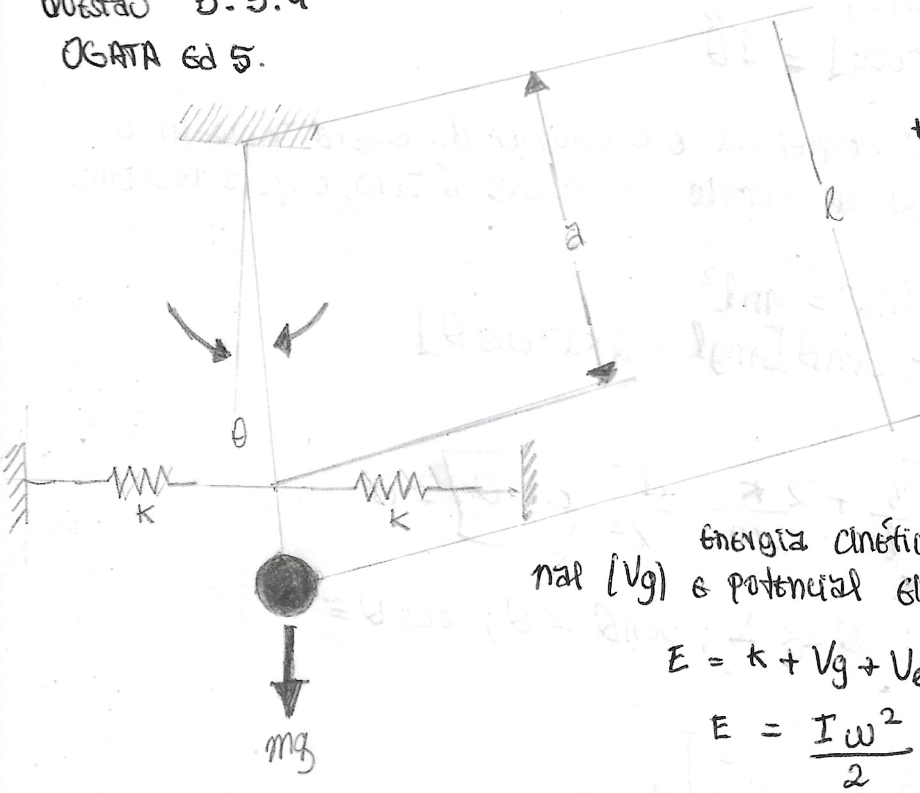
Questão B.3.4
OGATA Ed 5.



torque
$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$

2ª Lei de Newton para rotações
$\tau_{res} = I\alpha$ aceleração angular
$\alpha = \ddot{\theta}$ e I é o momento de inércia do sistema.

Energia cinética rotacional (K), potencial gravitacional (Vg) e potencial elástica (Uel)

$$E = K + V_g + U_{el}$$

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + mgh + \frac{Kx^2}{2}$$

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + mgh + \frac{Kx^2}{2}$$

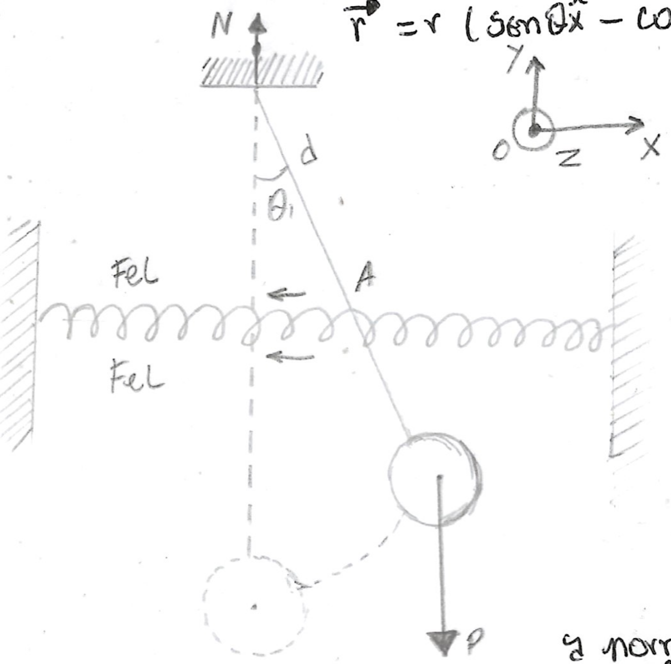
todas as forças externas, a energia se conserva (constante); logo, podemos dizer que

