Programação Linear

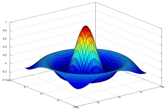
Prof. André Luís Marques Marcato

andre.marcato@ufjf.edu.br

Universidade Federal de Juiz de Fora

Engenharia - UFJF

Primeiro Semestre de 2018



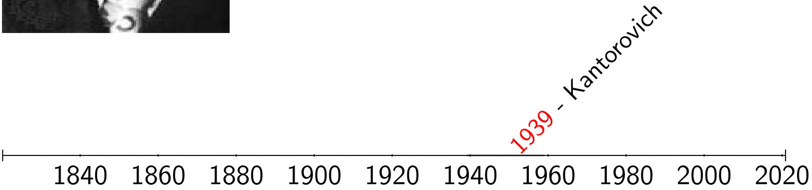
Agenda da Apresentação

Histórico

Jean Baptiste Joseph Fourier (matemático Francês). Ele publicou um trabalho sobre a resolução de sistemas de equações lineares. Este trabalho é considerado o primeiro sobre programação linear.

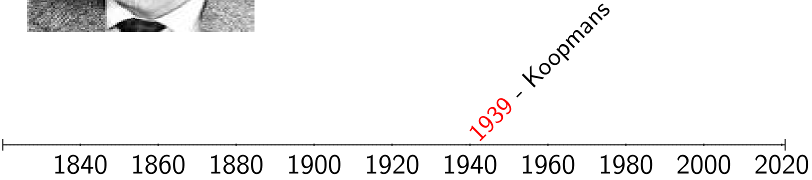
Histórico

Leonide Kantorovich (matemático e economista Russo). Formulou e resolveu um problema de programação linear, mas seu trabalho permaneceu desconhecido até 1959.



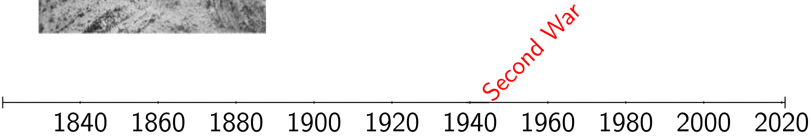
Histórico

O termo programação linear foi criado pelo economista Holandês Tjalling Koopmans em uma conversa com Datzig na California em 1948. Ele formulou modelos de programação linear aplicados em economia clássica.



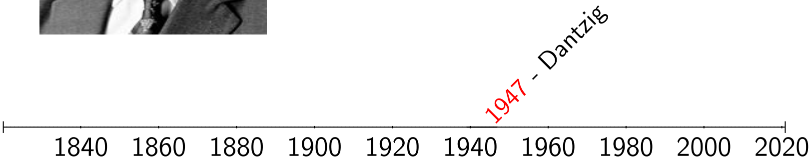
Histórico

Durante a Segunda Guerra Mundial, modelos de programação linear foram projetados e resolvidos em aplicações voltadas para planejamento militar.

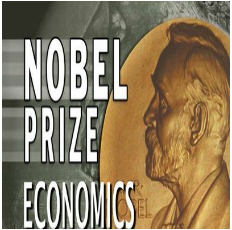


Histórico

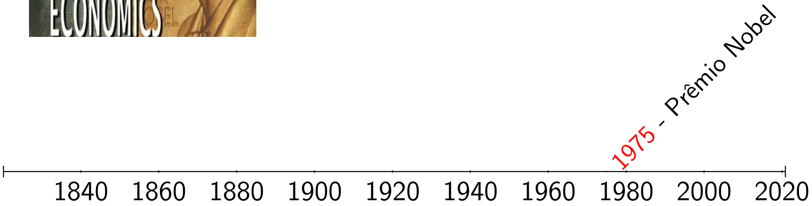
Em 1947, George Dantzig desenvolveu o Método Simplex, propondo a Formulação Geral de Problemas de Programação Linear. Ele trabalhava como matemático consultor para o Pentágono.



Histórico



Em 1975, Kantorovich e Koopmans receberam o Prêmio Nobel em Ciências Econômicas pelo trabalho desenvolvido na área de programação linear.



Histórico

Atualmente, problemas de prog. linear são resolvidos 1.000.000 de vezes mais rapidamente que 1985. Além disto, problemas com mais de 1.000.000 variáveis e restrições são prontamente resolvidos.

2018

1840 1860 1880 1900 1920 1940 1960 1980 2000 2020

Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

→Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.

Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

➡Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.

➡Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.

Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

➡ Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.

➡ Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.

➡ Manter a precisão numérica para a obtenção de resultados significativos.

Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

➡ Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.

➡ Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.

➡ Manter a precisão numérica para a obtenção de resultados significativos.

A partir de 1957, todos estes aspectos foram solucionados!

Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

➡ Identificação das variáveis;

Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

➡ Identificação das variáveis;

➡ Identificação dos objetivos.

Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- Identificação das variáveis;
- Identificação dos objetivos.
- Identificação dos aspectos restritivos.

Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- Identificação das variáveis;
- Identificação dos objetivos.
- Identificação dos aspectos restritivos.

O modelo é uma tentativa de representação da realidade e sua complexidade depende do grau de exatidão requerido.

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1

Um agricultor deseja cultivar duas variedades de cereais, **A** e **B**, em um área restrita a 100 ares ($100m^2$). Sendo que:

- 1 are do cereal **A** produz 8 sacas
- 1 are do cereal **B** produz 10 sacas

Para o plantio, cada cereal:

- Tipo **A** precisa de 3 homens-hora de trabalho por are
- Tipo **B** precisa de 2 homens-hora de trabalho por are

sendo que se dispõe até 240 homens-hora de trabalho para o cultivo e o custo da mão de obra é de $200 (unidades monetárias) por homem-hora.

A demanda máxima é limitada pelo mercado a 480 sacas do cereal tipo **A**, vendido a $150/saca, e 800 sacas do cereal **B**, vendido a $120/saca.

O agricultor deseja otimizar a área de cultivo de forma a MAXIMIZAR O LUCRO.

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Variáveis do Problema

As variáveis estão relacionadas ao tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo do cereal tipo **A** e **B**. Logo podemos definir;

- x_1: área destinada ao plantio do cereal Tipo **A**
- x_2: área destinada ao plantio do cereal Tipo **B**

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximixar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

FOB = MAX LUCRO = MAX RECEITAS - CUSTOS

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

FOB = MAX LUCRO = MAX RECEITAS - CUSTOS

- x_1: Receitas: $receitas = \overset{(150 \times 8)}{1200}\, x_1 + \overset{(120 \times 10)}{1200}\, x_2$

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

FOB = MAX LUCRO = MAX RECEITAS - CUSTOS

- x_1: Receitas: $receitas = \overset{(150\times8)}{1200}\ x_1 + \overset{(120\times10)}{1200}\ x_2$
- x_2: Custos: $custos = \overset{(200\times3)}{600}\ x_1 + \overset{(200\times2)}{400}\ x_2$

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo **A** e **B**.

FOB = MAX LUCRO = MAX RECEITAS - CUSTOS

- x_1: Receitas: $receitas = \overset{(150 \times 8)}{1200}\, x_1 + \overset{(120 \times 10)}{1200}\, x_2$
- x_2: Custos: $custos = \overset{(200 \times 3)}{600}\, x_1 + \overset{(200 \times 2)}{400}\, x_2$

- $FOB = \max(600 x_1 + 800 x_2)$

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área custivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área custivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
  - $x_1 + x_2 \leq 100$

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área custivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
  - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área custivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
    - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
    - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área custivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
  - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
  - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações de devido à demanda de mercado

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área custivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
  - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
  - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações de devido à demanda de mercado
  - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área custivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
  - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
  - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações de devido à demanda de mercado
  - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**
  - $10x_2 \leq 800$ ou $x_2 \leq 80$ para o cereal tipo **B**

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área custivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
  - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
  - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações de devido à demanda de mercado
  - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**
  - $10x_2 \leq 800$ ou $x_2 \leq 80$ para o cereal tipo **B**

Programação Linear - Modelagem Matemática

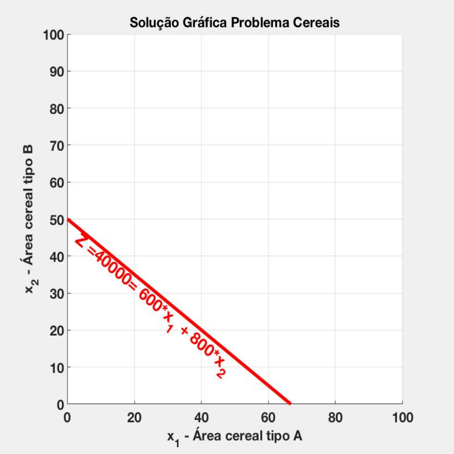
Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Função Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área Cultivo
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção Cereal **A**
$x_2 \leq 80$	Produção Cereal **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

