Universidade Federal do ABC

Roteiro: Experimento #3
Constantes de tempo

Edição: 2º Quadrimestre 2022

AN EXPERIMENT IS A QUESTION WHICH SCIENCE POSES TO NATURE, AND A MEASUREMENT IS THE RECORDING OF NATURE'S ANSWER. (MAX PLANCK)

Objetivos:
- Estudo sobre a adequação da metodologia e do equipamento de medida de acordo com a ordem de grandeza do mensurando;
- Estudo de sistemas de primeira ordem, através dos circuitos RC, compostos por resistores e capacitores;
- Utilização do osciloscópio;
- Determinação experimental da constante de tempo de um circuito RC nas condições de carga do capacitor;
- Ajuste de curvas exponenciais e extração da constante de tempo;
- Avaliação das incertezas nas grandezas obtidas;

Lista de materiais:
- Multímetro digital portátil
- Osciloscópio
- Fonte de alimentação CC
- Resistências de 100 kΩ, 47 kΩ, 100 Ω
- Capacitor eletrolítico de 1000 µF/35V
- Protoboard
- Cronômetro
- Fios de conexão com conectores jacaré e banana
- Interruptor de painel (NA, “normalmente aberto”)

1. Fundamentação Teórica

Vários sistemas na Natureza e na Engenharia apresentam comportamento que pode ser descrito matematicamente através de uma equação diferencial de primeira ordem, sendo conhecidos como sistemas de primeira ordem. As respostas de interesse de tais sistemas tem formato exponencial, e são caracterizadas pelo parâmetro denominado *constante de tempo*, que traduz a velocidade de reação lenta ou rápida do sistema, de acordo com seu valor alto ou baixo, respectivamente. Alguns exemplos de sistemas de primeira ordem são: decaimento radioativo; transferência de calor; vazão de fluidos; modelos de variação de população; sistemas mecânicos e pneumáticos. Os circuitos RC, compostos por resistores e capacitores são um exemplo prático interessante desse tipo de sistema e serão estudados neste experimento. Deve-se notar que os conceitos, as equações e as medidas descritos neste roteiro podem ser facilmente aplicados através de analogias, em outros sistemas quaisquer de primeira ordem, já que o modelo matemático será o mesmo.

Redes de capacitores e resistores, conhecidas como circuitos RC, formam a base de muitos circuitos temporizadores e geradores de pulsos e são encontrados em vários circuitos eletrônicos de aplicação prática.

Um capacitor armazena carga elétrica em suas placas, sendo que a relação entre o módulo da carga (Q) armazenada em cada uma das suas placas e a diferença de potencial V entre as placas é Q = CV, onde C é a capacitância do sistema (em farad - F).

O circuito RC é aquele constituído por um capacitor e um resistor. Assumindo o circuito da Figura 1, com o capacitor inicialmente carregado com uma tensão V_0, a corrente e a tensão no processo de descarga do capacitor podem ser determinadas.

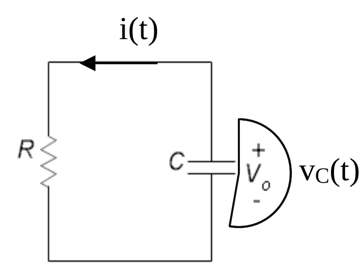

Figura 1. Descarga de um capacitor através de um resistor

Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff ao circuito temos:

$$v_C(t) = i(t).R \tag{1}$$

A corrente no resistor é devida à carga que sai do capacitor, ou seja,

$$i(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \tag{2}$$

Na equação (2), o sinal representa o fato, que a carga do capacitor está diminuindo. A tensão instantânea no capacitor é dada por:

$$v_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \tag{3}$$

Substituindo as equações (2) e (3) na equação (1) temos:

$$\frac{Q(t)}{C} = -R\frac{dQ(t)}{dt} \tag{4}$$

ou,

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{RC}dt \tag{5}$$

Definindo $RC = \tau$ (chamada de constante de tempo), e integrando ambos os lados da equação acima, tem-se[1]:

$$\ln Q(t) + a = -\frac{t}{\tau} + b \tag{6}$$

onde a e b são constantes de integração.

