

Programação Linear

Prof. André Luís Marques Marcato

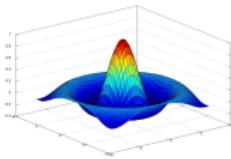
► andre.marcato@ufjf.edu.br

Universidade Federal de Juiz de Fora



Engenharia - UFJF

Primeiro Semestre de 2018



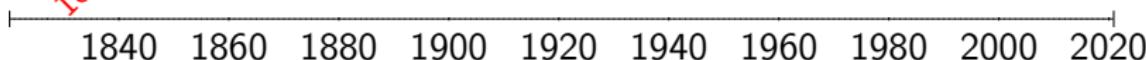
Agenda da Apresentação

- 1 Introdução
 - Histórico
 - Modelagem Matemática
 - Exemplos
- 2 Solução Gráfica
 - Função Objetivo, Região Viável, Análise de Sensibilidade
- 3 Formulação Matricial
 - c , A , B , A_{eq} , B_{eq} , lowerbound, upper bound
- 4 Mais Exemplos
 - Aviário
 - Produção
 - Nutrição
 - Serralheria Tabajara
 - Inviável

Histórico



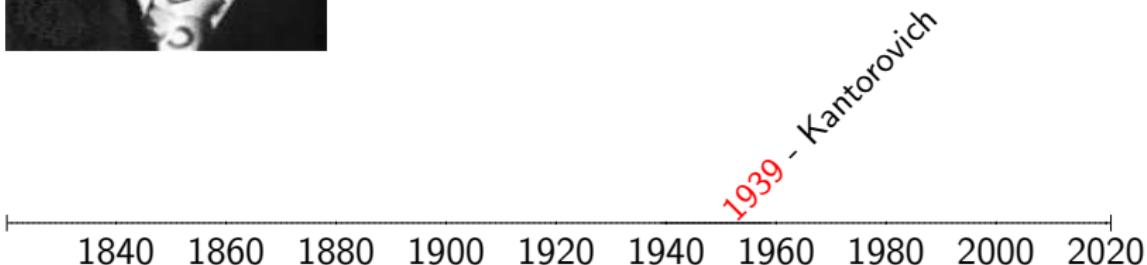
Jean Baptiste Joseph Fourier (matemático Francês). Ele publicou um trabalho sobre a resolução de sistemas de equações lineares. Este trabalho é considerado o primeiro sobre programação linear.



Histórico



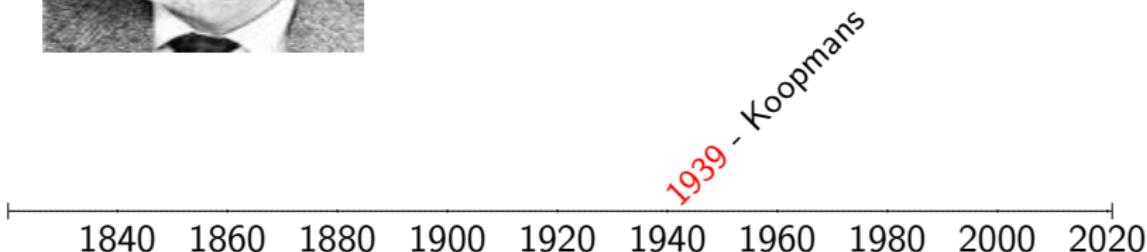
Leonide Kantorovich (matemático e economista Russo). Formulou e resolveu um problema de programação linear, mas seu trabalho permaneceu desconhecido até 1959.



Histórico



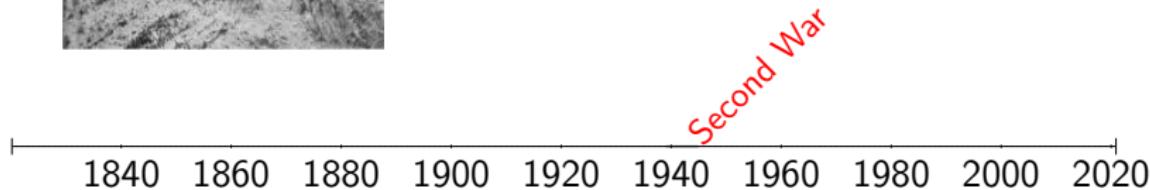
O termo programação linear foi criado pelo economista Holandês Tjalling Koopmans em uma conversa com Datzig na California em 1948. Ele formulou modelos de programação linear aplicados em economia clássica.



Histórico



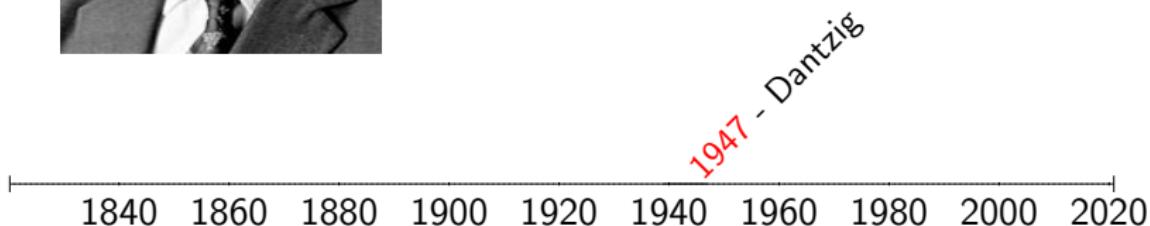
Durante a Segunda Guerra Mundial, modelos de programação linear foram projetados e resolvidos em aplicações voltadas para planejamento militar.



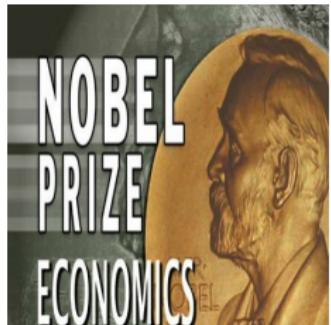
Histórico



Em 1947, George Dantzig desenvolveu o Método Simplex, propondo a Formulação Geral de Problemas de Programação Linear. Ele trabalhava como matemático consultor para o Pentágono.

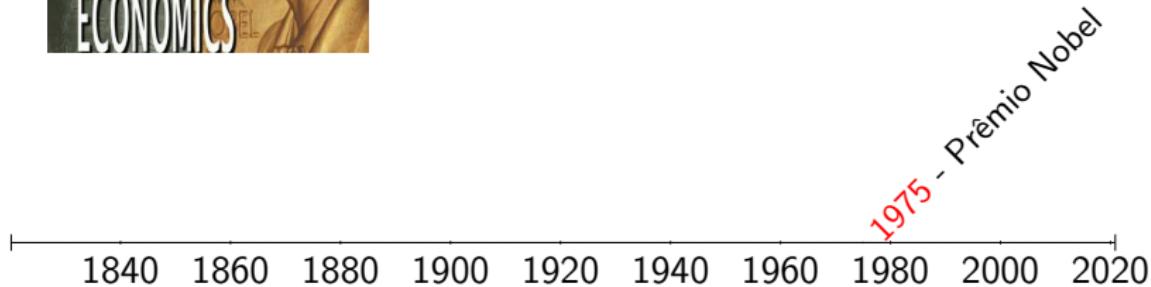


Histórico



Em 1975, Kantorovich e Koopmans receberam o Prêmio Nobel em Ciências Econômicas pelo trabalho desenvolvido na área de programação linear.

1975 - Prêmio Nobel



Histórico



Atualmente, problemas de prog. linear são resolvidos 1.000.000 de vezes mais rapidamente que 1985. Além disto, problemas com mais de 1.000.000 variáveis e restrições são prontamente resolvidos.

1840 1860 1880 1900 1920 1940 1960 1980 2000 2020

2018

Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

→ Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.

Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

- Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.
 - Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.

Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

- Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.
 - Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.
 - Manter a precisão numérica para a obtenção de resultados significativos.

Programação Linear - Histórico

Os maiores problemas na resolução de PL na época

- Achar um ponto inicial, ponto de partida do algoritmo.
 - Reduzir a área de memória e o número de operações aritméticas sem causar limitações de uso.
 - Manter a precisão numérica para a obtenção de resultados significativos.

A partir de 1957, todos estes aspectos foram solucionados!

Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- Identificação das variáveis;

Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- Identificação das variáveis;
- Identificação dos objetivos.

Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- Identificação das variáveis;
 - Identificação dos objetivos.
 - Identificação dos aspectos restritivos.

Programação Linear - Modelagem Matemática

Aspectos importantes para o levantamento do modelo:

- Identificação das variáveis;
 - Identificação dos objetivos.
 - Identificação dos aspectos restritivos.

O modelo é uma tentativa de representação da realidade e sua complexidade depende do grau de exatidão requerido.

Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1

Um agricultor deseja cultivar duas variedades de cereais, **A** e **B**, em um área restrita a 100 ares ($100m^2$). Sendo que:

- 1 are do cereal **A** produz 8 sacas
- 1 are do cereal **B** produz 10 sacas

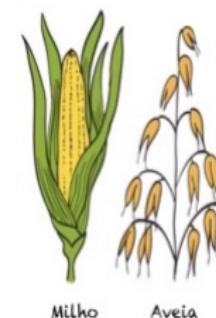
Para o plantio, cada cereal:

- Tipo **A** precisa de **3 homens-hora de trabalho por are**
- Tipo **B** precisa de **2 homens-hora de trabalho por are**

sendo que se dispõe até 240 homens-hora de trabalho para o cultivo e o custo da mão de obra é de \$200 (unidades monetárias) por homem-hora.

A demanda máxima é limitada pelo mercado a 480 sacas do cereal tipo **A**, vendido a \$150/saca, e 800 sacas do cereal **B**, vendido a \$120/saca.

O agricultor deseja otimizar a área de cultivo de forma a **MAXIMIZAR O LUCRO**.

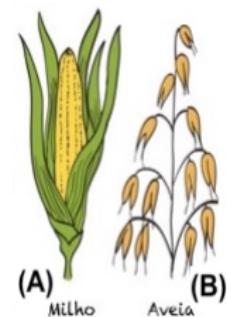


Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Variáveis do Problema

As variáveis estão relacionadas ao tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo do cereal tipo **A** e **B**. Logo podemos definir;

- x_1 : área destinada ao plantio do cereal Tipo **A**
- x_2 : área destinada ao plantio do cereal Tipo **B**



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo A e B.

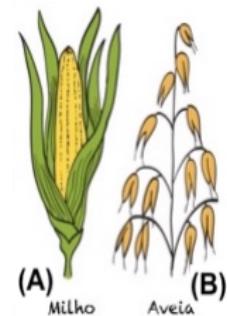


Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo A e B.

$$FOB = \text{MAX LUCRO} = \text{MAX RECEITAS} - \text{CUSTOS}$$



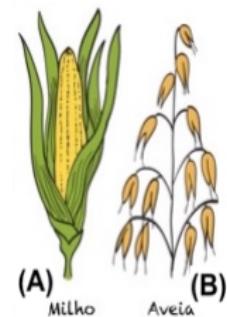
Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo A e B.

$$FOB = \text{MAX LUCRO} = \text{MAX RECEITAS} - \text{CUSTOS}$$

- x_1 : Receitas: $receitas = 1200 \frac{(150 \times 8)}{x_1} + 1200 \frac{(120 \times 10)}{x_2}$



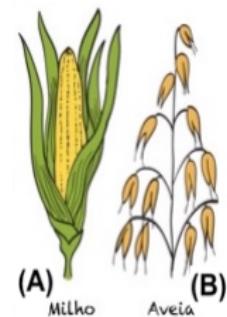
Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo A e B.

$$FOB = \text{MAX LUCRO} = \text{MAX RECEITAS} - \text{CUSTOS}$$

- x_1 : Receitas: $receitas = 1200 \frac{(150 \times 8)}{x_1} + 1200 \frac{(120 \times 10)}{x_2}$
- x_2 : Custos: $custos = 600 \frac{(200 \times 3)}{x_1} + 400 \frac{(200 \times 2)}{x_2}$



Programação Linear - Modelagem Matemática

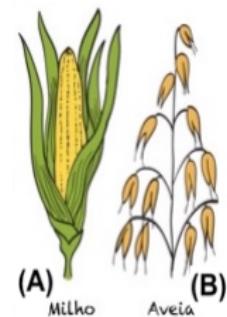
Exemplo 1 - A Função Objetivo

Maximizar o lucro através da determinação ótima do tamanho do terreno que será utilizado para o cultivo dos cereais tipo A e B.

$$FOB = \text{MAX LUCRO} = \text{MAX RECEITAS} - \text{CUSTOS}$$

- x_1 : Receitas: $receitas = 1200 \frac{(150 \times 8)}{x_1} + 1200 \frac{(120 \times 10)}{x_2}$
- x_2 : Custos: $custos = 600 \frac{(200 \times 3)}{x_1} + 400 \frac{(200 \times 2)}{x_2}$

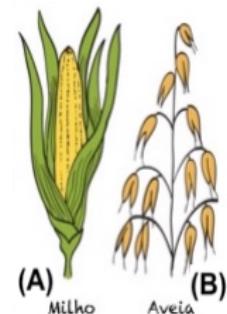
- $FOB = \max(600x_1 + 800x_2)$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares

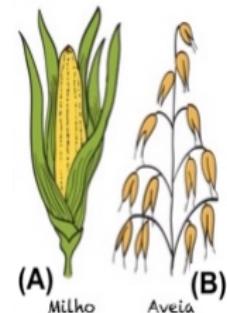


Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares

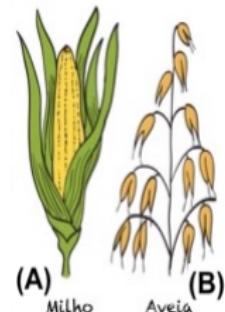
- $x_1 + x_2 \leq 100$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora



Programação Linear - Modelagem Matemática

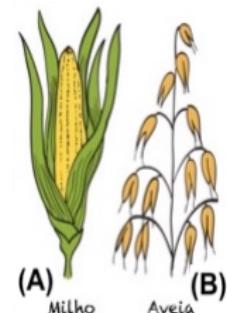
Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares

- $x_1 + x_2 \leq 100$

- Limitações de homem-hora

- $3x_1 + 2x_2 \leq 240$



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

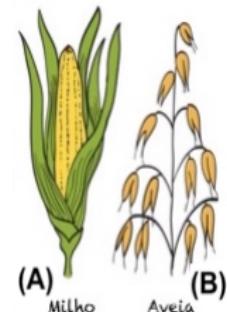
- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares

- $x_1 + x_2 \leq 100$

- Limitações de homem-hora

- $3x_1 + 2x_2 \leq 240$

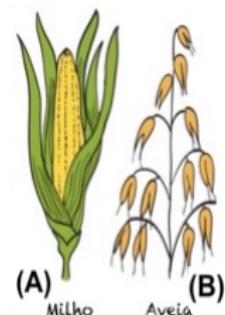
- Limitações devido à demanda de mercado



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

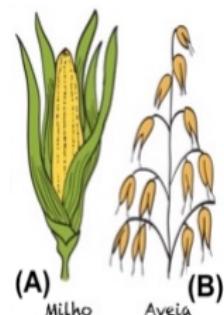
- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações devido à demanda de mercado
 - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

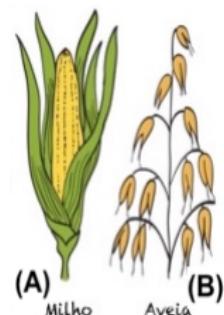
- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações devido à demanda de mercado
 - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**
 - $10x_2 \leq 800$ ou $x_2 \leq 80$ para o cereal tipo **B**



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - As Restrições

- Desta forma a área cultivada pelo cereal tipo **A** mais a área cultivada pelo cereal tipo **B** deve ocupar parte ou toda a área disponível de 100 ares
 - $x_1 + x_2 \leq 100$
- Limitações de homem-hora
 - $3x_1 + 2x_2 \leq 240$
- Limitações devido à demanda de mercado
 - $8x_1 \leq 480$ ou $x_1 \leq 60$ para o cereal tipo **A**
 - $10x_2 \leq 800$ ou $x_2 \leq 80$ para o cereal tipo **B**



Programação Linear - Modelagem Matemática

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$
$$x_1 \leq 60$$
$$x_2 \leq 80$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Função Objetivo

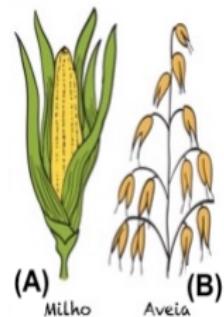
Área Cultivo

Mão de Obra

Produção Cereal A

Produção Cereal B

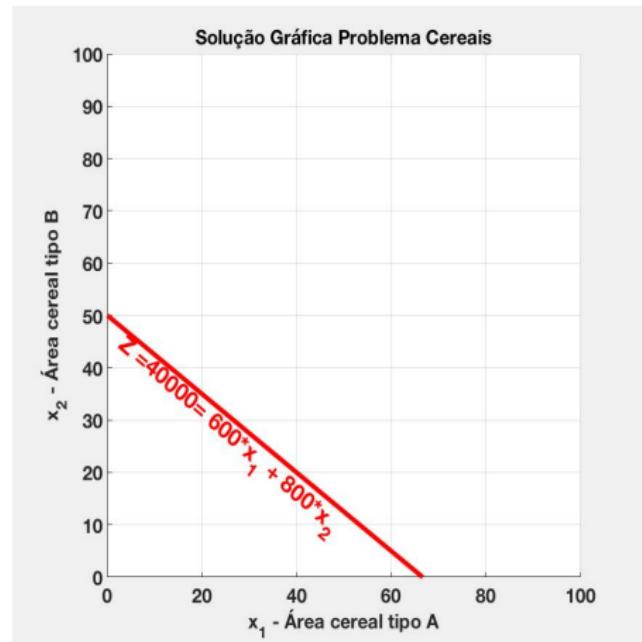
Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

