Slide 3 - Conjuntos

ANDRE MOURA LIMA - Atividade 01

Notações de Conjuntos

- **Enumeração de elementos:** Os elementos são listados entre chaves, separados por vírgulas.
- **Propriedade característica:** Uma propriedade que define os elementos é indicada entre chaves.
- **Diagrama de Venn-Euler:** Uma figura fechada (como um círculo) contendo os elementos escritos em seu interior.

1. Listagem de Elementos de um Conjunto

Como você pode representar o conjunto (V = {a, e, i, o, u}) em Python e imprimir seus elementos?

Para representar o conjunto V das vogais.

Elementos:

V = {a, e, i, o, u}

- Esta é a forma mais direta, listando todas as vogais entre chaves.

Propriedade característica:

V = {x; x é vogal}

- Aqui, o conjunto é definido pela propriedade que seus elementos devem satisfazer (ser uma vogal).

como no diagrama abaixo

O diagrama mostra os elementos a , e , i , o , u a,e,i,o,u de forma clara.

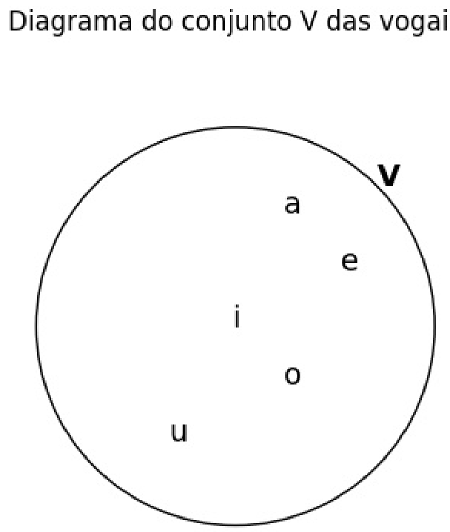
In [ ]:
```python
# Representando o conjunto V das vogais
V = {'a', 'e', 'i', 'o', 'u'}

# Imprimindo os elementos do conjunto em ordem alfabética
print("Elementos do conjunto V:")
for vogal in sorted(V):
    print(vogal)

#AndreMouraL
```

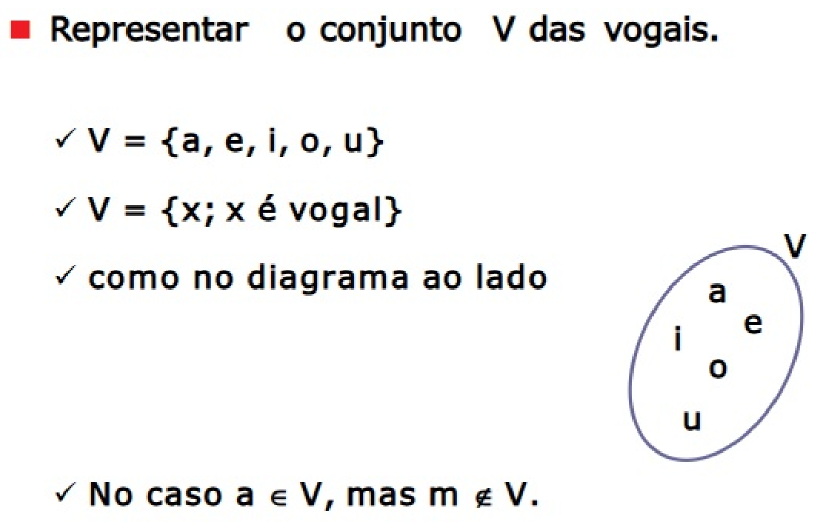
```
Elementos do conjunto V:
a
e
i
o
u
```

Diagrama de Venn para representar o conjunto V das vogais:

In [ ]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

# Criar a figura
fig, ax = plt.subplots()

# Desenhar a "área" do conjunto V (um círculo ovalado)
circle = plt.Circle((0.5, 0.5), 0.35, edgecolor='black', facecolor='none')
ax.add_patch(circle)

# Adicionar os elementos do conjunto dentro do "círculo"
vogais = ['a', 'e', 'i', 'o', 'u']
posicoes = [(0.6, 0.7), (0.7, 0.6), (0.5, 0.5), (0.6, 0.4), (0.4, 0.3)]

for letra, pos in zip(vogais, posicoes):
    ax.text(pos[0], pos[1], letra, fontsize=14, ha='center')

# Adicionar o nome do conjunto
ax.text(0.75, 0.75, 'V', fontsize=14, weight='bold')

# Ajustar o gráfico
ax.set_aspect('equal')
ax.set_xlim(0, 1)
```

```python
ax.set_ylim(0, 1)
ax.axis('off')  # Esconde os eixos

plt.title("Diagrama do conjunto V das vogais")
plt.show()


#AndreMouraL
```





2. Verificação de Elementos em um Conjunto

Dado o conjunto (V = {a, e, i, o, u}), como você pode verificar se o elemento 'a' está presente em (V)?

In [ ]:
```python
# Conjunto V das vogais
V = {'a', 'e', 'i', 'o', 'u'}

# Verificações
print('a  V?', 'a' in V)
print('m  V?', 'm' in V)

#AndreMouraL
```

```
a  V? True
m  V? False
```

OU:

In [ ]:
```python
# Conjunto V das vogais
V = {'a', 'e', 'i', 'o', 'u'}

# Verificações com símbolos e respostas
print('a  V?', 'Verdadeiro' if 'a' in V else 'Falso')
print('m  V?', 'Verdadeiro' if 'm' not in V else 'Falso')
```

```
#AndreMouraL
```

```
a  V? Verdadeiro
m  V? Verdadeiro
```

Relação de pertinência:

Dessa forma, verificamos que a esta contido no conjunto V ou seja, no caso a V, mas m V.

3. Criação de um Conjunto com Propriedades Específicas

Como você pode criar um conjunto (B) em Python que contém todos os números inteiros pares maiores que 10 e menores que 20?

Segundo o slide da aula 1 pag 7, a definição matemática do conjunto B seria:

- $B = \{x : x \text{ e um numero par}, \ x > 10\}$

> Adaptando para o intervalo específico (maiores que 10 e menores que 20), temos:

B = {x : x é um número par, 10 < x < 20}

Em python seria:

In [ ]:
```
B = {x for x in range(12, 20, 2)}
B
#AndreMouraL
```

Out[ ]:
```
{12, 14, 16, 18}
```

Resultado: O conjunto B será:

B={12,14,16,18}

In [ ]:
```
```

4. Comparação de Conjuntos

Se (V = {a, e, i, o, u}) e (C = {i, o, u}), como você pode verificar se todos os elementos de (C) também estão em (V)?

Para verificar se todos os elementos do conjunto C também estão no conjunto V, você pode usar o método issubset() em Python, que corresponde à operação de subconjunto () apresentada nos slides (páginas 10-12).

In [ ]:
```
V = {'a', 'e', 'i', 'o', 'u'}
C = {'i', 'o', 'u'}

# Verifica se C é subconjunto de V
resultado = C.issubset(V)
print(resultado)  # Saída: True
#AndreMouraL
```

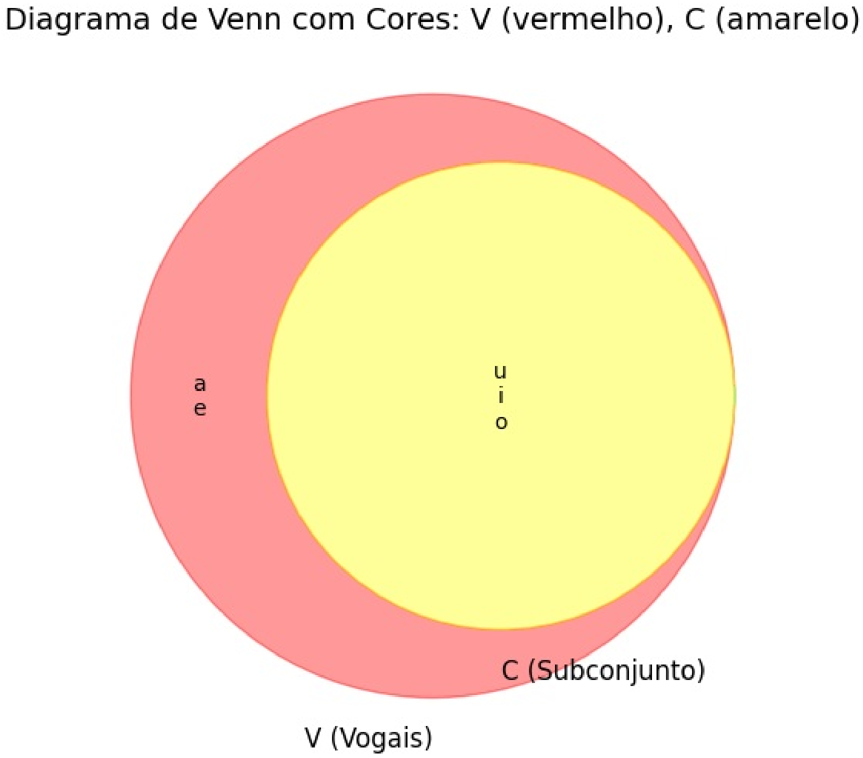
```
True
```

In [ ]:
```
!pip install matplotlib-venn
```

```
Requirement already satisfied: matplotlib-venn in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (1.1.2)
Requirement already satisfied: matplotlib in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib-venn) (3.1
0.0)
Requirement already satisfied: numpy in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib-venn) (2.0.2)
Requirement already satisfied: scipy in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib-venn) (1.14.1)
Requirement already satisfied: contourpy>=1.0.1 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib->mat
plotlib-venn) (1.3.1)
Requirement already satisfied: cycler>=0.10 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib->matplot
lib-venn) (0.12.1)
Requirement already satisfied: fonttools>=4.22.0 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib->ma
tplotlib-venn) (4.57.0)
Requirement already satisfied: kiwisolver>=1.3.1 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib->ma
tplotlib-venn) (1.4.8)
Requirement already satisfied: packaging>=20.0 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib->matp
lotlib-venn) (24.2)
Requirement already satisfied: pillow>=8 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib->matplotlib
-venn) (11.1.0)
Requirement already satisfied: pyparsing>=2.3.1 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib->mat
plotlib-venn) (3.2.3)
Requirement already satisfied: python-dateutil>=2.7 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from matplotlib-
>matplotlib-venn) (2.8.2)
Requirement already satisfied: six>=1.5 in /usr/local/lib/python3.11/dist-packages (from python-dateutil>=2.7->m
atplotlib->matplotlib-venn) (1.17.0)
```

In [ ]:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib_venn import venn2

# Conjuntos
V = {'a', 'e', 'i', 'o', 'u'}
C = {'i', 'o', 'u'}

# Criar o diagrama de Venn com rótulos
plt.figure(figsize=(6, 6))
venn = venn2([V, C], set_labels=('V (Vogais)', 'C (Subconjunto)'))

# Cores: vermelho para V, verde para C, amarelo para interseção
venn.get_patch_by_id('10').set_color('red')     # Apenas em V
venn.get_patch_by_id('01').set_color('green')   # Apenas em C (vazio neste caso)
venn.get_patch_by_id('11').set_color('yellow')  # Interseção

# Define os rótulos com as letras dos conjuntos
venn.get_label_by_id('10').set_text('\n'.join(V - C))     # Elementos só em V
venn.get_label_by_id('11').set_text('\n'.join(V & C))     # Interseção
venn.get_label_by_id('01').set_text('\n'.join(C - V))     # Elementos só em C (vazio)

# Título do gráfico
plt.title('Diagrama de Venn com Cores: V (vermelho), C (amarelo)', fontsize=14)
plt.show()
#AndreMouraL
```



5. Descrição de Conjuntos por Compreensão

Como você pode representar um conjunto (D) em Python que contém todos os números inteiros de 1 a 10 que são divisíveis por 3?

Para representar o conjunto D em Python contendo todos os números inteiros de 1 a 10 **que** são divisíveis por 3, você pode usar compreensão de conjuntos (set comprehension), seguindo a notação matemática apresentada nos slides (como no slide 7, que define conjuntos por propriedades).

range(1, 11): Gera números inteiros de 1 a 10 (o limite superior 11 é exclusivo).

x % 3 == 0: Filtra apenas os números divisíveis por 3 (resto da divisão igual a 0).

Chaves { } Cria um conjunto (sem repetições).

In [ ]:
```python
D = {x for x in range(1, 11) if x % 3 == 0}
D

#AndreMouraL
```

Out[ ]:
```
{3, 6, 9}
```

6. União de Conjuntos

Dados dois conjuntos (A = {1, 2, 3}) e (B = {3, 4, 5}), como você pode obter a união de (A) e (B)?

Para obter a união dos conjuntos A

{ 1 , 2 , 3 } A={1,2,3} e B

{ 3 , 4 , 5 } B={3,4,5} em Python, você pode usar o método union() ou o operador |, conforme a definição matemática apresentada no slide 15:

AB={x : x A ou x B}

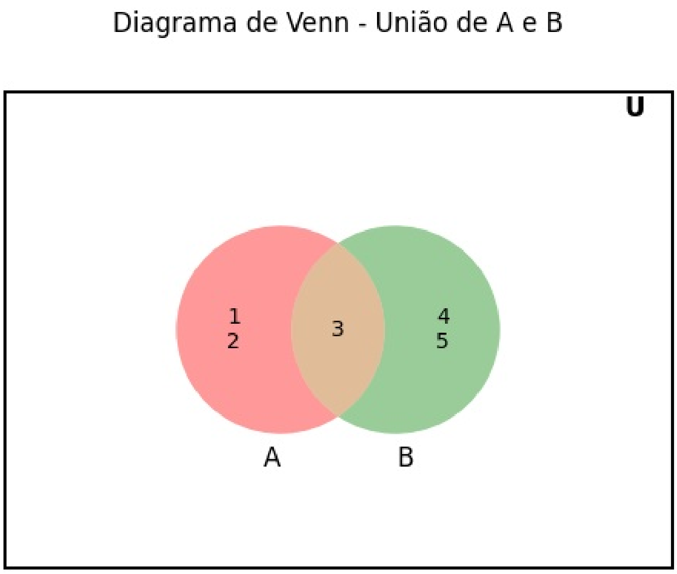
In [ ]:
```python
A = {1, 2, 3}
B = {3, 4, 5}

# Método 1: Usando union()
uniao_AB = A.union(B)

# Método 2: Usando o operador |
#uniao_AB = A | B

print(uniao_AB)

#AndreMouraL
```

```
{1, 2, 3, 4, 5}
```

OU com diagrama:

In [ ]:
```python
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib_venn import venn2
import matplotlib.patches as patches

# Conjuntos
A = {1, 2, 3}
B = {3, 4, 5}
U = {1, 2, 3, 4, 5}

# Criação da figura
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))

# Diagrama de Venn
v = venn2([A, B], set_labels=('A', 'B'), ax=ax)

# Ajusta limites para o retângulo do universo
ax.set_xlim(-1.5, 1.5)
ax.set_ylim(-1.2, 1.2)

# Desenha o retângulo representando o universo
rect = patches.Rectangle(
    (-1.4, -1), 2.8, 2,  # (x, y), largura, altura
    linewidth=1.5, edgecolor='black', facecolor='none'
)
```

```
ax.add_patch(rect)

# Posiciona o "U" dentro do retângulo (canto superior direito)
plt.text(1.2, 0.9, 'U', fontsize=12, fontweight='bold')

# Insere os elementos nos subconjuntos
v.get_label_by_id('10').set_text('1\n2')  # Só em A
v.get_label_by_id('01').set_text('4\n5')  # Só em B
v.get_label_by_id('11').set_text('3')     # Interseção

# Título
plt.title('Diagrama de Venn - União de A e B')

plt.axis('off')  # remove eixos
plt.show()

#AndreMouraL
```



7. Interseção de Conjuntos

Dado os conjuntos (A = {1, 2, 3}) e (B = {3, 4, 5}), como você pode encontrar a interseção entre (A) e (B)?

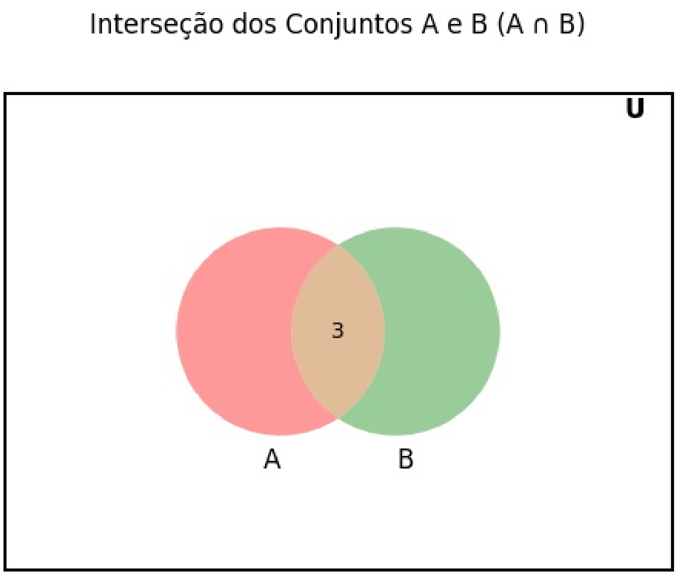
In [ ]:
```
A = {1, 2, 3}
B = {3, 4, 5}

# Método 1: Usando intersection()
intersecao_AB = A.intersection(B)

print(intersecao_AB)

#AndreMouraL
```

```
{3}
```

OU:

In [ ]:
```
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib_venn import venn2
import matplotlib.patches as patches

# Conjuntos
A = {1, 2, 3}
B = {3, 4, 5}

# Criação do gráfico
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))

# Diagrama de Venn com interseção
v = venn2([A, B], set_labels=('A', 'B'), ax=ax)

# Retângulo do conjunto universo U
ax.set_xlim(-1.5, 1.5)
ax.set_ylim(-1.2, 1.2)
rect = patches.Rectangle(
    (-1.4, -1), 2.8, 2,  # posição e tamanho
    linewidth=1.5, edgecolor='black', facecolor='none'
```

```
)
ax.add_patch(rect)

# Adiciona o "U" dentro do retângulo
plt.text(1.2, 0.9, 'U', fontsize=12, fontweight='bold')

# Mostra apenas o elemento da interseção
v.get_label_by_id('10').set_text('')   # Só A (esconde)
v.get_label_by_id('01').set_text('')   # Só B (esconde)
v.get_label_by_id('11').set_text('3')  # Interseção

# Título
plt.title('Interseção dos Conjuntos A e B (A ∩ B)')

plt.axis('off')  # remove os eixos
plt.show()

#AndreMouraL
```



8. Diferença entre Conjuntos

Como você pode determinar os elementos que estão em (A = {1, 2, 3}) mas não estão em (B = {3, 4, 5})?

Para determinar os elementos que estão no conjunto A

{ 1 , 2 , 3 } A={1,2,3} mas não estão no conjunto B

{ 3 , 4 , 5 } B= {3,4,5}, você pode usar a diferença entre conjuntos, conforme definido no slide 17:

AB={x:xA e x / B}

In [ ]:
```
A = {1, 2, 3}
B = {3, 4, 5}

# Método 1: Usando o operador -
diferenca_AB = A - B

print(diferenca_AB)

#AndreMouraL
```

{1, 2}

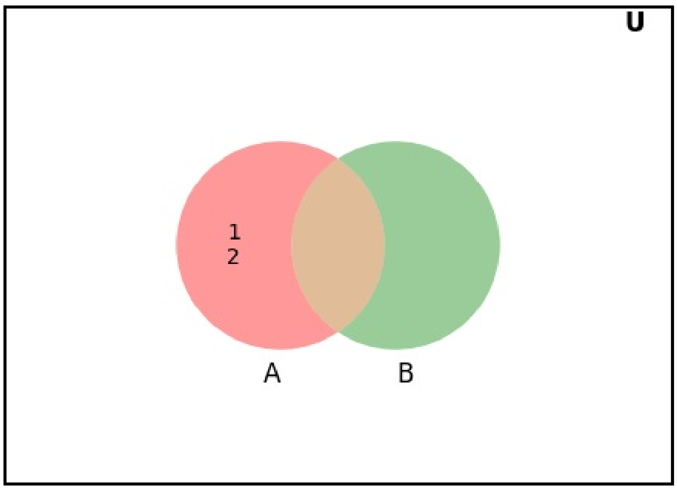
OU:

In [ ]:
```
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib_venn import venn2
import matplotlib.patches as patches
```

```
# Conjuntos
A = {1, 2, 3}
B = {3, 4, 5}

# Diferença A - B
diferenca_AB = A - B
print(diferenca_AB)  # Saída: {1, 2}

# Criação do gráfico
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))

# Diagrama de Venn
v = venn2([A, B], set_labels=('A', 'B'), ax=ax)

# Retângulo representando o conjunto universo U
ax.set_xlim(-1.5, 1.5)
ax.set_ylim(-1.2, 1.2)
retangulo = patches.Rectangle(
    (-1.4, -1), 2.8, 2,
    linewidth=1.5, edgecolor='black', facecolor='none'
)
ax.add_patch(retangulo)

# Adiciona o rótulo do conjunto universo "U"
plt.text(1.2, 0.9, 'U', fontsize=12, fontweight='bold')

# Mostra apenas os elementos da diferença A - B
v.get_label_by_id('10').set_text('1\n2')  # Apenas em A
v.get_label_by_id('01').set_text('')      # Apenas em B (oculta)
v.get_label_by_id('11').set_text('')      # Interseção (oculta)

# Título
plt.title('Diferença A - B (Elementos em A que não estão em B)')

plt.axis('off')  # remove os eixos
plt.show()

#AndreMouraL
```

```
{1, 2}
```

Diferença A - B (Elementos em A que não estão em B)



9. Simetria de Diferença entre Conjuntos

Se (A = {1, 2, 3}) e (B = {3, 4, 5}), como você pode obter a diferença simétrica entre (A) e (B)?

