

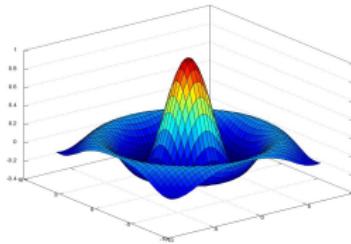
Introdução à Pesquisa Operacional

Professores André L.M. Marcato, Ivo C.da Silva Jr, Joao A.Passos Filho

Universidade Federal de Juiz de Fora
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

andre.marcato@ufjf.edu.br, ivo.junior@ufjf.edu.br, joao.passos@ufjf.edu.br

Primeiro Semestre de 2018



Agenda da Apresentação

1 Introdução

- Pesquisa Operacional

2 Modelagem para a Tomada de Decisão

- Variáveis de Decisão, Parâmetros, Restrições, Função Objetivo

3 Conceitos Gerais de Otimização

- Discussões Iniciais

Pesquisa Operacional

-  Investigação Operacional
 -  Operational Research
 -  Operations Research
 - Outras Denominações
 - Programação Matemática
 - Otimização

Principais Sociedades de PO



- **Sobrapo** (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional)



- **INFORMS** (Institute for Operations Research and Management Science)
 - **EURO** (The Association of European Operational Research Societies)
 - **APDIO** (Associação Portuguesa de Investigação Operacional)
 - **IFORS** (International Federation of Operational Research Societies)
 - **ALIO** (Asociación Latino-Ibero-Americana de Investigación Operativa)

O que é otimizar?



Pergunta: O que é otimizar?

Significado de Otimizar

v.t. Dar a algo (uma máquina, uma empresa, uma situação) um rendimento ótimo, criando-lhe as condições mais favoráveis ou tirando (dele ou dela) o melhor partido possível; tornar (algo) ótimo ou ideal.

O que é otimizar?



Pergunta: O que é otimizar?

EXTRAIR A MELHOR SOLUÇÃO POSSÍVEL DE UM DETERMINADO PROBLEMA/SITUAÇÃO

Histórico

2ª Guerra Mundial (1939-1945)



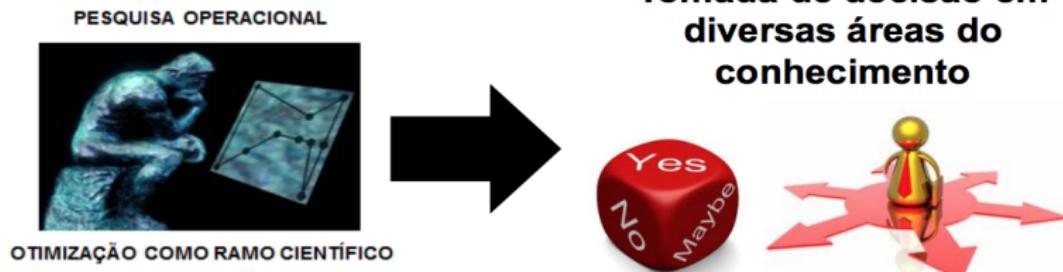
OTIMIZAÇÃO COMO RAMO CIENTÍFICO



PESQUISA OPERACIONAL

Investigação de forma sistemática e racional dos processos envolvidos na realização de uma atividade produtiva (bélica ou não)

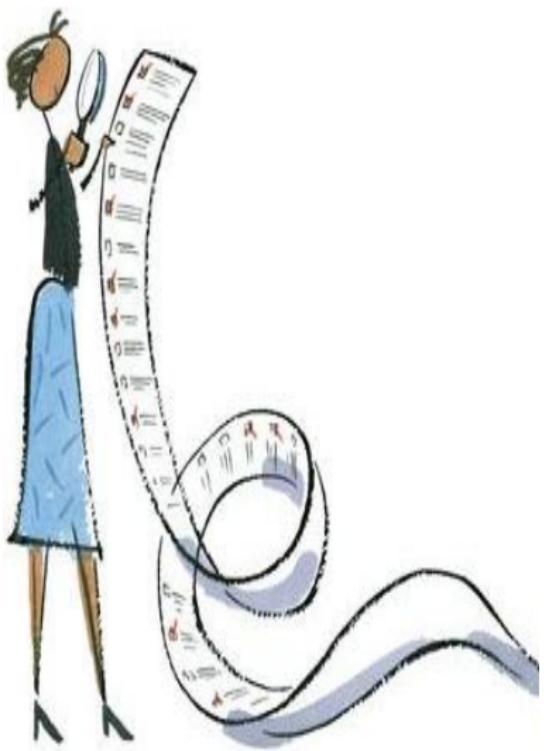
Histórico



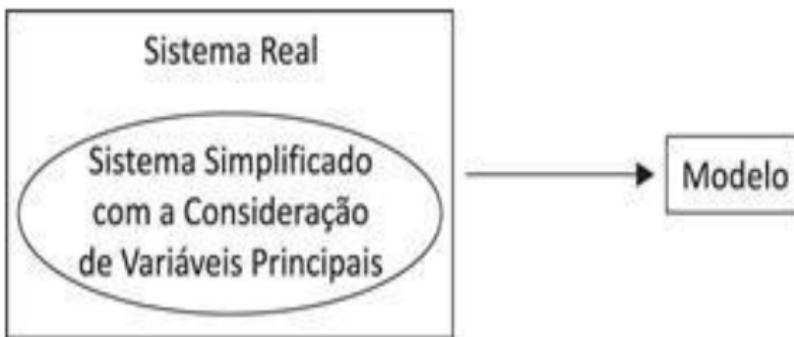
IFORS 2014 - Technical Program (3 em 3 anos)

- Railway Scheduling Problems
- Routing Problems with Profits and Other Applications
- Airline/Airport Optimisation in Operations and Scheduling
- Supply Chain Planning
- Offshore Upstream Logistics
- City Logistic Operations
- Models for Gas and Electricity Markets
- Energy and Environmental Management
- Dynamical Systems and Mathematical Modelling
- Optimization Methods for Smartgrid Management
- Optimization Methods in Transportation Systems
- E muito, muito mais !!!!

IFORS 2014 - Technical Program (3 em 3 anos)



Modelagem a Partir de um Sistema Real



Modelagem para a Tomada de Decisão

a) Variáveis de decisão

- Contínuas
 - Pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo.
- Discretas ou Inteiras
 - Ex. Dimensionamento da escala ideal de funcionários por turno de trabalho, Unidades a fabricar de cada tipo de caminhão em uma indústria automobilística
- Binárias (0 ou 1)
 - Ex. Decidir entre construir ou não uma usina ou linha de transmissão.

Modelagem para a Tomada de Decisão

b) Parâmetros

- São valores previamente conhecidos
- Ex. Demanda de cada produto para um problema de mix de produção
- Ex. Custo para a produção de determinado tipo de móvel

c) Função objetivo

- Função matemática que determina o valor alvo que se pretende alcançar
- Ex. Minimização do custo de operação de um sistema hidrotérmico
- Ex. Maximização do tempo entre a passagem de dois robôs por um ponto em um problema de patrulhamento
- Ex. Maximização do fluxo de potência em uma linha de transmissão
- Ex. Minimização da LOLP (Loss of Load Probability) em um problema de confiabilidade

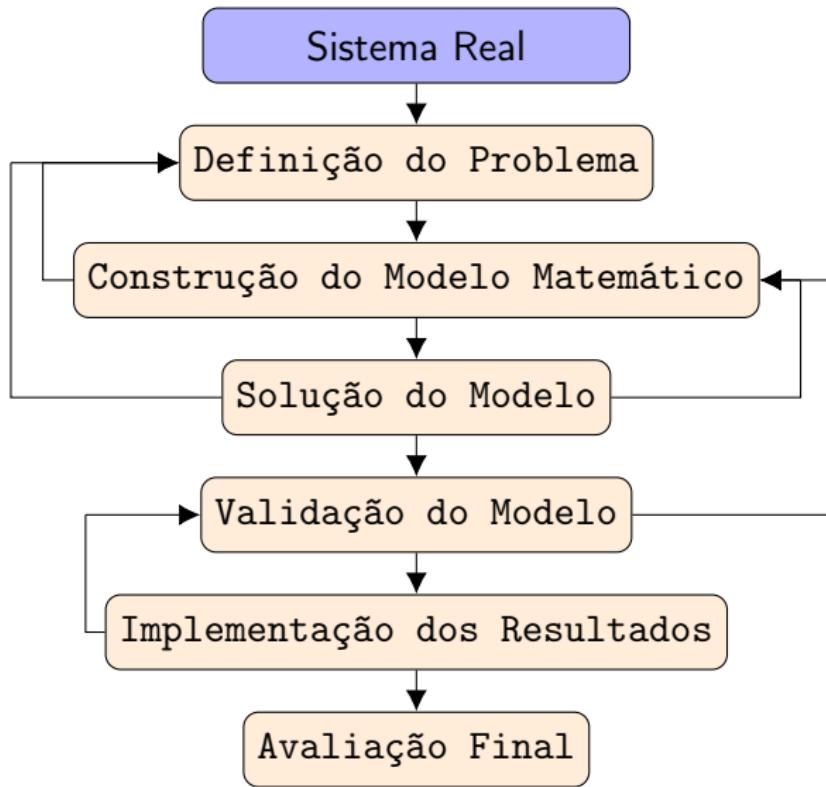


Modelagem para a Tomada de Decisão

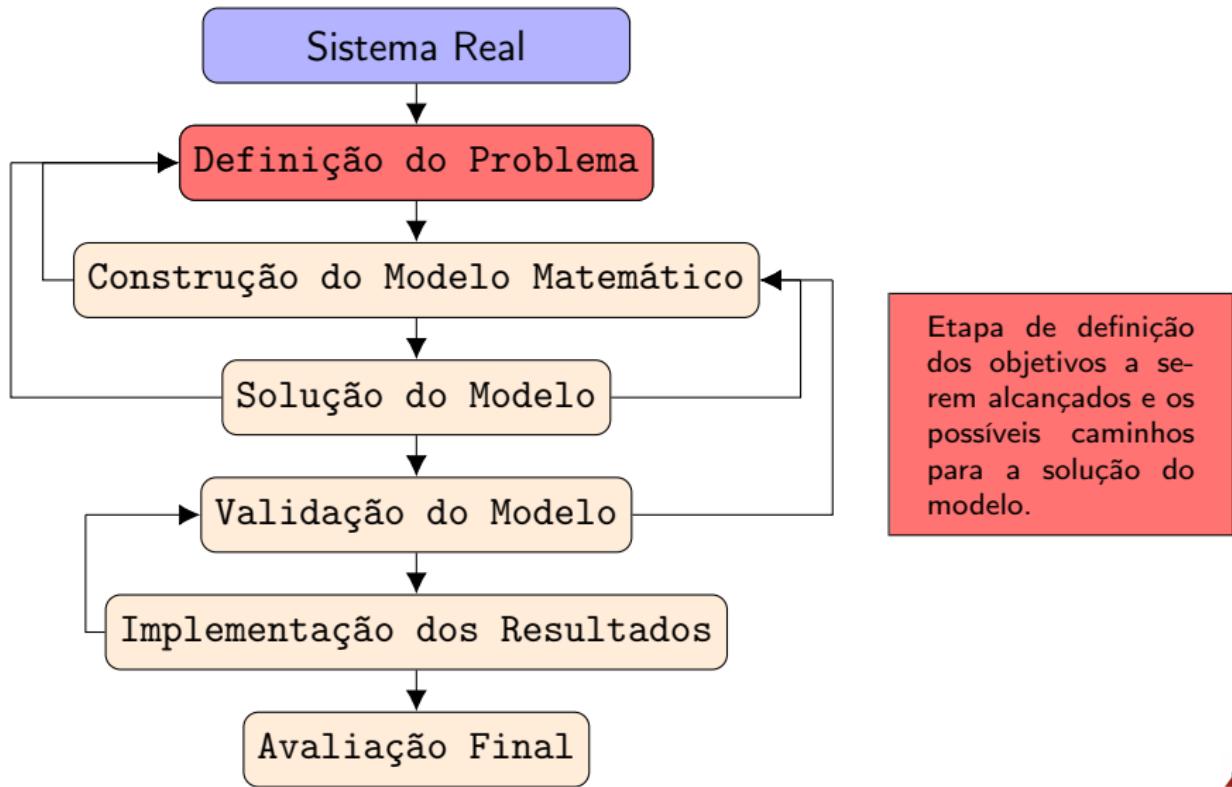
d) Restrições

- Conjunto de equações ou inequação que as variáveis de decisão devem satisfazer.
- Ex. Limitações físicas do sistema
- Ex. Capacidade máxima de produção
- Ex. Número máximo de colaboradores
- Ex. Risco a ser assumido pelo investidor
- Canalização: Limites inferiores e superiores das variáveis de decisão.