A equação (6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Q(t) = ke^{-t/\tau}\text{, com } k = e^{(b-a)} \tag{7}$$

A constante k pode ser facilmente determinada, pois para $t=0$ a carga no capacitor é $Q_0 = V_0C$. Assim, $k = Q_0 = V_0C$, e podemos escrever a equação (7) da seguinte forma:

$$Q(t) = V_0Ce^{-t/\tau} \tag{8}$$

[1] Notar que a constante de tempo tem dimensão de tempo: RC = (V/I).(Q/V)= [V/(Q/t)].(Q/V) = t

Utilizando a relação dada pela equação (3), a equação (8) pode ser escrita como:

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau} \tag{9}$$

Em uma segunda parte do experimento, o circuito da Figura (2) é utilizado para carregar o capacitor e, neste caso, um resistor é conectado em série com o capacitor.

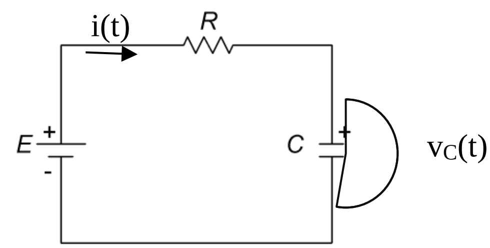

Figura 2. Carga de um capacitor através de um resistor

Pela aplicação da lei das malhas de Kirchhoff temos:

$$E - i(t)R - v_C(t) = 0 \tag{10}$$

ou,

$$E - R\frac{dQ(t)}{dt} - \frac{Q(t)}{C} = 0 \tag{11}$$

A solução da equação diferencial (11) deve satisfazer as condições $Q(t=0) = 0$ e $Q(t \to \infty) = Q_0$ (carga máxima). A solução desta equação é dada por:

$$Q(t) = E.C(1 - e^{-t/\tau}) \tag{12}$$

ou

$$v_C(t) = E.(1 - e^{-t/\tau}) \tag{13}$$

Tendo sido derivadas as equações relacionadas aos processos de carga e descarga do capacitor, vamos fazer uma análise qualitativa desses processos, o que se conhece em teoria de circuitos como transitórios em circuitos capacitivos. Analisamos primeiro a período de carga.

1.1 – O Circuito RC

Período de carga

Com relação ao circuito da Figura 3, quando a chave é fechada (posição 1), a transferência de elétrons é rápida inicialmente, e se torna mais lenta, na medida em que a tensão entre os terminais do capacitor se aproxima da tensão da bateria. No momento que a tensão no capacitor se iguala à tensão da bateria, a carga do capacitor é dada por $Q = C.v_c = CE$.

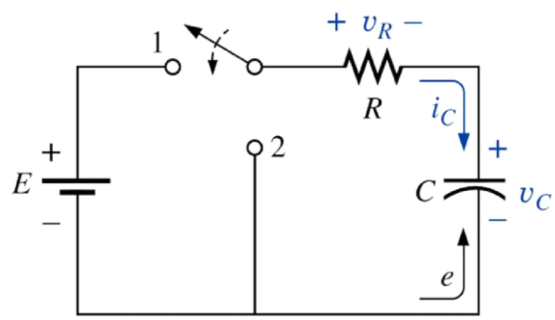

Figura 3. Circuito utilizado para carregar um capacitor

A variação com o tempo da corrente e da tensão no capacitor pode ser vista nas Figuras 4 e 5.

