

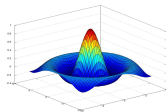
Os Métodos Big M e Duas Fases

Professores André L.M. Marcato, Ivo C.da Silva Jr, João A.Passos Filho

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

andre.marcato@ufjf.edu.br, ivo.junior@ufjf.edu.br, joao.passos@ufjf.edu.br

Primeiro Semestre de 2018



Agenda da Apresentação

- 1 Método do Big-M
 - Restrições de Igualdade / Maior ou Igual
 - Exemplo
- 2 Matlab
 - Resolução do Exemplo
- 3 Métodos das Duas Fases
 - Resolução do Exemplo



Restrições de Igualdade / Maior ou Igual



- Soluções Básicas Iniciais devem ser factíveis.
- Soluções Factíveis são diretas quando todas as restrições do modelo são da forma \leq .
- Restrições do modelo na forma \geq ou $=$ não levam a obtenção direta de soluções iniciais factíveis.

Exemplo

Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Exemplo

Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Padrão:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Exemplo

Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Padrão:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_4 = 40 \\ x_5 = -60 \end{cases}$$

$$0 + 0 + 0 = 15$$

Exemplo

Encontre uma SBF Inicial para:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma Padrão:

$$\max Z = 3x_1 + 2,5x_2 + 1,2x_3$$

Sujeito à:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 60$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_4 = 40 \\ x_5 = -60 \end{cases}$$

$$0 + 0 + 0 = 15$$





Como obter soluções iniciais em modelos com restrições na forma \geq ou $=$?

Método das Penalidades
(BIG-M)



Método das Duas Fases



Como obter soluções iniciais em modelos com restrições na forma \geq ou $=$?

Método das Penalidades
(BIG-M)



Método das Duas Fases

O Método do Big M

Este método consiste em acrescentar na FOB do problema original (**forma padrão**) variáveis artificiais - **a** - com penalidades - **M**:

O Método do Big M

Este método consiste em acrescentar na FOB do problema original (**forma padrão**) variáveis artificiais - **a** - com penalidades - **M**:

- Negativos Muito Grandes - Problemas de Maximização

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - Ma$$

O Método do Big M

Este método consiste em acrescentar na FOB do problema original (**forma padrão**) variáveis artificiais - **a** - com penalidades - **M**:

- Negativos Muito Grandes - Problemas de Maximização

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - Ma$$

- Positivos muito grandes - Problemas de Minimização

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + Ma$$

O Método do Big M

Este método consiste em acrescentar na FOB do problema original (**forma padrão**) variáveis artificiais - **a** - com penalidades - **M**:

- Negativos Muito Grandes - Problemas de Maximização

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - Ma$$

- Positivos muito grandes - Problemas de Minimização

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + Ma$$



Na solução final os valores das variáveis artificiais devem ser nulos (VNB).

Exemplo

Resolver o seguinte PPL

$$\max 2x_1 + 3x_2$$

Sujeito a

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exemplo

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_3 = 6 \\ x_4 = -8 \end{cases}$$

$$Z = 0$$

Exemplo

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_3 = 6 \\ x_4 = -8 \end{cases}$$

$$Z = 0$$

Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Problemas:

- $x_4 = 8$, deveria ser maior que zero.
- $x_1 + x_2 = 6$, igualdade não satisfeita.
- Não possui solução inicial trivial.



Exemplo

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Inserção das Variáveis Artificiais e das Penalidades

$$\begin{aligned} \max Z & -2x_1 - 3x_2 & +Mx_5 & +Mx_6 & = 0 \\ \text{Sujeito a} \\ & -2x_1 + 3x_2 & +x_3 & & = 6 \\ & x_1 + 2x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 8 \\ & x_1 + x_2 & & & & +x_6 & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \\ -2x_1 + 3x_2 & \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 & \geq 8 \\ x_1 + x_2 & = 6 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 & = 8 \\ x_1 + x_2 & = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{aligned}$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_3 = 6 \\ x_5 = 8 \\ x_6 = 6 \end{cases} \quad Z = 0$$

Exemplo

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_3 = 6 \\ x_5 = 8 \\ x_6 = 6 \end{cases} \quad Z = 0$$



A FOB deve conter somente VNB !