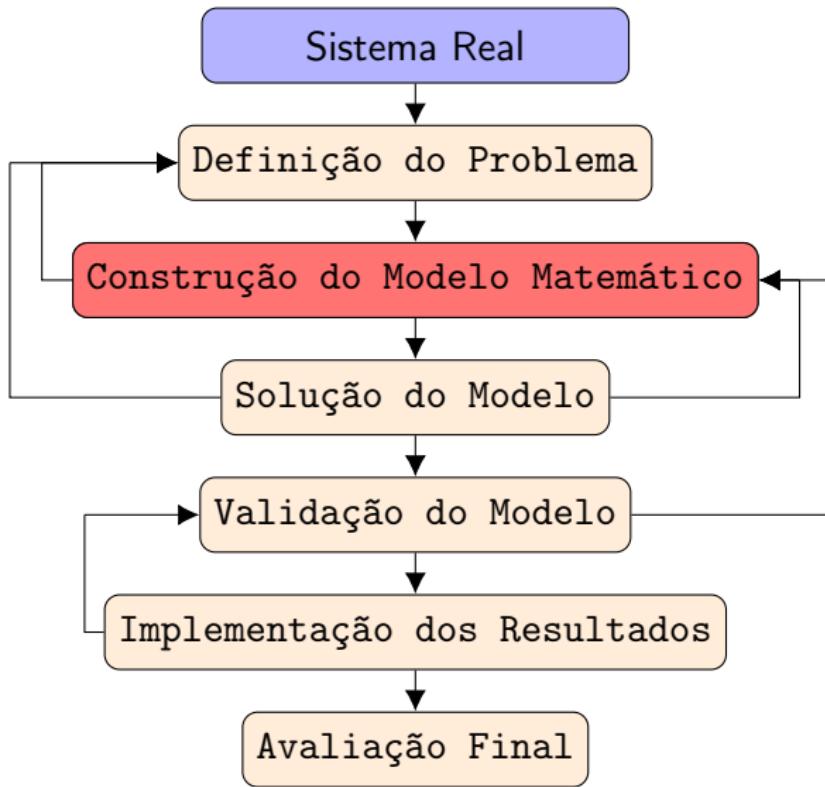
Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



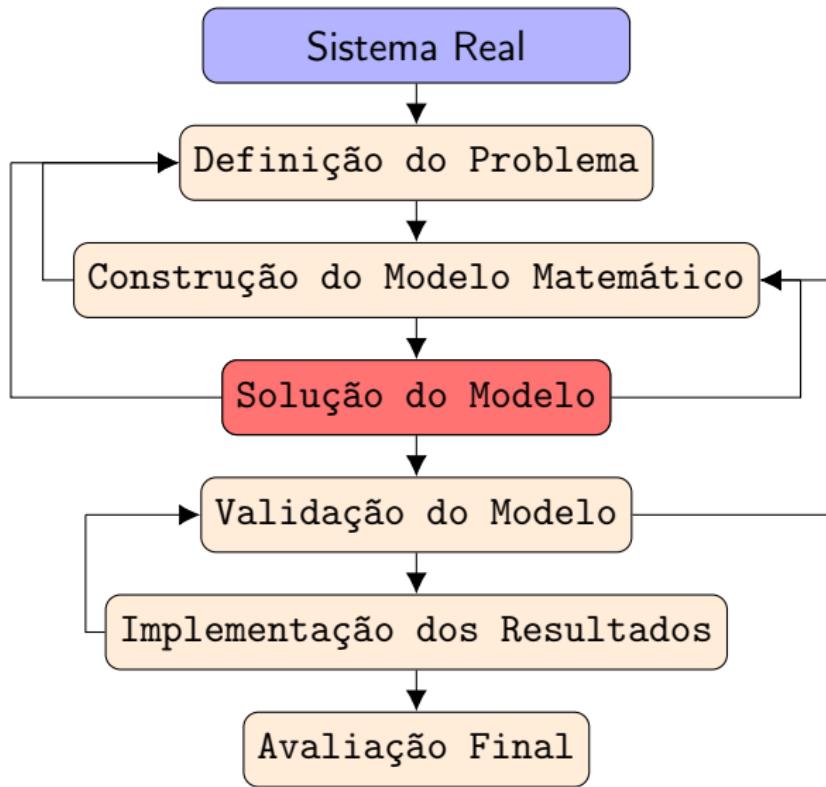
Importante!

Representação do sistema real através da definição de:

- Variáveis
- Função objetivo
- Equações
- Inequações
- Tipo Modelo
- Tipo Variáveis



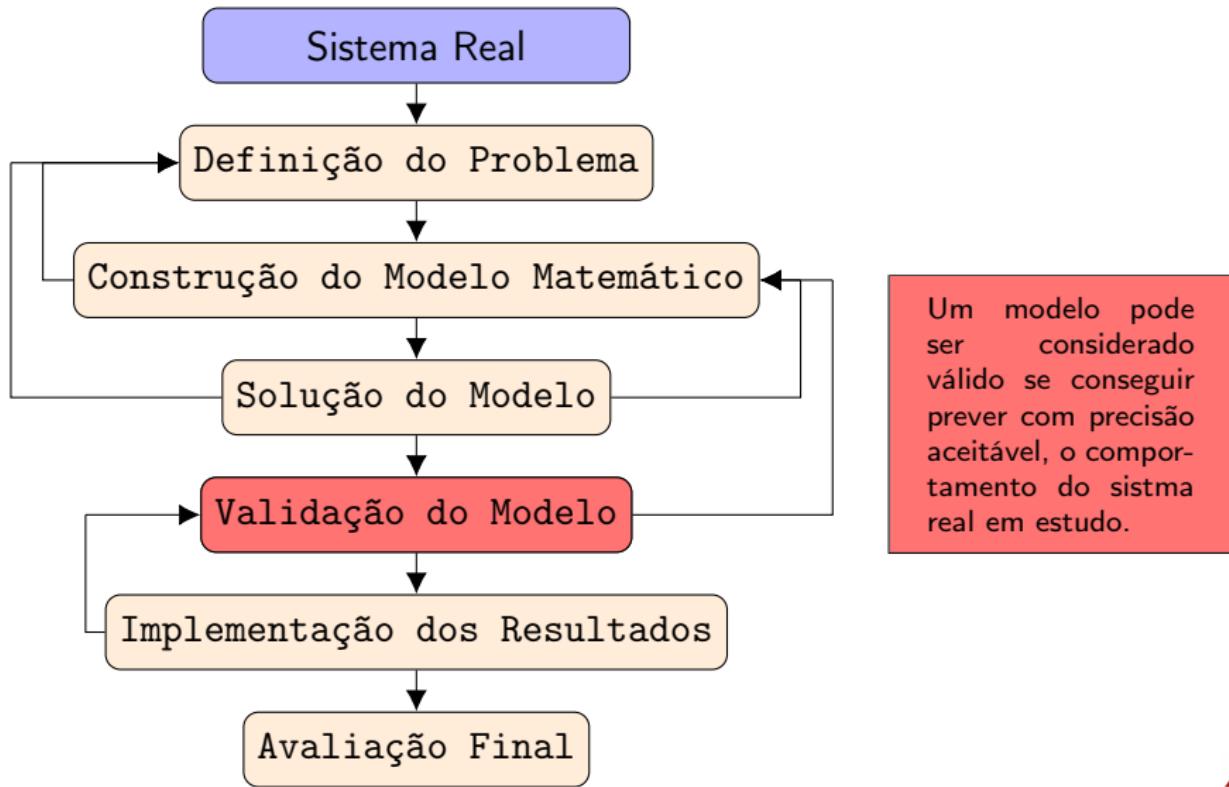
Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



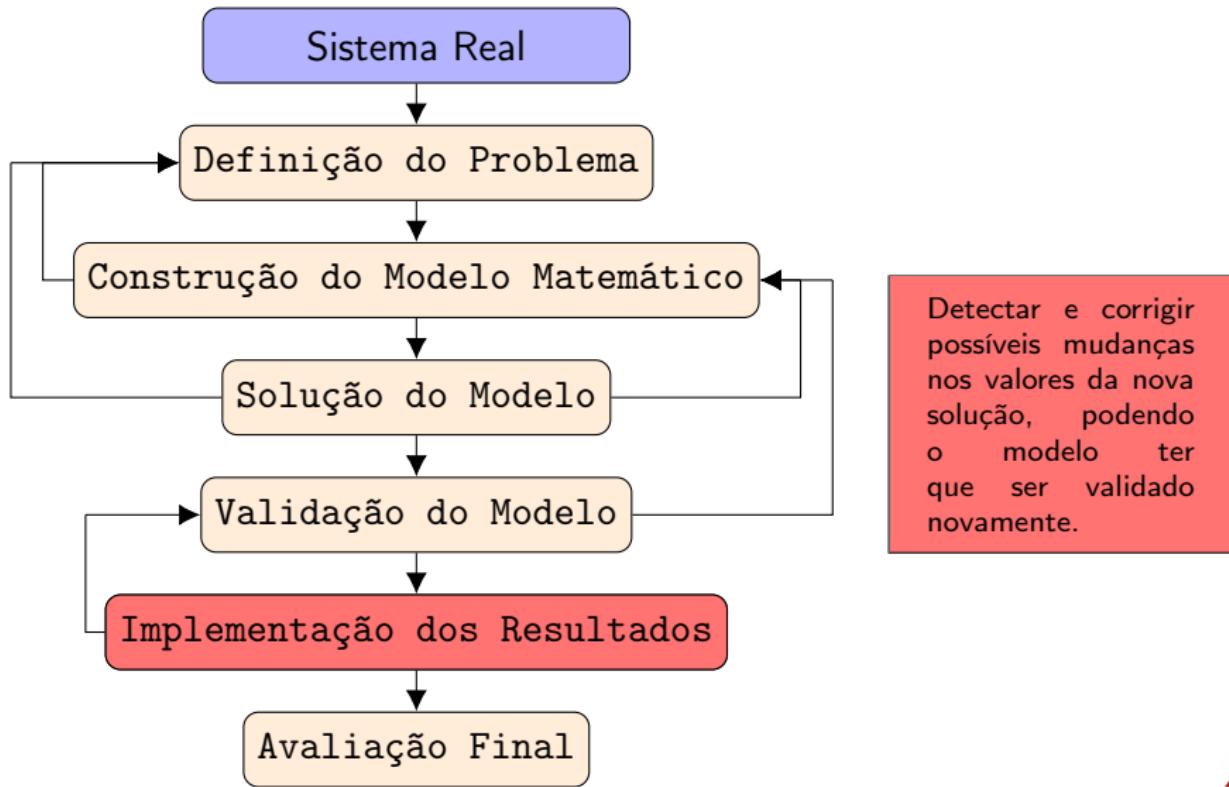
Utilização de diversas técnicas de otimização para a resolução do modelo matemático desenvolvido. Exemplos:

- Programação Linear
- Programação Dinâmica
- Bat Search Algorithm

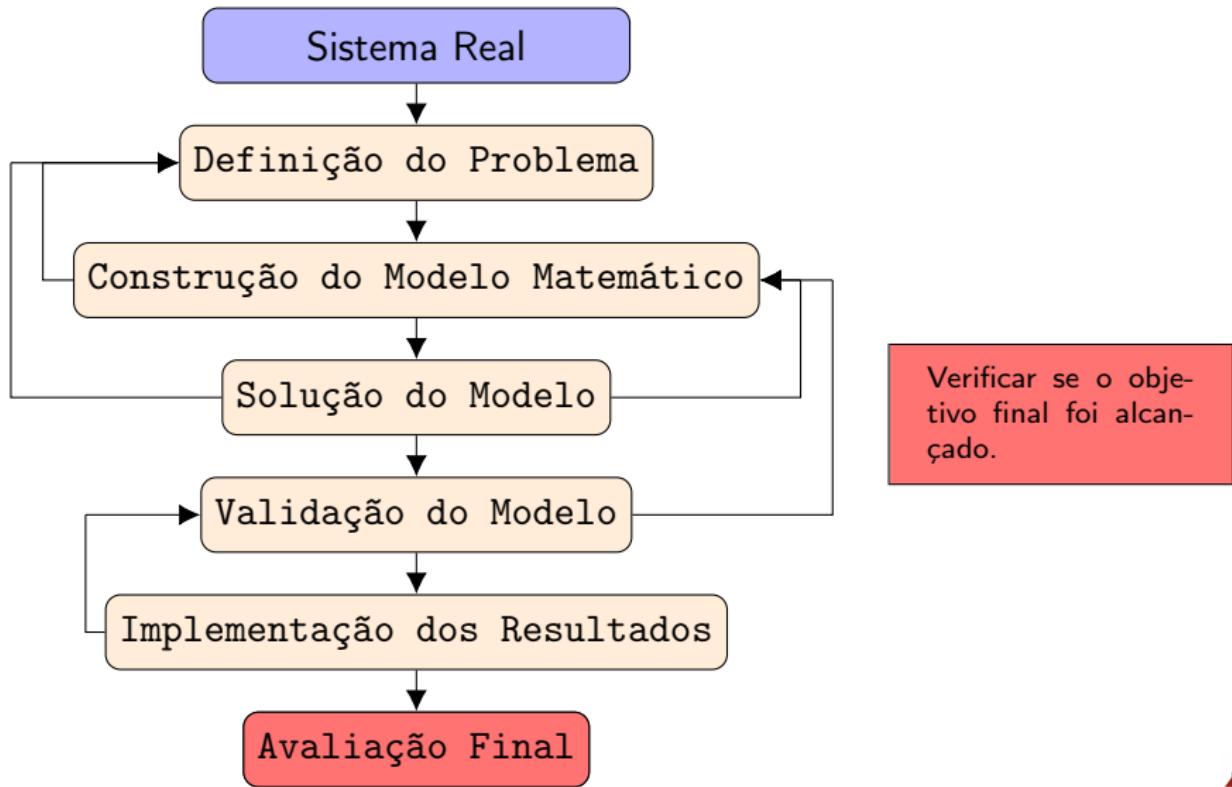
Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