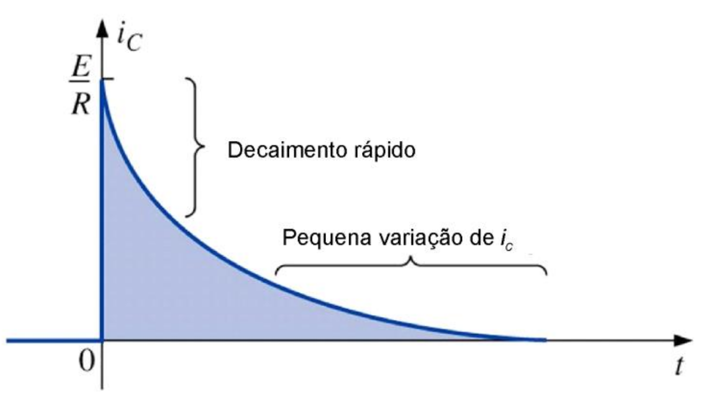

Figura 4. Corrente no capacitor no período de carga

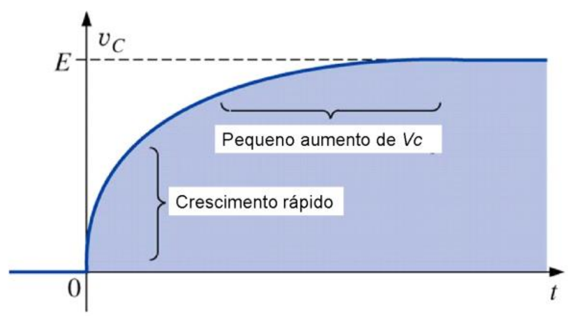

Figura 5. Tensão no capacitor no período de carga

Em *t*=0 s, a corrente salta para um valor limitado pela resistência do circuito e começa a diminuir na medida em que o capacitor é carregado. Visto que a tensão entre as placas está relacionada à carga do capacitor pela equação $v_c = Q/C$, a rapidez com que a carga é inicialmente armazenada resulta em um rápido aumento de v_c. Posteriormente, a tensão aumenta mais devagar quando a taxa de variação do número de cargas diminui. Quando a corrente atinge seu valor zero, a tensão não muda mais e o período de carga terá terminado. É importante notar que neste ponto o capacitor se comporta como um circuito aberto, ou seja, existe tensão entre as placas do capacitor, mas não há corrente elétrica. ***Em circuitos de corrente contínua, os capacitores ideais podem ser substituídos por circuitos abertos após o período de carga***.

A equação para a corrente de carga é dada por:

$$i_C(t) = \frac{E}{R}(e^{-t/\tau}) \tag{14}$$

Depois de transcorrido um tempo igual a uma constante de tempo, o valor da corrente estará em torno de 36,79% (1/e) de seu valor máximo. Em outras palavras, a corrente reduz em torno de 63%.

Devido ao decaimento exponencial, o valor de i_c é menor que 1% do valor máximo depois de transcorridas 5 constantes de tempo. A corrente i_c em um circuito capacitivo de corrente contínua é praticamente nula após transcorrido um intervalo de tempo correspondente a cinco constantes de tempo no período de carga. Isto é ilustrado na Figura 6.

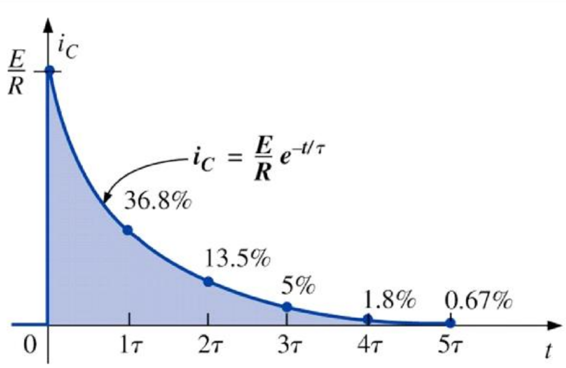

Figura 6. i_c em função de t durante o período de carga

Com relação à tensão (equação 13), observa-se que seu valor aumenta com o tempo e tende para seu valor máximo E (valor da fonte de alimentação, como mostra a Figura 5). Portanto, pode-se concluir que a tensão no capacitor, v_c, é aproximadamente igual a E volts após cinco constantes de tempo. A Figura 7 ilustra a variação de v_c após cinco constantes de tempo. O valor de v_c atingido em uma constante de tempo corresponde a 63% de seu valor máximo, ou seja, depois de uma constante de tempo, a tensão no capacitor terá atingido o 63% de seu valor final, tal como ilustrado na figura a seguir.

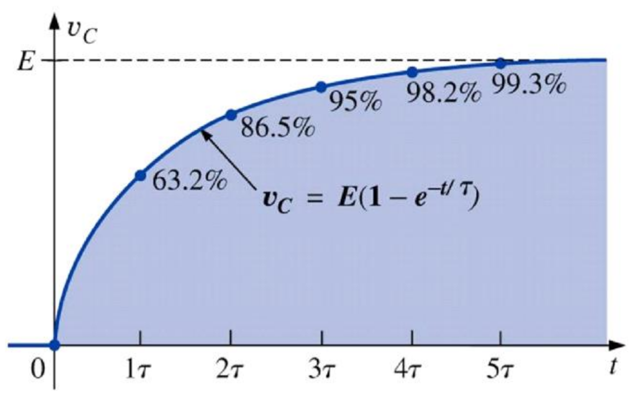

Figura 7. v_c em função de t durante o período de carga

Período de descarga

Com relação à Figura 3, ao se mudar a chave na posição 1 para a posição 2, será iniciada a descarga do capacitor. A tensão estabelecida no período de carga entre os terminais do capacitor dá origem a uma corrente elétrica, que eventualmente descarregará o capacitor. Se o capacitor foi carregado até o valor igual ao da bateria, tal como ilustrado na Figura 8, a equação para a tensão entre os terminais do capacitor será dada por:

$$v_C(t) = Ee^{-t/\tau} \tag{15}$$

A corrente terá uma variação dada por:

$$i_C(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau} \tag{16}$$

A descarga estará praticamente completa após cinco constantes de tempo.