Para obter a diferença simétrica entre os conjuntos A

{ 1 , 2 , 3 } A={1,2,3} e B

{ 3 , 4 , 5 } B={3,4,5} em Python, você pode usar o método symmetric_difference() ou o operador ^, conforme a definição matemática apresentada no slide 18:

AB=(AB)(A∩B)={x:xA ou xB, mas não o em ambos}

In [ ]:

```
A = {1, 2, 3}
B = {3, 4, 5}

# Método 1: Usando symmetric_difference()
diff_simetrica_AB = A.symmetric_difference(B)

print(diff_simetrica_AB)

#AndreMouraL
```

{1, 2, 4, 5}

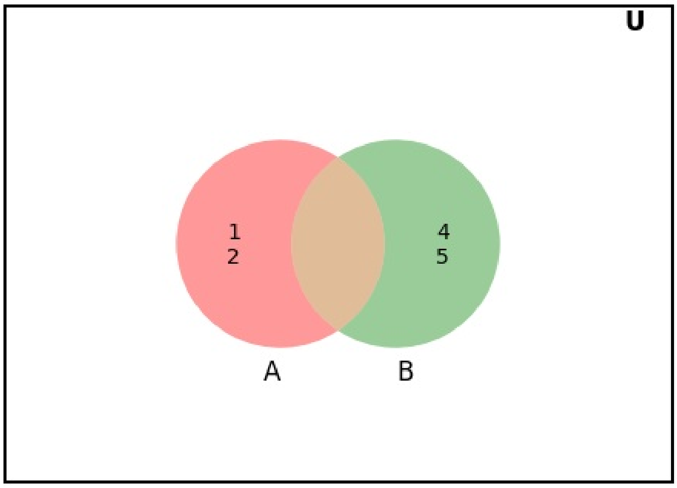
OU:

In [ ]:

```
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib_venn import venn2
import matplotlib.patches as patches

# Conjuntos
A = {1, 2, 3}
B = {3, 4, 5}

# Diferença simétrica
diff_simetrica_AB = A.symmetric_difference(B)
print(diff_simetrica_AB)  # Saída: {1, 2, 4, 5}

# Gráfico
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))

# Diagrama de Venn
v = venn2([A, B], set_labels=('A', 'B'), ax=ax)

# Retângulo do conjunto universo U
ax.set_xlim(-1.5, 1.5)
ax.set_ylim(-1.2, 1.2)
retangulo = patches.Rectangle(
    (-1.4, -1), 2.8, 2,
    linewidth=1.5, edgecolor='black', facecolor='none'
)
ax.add_patch(retangulo)

# Rótulo do universo "U"
plt.text(1.2, 0.9, 'U', fontsize=12, fontweight='bold')

# Elementos da diferença simétrica (exclui a interseção)
v.get_label_by_id('10').set_text('1\n2')  # Só em A
v.get_label_by_id('01').set_text('4\n5')  # Só em B
v.get_label_by_id('11').set_text('')      # Interseção (3) oculta

# Título
plt.title('Diferença Simétrica entre A e B (A  B)')

plt.axis('off')  # Esconde os eixos
plt.show()

#AndreMouraL
```

{1, 2, 4, 5}

Diferença Simétrica entre A e B (A ⊕ B)



Diferença Simétrica ():

Retorna os elementos que estão em A ou em B, mas não em ambos.

10. Subconjuntos e Superconjuntos

Dado (A = {1, 2, 3}) e (B = {1, 2, 3, 4, 5}), como você pode verificar se (A) é um subconjunto de (B) e se (B) é um superconjunto de (A)?

Verificando se A é subconjunto de B ($A \subseteq B$):

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$$

In [63]:
```python
A = {1, 2, 3}
B = {1, 2, 3, 4, 5}

# Método 1: Usando issubset()
eh_subconjunto = A.issubset(B)  # True

print(eh_subconjunto)

#AndreMouraL
```

```
True
```

Retorna True se todos os elementos de A estiverem em B.

Verificando se B é superconjunto de A ($B \supseteq A$):

$$B \supseteq A \Leftrightarrow A \subseteq B$$

In [66]:
```python
# Método 1: Usando issuperset()
eh_superconjunto = B.issuperset(A)  # True

print(eh_superconjunto)

#AndreMouraL
```

```
True
```

É o inverso de subconjunto: B.issuperset(A) é equivalente a A.issubset(B).

11. Números Pares Maiores que 10

$B = \{x: x \text{ é um número par}, x > 10\}$

In [ ]:
```python
B = {x for x in range(12, 100, 2)}  # Começa em 12 (menor par > 10), passo 2 (pares)
```

In [ ]:
```python
print(B)

#AndreMouraL
```

```
{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66,
68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98}
```

12. Números Primos Menores que 20

$P = \{x: x \text{ é um número primo}, x < 20\}$

In [ ]:
```python
def é_primo(n):
    if n <= 1:
        return False
    for i in range(2, int(n**0.5) + 1):
        if n % i == 0:
            return False
    return True

P = {x for x in range(2, 20) if é_primo(x)}

#AndreMouraL
```

In [ ]:
```python
print(P)
```

```
{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
```

13. Números Ímpares Divisíveis por 3 até 30

$I = \{x: x \text{ é um número ímpar divisível por 3}, x \leq 30\}$

In [ ]:
```python
I = {x for x in range(3, 31, 2) if x % 3 == 0}
#AndreMouraL
```

In [ ]:
```python
print(I)
```

```
{3, 21, 9, 27, 15}
```

14. Quadrados Perfeitos Menores que 100

$Q = \{x^2: x \text{ é um número inteiro}, x^2 < 100\}$

In [ ]:
```python
Q = {x**2 for x in range(-10, 11) if x**2 < 100}
Q

#AndreMouraL
```

Out[ ]:
```
{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81}
```

15. Múltiplos de 5 entre 10 e 50

$M = \{x: x \text{ é um múltiplo de 5}, 10 < x < 50\}$

```
In [ ]: M = {x for x in range(11, 50) if x % 5 == 0}
        print("M =", M)

        #AndreMouraL
```

```
M = {35, 40, 45, 15, 20, 25, 30}
```

15. Subconjunto próprio e não próprio

Dados dois conjunto em caa um dos cenários abaixo, escreva um script em python para verificar:

- se A é subconjunto de B e se C é subconjunto próprio de D
- Gerar um diagrama de Venn que ilustre as relações entre os conjuntos em cada um dos cenários
- Explicar porque o diagrama pode mostrar "0"e o que isso significa em termos dos elementos dos conjuntos.

Cenário 1

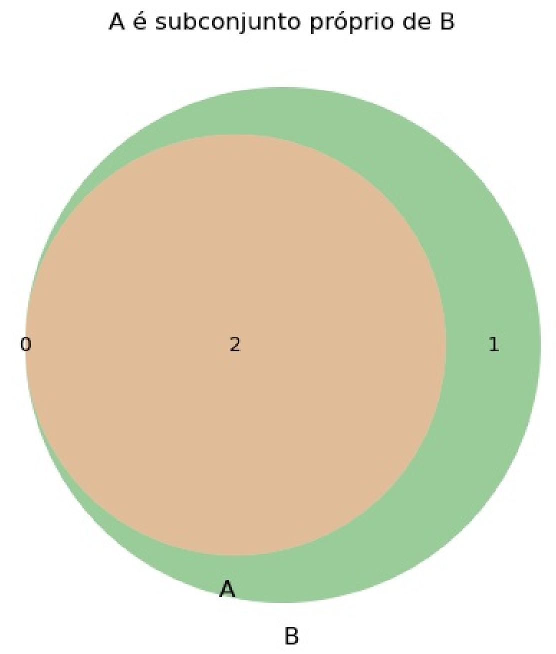
- Considere (A = {1, 2}) e (B = {1, 2, 3}).

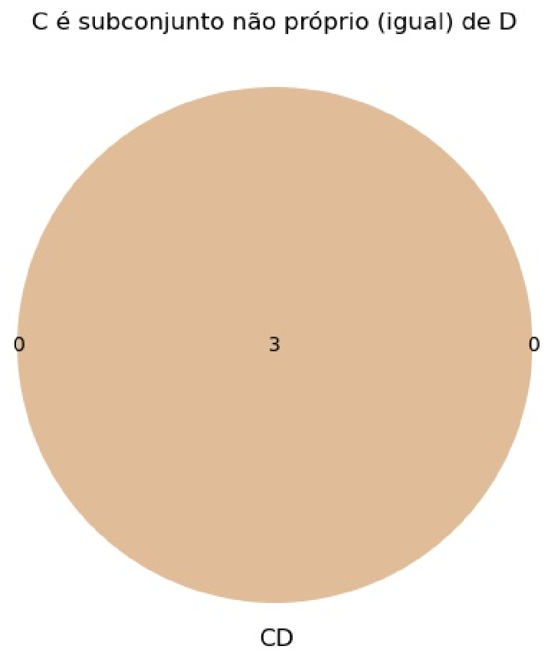
Cenário 2

- Considere (C = {1, 2, 3}) e (D = {1, 2, 3}).

```
In [ ]: import matplotlib.pyplot as plt
        from matplotlib_venn import venn2

        # Definindo os conjuntos
        A = {1, 2}
        B = {1, 2, 3}
        C = {1, 2, 3}
        D = {1, 2, 3}

        # Verificando subconjunto próprio
        is_subset_proper_A_B = A < B
        print(f"A é subconjunto próprio de B: {is_subset_proper_A_B}")

        # Verificando subconjunto não próprio
        is_subset_C_D = C.issubset(D) and C == D
        print(f"C é subconjunto não próprio (igual) de D: {is_subset_C_D}")

        # Gerando diagrama de Venn para subconjunto próprio
        plt.figure(figsize=(12, 6))
        plt.subplot(1, 2, 1)
        venn2([A, B], ('A', 'B'))
        plt.title("A é subconjunto próprio de B")

        # Gerando diagrama de Venn para subconjunto não próprio
        plt.subplot(1, 2, 2)
        venn2([C, D], ('C', 'D'))
        plt.title("C é subconjunto não próprio (igual) de D")

        plt.show()

        #AndreMouraL
```

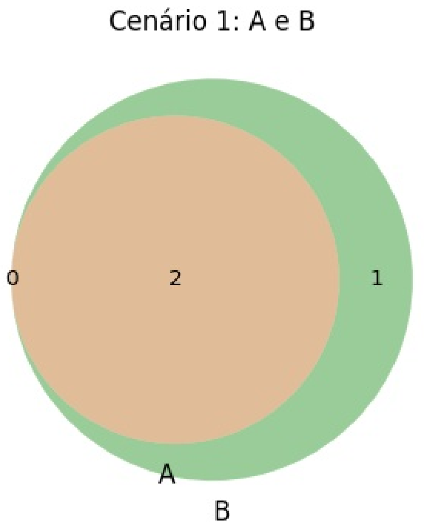
```
A é subconjunto próprio de B: True
C é subconjunto não próprio (igual) de D: True
```



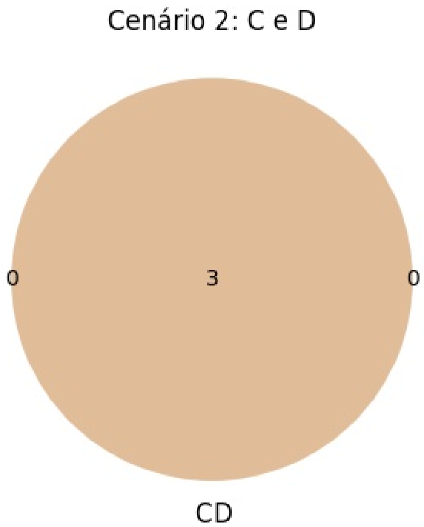


In [ ]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib_venn import venn2

# Cenário 1
A = {1, 2}
B = {1, 2, 3}

print("Cenário 1:")
print("A é subconjunto de B?", A.issubset(B))
print("A é subconjunto próprio de B?", A.issubset(B) and A != B)

# Diagrama de Venn para Cenário 1
plt.figure(figsize=(6, 4))
venn2([A, B], set_labels=("A", "B"))
plt.title("Cenário 1: A e B")
plt.show()

# Cenário 2
C = {1, 2, 3}
D = {1, 2, 3}

print("\nCenário 2:")
print("C é subconjunto de D?", C.issubset(D))
print("C é subconjunto próprio de D?", C.issubset(D) and C != D)

# Diagrama de Venn para Cenário 2
plt.figure(figsize=(6, 4))
venn2([C, D], set_labels=("C", "D"))
plt.title("Cenário 2: C e D")
plt.show()

#AndreMouraL
```

```
Cenário 1:
A é subconjunto de B? True
A é subconjunto próprio de B? True
```




```
Cenário 2:
C é subconjunto de D? True
C é subconjunto próprio de D? False
```



Explicação do "0" no Diagrama de Venn No Cenário 2, como C = D, a sobreposição entre os conjuntos é total, e as outras áreas (exclusivas de C e D) têm 0 elementos.

Ou seja:

- A área exclusiva de C tem 0 elementos.
- A área exclusiva de D tem 0 elementos.
- A interseção tem todos os elementos (1, 2, 3).

"0" no diagrama indica que nenhum elemento está somente em um dos conjuntos, ou seja, os conjuntos são iguais.

Slide 19 - Operação Produto Cartesiano

O **produto cartesiano** dos conjuntos A e B, denotado por $A \times B$, consiste do conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com a primeira componente em A e a segunda componente em B. Ou seja, $A \times B = \{(x, y) : x$ $\in$ A e y $\in$ B $\}$.

Por exemplo, sejam A = {1, 2} e B = {3, 4}, então:

- A $\times$ B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)}
- B $\times$ A = {(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)}
- A $\times$ A = A^2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}

Aqui está o código Python para calcular o produto cartesiano:

In [ ]:
```
# Definindo os conjuntos A e B
A = {1, 2}
B = {3, 4}
```

```
A x B = [(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)]
B x A = [(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)]
A x A (A^2) = [(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)]
```

In [ ]:
```python
from itertools import product

# Definindo os conjuntos
A = {1, 2}
B = {3, 4}

# Produto cartesiano A × B
AxB = list(product(A, B))
print("A × B =", AxB)

# Produto cartesiano B × A
BxA = list(product(B, A))
print("B × A =", BxA)

# Produto cartesiano A × A
AxA = list(product(A, A))
print("A × A =", AxA)

#AndreMouraL
```

```
A × B = [(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)]
B × A = [(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)]
A × A = [(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)]
```

Slide 22 - Relações

Slide 27 - Relação Reflexiva

Vamos examinar se as seguintes relações são reflexivas, fornecendo exemplos para cada caso:

1. **Relação $\leq$ (menor ou igual) no conjunto $\mathbb{Z}$:**
   - Explicação: No conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, todo número é menor ou igual a si mesmo, $a \leq a$. Por exemplo, $5 \leq 5$, $-3 \leq -3$. Portanto, a relação $\leq$ é reflexiva.
2. **Inclusão de conjuntos $\subseteq$ em uma coleção C de conjuntos:**
   - Explicação: Na relação de inclusão de conjuntos, todo conjunto é um subconjunto de si mesmo, $A \subseteq A$. Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, então $A \subseteq A$ é verdadeiro. Assim, a relação de inclusão de conjuntos é reflexiva.
3. **Relação $\bot$ (perpendicularidade) em um conjunto L de retas no plano:**
   - Explicação: Uma reta não é perpendicular a si mesma. Portanto, a relação de perpendicularidade $\bot$ não é reflexiva, pois não existe $l \bot l$ para uma reta l em L.
4. **Relação $\parallel$ (paralelismo) em um conjunto L de retas no plano:**
   - Explicação: Toda reta é paralela a si mesma no plano. Se l é uma reta em L, então $l \parallel l$ é sempre verdadeiro. Assim, a relação de paralelismo é reflexiva.
5. **Relação $|$ de divisibilidade no conjunto $\mathbb{N}$:**
   - Explicação: No conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, todo número é divisível por si mesmo, $a | a$. Por exemplo, $6 | 6$, $1 | 1$. Assim, a relação de divisibilidade é reflexiva.

Portanto, as relações $\leq$, $\subseteq$, $\parallel$ e $|$ são reflexivas, enquanto a relação $\bot$ (perpendicularidade) não é reflexiva.

18. Relação Reflexiva: Vamos examinar se as seguintes relações são reflexivas, fornecendo exemplos para cada caso:

- Relação ≤ no conjunto Z:
- Inclusão de conjuntos em uma coleção C de conjuntos:
- Relação ⊥ (perpendicularidade) em um conjunto L de retas no plano:
- Relação || (paralelismo) em um conjunto L de retas no plano:
- Relação | de divisibilidade no conjunto N:

In [3]:
```python
# Conjunto dos inteiros Z e naturais N
Z = [-3, 0, 5]
N = [2, 3, 6]

# Conjunto de retas no plano (representadas simbolicamente)
L = ["l"]
```

```
# 1. Relação ≤ no conjunto Z
print("Relação ≤ no conjunto Z:")
print("Exemplos dessa relação:")
print(f"a <= a:", 0 <= 0)
print(f"{Z[2]} <= {Z[2]}:", Z[2] <= Z[2])   # 5 <= 5
print(f"{Z[0]} <= {Z[0]}:", Z[0] <= Z[0])   # -3 <= -3
print()

# 2. Inclusão  em coleção de conjuntos
print("Inclusão de Conjuntos  em uma coleção C de conjuntos:")
A = {1, 2}
print("Exemplos:")
print("A  A:", A.issubset(A))
print()

# 3. Relação  (perpendicularidade) — simulação simbólica
print("Relação de ⊥ (perpendicularidade) em um conjunto L de retas no plano:")
for l in L:
    print(f"{l} perpendicular a {l}?", False)
print()

# 4. Relação  (paralelismo) — simulação simbólica
print("Relação || (paralelismo) em um conjunto L de retas no plano:")
for l in L:
    print(f"{l} paralela a {l}?", True)
print()

# 5. Relação | (divisibilidade) no conjunto N
print("Relação | de divisibilidade no conjunto N:")
print(f"{N[2]} | {N[2]}:", N[2] % N[2] == 0)  # 6 | 6
print(f"{N[0]} | {N[1]}:", N[1] % N[0] == 0)  # 2 | 3

#AndreMouraL
```

```
Relação ≤ no conjunto Z:
Exemplos dessa relação:
a <= a: True
5 <= 5: True
-3 <= -3: True

Inclusão de Conjuntos  em uma coleção C de conjuntos:
Exemplos:
A  A: True

Relação de ⊥ (perpendicularidade) em um conjunto L de retas no plano:
l perpendicular a l? False

Relação || (paralelismo) em um conjunto L de retas no plano:
l paralela a l? True

Relação | de divisibilidade no conjunto N:
6 | 6: True
2 | 3: False
```

Slide 28 - Relação Simétrica

Uma relação R em um conjunto A é **simétrica** se aRb implica bRa, isto é, se $(a,b) \in R$ implica $(b,a) \in R$.

Analisando as relações dadas:

1. $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$ não é simétrica, pois contém pares como $(1,2)$ sem o par inverso $(2,1)$.

2. $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ é simétrica, pois cada par tem seu inverso na relação.

3. $R_3 = \{(1,3),(2,1)\}$ não é simétrica, já que $(1,3)$ está na relação, mas $(3,1)$ não.

4. $R_4 = \varnothing$, a relação vazia, é simétrica por definição, pois não existem pares que falhem em atender à condição de simetria.

    - A relação vazia não contém nenhum par ordenado. Na teoria das relações, a relação vazia é considerada simétrica,
      pois não há pares que possam violar a condição de simetria. Simetria significa que se (a, b) está em R, então (b, a)
      também deve estar em R. Na relação vazia, não existem pares para contradizer essa propriedade, então ela é trivialmente simétrica.
5. $R_5 = A \times A$, a relação universal, não é necessariamente simétrica a menos que cada

elemento em A seja relacionado apenas consigo mesmo.

- A relação universal em um conjunto A contém todos os pares possíveis (a, b) onde a e b são elementos de A.
  Para que uma relação seja simétrica, cada par (a, b) em R deve ter o par inverso (b, a) também em R.
- Na relação universal, todos os pares possíveis estão incluídos, o que implica que para cada elemento a relacionado a b,
  b também está relacionado a a. No entanto, a verdadeira simetria exige que cada par e seu inverso estejam explicitamente
  presentes na relação. Assim, a relação universal é simétrica se, para cada par (a, b), o par (b, a) também está presente.
- Por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, então $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, que é simétrica porque cada par tem seu inverso na relação.
- Agora, um exemplo onde a relação 5 não é simétrica: Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R_5 = A \times A$ formada sem pares inversos explícitos, como: $R_5=\{(1,1),(1,2),(2,3)\}$
  Neste caso, R_5 inclui o par $(1, 2)$, mas não inclui o par inverso $(2, 1)$, e inclui $(2, 3)$ mas não $(3, 2)$. Portanto, essa relação R_5 não é simétrica, pois não satisfaz a condição de que para todo (a, b) em R, (b, a) também deve estar em R.

Em resumo, a relação vazia R_4 é simétrica por definição, enquanto a relação universal R_5 sobre um conjunto A é simétrica se todos os pares possíveis e seus inversos estão presentes na relação.

19. Relação Simétrica: Uma relação R em um conjunto A é simétrica se aRb implica bRa, isto é, se (a,b) E R implica (b,a) E R.

Analise as relações:

1. R1 = {(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)}
2. R2 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)}
3. R3 = {(1,3), (2,1)}
4. R =
5. R5 = A x A

In [6]:
```python
# Relações fornecidas na questão
R1 = {(4, 4), (2, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 3)}
R2 = {(4, 4), (1, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2), (1, 1)}
R3 = {(1, 3), (2, 1)}
R4 = set()  # Relação vazia
R5 = {(1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 3), (2, 2), (3, 2), (1, 3)}

# Função para verificar se uma relação é simétrica
def is_symmetric(R):
    for (a, b) in R:
        if (b, a) not in R:
            return False
    return True

# Dicionário com as relações
relacoes = {
    "R1": R1,
    "R2": R2,
    "R3": R3,
    "R4": R4,
    "R5": R5
}

# Impressão da saída exatamente como pedida na questão
for nome, rel in relacoes.items():
    print(f"{nome} = {rel} é simétrica? {is_symmetric(rel)}.")

