
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div (-1) = -4$
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16	

 Entrada  
Base

Zerar coluna de  $X_1$  com exceção da linha referente a  $X_4$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1	$1 \div 3 = 0.33$ 
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6	$6 \div 0 = \infty$
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div (-1) = -4$
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16	

 Entrada  
Base

Zerar coluna de  $X_1$  com exceção da linha referente a  $X_4$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

$$\text{Linha}'_1 = (1/3) * \text{Linha}_1$$

Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1	$1 \div 3 = 0.33$ 
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6	$6 \div 0 = \infty$
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div (-1) = -4$
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16	

 Entrada  
Base

Zerar coluna de  $X_1$  com exceção da linha referente a  $X_4$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

$$\text{Linha}'_1 = (1/3) * \text{Linha}_1$$

$$\text{Linha}'_2 = \text{Linha}_2$$

Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1	$1 \div 3 = 0.33$ 
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6	$6 \div 0 = \infty$
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div (-1) = -4$
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16	

 Entrada  
Base

Zerar coluna de  $X_1$  com exceção da linha referente a  $X_4$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

$$\text{Linha}_1' = (1/3) * \text{Linha}_1$$

$$\text{Linha}_2' = \text{Linha}_2$$

$$\text{Linha}_3' = \text{Linha}_3 + (1/3) * \text{Linha}_1$$

Exemplo Minimização - 2<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_4$	0	3	-1	0	1	0	-2	1	$1 \div 3 = 0.33$ 
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6	$6 \div 0 = \infty$
$x_3$	0	-1	1	1	0	0	1	4	$4 \div (-1) = -4$
$z$	1	3	-5	0	0	0	-4	16	

 Entrada  
 Saída

Zerar coluna de  $X_1$  com exceção da linha referente a  $X_4$  que deve assumir o valor unitário (pivô). Para tanto:

$$\text{Linha}'_1 = (1/3) * \text{Linha}_1$$

$$\text{Linha}'_2 = \text{Linha}_2$$

$$\text{Linha}'_3 = \text{Linha}_3 + (1/3) * \text{Linha}_1$$

$$\text{Linha}'_4 = \text{Linha}_4 - 1 * \text{Linha}_1$$

Exemplo Minimização - 3<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_1$	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	0	$-2/3$	$1/3$
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	0	0	$2/3$	1	$1/3$	0	$1/3$	$13/3$
$z$	1	0	-4	0	-1	0	-2	-17

# Exemplo Minimização - 3<sup>a</sup> Interação

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_1$	0	1	-1/3	0	1/3	0	-2/3	1/3
$x_5$	0	0	2	0	0	1	1	6
$x_3$	0	0	2/3	1	1/3	0	1/3	13/3
$z$	1	0	-4	0	-1	0	-2	-17

OPTIMAL SOLUTION FOUND !!!!

Todos os coeficientes da Linha da FOB Negativos

# Exemplo Minimização - 3<sup>a</sup> Interação

Tipos	Variável	Valor
VB	$X_1$	1/3
	$X_5$	6
	$X_3$	13/3
VNB	$X_2$	0
	$X_4$	0
	$X_6$	0
FOB	$Z$	-17

# Exemplo Minimização - Matlab

## Problema de PL:

$$\min Z = x_1 + x_2 - 4x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$

$$x_2 + x_3 - x_1 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



## Programa em Matlab

```

1  clear all; close all; clc;
2  F = [ 1 1 -4];
3  A = [1 1 2; 1 1 -1; -1 1 1];
4  B = [9 ; 2 ; 4];
5  Aeq = [];
6  Beq = [];
7  LB = [0      0      0];
8  UB = [inf inf inf];
9  [x, fval, exitflag] = ...
    linprog(F,A,B,Aeq,Beq,LB,UB);
  