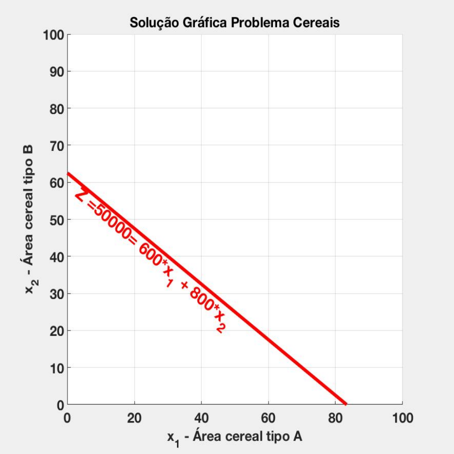
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

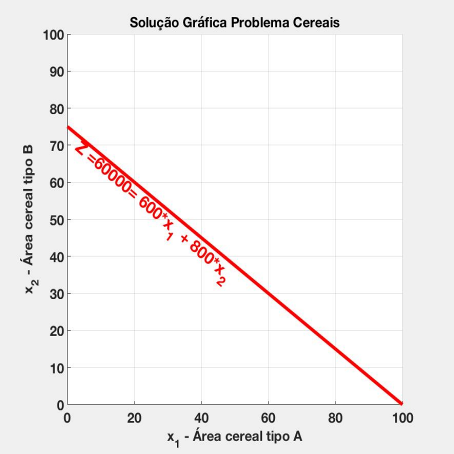
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

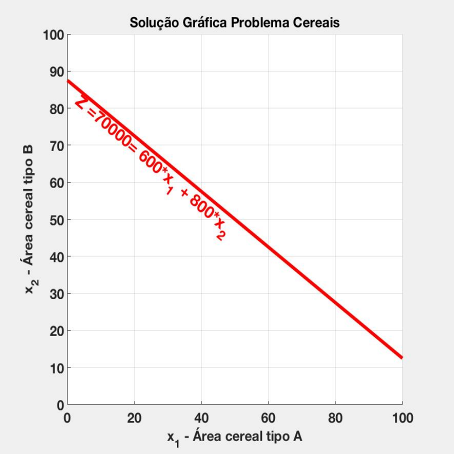
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

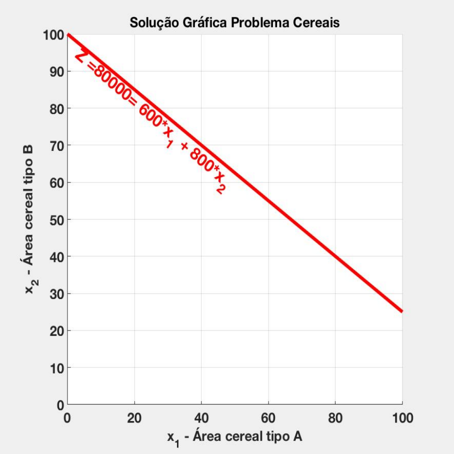
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

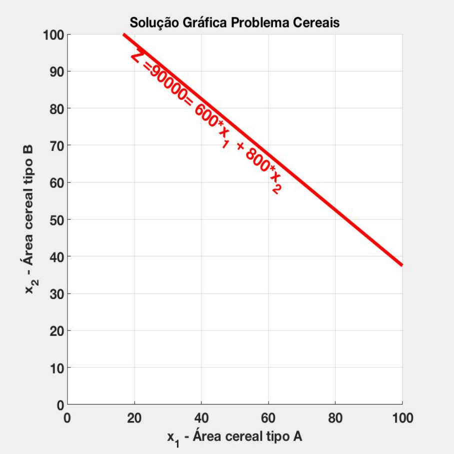
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

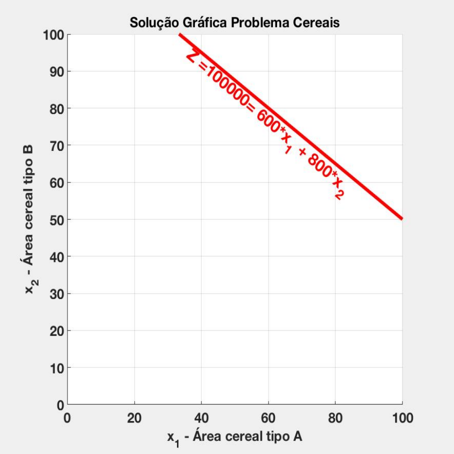
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$ | Objetivo



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

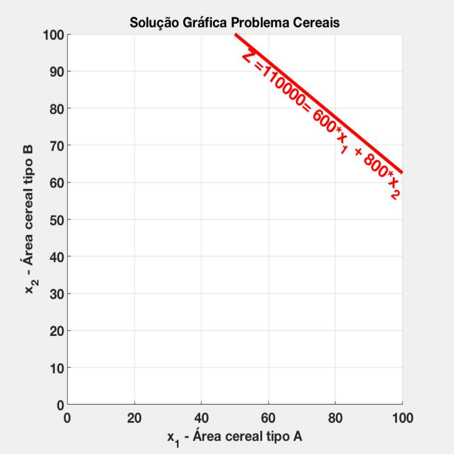
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$ | Objetivo



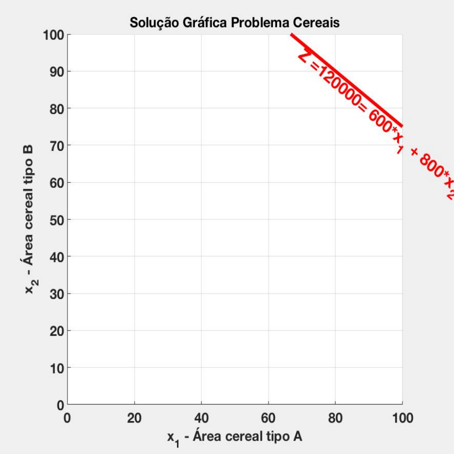
Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo



Análise Gráfica



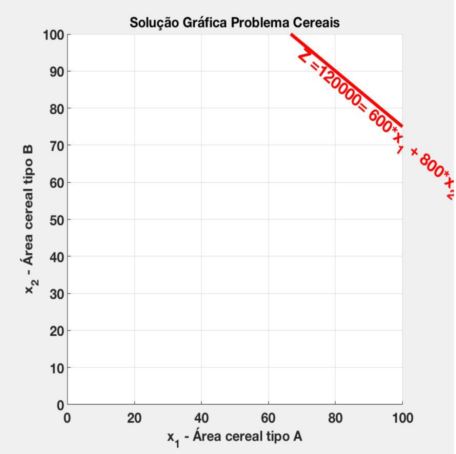
Exemplo 1 - Modelo Matemático

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$ | Objetivo

Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

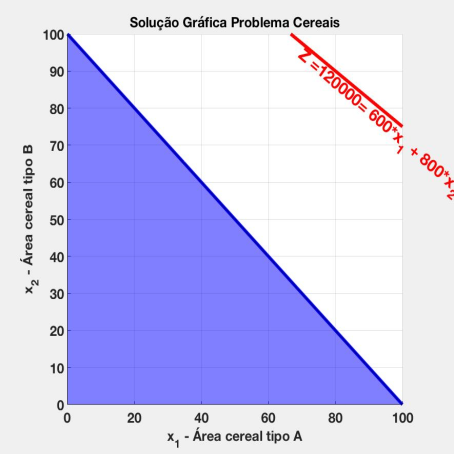
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

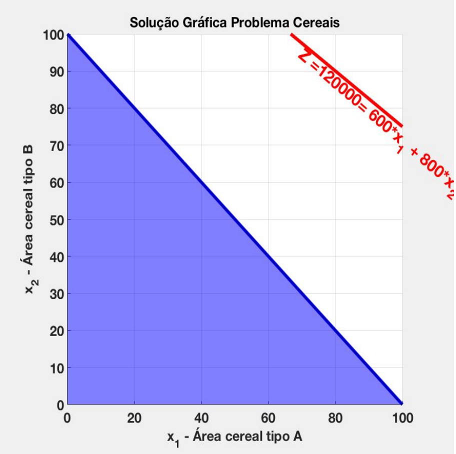
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