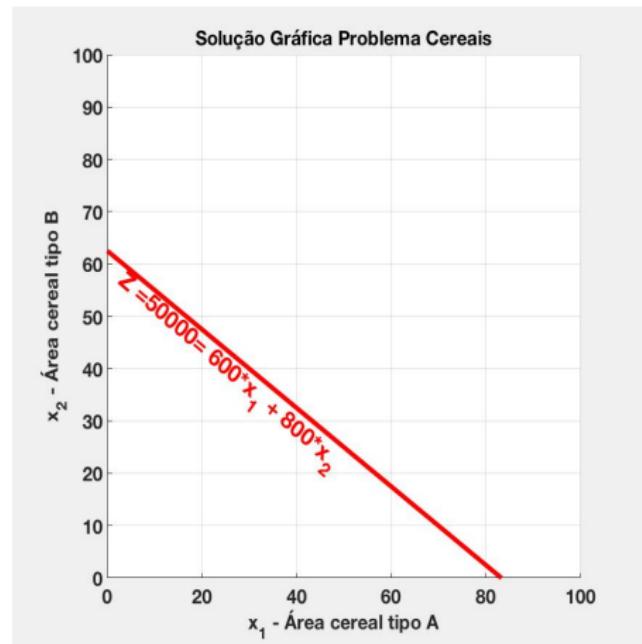
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

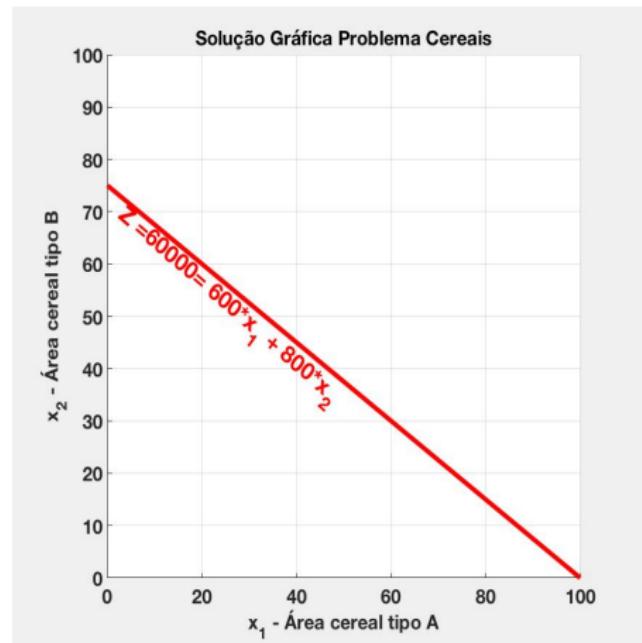
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad | \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

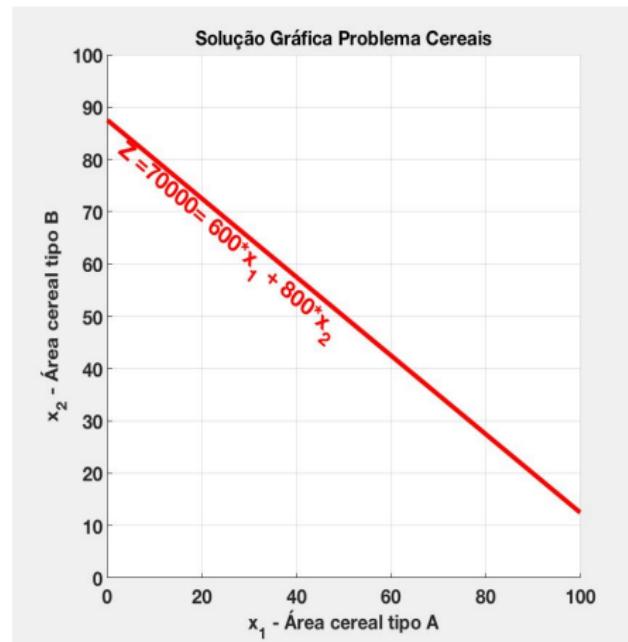
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad | \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

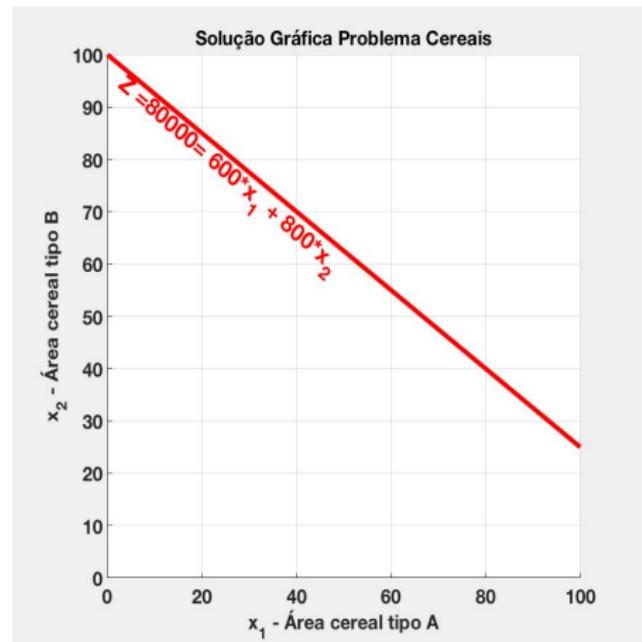
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad | \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

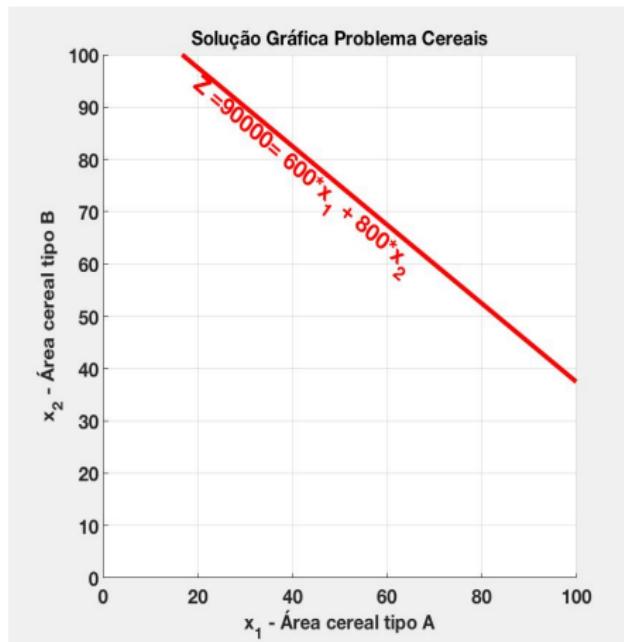
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad | \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

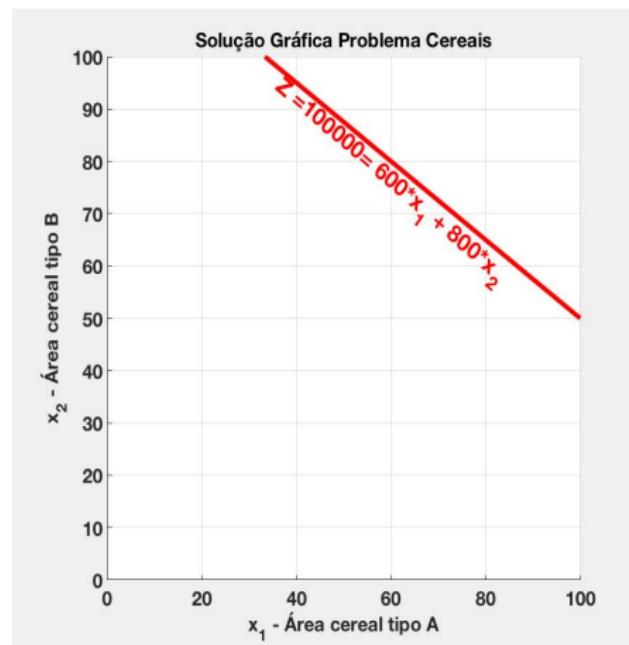
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad | \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

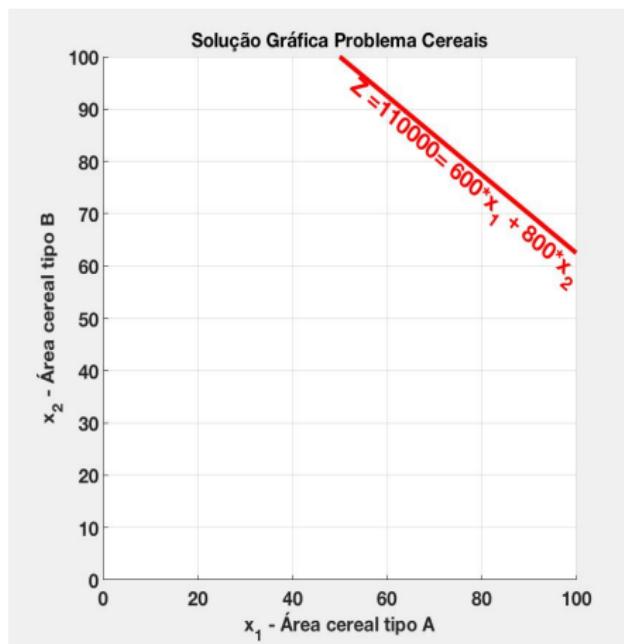
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad | \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

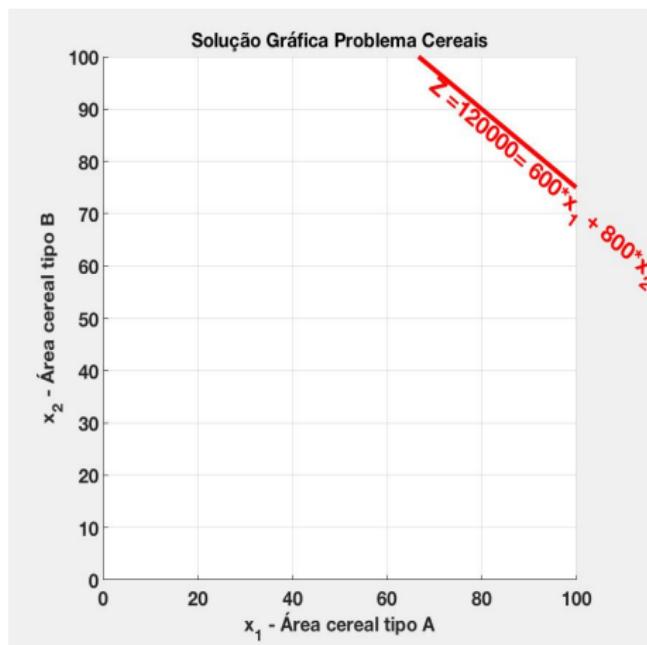
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

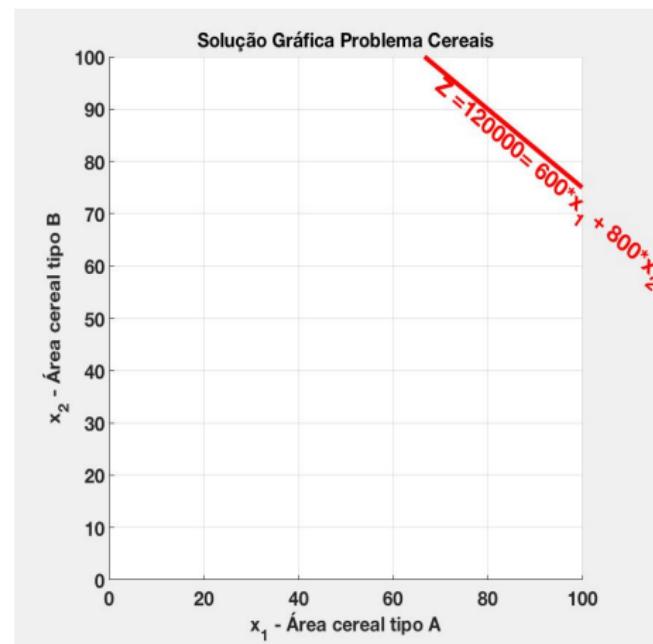
$$\max Z = 600x_1 + 800x_2 \quad \text{Objetivo}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

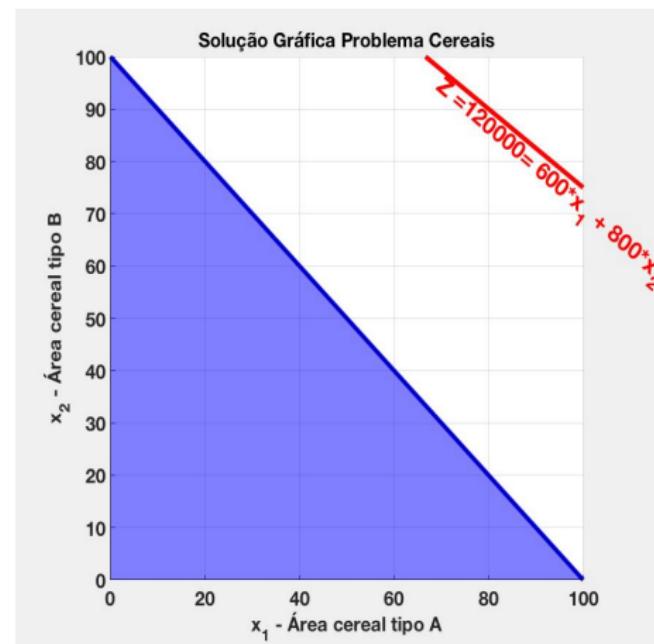
$$\begin{array}{l} \text{max } Z = 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 \leq 100 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Objetivo} \\ \text{Área} \end{array}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{array}{l} \text{max } Z = 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 \leq 100 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Objetivo} \\ \text{Área} \end{array}$$