Exemplo

Inserção das Variáveis Artificiais e das Penalidades

$$\max Z - 2x_1 - 3x_2 \quad +Mx_5 \quad +Mx_6 = 0$$

Sujeito a

$$-2x_1 + 3x_2 \quad +x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 \quad -x_4 \quad +x_5 = 8$$

$$x_1 + x_2 \quad \quad \quad +x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Exemplo

Inserção das Variáveis Artificiais e das Penalidades

$$\max Z - 2x_1 - 3x_2 \quad +Mx_5 \quad +Mx_6 = 0$$

Sujeito a

$$-2x_1 + 3x_2 \quad +x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 \quad -x_4 \quad +x_5 = 8$$

$$x_1 + x_2 \quad \quad \quad +x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$x_5 = 8 - x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_6 = 6 - x_1 - x_2$$

Exemplo

Inserção das Variáveis Artificiais e das Penalidades

$$\max Z - 2x_1 - 3x_2$$

Sujeito a

$$-2x_1 + 3x_2$$

$$+x_3$$

$$=6$$

$$x_1 + 2x_2$$

$$-x_4$$

$$+x_5$$

$$=8$$

$$x_1 + x_2$$

$$+x_6$$

$$=6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$+M(8 - x_1 - 2x_2 + x_4) + M(6 - x_1 - x_2) = 0$$

$$x_5 = 8 - x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_6 = 6 - x_1 - x_2$$

Exemplo

Inserção das Variáveis Artificiais e das Penalidades

$$\max Z + (-2 - 2M)x_1 + (-3 - 3M)x_2 + Mx_4 + 14M = 0$$

Sujeito à:

$$-2x_1 + 3x_2 + \quad \quad \quad x_3 \quad \quad \quad = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 \quad \quad \quad + x_5 \quad \quad \quad = 8$$

$$x_1 + x_2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad + x_6 \quad \quad \quad = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_3 = 6 \\ x_5 = 8 \\ x_6 = 6 \end{cases} \quad Z = -14M$$

Exemplo

Inserção das Variáveis Artificiais e das Penalidades

$$\max Z + (-2 - 2M)x_1 + (-3 - 3M)x_2 + Mx_4 + 14M = 0$$

Sujeito à:

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$VNB \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad VB \begin{cases} x_3 = 6 \\ x_5 = 8 \\ x_6 = 6 \end{cases} \quad Z = -14M$$



A FOB contém somente VNB !

Em geral, atribui-se a M um valor 20 vezes superior ao maior coeficiente da FOB original.



Exemplo - Busca Tableau - 1ª Iteração

Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
X_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
X_5	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
X_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	$(-2-2M)$	$(-3-3M)$	0	M	0	0	-14M

- Maior coeficiente função objetivo original: 3
- $M = 20 \times 3 = 60$

Exemplo - Busca Tableau - 1ª Iteração

Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
X_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
X_5	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
X_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	-122	-183	0	+60	0	0	-840

Verificar se a solução é ótima! (Linha de Z).

Exemplo - Busca Tableau - 1ª Iteração

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
x_5	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
x_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	-122	-183	0	+60	0	0	-840



Entra

Escolhe variável com coeficiente mais negativo na FOB para entrar na base.

Exemplo - Busca Tableau - 1ª Iteração

Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
X_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
X_5	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
X_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	-122	-183	0	+60	0	0	-840



Entra

$$\frac{\pm 6}{+3} = +2$$



$$\frac{\pm 8}{+2} = +4$$



$$\frac{\pm 6}{+1} = +6$$



Para cada linha do Tableau calcular razão $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ e verificar se há razão positiva e finita.

Exemplo - Busca Tableau - 1ª Iteração

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
x_5	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
x_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	-122	-183	0	+60	0	0	-840

$$\frac{+6}{+3} = +2$$

← Sa



Entra

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.

$$\text{LINHA}'_1 = \frac{1}{3} \times \text{LINHA}_1$$

$$\text{LINHA}'_2 = \text{LINHA}_2 - \frac{2}{3} \times \text{LINHA}_1$$

$$\text{LINHA}'_3 = \text{LINHA}_3 - \frac{1}{3} \times \text{LINHA}_1$$

$$\text{LINHA}'_4 = \text{LINHA}_4 + 61 \times \text{LINHA}_1$$



Exemplo - Busca Tableau - 2ª Iteração

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	$-\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+2
x_5	0	$+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-1	+1	0	+4
x_6	0	$+\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	+4
Z	+1	-244	0	+61	+60	0	0	-474

Verificar se a solução é ótima! (Linha de Z).

Exemplo - Busca Tableau - 2ª Iteração

Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
X_2	0	$-\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+2
X_5	0	$+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-1	+1	0	+4
X_6	0	$+\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	+4
Z	+1	-244	0	+61	+60	0	0	-474



Entra

Escolhe variável com coeficiente mais negativo na FOB para entrar na base.