    #AndreMouraL
```

```
R1 = {(4, 4), (2, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 3)} é simétrica? False.
R2 = {(4, 4), (1, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2), (1, 1)} é simétrica? True.
R3 = {(1, 3), (2, 1)} é simétrica? False.
R4 = set() é simétrica? True.
R5 = {(1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 3), (2, 2), (3, 2), (1, 3)} é simétrica? True.
```

Slide 29 - Transitividade

Analisando a transitividade das relações:

1. **$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$**:

- Uma relação é transitiva se aRb e bRc implicam aRc.
- Em R_1, temos que $1R2$ e $2R3$ implicam $1R3$, e $(1,3)$ está presente em R_1, logo R_1 é transitiva.
- $1R1$ (reflexividade) não afeta a transitividade e é compatível com a definição.
- Não há outras combinações em R_1 que desafiem a transitividade, então R_1 é considerada transitiva.

2. **$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$**:

   - Em R_2, todas as combinações que seguem aRb e bRc resultam em aRc que também estão presentes em R_2.
   - Temos $1R2$ e $2R1$, e como $1R1$ está em R_2, a relação é transitiva para esses elementos.
   - Da mesma forma, $2R1$ e $1R2$ implicam $2R2$, que também está presente em R_2.
   - Todas as relações reflexivas como $1R1$, $2R2$, $3R3$, e $4R4$ também suportam a transitividade porque um elemento está sempre relacionado a si mesmo.

3. **$R_3 = \{(1,3),(2,1)\}$**:

   - R_3 não apresenta uma sequência direta para testar a transitividade (não temos um par onde o segundo elemento de um par é o primeiro elemento do outro), e sem elementos contraditórios, podemos considerar R_3 transitiva por definição.

4. **$R_4 = \varnothing$**, a relação vazia:

   - A relação vazia é considerada transitiva porque não há elementos para violar a condição de transitividade. Não existem pares em R_4 que contradigam a definição de transitividade, então R_4 é trivialmente transitiva.

5. **$R_5 = A \times A$**, a relação universal:

   - Na relação universal, todos os pares possíveis estão presentes. Para quaisquer a, b, c em A, os pares (a,b), (b,c), e (a,c) estão em R_5. Isso satisfaz a condição de transitividade, tornando R_5 transitiva.
   - A relação universal em um conjunto A inclui todos os pares possíveis (a, b) onde a e b são elementos de A.
   - Isso significa que para quaisquer elementos a, b, e c em A, as relações aRb e bRc implicam aRc, simplesmente porque todos os pares possíveis estão presentes em R_5.
   - Por exemplo, se A é o conjunto ${1, 2}$, então R_5 incluirá $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, e $(2, 2)$. Para qualquer par (a, b) e (b, c), o par (a, c) também estará em R_5.
   - Portanto, R_5 é transitiva porque contém todas as combinações possíveis de pares, atendendo à definição de transitividade.

Portanto, R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 são todas relações transitivas.

20. Transitividade: Agora faça o código para analisar a transitividade das relações:

- R1 = {(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)}
- R2 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (3,3), (4,4)}
- R3 = {(1, 3), (2, 1)}
- R4 =
- R5 = AxA

In [14]:
```python
def is_transitiva(R, A):
    for a in A:
        for b in A:
            if (a, b) in R:
                for c in A:
                    if (b, c) in R and (a, c) not in R:
                        return False
    return True

# Conjunto universo A (assumindo A = {1, 2, 3, 4} para R1, R2, R3, R5)
A = {1, 2, 3, 4}

# Relações
R1 = {(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)}
R2 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)}
R3 = {(1,3), (2,1)}
R4 = set()  # Relação vazia
R5 = {(a, b) for a in A for b in A}  # AxA (relação universal)


print("R1 é transitiva?", is_transitiva(R1, A))
print("R2 é transitiva?", is_transitiva(R2, A))
print("R3 é transitiva?", is_transitiva(R3, A))
print("R4 é transitiva?", is_transitiva(R4, A))
```

```python
print("R5 é transitiva?", is_transitiva(R5, A))

#AndreMouraL
```

```
R1 é transitiva? True
R2 é transitiva? True
R3 é transitiva? False
R4 é transitiva? True
R5 é transitiva? True
```

Slide 30 - Relações de Equivalência

Uma relação R em um conjunto S é uma **relação de equivalência** se ela é reflexiva, simétrica e transitiva:

- **Reflexiva**: Para todo $a \in S$, temos aRa.
- **Simétrica**: Se aRb, então bRa.
- **Transitiva**: Se aRb e bRc, então aRc.

Exemplos de Relações de Equivalência

1. **Classificação de animais em espécies**

    - A relação "é da mesma espécie que" é reflexiva, pois todo animal é da mesma espécie que ele mesmo.
    - É simétrica, porque se o animal A é da mesma espécie que o animal B, então B é da mesma espécie que A.
    - É transitiva, pois se A é da mesma espécie que B, e B é da mesma espécie que C, então A é da mesma espécie que C.
2. **Relação $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ em $\{1,2,3\}$**

    - Reflexiva, pois cada elemento 1, 2, 3 está relacionado a si mesmo.
    - Simétrica, pois para o par $(1,2)$ existe o par $(2,1)$.
    - Transitiva, pois não existem pares que violem a transitividade nesta relação.
3. **Relação "$x + y$ é par" em $\mathbb{N}$**

    - **Reflexiva**: Para todo a em $\mathbb{N}$, $a + a$ resulta em um número par, portanto, é reflexiva.
    - **Simétrica**: Se $a + b$ é par, então $b + a$ também é par, dado que a adição é comutativa.
    - **Transitiva**: Esta propriedade é satisfeita. Considerando a, b, c em $\mathbb{N}$, se $a + b$ e $b + c$ são pares, implica que $a + c$ seja par. Por exemplo, com $a = 1$, $b = 1$, e $c = 3$, temos que $a + b$ é par, $b + c$ é par e $a + c$ também é par.
4. **Relação "$x = y^2$" em $\{0,1\}$**

    - Não forma uma relação de equivalência em um conjunto maior, pois não é simétrica nem transitiva. Por exemplo, $1 = 1^2$, mas não existe 1 tal que $1 = 0^2$ no conjunto $\{0,1\}$.

21. Relações de Equivalência: Uma relação R em um conjunto S é uma relação de equivalência se ela é reflexiva, simétrica e transitiva, sendo assim, analise os exemplos a seguir:

- Relação {(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)} em {1,2,3}
- Relação "x + y é par" em N
- Relação "x = y²" em {0,1}

In [13]:
```python
def reflexiva(relacao, conjunto):

    return all((x, x) in relacao for x in conjunto)

def simetrica(relacao):

    return all((y, x) in relacao for (x, y) in relacao)

def transitiva(relacao):

    return all((x, z) in relacao for (x, y) in relacao for (y2, z) in relacao if y == y2)

def equivalente(relacao, conjunto):

    return reflexiva(relacao, conjunto) and simetrica(relacao) and transitiva(relacao)


R1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}
S1 = {1, 2, 3}
print(f'Relação = {R1} em {S1} é equivalente? {equivalente(R1, S1)}.')
```

```python
R2 = {(x, y) for x in range(100) for y in range(100) if (x + y) % 2 == 0}
S2 = set(range(100))
print(f'Relação = {R2} em {S2} é equivalente? {equivalente(R2, S2)}.')

R3 = {(x, y) for x in {0, 1} for y in {0, 1} if x == y ** 2}
S3 = {0, 1}
print(f'Relação = {R3} em {S3} é equivalente? {equivalente(R3, S3)}.')