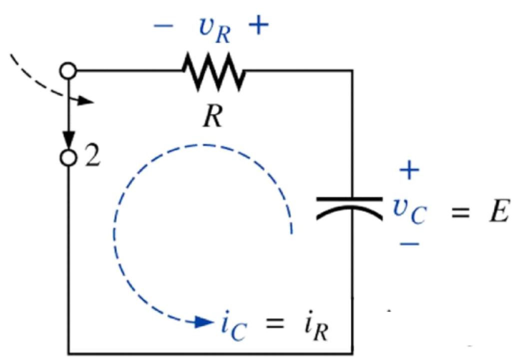

Figura 8. Descarga em um circuito capacitivo, Condição inicial: $v_C = E$

2. Parte Experimental

Para a sua segurança, antes de iniciar o experimento, remover anéis, pulseiras e correntes metálicas; Estes itens podem provocar um curto-circuito, podendo causar um choque ou até mesmo uma queimadura em você, além de danificar o objeto e os equipamentos.

Caso o circuito já esteja montado:

1. **Verificar se a fonte de tensão se encontra desligada;**

2. **Verificar se o capacitor está descarregado (para descarregar o capacitor, você pode apertar o botão do circuito ou mesmo retirá-lo do circuito e fazer um curto-circuito entre as suas extremidades, evitando sempre o contato com as extremidades).**
3. **Verificar se o resistor que está no circuito é o mesmo que será utilizado para aquela parte do experimento.**

Parte 1: Construção de uma curva RC experimental, utilizando um cronômetro e um multímetro

1. Nesta parte do experimento será utilizado um capacitor de valor nominal de **1000 µF** e dois resistores diferentes. Um com valor nominal de **100 kΩ** e outro de **47 kΩ**. Anote os valores das respectivas tolerâncias de cada componente. A incerteza será dada pelo valor da tolerância dividido por raiz de 3. Para identificar os resistores e a sua tolerância, no Anexo 1 você irá encontrar o código de cores para resistores de 4 faixas.

2. Calcule a constante de tempo nominal para cada combinação de resistor-capacitor (RC), com suas respectivas incertezas:

$\tau_{1,100k\Omega} = R_{100k\Omega}.C$	$\tau_{1,47k\Omega} = R_{47k\Omega}.C$

3. Usando o multímetro, meça os valores do capacitor e dos resistores fornecidos. Meça também a tensão nos terminais do canal 3 (CH3) da fonte de alimentação.

- Anote estes valores em uma tabela.

C	$R_{100k\Omega}$	$R_{47k\Omega}$	V_{CH3}

- Verificar a incerteza na medida de resistência e capacitância com o multímetro digital utilizado (verificar o manual do equipamento). Anote estes valores em uma tabela.

4. Utilizando os valores medidos, calcule a constante de tempo para cada combinação de resistor-capacitor (RC), com suas respectivas incertezas:

$\tau_{2,100k\Omega} = R_{100k\Omega}.C$	$\tau_{2,47k\Omega} = R_{47k\Omega}.C$

5. Monte o circuito mostrado na Figura 9 com **R = 100 kΩ** e C = 1000 μF. De acordo com os exemplos ilustrados na Figura 10, atentar para a polaridade + e - dos terminais do capacitor. Sendo um capacitor eletrolítico, estes terminais não são intercambiáveis, e o componente poderá ser danificado, caso seja aplicada uma tensão reversa muito alta.

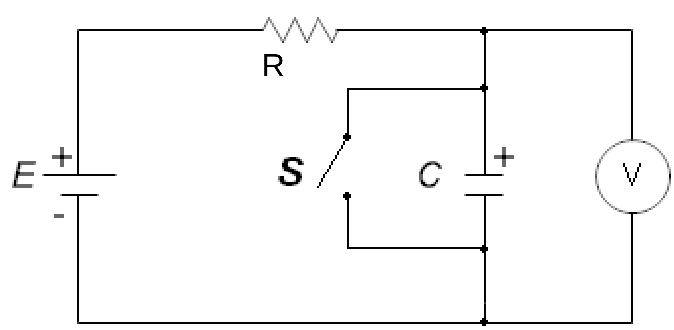

Figura 10. Esquema elétrico da Parte 1 do experimento.