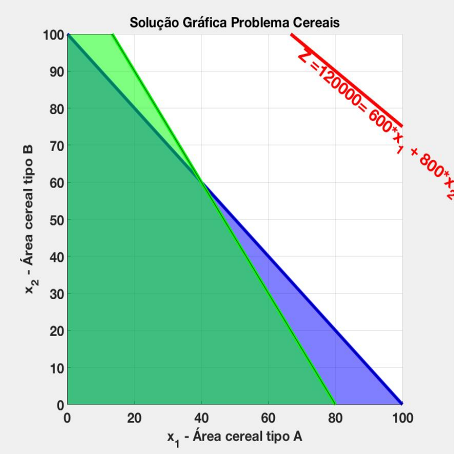
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

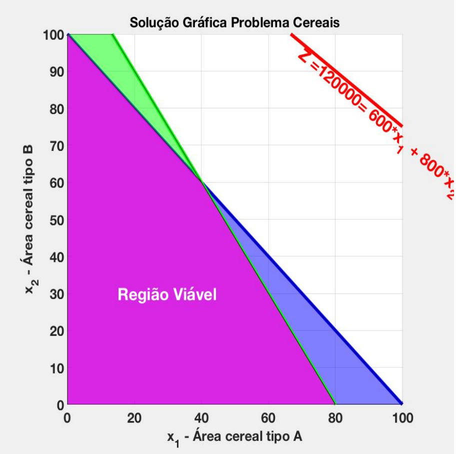
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

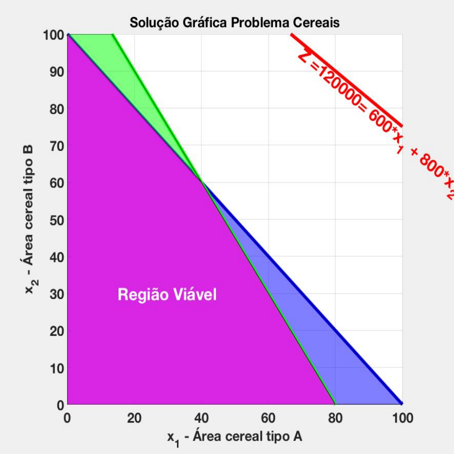
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

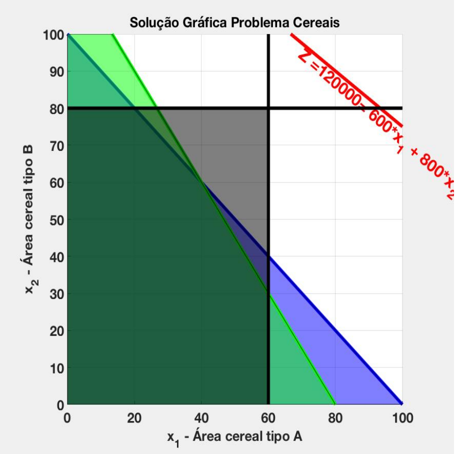
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

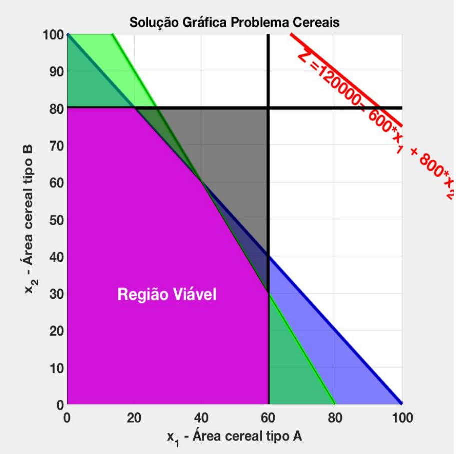
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

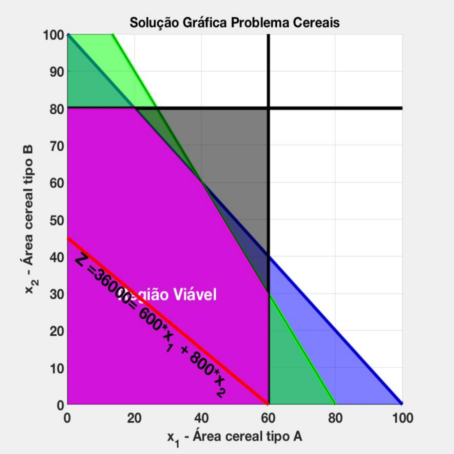
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

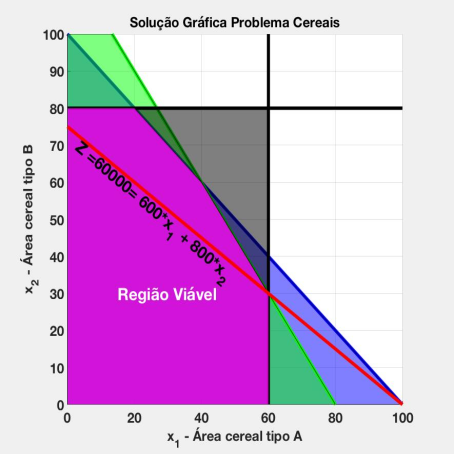
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

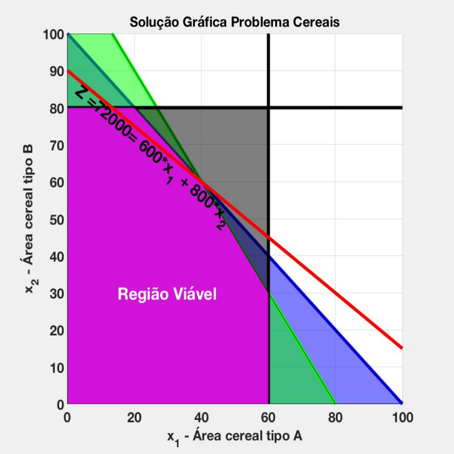
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

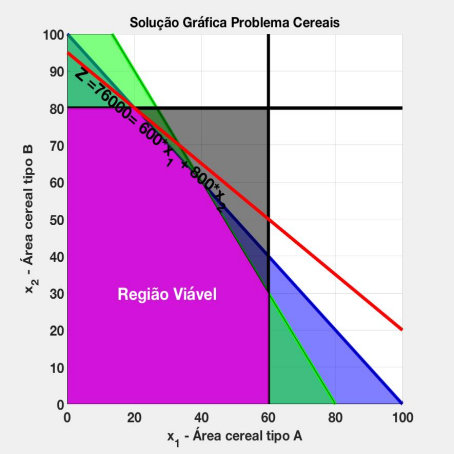
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

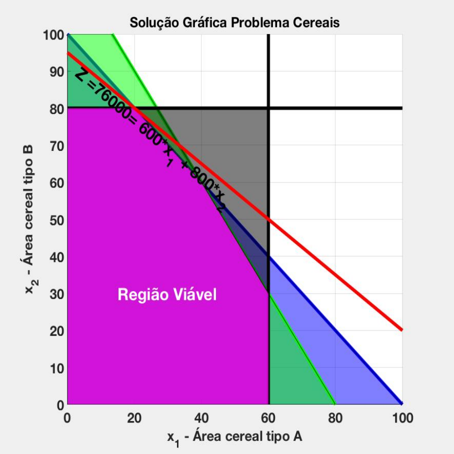


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

A Região Viável é a região de solução! É formada pelas restrições.

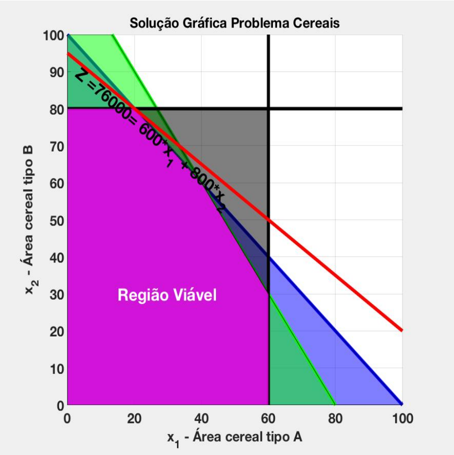


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

A solução do problema estará na Região Viável.