#AndreMouraL
```

```
Relação = {(1, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2), (1, 1)} em {1, 2, 3} é equivalente? True.
Relação = {(71, 29), (90, 42), (6, 48), (92, 88), (83, 39), (2, 50), (4, 96), (36, 48), (55, 61), (30, 4), (29,
45), (48, 58), (64, 2), (25, 47), (66, 48), (85, 61), (98, 0), (1, 67), (59, 45), (78, 58), (94, 2), (10, 8), (3
1, 67), (3, 5), (22, 18), (24, 64), (43, 77), (40, 8), (17, 61), (58, 62), (77, 75), (61, 67), (80, 80), (33, 5)
, (52, 18), (93, 19), (54, 64), (73, 77), (67, 3), (86, 16), (70, 8), (89, 21), (88, 62), (5, 27), (79, 13), (63
, 5), (82, 18), (26, 86), (0, 70), (19, 83), (32, 22), (51, 35), (35, 27), (12, 80), (53, 81), (72, 94), (56, 86
), (9, 11), (28, 24), (47, 37), (46, 78), (65, 91), (49, 83), (68, 96), (21, 21), (62, 22), (81, 35), (42, 80),
(83, 81), (74, 32), (95, 91), (92, 22), (27, 41), (30, 46), (7, 99), (20, 38), (39, 51), (4, 30), (23, 43), (41,
97), (13, 35), (25, 89), (16, 40), (57, 41), (76, 54), (34, 94), (37, 99), (50, 38), (69, 51), (71, 97), (84, 36
), (87, 41), (22, 60), (96, 46), (99, 51), (15, 57), (18, 62), (31, 1), (8, 54), (11, 59), (52, 60), (43, 11), (
45, 57), (64, 70), (77, 9), (61, 1), (80, 14), (38, 54), (79, 55), (98, 68), (82, 60), (73, 11), (91, 65), (75,
57), (94, 70), (10, 76), (3, 73), (47, 79), (0, 4), (19, 17), (21, 63), (40, 76), (12, 14), (53, 15), (72, 28),
(33, 73), (74, 74), (93, 87), (46, 12), (65, 25), (49, 17), (68, 30), (67, 71), (86, 84), (70, 76), (89, 89), (4
2, 14), (83, 15), (5, 95), (63, 73), (95, 25), (39, 93), (14, 36), (13, 77), (32, 90), (16, 82), (35, 95), (7, 3
3), (26, 46), (9, 79), (28, 92), (69, 93), (41, 31), (60, 44), (25, 23), (44, 36), (62, 90), (34, 28), (37, 33),
(78, 34), (97, 47), (96, 88), (99, 93), (71, 31), (90, 44), (6, 50), (92, 90), (8, 96), (2, 52), (4, 98), (36, 5
0), (55, 63), (27, 1), (30, 6), (38, 96), (29, 47), (64, 4), (66, 50), (85, 63), (57, 1), (98, 2), (1, 69), (59,
47), (94, 4), (10, 10), (87, 1), (31, 69), (3, 7), (22, 20), (24, 66), (43, 79), (40, 10), (58, 64), (77, 77), (
61, 69), (80, 82), (33, 7), (52, 20), (93, 21), (54, 66), (67, 5), (86, 18), (70, 10), (89, 23), (88, 64), (5, 2
9), (79, 15), (63, 7), (82, 20), (26, 88), (0, 72), (19, 85), (32, 24), (51, 37), (35, 29), (12, 82), (53, 83),
(72, 96), (56, 88), (9, 13), (28, 26), (47, 39), (46, 80), (65, 93), (49, 85), (68, 98), (21, 23), (62, 24), (81
, 37), (83, 83), (74, 34), (92, 24), (27, 43), (30, 48), (20, 40), (39, 53), (4, 32), (23, 45), (41, 99), (13, 3
7), (25, 91), (16, 42), (57, 43), (76, 56), (34, 96), (50, 40), (69, 53), (71, 99), (84, 38), (1, 3), (87, 43),
(22, 62), (96, 48), (99, 53), (15, 59), (18, 64), (31, 3), (8, 56), (11, 61), (52, 62), (24, 0), (43, 13), (45,
59), (64, 72), (77, 11), (61, 3), (80, 16), (38, 56), (79, 57), (98, 70), (82, 62), (54, 0), (73, 13), (91, 67),
(75, 59), (94, 72), (10, 78), (26, 22), (3, 75), (47, 81), (0, 6), (19, 19), (21, 65), (40, 78), (12, 16), (53,
17), (72, 30), (56, 22), (33, 75), (74, 76), (93, 89), (46, 14), (65, 27), (49, 19), (68, 32), (67, 73), (86, 86
), (70, 78), (89, 91), (42, 16), (83, 17), (5, 97), (63, 75), (95, 27), (39, 95), (14, 38), (13, 79), (32, 92),
(16, 84), (35, 97), (7, 35), (48, 36), (9, 81), (28, 94), (69, 95), (41, 33), (60, 46), (25, 25), (44, 38), (62,
92), (34, 30), (37, 35), (78, 36), (97, 49), (96, 90), (99, 95), (71, 33), (90, 46), (6, 52), (92, 92), (8, 98),
(2, 54), (43, 55), (17, 39), (36, 52), (55, 65), (38, 98), (29, 49), (73, 55), (64, 6), (66, 52), (85, 65), (98,
4), (1, 71), (59, 49), (91, 1), (94, 6), (10, 12), (12, 58), (31, 71), (3, 9), (47, 15), (24, 68), (65, 69), (68
, 74), (40, 12), (58, 66), (77, 79), (42, 58), (61, 71), (80, 84), (33, 9), (74, 10), (93, 23), (54, 68), (95, 6
9), (67, 7), (86, 20), (70, 12), (89, 25), (88, 66), (5, 31), (63, 9), (7, 77), (26, 90), (39, 29), (0, 74), (19
, 87), (60, 88), (13, 13), (32, 26), (51, 39), (16, 18), (35, 31), (34, 72), (53, 85), (72, 98), (37, 77), (56,
90), (9, 15), (28, 28), (69, 29), (46, 82), (49, 87), (90, 88), (62, 26), (81, 39), (83, 85), (96, 24), (99, 29)
, (2, 96), (92, 26), (8, 32), (27, 45), (11, 37), (30, 50), (29, 91), (20, 42), (4, 34), (23, 47), (64, 48), (25
, 93), (38, 32), (57, 45), (76, 58), (59, 91), (50, 42), (91, 43), (94, 48), (84, 40), (1, 5), (87, 45), (3, 51)
, (22, 64), (15, 61), (18, 66), (31, 5), (33, 51), (52, 64), (24, 2), (45, 61), (86, 62), (58, 0), (77, 13), (89
, 67), (61, 5), (80, 18), (79, 59), (98, 72), (63, 51), (82, 64), (54, 2), (95, 3), (75, 61), (88, 0), (10, 80),
(26, 24), (28, 70), (47, 83), (0, 8), (19, 21), (21, 67), (40, 80), (81, 81), (53, 19), (72, 32), (56, 24), (74,
78), (93, 91), (46, 16), (49, 21), (68, 34), (67, 75), (70, 80), (83, 19), (5, 99), (20, 84), (39, 97), (14, 40)
, (13, 81), (32, 94), (16, 86), (35, 99), (7, 37), (48, 38), (9, 83), (50, 84), (69, 97), (41, 35), (60, 48), (2
5, 27), (44, 40), (62, 94), (78, 38), (97, 51), (96, 92), (99, 97), (71, 35), (6, 54), (92, 94), (2, 56), (43, 5
7), (18, 0), (17, 41), (36, 54), (55, 67), (29, 51), (73, 57), (64, 8), (66, 54), (85, 67), (98, 6), (1, 73), (9
1, 3), (94, 8), (10, 14), (12, 60), (31, 73), (3, 11), (47, 17), (24, 70), (65, 71), (68, 76), (21, 1), (40, 14)
, (58, 68), (77, 81), (42, 60), (61, 73), (80, 86), (33, 11), (74, 12), (93, 25), (54, 70), (95, 71), (67, 9), (
86, 22), (70, 14), (89, 27), (88, 68), (5, 33), (63, 11), (7, 79), (26, 92), (39, 31), (0, 76), (19, 89), (60, 9
0), (13, 15), (32, 28), (51, 41), (16, 20), (35, 33), (34, 74), (53, 87), (37, 79), (56, 92), (9, 17), (28, 30),
(69, 31), (46, 84), (49, 89), (90, 90), (62, 28), (81, 41), (83, 87), (96, 26), (99, 31), (2, 98), (92, 28), (8,
34), (27, 47), (11, 39), (30, 52), (29, 93), (20, 44), (4, 36), (23, 49), (64, 50), (55, 1), (25, 95), (38, 34),
(57, 47), (76, 60), (59, 93), (50, 44), (91, 45), (94, 50), (85, 1), (84, 42), (1, 7), (87, 47), (3, 53), (22, 6
6), (15, 63), (18, 68), (31, 7), (33, 53), (52, 66), (24, 4), (65, 5), (68, 10), (45, 63), (86, 64), (58, 2), (7
7, 15), (89, 69), (61, 7), (80, 20), (79, 61), (98, 74), (63, 53), (82, 66), (54, 4), (95, 5), (75, 63), (88, 2)
, (10, 82), (51, 83), (7, 13), (26, 26), (28, 72), (47, 85), (0, 10), (19, 23), (60, 24), (21, 69), (40, 82), (8
1, 83), (34, 8), (53, 21), (72, 34), (37, 13), (56, 26), (74, 80), (93, 93), (46, 18), (49, 23), (90, 24), (67,
77), (70, 82), (83, 21), (2, 32), (20, 86), (39, 99), (23, 91), (14, 42), (55, 43), (13, 83), (32, 96), (16, 88)
, (29, 27), (48, 40), (9, 85), (50, 86), (69, 99), (41, 37), (25, 29), (44, 42), (85, 43), (62, 96), (59, 27), (
78, 40), (97, 53), (96, 94), (99, 99), (71, 37), (6, 56), (92, 96), (22, 0), (24, 46), (43, 59), (18, 2), (17, 4
3), (36, 56), (77, 57), (80, 62), (52, 0), (54, 46), (73, 59), (89, 3), (66, 56), (98, 8), (82, 0), (1, 75), (19
, 65), (10, 16), (51, 17), (12, 62), (31, 75), (72, 76), (28, 6), (47, 19), (46, 60), (65, 73), (49, 65), (68, 7
8), (21, 3), (40, 16), (81, 17), (58, 70), (42, 62), (61, 75), (74, 14), (93, 27), (95, 73), (67, 11), (70, 16),
(14, 84), (88, 70), (5, 35), (7, 81), (26, 94), (20, 20), (39, 33), (23, 25), (0, 78), (41, 79), (60, 92), (13,
17), (32, 30), (44, 84), (16, 22), (35, 35), (76, 36), (34, 76), (53, 89), (37, 81), (56, 94), (97, 95), (9, 19)
, (50, 20), (69, 33), (71, 79), (90, 92), (62, 30), (6, 98), (83, 89), (96, 28), (99, 33), (92, 30), (36, 98), (
8, 36), (27, 49), (11, 41), (30, 54), (29, 95), (4, 38), (45, 39), (64, 52), (55, 3), (25, 97), (66, 98), (38, 3
6), (57, 49), (98, 50), (59, 95), (91, 47), (75, 39), (94, 52), (84, 44), (1, 9), (87, 49), (3, 55), (22, 68), (
31, 9), (33, 55), (52, 68), (24, 6), (65, 7), (68, 12), (67, 53), (86, 66), (58, 4), (70, 58), (77, 17), (89, 71
), (61, 9), (80, 22), (79, 63), (63, 55), (82, 68), (95, 7), (88, 4), (10, 84), (51, 85), (7, 15), (26, 28), (28
, 74), (47, 87), (0, 12), (19, 25), (60, 26), (21, 71), (62, 72), (81, 85), (34, 10), (53, 23), (72, 36), (37, 1
5), (56, 28), (74, 82), (46, 20), (49, 25), (90, 26), (92, 72), (83, 23), (2, 34), (20, 88), (23, 93), (14, 44),
(55, 45), (13, 85), (16, 90), (29, 29), (48, 42), (50, 88), (41, 39), (25, 31), (44, 44), (85, 45), (84, 86), (5
9, 29), (78, 42), (97, 55), (96, 96), (71, 39), (6, 58), (22, 2), (24, 48), (43, 61), (18, 4), (17, 45), (36, 58
```

), (77, 59), (80, 64), (52, 2), (54, 48), (73, 61), (86, 0), (89, 5), (66, 58), (98, 10), (82, 2), (1, 77), (19,
67), (10, 18), (51, 19), (12, 64), (31, 77), (72, 78), (28, 8), (47, 21), (46, 62), (65, 75), (49, 67), (68, 80)
, (21, 5), (40, 18), (81, 19), (58, 72), (42, 64), (61, 77), (74, 16), (93, 29), (95, 75), (67, 13), (70, 18), (
14, 86), (88, 72), (5, 37), (7, 83), (26, 96), (20, 22), (39, 35), (23, 27), (0, 80), (41, 81), (60, 94), (13, 1
9), (32, 32), (44, 86), (16, 24), (35, 37), (76, 38), (34, 78), (53, 91), (37, 83), (56, 96), (97, 97), (9, 21),
(50, 22), (69, 35), (71, 81), (90, 94), (62, 32), (83, 91), (96, 30), (99, 35), (15, 41), (18, 46), (92, 32), (8
, 38), (27, 51), (11, 43), (30, 56), (29, 97), (4, 40), (45, 41), (64, 54), (25, 99), (38, 38), (57, 51), (98, 5
2), (59, 97), (91, 49), (75, 41), (94, 54), (10, 60), (84, 46), (1, 11), (87, 51), (3, 57), (22, 70), (19, 1), (
40, 60), (31, 11), (72, 12), (33, 57), (52, 70), (93, 71), (65, 9), (49, 1), (68, 14), (67, 55), (86, 68), (58,
6), (70, 60), (89, 73), (61, 11), (5, 79), (79, 65), (63, 57), (82, 70), (95, 9), (14, 20), (88, 6), (32, 74), (
51, 87), (35, 79), (7, 17), (26, 30), (9, 63), (28, 76), (47, 89), (0, 14), (41, 15), (60, 28), (44, 20), (21, 7
3), (62, 74), (81, 87), (34, 12), (53, 25), (37, 17), (56, 30), (97, 31), (74, 84), (71, 15), (90, 28), (6, 34),
(92, 74), (83, 25), (27, 93), (30, 98), (2, 36), (20, 90), (4, 82), (23, 95), (36, 34), (55, 47), (13, 87), (16,
92), (57, 93), (29, 31), (48, 44), (50, 90), (25, 33), (66, 34), (85, 47), (84, 88), (1, 53), (87, 93), (59, 31)
, (78, 44), (96, 98), (31, 53), (22, 4), (24, 50), (43, 63), (17, 47), (58, 48), (77, 61), (61, 53), (80, 66), (
52, 4), (93, 5), (54, 50), (73, 63), (86, 2), (89, 7), (88, 48), (82, 4), (26, 72), (0, 56), (19, 69), (32, 8),
(51, 21), (12, 66), (53, 67), (72, 80), (56, 72), (28, 10), (47, 23), (46, 64), (65, 77), (49, 69), (68, 82), (2
1, 7), (62, 8), (81, 21), (42, 66), (83, 67), (74, 18), (95, 77), (92, 8), (14, 88), (5, 39), (7, 85), (48, 86),
(20, 24), (39, 37), (23, 29), (41, 83), (60, 96), (13, 21), (25, 75), (44, 88), (16, 26), (76, 40), (34, 80), (3
7, 85), (78, 86), (97, 99), (50, 24), (69, 37), (71, 83), (90, 96), (84, 22), (87, 27), (96, 32), (99, 37), (15,
43), (18, 48), (17, 89), (8, 40), (27, 53), (11, 45), (30, 58), (29, 99), (45, 43), (64, 56), (80, 0), (38, 40),
(79, 41), (98, 54), (59, 99), (91, 51), (75, 43), (94, 56), (10, 62), (1, 13), (3, 59), (22, 72), (19, 3), (40,
62), (12, 0), (31, 13), (72, 14), (33, 59), (52, 72), (93, 73), (65, 11), (49, 3), (68, 16), (67, 57), (86, 70),
(58, 8), (70, 62), (89, 75), (42, 0), (61, 13), (5, 81), (63, 59), (95, 11), (14, 22), (88, 8), (32, 76), (51, 8
9), (35, 81), (7, 19), (26, 32), (9, 65), (28, 78), (47, 91), (0, 16), (41, 17), (60, 30), (44, 22), (21, 75), (
62, 76), (81, 89), (34, 14), (53, 27), (37, 19), (56, 32), (97, 33), (71, 17), (90, 30), (6, 36), (92, 76), (83,
27), (27, 95), (2, 38), (20, 92), (4, 84), (23, 97), (36, 36), (55, 49), (13, 89), (16, 94), (57, 95), (29, 33),
(48, 46), (50, 92), (25, 35), (66, 36), (85, 49), (84, 90), (1, 55), (87, 95), (59, 33), (78, 46), (31, 55), (22
, 6), (24, 52), (43, 65), (17, 49), (58, 50), (77, 63), (61, 55), (80, 68), (52, 6), (93, 7), (54, 52), (73, 65)
, (86, 4), (89, 9), (88, 50), (5, 15), (79, 1), (82, 6), (26, 74), (0, 58), (19, 71), (32, 10), (51, 23), (35, 1
5), (12, 68), (53, 69), (72, 82), (56, 74), (28, 12), (47, 25), (46, 66), (65, 79), (49, 71), (68, 84), (21, 9),
(62, 10), (81, 23), (42, 68), (83, 69), (74, 20), (95, 79), (92, 10), (14, 90), (27, 29), (30, 34), (7, 87), (48
, 88), (20, 26), (39, 39), (4, 18), (23, 31), (41, 85), (60, 98), (13, 23), (25, 77), (44, 90), (16, 28), (57, 2
9), (76, 42), (34, 82), (37, 87), (78, 88), (50, 26), (69, 39), (71, 85), (90, 98), (84, 24), (87, 29), (22, 48)
, (96, 34), (99, 39), (15, 45), (18, 50), (17, 91), (8, 42), (11, 47), (52, 48), (45, 45), (64, 58), (80, 2), (3
8, 42), (79, 43), (98, 56), (82, 48), (91, 53), (75, 45), (94, 58), (10, 64), (26, 8), (3, 61), (47, 67), (19, 5
), (21, 51), (40, 64), (12, 2), (53, 3), (72, 16), (56, 8), (33, 61), (74, 62), (93, 75), (46, 0), (65, 13), (49
, 5), (68, 18), (67, 59), (86, 72), (70, 64), (89, 77), (42, 2), (83, 3), (5, 83), (63, 61), (95, 13), (39, 81),
(14, 24), (13, 65), (32, 78), (51, 91), (16, 70), (35, 83), (7, 21), (48, 22), (9, 67), (28, 80), (69, 81), (41,
19), (60, 32), (25, 11), (44, 24), (62, 78), (81, 91), (34, 16), (37, 21), (78, 22), (97, 35), (96, 76), (99, 81
), (71, 19), (90, 32), (6, 38), (92, 78), (8, 84), (27, 97), (11, 89), (2, 40), (43, 41), (20, 94), (4, 86), (23
, 99), (17, 25), (36, 38), (55, 51), (38, 84), (57, 97), (29, 35), (73, 41), (50, 94), (91, 95), (66, 38), (85,
51), (84, 92), (1, 57), (87, 97), (59, 35), (12, 44), (31, 57), (22, 8), (24, 54), (65, 55), (68, 60), (58, 52),
(77, 65), (42, 44), (61, 57), (80, 70), (93, 9), (54, 54), (95, 55), (86, 6), (89, 11), (88, 52), (5, 17), (7, 6
3), (26, 76), (0, 60), (19, 73), (60, 74), (32, 12), (51, 25), (35, 17), (34, 58), (53, 71), (72, 84), (37, 63),
(56, 76), (9, 1), (28, 14), (47, 27), (46, 68), (49, 73), (90, 74), (62, 12), (81, 25), (83, 71), (96, 10), (92,
12), (14, 92), (27, 31), (30, 36), (29, 77), (48, 90), (20, 28), (39, 41), (4, 20), (23, 33), (41, 87), (25, 79)
, (44, 92), (85, 93), (16, 30), (57, 31), (76, 44), (59, 77), (78, 90), (50, 28), (69, 41), (71, 87), (84, 26),
(87, 31), (22, 50), (15, 47), (18, 52), (17, 93), (8, 44), (11, 49), (52, 50), (43, 1), (54, 96), (45, 47), (64,
60), (80, 4), (79, 45), (98, 58), (82, 50), (73, 1), (75, 47), (94, 60), (10, 66), (26, 10), (3, 63), (47, 69),
(19, 7), (21, 53), (40, 66), (12, 4), (53, 5), (72, 18), (56, 10), (33, 63), (74, 64), (93, 77), (46, 2), (65, 1
5), (49, 7), (68, 20), (67, 61), (86, 74), (70, 66), (89, 79), (42, 4), (83, 5), (5, 85), (63, 63), (95, 15), (3
9, 83), (14, 26), (13, 67), (32, 80), (51, 93), (16, 72), (35, 85), (7, 23), (48, 24), (9, 69), (28, 82), (69, 8
3), (41, 21), (60, 34), (25, 13), (44, 26), (62, 80), (81, 93), (34, 18), (37, 23), (78, 24), (97, 37), (96, 78)
, (99, 83), (71, 21), (90, 34), (6, 40), (92, 80), (8, 86), (27, 99), (11, 91), (2, 42), (43, 43), (20, 96), (4,
88), (17, 27), (36, 40), (55, 53), (38, 86), (57, 99), (29, 37), (73, 43), (50, 96), (91, 97), (66, 40), (85, 53
), (84, 94), (1, 59), (87, 99), (59, 37), (10, 0), (12, 46), (31, 59), (47, 3), (24, 56), (65, 57), (68, 62), (4
0, 0), (58, 54), (77, 67), (42, 46), (61, 59), (80, 72), (93, 11), (54, 56), (95, 57), (86, 8), (70, 0), (89, 13
), (88, 54), (5, 19), (7, 65), (26, 78), (39, 17), (0, 62), (19, 75), (60, 76), (13, 1), (32, 14), (51, 27), (16
, 6), (35, 19), (34, 60), (53, 73), (72, 86), (37, 65), (56, 78), (9, 3), (28, 16), (69, 17), (46, 70), (49, 75)
, (90, 76), (62, 14), (81, 27), (83, 73), (96, 12), (99, 17), (2, 84), (92, 14), (14, 94), (55, 95), (8, 20), (2
7, 33), (11, 25), (30, 38), (29, 79), (48, 92), (20, 30), (4, 22), (23, 35), (64, 36), (41, 89), (25, 81), (44,
94), (85, 95), (38, 20), (57, 33), (76, 46), (59, 79), (78, 92), (50, 30), (91, 31), (94, 36), (71, 89), (84, 28
), (87, 33), (3, 39), (22, 52), (24, 98), (15, 49), (18, 54), (17, 95), (33, 39), (52, 52), (54, 98), (45, 49),
(86, 50), (77, 1), (89, 55), (80, 6), (79, 47), (98, 60), (63, 39), (82, 52), (75, 49), (10, 68), (51, 69), (26,
12), (28, 58), (47, 71), (19, 9), (60, 10), (21, 55), (40, 68), (81, 69), (53, 7), (72, 20), (56, 12), (74, 66),
(93, 79), (46, 4), (49, 9), (90, 10), (67, 63), (70, 68), (83, 7), (5, 87), (20, 72), (39, 85), (23, 77), (14, 2
8), (55, 29), (13, 69), (32, 82), (16, 74), (35, 87), (76, 88), (29, 13), (48, 26), (9, 71), (50, 72), (69, 85),
(41, 23), (25, 15), (44, 28), (85, 29), (62, 82), (59, 13), (78, 26), (97, 39), (96, 80), (99, 85), (71, 23), (1
5, 91), (6, 42), (18, 96), (92, 82), (8, 88), (11, 93), (24, 32), (43, 45), (4, 90), (45, 91), (17, 29), (36, 42
), (77, 43), (38, 88), (54, 32), (73, 45), (91, 99), (75, 91), (66, 42), (84, 96), (1, 61), (10, 2), (12, 48), (
31, 61), (47, 5), (46, 46), (65, 59), (49, 51), (68, 64), (40, 2), (58, 56), (42, 48), (61, 61), (74, 0), (93, 1
3), (95, 59), (70, 2), (89, 15), (88, 56), (5, 21), (7, 67), (26, 80), (39, 19), (0, 64), (60, 78), (13, 3), (32
, 16), (51, 29), (16, 8), (35, 21), (34, 62), (53, 75), (37, 67), (56, 80), (9, 5), (28, 18), (69, 19), (71, 65)
, (90, 78), (62, 16), (81, 29), (83, 75), (96, 14), (99, 19), (2, 86), (92, 16), (14, 96), (55, 97), (8, 22), (2
7, 35), (11, 27), (30, 40), (29, 81), (48, 94), (20, 32), (4, 24), (23, 37), (64, 38), (25, 83), (44, 96), (85,
97), (38, 22), (57, 35), (76, 48), (59, 81), (78, 94), (50, 32), (91, 33), (94, 38), (84, 30), (87, 35), (3, 41)
, (22, 54), (15, 51), (18, 56), (17, 97), (33, 41), (52, 54), (45, 51), (86, 52), (77, 3), (89, 57), (80, 8), (7
9, 49), (98, 62), (63, 41), (82, 54), (75, 51), (10, 70), (51, 71), (7, 1), (26, 14), (28, 60), (47, 73), (19, 1
1), (60, 12), (21, 57), (40, 70), (81, 71), (53, 9), (72, 22), (37, 1), (56, 14), (74, 68), (93, 81), (46, 6), (
49, 11), (90, 12), (67, 65), (70, 70), (83, 9), (5, 89), (2, 20), (20, 74), (39, 87), (23, 79), (14, 30), (55, 3
1), (13, 71), (32, 84), (16, 76), (35, 89), (76, 90), (29, 15), (48, 28), (9, 73), (50, 74), (69, 87), (41, 25),
(25, 17), (44, 30), (85, 31), (62, 84), (59, 15), (78, 28), (97, 41), (96, 82), (99, 87), (71, 25), (15, 93), (6

, 44), (18, 98), (92, 84), (8, 90), (11, 95), (24, 34), (43, 47), (4, 92), (45, 93), (17, 31), (36, 44), (77, 45
), (80, 50), (38, 90), (54, 34), (73, 47), (75, 93), (66, 44), (84, 98), (1, 63), (19, 53), (10, 4), (51, 5), (1
2, 50), (31, 63), (72, 64), (47, 7), (46, 48), (65, 61), (49, 53), (68, 66), (40, 4), (81, 5), (58, 58), (42, 50
), (61, 63), (74, 2), (93, 15), (95, 61), (70, 4), (14, 72), (88, 58), (5, 23), (7, 69), (26, 82), (20, 8), (39,
21), (23, 13), (0, 66), (41, 67), (60, 80), (13, 5), (32, 18), (44, 72), (16, 10), (35, 23), (76, 24), (34, 64),
(53, 77), (37, 69), (56, 82), (97, 83), (9, 7), (50, 8), (69, 21), (71, 67), (90, 80), (62, 18), (6, 86), (83, 7
7), (96, 16), (99, 21), (2, 88), (15, 27), (18, 32), (92, 18), (36, 86), (55, 99), (8, 24), (27, 37), (11, 29),
(30, 42), (29, 83), (48, 96), (4, 26), (45, 27), (64, 40), (25, 85), (66, 86), (85, 99), (38, 24), (57, 37), (98
, 38), (59, 83), (78, 96), (91, 35), (75, 27), (94, 40), (10, 46), (84, 32), (87, 37), (3, 43), (22, 56), (40, 4
6), (17, 99), (33, 43), (52, 56), (93, 57), (68, 0), (67, 41), (86, 54), (70, 46), (89, 59), (5, 65), (79, 51),
(63, 43), (82, 56), (32, 60), (51, 73), (35, 65), (7, 3), (26, 16), (9, 49), (28, 62), (47, 75), (0, 0), (41, 1)
, (60, 14), (21, 59), (62, 60), (81, 73), (53, 11), (37, 3), (56, 16), (74, 70), (71, 1), (90, 14), (92, 60), (8
3, 11), (27, 79), (30, 84), (2, 22), (20, 76), (39, 89), (4, 68), (23, 81), (14, 32), (55, 33), (13, 73), (16, 7
8), (57, 79), (76, 92), (29, 17), (48, 30), (50, 76), (69, 89), (25, 19), (66, 20), (85, 33), (84, 74), (87, 79)
, (59, 17), (78, 30), (96, 84), (99, 89), (15, 95), (6, 46), (8, 92), (11, 97), (52, 98), (24, 36), (43, 49), (4
5, 95), (17, 33), (77, 47), (80, 52), (38, 92), (79, 93), (82, 98), (54, 36), (73, 49), (75, 95), (88, 34), (1,
65), (19, 55), (10, 6), (51, 7), (12, 52), (31, 65), (72, 66), (47, 9), (46, 50), (65, 63), (49, 55), (68, 68),
(40, 6), (81, 7), (42, 52), (74, 4), (93, 17), (95, 63), (67, 1), (70, 6), (14, 74), (5, 25), (7, 71), (26, 84),
(20, 10), (39, 23), (23, 15), (0, 68), (41, 69), (60, 82), (13, 7), (32, 20), (44, 74), (16, 12), (35, 25), (76,
26), (34, 66), (53, 79), (37, 71), (56, 84), (97, 85), (9, 9), (50, 10), (69, 23), (71, 69), (90, 82), (62, 20),
(6, 88), (96, 18), (99, 23), (2, 90), (15, 29), (18, 34), (92, 20), (36, 88), (8, 26), (27, 39), (11, 31), (30,
44), (29, 85), (48, 98), (4, 28), (45, 29), (64, 42), (25, 87), (66, 88), (38, 26), (57, 39), (98, 40), (59, 85)
, (78, 98), (91, 37), (75, 29), (94, 42), (10, 48), (84, 34), (87, 39), (3, 45), (22, 58), (40, 48), (72, 0), (3
3, 45), (52, 58), (93, 59), (68, 2), (67, 43), (86, 56), (70, 48), (89, 61), (5, 67), (79, 53), (63, 45), (82, 5
8), (14, 8), (32, 62), (51, 75), (35, 67), (7, 5), (26, 18), (9, 51), (28, 64), (47, 77), (0, 2), (41, 3), (60,
16), (44, 8), (21, 61), (62, 62), (81, 75), (34, 0), (53, 13), (37, 5), (56, 18), (97, 19), (74, 72), (71, 3), (
90, 16), (6, 22), (92, 62), (83, 13), (27, 81), (30, 86), (2, 24), (20, 78), (39, 91), (4, 70), (23, 83), (36, 2
2), (55, 35), (13, 75), (16, 80), (57, 81), (76, 94), (29, 19), (48, 32), (50, 78), (69, 91), (25, 21), (66, 22)
, (85, 35), (84, 76), (1, 41), (87, 81), (59, 19), (78, 32), (96, 86), (99, 91), (15, 97), (31, 41), (8, 94), (1
1, 99), (24, 38), (43, 51), (45, 97), (17, 35), (58, 36), (77, 49), (61, 41), (80, 54), (38, 94), (79, 95), (54,
38), (73, 51), (75, 97), (88, 36), (5, 1), (26, 60), (0, 44), (19, 57), (51, 9), (35, 1), (12, 54), (53, 55), (7
2, 68), (56, 60), (47, 11), (46, 52), (65, 65), (49, 57), (68, 70), (81, 9), (42, 54), (83, 55), (74, 6), (95, 6
5), (14, 76), (27, 15), (30, 20), (7, 73), (48, 74), (20, 12), (39, 25), (4, 4), (23, 17), (41, 71), (60, 84), (
13, 9), (25, 63), (44, 76), (16, 14), (57, 15), (76, 28), (34, 68), (37, 73), (78, 74), (97, 87), (50, 12), (69,
25), (71, 71), (90, 84), (84, 10), (87, 15), (6, 90), (22, 34), (96, 20), (99, 25), (2, 92), (43, 93), (15, 31),
(18, 36), (17, 77), (36, 90), (8, 28), (11, 33), (52, 34), (29, 87), (73, 93), (45, 31), (64, 44), (66, 90), (38
, 28), (79, 29), (98, 42), (82, 34), (59, 87), (91, 39), (75, 31), (94, 44), (10, 50), (1, 1), (12, 96), (3, 47)
, (47, 53), (21, 37), (40, 50), (72, 2), (42, 96), (33, 47), (74, 48), (93, 61), (68, 4), (67, 45), (86, 58), (7
0, 50), (89, 63), (5, 69), (63, 47), (14, 10), (13, 51), (32, 64), (51, 77), (16, 56), (35, 69), (7, 7), (26, 20
), (9, 53), (28, 66), (69, 67), (41, 5), (60, 18), (44, 10), (62, 64), (81, 77), (34, 2), (37, 7), (56, 20), (97
, 21), (96, 62), (99, 67), (71, 5), (90, 18), (6, 24), (92, 64), (8, 70), (27, 83), (30, 88), (2, 26), (20, 80),
(4, 72), (23, 85), (36, 24), (55, 37), (38, 70), (57, 83), (76, 96), (29, 21), (48, 34), (50, 80), (91, 81), (94
, 86), (66, 24), (85, 37), (84, 78), (1, 43), (87, 83), (59, 21), (15, 99), (31, 43), (24, 40), (43, 53), (45, 9
9), (17, 37), (58, 38), (77, 51), (61, 43), (80, 56), (79, 97), (63, 89), (54, 40), (73, 53), (75, 99), (88, 38)
, (5, 3), (26, 62), (0, 46), (19, 59), (51, 11), (35, 3), (12, 56), (53, 57), (72, 70), (56, 62), (28, 0), (47,
13), (46, 54), (65, 67), (49, 59), (68, 72), (81, 11), (42, 56), (83, 57), (74, 8), (95, 67), (14, 78), (27, 17)