Exemplo - Busca Tableau - 2ª Iteração

Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b	
X_2	0	$-\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+2	$-\frac{3}{4}$
X_5	0	$+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-1	+1	0	+4	$\frac{12}{7}$
X_6	0	$+\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	+4	$\frac{12}{5}$
Z	+1	-244	0	+61	+60	0	0	-474	

↑
Entra

←
←

Para cada linha do Tableau calcular razão $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ e verificar se há razão positiva e finita.

Exemplo - Busca Tableau - 2ª Iteração

Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
X_2	0	$-\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+2
X_5	0	$+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-1	+1	0	+4
X_6	0	$+\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	+4
Z	+1	-244	0	+61	+60	0	0	-474



Entra

 $\frac{12}{7}$

← Sai

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.

$$\text{LINHA}'_1 = \text{LINHA}_1 + \frac{2}{7} \times \text{LINHA}_2$$

$$\text{LINHA}'_2 = \frac{3}{7} \times \text{LINHA}_2$$

$$\text{LINHA}'_3 = \text{LINHA}_3 - \frac{5}{7} \times \text{LINHA}_2$$

$$\text{LINHA}'_4 = \text{LINHA}_4 + \frac{732}{7} \times \text{LINHA}_2$$

Exemplo - Busca Tableau - 3ª Iteração

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{2}{7}$	0	$+\frac{22}{7}$
x_1	0	+1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$+\frac{3}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$
x_6	0	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	+1	$+\frac{8}{7}$
Z	+1	0	0	$-\frac{61}{7}$	$-\frac{312}{7}$	$+\frac{732}{7}$	0	$-\frac{390}{7}$

Verificar se a solução é ótima! (Linha de Z).

Exemplo - Busca Tableau - 3ª Iteração

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{2}{7}$	0	$+\frac{22}{7}$
x_1	0	+1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$+\frac{3}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$
x_6	0	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	+1	$+\frac{8}{7}$
Z	+1	0	0	$-\frac{61}{7}$	$-\frac{312}{7}$	$+\frac{732}{7}$	0	$-\frac{390}{7}$



Entra

Escolhe variável com coeficiente mais negativo na FOB para entrar na base.

Exemplo - Busca Tableau - 3ª Iteração

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{2}{7}$	0	$+\frac{22}{7}$	-11
x_1	0	+1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$+\frac{3}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$	-4
x_6	0	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	+1	$+\frac{8}{7}$	$+\frac{8}{5}$ ←
Z	+1	0	0	$-\frac{61}{7}$	$-\frac{312}{7}$	$+\frac{732}{7}$	0	$-\frac{390}{7}$	

↑
Entra

Para cada linha do Tableau calcular razão $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ e verificar se há razão positiva e finita.

Exemplo - Busca Tableau - 3ª Iteração

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{2}{7}$	0	$+\frac{22}{7}$	-11
x_1	0	+1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$+\frac{3}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$	-4
x_6	0	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	+1	$+\frac{8}{7}$	$+\frac{8}{5}$ ← Sai
Z	+1	0	0	$-\frac{61}{7}$	$-\frac{312}{7}$	$+\frac{732}{7}$	0	$-\frac{390}{7}$	

↑
Entra

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.

$$\text{LINHA}'_1 = \text{LINHA}_1 + \frac{2}{5} \times \text{LINHA}_3$$

$$\text{LINHA}'_2 = \text{LINHA}_2 + \frac{3}{5} \times \text{LINHA}_3$$

$$\text{LINHA}'_3 = \frac{7}{5} \times \text{LINHA}_3$$

$$\text{LINHA}'_4 = \text{LINHA}_4 + \frac{312}{5} \times \text{LINHA}_3$$

Exemplo - Busca Tableau - 4ª Iteração

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{5}$	0	0	$+\frac{2}{5}$	$+\frac{18}{5}$
x_3	0	+1	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$+\frac{3}{5}$	$+\frac{12}{5}$
x_4	0	0	0	$+\frac{1}{5}$	+1	-1	$+\frac{7}{5}$	$+\frac{8}{5}$
Z	+1	0	0	$+\frac{1}{5}$	0	+60	$+\frac{312}{5}$	$+\frac{78}{5}$

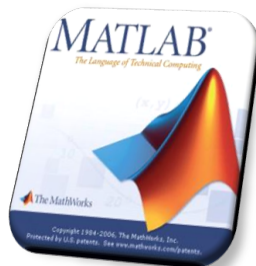
OPTIMAL SOLUTION
FOUND !!!!