```

X: 3x1 double =

```

0.33333
9.8252e-14
4.3333
  
```

## Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\begin{aligned}
 \max Z &= 600x_1 + 800x_2 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Função Objetivo} \\
 \text{sujeito a} \\
 x_1 + x_2 &\leq 100 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Área Cultivo} \\
 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Mão de Obra} \\
 x_1 &\leq 60 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Produção Cereal A} \\
 x_2 &\leq 80 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Produção Cereal B} \\
 x_1, x_2 &\geq 0 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Produção}
 \end{aligned}$$



## Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Função Objetivo



Área Cultivo



Mão de Obra



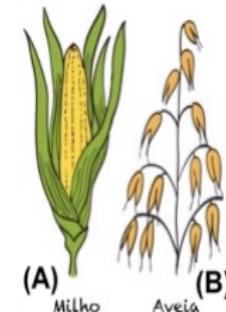
Produção Cereal A



Produção Cereal B



Produção



## Forma Padrão - Escolha 1

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 240$$

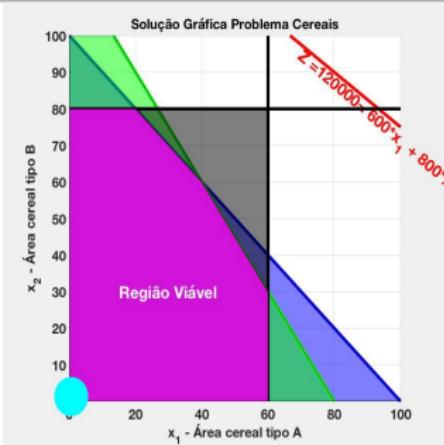
$$x_1 + x_5 = 60$$

$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{VB} \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 100 \\ x_4 = 240 \\ x_5 = 60 \\ x_6 = 80 \end{array} \right. \\ \text{Z} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{VNB} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



## Forma Padrão - Escolha 1

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 240$$

$$x_1 + x_5 = 60$$

$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

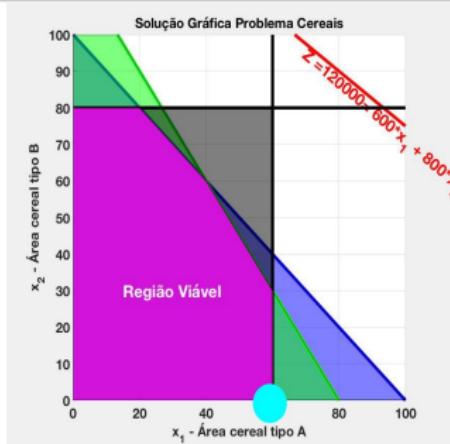
VB

$$\begin{cases} x_3 = 100 \\ x_4 = 240 \\ x_5 = 60 \\ x_6 = 80 \end{cases}$$

$$Z = 0$$

VNB

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$



## Forma Padrão - Escolha 2

$$\max Z - 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + \cancel{x_2} + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2\cancel{x_2} + x_4 = 240$$

$$x_1 + \cancel{x_5} = 60$$

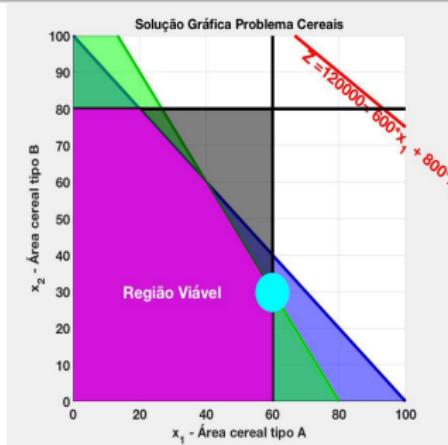
$$\cancel{x_2} + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 60 \\ x_3 = 40 \\ x_4 = 60 \\ x_6 = 80 \end{array} \right.$$