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$F = Kx = Ka\theta$
$\tau = F.\, a\, k2^2\theta$
$\tau m = -2Ka^2\theta$
Pequenas oscilações
$\theta \approx \theta$ e $\cos \theta \approx 1$

Por torque
Peso da haste desprezível (Ponto O)

$$\hat{\vec{r}} = r(\operatorname{sen}\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y})$$



$$\tau_P = l(\operatorname{sen}\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}) \times (-mg\hat{y})$$
$$\tau_P = -mgl\operatorname{sen}\theta\hat{z}$$

Cada mola exerce uma força elástica $F_{el} = Kd\operatorname{sen}\theta\hat{x}$, como são duas, multiplicamos por 2.

$$\tau_{el} = 2d(\operatorname{sen}\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}) \times Kd\operatorname{sen}\theta\hat{x}$$
$$\tau_{el} = -2Kd^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\hat{z}$$

a normal está sendo aplicada no ponto de rotação

$$\tau_N = 0$$
$$\tau_R = -\operatorname{sen}\theta[mgl + 2Kd^2\cos\theta]$$

Usando a Segunda Lei de Newton

$$-\operatorname{sen}\theta[mgL + 2kd^2\cos] = I\ddot{\theta}$$

Como a massa da haste é desprezível e o volume da esfera também o momento de inércia em relação ao centro de massa é zero, e, pelo teorema dos eixos paralelos.

$$I = I_{cm} + ML^2 = ml^2$$

$$mL^2\ddot{\theta} = -\operatorname{sen}\theta[mgl + 2kd^2\cos\theta]$$

Obtemos:

$$\ddot{\theta} + \operatorname{sen}\theta\left[\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\frac{d^2}{l^2}\cos\theta\right] = 0$$

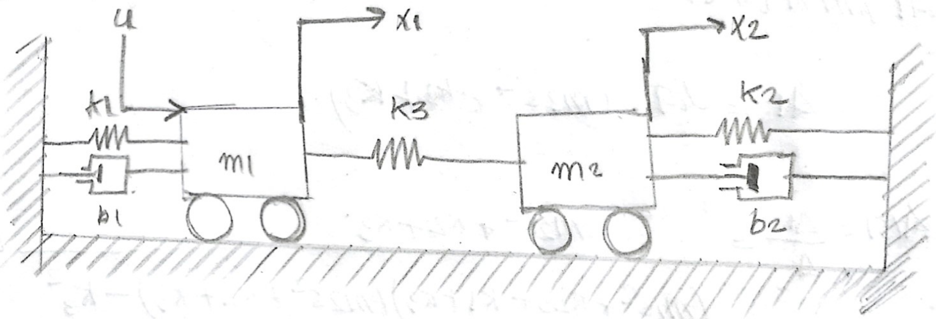
Para pequenas oscilações: $\theta << 1$; $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$; $\cos\theta \cong 1$

Então:

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\frac{d^2}{l^2}\right]\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{2kd^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right]\theta = 0$$

Questão B.3.6
OGATA Ed 5.



Precisamos então encontrar a função que relaciona a posição de cada um dos blocos com a força u aplicada.

$$F_r = \sum F$$

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2\dot{x}_1 - k_3(x_1 - x_2) + u$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2\dot{x}_1 + k_3x_1 - k_3x_2 = u \quad (1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k_3x_2 - k_3x_1 = 0 \quad (2)$$

Aplicando a transformada de Laplace

equação 1:

$$m_1s^2X_1(s) + k_1X_1(s) + k_2sX_1(s) + k_3X_1(s) - k_3X_2(s) = U(s)$$
$$(m_1s^2 + k_2s + k_1 + k_3)X_1(s) - k_3X_2(s) = U(s) \quad (3)$$

equação 2:

$$m_2s^2X_2(s) + k_2X_2(s) + k_3X_2(s) - k_3X_1(s) = 0$$
$$-k_3X_1(s) + (m_2s^2 + k_2 + k_3)X_2(s) = 0 \quad (4)$$

Podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} m_1s^2 + k_2s + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & m_2s^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar $\dfrac{X_1(s)}{U(s)}$: regra de Cramer

$$\Delta = (m_1s^2 + k_2s + k_1 + k_3)(m_2s^2 + k_2 + k_3) - k_3^2$$

Determinante Δ_1 para $X_1(s)$ é:

$$\Delta_1 = U(s) \cdot (m_2 s^2 + k_2 + k_3)$$

$$X_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{m_2 s^2 + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + k_2 s + k_1 + k_3)(m_2 s^2 + k_2 + k_3) - k_3^2} U(s)$$

FT: $\frac{X_1(s)}{U(s)}$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + k_2 s + k_1 + k_3)(m_2 s^2 + k_2 + k_3) - k_3^2}$$

Portanto: Usamos a equação (4)

$$X_2(s) = \frac{k_3}{m_2 s^2 + k_2 + k_3} X_1(s)$$

Substituindo $X_1(s)$.

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{k_3}{m_2 s^2 + k_2 + k_3} \cdot \frac{m_2 s^2 + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + k_2 s + k_1 + k_3)(m_2 s^2 + k_2 + k_3) - k_3^2}$$

Simplificando temos:

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{k_3}{(m_1 s^2 + k_2 s + k_1 + k_3)(m_2 s^2 + k_2 + k_3) - k_3^2}$$

Resultado:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + k_2 s + k_1 + k_3)(m_2 s^2 + k_2 + k_3) - k_3^2}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{k_3}{(m_1 s^2 + k_2 s + k_1 + k_3)(m_2 s^2 + k_2 + k_3) - k_3^2}$$

Representação em diagrama de estados B.3.6

$x_1 = x_1$
$x_2 = \dot{x}_1$
$x_3 = x_2$
$x_4 = \dot{x}_2$

Apartir das equações originais

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_2 \dot{x}_1 + (k_1 + k_3) x_1 - k_3 x_2 = u$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 \dot{x}_2 + k_3 x_2 - k_3 x_1 = 0$$

Podemos isolar as derivadas da segunda ordem:

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} (- k_2 \dot{x}_1 - (k_1 + k_3) x_1 + k_3 x_2 + u)$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} (- k_2 \dot{x}_2 - k_3 x_2 + k_3 x_1)$$

Agora, escrevemos o sistema em forma matricial

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1} (- k_2 x_2 - (k_1 + k_3) x_1 + k_3 x_3 + u)$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} (- k_2 x_3 - k_3 x_3 + k_3 x_1)$$

Em notação matricial

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Onde:

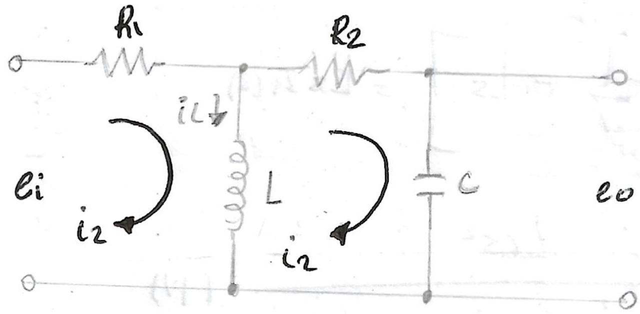
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1 + k_3}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_3}{m_2} & 0 & -\frac{k_2 + k_3}{m_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B.3.6

Saída como x_1 e x_2:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B.3.7



$\sum v = 0$

$-e_i + V_{R1} + V_L = 0$

$-V_L + V_{R2} + V_C = 0$

$V_C = e_o$

Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões, pois são mostradas no circuito as correntes das malhas.

A tensão no indutor e no capacitor são dadas por:

$$V_C = L \frac{d}{dt} i_L \qquad V_C = \frac{1}{C}\int_t i_C(t)\,dt$$

Aplicando a lei de Kirchhoff das correntes no nó superior (correntes que chegam = correntes que saem do nó), considerando a corrente no indutor:

$$\sum_{\text{chegando}} i = \sum_{\text{saindo}} i \Rightarrow i_1 = i_2 + i_L$$

$$R i_1 + L \frac{d}{dt}[i_L] = R i_1 + L \frac{d}{dt}[i_1 - i_2] = e_i \quad (I)$$