Tipo	Variável	Valor
VB	x_1	$\frac{12}{5}$
	x_2	$\frac{18}{5}$
	x_4	$\frac{8}{5}$
VNB	x_3	0
	x_5	0
	x_6	0
FOB	Z	$\frac{78}{5}$

Matlab - Problema Original

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} &\max 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{Sujeito a} \\ &-2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ &x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ &x_1 + x_2 = 6 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Matlab - Problema Original

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Programa em Matlab

```
1 clear all; close all; clc;
2 c = -[2 3];
3 A = [ -2 3 ; -1 -2 ];
4 B = [ 6 ; -8 ];
5 Aeq = [ 1 1 ];
6 Beq = [ 6 ];
7 [x, fval, exitflag] = ...
    linprog(c,A,B,Aeq,Beq);
```

Matlab - Problema Original

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Programa em Matlab

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

x =

2.4000
3.6000

fval =

-15.6000

exitflag =

1

Matlab - Problema Original

Resolver o seguinte PPL

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Programa em Matlab

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

x =

2.4000 = 12/5

3.6000 = 18/5

fval =

-15.6000 z=78/5

exitflag =

1 OK !!!

Problema Modificado para BigM

Inserção das Variáveis Artificiais e das Penalidades

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeito a

$$-2x_1 + 3x_2$$

$$+x_3$$

$$= 6$$

$$x_1 + 2x_2$$

$$-x_4$$

$$+x_5$$

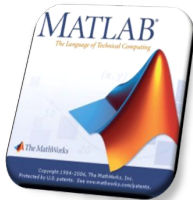
$$= 8$$

$$x_1 + x_2$$

$$+x_6$$

$$= 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$



Problema Modificado para BigM

Inserção das Variáveis Artificiais e das Penalidades

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 \quad -Mx_5 \quad -Mx_6 = 0$$

Sujeito a

$$-2x_1 + 3x_2 \quad +x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 \quad -x_4 \quad +x_5 = 8$$

$$x_1 + x_2 \quad \quad \quad +x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Programa em Matlab

```
1 clear all; close all; clc;
2 M = 60;
3 c = [-2 3 0 0 -M -M];
4 A = []; B=[];
5 Aeq = [-2 3 1 0 0 0; 1 2 0 -1 1 0; 1 1 0 0 0 1];
6 Beq = [6;8;6];
7 lb = [0 0 0 0 0 0];
8 ub = [inf inf inf inf inf inf];
9 [x, fval, exitflag] = linprog(c,A,B,Aeq,Beq,lb,ub);
```

Problema Modificado para BigM

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

x =

2.4000

3.6000

0.0000

1.6000

0.0000

0.0000

fval =

-15.6000

exitflag =

1



Problema Modificado para BigM

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

Optimization terminated.

x =

x₁ 2.4000 =12/5

x₂ 3.6000 =18/5

x₃ 0.0000

x₄ 1.6000 =8/5

x₅ 0.0000

x₆ 0.0000

fval =

-15.6000 FOB: z = 78/5

exitflag =

1 OK !!!!





Como obter soluções iniciais em modelos com restrições na forma \geq ou $=$?

Método das Penalidades
(BIG-M)



Método das Duas Fases



Como obter soluções iniciais em modelos com restrições na forma \geq ou $=$?

Método das Penalidades
(BIG-M)



Método das Duas Fases

Exemplo - Método de Duas Fases

Inserção das Variáveis Artificiais em uma Nova FOB de Minimização

$$\min W = x_5 + x_6$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeito à:

$$-2x_1 + 3x_2 + \quad \quad \quad x_3 \quad \quad \quad = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 \quad \quad \quad +x_5 \quad \quad \quad = 8$$

$$x_1 + x_2 \quad \quad \quad +x_6 \quad \quad \quad = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Exemplo - Método de Duas Fases

Inserção das Variáveis Artificiais em uma Nova FOB de Minimização

$$\min W - x_5 - x_6 = 0$$

$$\max Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Sujeito à:

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Exemplo - Método de Duas Fases

Inserção das Variáveis Artificiais em uma Nova FOB de Minimização

$$\min W + 2x_1 + 3x_2 - x_4 - 14 = 0 \text{ (Fase 1)}$$

$$\max Z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \text{ (Fase 2)}$$

Sujeito à:

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 8$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 1

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
x_5	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
x_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	-2	-3	0	0	0	0	0
W	+1	+2	+3	0	-1	0	0	+14

Verificar se a solução é ótima! (Linha de Z).
Problema de Minimização, todos coeficientes devem ser negativos.