, (30, 22), (7, 75), (48, 76), (20, 14), (39, 27), (4, 6), (23, 19), (41, 73), (60, 86), (13, 11), (25, 65), (44
, 78), (16, 16), (57, 17), (76, 30), (34, 70), (37, 75), (78, 76), (97, 89), (50, 14), (69, 27), (71, 73), (90,
86), (84, 12), (87, 17), (6, 92), (22, 36), (96, 22), (99, 27), (2, 94), (43, 95), (15, 33), (18, 38), (17, 79),
(36, 92), (8, 30), (11, 35), (52, 36), (29, 89), (73, 95), (45, 33), (64, 46), (66, 92), (38, 30), (79, 31), (98
, 44), (82, 36), (59, 89), (91, 41), (75, 33), (94, 46), (10, 52), (12, 98), (3, 49), (47, 55), (21, 39), (40, 5
2), (72, 4), (42, 98), (33, 49), (74, 50), (93, 63), (65, 1), (68, 6), (67, 47), (86, 60), (70, 52), (89, 65), (
5, 71), (63, 49), (95, 1), (39, 69), (14, 12), (13, 53), (32, 66), (51, 79), (16, 58), (35, 71), (7, 9), (48, 10
), (9, 55), (28, 68), (69, 69), (41, 7), (60, 20), (44, 12), (62, 66), (81, 79), (34, 4), (37, 9), (78, 10), (97
, 23), (96, 64), (99, 69), (71, 7), (90, 20), (6, 26), (92, 66), (8, 72), (27, 85), (11, 77), (30, 90), (2, 28),
(43, 29), (20, 82), (4, 74), (23, 87), (64, 88), (17, 13), (36, 26), (55, 39), (38, 72), (57, 85), (76, 98), (29
, 23), (73, 29), (50, 82), (91, 83), (94, 88), (66, 26), (85, 39), (84, 80), (1, 45), (87, 85), (59, 23), (3, 91
), (12, 32), (31, 45), (33, 91), (24, 42), (65, 43), (68, 48), (58, 40), (77, 53), (42, 32), (61, 45), (80, 58),
(79, 99), (63, 91), (54, 42), (95, 43), (88, 40), (5, 5), (7, 51), (26, 64), (39, 3), (0, 48), (19, 61), (60, 62
), (32, 0), (51, 13), (35, 5), (34, 46), (53, 59), (72, 72), (37, 51), (56, 64), (28, 2), (69, 3), (46, 56), (49
, 61), (90, 62), (62, 0), (81, 13), (83, 59), (99, 3), (2, 70), (92, 0), (14, 80), (55, 81), (8, 6), (27, 19), (
11, 11), (30, 24), (29, 65), (48, 78), (20, 16), (4, 8), (23, 21), (64, 22), (41, 75), (25, 67), (44, 80), (85,
81), (38, 6), (57, 19), (76, 32), (59, 65), (78, 78), (97, 91), (50, 16), (91, 17), (94, 22), (71, 75), (84, 14)
, (87, 19), (6, 94), (22, 38), (24, 84), (43, 97), (15, 35), (18, 40), (17, 81), (36, 94), (77, 95), (33, 25), (
52, 38), (54, 84), (73, 97), (45, 35), (86, 36), (89, 41), (66, 94), (79, 33), (98, 46), (63, 25), (82, 38), (75
, 35), (10, 54), (47, 57), (46, 98), (21, 41), (40, 54), (72, 6), (74, 52), (93, 65), (65, 3), (68, 8), (67, 49)
, (70, 54), (5, 73), (39, 71), (14, 14), (13, 55), (32, 68), (51, 81), (16, 60), (35, 73), (7, 11), (48, 12), (9
, 57), (50, 58), (69, 71), (41, 9), (60, 22), (25, 1), (44, 14), (62, 68), (34, 6), (37, 11), (78, 12), (97, 25)
, (96, 66), (99, 71), (71, 9), (90, 22), (6, 28), (92, 68), (8, 74), (27, 87), (11, 79), (30, 92), (2, 30), (43,
31), (4, 76), (23, 89), (64, 90), (17, 15), (36, 28), (55, 41), (38, 74), (57, 87), (29, 25), (73, 31), (91, 85)
, (94, 90), (66, 28), (85, 41), (84, 82), (1, 47), (87, 87), (59, 25), (3, 93), (12, 34), (31, 47), (33, 93), (2
4, 44), (65, 45), (68, 50), (58, 42), (77, 55), (42, 34), (61, 47), (80, 60), (63, 93), (54, 44), (95, 45), (89,
1), (88, 42), (5, 7), (7, 53), (26, 66), (39, 5), (0, 50), (19, 63), (60, 64), (32, 2), (51, 15), (35, 7), (34,
48), (53, 61), (72, 74), (37, 53), (56, 66), (28, 4), (69, 5), (46, 58), (49, 63), (90, 64), (62, 2), (81, 15),
(83, 61), (96, 0), (99, 5), (2, 72), (92, 2), (14, 82), (55, 83), (8, 8), (27, 21), (11, 13), (30, 26), (29, 67)
, (48, 80), (20, 18), (4, 10), (23, 23), (64, 24), (41, 77), (25, 69), (44, 82), (85, 83), (38, 8), (57, 21), (7
6, 34), (59, 67), (78, 80), (97, 93), (50, 18), (91, 19), (94, 24), (71, 77), (84, 16), (87, 21), (6, 96), (3, 2
7), (22, 40), (24, 86), (43, 99), (15, 37), (18, 42), (17, 83), (36, 96), (77, 97), (33, 27), (52, 40), (54, 86)
, (73, 99), (45, 37), (86, 38), (89, 43), (66, 96), (79, 35), (98, 48), (63, 27), (82, 40), (75, 37), (10, 56),
(51, 57), (26, 0), (28, 46), (47, 59), (21, 43), (40, 56), (81, 57), (72, 8), (56, 0), (74, 54), (93, 67), (67,
51), (70, 56), (5, 75), (2, 6), (20, 60), (39, 73), (23, 65), (14, 16), (55, 17), (13, 57), (32, 70), (16, 62),
(35, 75), (76, 76), (29, 1), (48, 14), (9, 59), (50, 60), (69, 73), (41, 11), (25, 3), (44, 16), (85, 17), (62,
70), (59, 1), (78, 14), (97, 27), (96, 68), (99, 73), (71, 11), (15, 79), (6, 30), (18, 84), (92, 70), (8, 76),

(27, 89), (11, 81), (30, 94), (24, 20), (43, 33), (4, 78), (45, 79), (64, 92), (17, 17), (36, 30), (77, 31), (80
, 36), (38, 76), (57, 89), (98, 90), (54, 20), (73, 33), (91, 87), (75, 79), (94, 92), (66, 30), (10, 98), (84,
84), (1, 49), (87, 89), (3, 95), (19, 39), (40, 98), (12, 36), (31, 49), (72, 50), (33, 95), (46, 34), (65, 47),
(49, 39), (68, 52), (67, 93), (58, 44), (70, 98), (42, 36), (61, 49), (93, 1), (63, 95), (95, 47), (14, 58), (88
, 44), (5, 9), (7, 55), (26, 68), (39, 7), (0, 52), (41, 53), (60, 66), (32, 4), (44, 58), (35, 9), (34, 50), (5
3, 63), (37, 55), (56, 68), (97, 69), (69, 7), (71, 53), (90, 66), (62, 4), (6, 72), (83, 63), (96, 2), (99, 7),
(2, 74), (92, 4), (36, 72), (55, 85), (8, 10), (27, 23), (11, 15), (30, 28), (29, 69), (48, 82), (4, 12), (64, 2
6), (25, 71), (66, 72), (85, 85), (38, 10), (57, 23), (98, 24), (59, 69), (78, 82), (91, 21), (75, 13), (94, 26)
, (84, 18), (87, 23), (31, 91), (3, 29), (22, 42), (24, 88), (15, 39), (18, 44), (17, 85), (58, 86), (77, 99), (
61, 91), (33, 29), (52, 42), (54, 88), (67, 27), (86, 40), (89, 45), (88, 86), (79, 37), (63, 29), (82, 42), (0,
94), (10, 58), (51, 59), (26, 2), (28, 48), (47, 61), (60, 0), (21, 45), (40, 58), (81, 59), (72, 10), (56, 2),
(74, 56), (93, 69), (90, 0), (92, 46), (5, 77), (2, 8), (20, 62), (39, 75), (23, 67), (14, 18), (55, 19), (13, 5
9), (32, 72), (16, 64), (35, 77), (76, 78), (29, 3), (48, 16), (9, 61), (50, 62), (69, 75), (41, 13), (25, 5), (
44, 18), (85, 19), (59, 3), (78, 16), (97, 29), (96, 70), (99, 75), (71, 13), (15, 81), (6, 32), (18, 86), (8, 7
8), (27, 91), (11, 83), (30, 96), (24, 22), (43, 35), (4, 80), (45, 81), (64, 94), (17, 19), (36, 32), (77, 33),
(80, 38), (38, 78), (57, 91), (98, 92), (54, 22), (73, 35), (91, 89), (75, 81), (94, 94), (66, 32), (1, 51), (87
, 91), (3, 97), (19, 41), (12, 38), (31, 51), (72, 52), (33, 97), (46, 36), (65, 49), (49, 41), (68, 54), (67, 9
5), (58, 46), (42, 38), (61, 51), (93, 3), (63, 97), (95, 49), (14, 60), (88, 46), (5, 11), (7, 57), (26, 70), (
39, 9), (23, 1), (0, 54), (41, 55), (60, 68), (32, 6), (44, 60), (35, 11), (76, 12), (34, 52), (53, 65), (37, 57
), (56, 70), (97, 71), (69, 9), (71, 55), (90, 68), (62, 6), (6, 74), (83, 65), (96, 4), (99, 9), (2, 76), (15,
15), (18, 20), (92, 6), (36, 74), (55, 87), (8, 12), (27, 25), (11, 17), (30, 30), (29, 71), (48, 84), (4, 14),
(45, 15), (64, 28), (25, 73), (66, 74), (85, 87), (38, 12), (57, 25), (98, 26), (1, 93), (59, 71), (78, 84), (91
, 23), (75, 15), (94, 28), (10, 34), (84, 20), (87, 25), (31, 93), (3, 31), (22, 44), (24, 90), (40, 34), (17, 8
7), (58, 88), (61, 93), (33, 31), (52, 44), (93, 45), (54, 90), (67, 29), (86, 42), (70, 34), (89, 47), (88, 88)
, (5, 53), (79, 39), (63, 31), (82, 44), (0, 96), (32, 48), (51, 61), (35, 53), (26, 4), (9, 37), (28, 50), (47,
63), (60, 2), (21, 47), (62, 48), (81, 61), (56, 4), (97, 5), (74, 58), (90, 2), (6, 8), (92, 48), (27, 67), (30
, 72), (2, 10), (20, 64), (39, 77), (4, 56), (23, 69), (36, 8), (55, 21), (13, 61), (16, 66), (57, 67), (76, 80)
, (29, 5), (48, 18), (50, 64), (69, 77), (25, 7), (66, 8), (85, 21), (84, 62), (1, 27), (87, 67), (59, 5), (78,
18), (22, 86), (96, 72), (99, 77), (15, 83), (18, 88), (31, 27), (8, 80), (11, 85), (52, 86), (24, 24), (43, 37)
, (45, 83), (64, 96), (17, 21), (58, 22), (77, 35), (61, 27), (80, 40), (38, 80), (79, 81), (98, 94), (82, 86),
(54, 24), (73, 37), (91, 91), (75, 83), (94, 96), (88, 22), (3, 99), (0, 30), (19, 43), (21, 89), (12, 40), (53,
41), (72, 54), (56, 46), (33, 99), (46, 38), (65, 51), (49, 43), (68, 56), (67, 97), (42, 40), (83, 41), (63, 99
), (95, 51), (14, 62), (5, 13), (7, 59), (48, 60), (39, 11), (23, 3), (41, 57), (60, 70), (25, 49), (44, 62), (1
6, 0), (35, 13), (76, 14), (34, 54), (37, 59), (78, 60), (97, 73), (69, 11), (71, 57), (90, 70), (6, 76), (96, 6
), (99, 11), (2, 78), (15, 17), (18, 22), (17, 63), (36, 76), (55, 89), (8, 14), (27, 27), (11, 19), (30, 32), (
29, 73), (73, 79), (4, 16), (45, 17), (64, 30), (66, 76), (85, 89), (38, 14), (57, 27), (98, 28), (1, 95), (59,
73), (91, 25), (75, 17), (94, 30), (10, 36), (31, 95), (3, 33), (22, 46), (24, 92), (40, 36), (58, 90), (42, 82)
, (61, 95), (33, 33), (52, 46), (93, 47), (54, 92), (95, 93), (67, 31), (86, 44), (70, 36), (89, 49), (88, 90),
(5, 55), (63, 33), (82, 46), (0, 98), (32, 50), (51, 63), (35, 55), (26, 6), (9, 39), (28, 52), (47, 65), (60, 4
), (21, 49), (62, 50), (81, 63), (53, 1), (56, 6), (97, 7), (74, 60), (90, 4), (6, 10), (92, 50), (83, 1), (27,
69), (30, 74), (2, 12), (20, 66), (39, 79), (4, 58), (23, 71), (36, 10), (55, 23), (13, 63), (16, 68), (57, 69),
(76, 82), (29, 7), (48, 20), (50, 66), (69, 79), (25, 9), (66, 10), (85, 23), (84, 64), (1, 29), (87, 69), (59,
7), (78, 20), (22, 88), (96, 74), (99, 79), (15, 85), (18, 90), (31, 29), (8, 82), (11, 87), (52, 88), (24, 26),
(43, 39), (45, 85), (64, 98), (17, 23), (58, 24), (77, 37), (61, 29), (80, 42), (38, 82), (79, 83), (98, 96), (8
2, 88), (54, 26), (73, 39), (91, 93), (75, 85), (94, 98), (88, 24), (26, 48), (0, 32), (19, 45), (21, 91), (12,
42), (53, 43), (72, 56), (56, 48), (46, 40), (65, 53), (49, 45), (68, 58), (67, 99), (42, 42), (83, 43), (95, 53
), (14, 64), (27, 3), (30, 8), (7, 61), (48, 62), (20, 0), (39, 13), (23, 5), (41, 59), (60, 72), (25, 51), (44,
64), (16, 2), (57, 3), (76, 16), (34, 56), (37, 61), (78, 62), (97, 75), (50, 0), (69, 13), (71, 59), (90, 72),
(87, 3), (6, 78), (22, 22), (96, 8), (99, 13), (2, 80), (43, 81), (15, 19), (18, 24), (17, 65), (36, 78), (55, 9
1), (8, 16), (11, 21), (52, 22), (29, 75), (73, 81), (45, 19), (64, 32), (66, 78), (85, 91), (38, 16), (79, 17),
(98, 30), (82, 22), (1, 97), (59, 75), (91, 27), (75, 19), (94, 32), (10, 38), (12, 84), (31, 97), (3, 35), (47,
41), (24, 94), (65, 95), (21, 25), (40, 38), (58, 92), (42, 84), (61, 97), (33, 35), (74, 36), (93, 49), (54, 94
), (95, 95), (67, 33), (86, 46), (70, 38), (89, 51), (88, 92), (5, 57), (63, 35), (39, 55), (13, 39), (32, 52),
(51, 65), (16, 44), (35, 57), (34, 98), (9, 41), (28, 54), (69, 55), (60, 6), (62, 52), (81, 65), (97, 9), (96,
50), (99, 55), (90, 6), (6, 12), (92, 52), (8, 58), (27, 71), (11, 63), (30, 76), (2, 14), (43, 15), (20, 68), (
4, 60), (23, 73), (64, 74), (36, 12), (55, 25), (38, 58), (57, 71), (76, 84), (29, 9), (73, 15), (50, 68), (91,
69), (94, 74), (66, 12), (85, 25), (84, 66), (1, 31), (87, 71), (59, 9), (3, 77), (22, 90), (15, 87), (18, 92),
(12, 18), (31, 31), (33, 77), (52, 90), (24, 28), (65, 29), (45, 87), (86, 88), (58, 26), (77, 39), (89, 93), (4
2, 18), (61, 31), (80, 44), (79, 85), (98, 98), (63, 77), (82, 90), (54, 28), (95, 29), (75, 87), (88, 26), (26,
50), (28, 96), (0, 34), (19, 47), (21, 93), (34, 32), (53, 45), (72, 58), (37, 37), (56, 50), (47, 1), (46, 42),
(49, 47), (90, 48), (83, 45), (14, 66), (27, 5), (30, 10), (48, 64), (20, 2), (39, 15), (23, 7), (41, 61), (25,
53), (44, 66), (16, 4), (57, 5), (76, 18), (59, 51), (78, 64), (97, 77), (50, 2), (69, 15), (71, 61), (84, 0), (
87, 5), (6, 80), (22, 24), (99, 15), (2, 82), (43, 83), (15, 21), (18, 26), (17, 67), (36, 80), (55, 93), (8, 18
), (11, 23), (52, 24), (73, 83), (45, 21), (64, 34), (66, 80), (38, 18), (79, 19), (98, 32), (82, 24), (1, 99),
(91, 29), (75, 21), (94, 34), (10, 40), (12, 86), (31, 99), (3, 37), (47, 43), (24, 96), (65, 97), (21, 27), (40
, 40), (58, 94), (42, 86), (61, 99), (33, 37), (74, 38), (93, 51), (95, 97), (67, 35), (86, 48), (70, 40), (89,
53), (88, 94), (5, 59), (63, 37), (39, 57), (14, 0), (13, 41), (32, 54), (51, 67), (16, 46), (35, 59), (9, 43),
(28, 56), (69, 57), (60, 8), (44, 0), (62, 54), (81, 67), (97, 11), (96, 52), (99, 57), (90, 8), (6, 14), (92, 5
4), (8, 60), (27, 73), (11, 65), (30, 78), (2, 16), (43, 17), (20, 70), (4, 62), (23, 75), (64, 76), (17, 1), (3
6, 14), (55, 27), (38, 60), (57, 73), (76, 86), (29, 11), (73, 17), (50, 70), (91, 71), (94, 76), (66, 14), (85,
27), (84, 68), (1, 33), (87, 73), (59, 11), (3, 79), (22, 92), (15, 89), (18, 94), (12, 20), (31, 33), (33, 79),
(52, 92), (24, 30), (65, 31), (68, 36), (45, 89), (86, 90), (58, 28), (77, 41), (89, 95), (42, 20), (61, 33), (8
0, 46), (79, 87), (63, 79), (82, 92), (54, 30), (95, 31), (75, 89), (88, 28), (7, 39), (26, 52), (28, 98), (0, 3
6), (19, 49), (60, 50), (51, 1), (21, 95), (34, 34), (53, 47), (72, 60), (37, 39), (56, 52), (46, 44), (49, 49),
(90, 50), (81, 1), (83, 47), (2, 58), (14, 68), (55, 69), (27, 7), (30, 12), (29, 53), (48, 66), (20, 4), (23, 9
), (64, 10), (41, 63), (25, 55), (44, 68), (85, 69), (57, 7), (76, 20), (59, 53), (78, 66), (97, 79), (50, 4), (
91, 5), (94, 10), (71, 63), (84, 2), (87, 7), (6, 82), (3, 13), (22, 26), (24, 72), (43, 85), (15, 23), (18, 28)
, (17, 69), (36, 82), (77, 83), (80, 88), (33, 13), (52, 26), (54, 72), (73, 85), (45, 23), (86, 24), (89, 29),
(66, 82), (79, 21), (98, 34), (63, 13), (82, 26), (75, 23), (19, 91), (10, 42), (51, 43), (12, 88), (28, 32), (4
7, 45), (46, 86), (65, 99), (49, 91), (21, 29), (40, 42), (81, 43), (58, 96), (42, 88), (74, 40), (93, 53), (95,
99), (67, 37), (70, 42), (88, 96), (5, 61), (20, 46), (39, 59), (23, 51), (14, 2), (13, 43), (32, 56), (16, 48),
(35, 61), (76, 62), (48, 0), (9, 45), (50, 46), (69, 59), (44, 2), (85, 3), (62, 56), (78, 0), (97, 13), (96, 54
), (99, 59), (15, 65), (6, 16), (18, 70), (92, 56), (8, 62), (27, 75), (11, 67), (30, 80), (2, 18), (43, 19), (4

, 64), (45, 65), (64, 78), (17, 3), (36, 16), (38, 62), (57, 75), (98, 76), (54, 6), (73, 19), (91, 73), (75, 65
), (94, 78), (66, 16), (84, 70), (1, 35), (87, 75), (3, 81), (22, 94), (40, 84), (12, 22), (31, 35), (33, 81), (
52, 94), (93, 95), (65, 33), (68, 38), (67, 79), (86, 92), (58, 30), (70, 84), (89, 97), (42, 22), (61, 35), (80
, 48), (79, 89), (63, 81), (82, 94), (95, 33), (88, 30), (32, 98), (7, 41), (26, 54), (9, 87), (0, 38), (19, 51)
, (60, 52), (51, 3), (21, 97), (62, 98), (34, 36), (53, 49), (72, 62), (37, 41), (56, 54), (90, 52), (81, 3), (9
2, 98), (83, 49), (2, 60), (14, 70), (55, 71), (27, 9), (11, 1), (30, 14), (29, 55), (48, 68), (20, 6), (23, 11)
, (64, 12), (41, 65), (25, 57), (44, 70), (85, 71), (57, 9), (76, 22), (59, 55), (78, 68), (97, 81), (50, 6), (9
1, 7), (94, 12), (84, 4), (87, 9), (6, 84), (3, 15), (22, 28), (24, 74), (43, 87), (15, 25), (18, 30), (17, 71),
(36, 84), (77, 85), (80, 90), (33, 15), (52, 28), (54, 74), (73, 87), (45, 25), (86, 26), (89, 31), (66, 84), (7
9, 23), (98, 36), (63, 15), (82, 28), (75, 25), (19, 93), (10, 44), (51, 45), (12, 90), (28, 34), (47, 47), (46,
88), (49, 93), (21, 31), (40, 44), (81, 45), (58, 98), (42, 90), (74, 42), (93, 55), (67, 39), (70, 44), (88, 98
), (5, 63), (20, 48), (39, 61), (23, 53), (14, 4), (55, 5), (13, 45), (32, 58), (16, 50), (35, 63), (76, 64), (4
8, 2), (9, 47), (50, 48), (69, 61), (44, 4), (85, 5), (62, 58), (78, 2), (97, 15), (96, 56), (99, 61), (15, 67),
(6, 18), (18, 72), (92, 58), (8, 64), (27, 77), (11, 69), (30, 82), (24, 8), (43, 21), (4, 66), (45, 67), (64, 8
0), (17, 5), (36, 18), (77, 19), (80, 24), (38, 64), (57, 77), (98, 78), (54, 8), (73, 21), (91, 75), (75, 67),
(94, 80), (66, 18), (10, 86), (84, 72), (1, 37), (87, 77), (3, 83), (22, 96), (19, 27), (40, 86), (12, 24), (31,
37), (72, 38), (33, 83), (52, 96), (93, 97), (46, 22), (65, 35), (49, 27), (68, 40), (67, 81), (86, 94), (58, 32
), (70, 86), (89, 99), (42, 24), (61, 37), (79, 91), (63, 83), (82, 96), (95, 35), (14, 46), (88, 32), (7, 43),
(26, 56), (9, 89), (0, 40), (41, 41), (60, 54), (44, 46), (21, 99), (34, 38), (53, 51), (37, 43), (56, 56), (97,
57), (71, 41), (90, 54), (6, 60), (83, 51), (2, 62), (15, 1), (18, 6), (36, 60), (55, 73), (27, 11), (11, 3), (3
0, 16), (29, 57), (48, 70), (4, 0), (45, 1), (64, 14), (25, 59), (66, 60), (85, 73), (57, 11), (98, 12), (1, 79)
, (59, 57), (78, 70), (91, 9), (75, 1), (94, 14), (10, 20), (84, 6), (87, 11), (31, 79), (3, 17), (22, 30), (24,
76), (43, 89), (40, 20), (17, 73), (58, 74), (77, 87), (61, 79), (80, 92), (33, 17), (52, 30), (93, 31), (54, 76
), (73, 89), (67, 15), (86, 28), (70, 20), (89, 33), (88, 74), (79, 25), (63, 17), (82, 30), (26, 98), (0, 82),
(19, 95), (32, 34), (51, 47), (35, 39), (12, 92), (53, 93), (56, 98), (9, 23), (28, 36), (47, 49), (46, 90), (49
, 95), (21, 33), (62, 34), (81, 47), (42, 92), (83, 93), (74, 44), (92, 34), (20, 50), (39, 63), (4, 42), (23, 5
5), (14, 6), (55, 7), (13, 47), (16, 52), (57, 53), (76, 66), (48, 4), (50, 50), (69, 63), (44, 6), (85, 7), (84
, 48), (87, 53), (78, 4), (97, 17), (96, 58), (99, 63), (15, 69), (6, 20), (18, 74), (8, 66), (11, 71), (24, 10)
, (43, 23), (45, 69), (64, 82), (17, 7), (36, 20), (77, 21), (80, 26), (38, 66), (79, 67), (98, 80), (82, 72), (
54, 10), (73, 23), (91, 77), (75, 69), (94, 82), (10, 88), (1, 39), (3, 85), (22, 98), (19, 29), (40, 88), (12,
26), (31, 39), (72, 40), (33, 85), (74, 86), (93, 99), (46, 24), (65, 37), (49, 29), (68, 42), (67, 83), (86, 96
), (58, 34), (70, 88), (42, 26), (61, 39), (63, 85), (95, 37), (14, 48), (7, 45), (26, 58), (9, 91), (0, 42), (4
1, 43), (60, 56), (44, 48), (76, 0), (34, 40), (53, 53), (37, 45), (56, 58), (97, 59), (71, 43), (90, 56), (6, 6
2), (83, 53), (2, 64), (15, 3), (18, 8), (36, 62), (55, 75), (8, 0), (27, 13), (11, 5), (30, 18), (29, 59), (48,
72), (4, 2), (45, 3), (64, 16), (25, 61), (66, 62), (85, 75), (38, 0), (57, 13), (98, 14), (1, 81), (59, 59), (7
8, 72), (91, 11), (75, 3), (94, 16), (10, 22), (84, 8), (87, 13), (31, 81), (3, 19), (22, 32), (24, 78), (43, 91
), (40, 22), (17, 75), (58, 76), (77, 89), (61, 81), (80, 94), (33, 19), (52, 32), (93, 33), (54, 78), (73, 91),
(67, 17), (86, 30), (70, 22), (89, 35), (88, 76), (5, 41), (79, 27), (63, 19), (82, 32), (0, 84), (19, 97), (32,
36), (51, 49), (35, 41), (12, 94), (53, 95), (9, 25), (28, 38), (47, 51), (46, 92), (49, 97), (21, 35), (62, 36)
, (81, 49), (42, 94), (83, 95), (74, 46), (92, 36), (27, 55), (30, 60), (20, 52), (39, 65), (4, 44), (23, 57), (
55, 9), (13, 49), (16, 54), (57, 55), (76, 68), (48, 6), (50, 52), (69, 65), (85, 9), (84, 50), (1, 15), (87, 55
), (78, 6), (22, 74), (96, 60), (99, 65), (15, 71), (18, 76), (31, 15), (8, 68), (11, 73), (52, 74), (24, 12), (
43, 25), (45, 71), (64, 84), (17, 9), (58, 10), (77, 23), (61, 15), (80, 28), (38, 68), (79, 69), (98, 82), (82,
74), (54, 12), (73, 25), (91, 79), (75, 71), (94, 84), (88, 10), (10, 90), (26, 34), (3, 87), (47, 93), (0, 18),
(19, 31), (21, 77), (40, 90), (12, 28), (53, 29), (72, 42), (56, 34), (33, 87), (74, 88), (46, 26), (65, 39), (4
9, 31), (68, 44), (67, 85), (86, 98), (70, 90), (42, 28), (83, 29), (63, 87), (95, 39), (14, 50), (13, 91), (16,
96), (7, 47), (48, 48), (9, 93), (41, 45), (60, 58), (25, 37), (44, 50), (76, 2), (34, 42), (37, 47), (78, 48),
(97, 61), (71, 45), (90, 58), (6, 64), (2, 66), (43, 67), (15, 5), (18, 10), (17, 51), (36, 64), (55, 77), (8, 2
), (11, 7), (52, 8), (29, 61), (73, 67), (45, 5), (64, 18), (66, 64), (85, 77), (38, 2), (79, 3), (98, 16), (82,
8), (1, 83), (59, 61), (91, 13), (75, 5), (94, 18), (10, 24), (12, 70), (31, 83), (3, 21), (24, 80), (65, 81), (
68, 86), (21, 11), (40, 24), (58, 78), (77, 91), (42, 70), (61, 83), (80, 96), (33, 21), (74, 22), (93, 35), (54
, 80), (95, 81), (67, 19), (86, 32), (70, 24), (89, 37), (88, 78), (5, 43), (63, 21), (7, 89), (0, 86), (19, 99)
, (13, 25), (32, 38), (51, 51), (35, 43), (34, 84), (53, 97), (37, 89), (9, 27), (28, 40), (46, 94), (49, 99), (
62, 38), (81, 51), (83, 97), (96, 36), (99, 41), (92, 38), (27, 57), (30, 62), (2, 0), (20, 54), (39, 67), (4, 4
6), (23, 59), (55, 11), (38, 44), (57, 57), (76, 70), (48, 8), (50, 54), (91, 55), (85, 11), (84, 52), (1, 17),
(87, 57), (78, 8), (22, 76), (15, 73), (18, 78), (31, 17), (11, 75), (52, 76), (24, 14), (43, 27), (45, 73), (64
, 86), (17, 11), (58, 12), (77, 25), (61, 17), (80, 30), (79, 71), (98, 84), (82, 76), (54, 14), (73, 27), (75,
73), (88, 12), (10, 92), (26, 36), (3, 89), (47, 95), (0, 20), (19, 33), (21, 79), (40, 92), (12, 30), (53, 31),
(72, 44), (56, 36), (33, 89), (74, 90), (46, 28), (65, 41), (49, 33), (68, 46), (67, 87), (70, 92), (42, 30), (8
3, 31), (95, 41), (14, 52), (13, 93), (16, 98), (7, 49), (48, 50), (39, 1), (9, 95), (41, 47), (60, 60), (25, 39
), (44, 52), (76, 4), (34, 44), (37, 49), (78, 50), (97, 63), (69, 1), (71, 47), (90, 60), (6, 66), (22, 10), (9
9, 1), (2, 68), (43, 69), (15, 7), (18, 12), (17, 53), (36, 66), (55, 79), (8, 4), (11, 9), (52, 10), (29, 63),
(73, 69), (45, 7), (64, 20), (66, 66), (85, 79), (38, 4), (79, 5), (98, 18), (82, 10), (1, 85), (59, 63), (91, 1
5), (75, 7), (94, 20), (10, 26), (12, 72), (31, 85), (3, 23), (47, 29), (24, 82), (65, 83), (68, 88), (21, 13),
(40, 26), (58, 80), (77, 93), (42, 72), (61, 85), (80, 98), (33, 23), (74, 24), (93, 37), (54, 82), (95, 83), (6
7, 21), (86, 34), (70, 26), (89, 39), (88, 80), (5, 45), (63, 23), (7, 91), (39, 43), (0, 88), (13, 27), (32, 40
), (51, 53), (16, 32), (35, 45), (34, 86), (53, 99), (37, 91), (9, 29), (28, 42), (69, 43), (46, 96), (62, 40),
(81, 53), (83, 99), (96, 38), (99, 43), (6, 0), (92, 40), (8, 46), (27, 59), (11, 51), (30, 64), (2, 2), (43, 3)
, (20, 56), (4, 48), (23, 61), (64, 62), (36, 0), (55, 13), (38, 46), (57, 59), (76, 72), (73, 3), (50, 56), (91
, 57), (94, 62), (66, 0), (85, 13), (84, 54), (1, 19), (87, 59), (3, 65), (22, 78), (15, 75), (18, 80), (12, 6),
(31, 19), (33, 65), (52, 78), (24, 16), (65, 17), (68, 22), (45, 75), (86, 76), (58, 14), (77, 27), (89, 81), (4
2, 6), (61, 19), (80, 32), (79, 73), (98, 86), (63, 65), (82, 78), (54, 16), (95, 17), (75, 75), (88, 14), (10,
94), (51, 95), (7, 25), (26, 38), (28, 84), (47, 97), (0, 22), (19, 35), (60, 36), (21, 81), (40, 94), (81, 95),
(34, 20), (53, 33), (72, 46), (37, 25), (56, 38), (74, 92), (46, 30), (49, 35), (90, 36), (67, 89), (70, 94), (8
3, 33), (2, 44), (20, 98), (14, 54), (55, 55), (13, 95), (29, 39), (48, 52), (9, 97), (50, 98), (41, 49), (25, 4
1), (44, 54), (85, 55), (76, 6), (59, 39), (78, 52), (97, 65), (71, 49), (6, 68), (22, 12), (24, 58), (43, 71),
(15, 9), (18, 14), (17, 55), (36, 68), (77, 69), (80, 74), (52, 12), (54, 58), (73, 71), (45, 9), (86, 10), (66,
68), (79, 7), (98, 20), (82, 12), (1, 87), (75, 9), (19, 77), (10, 28), (12, 74), (31, 87), (72, 88), (3, 25), (
47, 31), (46, 72), (65, 85), (49, 77), (68, 90), (21, 15), (40, 28), (58, 82), (42, 74), (61, 87), (74, 26), (93
, 39), (95, 85), (67, 23), (70, 28), (88, 82), (5, 47), (7, 93), (39, 45), (0, 90), (41, 91), (13, 29), (32, 42)
, (51, 55), (16, 34), (35, 47), (34, 88), (37, 93), (9, 31), (28, 44), (69, 45), (71, 91), (62, 42), (81, 55), (
96, 40), (99, 45), (6, 2), (92, 42), (8, 48), (27, 61), (11, 53), (30, 66), (2, 4), (43, 5), (20, 58), (4, 50),
(23, 63), (64, 64), (36, 2), (55, 15), (38, 48), (57, 61), (76, 74), (73, 5), (91, 59), (94, 64), (66, 2), (85,