$$Z = 36000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right.$$



## Forma Padrão - Escolha 3

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + \cancel{x_4} = 240$$

$$x_1 + \cancel{x_5} = 60$$

$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

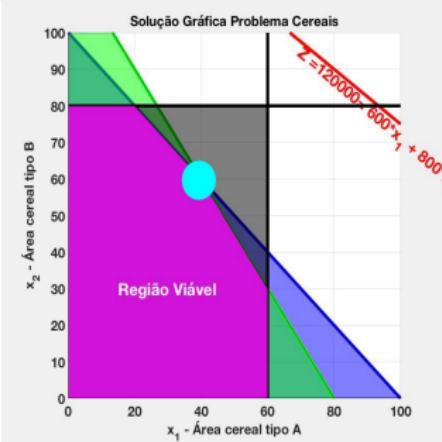
VB

$$\begin{cases} x_1 = 60 \\ x_2 = 30 \\ x_3 = 10 \\ x_6 = 50 \end{cases}$$

VNB

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$Z = 60000$



## Forma Padrão - Escolha 4

$$\max Z - 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + \cancel{x_3} = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + \cancel{x_4} = 240$$

$$x_1 + x_5 = 60$$

$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

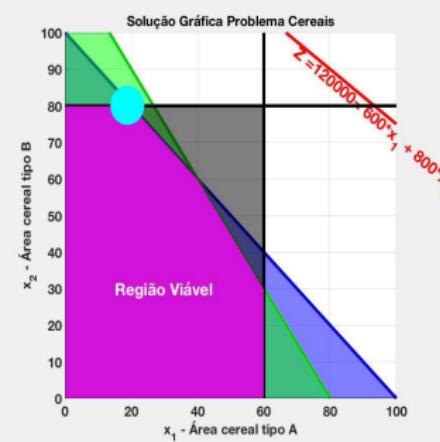
VB

$$\begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 60 \\ x_5 = 20 \\ x_6 = 20 \end{cases}$$

VNB

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$Z = 72000$



## Forma Padrão - Escolha 5

$$\max Z - 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + \cancel{x_3} = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 240$$

$$x_1 + x_5 = 60$$

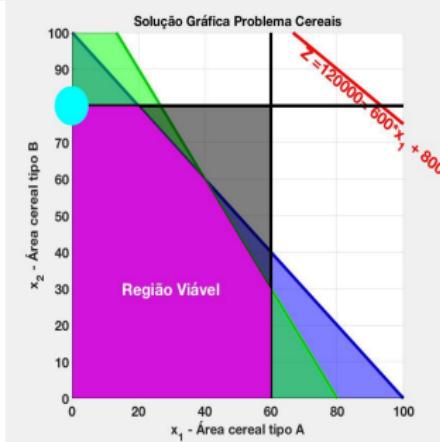
$$x_2 + \cancel{x_6} = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 20 \\ x_2 = 80 \\ x_4 = 20 \\ x_5 = 40 \end{array} \right\} \text{VB}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_6 = 0 \end{array} \right\} \text{VNB}$$

$Z = 76000$  Optimal Solution!



## Forma Padrão - Escolha 6

$$\max Z = 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$\cancel{x_1} + x_2 + x_3 = 100$$