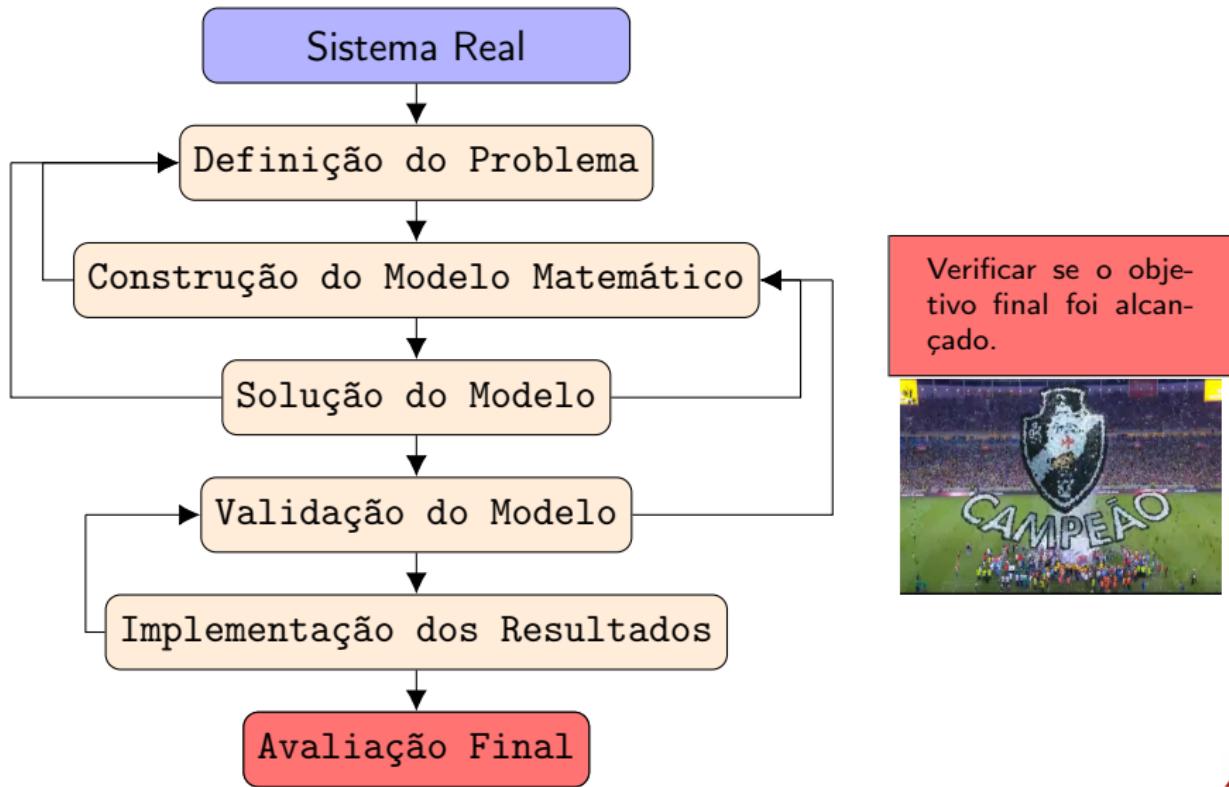
Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Fases do Estudo da Pesquisa Operacional



Tipo Modelo e Tipo Variável

Tabela: Características dos Problemas de Programação Linear, Não Linear, Binária, Inteira e suas Extensões

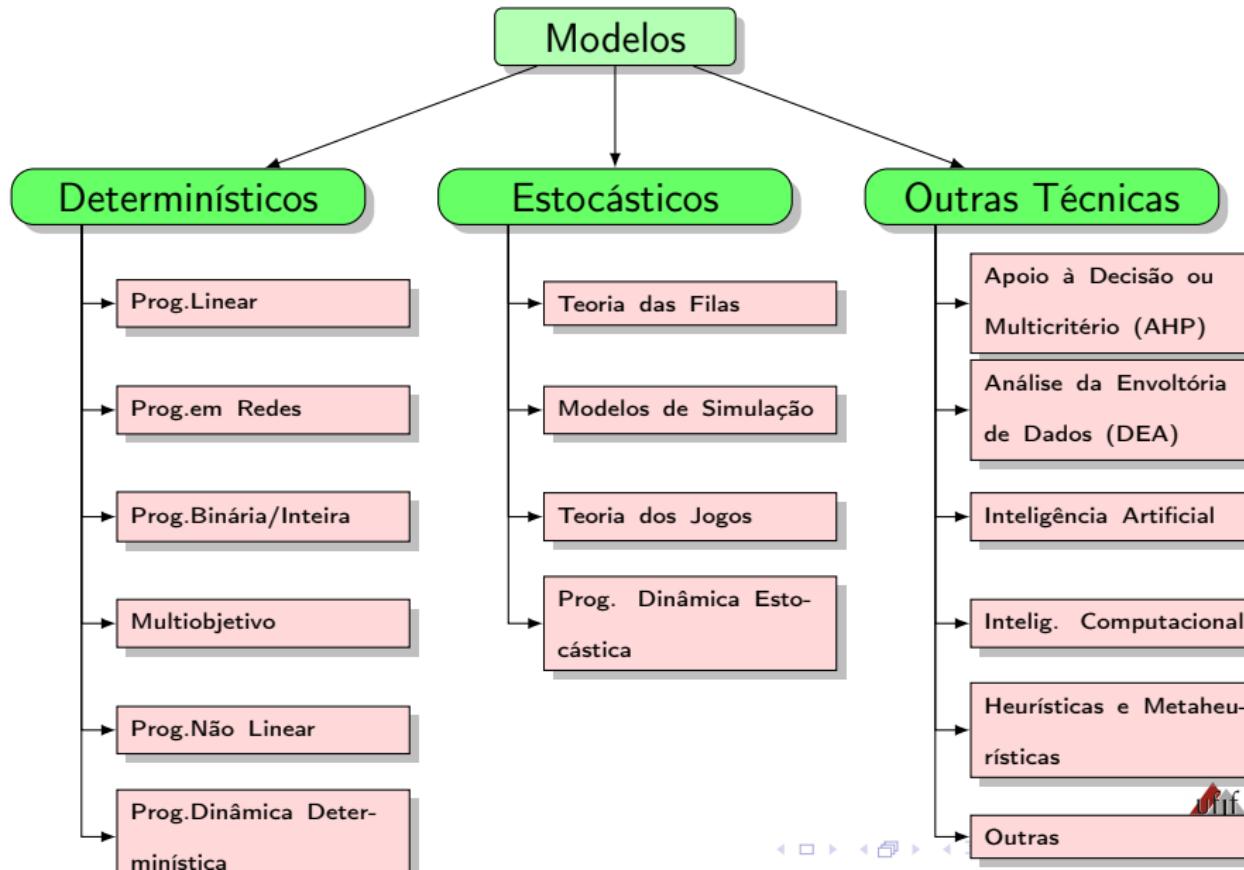
Tipo do Modelo	Tipo da Variável
Programação Linear (PL)	Contínua
Prog.Linear Inteira (PLI)	Discreta
Prog.Linear Inteira Mista (PLIM ou PIM)	Discreta e Contínua
Prog.Linear Binária (PLB ou PB)	Binária
Prog.Linear Binária Mista (PLBM ou PBM)	Binária e Contínua
Prog.Não Linear (PNL)	Contínua
Prog.Não Linear Inteira (PNLI)	Discreta
Prog.Não Linear Inteira Mista (PNLIM)	Discreta e Contínua
Prog.Não Linear Binária Mista (PNLBM)	Binária e Contínua
Prog.Não Linear Inteira Binária (PNLIB)	Discreta e Binária

Tipo Modelo e Tipo Variável

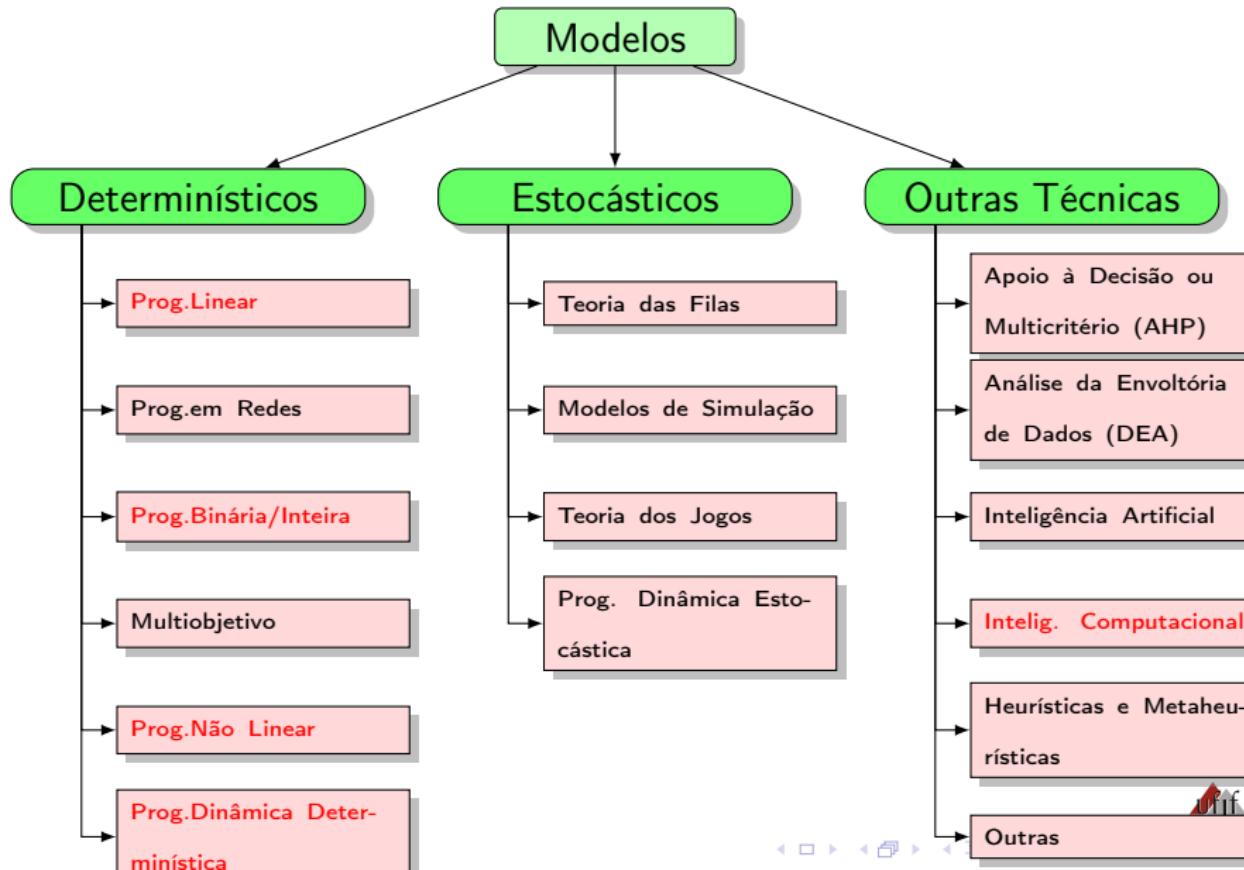
Tabela: Características dos Problemas de Programação Linear, Não Linear, Binária, Inteira e suas Extensões

Tipo do Modelo	FOB e Restrições
Programação Linear (PL)	Lineares
Prog.Linear Inteira (PLI)	Lineares
Prog.Linear Inteira Mista (PLIM ou PIM)	Lineares
Prog.Linear Binária (PLB ou PB)	Lineares
Prog.Linear Binária Mista (PLBM ou PBM)	Lineares
Prog.Não Linear (PNL)	Ao menos uma não linear
Prog.Não Linear Inteira (PNLI)	Ao menos uma não linear
Prog.Não Linear Inteira Mista (PNLIM)	Ao menos uma não linear
Prog.Não Linear Binária Mista (PNLBM)	Ao menos uma não linear
Prog.Não Linear Inteira Binária (PNLIB)	Ao menos uma não linear

Modelos/Técnicas de Solução



Modelos/Técnicas de Solução



Variáveis de Decisão

- São as variáveis manipuladas pelo método de otimização durante a busca pela solução ótima
- O processo de otimização procura sucessivos valores das variáveis de decisão até o objetivo (meta) ser alcançado
- Essas variáveis podem ser contínuas, inteiras ou binárias
- As variáveis podem ser positivas e/ou negativas

Critério de Decisão

A busca pela solução ótima tem que ser norteada por um **critério**.
O critério mais comum é o **econômico**.

→ Maximizar Lucros



→ Minimizar Custos



Otimização Multi-Objetivo

Quando existe **mais de um critério**, sabendo-se que, muitas vezes, os critérios podem ser **conflitantes**



Otimização Multi-Objetivo

Exemplo

Atender a demanda (MWh) ao menor custo de operação possível e ainda minimizar o volume de CO₂ lançado na atmosfera.



Termoelétrica

↓ Demanda

Função Objetivo

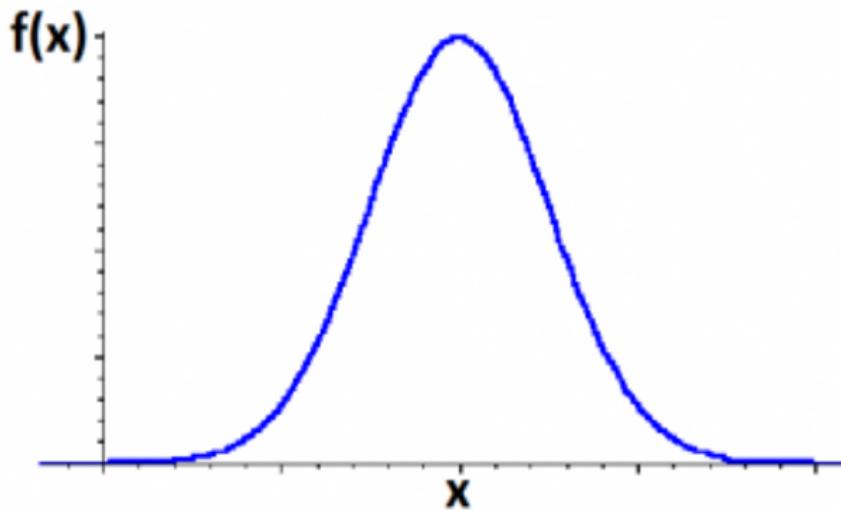
É a **expressão matemática do critério de otimização** descrita em termos das **variáveis de decisão** do problema.