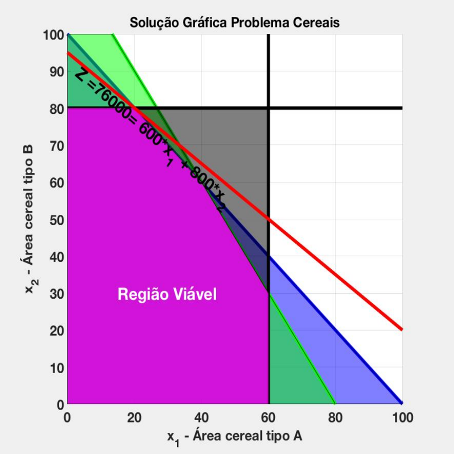


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

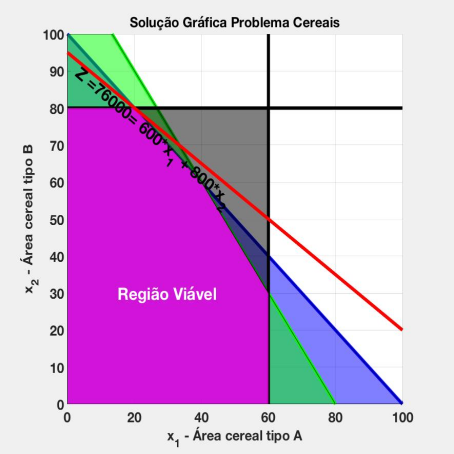
Solução Ótima: $X_1 = 20$ e $X_2 = 80$!!!



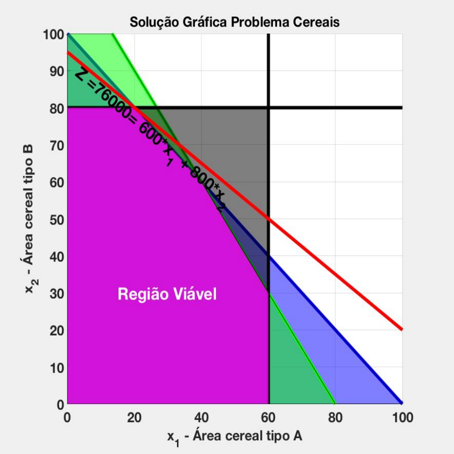
Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$



Como achar a região viável?



Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Primeiro: Determinar a direção do gradiente da **função objetivo**.

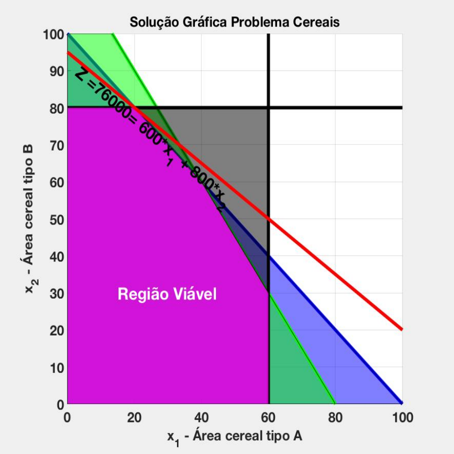
Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Primeiro: Determinar a direção do gradiente da **função objetivo**.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$



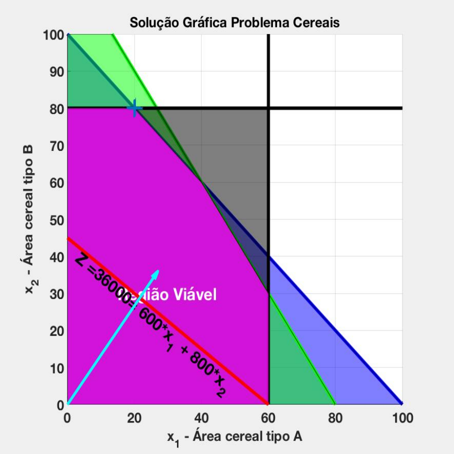
Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Primeiro: Determinar a direção do gradiente da **função objetivo**.

O gradiente indica a direção do máximo crescimento da função.



Como achar a região viável?

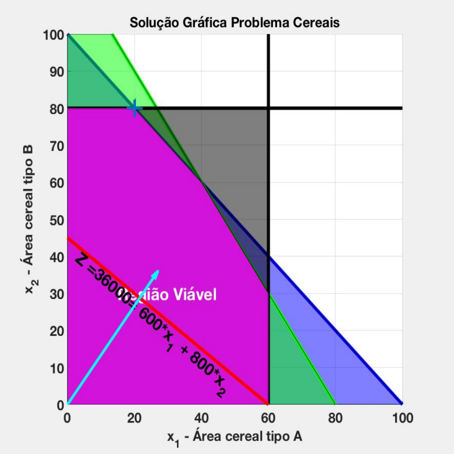
Gradiente

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$

Primeiro: Determinar a direção do gradiente da **função objetivo**.

O gradiente indica a direção do máximo crescimento da função.

$\nabla Z(x_1, x_2) = (600, 800)$

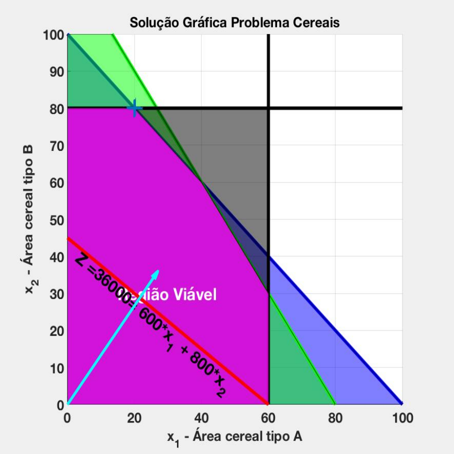


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.

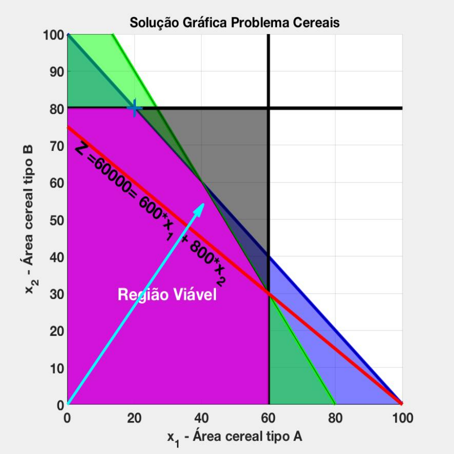


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.

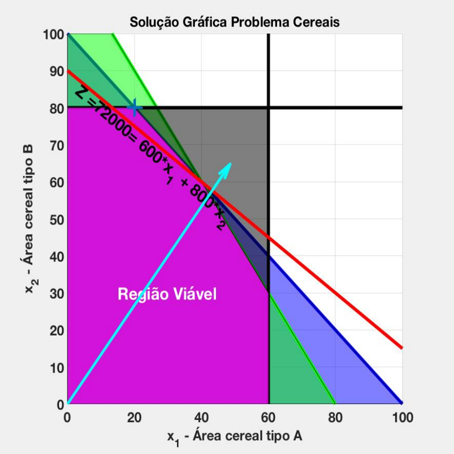


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.

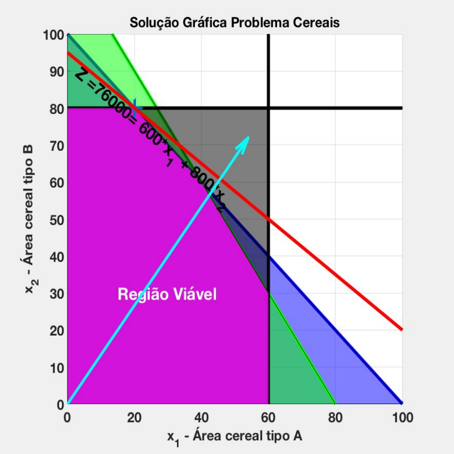


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.



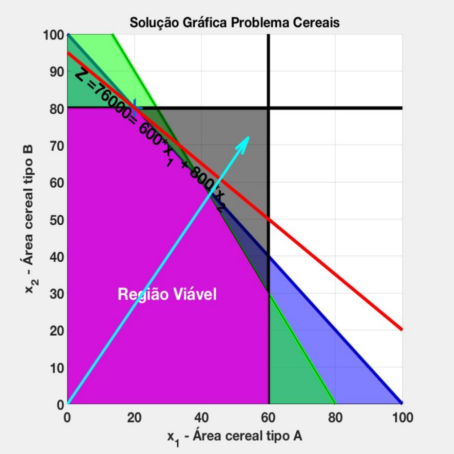
Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.

Desafio: Existem infinitos pares (x_1, x_2) viáveis!