$$-L \frac{d}{dt}[i_1 - i_2] + R_2 i_2 + \frac{1}{C}\int_t [i_2]\,dt = 0$$

$$L \frac{d}{dt}[i_2 - i_1] + R_2 i_2 + \frac{1}{C}\int_t i_2\,dt = 0 \quad (II)$$

$$\frac{1}{C}\int_t i_2\,dt = e_o \quad (III)$$

Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$R I_1(s) + Ls[I_1(s) - I_2(s)] = E_i(s)$$

$$Ls[I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{sC} I_2(s) = 0$$

Objetivo é determinar uma única equação que tenha como variáveis no domínio s $E_i(s)$ e $E_o(s)$, ou seja, que não tenha $I_1(s)$ e $I_2(s)$.

B.3.7

Segunda Equação.

$$I_2(s)\left[R_2+\frac{1}{sC}+Ls\right]=Ls\,I_1(s)$$

$$I_2(s)=\frac{LCs^2}{LCs^2+R_2Cs+1} \quad (IV)$$

Substituindo (IV) na primeira equação

$$R_1I_1(s)+Ls\left[I_1(s)-\left(\frac{LCs^2}{LCs^2+R_2Cs+1}I_1(s)\right)\right]=E_i(s)$$

$$N=R_1[LCs^2+R_2Cs+1]+Ls[LCs^2+R_2Cs+1]-LsLCs^2$$
$$N=R_1LCs^2+R_1R_2Cs+R_1+L^2Cs^3+LR_2Cs^2+Ls-L^2Cs^3$$
$$N=LC(R_1+R_2)s^2+(R_1R_2C+L)+sR_1$$

$$I_1(s)\left[\frac{LC(R_1+R_2)s^2+(R_1R_2C+L)s+R_1}{LCs^2+R_2Cs+1}\right]=E_i(s) \quad V$$

Substituindo IV na segunda equação:

$$\frac{1}{SC}\left[\frac{LCs^2}{LCs^2+R_2Cs+1}I_1(s)\right]=E_o(s)$$

$$\frac{Ls}{LCs^2+R_2Cs+1}I_1(s)=E_o(s)$$

$$I_1(s)=E_o(s)\left(\frac{LCs^2+R_2Cs+1}{Ls}\right) \quad VI$$

Substituindo VI em V:

$$\left(\frac{LCs^2+R_2Cs+1}{Ls}\right)E_o(s)\left[\frac{LC(R_1+R_2)s^2+(R_1R_2C+L)s+R_1}{LCs^2+R_2Cs+1}\right]=E_i(s)$$

B.3.7

OGATA Ed5

Continuação

FT:

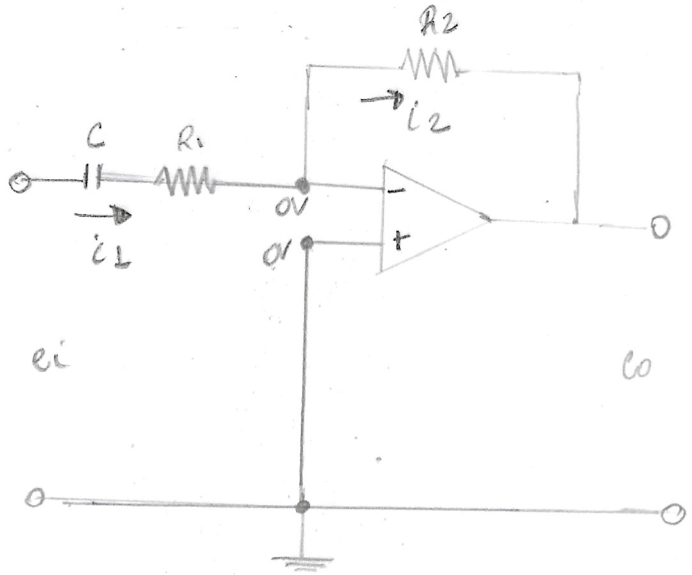
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Ls}{LC(R_1+R_2)s^2 + (R_1R_2C+L)s + R_1}$$

B.3.10

OGATA Ed 5

Obtenha a função de transferência $E_o(s)/E_i(s)$ do circuito:

inversor simples.



$$V_c = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$V_c = \frac{1}{Cs} \cdot I(s)$$