Tabela: Classificação da FOB

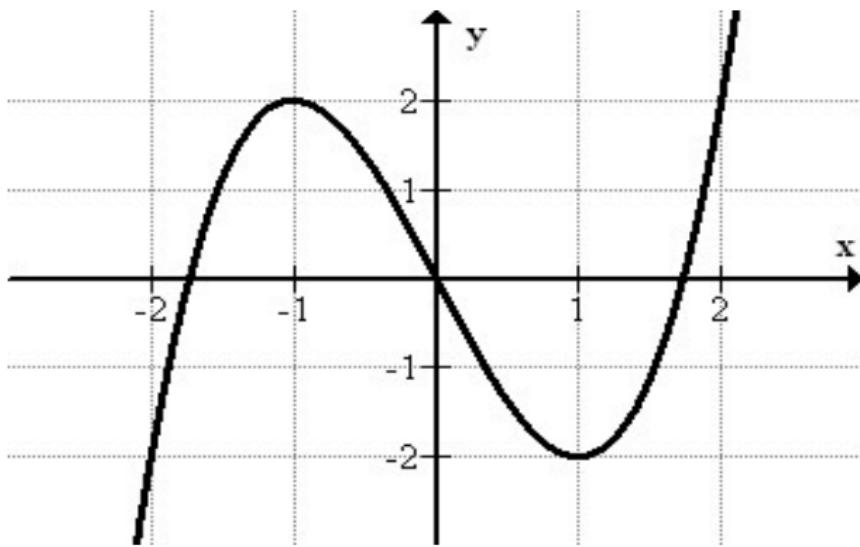
Continuidade	Contínua Descontínua Discreta
Modalidade	Unimodal Multimodal
Convexidade	Côncava ou Convexa Côncava e Convexa Nem Côncava e Nem Convexa

Além disto, a FOB pode ser **linear ou não linear** e **Mono-objetivo ou Multi-objetivo**.

FOB Contínua em todos os pontos



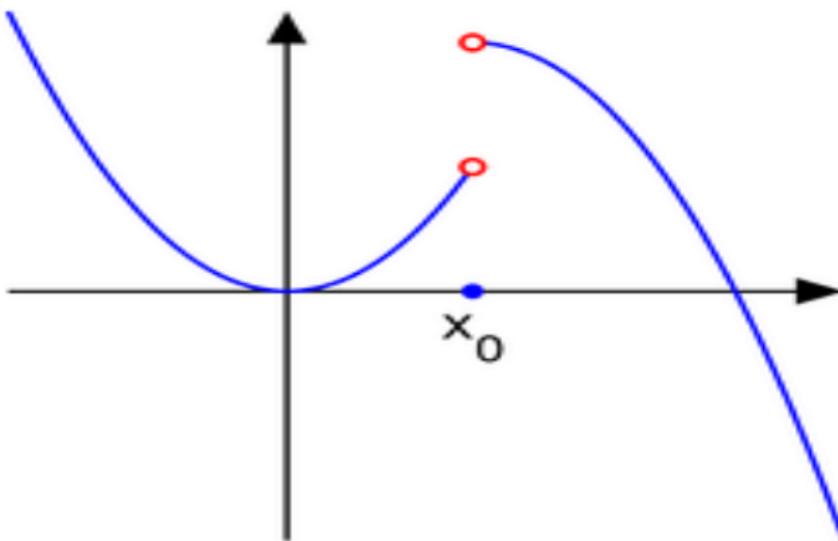
FOB Contínua em todos os pontos



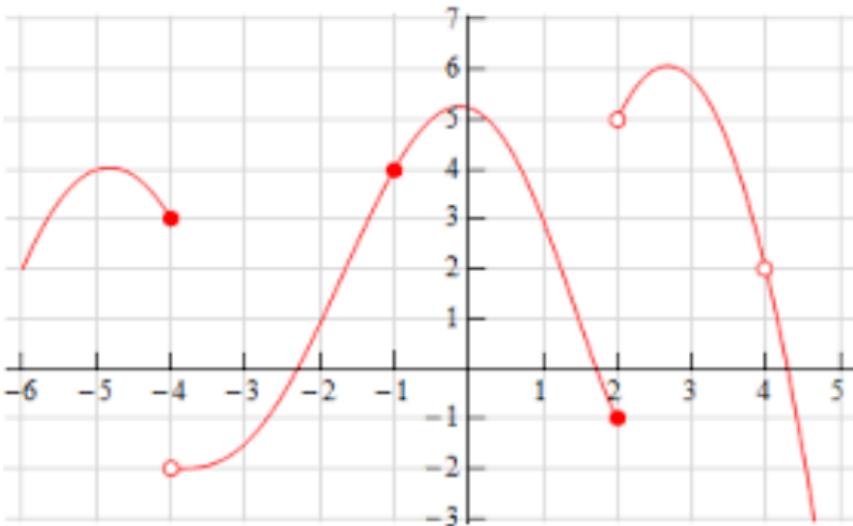
FOB Contínua, mas não diferenciável, em todos os pontos