$$3\cancel{x_1} + 2x_2 + x_4 = 240$$

$$\cancel{x_1} + x_5 = 60$$

$$x_2 + \cancel{x_6} = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

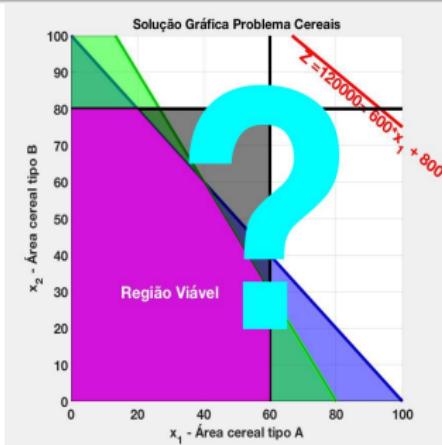
VB

$$\begin{cases} x_2 = 80 \\ x_3 = 20 \\ x_4 = 80 \\ x_5 = 60 \end{cases}$$

VNB

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

$Z = 64000$



## Forma Padrão - Escolha 7

$$\max Z = 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 240$$

$$x_1 + \cancel{x_5} = 60$$

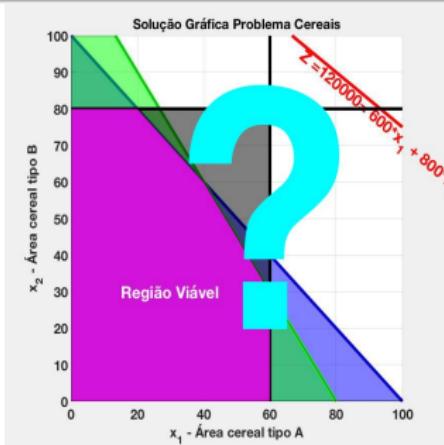
$$x_2 + \cancel{x_6} = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 60 \\ x_2 = 80 \\ x_3 = -40 \\ x_4 = -100 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{array} \right.$$

Não é Compatível !!!



## Forma Padrão - Escolha 8

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + \cancel{x_4} = 240$$

$$x_1 + x_5 = 60$$

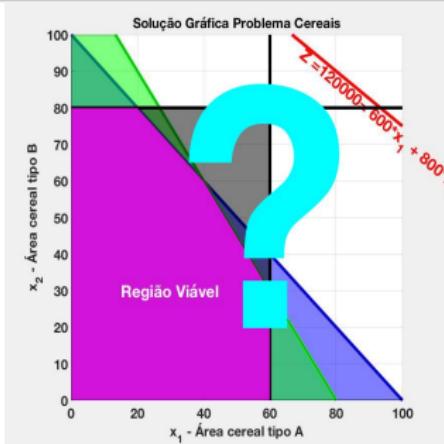
$$x_2 + \cancel{x_6} = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 26,67 \\ x_2 = 80 \\ x_3 = -6,67 \\ x_5 = 33,33 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_6 = 0 \end{array} \right.$$

Não é Compatível !!!



## Forma Padrão - Escolha 9

$$\max Z = 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + \cancel{x_3} = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 240$$

$$x_1 + \cancel{x_5} = 60$$

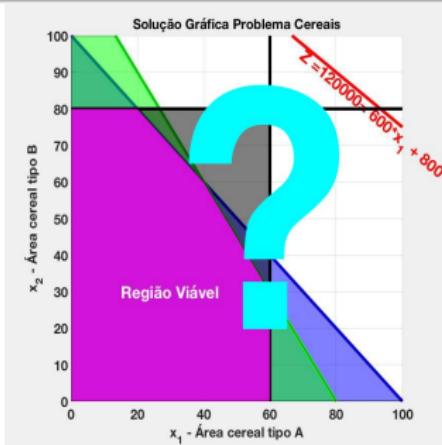
$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 60 \\ x_2 = 40 \\ x_4 = -20 \\ x_6 = 40 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right.$$

Não é Compatível !!!



## Forma Padrão - Escolha 10

$$\max Z = 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + \cancel{x_2} + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2\cancel{x_2} + x_4 = 240$$

$$x_1 + x_5 = 60$$

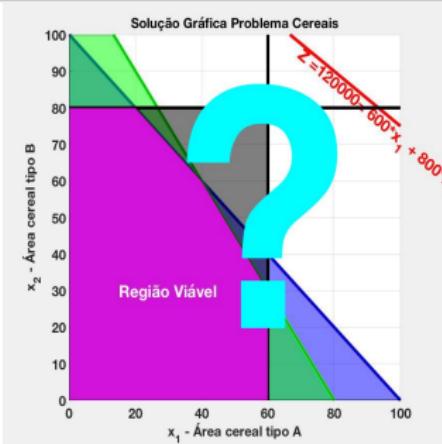
$$\cancel{x_2} + \cancel{x_6} = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = ??? \\ x_3 = ??? \\ x_4 = ??? \\ x_5 = ??? \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_6 = 0 \end{array} \right.$$

Solução Impossível !!!