Análise Gráfica

Teorema Fundamental da Programação Linear

A solução ótima de um problema de programação linear estará sempre em um dos vértices da região de solução do problema em análise.

Análise Gráfica

Teorema Fundamental da Programação Linear

A solução ótima de um problema de programação linear estará sempre em um dos vértices da região de solução do problema em análise.

Os vértices correspondem às interseções de duas ou mais restrições.

Análise Gráfica

Teorema Fundamental da Programação Linear

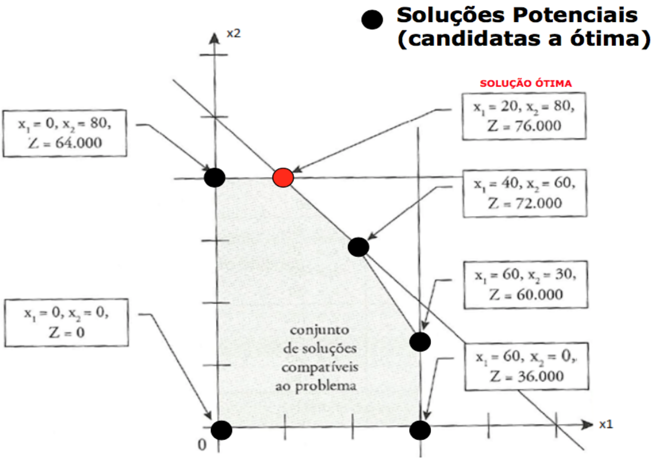
A solução ótima de um problema de programação linear estará sempre em um dos vértices da região de solução do problema em análise. [a]

---

[a] Múltiplas Soluções ou Solução Ilimitada: Nestas situações a solução ótima pode não ser um vértice

Os vértices correspondem às interseções de duas ou mais restrições.

Solução Gráfica

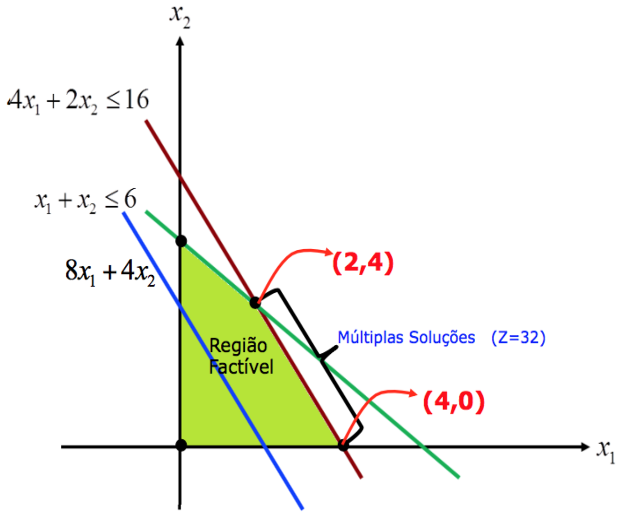


Casos Especiais

- Múltiplas Soluções
- Solução Infactível (Sem Solução)
- Solução Ilimitada
- Solução Degenerada

Casos Especiais - Soluções Múltiplas

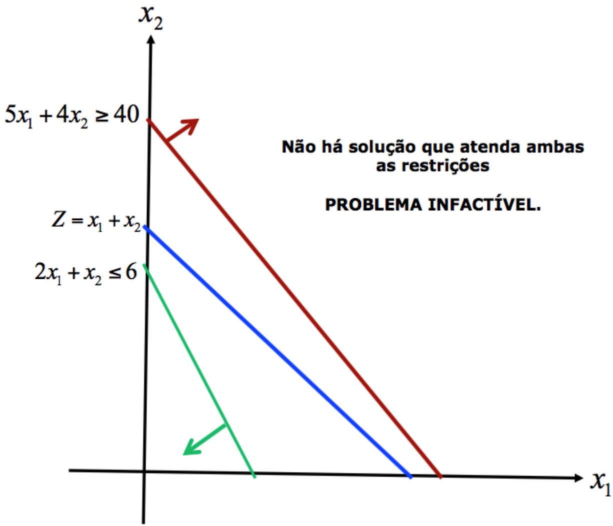
$$\begin{aligned}
&\max Z = 8x_1 + 4x_2\\
&\text{s.a.}\\
&4x_1 + 2x_2 \leq 16\\
&x_1 + x_2 \leq 6\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



FOB Paralela a uma restrição ativa.

Casos Especiais - Problema Sem Solução

$$\max Z = x_1 + x_2$$
s.a.
$$5x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

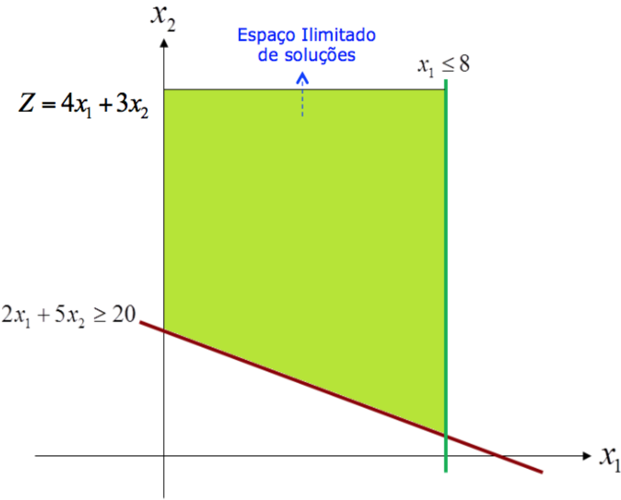


Não há solução que atenda ambas as restrições

PROBLEMA INFACTÍVEL.

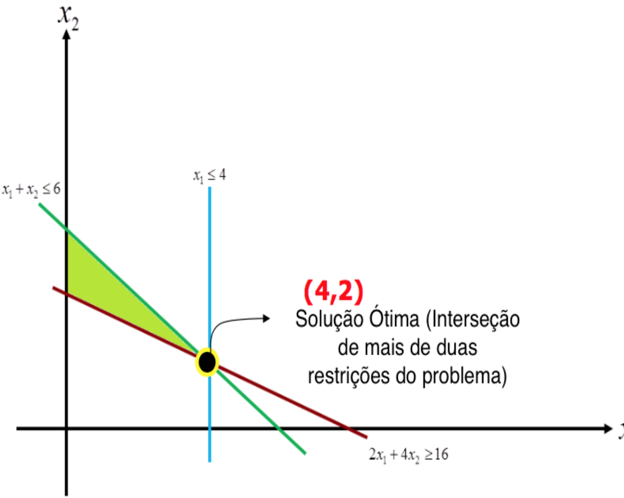
Casos Especiais - Prob. com Conj. Ilimitado de Soluções

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$
s.a.
$$2x_1 + 5x_2 \geq 20$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Casos Especiais - Problema com Solução Degenerada

$\max Z = x_1 + 5x_2$
s.a.
$2x_1 + 4x_2 \geq 16$
$x_1 + x_2 \leq 6$
$x_1 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$



Existe no mínimo uma restrição redundante.

Formulação Matricial

Exemplo 1 - Problema do Agricultor/Área de Plantio

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

$$\max Z = \begin{bmatrix} 800 & 600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 240 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Formulação Matricial

Exemplo 1 - Problema do Agricultor/Área de Plantio

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

$$\max Z = \overbrace{\begin{bmatrix} 800 & 600 \end{bmatrix}}^{\mathbf{c}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 100 \\ 240 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Formulação Matricial

Exemplo 1 - Problema do Agricultor/Área de Plantio

$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção **A**
$x_2 \leq 80$	Produção **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

Notação Compacta

$$\max Z = \mathbf{cx}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{B}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Formulação Padrão Geral

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n &= b_n\\
x_1, x_2, \cdots, x_n &\geq 0
\end{aligned}$$

n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

Formulação Padrão Geral

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i & \forall i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geq 0 & \forall j = 1, 2, \cdots, n \end{array}$$

n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

Formulação Padrão Geral

$$\max z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

Formulação Padrão Geral

$$\max z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}_{1 \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

Formulação Padrão Geral

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

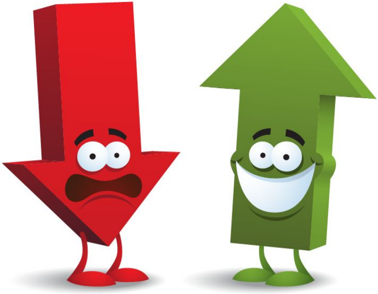
Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\mathbf{A_{eq}} \mathbf{x} = \mathbf{B_{eq}}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

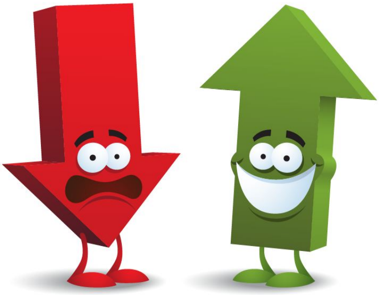
n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B_{eq}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{A_{eq}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Relação entre Maximização e Minimização

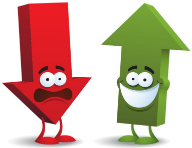


Relação entre Maximização e Minimização



- Qualquer que seja o formato do PPL, sempre é possível transforma-lo no formato padrão apresentado.
- Como é a relação entre minimização e maximização?