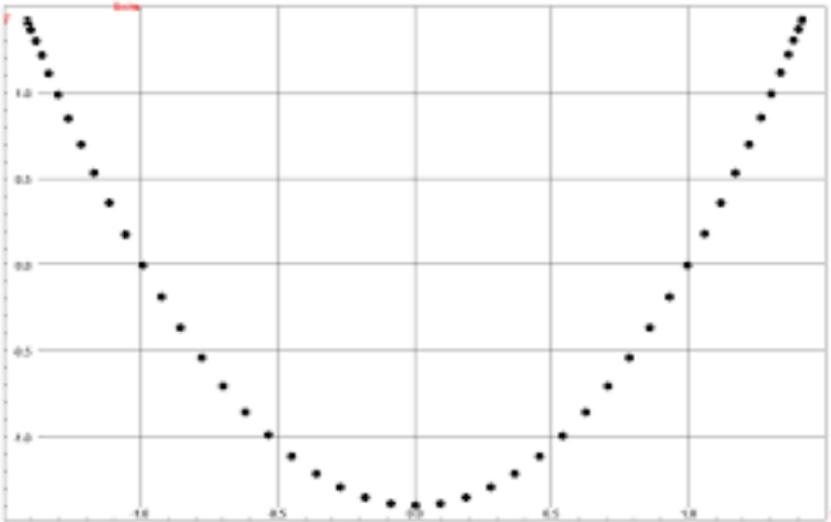
FOB Descontínua



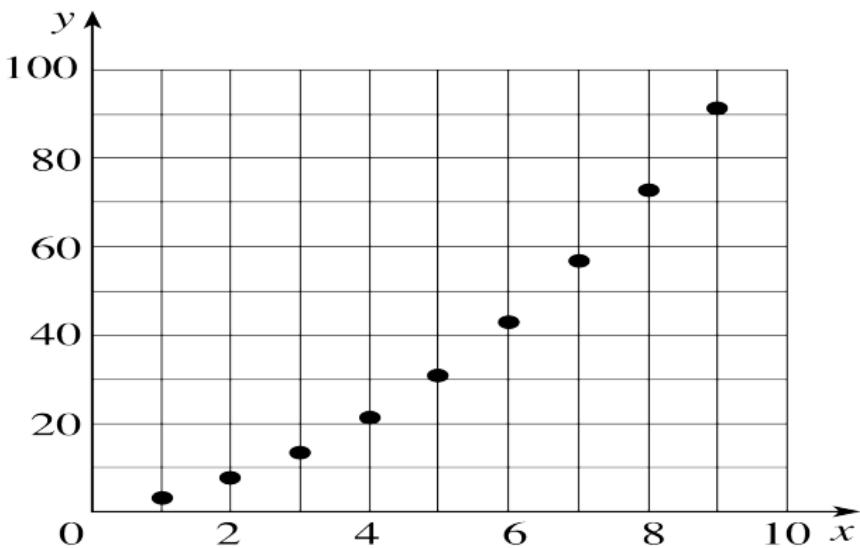
FOB Descontínua



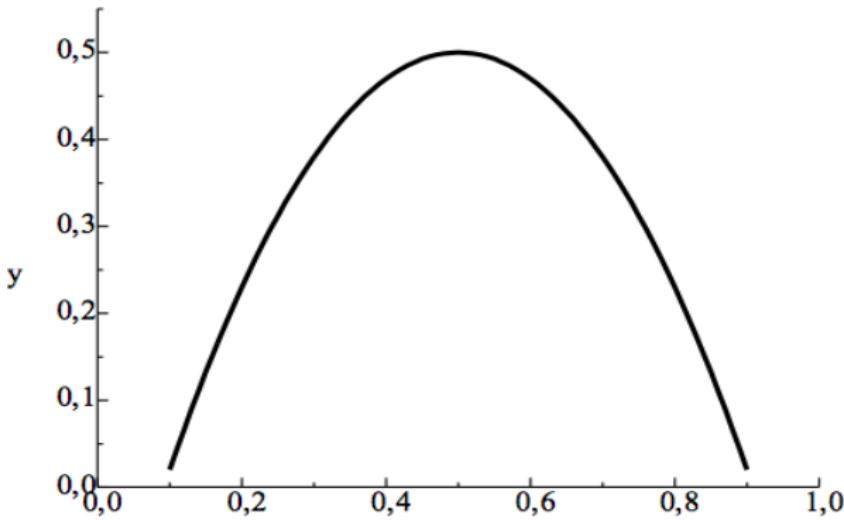
FOB Discreta



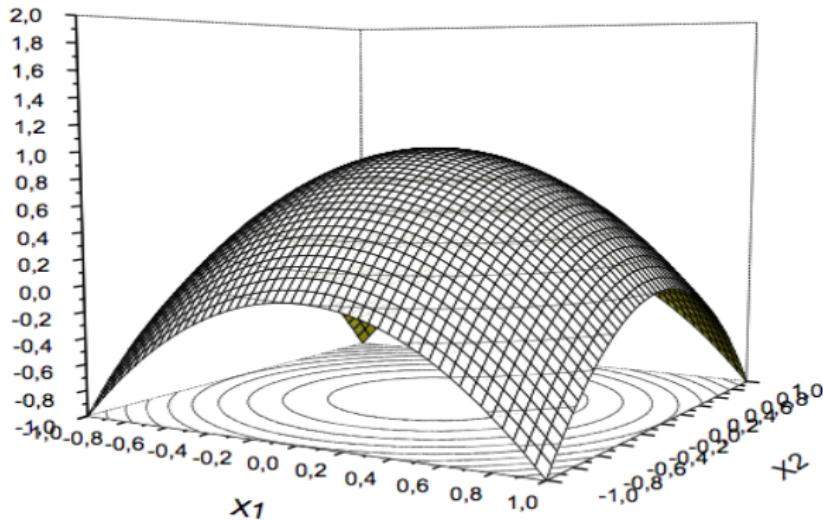
FOB Discreta



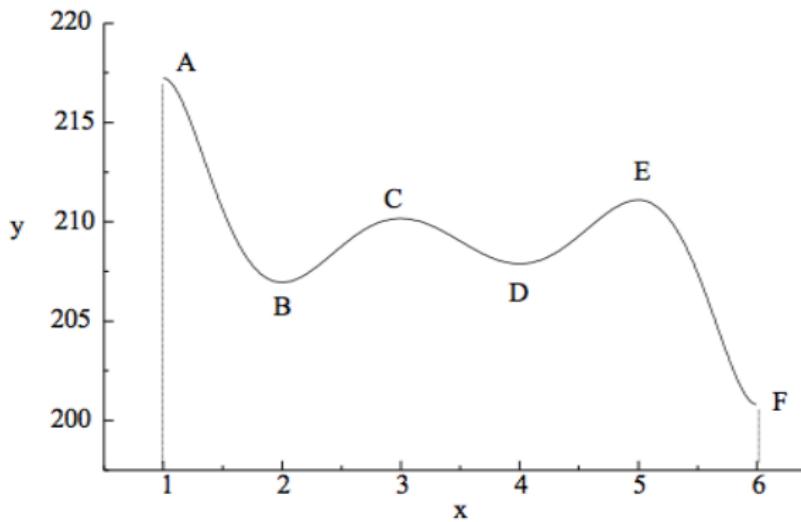
Unimodal em 1 Dimensão



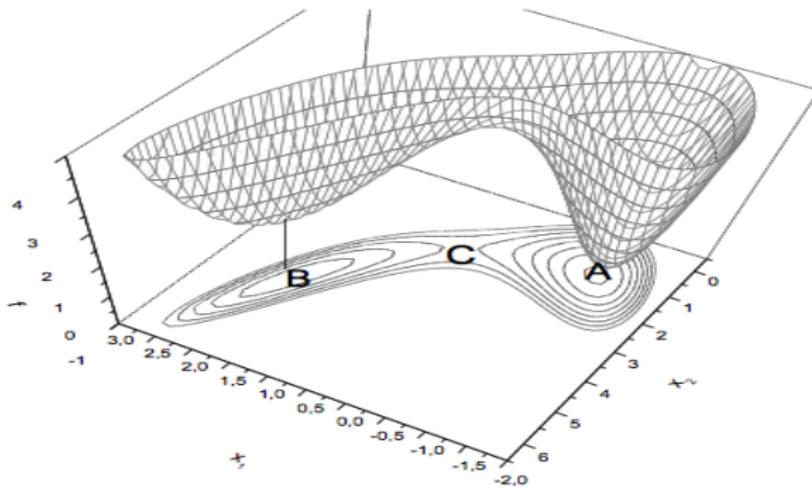
Unimodal em 2 Dimensões



Multimodal em 1 Dimensão



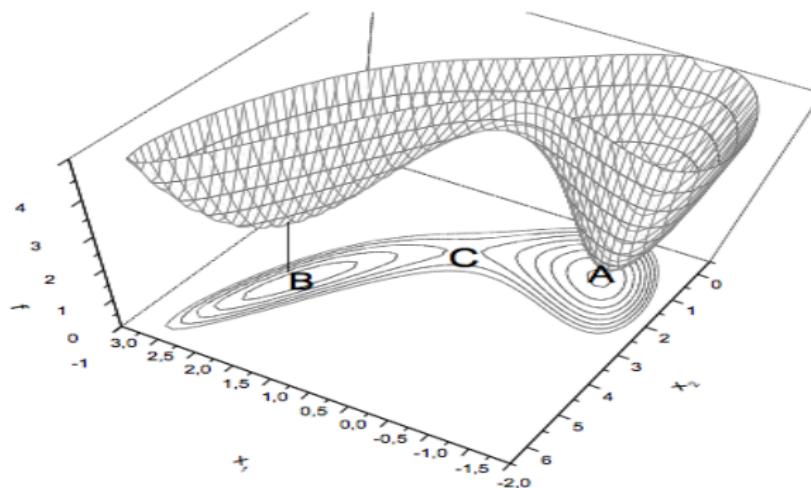
Multimodal em 2 Dimensões



Funções Multimodais



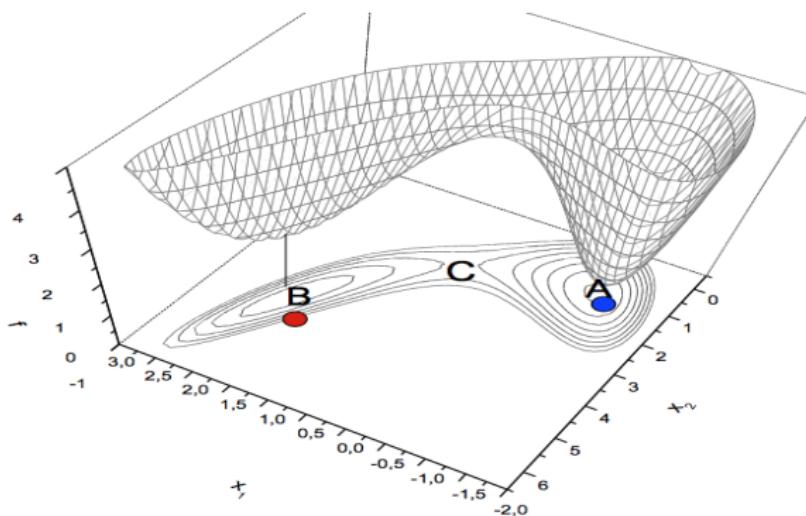
Sendo o objetivo a minimização da função $f(x_1, x_2)$ apresentada. Quantas soluções existem?



Funções Multimodais



Sendo o objetivo a minimização da função $f(x_1, x_2)$ apresentada. Quantas soluções existem?

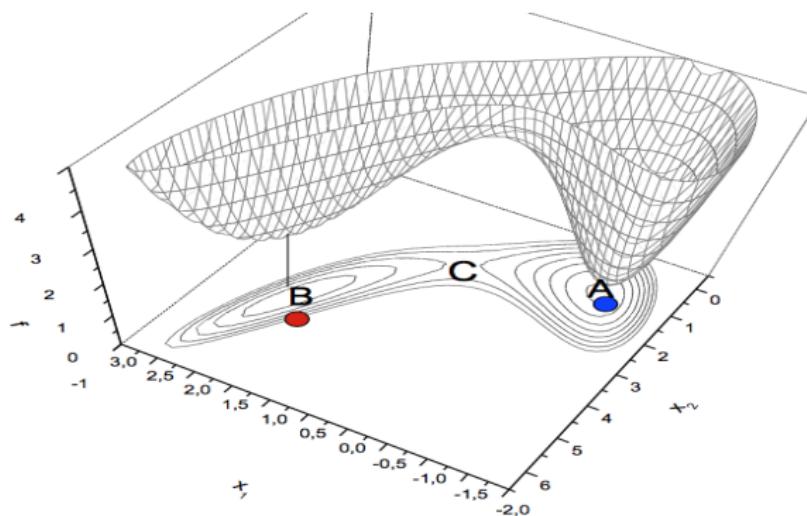


Funções Multimodais

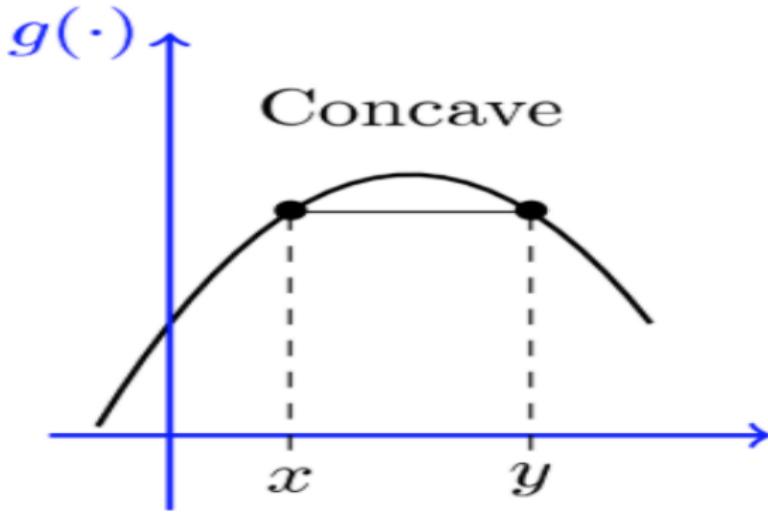


Sendo o objetivo a minimização da função $f(x_1, x_2)$ apresentada. Quantas soluções existem?

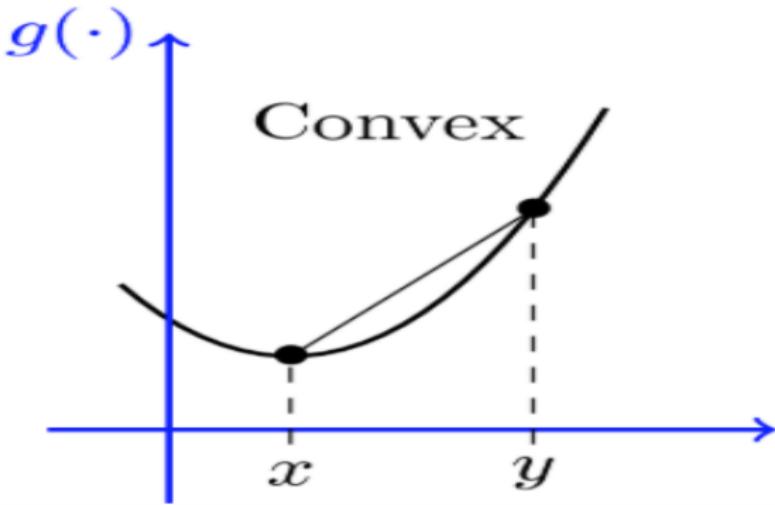
- Mínimo Local
- Mínimo Global



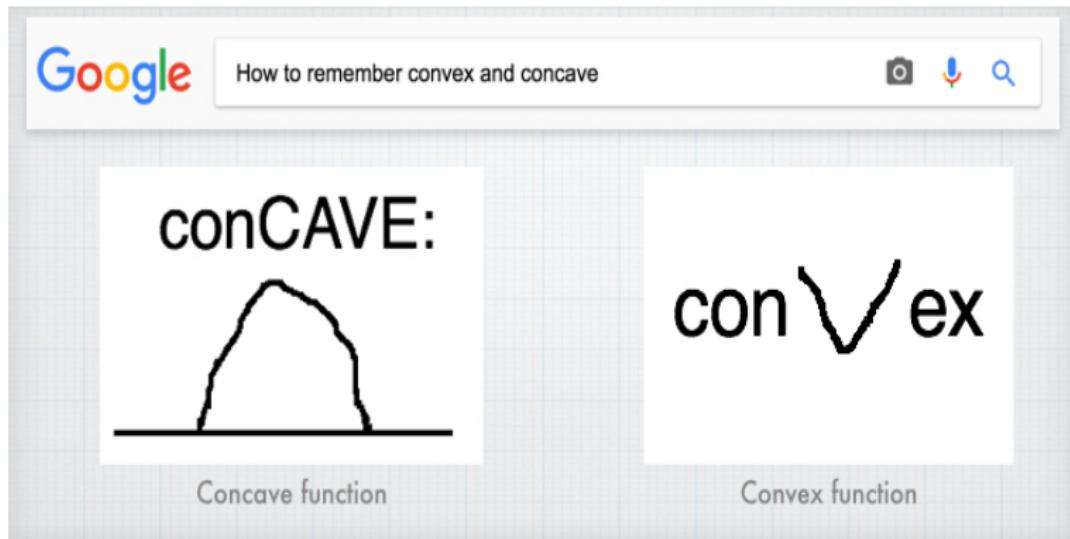
Função Côncava



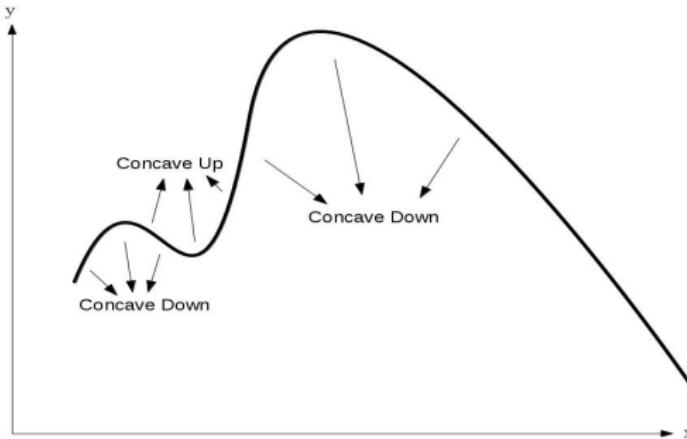
Função Convexa



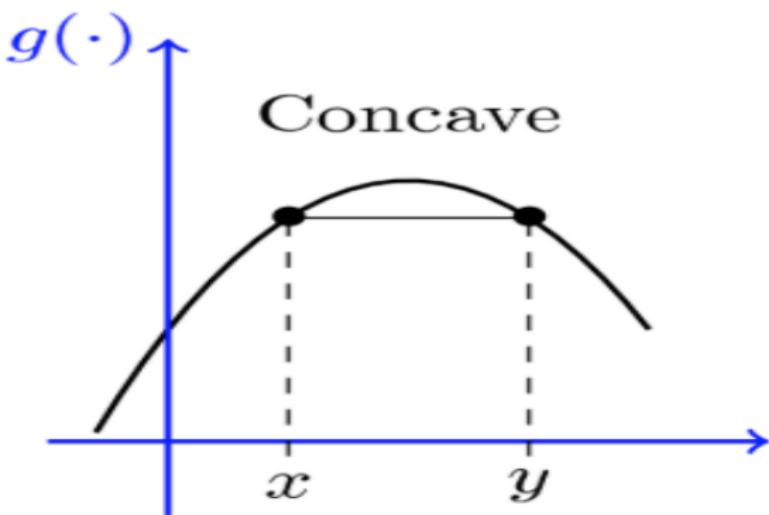
Função Côncava/Convexa



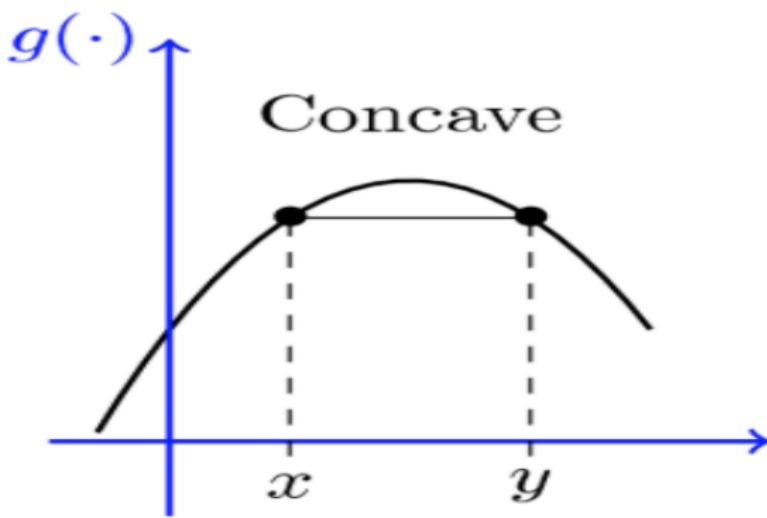
Nem Cônica, Nem Convexa



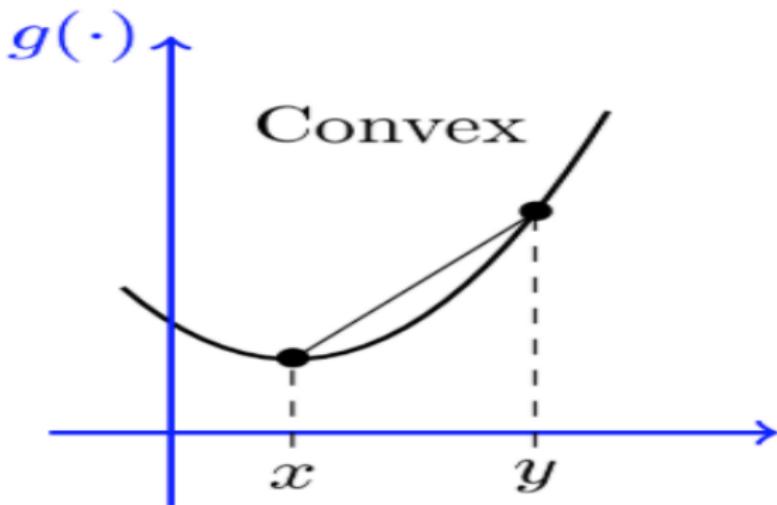
Função Côncava - Garantia de Ótimo Global?