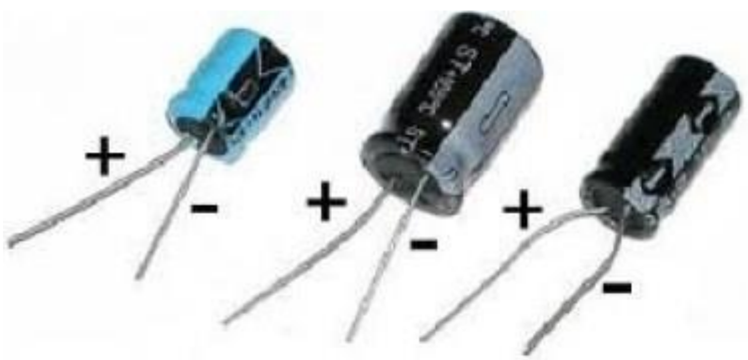

Figura 10. Alguns exemplos de capacitores com suas polaridades indicadas. As faixas de cores diferenciadas indicam o terminal negativo do capacitor. Fonte: https://www.sabereletrica.com.br/entenda-o-funcionamento-dos-capacitores/

6. Use o canal 3 (CH3) da fonte de alimentação (valor nominal: 5V) como sendo a bateria "E". Monte a chave "S" utilizando o interruptor fornecido.
7. Após a montagem do circuito, ligue a fonte e depois acione o interruptor mantendo um curto-circuito sobre o capacitor (para descarregá-lo completamente de qualquer carga residual).
8. Em seguida retire o curto-circuito sobre o capacitor (deixe de apertar o interruptor) e dispare o cronômetro no mesmo instante, para iniciar a carga do capacitor. Meça e anote a tensão no capacitor em intervalos de 25 s, de 0 até 300 s. Anote os resultados em uma tabela contendo os valores da tensão em função tempo.

Notas:

♦Prepare a tabela com os valores de tempo expressos em (minutos:segundos) para facilitar a leitura no cronômetro.

♦Utilize a tecla “Hold” do multímetro para “congelar” a medida na tela do aparelho. Anote rapidamente o valor da tensão e aperte novamente a tecla “Hold” para esperar pelo próximo ponto.
♦Para esta parte, você também poderá utilizar a câmera do seu celular para obter de forma mais precisa estes valores. Verifique apenas se a taxa de quadros (FPS) é adequada para realizar a leitura dos valores.

9. Repita os passos 5 a 8 com **R = 47 kΩ**.

Cálculos da Parte 1

- Trace os gráficos da tensão elétrica em função do tempo.
- Através de um software como o LabFit, busque uma interpolação dos pontos experimentais por uma curva do tipo indicado na equação 13 e obtenha as constantes de tempo, $\tau_{3,100k\Omega}$ e $\tau_{3,47k\Omega}$, com suas respectivas incertezas, para cada combinação de RC. Ou, ainda, as constantes de tempo podem ser obtidas através da linearização das curvas, conforme Anexo 2.

$\tau_{3,100k\Omega}$	$\tau_{3,47k\Omega}$

- Analise as incertezas envolvidas em ambos os processos, e avalie a consistência dos resultados obtidos.

Parte 2: Registro da curva de carga do capacitor no circuito RC, utilizando o osciloscópio

1. Nesta parte do experimento será utilizado um capacitor de valor nominal de **1000 µF** e um resistor com valor nominal de **100 Ω**. Anote os valores das respectivas tolerâncias de cada componente. A incerteza será dada pelo valor da tolerância dividido por raiz de 3.

2. Calcule a constante de tempo nominal para esta combinação de resistor-capacitor (RC), com sua respectivas incerteza:

$\tau_{1,100\Omega} = R_{100\Omega}.C$

3. Usando o multímetro, meça os valores do capacitor e do resistor fornecidos. Meça também a tensão nos terminais do canal 3 (CH3) da fonte de alimentação.

- Anote estes valores em uma tabela.

C	$R_{100\Omega}$	V_{CH3}

- Verificar a incerteza na medida de resistência e capacitância com o multímetro digital utilizado (verificar o manual do equipamento). Anote estes valores em uma tabela.