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 1

Base	Z/W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
X_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
X_6	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
X_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	-2	-3	0	0	0	0	0
W	+1	+2	+3	0	-1	0	0	+14



Entra

Escolhe variável com coeficiente mais positivo na FOB para entrar na base.

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 1

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
x_5	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
x_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	-2	-3	0	0	0	0	0
W	+1	+2	+3	0	-1	0	0	+14



Entra

$$\frac{6}{3}=2$$



$$\frac{8}{2}=4$$



$$\frac{6}{1}=6$$



Para cada linha do Tableau calcular razão $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ e verificar se há razão positiva e finita.

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 1

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	-2	+3	+1	0	0	0	+6
x_5	0	+1	+2	0	-1	+1	0	+8
x_6	0	+1	+1	0	0	0	+1	+6
Z	+1	-2	-3	0	0	0	0	0
W	+1	+2	+3	0	-1	0	0	+14



Entra

$$\frac{6}{3}=2$$

← Sai

$$\frac{8}{2}=4$$

$$\frac{6}{1}=6$$

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.

$$\text{LINHA}'_1 = \frac{1}{3} \times \text{LINHA}_1$$

$$\text{LINHA}'_2 = \text{LINHA}_2 - \frac{2}{3} \times \text{LINHA}_1$$

$$\text{LINHA}'_3 = \text{LINHA}_3 - \frac{1}{3} \times \text{LINHA}_1$$

$$\text{LINHA}'_4 = \text{LINHA}_4 + \text{LINHA}_1$$

$$\text{LINHA}'_5 = \text{LINHA}_5 - \text{LINHA}_1$$



Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 2

Base	Z/W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
X_2	0	$-\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+2
X_5	0	$+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-1	+1	0	+4
X_6	0	$+\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	+4
Z	+1	-4	0	+1	0	0	0	6
W	+1	+4	0	-1	-1	0	0	+8

Verificar se a solução é ótima! (Linha de Z).
Problema de Minimização!

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 2

Base	Z/W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
X_2	0	$-\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+2
X_5	0	$+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-1	+1	0	+4
X_6	0	$+\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	+4
Z	+1	-4	0	+1	0	0	0	6
W	+1	+4	0	-1	-1	0	0	+8



Entra

Escolhe variável com coeficiente mais positivo na FOB para entrar na base.

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 2

Base	Z/W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b	
X_2	0	$-\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+2	-3
X_5	0	$+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-1	+1	0	+4	$+\frac{12}{7}$
X_6	0	$+\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	+4	$+\frac{12}{5}$
Z	+1	-4	0	+1	0	0	0	6	
W	+1	+4	0	-1	-1	0	0	+8	

↑
Entra

←
←

Para cada linha do Tableau calcular razão $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ e verificar se há razão positiva e finita.

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 2

Base	Z/W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b	
X_2	0	$-\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+2	
X_5	0	$+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-1	+1	0	+4	$+\frac{12}{7}$ ← Sai
X_6	0	$+\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	+1	+4	
Z	+1	-4	0	+1	0	0	0	6	
W	+1	+4	0	-1	-1	0	0	+8	

↑
Entra

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.

$$\text{LINHA}'_1 = \text{LINHA}_1 + \frac{2}{7} \times \text{LINHA}_2$$

$$\text{LINHA}'_2 = \frac{3}{7} \times \text{LINHA}_2$$

$$\text{LINHA}'_3 = \text{LINHA}_3 - \frac{5}{7} \times \text{LINHA}_2$$

$$\text{LINHA}'_4 = \text{LINHA}_4 + \frac{12}{7} \times \text{LINHA}_2$$

$$\text{LINHA}'_5 = \text{LINHA}_5 - \frac{12}{7} \times \text{LINHA}_2$$

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 3

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{2}{7}$	0	$+\frac{22}{7}$
x_1	0	+1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$+\frac{3}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$
x_6	0	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	+1	$+\frac{8}{7}$
Z	+1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$+\frac{12}{7}$	0	$+\frac{90}{7}$
W	+1	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{12}{7}$	0	$+\frac{8}{7}$

Verificar se a solução é
ótima! (Linha de Z).
Problema de Minimização

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 3

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{2}{7}$	0	$+\frac{22}{7}$
x_1	0	+1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$+\frac{3}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$
x_6	0	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	+1	$+\frac{8}{7}$
Z	+1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$+\frac{12}{7}$	0	$+\frac{90}{7}$
W	+1	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{12}{7}$	0	$+\frac{8}{7}$



Entra

Escolhe variável com coeficiente mais positivo na FOB para entrar na base.