```
15), (84, 56), (1, 21), (87, 61), (3, 67), (22, 80), (15, 77), (18, 82), (12, 8), (31, 21), (33, 67), (52, 80),
(24, 18), (65, 19), (68, 24), (45, 77), (86, 78), (58, 16), (77, 29), (89, 83), (42, 8), (61, 21), (80, 34), (79
, 75), (98, 88), (63, 67), (82, 80), (54, 18), (95, 19), (75, 77), (88, 16), (10, 96), (51, 97), (7, 27), (26, 4
0), (28, 86), (47, 99), (0, 24), (19, 37), (60, 38), (21, 83), (40, 96), (81, 97), (34, 22), (53, 35), (72, 48),
(37, 27), (56, 40), (74, 94), (46, 32), (49, 37), (90, 38), (67, 91), (70, 96), (83, 35), (2, 46), (14, 56), (55
, 57), (13, 97), (30, 0), (29, 41), (48, 54), (9, 99), (41, 51), (25, 43), (44, 56), (85, 57), (76, 8), (59, 41)
, (78, 54), (97, 67), (71, 51), (6, 70), (3, 1), (22, 14), (24, 60), (43, 73), (15, 11), (18, 16), (17, 57), (36
, 70), (77, 71), (80, 76), (33, 1), (52, 14), (54, 60), (73, 73), (45, 11), (86, 12), (89, 17), (66, 70), (79, 9
), (98, 22), (63, 1), (82, 14), (1, 89), (75, 11), (19, 79), (10, 30), (51, 31), (12, 76), (31, 89), (72, 90), (
28, 20), (47, 33), (46, 74), (65, 87), (49, 79), (68, 92), (21, 17), (40, 30), (81, 31), (58, 84), (42, 76), (61
, 89), (74, 28), (93, 41), (95, 87), (67, 25), (70, 30), (14, 98), (88, 84), (5, 49), (7, 95), (20, 34), (39, 47
), (23, 39), (0, 92), (41, 93), (13, 31), (32, 44), (44, 98), (16, 36), (35, 49), (76, 50), (34, 90), (37, 95),
(9, 33), (50, 34), (69, 47), (71, 93), (62, 44), (97, 1), (96, 42), (99, 47), (15, 53), (6, 4), (18, 58), (92, 4
4), (8, 50), (27, 63), (11, 55), (30, 68), (43, 7), (4, 52), (45, 53), (64, 66), (36, 4), (77, 5), (80, 10), (38
, 50), (57, 63), (98, 64), (73, 7), (91, 61), (75, 53), (94, 66), (66, 4), (10, 72), (84, 58), (1, 23), (87, 63)
, (3, 69), (22, 82), (19, 13), (40, 72), (12, 10), (31, 23), (72, 24), (33, 69), (52, 82), (93, 83), (46, 8), (6
5, 21), (49, 13), (68, 26), (67, 67), (86, 80), (58, 18), (70, 72), (89, 85), (42, 10), (61, 23), (5, 91), (79,
77), (63, 69), (82, 82), (95, 21), (88, 18), (32, 86), (51, 99), (35, 91), (7, 29), (26, 42), (9, 75), (28, 88),
(0, 26), (41, 27), (60, 40), (44, 32), (21, 85), (62, 86), (81, 99), (34, 24), (53, 37), (37, 29), (56, 42), (97
, 43), (74, 96), (71, 27), (90, 40), (92, 86), (83, 37), (2, 48), (4, 94), (36, 46), (55, 59), (13, 99), (30, 2)
, (29, 43), (48, 56), (64, 0), (25, 45), (66, 46), (85, 59), (76, 10), (59, 43), (78, 56), (94, 0), (3, 3), (22,
16), (24, 62), (43, 75), (15, 13), (18, 18), (17, 59), (58, 60), (77, 73), (61, 65), (80, 78), (33, 3), (52, 16)
, (54, 62), (73, 75), (45, 13), (86, 14), (89, 19), (88, 60), (79, 11), (63, 3), (82, 16), (1, 91), (19, 81), (1
0, 32), (51, 33), (12, 78), (72, 92), (28, 22), (47, 35), (46, 76), (65, 89), (49, 81), (68, 94), (21, 19), (40,
32), (81, 33), (42, 78), (83, 79), (74, 30), (93, 43), (95, 89), (70, 32), (5, 51), (7, 97), (20, 36), (39, 49),
(23, 41), (41, 95), (13, 33), (32, 46), (16, 38), (35, 51), (76, 52), (34, 92), (37, 97), (9, 35), (50, 36), (69
, 49), (71, 95), (62, 46), (97, 3), (96, 44), (99, 49), (15, 55), (6, 6), (18, 60), (8, 52), (27, 65), (11, 57),
(30, 70), (43, 9), (4, 54), (45, 55), (64, 68), (36, 6), (77, 7), (80, 12), (38, 52), (57, 65), (98, 66), (73, 9
), (91, 63), (75, 55), (94, 68), (66, 6), (10, 74), (84, 60), (1, 25), (87, 65), (3, 71), (22, 84), (19, 15), (4
0, 74), (12, 12), (31, 25), (72, 26), (33, 71), (52, 84), (93, 85), (46, 10), (65, 23), (49, 15), (68, 28), (67,
69), (86, 82), (58, 20), (70, 74), (89, 87), (42, 12), (61, 25), (5, 93), (79, 79), (63, 71), (82, 84), (95, 23)
, (14, 34), (88, 20), (32, 88), (35, 93), (7, 31), (26, 44), (9, 77), (28, 90), (0, 28), (41, 29), (60, 42), (44
, 34), (21, 87), (62, 88), (34, 26), (53, 39), (37, 31), (56, 44), (97, 45), (74, 98)} em {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,
7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35,
36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63,
64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91,
92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99} é equivalente? True.
Relação = {(1, 1), (0, 0)} em {0, 1} é equivalente? True.
```

Slide 31 - Funções

Slide 34 - Definição

Uma função $f: A \to B$ é uma relação de A para B (um subconjunto de $A \times B$) tal que cada $a \in A$ está na primeira posição de um único par ordenado (a, b) em f. O gráfico de f é definido como:

$$ \text{Gráfico de } f = \{(a, b) : a \in A, b = f(a)\} $$

Exemplos de Relações e Funções

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, vamos verificar quais das seguintes relações são funções:

1. **$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$**

   - f é uma função de A em A porque cada elemento de A aparece exatamente uma vez como o primeiro elemento de um par ordenado em f.
   - **Prova**: Observamos que:
     - 1, 2, e 3 são únicos na primeira posição de cada par, e
     - Cada um desses elementos é mapeado para um único valor em A.
   - Portanto, f satisfaz a definição de função.
2. **$g = \{(1, 2), (3, 1)\}$**

   - g não é uma função de A para A porque o elemento $2 \in A$ não aparece como o primeiro elemento de nenhum par ordenado em g.
   - **Prova**: Para que g fosse uma função, cada elemento de A deveria aparecer como o primeiro elemento em um par único, o que não ocorre aqui.
3. **$h = \{(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$**

   - h não é uma função porque o elemento $1 \in A$ aparece como o primeiro elemento em mais de um par ordenado, o que viola a definição de função.
   - **Prova**: Uma função requer que cada elemento de A esteja relacionado a um único elemento em B. Aqui, 1 está relacionado a 3 e também a 2, o que não é permitido em funções.

Concluindo, apenas f é uma função no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, enquanto g e h não são funções devido à violação dos critérios de definição de função.

22. Relação de Funções: Dado o conjunto A = {1,2,3}, verifique as funções:

1. f = {(1,3), (2, 3), (3,1)}
2. g = {(1,2), (3,1)}
3. h = {(1,3), (2,1), (1,2), (3,1)}

In [10]:
```
def verificar_funcao(relacao, conjunto):
  dominio = set([x for x, y in relacao])
  for elem in dominio:
        if len([y for x, y in relacao if x == elem]) > 1:
          return False
  return dominio == conjunto