## Forma Padrão - Escolha 11

$$\max Z = 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + \cancel{x_2} + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2\cancel{x_2} + \cancel{x_4} = 240$$

$$x_1 + x_5 = 60$$

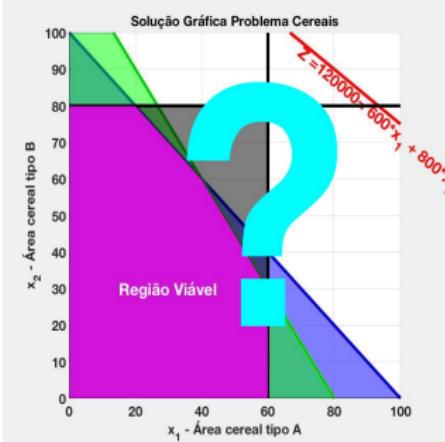
$$\cancel{x_2} + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 80 \\ x_3 = 20 \\ x_5 = -20 \\ x_6 = 80 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Não é Compatível !!!



## Forma Padrão - Escolha 12

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + \cancel{x_2} + \cancel{x_3} = 100$$

$$3x_1 + 2\cancel{x_2} + x_4 = 240$$

$$x_1 + x_5 = 60$$

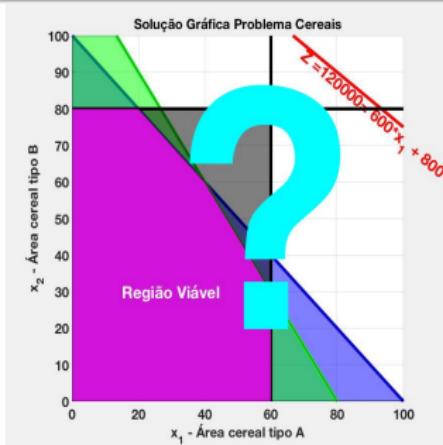
$$\cancel{x_2} + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 100 \\ x_4 = -60 \\ x_5 = -40 \\ x_6 = 80 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Não é Compatível !!!



## Forma Padrão - Escolha 13

$$\max Z = 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$\cancel{x_1} + x_2 + x_3 = 100$$

$$3\cancel{x_1} + 2x_2 + x_4 = 240$$

$$\cancel{x_1} + \cancel{x_5} = 60$$

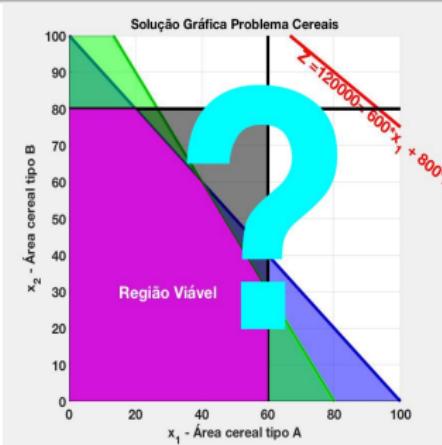
$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = ??? \\ x_3 = ??? \\ x_4 = ??? \\ x_6 = ??? \end{array} \right\} \text{VB}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right\} \text{VNB}$$

Solução Impossível !!!



## Forma Padrão - Escolha 14

$$\max Z = 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$\cancel{x_1} + x_2 + x_3 = 100$$

$$3\cancel{x_1} + 2x_2 + \cancel{x_4} = 240$$

$$\cancel{x_1} + x_5 = 60$$

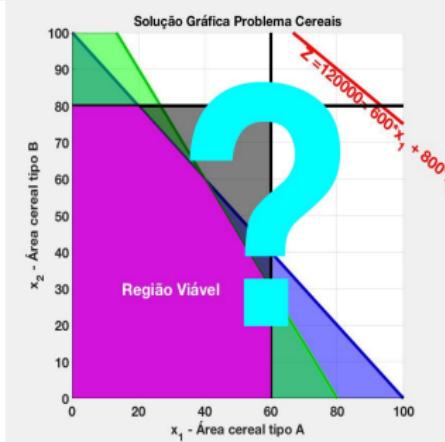
$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 120 \\ x_3 = -20 \\ x_5 = 60 \\ x_6 = -40 \end{array} \right. \quad \text{VB}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \text{VNB}$$

Não é Compatível !!!