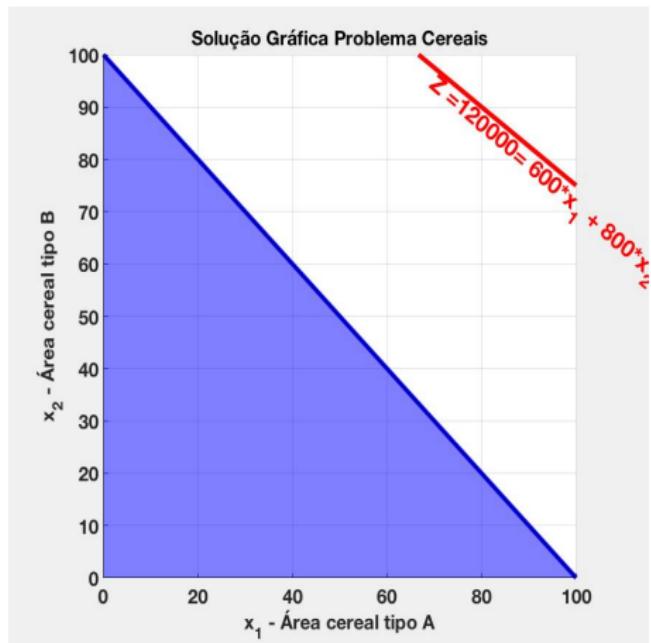


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \end{aligned}$$

Objetivo
Área
Mão de Obra

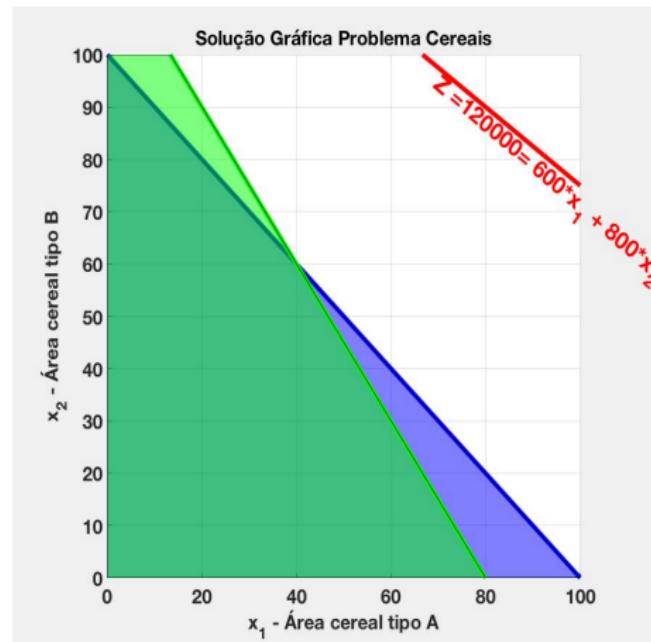


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \end{aligned}$$

Objetivo
Área
Mão de Obra

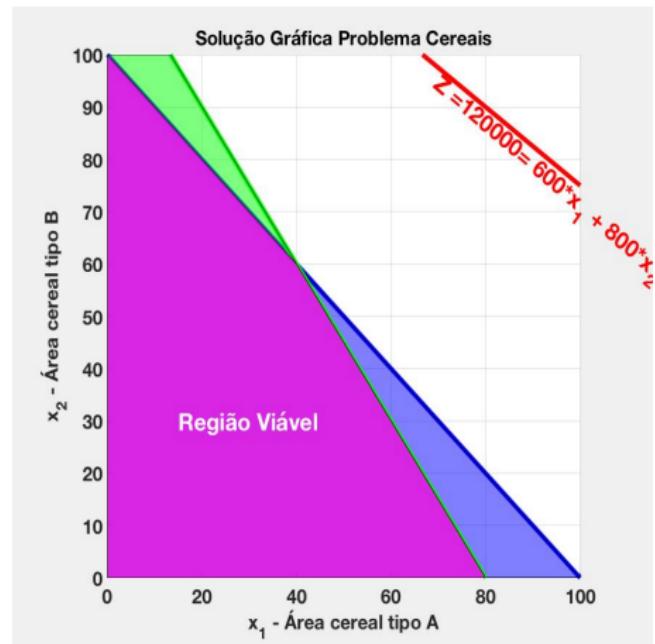


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \end{aligned}$$

Objetivo
Área
Mão de Obra

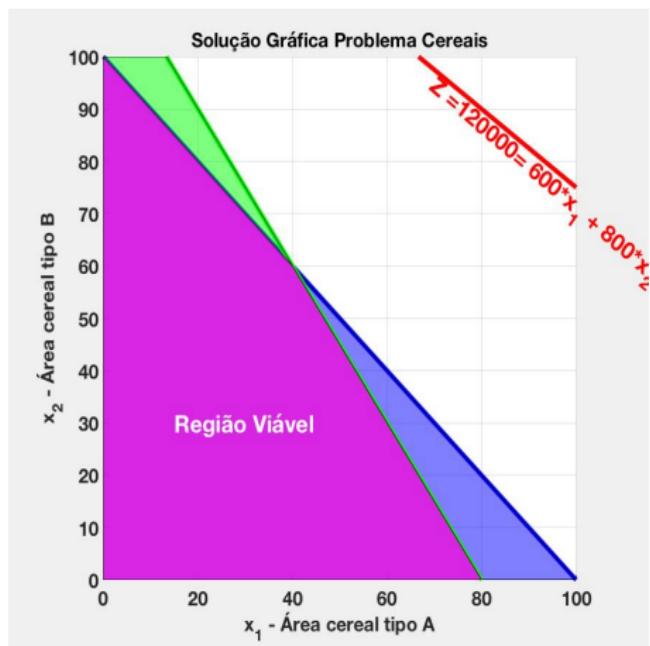


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\ x_1 &\leq 60 \\ x_2 &\leq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Objetivo
Área
Mão de Obra
Produção A
Produção B
Produção

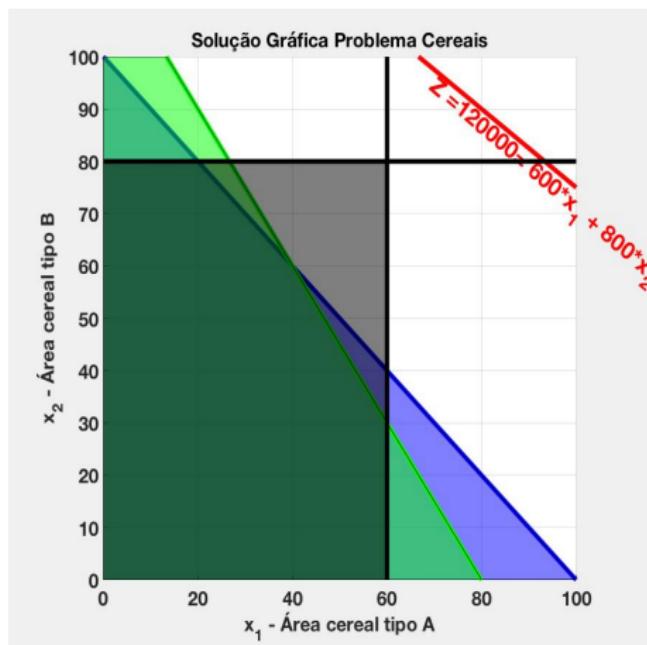


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\ x_1 &\leq 60 \\ x_2 &\leq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Objetivo
Área
Mão de Obra
Produção A
Produção B
Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Objetivo

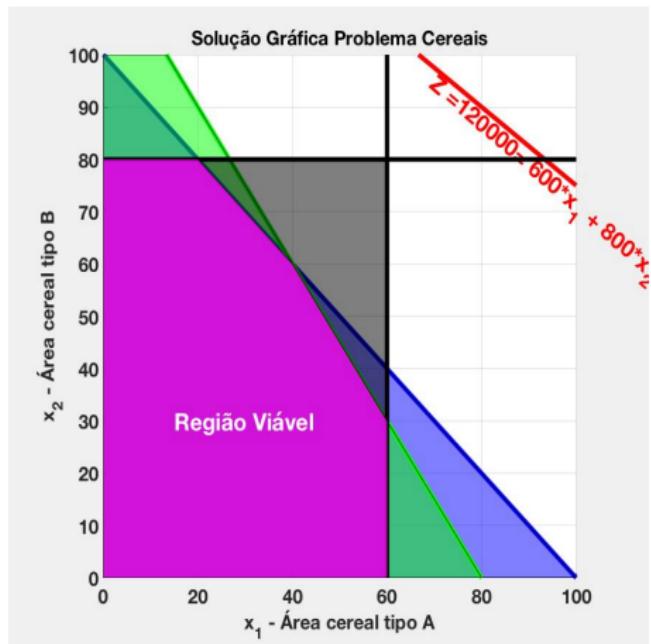
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 100 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\x_1 &\leq 60 \\x_2 &\leq 80 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\ x_1 &\leq 60 \\ x_2 &\leq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Objetivo

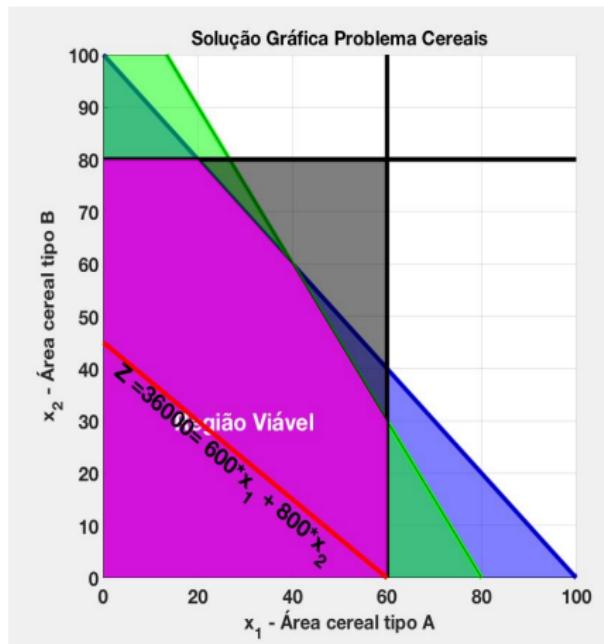
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\ x_1 &\leq 60 \\ x_2 &\leq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Objetivo

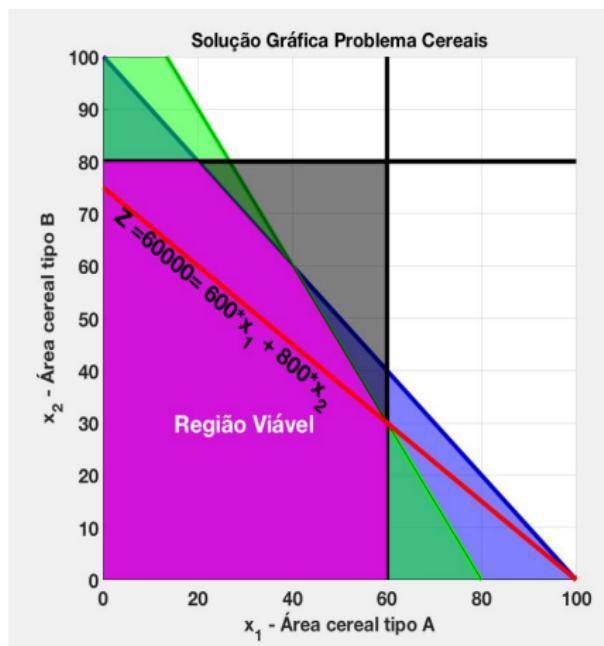
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção

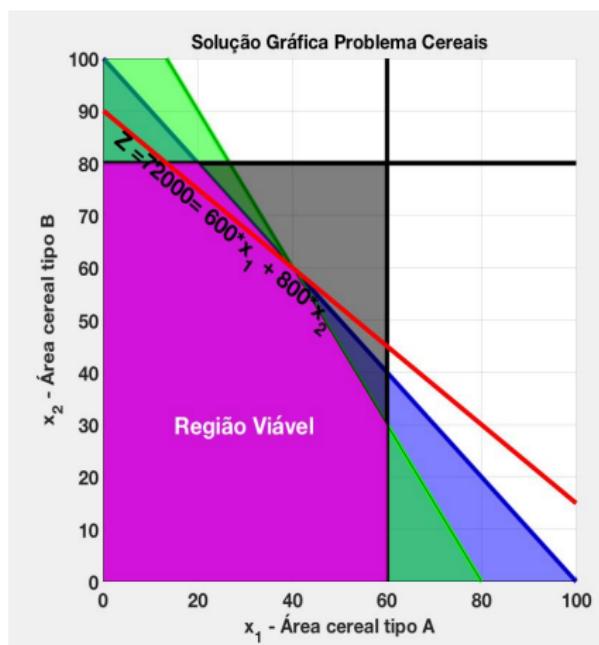


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\ x_1 &\leq 60 \\ x_2 &\leq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Objetivo
Área
Mão de Obra
Produção A
Produção B
Produção

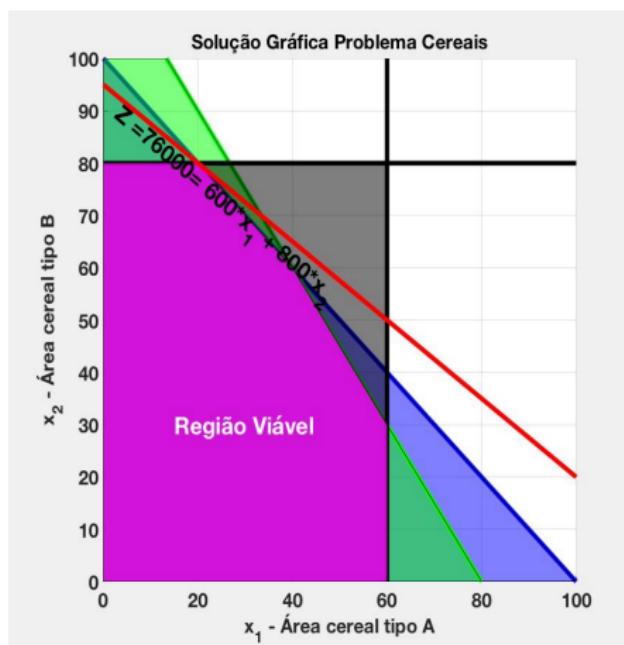


Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\ x_1 &\leq 60 \\ x_2 &\leq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Objetivo
Área
Mão de Obra
Produção A
Produção B
Produção



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

Área

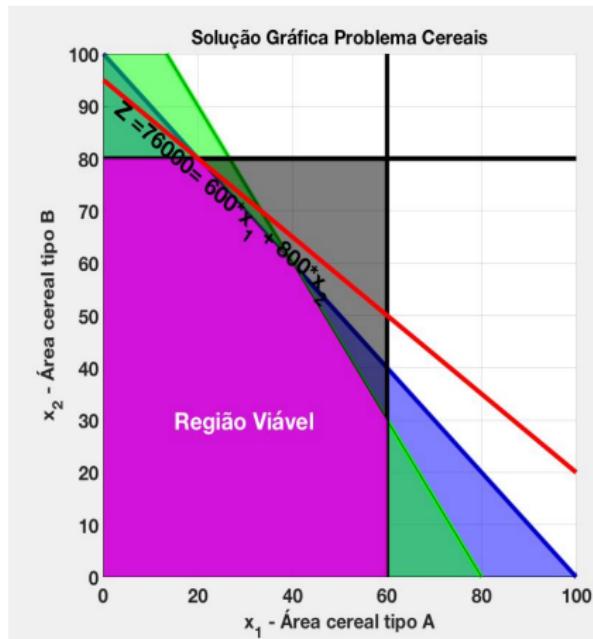
Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção

A Região Viável é a região de solução! É formada pelas restrições.



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

Área

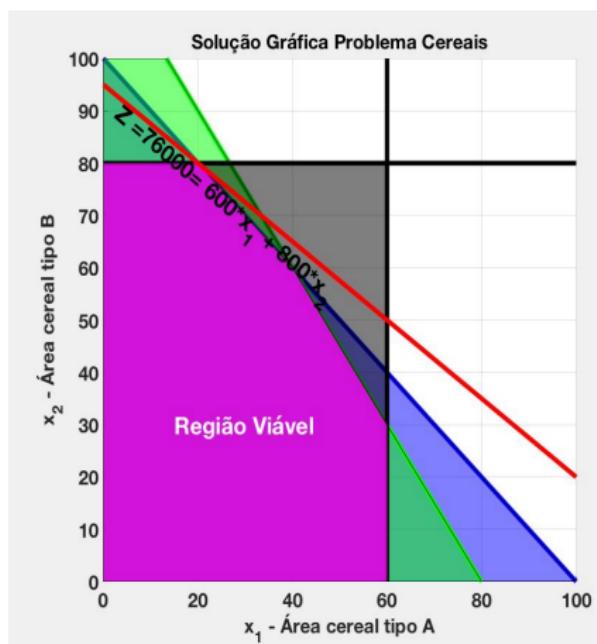
Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção

A solução do problema estará na Região Viável.



Análise Gráfica

Exemplo 1 - Modelo Matemático

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

Área

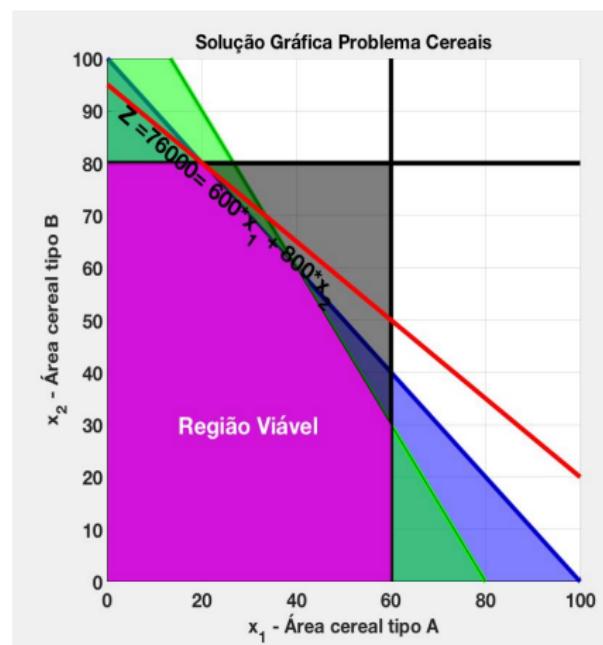
Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção

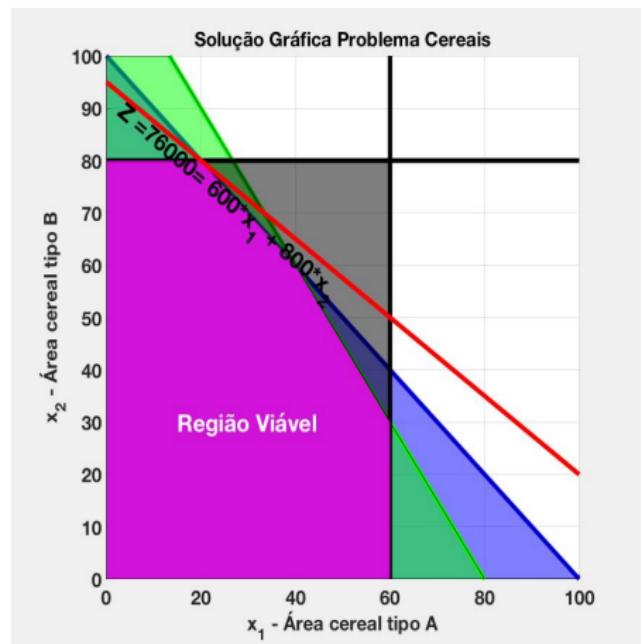
Solução Ótima: $X_1 = 20$ e
 $X_2 = 80$!!!



Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

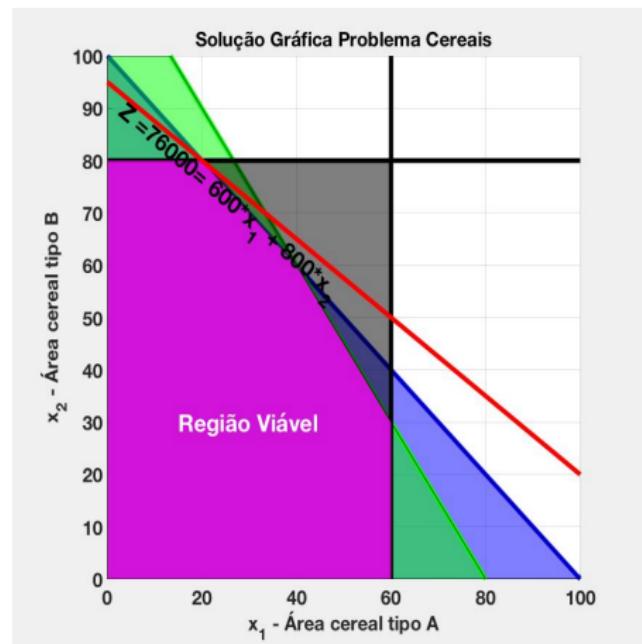


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Primeiro: Determinar a direção do gradiente da função objetivo.



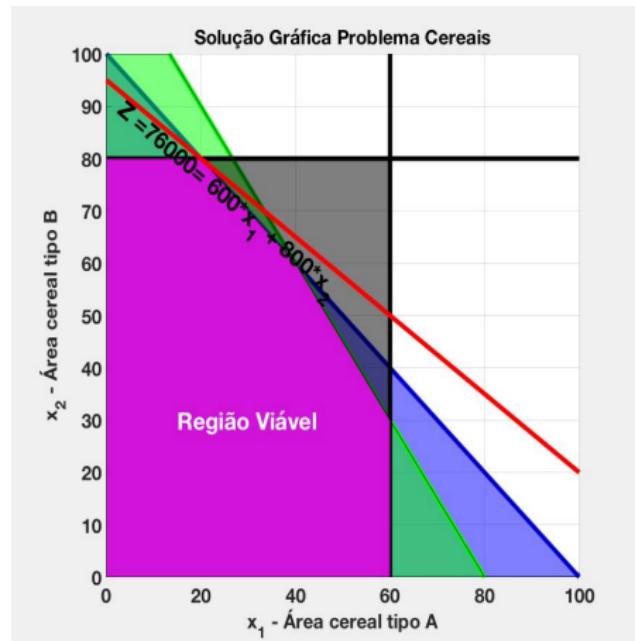
Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Primeiro: Determinar a direção do gradiente da função objetivo.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$



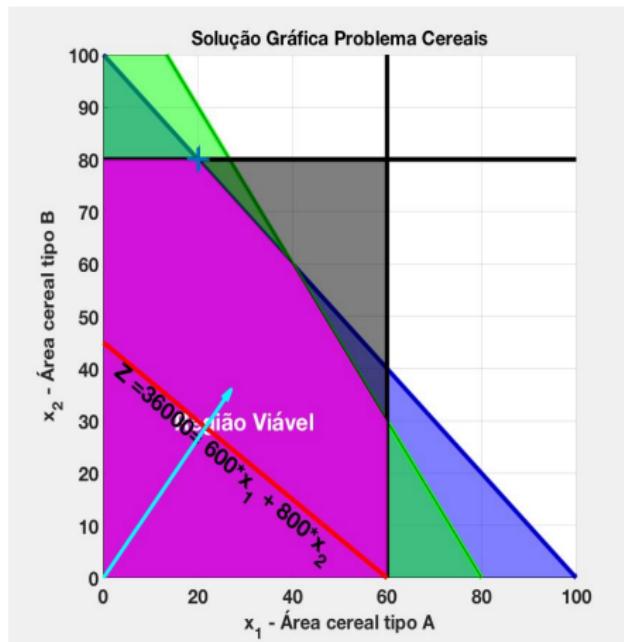
Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Primeiro: Determinar a direção do gradiente da função objetivo.

O gradiente indica a direção do máximo crescimento da função.



Como achar a região viável?

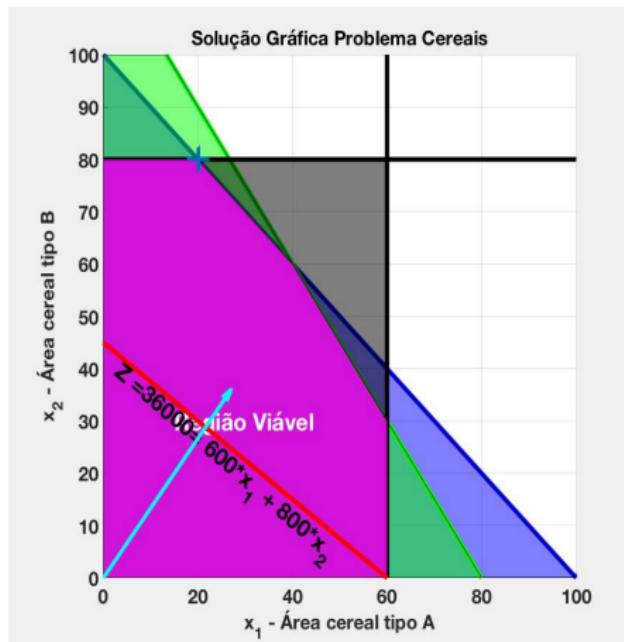
Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Primeiro: Determinar a direção do gradiente da função objetivo.

O gradiente indica a direção do máximo crescimento da função.

$$\nabla Z(x_1, x_2) = (600, 800)$$

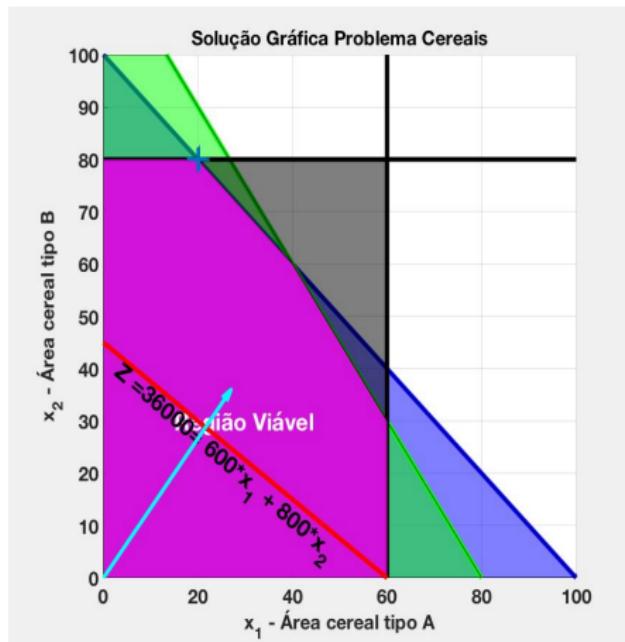


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.

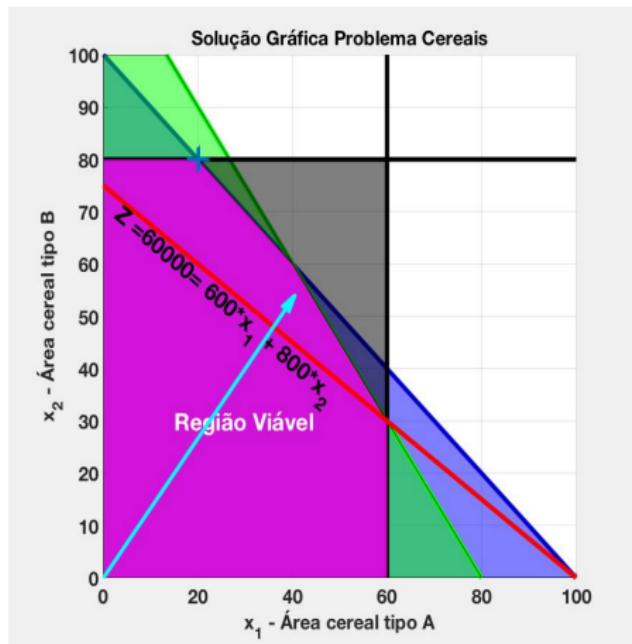


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.

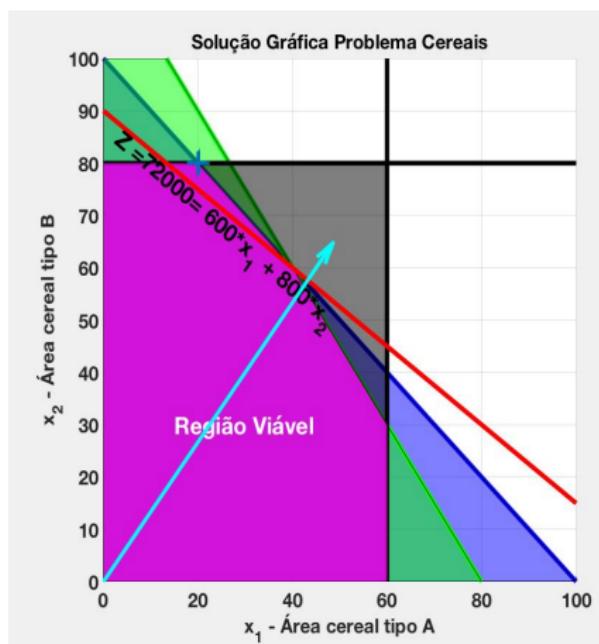


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.

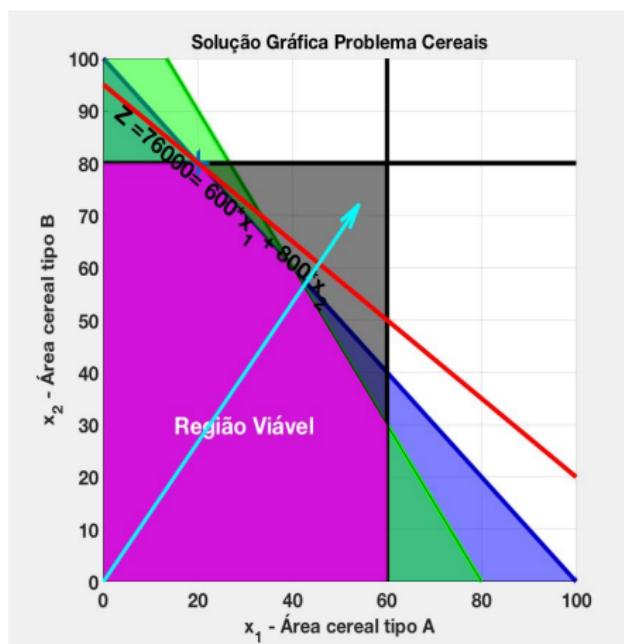


Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.



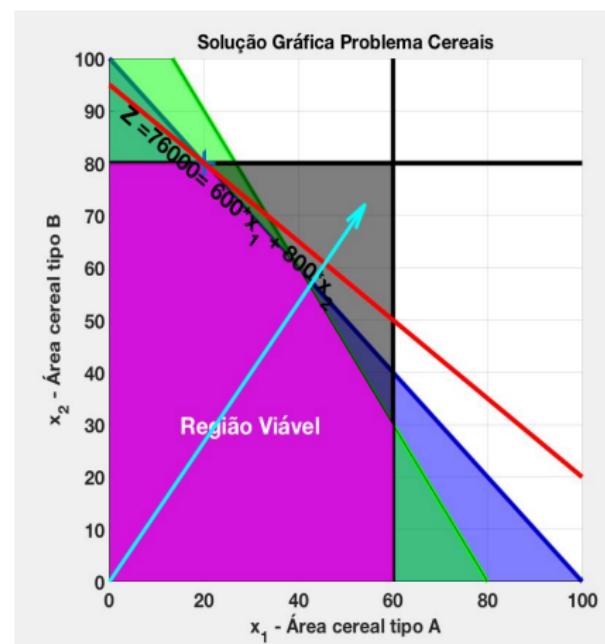
Como achar a região viável?

Gradiente

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

Segundo: Deslocar a função objetivo na direção do gradiente da função, na busca da solução ótima do problema.

Desafio: Existem infinitos pares (x_1, x_2) viáveis!



Análise Gráfica

Teorema Fundamental da Programação Linear

A solução ótima de um problema de programação linear estará sempre em um dos vértices da região de solução do problema em análise.

Análise Gráfica

Teorema Fundamental da Programação Linear

A solução ótima de um problema de programação linear estará sempre em um dos vértices da região de solução do problema em análise.

Os vértices correspondem às interseções de duas ou mais restrições.

Análise Gráfica

Teorema Fundamental da Programação Linear

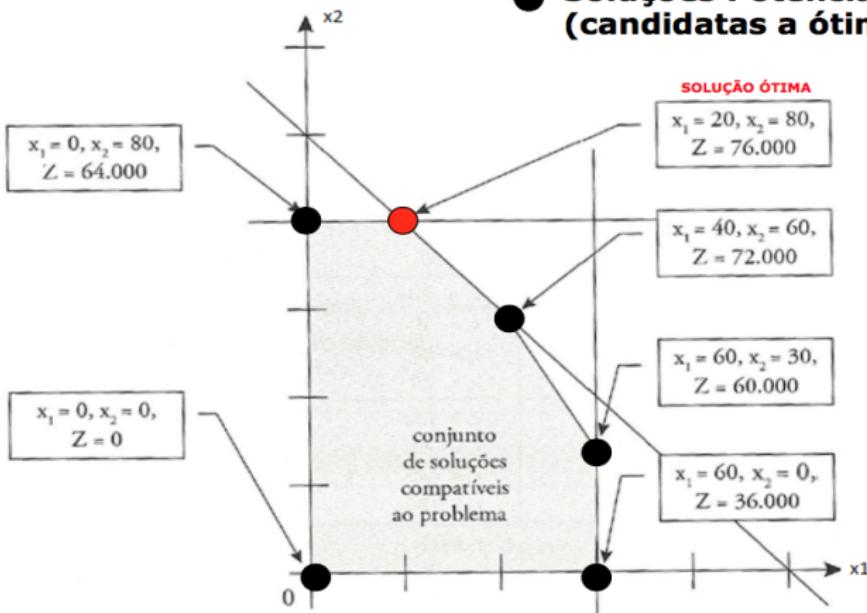
A solução ótima de um problema de programação linear estará sempre em um dos vértices da região de solução do problema em análise. ^a

^a**Múltiplas Soluções ou Solução Ilimitada:** Nestas situações a solução ótima pode não ser um vértice

Os vértices correspondem às interseções de duas ou mais restrições.

Solução Gráfica

● Soluções Potenciais (candidatas a ótima)

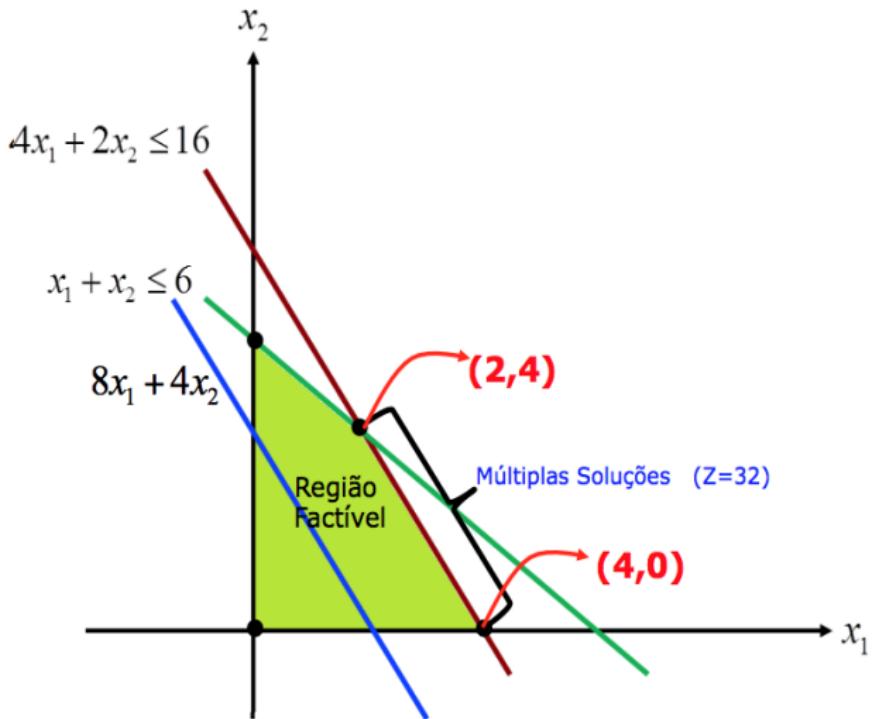


Casos Especiais

- Múltiplas Soluções
- Solução Infactível (Sem Solução)
- Solução Ilimitada
- Solução Degenerada

Casos Especiais - Soluções Múltiplas

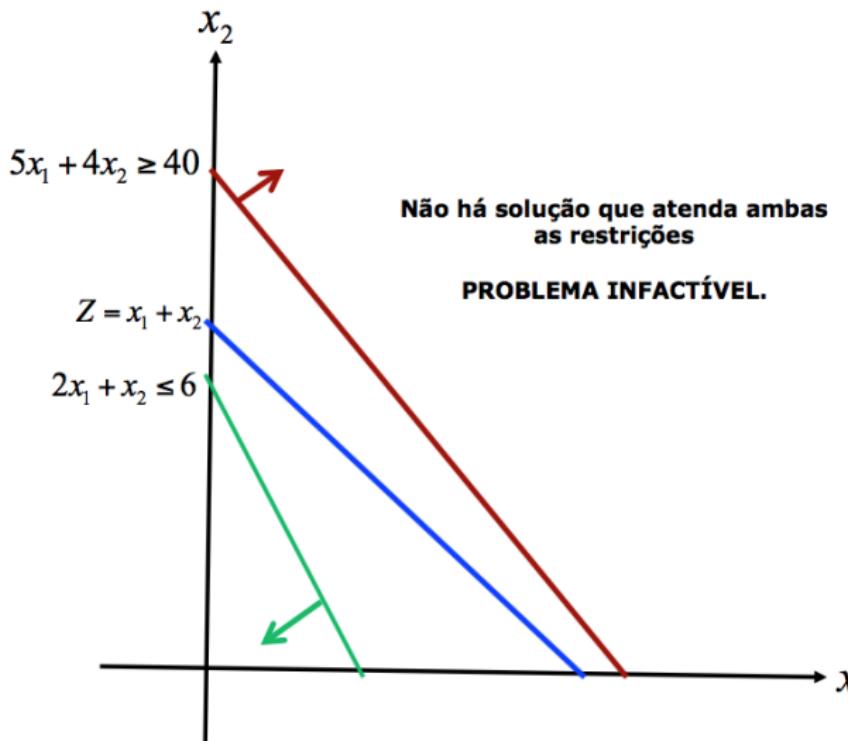
$$\begin{aligned} \max Z &= 8x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.} \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



FOB Paralela a uma restrição ativa.