A = {1, 2, 3}

f = {(1, 3), (2, 3), (3, 1)}
g = {(1, 2), (3, 1)}
h = {(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)}

print(f'f é uma função? {verificar_funcao(f,A)}')
print(f'g é uma função? {verificar_funcao(g,A)}')
print(f'h é uma função? {verificar_funcao(h,A)}')

#AndreMouraL
```

```
f é uma função? True
g é uma função? False
h é uma função? False
```

OU:

In [12]:
```
def is_funcao(relacao, A):
    primeiros_elementos = [par[0] for par in relacao]
    return all(primeiros_elementos.count(a) == 1 for a in A)

A = {1, 2, 3}

f = {(1, 3), (2, 3), (3, 1)}
g = {(1, 2), (3, 1)}
h = {(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)}

print("f é função?", is_funcao(f, A))
print("g é função?", is_funcao(g, A))
print("h é função?", is_funcao(h, A))

#AndreMouraL
```

```
f é função? True
g é função? False
h é função? False
```

Slide 37 - Teoremas e Demonstrações

Slide 42 - Indução Matemática: exemplo 1

Objetivo: Provar que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ para todo inteiro positivo n.

1. **Base da Indução $P(1)$**:
   - Quando $n = 1$, a soma dos primeiros n números ímpares é 1.
   - A fórmula dá $1^2 = 1$.
   - Portanto, $P(1)$ é verdadeira porque ambos os lados são iguais a 1.
2. **Hipótese Indutiva (Suponha $P(k)$)**:
   - Suponha que a fórmula é verdadeira para um certo inteiro positivo k: $$ 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2 $$
3. **Passo Indutivo (Prove $P(k+1)$)**:
   - Precisamos provar que a fórmula também é válida para $k+1$: $$ 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2 $$
   - Partindo da Hipótese Indutiva, adicionamos o próximo número ímpar na sequência, $2(k+1) - 1$, aos lados esquerdo e direito: $$ \begin{align*} 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k+1) - 1] &= k^2 + [2(k+1) - 1] \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{align*} $$
   - O último passo segue da contração de $k^2 + 2k + 1$ que é igual a $(k+1)^2$.

- Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Dado que $P(1)$ é verdadeira e $P(k+1)$ é verdadeira assumindo que $P(k)$ é verdadeira, por indução matemática, a equação $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo inteiro positivo n.

Slide 43 - Indução Matemática: exemplo 2

Exemplo: Provar que para todo inteiro positivo n, a seguinte equação é verdadeira: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Etapas da Prova Indutiva

1. **Base da Indução**:
    - Verifique se a equação é verdadeira para $n = 1$.
    - $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, que é verdadeiro. Assim, a base da indução é válida.
2. **Hipótese Indutiva** (Suponha $P(k)$):
    - Assuma que a fórmula é verdadeira para algum inteiro positivo k.
    - $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$
3. **Passo Indutivo** (Prove $P(k+1)$):
    - Precisamos mostrar que a fórmula também é verdadeira para $k+1$.
    - Começamos com $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1)$.
    - Com base na hipótese indutiva, podemos reescrever isso como $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$.
    - Combinando os termos, obtemos $\frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$.
    - Simplificando, isso se torna $\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$.
    - Fatorando $(k+1)$, temos $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
    - Que é igual a $\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$, confirmando que a fórmula é verdadeira para $k+1$.

- Uma outra forma de ver é:

$$ P(k+1): 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} $$

- Partimos da soma até k e adicionamos $k+1$ a ambos os lados da equação $P(k)$:

$$ 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) $$

- Para unificar o lado direito da equação, encontramos um denominador comum e combinamos os termos:

$$ = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} $$

- Somando as frações, temos:

$$ = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} $$

- Fatorando $(k+1)$ do numerador, obtemos:

$$ = \frac{(k+1)(k + 2)}{2} $$

Agora, reconhecemos que $k + 2$ é o mesmo que $(k+1)+1$, portanto, a equação se torna:

$$ = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} $$

Portanto, por indução matemática, provamos que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ é verdadeiro para qualquer inteiro positivo n.

23. Indução matemática: Faça um codigo em python que:

a) Provar que 1+3+5+...+(2n-1) = n^2 para todo inteiro positivo n

b) provar que para todo inteiro positivo n, a seguinte equação é verdadeira: 1+2+3+...+n = (n(n+1))/2

In [15]:
```python
def soma_impares(n):
    return sum(2*i - 1 for i in range(1, n+1))

def inducao1():
    for n in range(1, 11):
        soma = soma_impares(n)
        formula = n**2
        print(f"Para n = {n}: Soma = {soma}, Fórmula n^2 = {formula}")
        assert soma == formula, f"Falha para n = {n}"

# Chama a função para realizar a indução
print("Letra a):")
```

```
inducao1()

def soma_inteiros(n):
    return sum(range(1, n+1))

def inducao2():
    for n in range(1, 11):
        soma = soma_inteiros(n)
        formula = (n * (n + 1)) // 2
        print(f"Para n = {n}: Soma = {soma}, Fórmula (n(n+1))/2 = {formula}")
        assert soma == formula, f"Falha para n = {n}"
print("\nLetra b):")
inducao2()

#AndreMouraL
```

```
Letra a):
Para n = 1: Soma = 1, Fórmula n^2 = 1
Para n = 2: Soma = 4, Fórmula n^2 = 4
Para n = 3: Soma = 9, Fórmula n^2 = 9
Para n = 4: Soma = 16, Fórmula n^2 = 16
Para n = 5: Soma = 25, Fórmula n^2 = 25
Para n = 6: Soma = 36, Fórmula n^2 = 36
Para n = 7: Soma = 49, Fórmula n^2 = 49
Para n = 8: Soma = 64, Fórmula n^2 = 64
Para n = 9: Soma = 81, Fórmula n^2 = 81
Para n = 10: Soma = 100, Fórmula n^2 = 100

Letra b):
Para n = 1: Soma = 1, Fórmula (n(n+1))/2 = 1
Para n = 2: Soma = 3, Fórmula (n(n+1))/2 = 3
Para n = 3: Soma = 6, Fórmula (n(n+1))/2 = 6
Para n = 4: Soma = 10, Fórmula (n(n+1))/2 = 10
Para n = 5: Soma = 15, Fórmula (n(n+1))/2 = 15
Para n = 6: Soma = 21, Fórmula (n(n+1))/2 = 21
Para n = 7: Soma = 28, Fórmula (n(n+1))/2 = 28
Para n = 8: Soma = 36, Fórmula (n(n+1))/2 = 36
Para n = 9: Soma = 45, Fórmula (n(n+1))/2 = 45
Para n = 10: Soma = 55, Fórmula (n(n+1))/2 = 55
```

SOLUÇÃO:

In [18]:
```
# Letra a:
for n in range(1, 11):
    soma = sum(i**2 for i in range(1, n+1))
    formula = n**2
    print(f"Para n = {n}: Soma = {soma}, Fórmula n^2 = {formula}")

print("\n")

# Letra b:
for n in range(1, 11):
    soma = sum(i for i in range(1, n+1))
    formula = (n * (n + 1)) // 2
    print(f"Para n = {n}: Soma = {soma}, Fórmula (n(n+1))/2 = {formula}")

    #AndreMouraL
```

```
Para n = 1: Soma = 1, Fórmula n^2 = 1
Para n = 2: Soma = 5, Fórmula n^2 = 4
Para n = 3: Soma = 14, Fórmula n^2 = 9
Para n = 4: Soma = 30, Fórmula n^2 = 16
Para n = 5: Soma = 55, Fórmula n^2 = 25
Para n = 6: Soma = 91, Fórmula n^2 = 36
Para n = 7: Soma = 140, Fórmula n^2 = 49
Para n = 8: Soma = 204, Fórmula n^2 = 64
Para n = 9: Soma = 285, Fórmula n^2 = 81
Para n = 10: Soma = 385, Fórmula n^2 = 100


Para n = 1: Soma = 1, Fórmula (n(n+1))/2 = 1
Para n = 2: Soma = 3, Fórmula (n(n+1))/2 = 3
Para n = 3: Soma = 6, Fórmula (n(n+1))/2 = 6
Para n = 4: Soma = 10, Fórmula (n(n+1))/2 = 10
Para n = 5: Soma = 15, Fórmula (n(n+1))/2 = 15
Para n = 6: Soma = 21, Fórmula (n(n+1))/2 = 21
Para n = 7: Soma = 28, Fórmula (n(n+1))/2 = 28
Para n = 8: Soma = 36, Fórmula (n(n+1))/2 = 36
Para n = 9: Soma = 45, Fórmula (n(n+1))/2 = 45
Para n = 10: Soma = 55, Fórmula (n(n+1))/2 = 55
```

Slide 45 - Prova por contradição - exemplo 1

Objetivo: Provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

1. **Suposição inicial**:

   - Suponha, por contradição, que $\sqrt{2}$ é racional.
   - Isso significa que existem inteiros p e q, sem fatores comuns (ou seja, p e q são coprimos), tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

2. **Desenvolvimento da contradição**:

   - Se $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, então elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos $2 = \frac{p^2}{q^2}$, ou $p^2 = 2q^2$.
   - Da equação $p^2 = 2q^2$, p^2 deve ser par porque é duas vezes um número inteiro ($2q^2$).
   - Se p^2 é par, então p também deve ser par (pois somente o quadrado de um número par é par).
   - Se p é par, então existe um inteiro m tal que $p = 2m$.

3. **Aprofundamento na contradição**:

   - Substituindo p por $2m$ na equação $p^2 = 2q^2$, temos $(2m)^2 = 2q^2$, ou $4m^2 = 2q^2$, o que simplifica para $2m^2 = q^2$.
   - Isso implica que q^2 também é par, e consequentemente, q deve ser par.

4. **Conclusão da contradição**:

   - Se tanto p quanto q são pares, então eles têm pelo menos o fator comum 2, contradizendo a suposição inicial de que p e q são coprimos (não têm fatores comuns).
   - Portanto, nossa suposição inicial de que $\sqrt{2}$ é racional leva a uma contradição.

Conclusão:

- Dado que a suposição de que $\sqrt{2}$ é racional conduz a uma contradição, devemos concluir que $\sqrt{2}$ é irracional.

Slide 46 - Prova por contradição - exemplo 2

Objetivo: Provar que 0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$.

1. **Suposição Inicial**:

   - Suponha, para fins de contradição, que exista um $e \in \mathbb{N}$, com $e \neq 0$, que também é um elemento neutro da adição.

2. **Desenvolvimento**:

   - Sabe-se que 0 é o elemento neutro da adição, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $n = n + 0$. Em particular, se escolhermos $n = e$, obtemos $e = e + 0$.
   - Além disso, pela nossa suposição, e também é um elemento neutro. Isso significa que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n = e + n$. Especificamente, escolhendo $n = 0$, obtemos $0 = e + 0$.

3. **Contradição**:

   - Agora, temos duas expressões: $e = e + 0$ e $0 = e + 0$. Isso implica que $e = 0$.
   - No entanto, isso contradiz nossa suposição inicial de que $e \neq 0$.

Conclusão:

- A suposição de que existe um elemento neutro diferente de 0 leva a uma contradição.
- Portanto, 0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$.

24. Prova por contradição: Faça a prova por contradição dos seguintes exemplos: a) provar que raiz de 2 é um número irracional b) provar que 0 é o único elemento neutro da adição em N

In [19]:

```
def sqrt2():
    for a in range(1, 21):
        for b in range(1, 21):
            if a / b == (2 ** 0.5):
                return f"Sqrt(2) pode ser representado como {a}/{b}, o que é um número racional."
    return "Sqrt(2) não pode ser representado como uma fração, é irracional."

result1 = sqrt2()
print(f'Letra a):{result1}')


def elemento_neutro():
    for n in range(1, 21):
```

```
        if n + 0 != n:
            return f"Contradição: Para n = {n}, n + 0 != n."
    return "0 é o elemento neutro da adição em N."

result2 = elemento_neutro()
print(f'Letra b): {result2}')

#AndreMouraL
```

```
Letra a):Sqrt(2) não pode ser representado como uma fração, é irracional.
Letra b): 0 é o elemento neutro da adição em N.
```

In [21]:
```
from sympy import sqrt, Rational, S
print("sqrt(2) é racional?", sqrt(2).is_rational)  #AndreMouraL
```

```
sqrt(2) é racional? False
```

In [23]:
```
def elemento_neutro_adicao():
    for e in range(1, 10):
        if all((n + e == n) for n in range(10)):
            return e
    return 0

print("Elemento neutro da adição em N:", elemento_neutro_adicao()) #AndreMouraL
```

```
Elemento neutro da adição em N: 0
```

Slide 47 - Grafos

Slide 48 - Definição de Grafo

Um **grafo** é um par ordenado (V, A), onde:

- V é o conjunto de **vértices** (ou nós) do grafo.
- A é a relação binária sobre V, que especifica os **arcos** (ou arestas) do grafo.

Vertices $v_i, v_j \in V$ tais que $(v_i, v_j) \in A$ são ditos adjacentes, significando que eles são conectados por um arco.

Exemplo de um Grafo

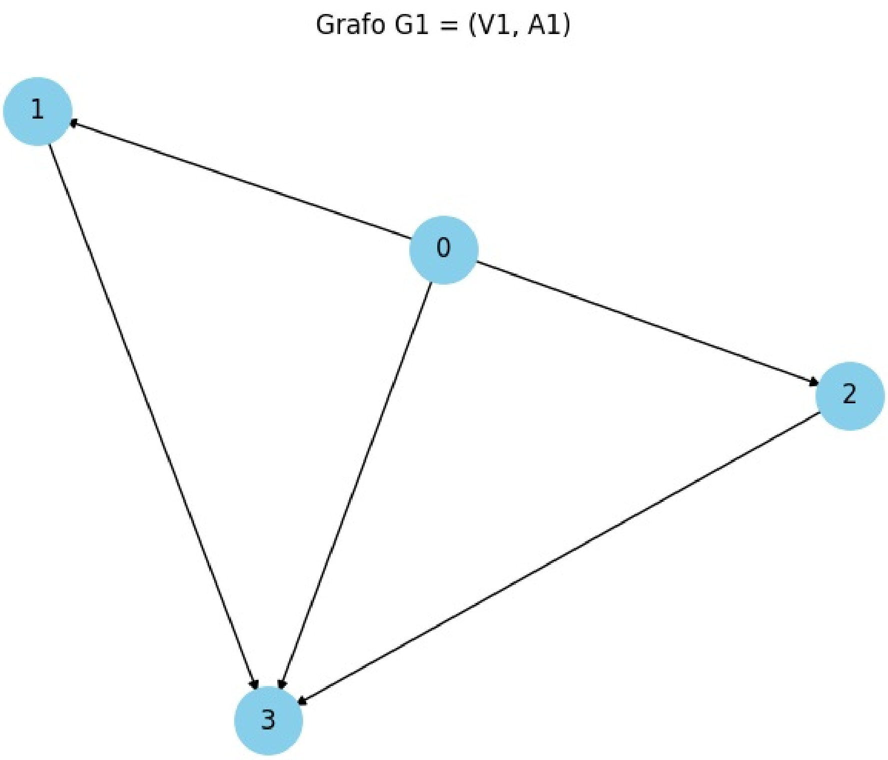
Considere o grafo G_1 representado textualmente e graficamente:

- $G_1 = (V_1, A_1)$
- $V_1 = \{0, 1, 2, 3\}$
- $A_1 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)\}$

Graficamente, o grafo G_1 pode ser representado com círculos denotando os vértices e linhas denotando os arcos entre eles. Infelizmente, não posso renderizar ou incluir imagens diretamente aqui, mas a representação seria um ponto para cada vértice conectado por linhas que representam os arcos especificados em A_1.

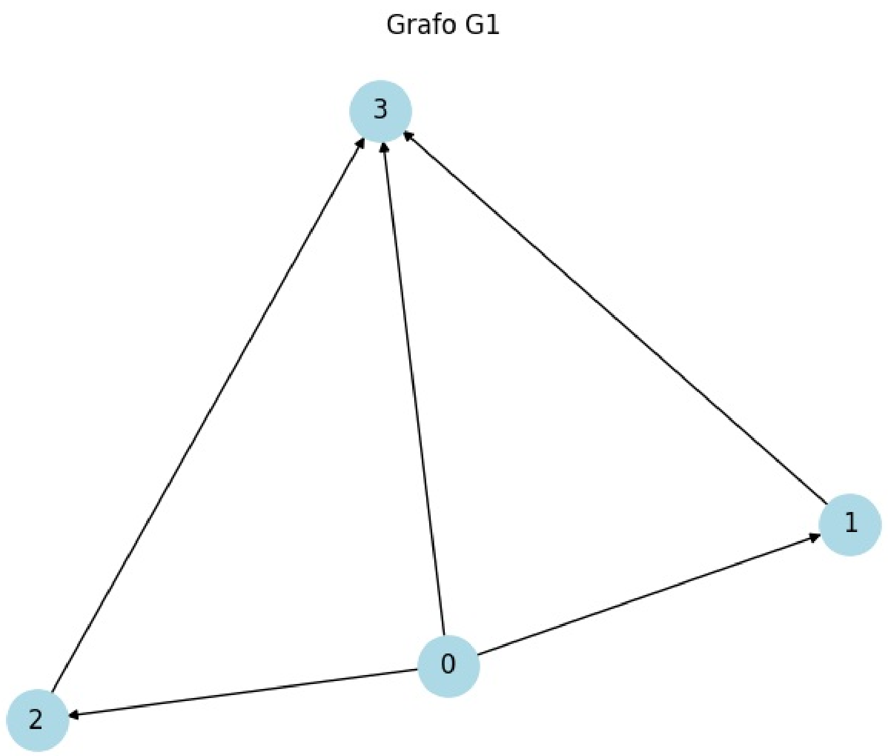
Cada vértice em V_1 é um ponto numerado de 0 a 3, e cada par em A_1 indica uma linha conectando dois vértices. Por exemplo, o par $(0, 1)$ representa uma linha conectando os vértices 0 e 1.

In [24]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

G1 = nx.DiGraph()

G1.add_nodes_from([0, 1, 2, 3])
G1.add_edges_from([(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)])
nx.draw(G1, with_labels=True, node_size=800, node_color='skyblue', font_size=12, edge_color='black', linewidths=
plt.title('Grafo G1 = (V1, A1)')
plt.show()
```



In [32]:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt


V1 = {0, 1, 2, 3}
A1 = [(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)]


G1 = nx.DiGraph()
G1.add_nodes_from(V1)
G1.add_edges_from(A1)


pos = nx.spring_layout(G1)  # Define a disposição dos nós
nx.draw(G1, pos, with_labels=True, node_color='lightblue', node_size=800, arrows=True)
plt.title("Grafo G1")
plt.show()


print("Vértices de G1:", G1.nodes())
print("Arcos de G1:", G1.edges())
print("Grau de entrada do vértice 3:", G1.in_degree(3))
print("Grau de saída do vértice 0:", G1.out_degree(0))