4. Utilizando os valores <u>medidos,</u> calcule a constante de tempo para esta combinação de resistor-capacitor (RC), com sua respectiva incerteza:

$\tau_{2,100\Omega} = R_{100\Omega}.C$

5. Monte o circuito da Figura 11, com **R = 100Ω** e **C = 1000 µF**.

6. Utilize a ponta de prova do osciloscópio, ligada ao canal 1 (CH1) para observar a forma de onda da tensão no capacitor. A ponta de prova apresenta dois pontos de ligação: ponto de referência, geralmente em forma de garra e ponto de sinal central. Conecte ambos os pontos ao circuito: ponto de referência em G (garra jacaré) e o ponto de sinal em P. Verifique sempre se a posição da chave (x1 ou x10) na ponta de prova está compatível com a opção "Atenuação" (x1 ou x10, respectivamente) no Menu do canal correspondente no osciloscópio.

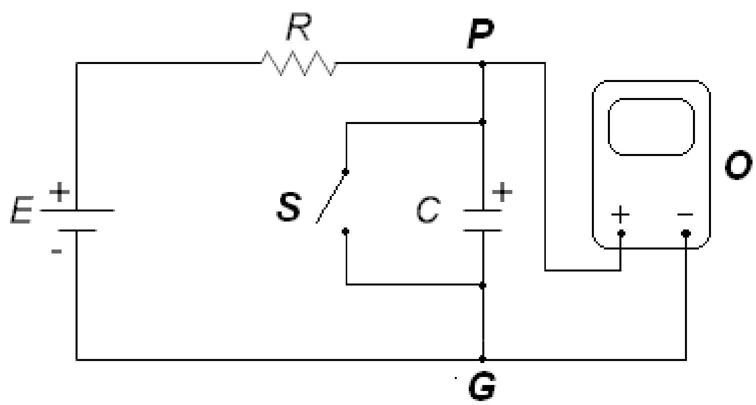

Figura 11. Esquema elétrico da Parte 2 do experimento

7. Prepare o osciloscópio para a medida, seguindo os seguintes passos de configuração:
- Ligue o osciloscópio.
- Tecle ***autoset:*** A tela irá mostrar o registro do canal 1, com o nível zero centralizado.
- Selecione a escala de amplitude vertical para 2,0V por divisão.

- Selecione a escala de tempo para 100ms por divisão.
- Tecle ***Trig Menu.*** A fim de configurar a função ***trigger***:

Configure Tipo: Borda (***Edge***),
Origem: CH1
Inclinação: descida (***falling***)
Modo: Normal
Acoplamento: CC (***DC***).

Faça o ajuste do nível de trigger para 4,0V.
Faça o ajuste da origem do trigger para 400ms (isto é: MPos:400ms)

O osciloscópio está pronto para a medida.

8. Em seguida, ligue a fonte.

9. Acione o interruptor (pressione e solte rapidamente), para descarregar o capacitor e iniciar o período de carga, a partir de 0V. Repita o acionamento (sempre rapidamente) até a obtenção de um registro como mostrado na Figura 12. Interprete a figura obtida e identifique o trecho que corresponde à carga do capacitor.

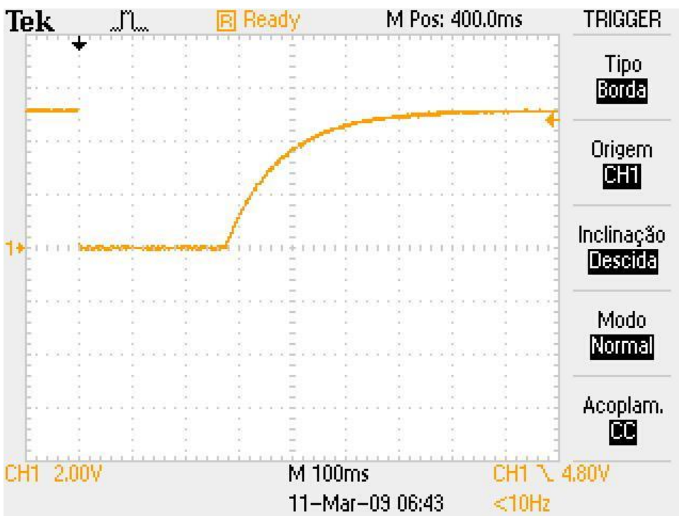

Figura 12. Registro de um transitório da carga do capacitor

10. Faça a leitura da amplitude total do sinal através do uso de cursores do osciloscópio, seguindo os passos descritos (Figura 13):

- Tecle o botão Cursores.
- Selecione Tipo – Amplitude.
- Selecione Origem – CH1.
- Selecione cursor 1 e ajuste-o no mínimo da curva, através do botão multifuncional.

- Selecione cursor 2 e ajuste-o no máximo da curva, através do botão multifuncional.
  - Anote o valor do V que corresponde à amplitude total.