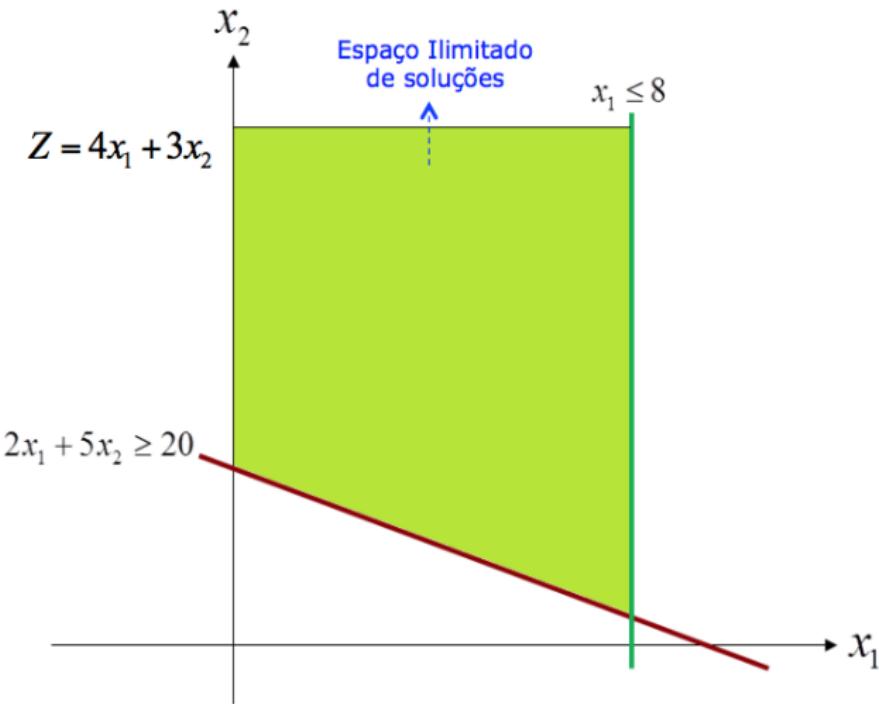
Casos Especiais - Problema Sem Solução

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \\ 5x_1 + 4x_2 &\geq 40 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



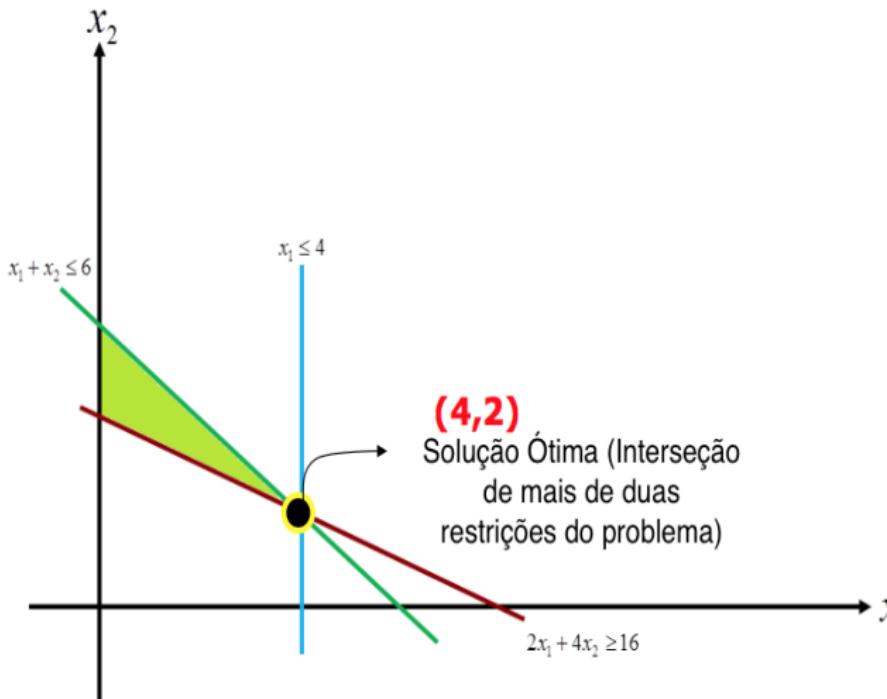
Casos Especiais - Prob. com Conj. Ilimitado de Soluções

$$\begin{aligned} \max Z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \\ 2x_1 + 5x_2 &\geq 20 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Casos Especiais - Problema com Solução Degenerada

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.} \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 16 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Existe no mínimo uma restrição redundante.

Formulação Matricial

Exemplo 1 - Problema do Agricultor/Área de Plantio

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

Área

Mão de Obra

Produção A

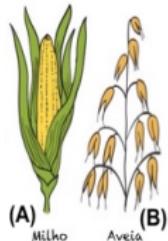
Produção B

Produção

$$\max Z = [800 \quad 600] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 240 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Formulação Matricial

Exemplo 1 - Problema do
Agricultor/Área de Plantio

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



$$\max Z = \overbrace{[800 \quad 600]}^c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 100 \\ 240 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix}}_B$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Formulação Matricial

Exemplo 1 - Problema do Agricultor/Área de Plantio

$$\max Z = 600x_1 + 800x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 80$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Objetivo

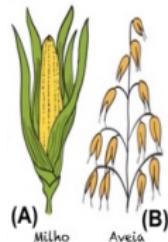
Área

Mão de Obra

Produção A

Produção B

Produção



Notação Compacta

$$\max Z = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{B}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Formulação Padrão Geral

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n = b_n$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

Formulação Padrão Geral

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} &= b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

n variáveis de decisão e *m* restrições de igualdade.

Formulação Padrão Geral

$$\max z = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

Formulação Padrão Geral

$$\max z = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]_{1 \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

Formulação Padrão Geral

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Sujeito a (restrições de igualdade)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{eq}} \mathbf{x} &= \mathbf{B}_{\text{eq}} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

n variáveis de decisão e m restrições de igualdade.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Relação entre Maximização e Minimização



Relação entre Maximização e Minimização



- Qualquer que seja o formato do PPL, sempre é possível transformá-lo no formato padrão apresentado.
- Como é a relação entre minimização e maximização?

Relação entre Maximização e Minimização



$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow \min(-z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

$$\min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow \max(-z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

Relação Entre Inequações e Equações

Restrições de Menor ou Igual

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \leq \infty \end{cases}$$

Relação Entre Inequações e Equações

Restrições de Menor ou Igual

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \leq \infty \end{cases}$$

Restrições de Maior ou Igual

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - S_i = b_i \\ 0 \leq S_i \leq \infty \end{cases}$$

Tratamento de Limites das Variáveis

Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x'_j \Rightarrow x_j = x'_j + LB \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

Tratamento de Limites das Variáveis

Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x'_j \Rightarrow x_j = x'_j + LB \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

Limite Superior ou *Upper Bound*

$$x_j \leq UB \Leftrightarrow \begin{cases} UB - x_j = x'_j \Rightarrow x_j = UB - x'_j \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

Tratamento de Limites das Variáveis

Limite Inferior ou *Lower Bound*

$$x_j \geq LB \Leftrightarrow \begin{cases} x_j - LB = x'_j \Rightarrow x_j = x'_j + LB \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

Limite Superior ou *Upper Bound*

$$x_j \leq UB \Leftrightarrow \begin{cases} UB - x_j = x'_j \Rightarrow x_j = UB - x'_j \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

$$-\infty \leq x_j \leq \infty \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = x'_j - x''_j \\ x'_j \geq 0 \text{ e } x''_j \geq 0 \end{cases}$$

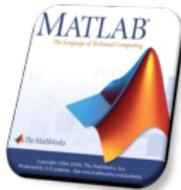
Observações

- As restrições do problema expressam limites que devem ser respeitados
- O algoritmo de resolução encontra a solução ótima no espaço de soluções compatíveis com o problema de PL, a saber:
 - Os pontos pertencentes a região factível correspondem aos valores das variáveis que atendem ao conjunto de restrições;
 - Cada restrição poderá ser de igualdade ou desigualdade
 - As restrições de não-negatividade das variáveis constituem condição necessária à aplicação do algoritmo de resolução do problema de PL;
 - Embora isso normalmente ocorra em decorrência da natureza da variável dentro do modelo, pode haver situações em que as variáveis são irrestritas, isto é, podem assumir qualquer valor real (nestes casos, realizar substituição de variáveis).

Softwares de Otimização



Toolbox de Programação Linear do Matlab



linprog

Solve linear programming problems

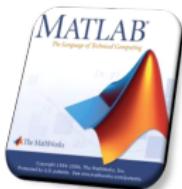
Linear programming solver

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \leq b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \leq x \leq ub. \end{cases}$$

f , x , b , beq , lb , and ub are vectors, and A and Aeq are matrices.

Toolbox de Programação Linear do Matlab



linprog

Solve linear programming problems

Linear programming solver

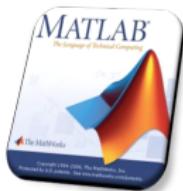
Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \leq b, \\ A_{eq} \cdot x = beq, \\ lb \leq x \leq ub. \end{cases}$$

f, x, b, beq, lb, and A and Aeq are matrices.

Very
Important

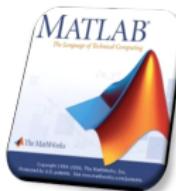
Toolbox de Programação Linear do Matlab



Syntax

```
x = linprog(f,A,b)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)
x = linprog(problem)
[x,fval] = linprog(_)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(_)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(_)
```

Toolbox de Programação Linear do Matlab



Parâmetros de Entrada

f: Vetor de Custos

A: Matriz dos coeficientes das restrições de desigualdade

b: Termos constantes das restrições de desigualdade

Aeq: Matriz dos coeficientes das restrições de igualdade

Beq: Termos constantes das restrições de igualdade

lb: Vetor com os limites inferiores das variáveis

ub: Vetor com os limites superiores das variáveis

options: Configuração do comportamento do solver

Toolbox de Programação Linear do Matlab

Parâmetros de Saída

x: Vetor os valores ótimos das variáveis

fval: Valor da Função Objetivo

exitflag: Código detalhando processo de convergência:

- (1) Função convergiu para a solução x
- (0) Número de iterações excedido. options.MaxIterations
- (-2) Não foi encontrado um x viável
- (-3) Problema é ilimitado
- (-4) Encontrada divisão por zero durante processo
- (-5) Tanto o primal quanto dual são inviáveis
- (-7) Direção de busca tornou-se pequena demais.

output: Informações sobre do processo de otimização

lambda: Multiplicadores de lagrange da solução

Problema do Milho e da Aveia

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\begin{aligned} \max Z &= 600x_1 + 800x_2 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Função Objetivo} \\ \text{sujeito a} \\ x_1 + x_2 &\leq 100 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Área Cultivo} \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 240 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Mão de Obra} \\ x_1 &\leq 60 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Produção Cereal A} \\ x_2 &\leq 80 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Produção Cereal B} \\ x_1, x_2 &\geq 0 && \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{Produção} \end{aligned}$$

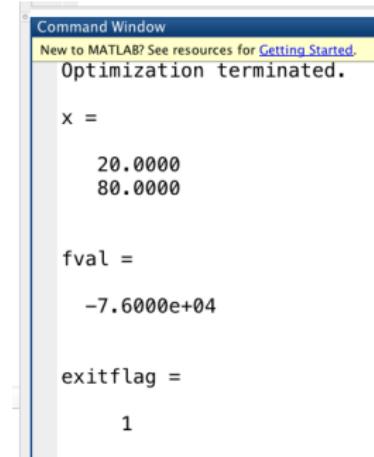


Confirmar o resultado da Análise Gráfica com o Matlab !

Problema do Milho e da Aveia

Programa em Matlab

```
1 clear all; close all; clc;
2 f = [-600 -800]; A = [1 1; 3 2]; b = [100; 240];
3 Aeq=[]; beq=[]; LB=[0 0]; UB=[60 80];
4 [x, fval, exitflag] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB)
```



Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

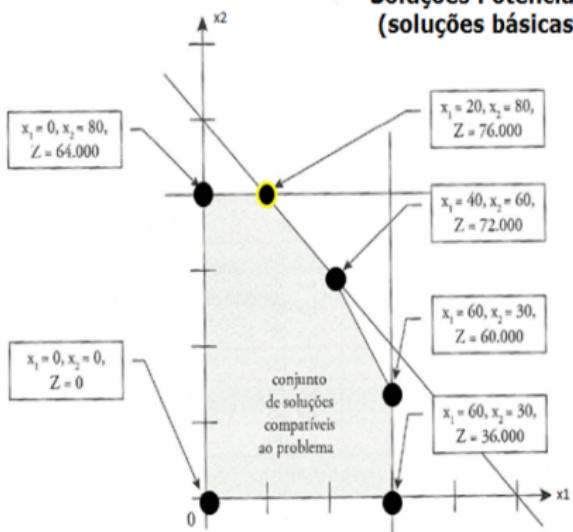
```
x =
20.0000
80.0000

fval =
-7.6000e+04

exitflag =
1
```

Análise Gráfica x Matlab

ANÁLISE GRÁFICA- SOLUÇÃO

Soluções Potenciais
(soluções básicas)

MATLAB - SOLUÇÃO

```
X1 =  
  
20.0000  
  
X2 =  
  
80.0000  
  
FVAL =  
  
-7.6000e+004  
  
EXITFLAG =  
  
1
```

Exemplo Aviário

O problema

O dono de um aviário precisa fabricar uma ração especial para as suas aves, de forma a atender diversas exigências alimentares. A produção desejada de ração é de 90kg, e a mistura deve ser formada por dois ingredientes básicos: milho e farelo de arroz, que custam \$0,90 e \$0,30 por kg respectivamente. Além disso, sabe-se que a ração precisa ter pelo menos 7% de proteína e 3% de fibra na sua composição, de forma a atender as necessidades das aves. A partir da tabela abaixo, com a composição percentual de fibra e proteína do milho e do farelo de arroz, pede-se formular um problema de programação linear para atender às necessidades diárias a um custo mínimo.

Tabela: Composição de Cada Ingrediente

Ingredientes	Proteína	Fibra
Milho	9 %	2 %
Farelo de Arroz	5 %	6 %



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$\min Z = 0.9x_M + 0.3x_F$ → Minimizar Custo
sujeito a

$$\begin{aligned} 1x_M + 1x_F &= 90 & \rightarrow & \text{Produção} \\ 0.09x_M + 0.05x_F &\geq 0.07(x_M + x_F) & \rightarrow & \text{Proteína} \\ 0.02x_M + 0.06x_F &\geq 0.03(x_M + x_F) & \rightarrow & \text{Fibra} \\ x_M, x_F &\geq 0 & \rightarrow & \text{Canalização} \end{aligned}$$



Confirmar o resultado da Análise Gráfica com o Matlab !

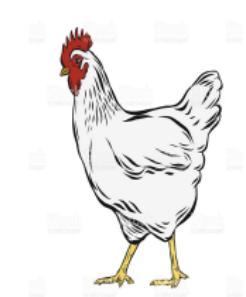
Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

$$\min Z = 0.9x_M + 0.3x_F \quad \rightarrow \quad \text{Minimizar Custo}$$

sujeito a

$$1x_M + 1x_F = 90 \quad \rightarrow \quad \text{Produção}$$
$$0.02x_M - 0.02x_F \geq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Proteína}$$
$$-0.01x_M + 0.03x_F \geq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Fibra}$$
$$x_M, x_F \geq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Canalização}$$

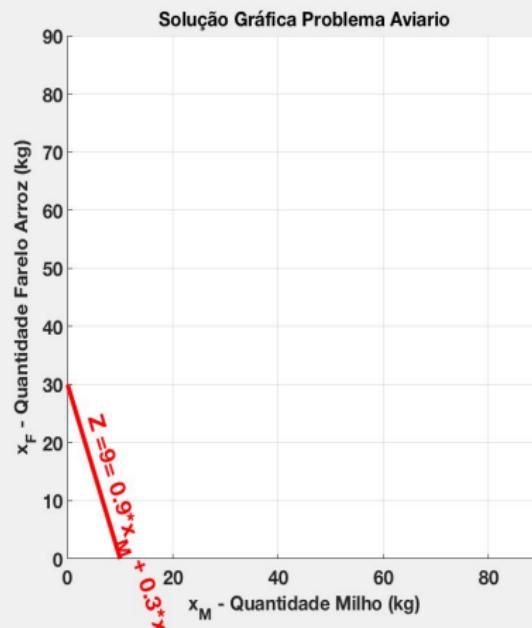


Confirmar o resultado da Análise Gráfica com o Matlab !

Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

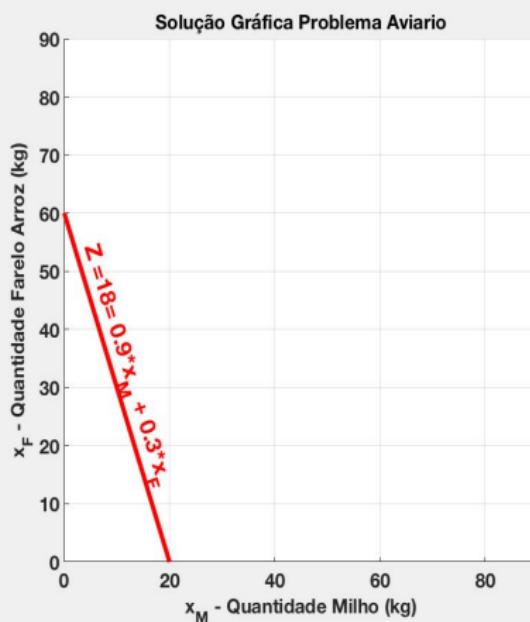
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

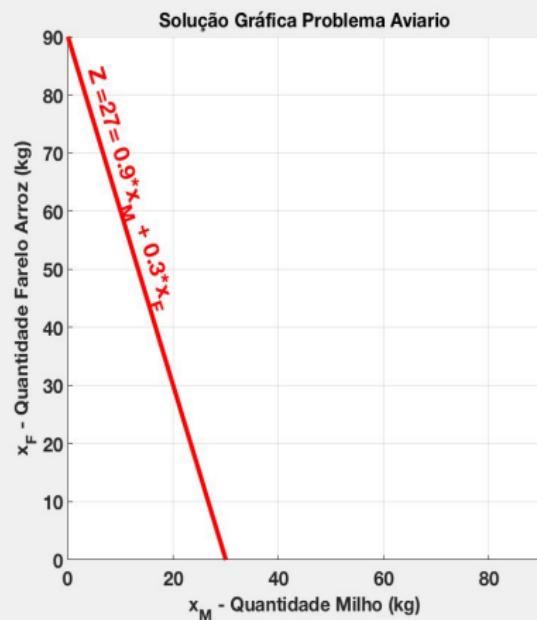
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

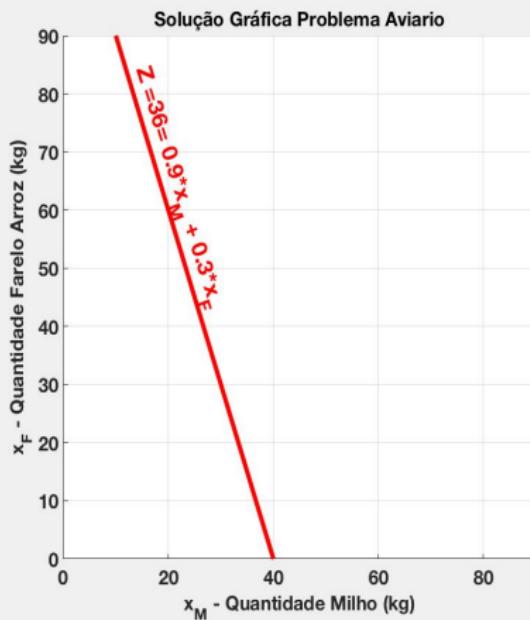
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

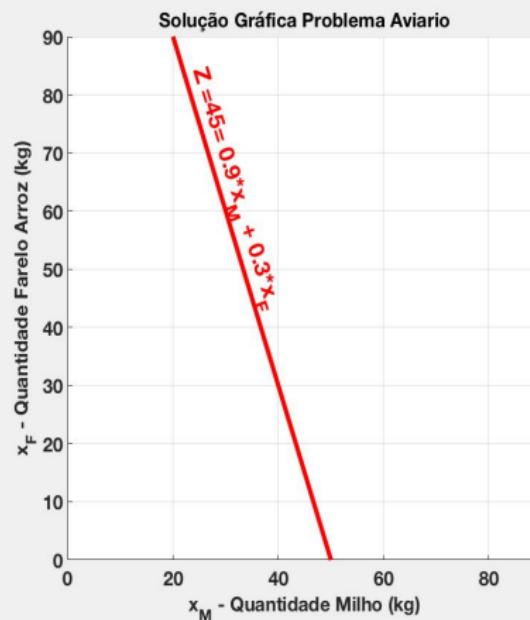
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

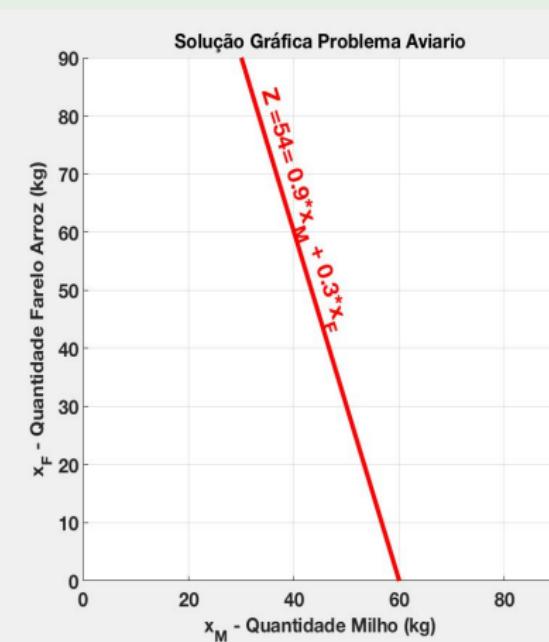
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

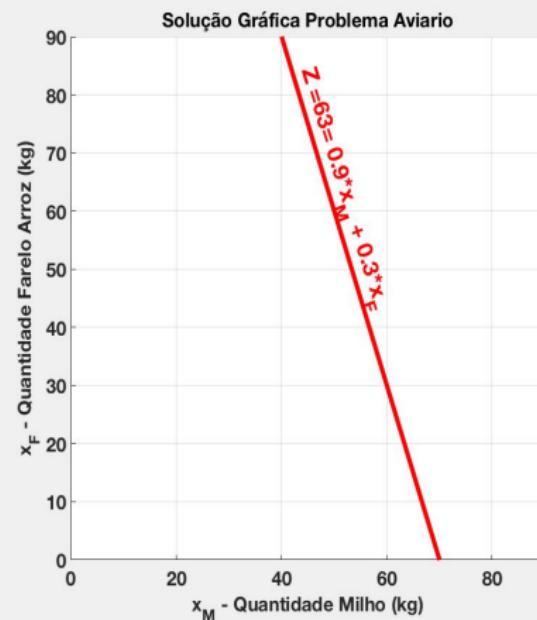
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

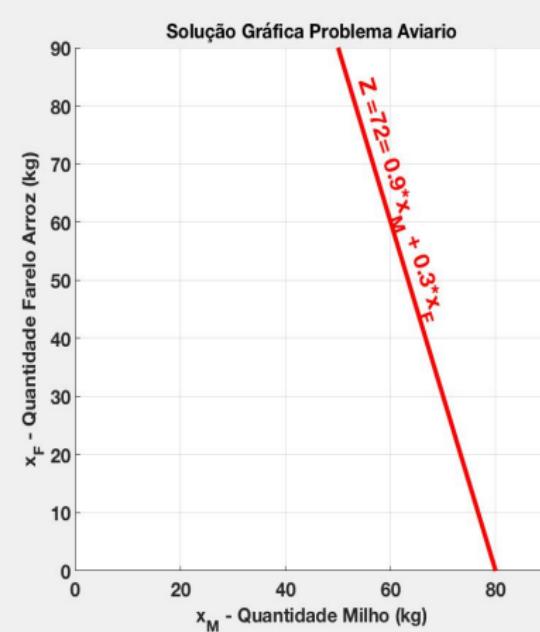
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

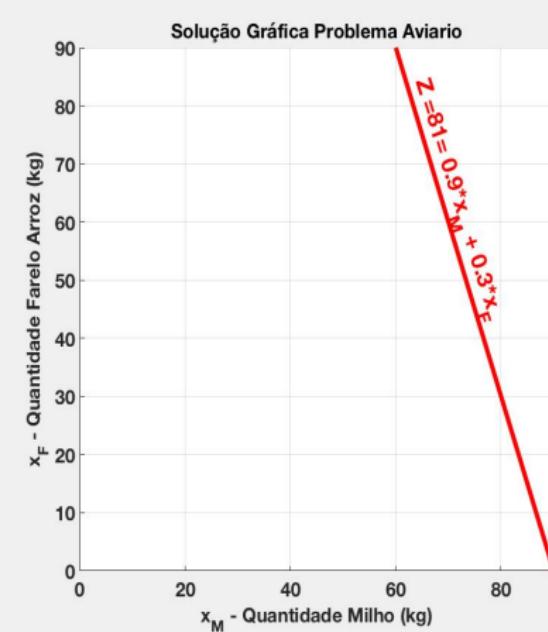
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

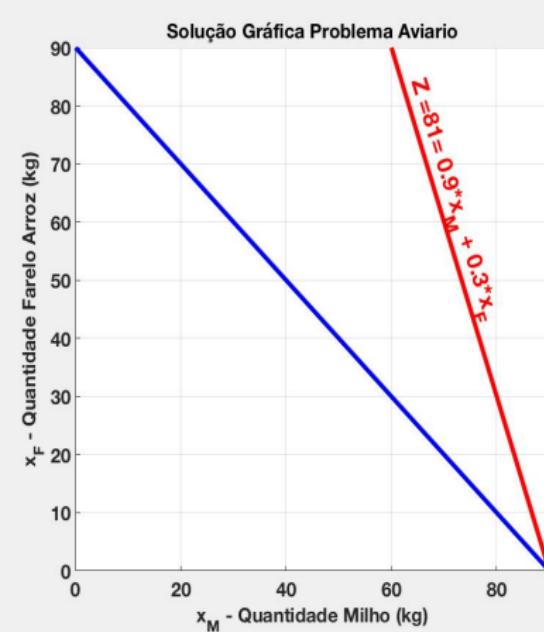
Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

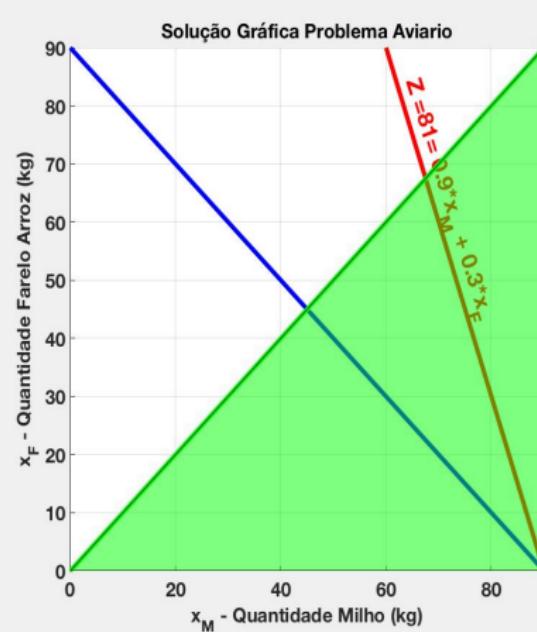
Restrição de Igualdade: $1x_M + 1x_F = 90$



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

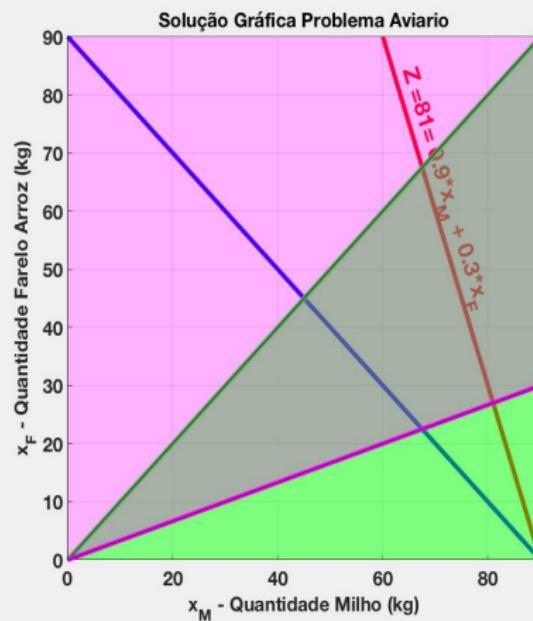
Restrição Proteína: $0.02x_M - 0.02x_F \geq 0$



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

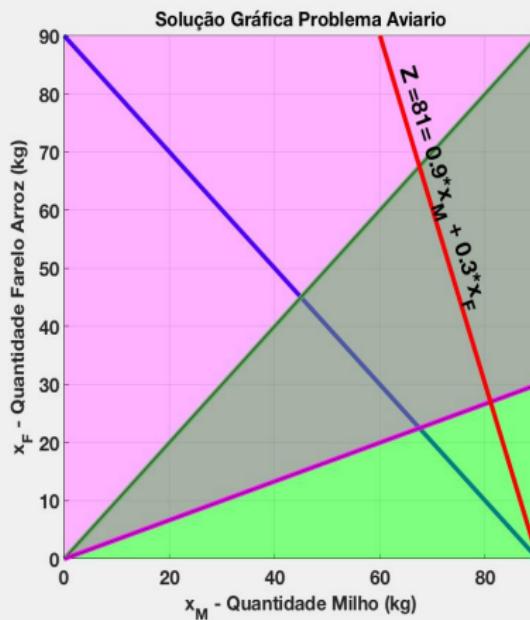
Restrição Fibra: $-0.01x_M + 0.03x_F \geq 0$



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

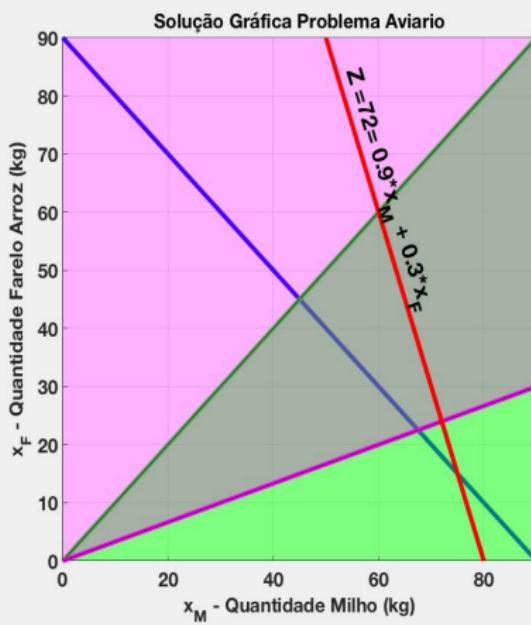
Minimizando Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

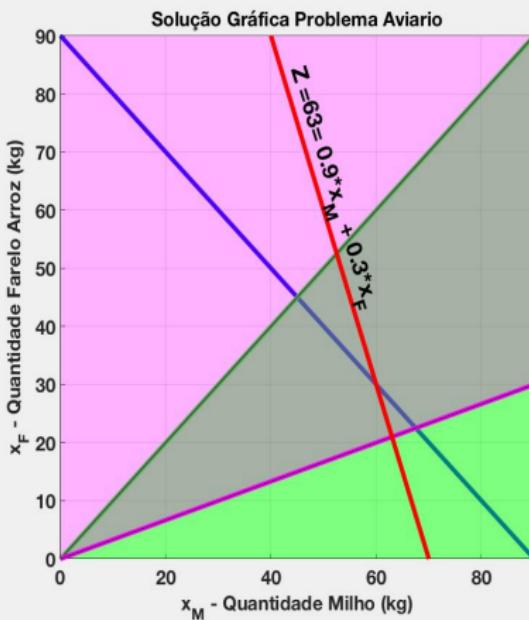
Minimizando Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

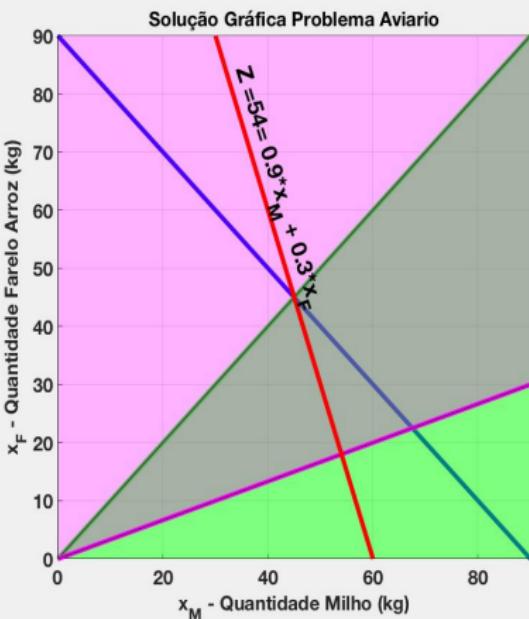
Minimizando Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