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

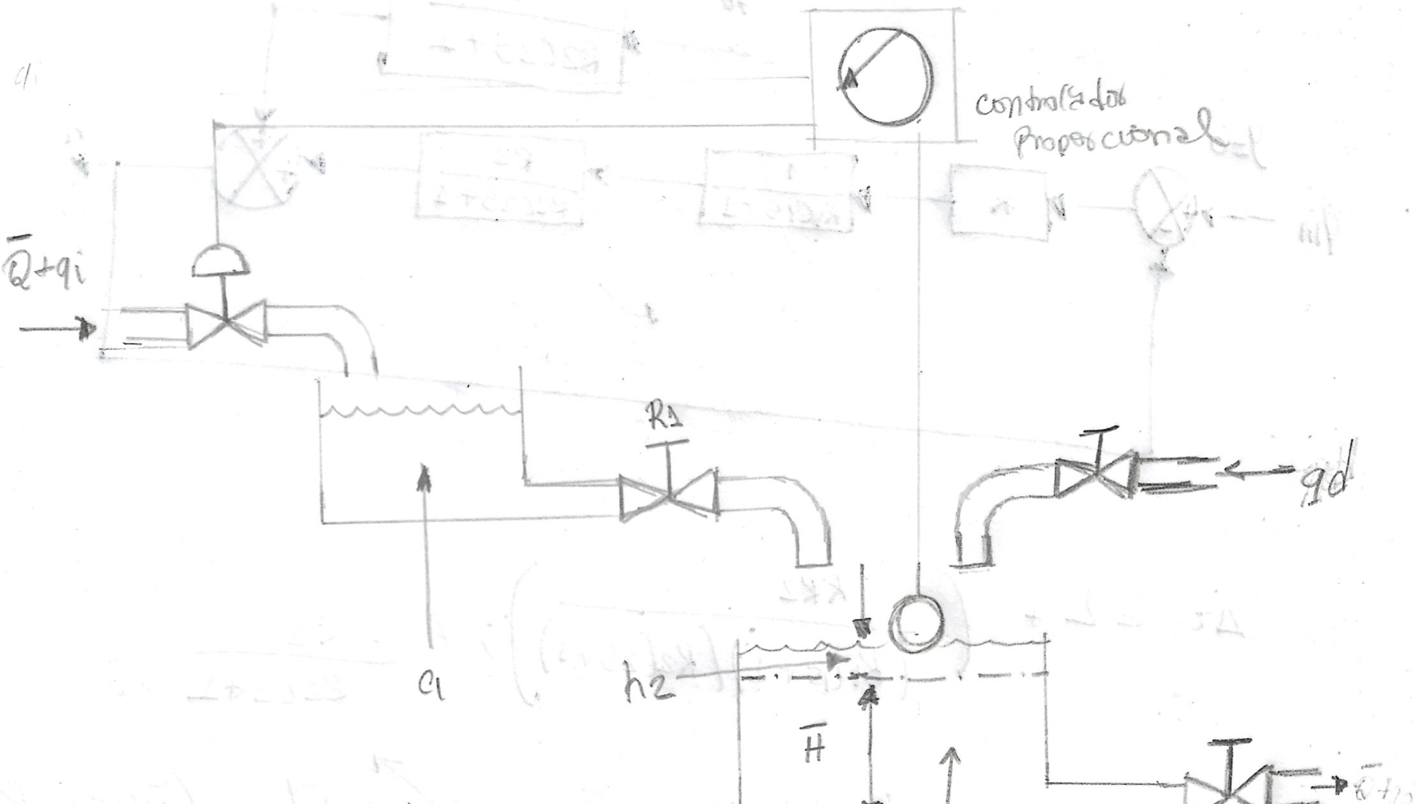
$$i_1 = i_2$$

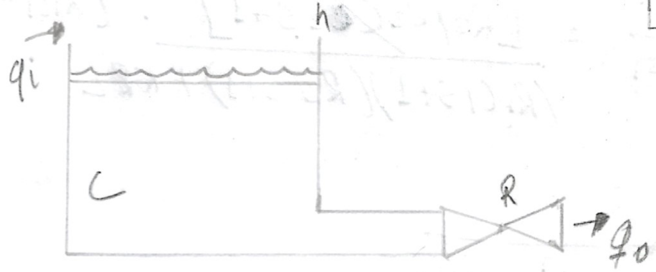
$$\frac{e_i - 0}{\frac{1}{C} + R_1} = 0 - e_o \Rightarrow \frac{\frac{e_i}{1+R_1Cs}}{Cs} =$$