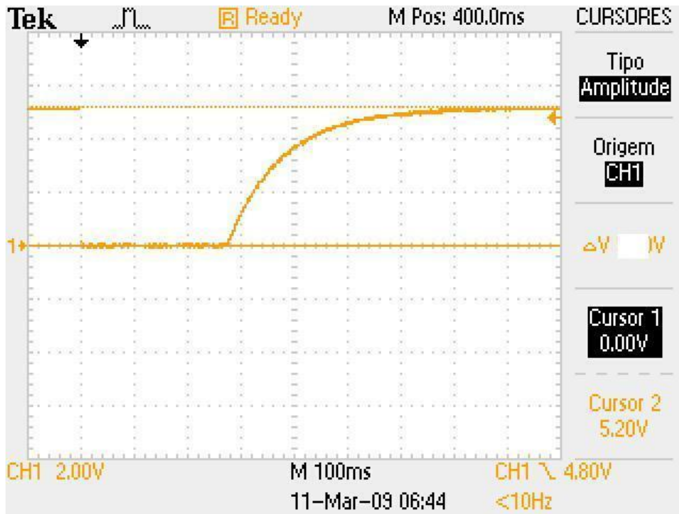

Figura 13. Indicação dos cursores de amplitude para a leitura da amplitude total do sinal

11. Faça a leitura da constante de tempo da forma de onda registrada, seguindo os passos descritos (Figura 14):

- Tecle o botão Cursores.
- Selecione Tipo – Tempo
- Selecione Origem – CH1.

- Selecione cursor 1 e ajuste-o para o instante de início do carregamento capacitivo através do botão multifuncional.

- Selecione cursor 2 e ajuste-o para o instante em que a tensão sobre o capacitor corresponda a 63% da amplitude total. Esse instante equivale ao ponto em que a indicação ΔV na tela do osciloscópio é de 63% da amplitude total.
  - Anote o valor da constante de tempo τ indicado na tela do osciloscópio como ΔT.

- Mova lentamente o cursor 2, e verifique que os valores de ΔT e ΔV variam em passos discretos (e não continuamente), pois o osciloscópio é digital e opera com amostras do sinal que está sendo observado (e não com um traço contínuo). Observe, com o auxílio do cursor, qual é a menor distância (em termos de tempo e tensão) entre duas amostras consecutivas. Estes valores são uma boa estimativa para as incertezas $u_{\Delta T}$ e $u_{\Delta V}$ nas medidas de tempo e tensão que irão afetar o cálculo da incerteza propagada em τ, obtida através do método descrito. **Cuidado:** Este valor muda de acordo com as escalas *s/div* e *volts/div* utilizadas no osciloscópio.

- Anote em uma tabela o valor da constante de tempo obtida com sua respectiva incerteza.

$\tau_{3,100\Omega}$

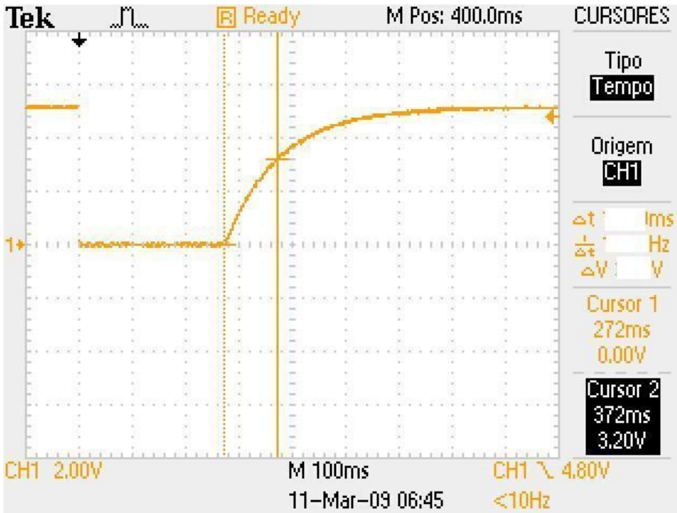

Figura 14 - Indicação dos cursores de tempo para a leitura da constante de tempo

12. Tire uma foto da tela do osciloscópio, similar a ilustrada pela Figura (14), onde são indicados os valores coletados pelos cursores 1 e 2, posicionados de forma adequada. Esta foto deverá ser incluída no relatório na forma de figura.