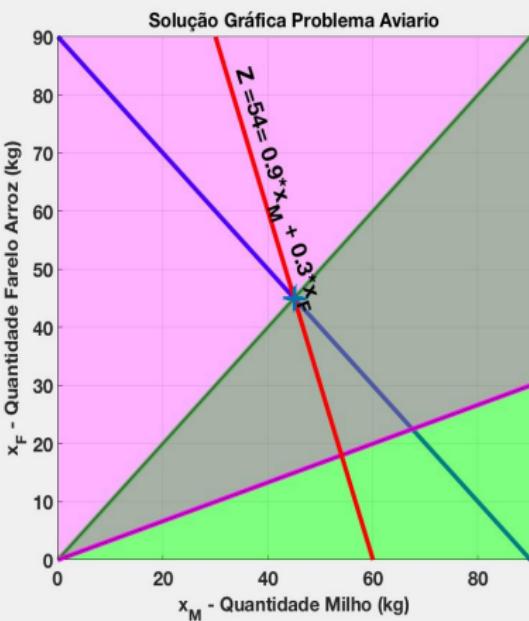
Minimizando Função Objetivo



Exemplo Aviário

Exemplo 1 - Modelo Matemático Completo

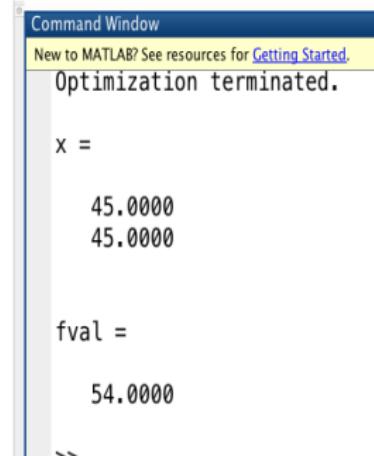
Ponto Ótimo Global



Exemplo Aviário

Programa em Matlab

```
1 clear all; close all; clc;
2 f = [0.9 0.3]; A = [-0.02 0.02;0.01 -0.03];
3 B = [ 0; 0]; Aeq = [ 1 1 ]; Beq = 90;
4 [x, fval] = linprog(f,A,B,Aeq,Beq)
```



The image shows a screenshot of the MATLAB Command Window. The window title is "Command Window". A yellow banner at the top says "New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#)." Below the banner, the text "Optimization terminated." is displayed. The command entered was a script to solve a linear programming problem using the linprog function. The output shows the variable `x` with two values: 45.0000 and 45.0000. The variable `fval` is shown with the value 54.0000. The MATLAB logo is visible in the bottom right corner of the window.

Empresa e seus Produtos

O problema

Seja uma empresa que produz produtos A, B, C e D. A fabricação de cada unidade desses produtos exige mão de obra, matéria-prima e processamento mecânico, gerando um dado lucro de acordo com a Tabela abaixo.

O suprimento semanal de matéria prima é restrito a 20.000Kg. A disponibilidade semanal de mão de obra é de 15.000 horas, e a quantidade de horas-máquina é de 40.000 hm. Pede-se determinar o plano de produção semanal de forma a maximizar o lucro.

Tabela: Dados do Problema

Recursos	A	B	C	D
Mão de Obra (hh/unidade)	8	3	5	6
Matéria Prima (kg/unidade)	5	7	4	5
Processamento Mecânico (hm)	12	9	8	7
Lucro (\$/Unidade)	3	6	5	4



Empresa e seus Produtos

Identificação das Variáveis do Problema



Empresa e seus Produtos

Identificação das Variáveis do Problema

x_A : Produção Semanal do Produto A

x_B : Produção Semanal do Produto A

x_C : Produção Semanal do Produto A

x_D : Produção Semanal do Produto A



Empresa e seus Produtos

Identificação da Função Objetivo



Empresa e seus Produtos

Identificação da Função Objetivo

Recursos	A	B	C	D
Lucro (\$/unidade)	3	6	5	4



Empresa e seus Produtos

Identificação da Função Objetivo

Recursos	A	B	C	D
Lucro (\$/unidade)	3	6	5	4

$$\max Z = 3x_A + 6x_B + 5x_C + 4x_D$$



Empresa e seus Produtos

Identificação das Restrições



Empresa e seus Produtos

Identificação das Restrições

Recursos	A	B	C	D
Mão de Obra (hh/unidade)	8	3	5	6
Matéria Prima (kg/unidade)	5	7	4	5
Processamento Mecânico (hm)	12	9	8	7



Empresa e seus Produtos

Identificação das Restrições

Recursos	A	B	C	D
Mão de Obra (hh/unidade)	8	3	5	6
Matéria Prima (kg/unidade)	5	7	4	5
Processamento Mecânico (hm)	12	9	8	7

Sujeito a

$$8x_A + 3x_B + 5x_C + 6x_D \leq 15000$$

$$5x_A + 7x_B + 4x_C + 5x_D \leq 20000$$

$$12x_A + 9x_B + 8x_C + 7x_D \leq 40000$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0$$



Empresa e seus Produtos

Modelagem Final do Problema

$$\max Z = 3x_A + 6x_B + 5x_C + 4x_D$$

Sujeito a

$$8x_A + 3x_B + 5x_C + 6x_D \leq 15000$$

$$5x_A + 7x_B + 4x_C + 5x_D \leq 20000$$

$$12x_A + 9x_B + 8x_C + 7x_D \leq 40000$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0$$



Nutricionista

O problema

Suponhamos que 8, 12 e 9 são as quantidades de Proteínas (P), Carboidratos (C) e Gorduras (G), respectivamente, sejam as quantidades semanais mínimas de cada pessoa.

- O alimento tipo-A contém por quilo: 2P, 6C e 1G
- O alimento tipo-B contém por quilo: 1P, 1C e 3G
- O alimento tipo-A custa R\$3,00 e o alimento tipo-B custa R\$2,00 (por quilo)

Quantos quilos de cada alimento deve-se comprar por semana para ter uma dieta ao menor custo possível?

Modele matematicamente esse problema de otimização.



Nutricionista

O problema

Suponhamos que 8, 12 e 9 são as quantidades de Proteínas (P), Carboidratos (C) e Gorduras (G), respectivamente, sejam as quantidades semanais mínimas de cada pessoa.

- O alimento tipo-A contém por quilo: 2P, 6C e 1G
- O alimento tipo-B contém por quilo: 1P, 1C e 3G
- O alimento tipo-A custa R\$3,00 e o alimento tipo-B custa R\$2,00 (por quilo)

Quantos quilos de cada alimento deve-se comprar por semana para ter uma dieta ao menor custo possível?

Modele matematicamente esse problema de otimização.

$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

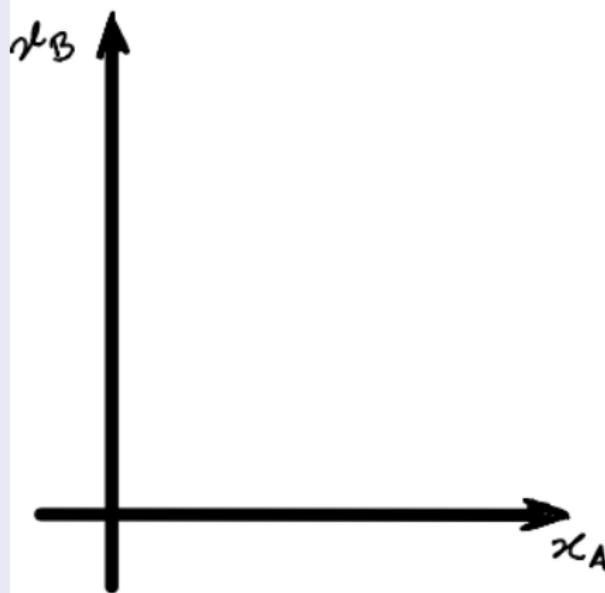
D.o.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8 \quad | \quad R_3: 1x_A + 3x_B \geq 9$$

$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12 \quad | \quad x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

D.o.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8$$

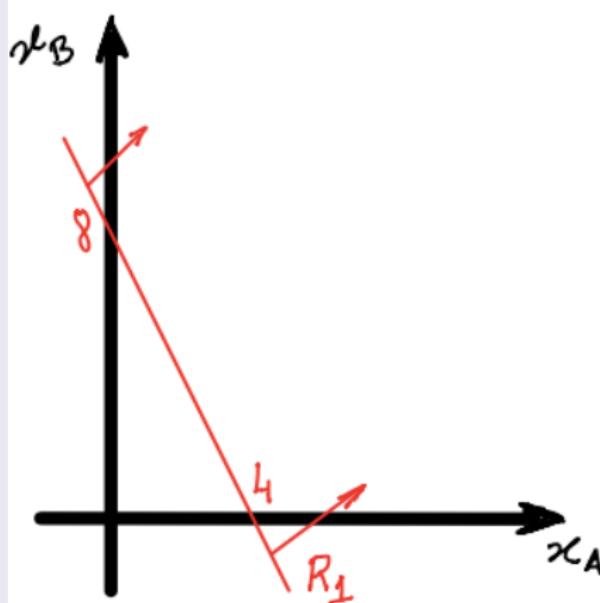
$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12$$

$$R_3: 1x_A + 3x_B \geq 9$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

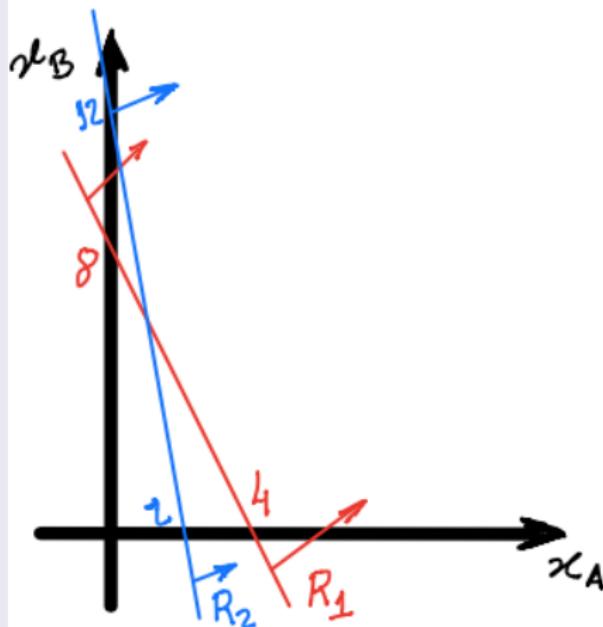
10.0.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8$$

$$R_3: 6x_A + 1x_B \geq 12 \quad | \quad x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

N.A.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8$$

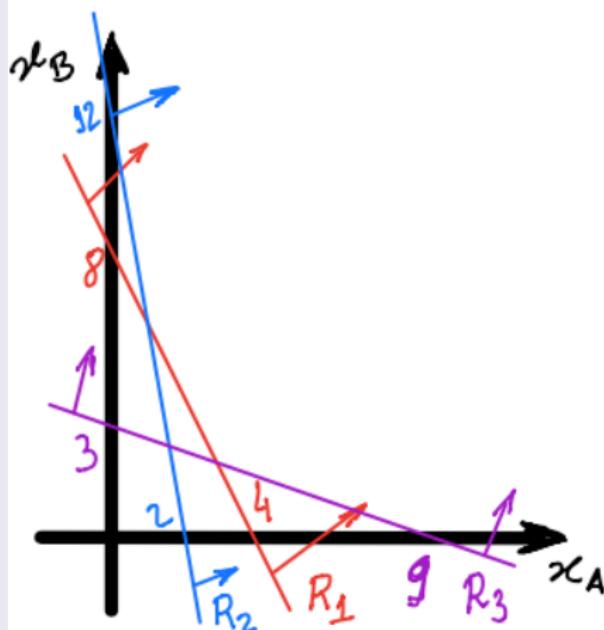
$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12$$

$$R_3: 1x_A + 3x_B \geq 9$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

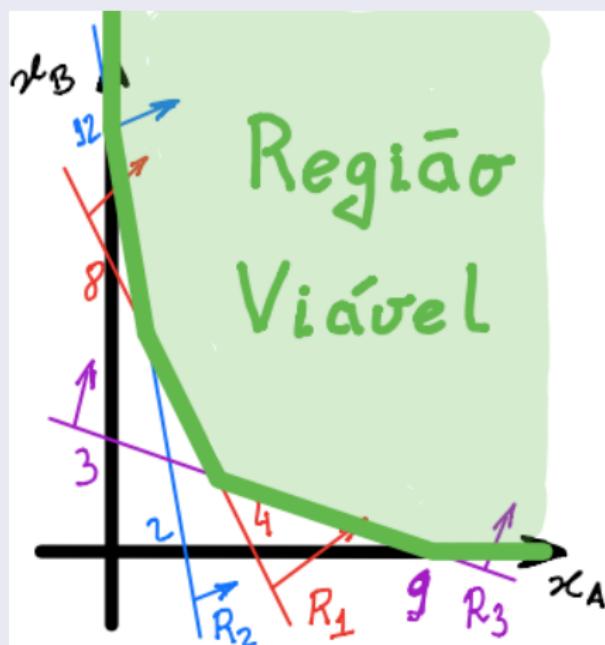
N.C.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8$$

$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12 \quad | \quad x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

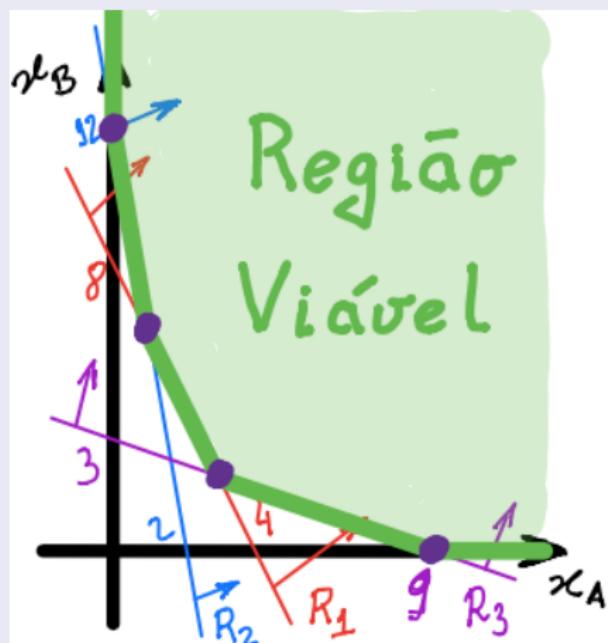
D.s.c.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8 \quad | \quad R_3: 1x_A + 3x_B \geq 9$$

$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12 \quad | \quad x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

D.a.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8$$

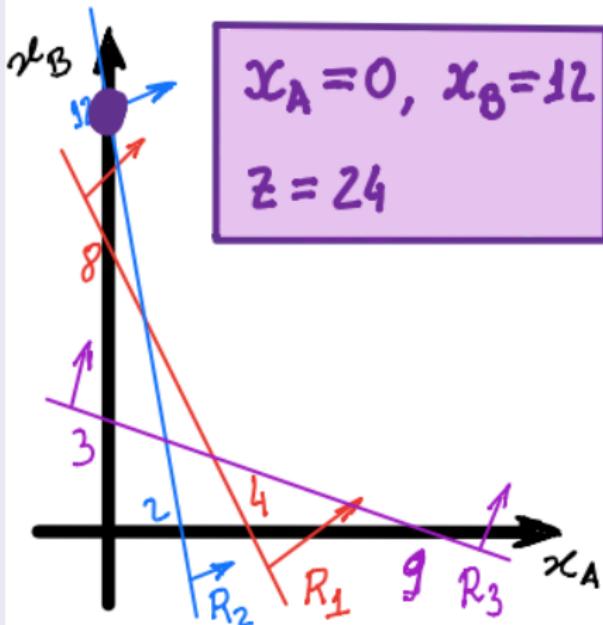
$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12$$

$$R_3: 1x_A + 3x_B \geq 9$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

D.a.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8$$

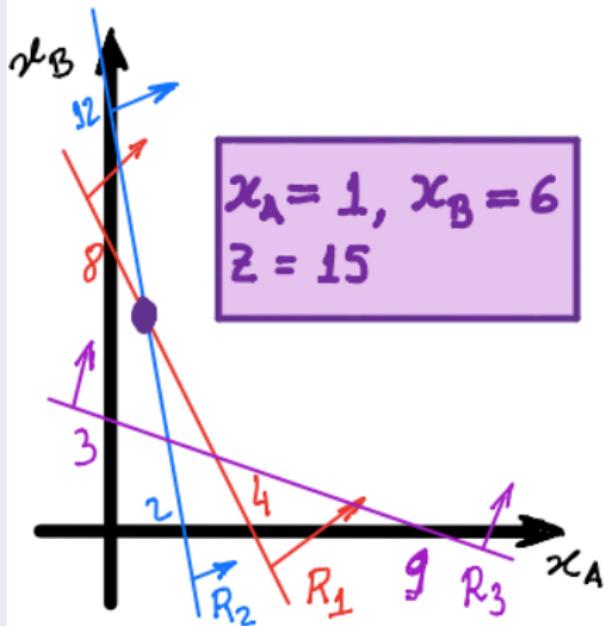
$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12$$

$$R_3: 1x_A + 3x_B \geq 9$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

D.a.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8$$

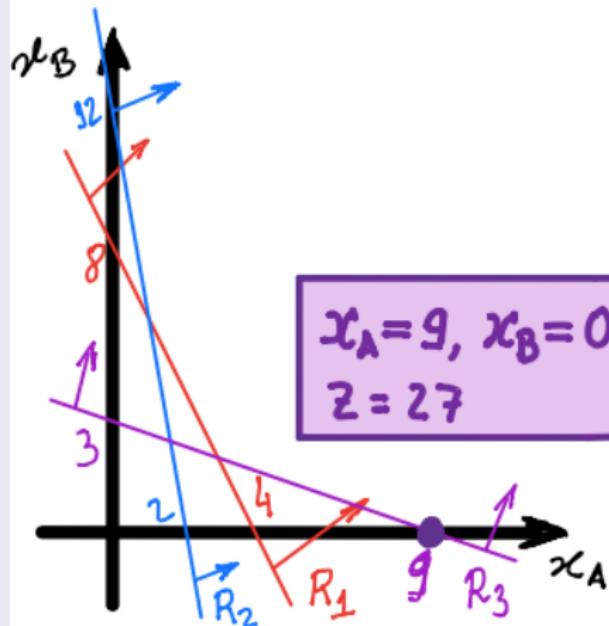
$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12$$

$$R_3: 1x_A + 3x_B \geq 9$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

D.a.