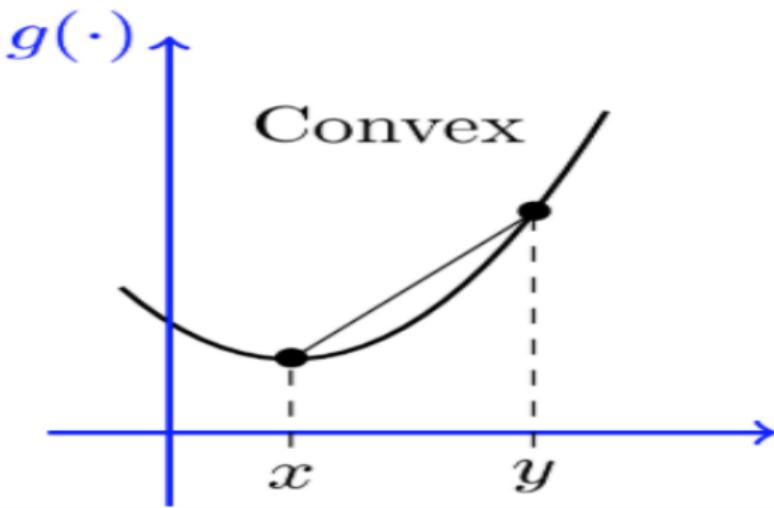
Função Côncava - Garantia de Ótimo Global?



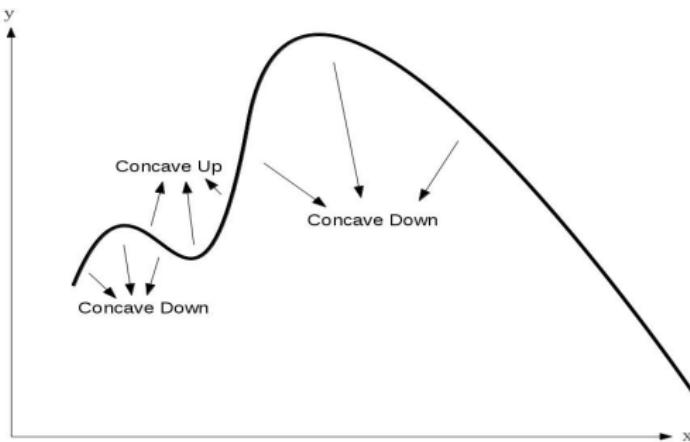
Função Convexa - Garantia de Ótimo Global?



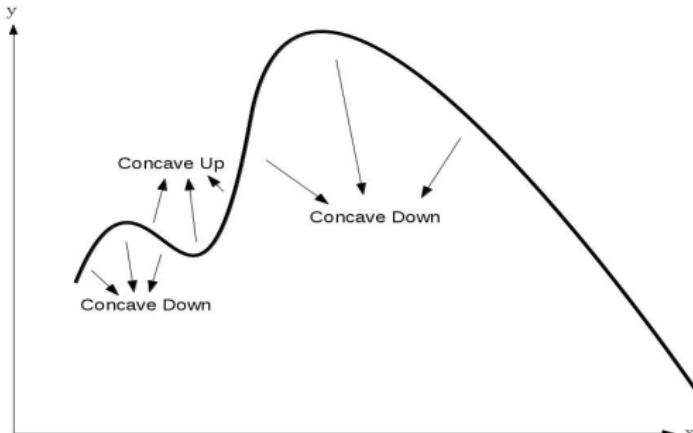
Função Convexa - Garantia de Ótimo Global?



Nem Cônica, Nem Convexa - Garantia de Ótimo Global?



Nem Cônica, Nem Convexa - Garantia de Ótimo Global?



Examinando a Convexidade/Concavidade

A Função é

Côncava	Estritamente Côncava	Convexa	Estritamente Convexa
$f''(x) \leq 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) \geq 0$	$f''(x) > 0$

Funções Multivariadas

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

- A função multivariada é **convexa** se a sua matriz Hessiana é **positiva semidefinda**.
- A função multivariada é **côncava** se a sua matriz Hessiana é **negativa semidefinda**.
- Critério de Sylvester: Todos os menores principais devem ser positivos (convexa) ou negativos (côncava).

Funções Multivariadas

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

- A função multivariada é **convexa** se a sua matriz Hessiana é **positiva semidefinda**.
- A função multivariada é **côncava** se a sua matriz Hessiana é **negativa semidefinda**.
- Critério de Sylvester: Todos os menores principais devem ser positivos (convexa) ou negativos (côncava).

Funções Multivariadas

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

- A função multivariada é **convexa** se a sua matriz Hessiana é **positiva semidefinda**.
- A função multivariada é **côncava** se a sua matriz Hessiana é **negativa semidefinda**.
- Critério de Sylvester: Todos os menores principais devem ser positivos (convexa) ou negativos (côncava).

Funções Multivariadas

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix}$$

- A função multivariada é **convexa** se a sua matriz Hessiana é **positiva semidefinda**.
- A função multivariada é **côncava** se a sua matriz Hessiana é **negativa semidefinda**.
- Critério de Sylvester: Todos os menores principais devem ser positivos (convexa) ou negativos (côncava).

Examine a convexidade da seguinte função

$$f(x) = -3x^2 - 4x + 4$$

$$f'(x) = -6x - 4$$

$$f''(x) = -6 < 0 \text{ para todo } x$$

A função é estritamente côncava.

Examine a convexidade da seguinte função

$$f(x) = e^{x^2}$$

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} > 0 \text{ para todo } x$$

A função é estritamente convexa.

Examine a convexidade da seguinte função

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 3x_1 - 4x_2 + 20$$

$$H = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|12| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 60 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 240 > 0$$

Matriz definida positiva. Função estritamente convexa.

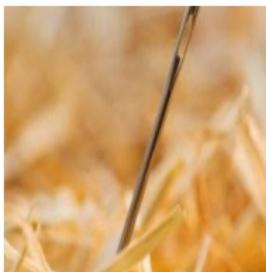
Região de Solução nem Côncava nem Convexa

O problema tem várias soluções, porém a garantia da otimalidade global é comprometida.

Dependendo da região de solução e do tamanho do problema



Otimalidade Global



Agulha no Palheiro

Região de Solução nem Côncava nem Convexa

Encontre a solução ótima para o seguinte problema de otimização:

$$\text{Max } F(x, y) = x^2 + y^2 + 25(\sin^2 x + \sin^2 y)$$

s.a.

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-6 \leq y \leq 6$$

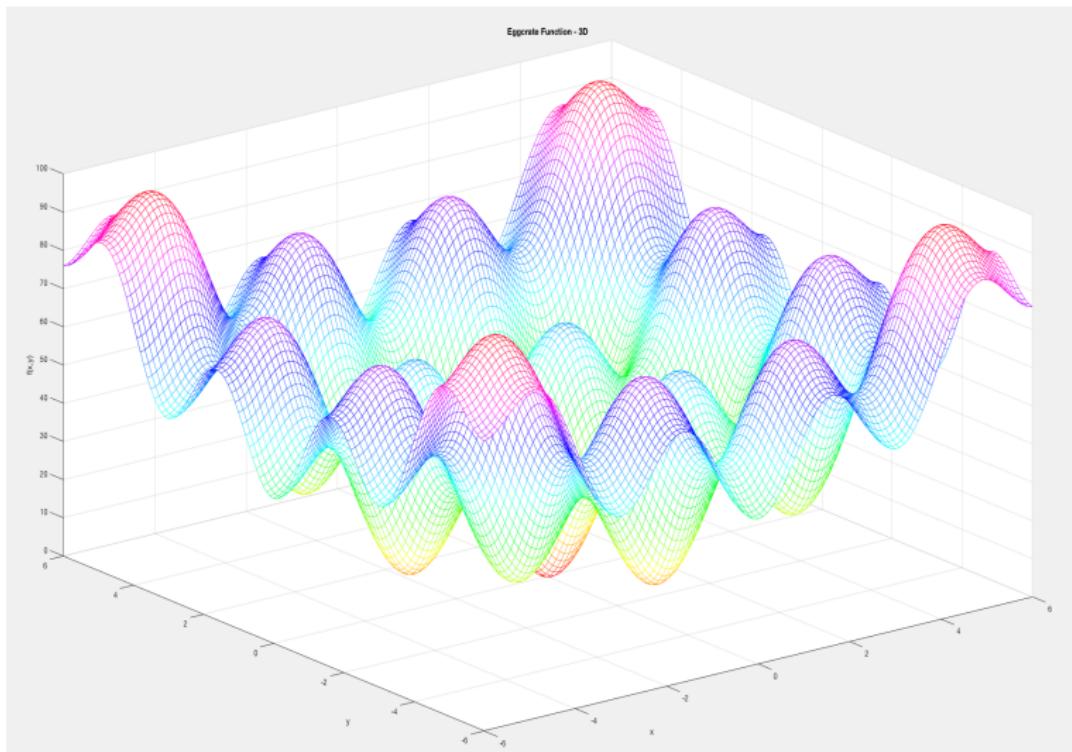


■
DIFFICULT

■
EASY



Egg Crate Function

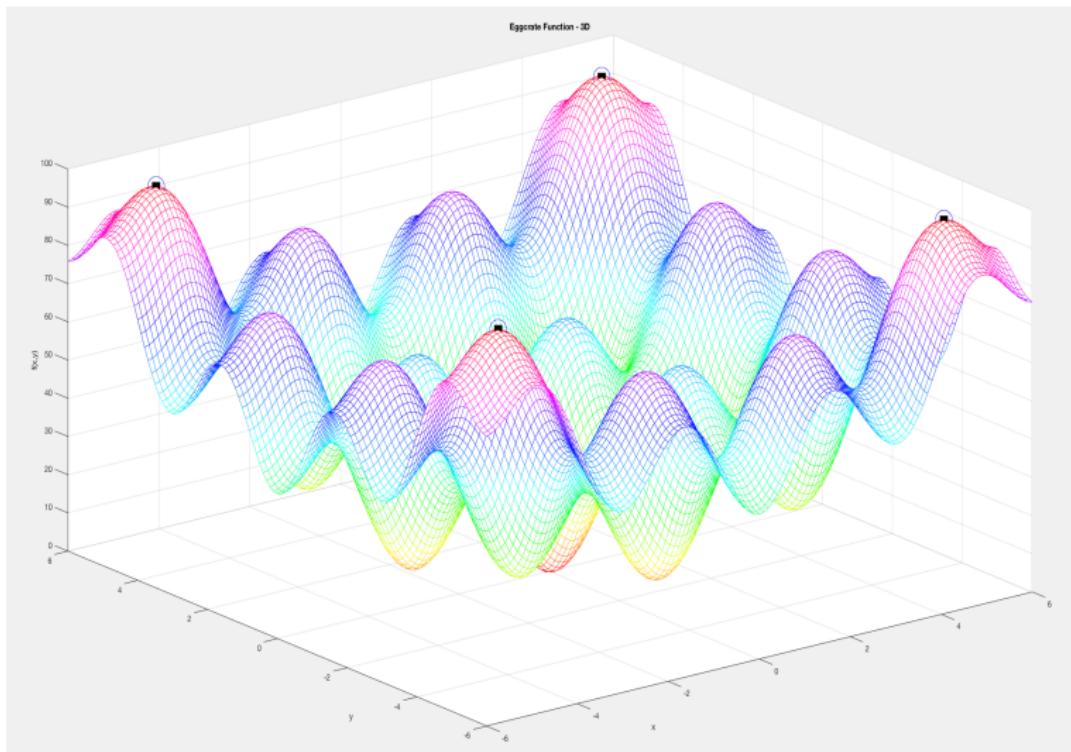


Egg Crate Function

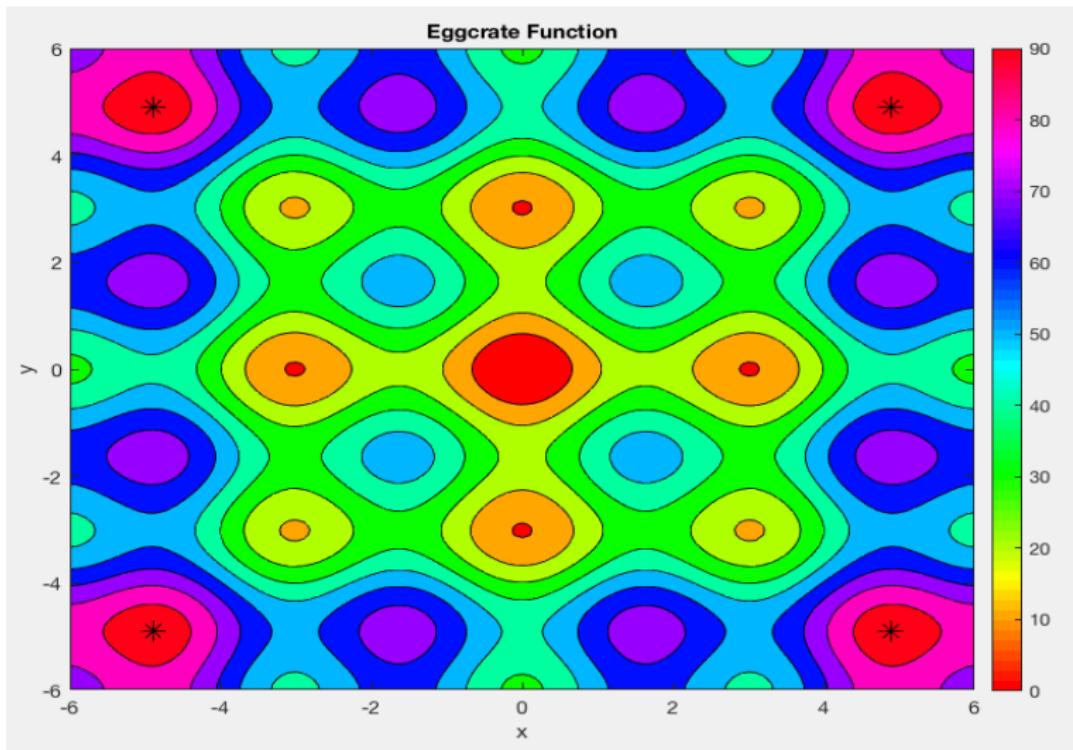
Código em Matlab

```
1 clear all; close all; clc;
2
3 x = [-6:0.1:6]; y = [-6:0.1:6];
4 [X,Y] = meshgrid(x,y);
5
6 egg_crate = @(x,y) x.^2 + y.^2 ...
7     + 25*( sin(x).^2 + sin(y).^2 );
8 Z = egg_crate(X,Y);
9
10 grafico=mesh(x,y,Z); colormap(hsv);
11
12 title('Eggcrate Function - 3D');
13 xlabel('x','FontSize',14);
14 ylabel('y','FontSize',14);
15 zlabel('f(x,y)','FontSize',14);
16 grafico.Parent.FontSize = 14;
```