## Forma Padrão - Escolha 15

$$\max Z = 600x_1 - 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$\cancel{x_1} + x_2 + \cancel{x_3} = 100$$

$$3\cancel{x_1} + 2x_2 + x_4 = 240$$

$$\cancel{x_1} + x_5 = 60$$

$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

VB

$$\begin{cases} x_2 = 100 \\ x_4 = 40 \\ x_5 = 60 \\ x_6 = -20 \end{cases}$$

VNB

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Não é Compatível !!!

# Busca Exaustiva

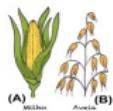
## Conclusão

Em um sistema linear  $Ax = B$ , onde  $A$  é de ordem  $m \times n$  e  $m \leq n$ , podem haver até  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$  soluções básicas, por se tomar todas as combinações distintas de  $m$  variáveis básicas entre as  $n$  variáveis existentes.

# Busca Exaustiva

## Conclusão

Em um sistema linear  $Ax = B$ , onde  $A$  é de ordem  $m \times n$  e  $m \leq n$ , podem haver até  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$  soluções básicas, por se tomar todas as combinações distintas de  $m$  variáveis básicas entre as  $n$  variáveis existentes.



### No exemplo do agricultor

- $m = 4$  Equações, logo, existirão 4 Variáveis Básicas (VB).
- $n = 6$  Variáveis de decisão, logo, existirão  $6 - 4$  ou 2 Variáveis Não Básicas (VNB)
- Número de combinações será  $\frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} = \frac{30 \cdot 4!}{4!2!} = 15$ .

## Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Função Objetivo



Área Cultivo



Mão de Obra



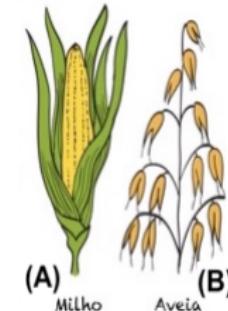
Produção Cereal A



Produção Cereal B



Produção



## Forma Padrão - Escolha 1 - Solução Básica Factível Inicial

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 = 0$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 240$$

$$x_1 + x_5 = 60$$

$$x_2 + x_6 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = 100 \\ x_4 = 240 \\ x_5 = 60 \\ x_6 = 80 \end{array} \right\} \text{VB}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} \text{VNB}$$

$$Z = 0$$

## Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Função Objetivo



Área Cultivo



Mão de Obra



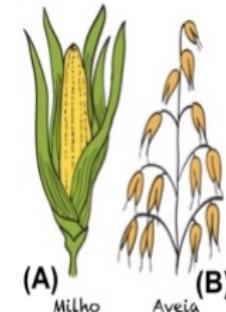
Produção Cereal A



Produção Cereal B



Produção



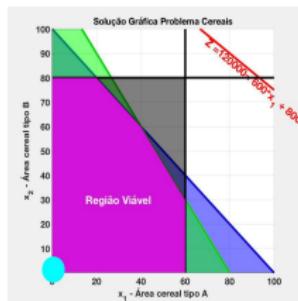
## Tableau Simplex

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_3$	0	1	1	1	0	0	0	100
$x_4$	0	3	2	0	1	0	0	240
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60
$x_6$	0	0	1	0	0	0	1	80
$z$	1	-600	-800	0	0	0	0	0

# Tableau Simplex - Iteração 1

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_3$	0	1	1	1	0	0	0	100
$x_4$	0	3	2	0	1	0	0	240
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60
$x_6$	0	0	1	0	0	0	1	80
$z$	1	-600	-800	0	0	0	0	0

- ◊ Parte da Solução Básica Factível (SBF) inicial.
- ◊ Verificar se a solução é ótima! (Linha de Z).