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 3

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{2}{7}$	0	$+\frac{22}{7}$	-11
x_1	0	+1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$+\frac{3}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$	-4
x_6	0	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	+1	$+\frac{8}{7}$	$+\frac{8}{5}$
Z	+1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$+\frac{12}{7}$	0	$+\frac{90}{7}$	
W	+1	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{12}{7}$	0	$+\frac{8}{7}$	



Entra



Para cada linha do Tableau calcular razão $\frac{b_i}{\text{coluna}}$ e verificar se há razão positiva e finita.

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 3

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{2}{7}$	0	$+\frac{22}{7}$	-11
x_1	0	+1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$+\frac{3}{7}$	0	$+\frac{12}{7}$	-4
x_6	0	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{5}{7}$	+1	$+\frac{8}{7}$	$+\frac{8}{5}$ ← Sai
Z	+1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$+\frac{12}{7}$	0	$+\frac{90}{7}$	
W	+1	0	0	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{5}{7}$	$-\frac{12}{7}$	0	$+\frac{8}{7}$	

↑
Entra

A linha com a menor razão positiva finita sairá da base.

$$\text{LINHA}'_1 = \text{LINHA}_1 + \frac{2}{5} \times \text{LINHA}_3$$

$$\text{LINHA}'_2 = \text{LINHA}_2 + \frac{3}{5} \times \text{LINHA}_3$$

$$\text{LINHA}'_3 = \frac{7}{5} \times \text{LINHA}_3$$

$$\text{LINHA}'_4 = \text{LINHA}_4 + \frac{12}{5} \times \text{LINHA}_3$$

$$\text{LINHA}'_5 = \text{LINHA}_5 - \text{LINHA}_3$$

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 4

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{5}$	0	0	$+\frac{2}{5}$	$+\frac{18}{5}$
x_1	0	+1	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$+\frac{3}{5}$	$+\frac{12}{5}$
x_4	0	0	0	$+\frac{1}{5}$	+1	-1	$+\frac{7}{5}$	$+\frac{8}{5}$
Z	+1	0	0	$+\frac{1}{5}$	0	0	$+\frac{12}{5}$	$+\frac{78}{5}$
W	+1	0	0	0	0	-1	-1	0

OPTIMAL SOLUTION
FOUND DA FASE 1!!!!

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 1 - Iter. 4

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{5}$	0	0	$+\frac{2}{5}$	$+\frac{18}{5}$
x_1	0	+1	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$+\frac{3}{5}$	$+\frac{12}{5}$
x_4	0	0	0	$+\frac{1}{5}$	+1	-1	$+\frac{7}{5}$	$+\frac{8}{5}$
Z	+1	0	0	$+\frac{1}{5}$	0	0	$+\frac{12}{5}$	$+\frac{78}{5}$
W	+1	0	0	0	0	-1	-1	0

Eliminam-se as colunas
das variáveis artificiais e a
linha da FOB de
Minimização!!!!
Inicia-se a FASE 2.

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 2 - Iter. 1

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{5}$	0	$+\frac{18}{5}$
x_1	0	+1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$+\frac{12}{5}$
x_4	0	0	0	$+\frac{1}{5}$	+1	$+\frac{8}{5}$
Z	+1	0	0	$+\frac{1}{5}$	0	$+\frac{78}{5}$

Verificar se a solução é
ótima! (Linha de Z).
Problema de Maximização

Método das Duas Fases - Tableau - Fase 2 - Iter. 1

Base	Z/W	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	0	+1	$+\frac{1}{5}$	0	$+\frac{18}{5}$
x_1	0	+1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$+\frac{12}{5}$
x_4	0	0	0	$+\frac{1}{5}$	+1	$+\frac{8}{5}$
Z	+1	0	0	$+\frac{1}{5}$	0	$+\frac{78}{5}$

OPTIMAL SOLUTION
FOUND !!!!

Tipo	Variável	Valor
VB	x_1	$\frac{12}{5}$
	x_2	$\frac{18}{5}$
	x_4	$\frac{8}{5}$
VNB	x_3	0
	x_5	0
	x_6	0
FOB	Z	$\frac{78}{5}$

Método das Duas Fases - Youtube



Clicar para assistir video no YouTube !!!

Fim