13. Desloque o cursor 2 até o instante 5τ após o início da carga e anote a tensão resultante sobre o capacitor.

<u>Cálculos da Parte 2</u>

- Compare os valores das constantes de tempo calculadas e medida e comente. Apresente as estimativas de incertezas. Note que a incerteza no valor de τ dependerá de ambos $u_{\Delta T}$ e $u_{\Delta V}$ determinados acima, através dos cálculos de propagação de incertezas.
- Compare os valores de tensão teórico e medido no capacitor após 5τ e comente.

Questões

1. Apresente uma tabela geral, contendo os valores do capacitor e dos resistores, com as respectivas constantes de tempo calculadas (a partir dos valores nominais e a partir dos valores reais dos componentes) e medidas (τ_1, τ_2, τ_3), acompanhadas das

respectivas incertezas. Observe que, para cada valor de R você terá três constantes de tempo. 1- obtida a partir dos valores nominais (incerteza calculada a partir da tolerância especificada pelo fabricante) 2- obtida através dos valores de R e C medidos pelo multímetro 3- obtida através do método proposto pela parte 1 ou parte 2.

2. Para cada valor de R, compare as constantes de tempo calculadas (a partir dos valores nominais e a partir dos valores reais dos componentes) e medidas (τ_1, τ_2, τ_3), com as suas respectivas incertezas. Estes valores são compatíveis?
3. Quais as grandezas de influência nas diversas partes do experimento? Proponha procedimentos para minimizar seus efeitos nos resultados medidos.
4. Seria possível utilizar o método do multímetro e do cronômetro para determinar a constante de tempo do circuito utilizado na parte 2 deste experimento? Justifique.

3. Bibliografia

[1] Robert L. Boylestad, Introdução à Análise de Circuitos, 10ª. Edição, Pearson Education do Brasil, 2004.

[2] Mike Tooley, Circuitos Eletrônicos, Fundamentos e Aplicações, Elsevier Editora Ltda, 2008.

[3] http://www.splung.com/content/sid/3/page/capacitors, acessado em 07/11/2014.

[4] http://vcephysics.com/content/?s=capacitor , acessado em 07/11/2014.

[5] http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/capacitor/, acessado em 07/11/2014.

[6] Silva, W.P. and Silva, C.M.D.P.S., LAB Fit Curve Fitting Software (Nonlinear Regression and Treatment of Data Program) V 7.2.47 (1999-2010): www.labfit.net

[7] “Modelos Exponenciais”, apostila Métodos Experimentais em Engenharia, disponível em: https://sites.google.com/view/esto017-17/material-didático

4. Autores

Apostila elaborada pelo professor R. Reina Muñoz e revisada pelos Profs. J.C. Teixeira, D. Consonni e T. Ribeiro de Oliveira. Última edição feita em maio de 2022 pelo professor Kenji Nose Filho.

5. Anexo 1 – Código de cores para resistores de 4 faixas

Tabela 1. Código de cores para resistores de 4 faixas. Fonte: https://www.mundodaeletrica.com.br/codigo-de-cores-de-resistores/

Cor	1ª Faixa	2ª Faixa	N° de zeros/multiplicador	Tolerância
Preto	0	0	0	
Marrom	1	1	1	± 1%
Vermelho	2	2	2	± 2%
Laranja	3	3	3	
Amarelo	4	4	4	
Verde	5	5	5	± 0,5%
Azul	6	6	6	± 0,25%
Violeta	7	7	7	± 0,1%
Cinza	8	8	8	± 0,05%
Branco	9	9	9	
Dourado			x0,1	± 5%
Prata			x0,01	± 10%

Exemplo do valor nominal do resistor dado pela figura acima:

1ª Faixa: Vermelho = 2
2ª Faixa: Violeta = 7
3ª Faixa: Nº de zeros: Marrom = 1 = 0
Valor obtido: 270 Ω
4ª Faixa: Tolerância: Dourado = ± 5% = 13,5 Ω

6. Anexo 2 – Linearização de curvas exponenciais.

Seja uma equação exponencial do tipo:

$$V_c(t) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

É possível linearizar esta curva, obtendo uma reta do tipo $y = Ax$, fazendo-se:

$y = ln\ ln\left(\frac{E-V_c(t)}{E}\right)$, $x = t$ e $A = -\frac{1}{\tau}$

Logo, obtendo-se o valor do parâmetro A com sua respectiva incerteza μ_A, é possível obter o valor de $\tau = -\frac{1}{A}$, com sua respectiva incerteza $\mu_\tau = \frac{1}{A^2}\mu_A$ (propagação de incertezas).