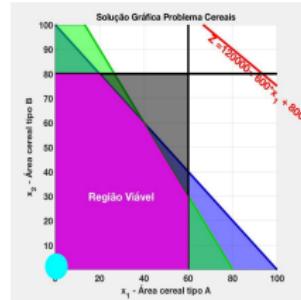
# Tableau Simplex - Iteração 1

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_3$	0	1	1	1	0	0	0	100
$x_4$	0	3	2	0	1	0	0	240
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60
$x_6$	0	0	1	0	0	0	1	80
$z$	1	-600	-800	0	0	0	0	0



Entra

Escolhe variável com coeficiente mais negativo na FOB para entrar na base.



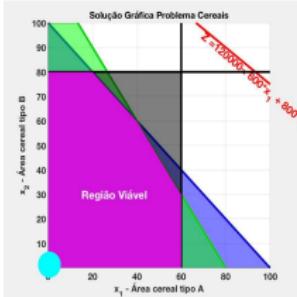
## Tableau Simplex - Iteração 1

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_3$	0	1	1	1	0	0	0	100
$x_4$	0	3	2	0	1	0	0	240
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60
$x_6$	0	0	1	0	0	0	1	80
$z$	1	-600	-800	0	0	0	0	0



Entra

Para cada linha do Tableau calcular razão  $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ . Existe razão positiva e finita?



# Tableau Simplex - Iteração 1

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_3$	0	1	1	1	0	0	0	100	$100 \div 1 = 100$
$x_4$	0	3	2	0	1	0	0	240	$240 \div 2 = 120$
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60	$60 \div 0 = \infty$
$x_6$	0	0	1	0	0	0	1	80	$80 \div 1 = 80$
$z$	1	-600	-800	0	0	0	0	0	Sai

↑  
Entra

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.

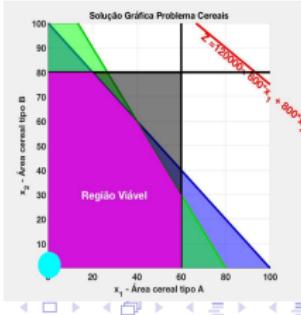
$$\text{Linha}'_1 = \text{Linha}_1 - \text{Linha}_4$$

$$\text{Linha}'_2 = \text{Linha}_2 - 2 * \text{Linha}_4$$

$$\text{Linha}'_3 = \text{Linha}_3$$

$$\text{Linha}'_4 = \text{Linha}_4$$

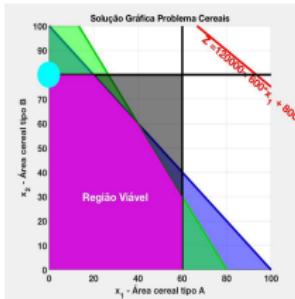
$$\text{Linha}'_5 = \text{Linha}_5 + 800 * \text{Linha}_4$$



# Tableau Simplex - Iteração 2

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_3$	0	1	0	1	0	0	-1	20
$x_4$	0	3	0	0	1	0	-2	80
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60
$x_2$	0	0	1	0	0	0	1	80
$z$	1	-600	0	0	0	800	64000	

Verificar se a solução é ótima!  
(Linha de  $Z$ ).



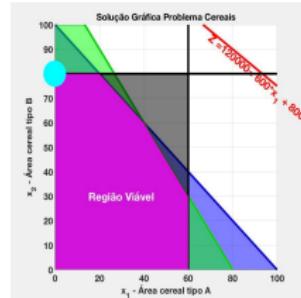
# Tableau Simplex - Iteração 2

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_3$	0	1	0	1	0	0	-1	20
$x_4$	0	3	0	0	1	0	-2	80
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60
$x_2$	0	0	1	0	0	0	1	80
$z$	1	-600	0	0	0	0	800	64000



Entra

Escolhe variável com coeficiente mais negativo na FOB para entrar na base.