$$R_1: 2x_A + 1x_B \geq 8$$

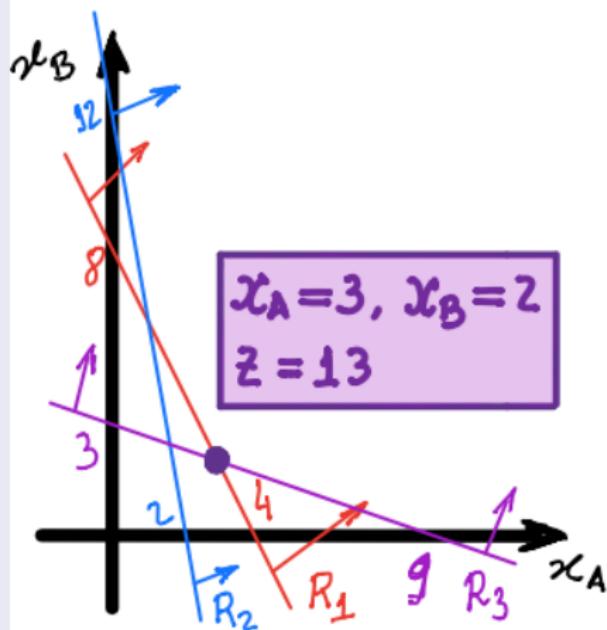
$$R_2: 6x_A + 1x_B \geq 12$$

$$R_3: 1x_A + 3x_B \geq 9$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

Solução Gráfica e Busca Exaustiva



$$\text{Min } Z = 3x_A + 2x_B$$

D.A.

$$R_1: x_A + x_B \geq 8$$

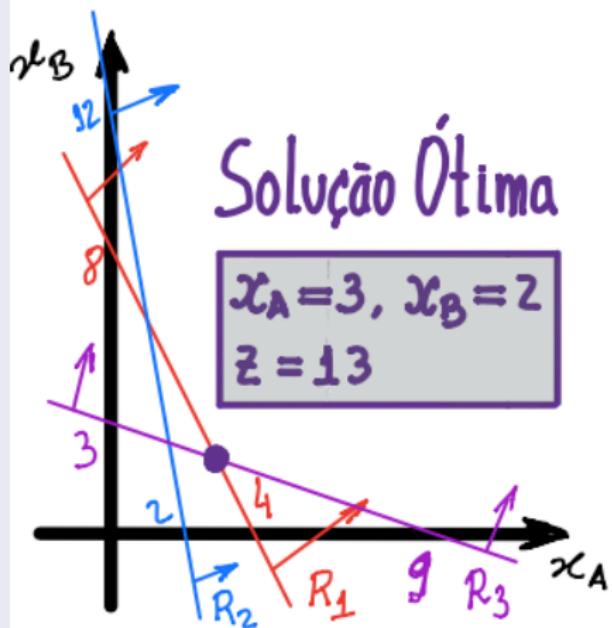
$$R_2: 6x_A + x_B \geq 12$$

$$R_3: x_A + 3x_B \geq 9$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

Nutricionista

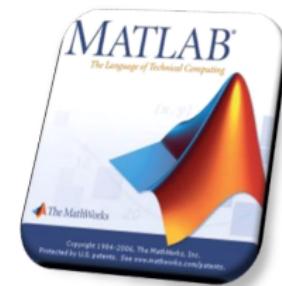
Solução Gráfica e Busca Exaustiva



Problema do Milho e da Aveia

Programa em Matlab

```
1 clear all; close all; clc;  
2  
3 % FOB  
4 f = [ 3 2];  
5 % Restricoes de desigualdade  
6 A = [-2 -1; -6 -1; -1 -3];  
7 % Termos constantes  
8 b = [-8; -12; -9];  
9 % Restricoes de Igualdade  
10 Aeq = []; beq = [];  
11 % Restricoes de Canalizacao  
12 LB = [ 0 0]; UB = [inf inf];  
13 % Resolucao  
14 [X, FVAL, EXITFLAG] = ...  
    linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB)
```



Problema do Milho e da Aveia

Programa em Matlab

```
1 clear all; close all; clc;
2
3 % FOB
4 f = [ 3 2];
5 % Restricoes de desigualdade
6 A = [-2 -1; -6 -1; -1 -3];
7 % Termos constantes
8 b = [-8; -12; -9];
9 % Restricoes de Igualdade
10 Aeq = []; beq = [];
11 % Restricoes de Canalizacao
12 LB = [ 0 0]; UB = [inf inf];
13 % Resolucao
14 [X, FVAL, EXITFLAG] = ...
    linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB)
```

```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
Optimization terminated.

X =
    3.0000
    2.0000

FVAL =
    13.0000

EXITFLAG =
    1

>>
```

Serralheria Tabajara

O problema

A TABAJARA LTDA dispõe de capacidade extra para produzir dois novos produtos (Janelas e Portas). A demanda é muito maior que a capacidade disponível (toda a produção será vendida).

Pergunta-se:

- Quando produzir visando a maximização do lucro?
- Qual será o lucro?

Tabela: Dados do Problema

Setor Produtivo	Produto		Capacidade Disponível
	Janelas	Portas	
Montagem	1 hora/unid	—	4 horas/mês
Laminação	—	2 horas/unid	12 horas/mês
Corte	3 horas/unid	2 horas/unid	18 horas/mês
Lucro Unitário	\$ 3,00	\$ 5,00	

Serralheria Tabajara

Setor Produtivo	Produto		Capacidade Disponível
	Janelas	Portas	
Montagem	1 hora/unid	—	4 horas/mês
Laminação	—	2 horas/unid	12 horas/mês
Corte	3 horas/unid	2 horas/unid	18 horas/mês
Lucro Unitário	\$ 3,00	\$ 5,00	

Variáveis

x_1 = Qde de janelas, em milhares de unidades

x_2 = Qde de portas, em milhares de unidades

Z = Qde de janelas, em milhares de unidades

Restrições

a) Disponibilidade do Setor de Montagem

b) Disponibilidade do Setor de Laminação

c) Disponibilidade do Setor de Corte

d) Quantidades não Negativas

Objetivo

Maximizar o Lucro Total da Empresa

Formulação do Problema?

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a: } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Serralheria Tabajara

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a: } x_1 \leq 4$$

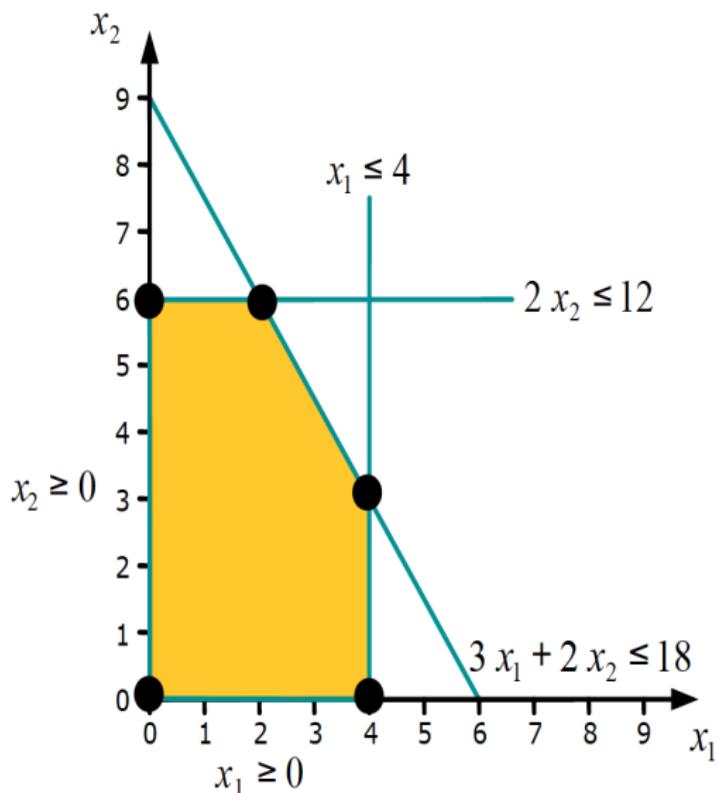
$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

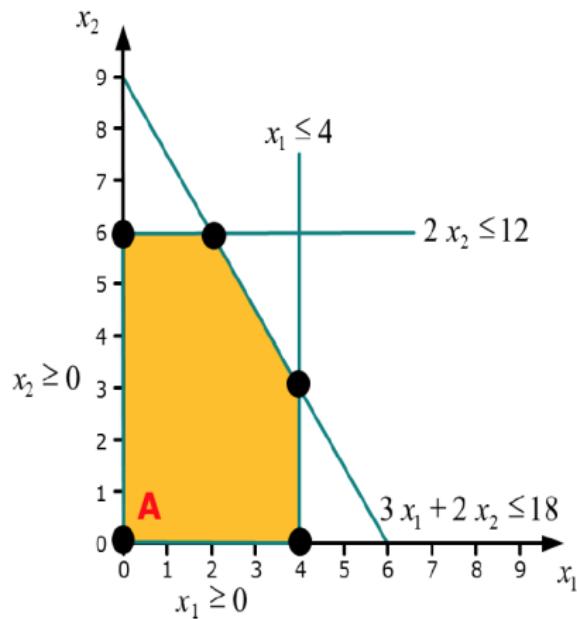
$$x_1, x_2 \geq 0$$

● Solução Candidata

Qual a solução ótima?



Serralheria Tabajara



$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a: } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

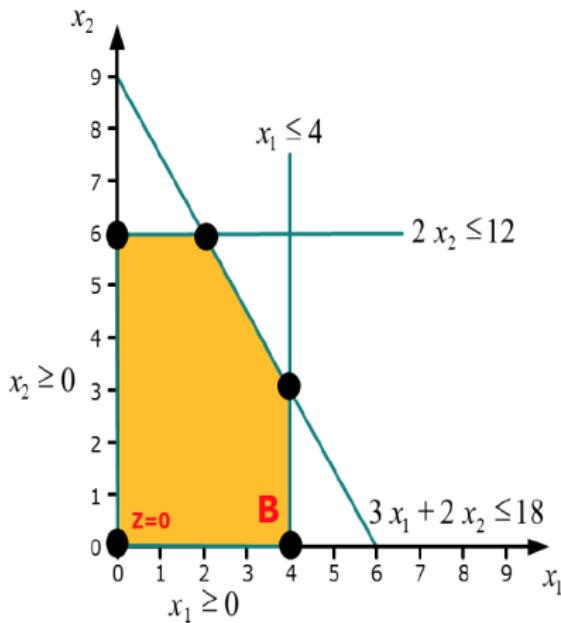
Solução A

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$Z = 0$$

Serralheria Tabajara



$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a: } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

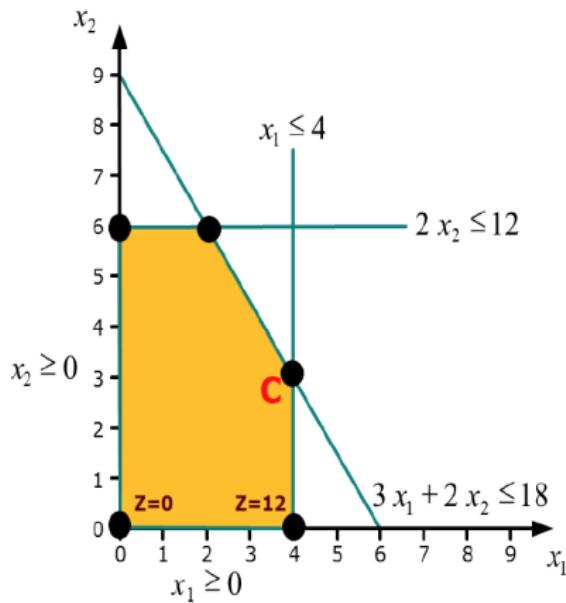
Solução B

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 0$$

$$Z = 12$$

Serralheria Tabajara



$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a:} \quad & x_1 \leq 4 \\
 & 2x_2 \leq 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

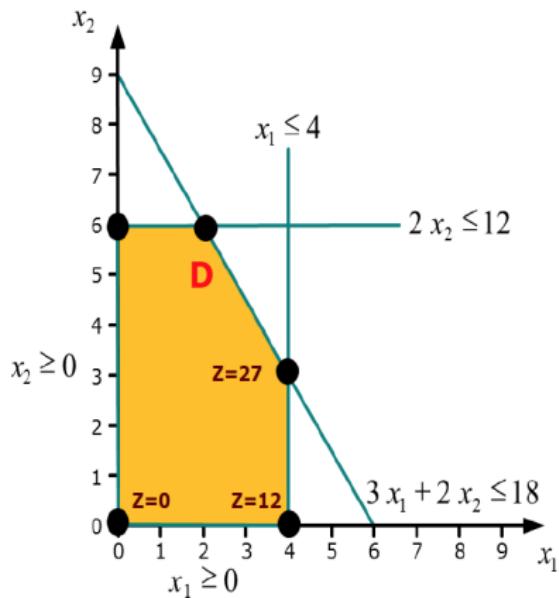
Solução C

(INTERSESSÃO ENTRE AS RETAS)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ x_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 4 \\
 x_2 &= 3 \\
 Z &= 27
 \end{aligned}$$

Serralheria Tabajara



$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a: } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

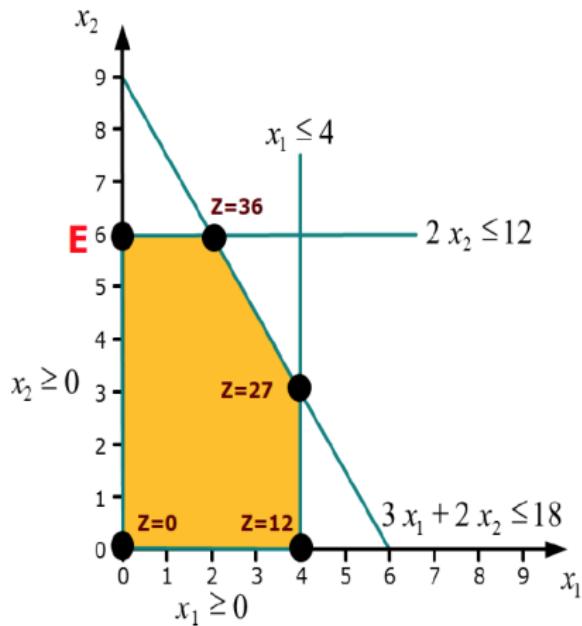
Solução D

(INTERSESSÃO ENTRE AS RETAS)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ 2x_2 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 6 \\ Z &= 36 \end{aligned}$$

Serralheria Tabajara



$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a: } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução E

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 6 \\ Z &= 30 \end{aligned}$$

Serralheria Tabajara

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.: } x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

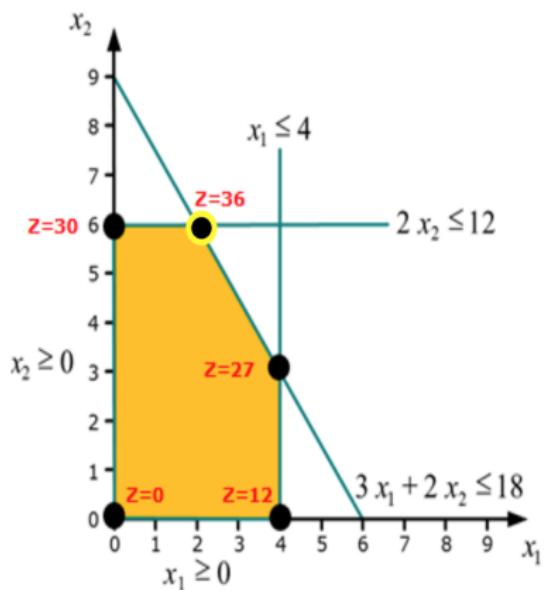
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Solução ótima?

- **Solução ótima**
 $X_1(\text{JANELAS})=2$
 $X_2(\text{PORTAS})=6$
 $Z(\text{LUCRO})=\$36$



Fim