$$-\frac{e_o}{R_2} \rightarrow \frac{Cs \cdot e_i}{1+R_1Cs} = -\frac{e_o}{R_2} \Rightarrow \frac{e_o}{e_i} =$$

$$-\frac{Cs \cdot R_2}{1+R_1Cs}$$

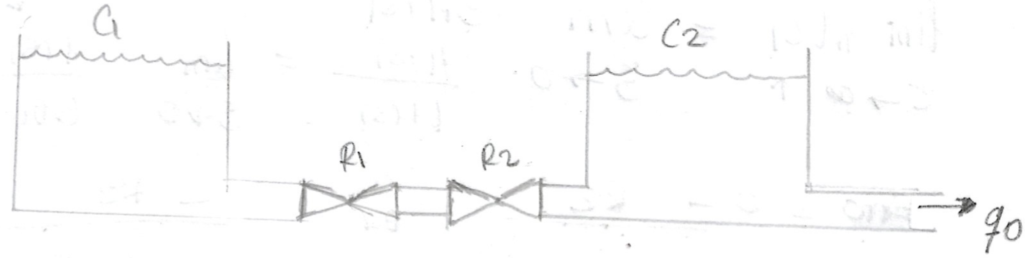
B. 4.2

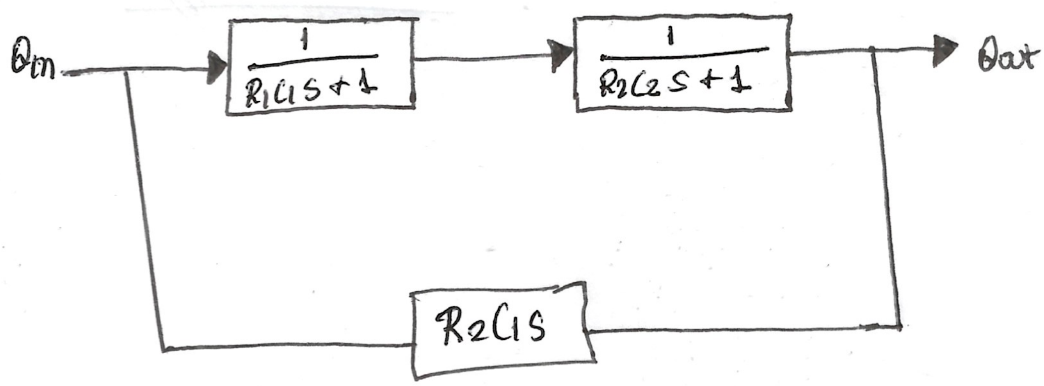


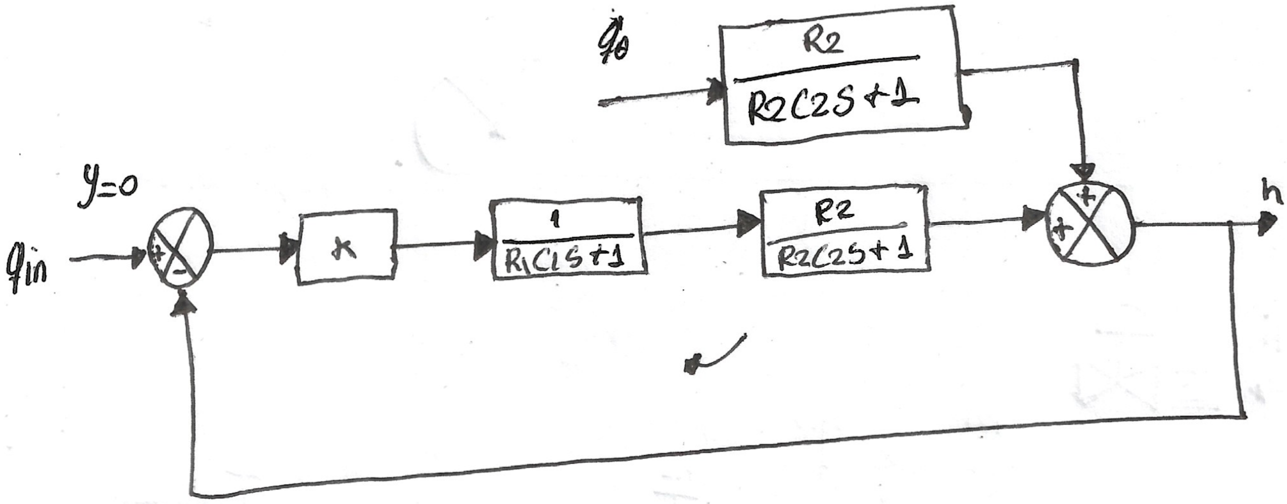


$$\frac{Q_o(s)}{Q_{in}(s)} = \frac{\tau}{Rcs+1} \; ; \; \frac{H(s)}{Q_i(s)} =$$

$$\frac{R}{Rcs+1}$$







$$\Delta t = L + \left(\frac{KR_2}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2S+1)} \right) ; \; P_d = \frac{R_2}{R_2C_2+1}$$

$$\Delta i = t - 0 = 1 \therefore \frac{H(s)}{Q_D(s)} = \frac{[R_2/R_2\cancel{C_2S+1}]}{(R_1C_1S+1)(R_2C_2+1)+KR_2} \cdot (R_1C_1+1)\cancel{(R_2C_2S+1)}$$