Relação entre Maximização e Minimização



$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Leftrightarrow \min(-z) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Leftrightarrow \max(-z) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

Relação Entre Inequações e Equações

Restrições de Menor ou Igual

$$\sum_{j-1}^{n} a_{ij} \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \geq \infty \end{cases}$$

Relação Entre Inequações e Equações

Restrições de Menor ou Igual

$$\sum_{j-1}^{n} a_{ij} \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \geq \infty \end{cases}$$

Restrições de Maior ou Igual

$$\sum_{j-1}^{n} a_{ij} \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \geq \infty \end{cases}$$

Tratamento de Limites das Variáveis

Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x_j' \Rightarrow x_j = x_j' + LB \\ x_j' \geq 0 \end{cases}$$

Tratamento de Limites das Variáveis

Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x_j' \Rightarrow x_j = x_j' + LB \\ x_j' \geq 0 \end{cases}$$

Limite Superior ou *Upper Bound*

$$x_j \leq UB \Leftrightarrow \begin{cases} UB - x_j = x_j' \Rightarrow x_j = UB - x_j' \\ x_j' \geq 0 \end{cases}$$

Tratamento de Limites das Variáveis

Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x_j' \Rightarrow x_j = x_j' + LB \\ x_j' \geq 0 \end{cases}$$

Limite Superior ou *Upper Bound*

$$x_j \leq UB \Leftrightarrow \begin{cases} UB - x_j = x_j' \Rightarrow x_j = UB - x_j' \\ x_j' \geq 0 \end{cases}$$

$$-\infty \leq x_j \leq \infty \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = x_j' - x_j'' \\ x_j' \geq 0 \text{ e } x_j'' \geq 0 \end{cases}$$

Observações

- As restrições do problema expressam limites que devem ser respeitados
- O algoritmo de resolução encontra a solução ótima no espaço de soluções compatíveis com o problema de PL, a saber:
  - Os pontos pertencentes a região factível correspondem aos valores das variáveis que atendem ao conjunto de restrições;
  - Cada restrição poderá ser de igualdade ou desigualdade
  - As restrições de não-negatividade das variáveis constituem condição necessária à aplicação do algoritmo de resolução do problema de PL;
  - Embora isso normalmente ocorra em decorrência da natureza da variável dentro do modelo, pode haver situações em que as variáveis são irrestritas, isto é, podem assumir qualquer valor real (nestes casos, realizar substituição de variáveis).

Softwares de Otimização

MATLAB

COIN|OR

CPLEX

AMPL

GAMS

R

GUROBI OPTIMIZATION

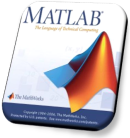
LINGO

python

julia

FICO Xpress Optimization Suite

Toolbox de Programação Linear do Matlab



linprog

Solve linear programming problems

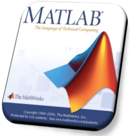
Linear programming solver

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \leq b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \leq x \leq ub. \end{cases}$$

f, x, b, beq, lb, and ub are vectors, and A and Aeq are matrices.

Toolbox de Programação Linear do Matlab



linprog

Solve linear programming problems

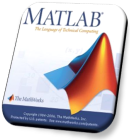
Linear programming solver

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_{x} f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \leq b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \leq x \leq ub. \end{cases}$$

f, x, b, beq, lb, and ... tors, and A and Aeq are matrices.

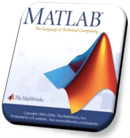
Toolbox de Programação Linear do Matlab



Syntax

```
x = linprog(f,A,b)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)
x = linprog(problem)
[x,fval] = linprog(___)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(___)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(___)
```

Toolbox de Programação Linear do Matlab



Parâmetros de Entrada
f: Vetor de Custos
A: Matriz dos coeficientes das restrições de desiguadade
b: Termos constantes das restrições de desigualdade
Aeq: Matriz dos coeficientes das restrições de igualdade
Beq: Termos constantes das restrições de igualdade
lb: Vetor com os limites inferiores das variáveis
ub: Vetor com os limites superiores das variáveis
options: Configuração do comportamento do solver

Toolbox de Programação Linear do Matlab

Parâmetros de Saída
x: Vetor os valores ótimos das variáveis
fval: Valor da Função Objetivo
exitflag: Código detalhando processo de convergência:
(1) Função convergiu para a solução x
(0) Número de iterações excedido. options.MaxIterations
(-2) Não foi encontrato um x viável
(-3) Problema é ilimitado
(-4) Encontrada divisão por zero durante processo
(-5) Tanto o primal quando dual são inviáveis
(-7) Direção de busca tornou-se pequena demais.
output: Informações sobre do processo de otimização
lambda: Multiplicadores de lagrange da solução

Problema do Milho e da Aveia

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

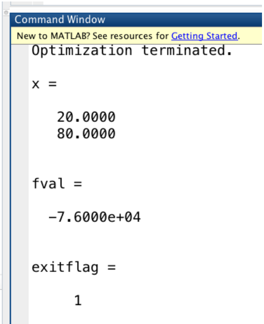
$\max Z = 600x_1 + 800x_2$	Função Objetivo
sujeito a	
$x_1 + x_2 \leq 100$	Área Cultivo
$3x_1 + 2x_2 \leq 240$	Mão de Obra
$x_1 \leq 60$	Produção Cereal **A**
$x_2 \leq 80$	Produção Cereal **B**
$x_1, x_2 \geq 0$	Produção

Confirmar o resultado da Análise Gráfica com o Matlab !

Problema do Milho e da Aveia

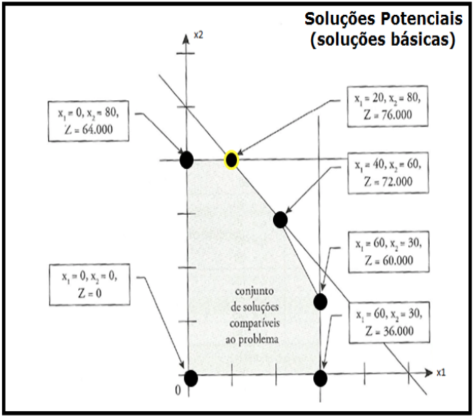
Programa em Matlab

```
clear all; close all; clc;
f = [-600 -800]; A = [1 1; 3 2]; b = [100; 240];
Aeq=[]; beq=[]; LB=[0 0]; UB=[60 80];
[x, fval, exitflag] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB)
```



Análise Gráfica x Matlab

ANÁLISE GRÁFICA- SOLUÇÃO



MATLAB - SOLUÇÃO

```
X1 =

   20.0000


X2 =

   80.0000


FVAL =

 -7.6000e+004


EXITFLAG =

     1
```

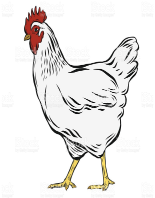
Exemplo Aviário

O problema

O dono de um aviário precisa fabricar uma ração especial para as suas aves, de forma a atender diversas exigências alimentares. A produção desejada de ração é de 90kg, e a mistura deve ser formada por dois ingredientes básicos: milho e farelo de arroz, que custam \$0,90 e \$0,30 por kg respectivamente. Além disso, sabe-se que a ração precisa ter pelo menos 7% de proteína e 3% de fibra na sua composição, de forma a atender as necessidades das aves. A partir da tabela abaixo, com a composição percentual de fibra e proteína do milho e do farelo de arroz, pede-se formular um problema de programação linear para atender às necessidades diárias a um custo mínimo.