Egg Crate Function



Egg Crate Function - Máximos Locais e Globais



Egg Crate Function

Código em Matlab

```
1 clear all; close all; clc;
2
3 x = [-6:0.1:6]; y = [-6:0.1:6];
4 [X,Y] = meshgrid(x,y);
5
6 egg_crate = @(x,y) x.^2 + y.^2 ...
7     + 25*( sin(x).^2 + sin(y).^2 );
8 Z = egg_crate(X,Y);
9
10 grafico=mesh(x,y,Z); colormap(hsv);
11
12 title('Eggcrate Function - 3D');
13 xlabel('x','FontSize',14);
14 ylabel('y','FontSize',14);
15 zlabel('f(x,y)','FontSize',14);
16 grafico.Parent.FontSize = 14;
```

Região de Solução nem Côncava nem Convexa

Ackley Function (caso bi-dimensional):

Max

$$F(x, y) = -20e^{-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}} - e^{0.5(\cos 2\pi x + \cos 2\pi y)} + e + 20$$

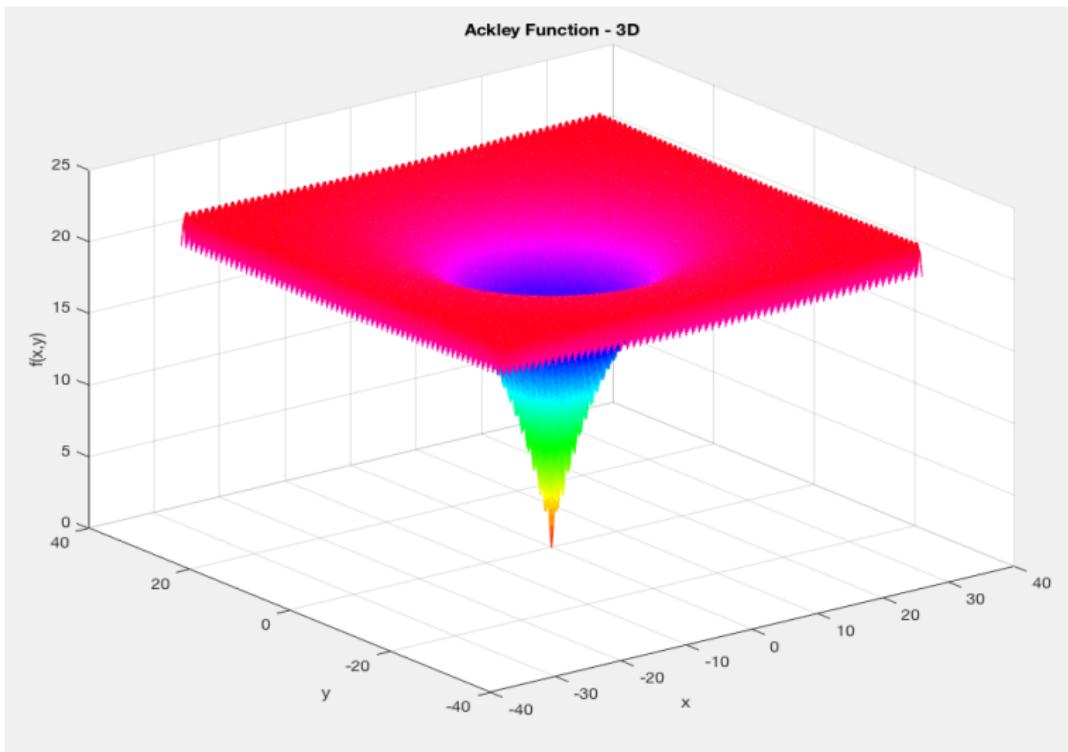
s.a.

$$-32 \leq x \leq 32$$

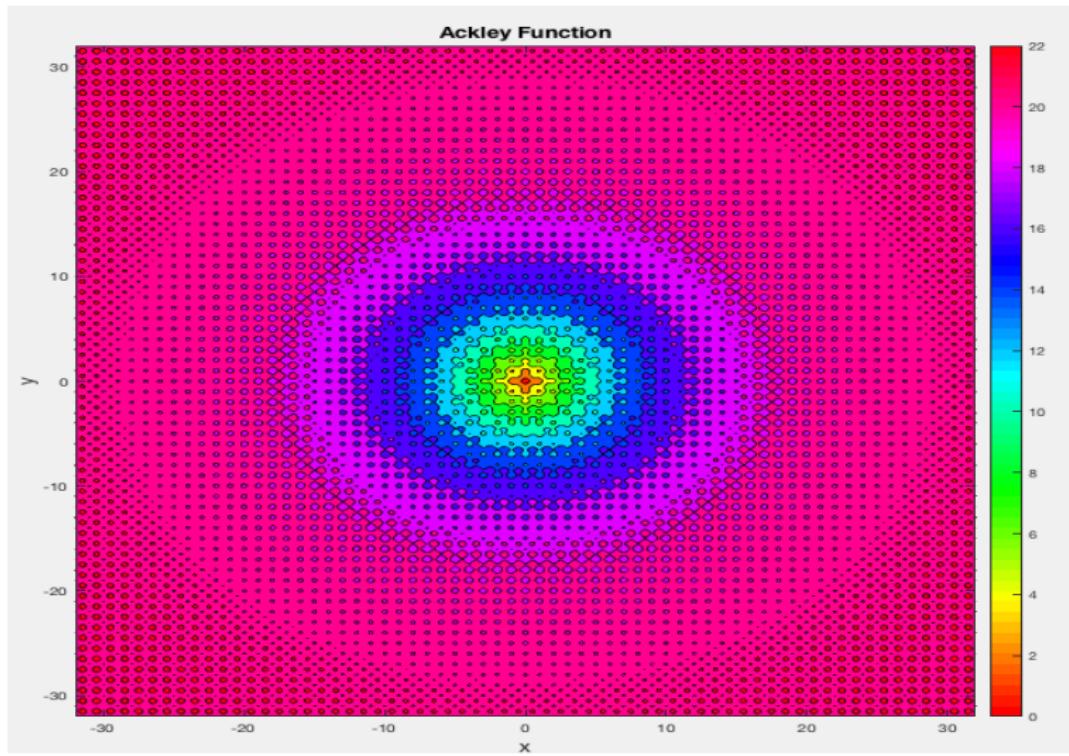
$$-32 \leq y \leq 32$$

É uma função não convexa muito utilizada para testar a performance de algoritmos de otimização.

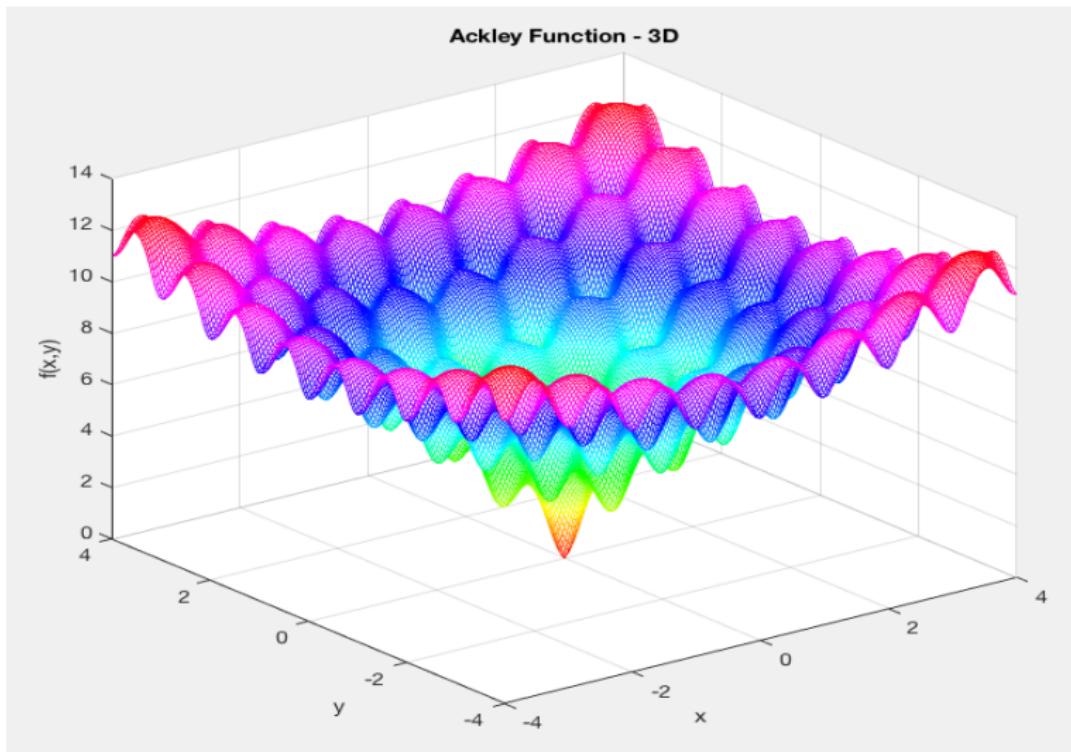
Ackley Function



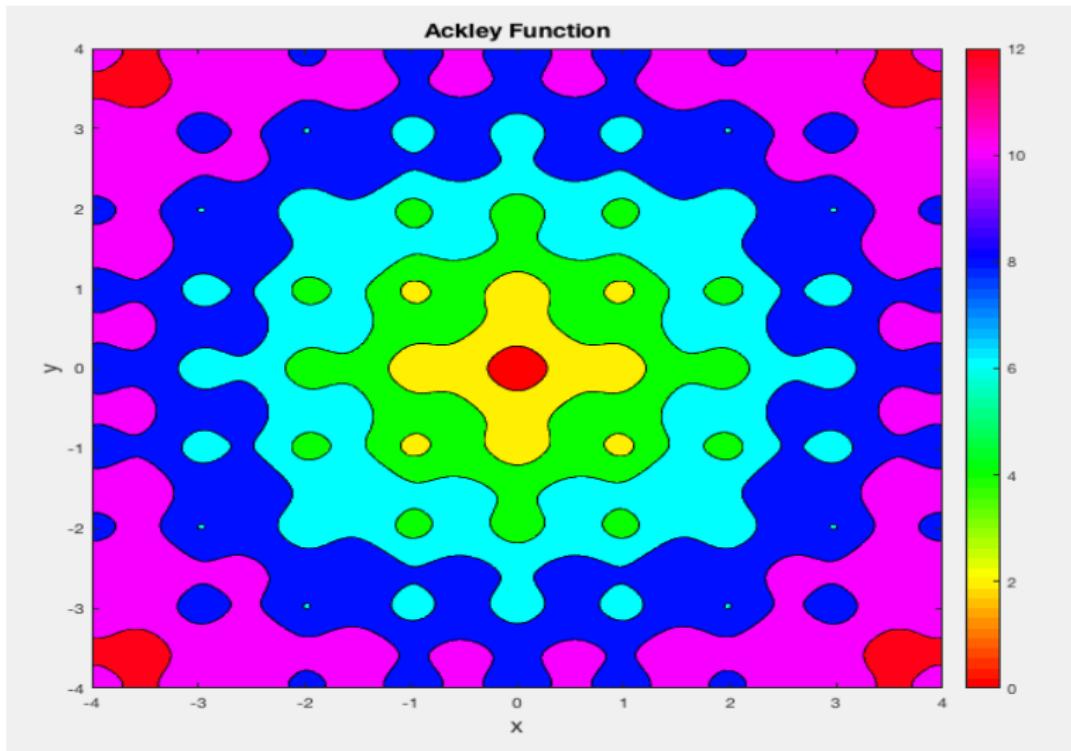
Ackley Function



Ackley Function



Ackley Function



Restrições

São os **limites** impostos pelas leis/regras que regem o modelo. Há 3 tipos de restrições:

- Restrições de igualdade: $h(x) = 0$

São as equações do próprio modelo matemático.