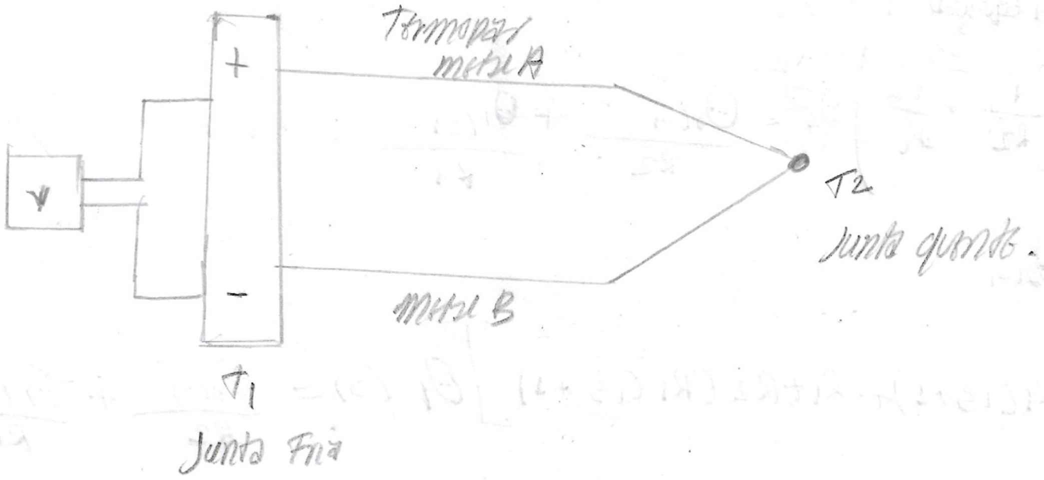
$$H(s) = \frac{R_2(R_1C_1S+1)}{(R_1C_1S+1)(R_2C_2S+1)+KR_2}$$

$\boxed{T\ 0}$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{S\to 0} \frac{SH(s)}{\frac{H(s)}{I(s)}} = \lim_{S\to 0} \frac{H(s)}{Q_D(s)} = \frac{R_2}{1+KR_2}$$

$$\text{Erro} = 0 - \frac{R_2}{1+KR_2} \quad \text{ou} \quad \frac{-R_2}{1+KR_2}$$

B. 4. 12.



θ_0 = temperatura
θ_1 = temperatura do termopar
θ_2 = temperatura do poço térmico
R_1, R_2: Resistências térmicas do termopar
C_1, C_2: capacitâncias térmicas do termopar e do poço térmico
h_1, h_2: taxas de transferência de calor.