Tabela: Composição de Cada Ingrediente

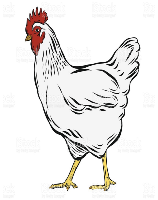
Ingredientes	**Proteína**	**Fibra**
Milho	9 %	2 %
Farelo de Arroz	5 %	6 %



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$
\begin{array}{rcl}
\min Z = 0.9x_M + 0.3x_F & \rightarrow & \text{Minimizar Custo} \\
\text{sujeito a} & & \\
1x_M + 1x_F = 90 & \rightarrow & \text{Produção} \\
0.09x_M + 0.05x_F \geq 0.07(x_M + x_F) & \rightarrow & \text{Proteína} \\
0.02x_M + 0.06x_F \geq 0.03(x_M + x_F) & \rightarrow & \text{Fibra} \\
x_M, x_F \geq 0 & \rightarrow & \text{Canalização}
\end{array}
$$

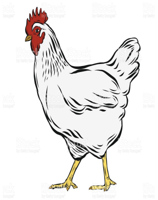


Confirmar o resultado da Análise Gráfica com o Matlab !

Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\begin{aligned} \min Z = 0.9x_M + 0.3x_F & \quad \rightarrow \quad \text{Minimizar Custo} \\ \text{sujeito a} & \\ 1x_M + 1x_F = 90 & \quad \rightarrow \quad \text{Produção} \\ 0.02x_M - 0.02x_F \geq 0 & \quad \rightarrow \quad \text{Proteína} \\ -0.01x_M + 0.03x_F \geq 0 & \quad \rightarrow \quad \text{Fibra} \\ x_M, x_F \geq 0 & \quad \rightarrow \quad \text{Canalização} \end{aligned}$$

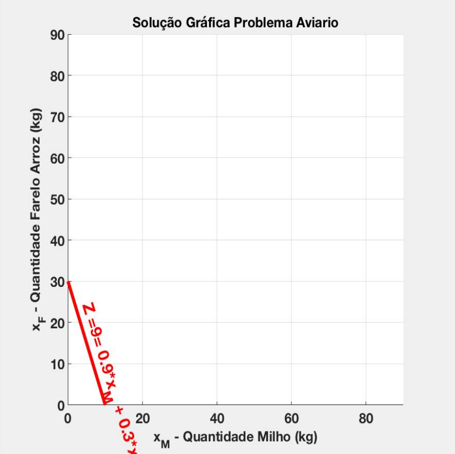


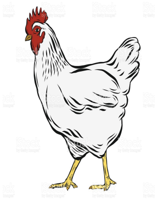
Confirmar o resultado da Análise Gráfica com o Matlab !

Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

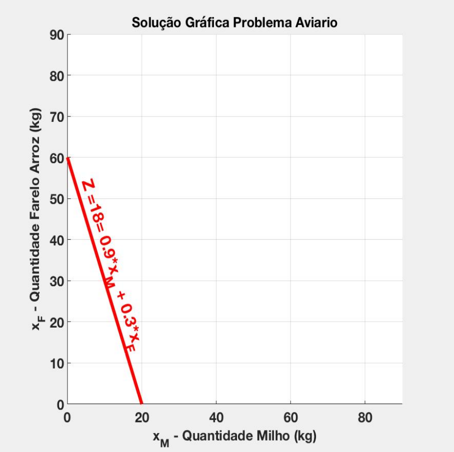


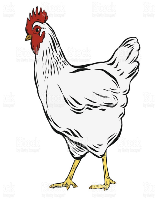


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

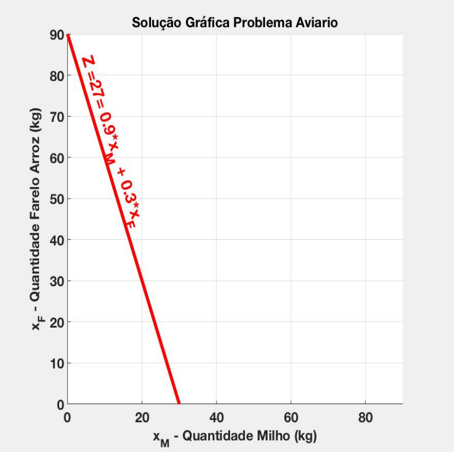


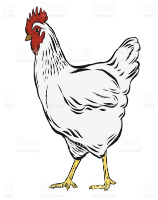


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

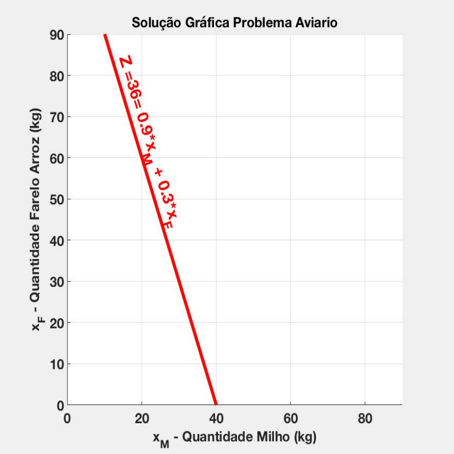


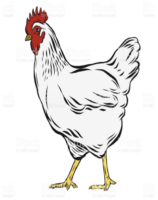


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

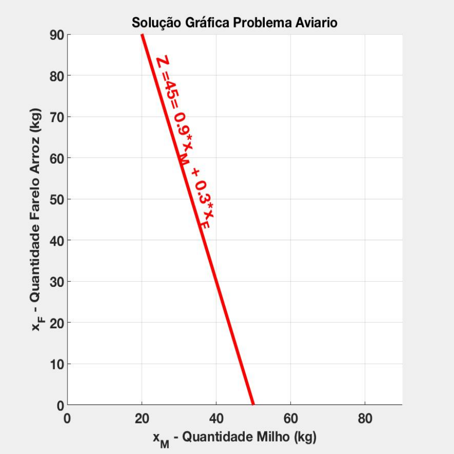


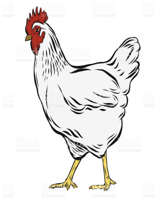


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

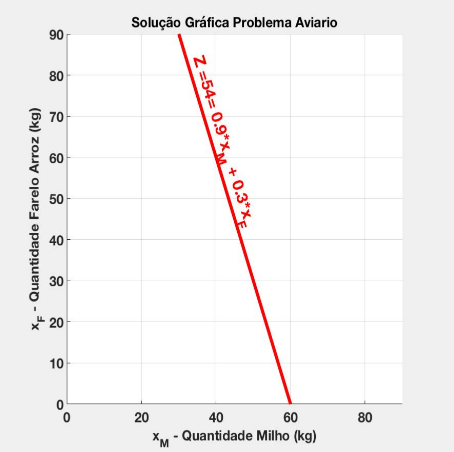


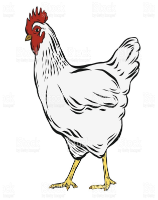


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

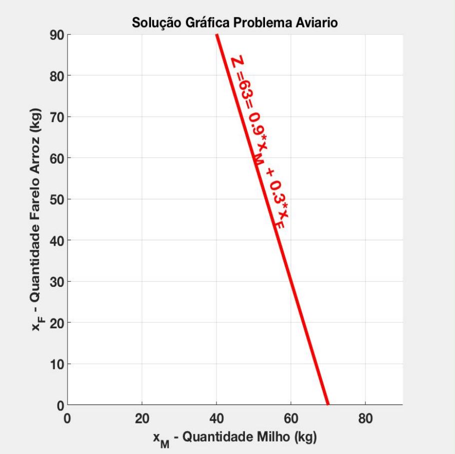


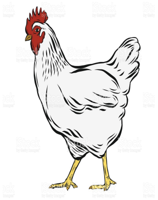


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

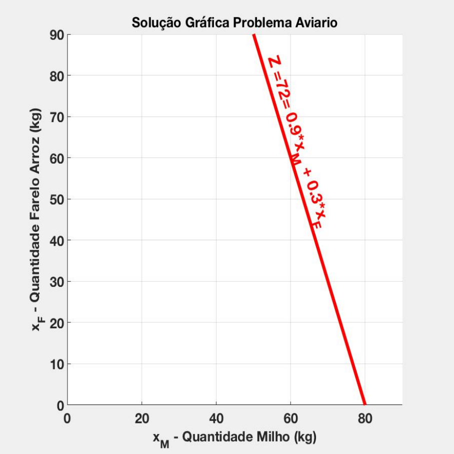


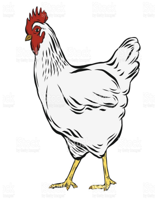


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

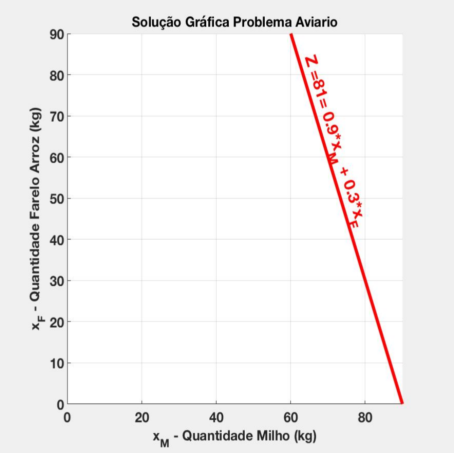


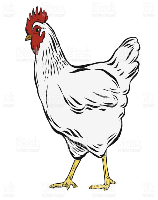


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Função Objetivo

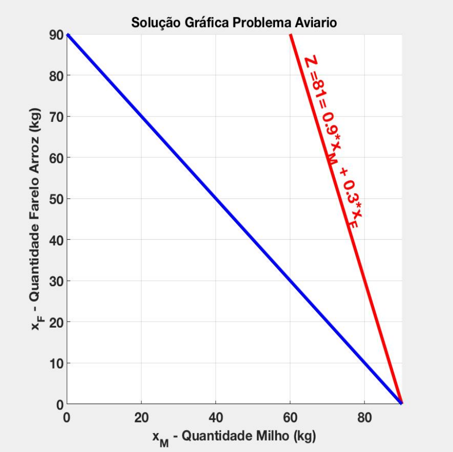


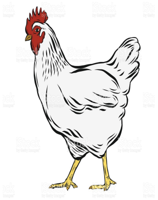


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Restrição de Igualdade: $1x_M + 1x_F = 90$

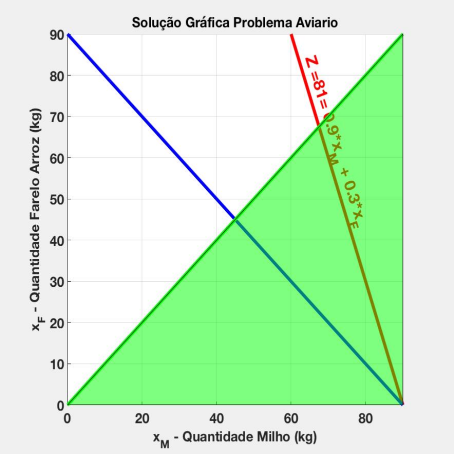


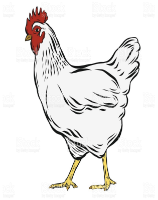


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Restrição Proteína: $0.02x_M - 0.02x_F \geq 0$

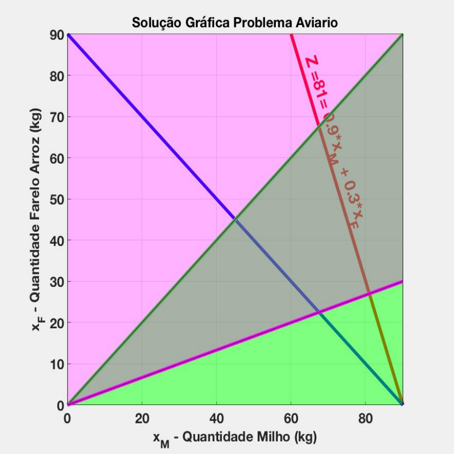


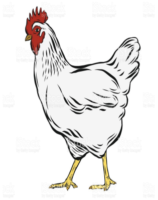


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Restrição Fibra: $-0.01x_M + 0.03x_F \geq 0$

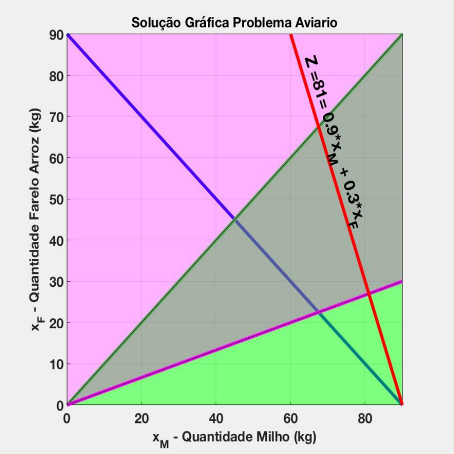


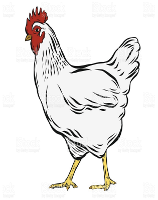


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Minimizando Função Objetivo

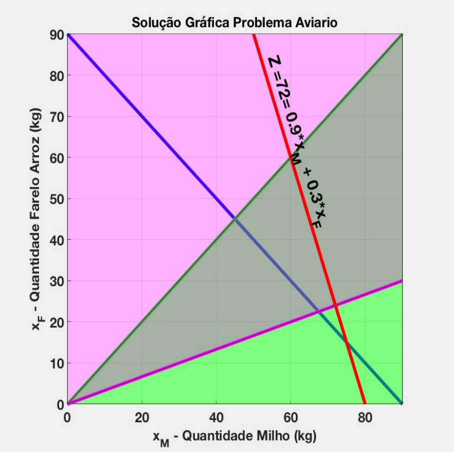


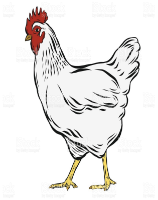


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Minimizando Função Objetivo

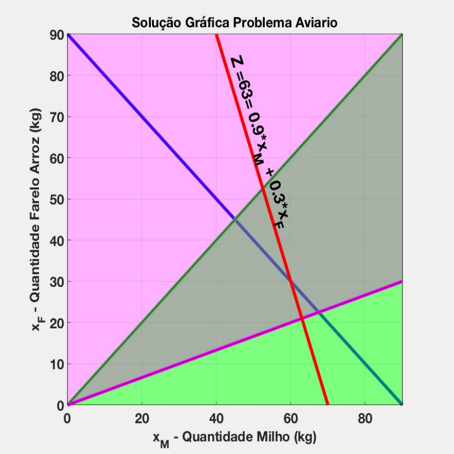


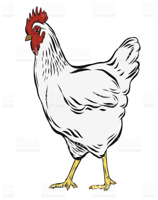


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Minimizando Função Objetivo

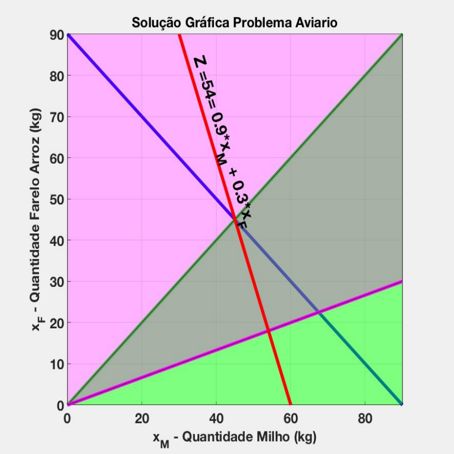


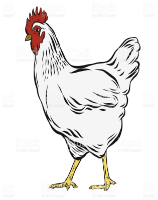


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Minimizando Função Objetivo

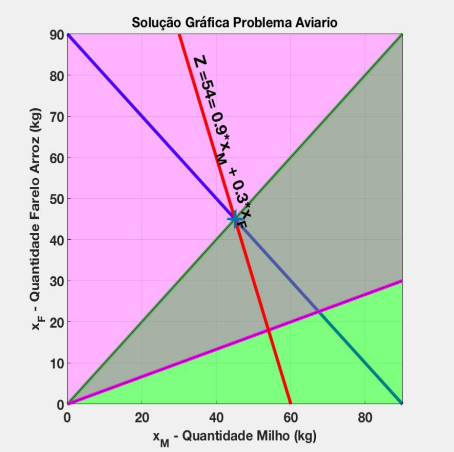


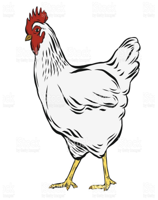


Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

Ponto Ótimo Global





Exemplo Aviário

Programa em Matlab

```
clear all; close all; clc;
f = [0.9 0.3]; A = [-0.02 0.02;0.01 -0.03];
B = [ 0; 0]; Aeq = [ 1 1 ]; Beq = 90;
[x, fval] = linprog(f,A,B,Aeq,Beq)
```

Command Window

New to MATLAB? See resources for Getting Started.

```
Optimization terminated.

x =

   45.0000
   45.0000


fval =

   54.0000

>>
```

Fim