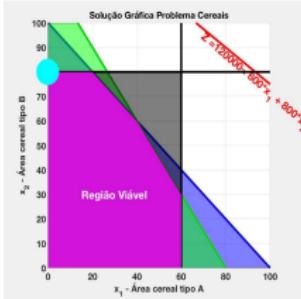


# Tableau Simplex - Iteração 2

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_3$	0	1	0	1	0	0	-1	20	$20 \div 1 = 20$ 
$x_4$	0	3	0	0	1	0	-2	80	$80 \div 3 = 26,6$ 
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60	$60 \div 1 = 60$ 
$x_2$	0	0	1	0	0	0	1	80	$80 \div 0 = \infty$
$z$	1	-600	0	0	0	0	800	64000	

 Entrar

Para cada linha do Tableau calcular razão  $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ . Existe razão positiva e finita?



# Tableau Simplex - Iteração 2

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$	
$x_3$	0	1	0	1	0	0	-1	20	$20 \div 1 = 20$ 
$x_4$	0	3	0	0	1	0	-2	80	$80 \div 3 = 26,6$
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	60	$60 \div 1 = 60$
$x_2$	0	0	1	0	0	0	1	80	$80 \div 0 = \infty$
$z$	1	-600	0	0	0	0	800	64000	



Entra

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.

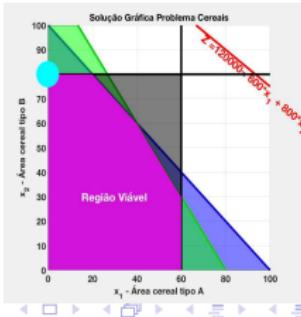
$$\text{Linha}'_1 = \text{Linha}_1$$

$$\text{Linha}'_2 = \text{Linha}_2 - 3 * \text{Linha}_1$$

$$\text{Linha}'_3 = \text{Linha}_3 - \text{Linha}_1$$

$$\text{Linha}'_4 = \text{Linha}_4$$

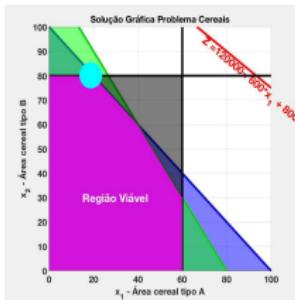
$$\text{Linha}'_5 = \text{Linha}_5 + 600 * \text{Linha}_1$$



# Tableau Simplex - Iteração 3

	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_1$	0	1	0	1	0	0	-1	20
$x_4$	0	0	0	-3	1	0	1	20
$x_5$	0	0	0	-1	0	1	1	40
$x_2$	0	0	1	0	0	0	1	80
$z$	1	0	0	600	0	0	1400	76000

OPTIMAL SOLUTION  
FOUND !!!!





Simplex: 3 Iterações !!!!



Exaustão: Análise de 15  
Combinações !!!!

# Restrições de Igualdade / Maior ou Igual



- Soluções Básicas Iniciais devem ser factíveis.
- Soluções Factíveis são diretas quando todas as restrições do modelo são da forma  $\leq$ .
- Restrições do modelo na forma  $\geq$  ou  $=$  não levam a obtenção direta de soluções iniciais factíveis.

# Exemplo

Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

# Exemplo

Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Padrão:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

# Exemplo

Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Padrão:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_4 = 40 \\ x_5 = -60 \end{cases}$$

$$0 + 0 + 0 = 15$$

# Exemplo

Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Padrão:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_4 = 40 \\ x_5 = -60 \end{cases}$$

$$0 + 0 + 0 = 15$$





# Como obter soluções iniciais em modelos com restrições na forma $\geq$ ou $=$ ?



# Como obter soluções iniciais em modelos com restrições na forma $\geq$ ou $=$ ?

Método das  
Penalidades  
(BIG-M)



Método das Duas  
Fases

# Fim