Sistema
Termopar
Resistência térmica : R_1
Capacitância térmica : C_1
constante de tempo $\tau_1 = R_1C_1 = 2s$
Poço Térmico (contém, protege, o termopar)
Resistência térmica : R_2
capacitância térmica : C_2
constante de tempo : $\tau_2 = R_2C_2 = 30s$.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{8g}{40g} = \frac{1}{5} \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{5}$$

termopar (θ_1):

$$C_1 \frac{d\theta_1}{dt} = h_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{R_1}$$

$$R_1C_1 \frac{d\theta_1}{dt} + \theta_1 = \theta_2. \quad [1]$$

Rearranjando

$$C_2 \frac{d\theta_2}{dt} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)\theta_2 = \frac{\theta_0}{R_2} + \frac{\theta_1}{R_1}. \quad [2]$$

Transformada de Laplace e funções de transferência

$$R_1C_1 s\,\Theta_1(s) + \Theta_1(s) = \Theta_2(s) \rightarrow \Theta_2(s) = (R_1C_1 s + 1)\,\Theta_1(s).$$

Expressão 2

$\Theta_2(s)$ da equação

$$C_2 s \Theta_2(s) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)\Theta_2 = \frac{\Theta_0(s)}{R_2} + \frac{\Theta_1(s)}{R_1}$$

Substituindo $\Theta_2(s)$

$$\left[C_2 s (R_1 C_1 s + 1) + R_1 + R_2 (R_1 C_1 s + 1)\right]\Theta_1(s) = \frac{\Theta_0(s)}{R_2} + \frac{\Theta_1(s)}{R_1}$$

$\frac{\Theta_1(s)}{\Theta_0(s)}$, obtemos

$$\frac{\Theta_1(s)}{\Theta_0(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}$$

Substituindo temos:

$R_1 C_1 = 2s$, $R_2 C_2 = 30s$

$R_2 C_1$: como $C_1 = \frac{C_2}{5}$

$$R_2 C_1 = R_2\left(\frac{C_2}{5}\right) = \frac{R_2 C_2}{5} = \frac{30}{5} = 6s.$$

$$(2)(30)s^2 + (2 + 30 + 6)s + 1 = 60s^2 + 38s + 1$$

$$60s^2 + 38s + 1 = 0$$

$$s = \frac{-38 \pm \sqrt{38^2 - 4 \cdot 60 \cdot 1}}{2 \cdot 60} = -\frac{38 \pm \sqrt{1444 - 240}}{120} =$$

$$\frac{-38 \pm 34.7}{120}$$

$$s_1 = \frac{-38 + 34.7}{120} \approx -0{,}0275 \rightarrow \tau_2 = \frac{1}{|s_1|} \approx \underline{36{,}36s}$$

$$s_2 = \frac{-38 - 34.7}{120} \approx 0.606 \rightarrow \tau_1 = \frac{1}{|s_2|} \approx \underline{1.65s}$$

$(1.65s + 1)(36.36s + 1) \approx$ $\tau_1 = 1.65s$

$\underline{\tau_2 = 36{,}36s}$

Representação de espaço de estado B.4.12

termopar

$$C_1 \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{R_1} \rightarrow \frac{d\theta_1}{dt} \quad \frac{1}{R_1 C_1}(\theta_2 - \theta_1)$$

$R_1 C_1 = 2s$.

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{1}{2}\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_2 \, . \, [1]$$

$$C_2 \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\theta_0 - \theta_2}{R_2} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{R_1}$$

$R_2 C_2 = 30s$ e $R_2 C_1 = 6s$ ($C_1 = C_2$ (s)).

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{1}{30}\theta_0 - \frac{1}{30}\theta_2 - \frac{1}{6}\theta_2 + \frac{1}{6}\theta_1 .$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{1}{6}\theta_1 - \frac{1}{5}\theta_2 + \frac{1}{30}\theta_0 \cdot [2]$$

Definição de variáveis de estado

$$x_1 = \theta_1 , \; x_2 = \theta_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 , \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{30}u , \text{ (onde } u = \theta_0) \end{cases}$$

forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{30} \end{bmatrix} u .$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu . \quad y = Cx$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.1667 & -0.2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0333 \end{bmatrix} . \quad C = [1 0] .$$

Polos: τ_1 e τ_2

$\det[sI - A] = 0$:

$s^2 + 0.7s + 0.0167 = 0 \rightarrow s \approx -0.0275, -0{,}606,$

$\tau_1 = 1{,}65s$ e $\tau_2 = 36.36s$.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.1667 & -0.2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0333 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \; 0]x,$$

Onde $x = [Q_1, Q_2]^T$, $u = Q_0$ e $y = Q_1$.