- Restrições de desigualdade: $g(x) \leq 0$

São os limites impostos às funções do modelo matemático.

- Restrições de canalização: $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$

São os limites impostos às variáveis de decisão.

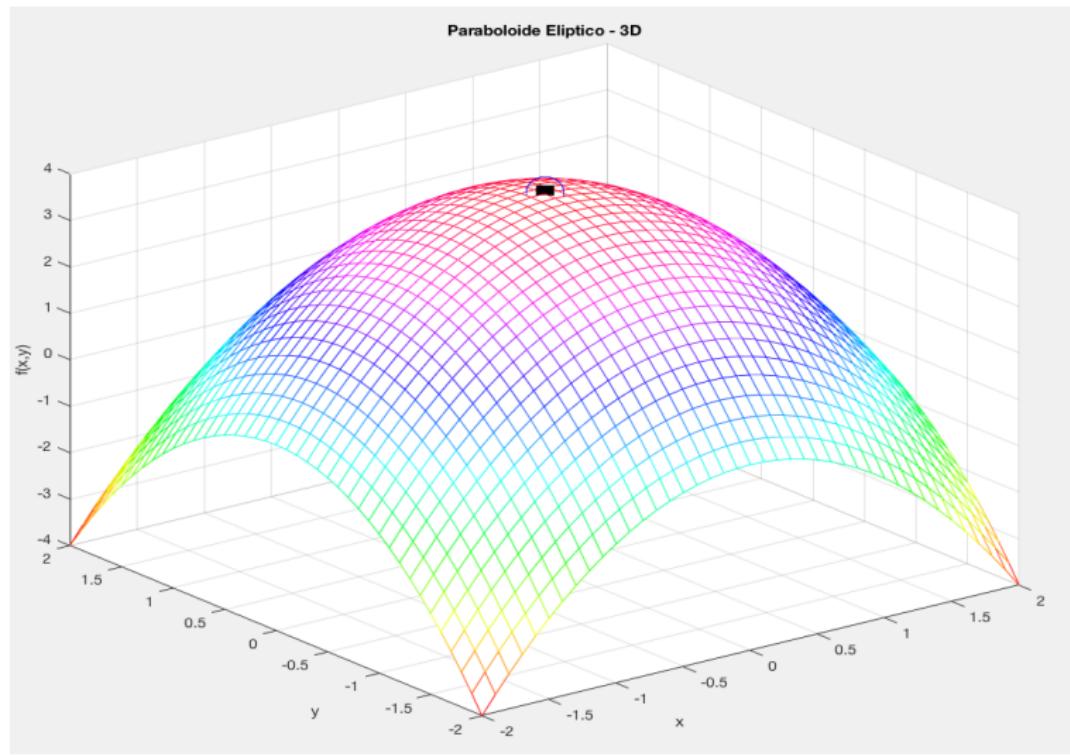
As restrições podem ser **lineares** e/ou **não lineares**.

Restrições - Exemplo

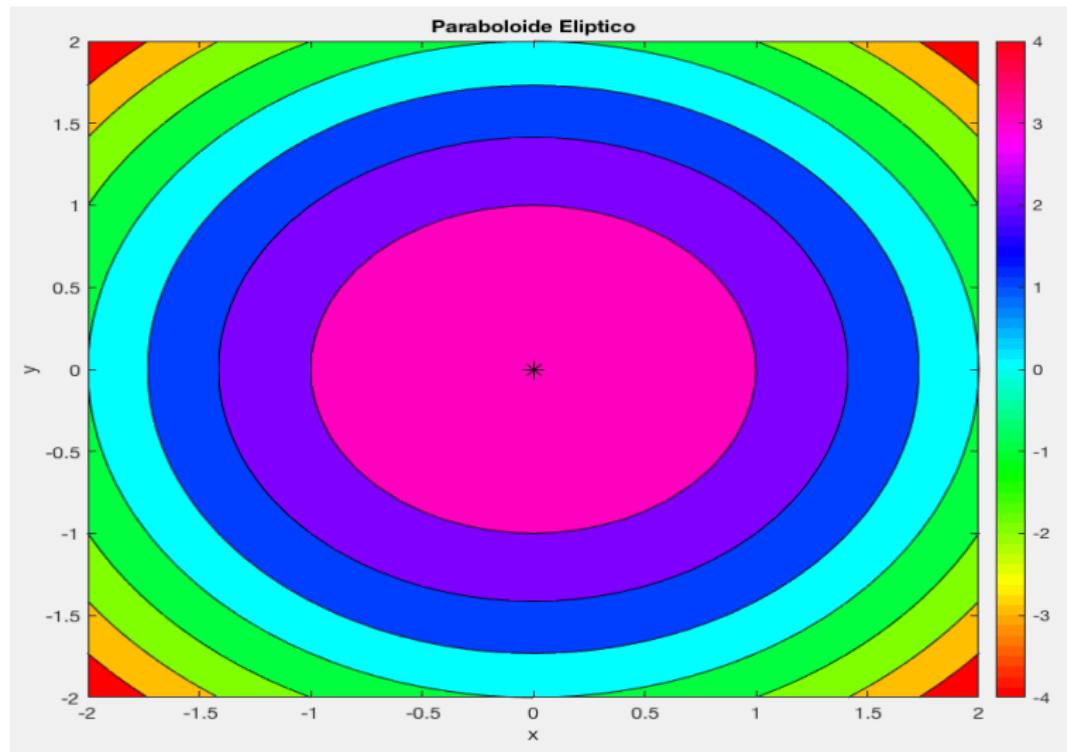
Parabolóide Elíptico - Superfície Quadrática

- Maximizar Z
- Sujeito a:
- $Z = -2x^2 - 2y^2 + 4$

Restrições - Exemplo



Restrições - Exemplo

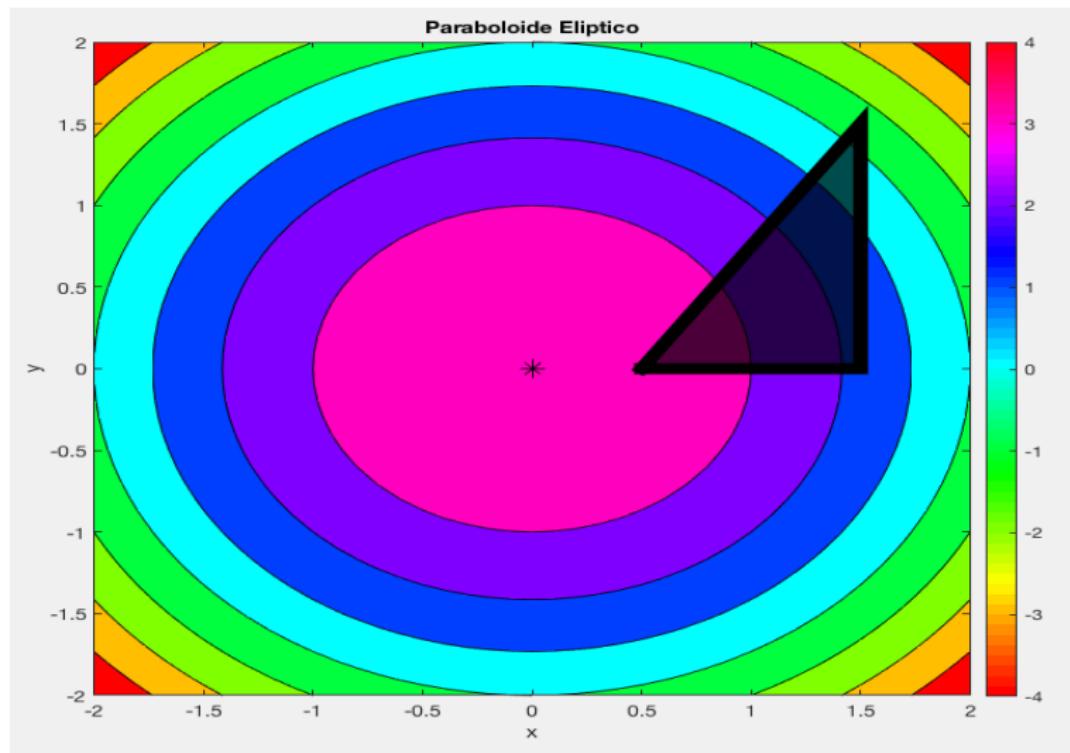


Restrições - Exemplo

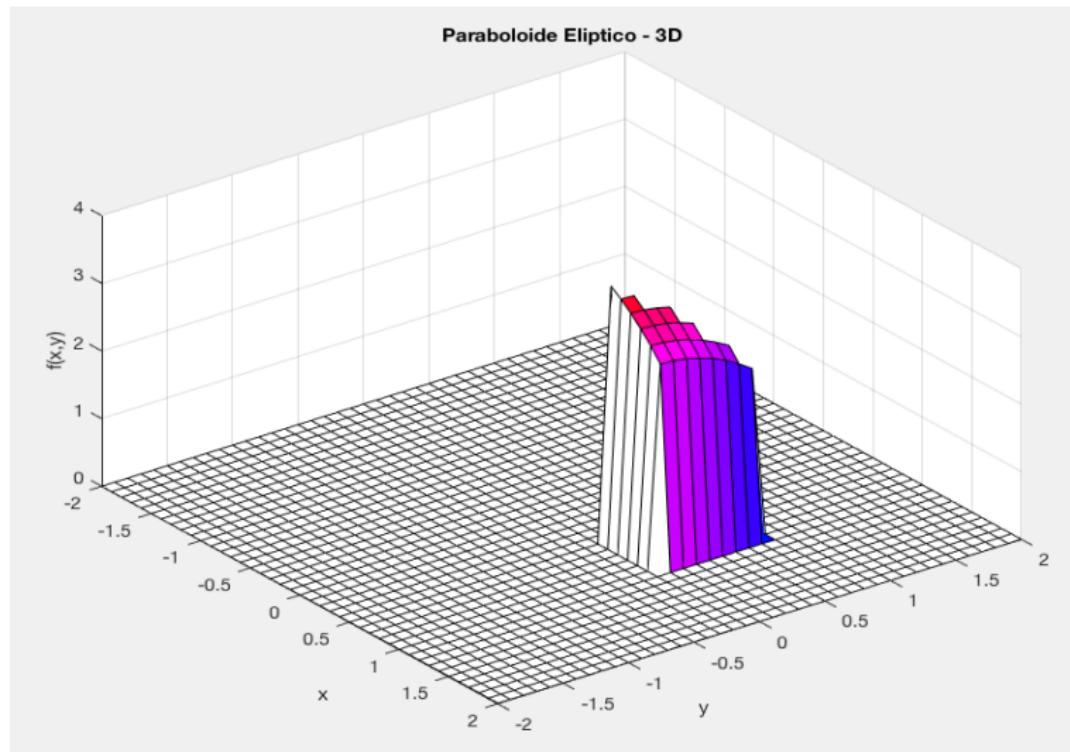
Parabolóide Elíptico - Superfície Quadrática

- Maximizar Z
- Sujeito a:
 - $Z = -2x^2 - 2y^2 + 4$
 - $x \leq 1$
 - $y - 1.5x + 0.75 \leq 0$
 - $y \geq 0$

Restrições - Exemplo - Região Viável



Restrições - Exemplo - Região Viável



Formulação Geral de um Problema de Otimização

Minimizar ou Minimizar $f(\mathbf{x})$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= 0 \\ g(\mathbf{x})(\leq, \geq) &0 \\ x_{\min} &\leq \mathbf{x} \leq x_{\max} \end{aligned}$$

Formulação Geral de um Problema de Otimização

Minimizar ou Minimizar $f(\mathbf{x})$ 

Sujeito a:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\lambda_1) \star$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})(\leq, \geq) \mathbf{0} \quad (\lambda_2) \star$$

$$\mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max} \quad (\lambda_3, \lambda_4) \star$$

	Variáveis Primais
	Variáveis Duais

Formulação pode ser **LINEAR** ou **NÃO LINEAR**

Exemplo de Problema de Otimização

Min $Z = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_6) + 3,4(y_1 + y_2 + \dots + y_6) + 0,25(e_1 + e_2 + \dots + e_6)$

sujeito a

$$\begin{aligned}x_1 + y_1 + 500 &= e_1 + 4000 \\x_2 + y_2 + e_1 &= e_2 + 2000 \\x_3 + y_3 + e_2 &= e_3 + 5000 \\x_4 + y_4 + e_3 &= e_4 + 1000 \\x_5 + y_5 + e_4 &= e_5 + 4000 \\x_6 + y_6 + e_5 &= e_6 + 2000 \\x_t &\leq 3000 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\y_t &\leq 600 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\x_t, y_t, e_t &\geq 0 & t = 1, 2, 3, 4, 5, 6\end{aligned}$$

Exemplo de Problema de Otimização

Min $Z = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_6) + 3,4(y_1 + y_2 + \dots + y_6) + 0,25(e_1 + e_2 + \dots + e_6)$

sujeito a

$$x_1 + y_1 + 500 = e_1 + 4000$$
$$x_2 + y_2 + e_1 = e_2 + 2000$$
$$x_3 + y_3 + e_2 = e_3 + 5000$$
$$x_4 + y_4 + e_3 = e_4 + 1000$$
$$x_5 + y_5 + e_4 = e_5 + 4000$$
$$x_6 + y_6 + e_5 = e_6 + 2000$$
$$x_t \leq 3000 \quad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$
$$y_t \leq 600 \quad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$
$$x_t, y_t, e_t \geq 0 \quad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

CURIOSIDADES



Resolução do problema de gerenciamento da carteira
de um fundo de pensão holandes utilizando PL:
12,5 milhões de restrições e 25 milhões de variáveis

Fim