#AndreMouraL
```




```
Vértices de G1: [0, 1, 2, 3]
Arcos de G1: [(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)]
Grau de entrada do vértice 3: 3
Grau de saída do vértice 0: 3
```

Slide 49 - Grafo Orientado

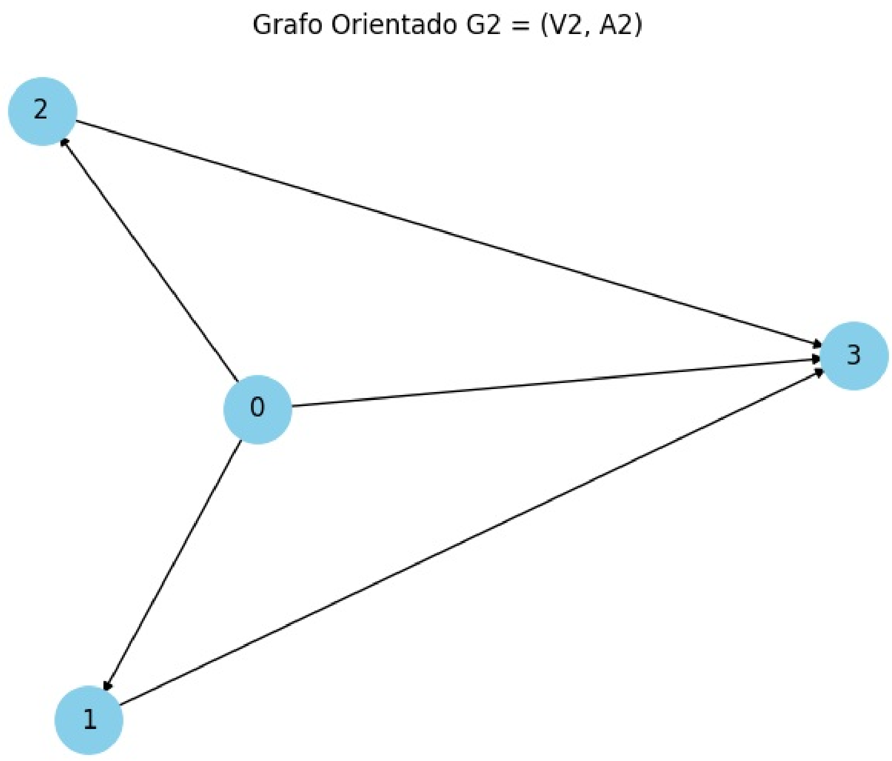
Definição de Grafo Orientado

- Um grafo orientado, ou digrafo, é aquele em que os pares ordenados $(v_i, v_j) \in A$ representam arcos com uma direção específica, de v_i para v_j.
- Em um grafo orientado:
  - Se $(v_i, v_j) \in A$, então v_i é chamado de predecessor de v_j, e v_j é chamado de sucessor de v_i.
- Considere o grafo orientado G_2:
  - $V_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ representa o conjunto de vértices.
  - $A_2 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)\}$ representa o conjunto de arcos, indicando a direção da relação entre os vértices.

Grafo G_2

- Vértices: $V_2 = \{0, 1, 2, 3\}$
- Arcos: $A_2 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)\}$

In [27]:
```
G2 = nx.DiGraph()

V2 = [0, 1, 2, 3]
G2.add_nodes_from(V2)

A2 = [(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (2, 3)]
G2.add_edges_from(A2)

pos = nx.spring_layout(G2)
nx.draw(G2, pos, with_labels=True, node_size=800, node_color='skyblue', font_size=12, edge_color='black', linewi
plt.title("Grafo Orientado G2 = (V2, A2)")
plt.show()

#AndreMouraL
```



Slide 50 - Grafo Ordenado

Um grafo é considerado **ordenado** se existe uma relação de ordem pré-definida sobre os arcos que saem de cada vértice. No grafo G_3, temos:

- **Conjunto de Vértices**: $V_3 = \{a, b, c, d\}$
- **Conjunto de Arcos**: $A_3 = \{(a,b), (b,a), (a,c), (a,d), (c,b), (d,c), (c,d)\}$

A relação de ordem entre os arcos é dada por: $$ (a,b) < (b,a) < (a,c) < (a,d) < (c,b) < (d,c) < (c,d) $$

Isso significa que, para o vértice a, os arcos são ordenados da seguinte forma:

- Saindo de a: (a,b), (a,c), (a,d)

Para o vértice b:

- Saindo de b: (b,a)

Para o vértice c:

- Saindo de c: (c,b), (c,d)

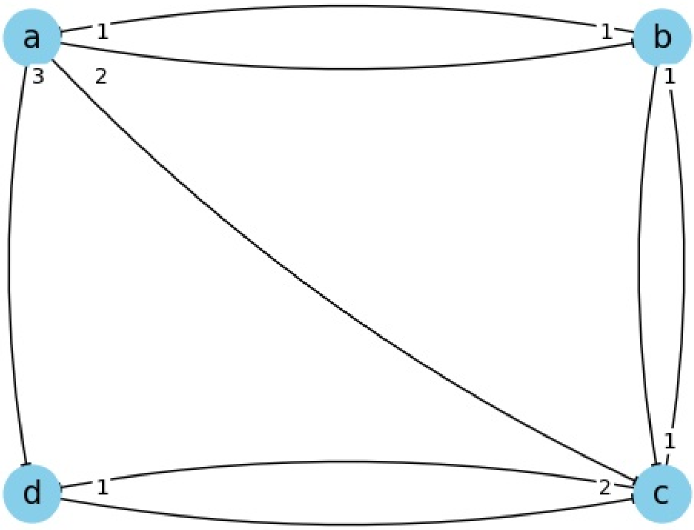
Para o vértice d:

- Saindo de d: (d,c)

In [28]:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Criando um grafo direcionado
G = nx.MultiDiGraph()

# Adicionando vértices e arestas com pesos
G.add_edge('a', 'b', weight=1)
G.add_edge('b', 'a', weight=1)
G.add_edge('a', 'c', weight=2)
G.add_edge('a', 'd', weight=3)
G.add_edge('c', 'b', weight=1)
G.add_edge('d', 'c', weight=1)
G.add_edge('c', 'd', weight=2)
G.add_edge('b', 'c', weight=1)

# Definindo a posição dos vértices
pos = {'a': (0, 1), 'b': (1, 1), 'c': (1, 0), 'd': (0, 0)}

# Desenhando o grafo com arcos curvos para arestas bidirecionais
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_size=700, node_color='skyblue')
```

```
nx.draw_networkx_labels(G, pos, font_size=15)

# Desenhar as arestas com curvas suaves para distinguir as bidirecionais
for (u, v, key) in G.edges(keys=True):
    style = 'arc3, rad=0.1' if key == 0 else 'arc3, rad=-0.1'
    nx.draw_networkx_edges(G, pos, edgelist=[(u, v)], connectionstyle=style)

# Adicionando rótulos de aresta no início de cada aresta
edge_labels = {(u, v): d['weight'] for u, v, d in G.edges(data=True)}
for (u, v), weight in edge_labels.items():
    # Define o deslocamento para mover os rótulos para perto do nó de origem
    edge_pos = pos[u]
    text_pos = (edge_pos[0] * 0.9 + pos[v][0] * 0.1, edge_pos[1] * 0.9 + pos[v][1] * 0.1)

    # Desenha os rótulos das arestas com fundo branco para melhor visibilidade
    plt.text(text_pos[0], text_pos[1], s=weight, bbox=dict(facecolor='white', edgecolor='none', boxstyle='round,

# Mostrando o grafo
plt.axis('off')  # Desliga os eixos
plt.show()

#AndreMouraL
```



Slide 51 - Conceitos de Grafos Orientados

Em um grafo orientado, podemos definir conceitos importantes baseados nas conexões entre os vértices:

- **Ramificação de Saída (N_S)**: Número de arcos que partem de um vértice.
- **Ramificação de Entrada (N_E)**: Número de arcos que chegam a um vértice.
- **Vértices-base ou Vértices-raiz**: Vértices que não têm arcos chegando a eles ($N_E = 0$).
- **Vértices-folha**: Vértices que não têm arcos partindo deles ($N_S = 0$).

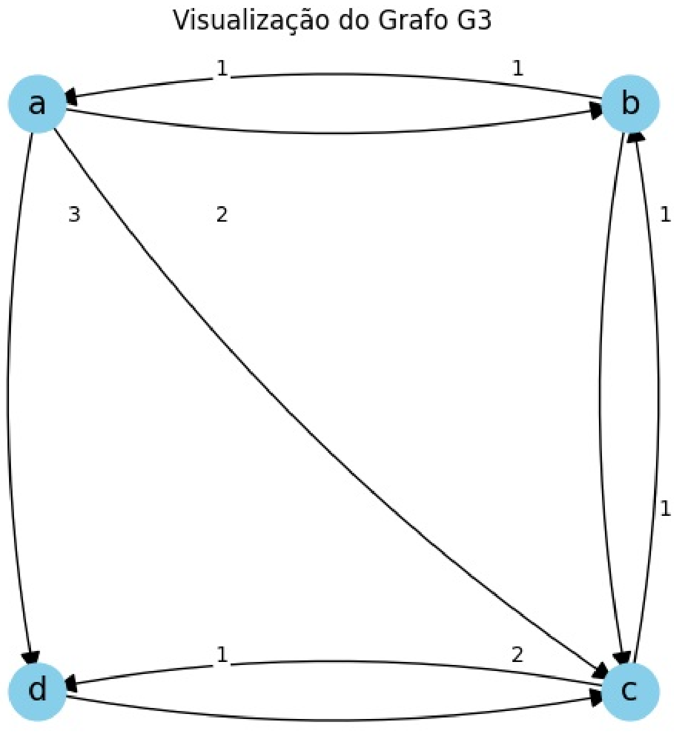
Considerando o grafo G_3, temos:

- Vértice a: Ramificação de Saída $N_S(a) = 3$, Ramificação de Entrada $N_E(a) = 1$
- Vértice b: Ramificação de Saída $N_S(b) = 1$, Ramificação de Entrada $N_E(b) = 2$
- Vértice c: Ramificação de Saída $N_S(c) = 2$, Ramificação de Entrada $N_E(c) = 2$
- Vértice d: Ramificação de Saída $N_S(d) = 1$, Ramificação de Entrada $N_E(d) = 2$

Desta forma, no grafo G_3, não temos vértices-base ou vértices-folha, pois todos os vértices têm pelo menos uma ramificação de saída e uma de entrada.

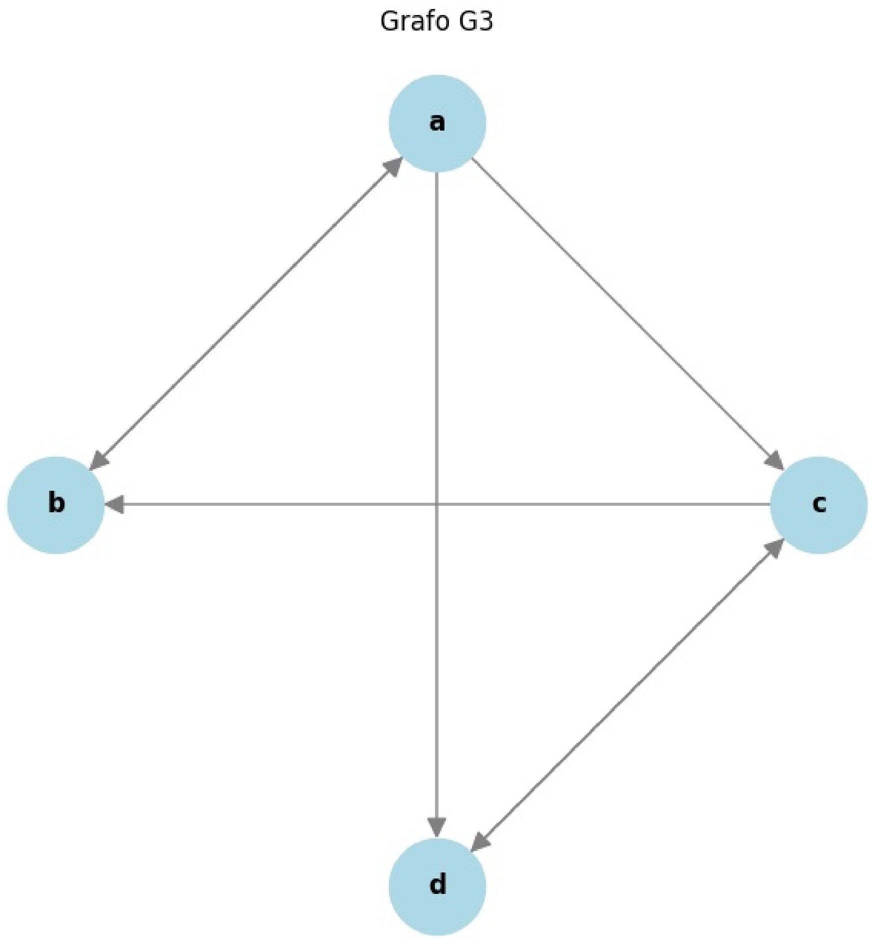
In [39]:
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Criando um grafo direcionado com múltiplas arestas
G = nx.MultiDiGraph()

# Adicionando vértices e arestas com pesos
G.add_edge('a', 'b', weight=1)
G.add_edge('b', 'a', weight=1)
G.add_edge('a', 'c', weight=2)
G.add_edge('a', 'd', weight=3)
G.add_edge('c', 'b', weight=1)
G.add_edge('d', 'c', weight=1)
G.add_edge('c', 'd', weight=2)
```

```python
G.add_edge('b', 'c', weight=1)

# Definindo a posição dos vértices
pos = {'a': (0, 1), 'b': (1, 1), 'c': (1, 0), 'd': (0, 0)}

# Desenhando os nós e os rótulos dos vértices
plt.figure(figsize=(6, 6))
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_size=700, node_color='skyblue')
nx.draw_networkx_labels(G, pos, font_size=15)

# Desenhando as arestas com arcos para distinguir direções opostas
for (u, v, key) in G.edges(keys=True):
    style = 'arc3, rad=0.1' if key == 0 else 'arc3, rad=-0.1'
    nx.draw_networkx_edges(G, pos, edgelist=[(u, v)], connectionstyle=style, arrowstyle='-|>', arrowsize=20)

# Adicionando rótulos de pesos nas arestas
edge_labels = {(u, v, k): d['weight'] for u, v, k, d in G.edges(keys=True, data=True)}
for (u, v, k), weight in edge_labels.items():
    offset = 0.05 * (-1) ** k  # deslocamento leve para diferenciar
    x = pos[u][0] * 0.75 + pos[v][0] * 0.25 + offset
    y = pos[u][1] * 0.75 + pos[v][1] * 0.25 + offset
    plt.text(x, y, s=weight, bbox=dict(facecolor='white', edgecolor='none', boxstyle='round,pad=0.1'), fontsize=

# Ajustes finais
plt.title("Visualização do Grafo G3")
plt.axis('off')
plt.show()
```



In [40]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

# Criar grafo direcionado
G = nx.DiGraph()

# Adicionar nós
G.add_nodes_from(['a', 'b', 'c', 'd'])

# Adicionar arestas conforme a imagem
edges = [('a', 'b'), ('a', 'c'), ('a', 'd'),
         ('b', 'a'), ('c', 'b'), ('c', 'd'),
         ('d', 'c')]
G.add_edges_from(edges)

# Posicionar os nós manualmente (mais próximo da imagem)
pos = {
    'a': (0, 1),
    'b': (-1, 0),
    'c': (1, 0),
    'd': (0, -1)
}

# Desenhar grafo
plt.figure(figsize=(6, 6))
```

```
nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_color='lightblue', node_size=2000, arrows=True,
        arrowstyle='-|>', arrowsize=20, font_weight='bold', edge_color='gray')
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels={(u, v): "" for u, v in G.edges()})
plt.title("Grafo G3")
plt.axis('off')
plt.show()

#AndreMouraL
```



In [42]:
```
def find_root_and_leaf_nodes(G):
    root_nodes = [n for n in G.nodes() if G.in_degree(n) == 0]
    leaf_nodes = [n for n in G.nodes() if G.out_degree(n) == 0]
    return root_nodes, leaf_nodes

root_nodes, leaf_nodes = find_root_and_leaf_nodes(G)
print(f'Vertices-base/raiz: {root_nodes}')
print(f'Vertices-folha: {leaf_nodes}')


ramificacao_saida = {n: G.out_degree(n) for n in G.nodes()}
ramificacao_entrada = {n: G.in_degree(n) for n in G.nodes()}


print("Ramificação de Saída (NS):", ramificacao_saida)
print("Ramificação de Entrada (NE):", ramificacao_entrada)

#AndreMouraL
```

```
Vertices-base/raiz: []
Vertices-folha: []
Ramificação de Saída (NS): {'a': 3, 'b': 1, 'c': 2, 'd': 1}
Ramificação de Entrada (NE): {'a': 1, 'b': 2, 'c': 2, 'd': 2}
```

Slide 52 - Caminhos e Ciclos em Grafos

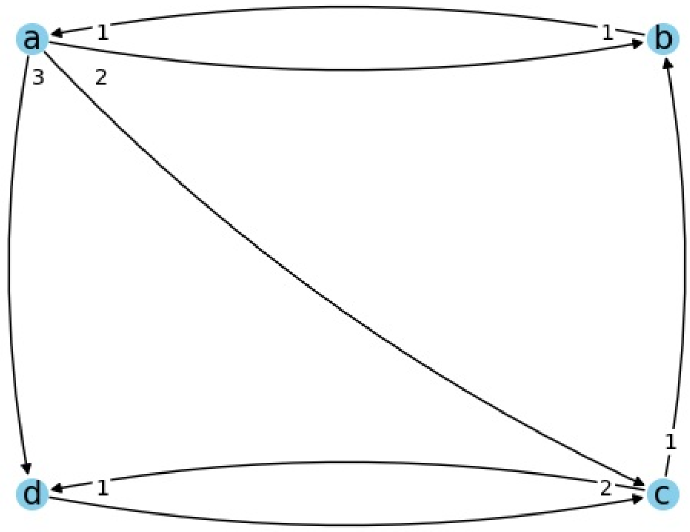
Um **caminho** em um grafo é uma sequência de arcos que conectam uma série de vértices, começando no vértice inicial e terminando no vértice final, de tal forma que cada arco está diretamente conectado ao próximo.

Um **ciclo** é um caminho particular que começa e termina no mesmo vértice.

- **Caminho**: Para o grafo G_3, a sequência $(a, c)(c, b)$ é um caminho válido de comprimento 2.
- **Ciclo**: O grafo G_3 é cíclico, pois contém ciclos, por exemplo, $(a, b)(b, a)$.

- **Grafo Cíclico**: Um grafo é cíclico se contém pelo menos um ciclo.
- **Grafo Acíclico**: Um grafo é acíclico se não contém nenhum ciclo.

In [43]:
```python
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Criando um grafo direcionado
G = nx.MultiDiGraph()

# Adicionando vértices e arestas com pesos
G.add_edge('a', 'b', weight=1)
G.add_edge('b', 'a', weight=1)
G.add_edge('a', 'c', weight=2)
G.add_edge('a', 'd', weight=3)
G.add_edge('c', 'b', weight=1)
G.add_edge('d', 'c', weight=1)
G.add_edge('c', 'd', weight=2)

# Definindo a posição dos vértices
pos = {'a': (0, 1), 'b': (1, 1), 'c': (1, 0), 'd': (0, 0)}

# Desenhando o grafo com arcos curvos para arestas bidirecionais
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, node_size=200, node_color='skyblue')
nx.draw_networkx_labels(G, pos, font_size=15)

# Desenhar as arestas com curvas suaves para distinguir as bidirecionais
for (u, v, key) in G.edges(keys=True):
    style = 'arc3, rad=0.1' if key == 0 else 'arc3, rad=-0.1'
    nx.draw_networkx_edges(G, pos, edgelist=[(u, v)], connectionstyle=style)

# Adicionando rótulos de aresta no início de cada aresta
edge_labels = {(u, v): d['weight'] for u, v, d in G.edges(data=True)}
for (u, v), weight in edge_labels.items():
    # Define o deslocamento para mover os rótulos para perto do nó de origem
    edge_pos = pos[u]
    text_pos = (edge_pos[0] * 0.9 + pos[v][0] * 0.1, edge_pos[1] * 0.9 + pos[v][1] * 0.1)

    # Desenha os rótulos das arestas com fundo branco para melhor visibilidade
    plt.text(text_pos[0], text_pos[1], s=weight, bbox=dict(facecolor='white', edgecolor='none', boxstyle='round,

# Mostrando o grafo
plt.axis('off')  # Desliga os eixos
plt.show()

# Encontrando caminhos
print("Caminhos de 'a' para 'b':")
for path in nx.all_simple_paths(G, source='a', target='b'):
    print(path)

# Verificando a existência de ciclos
has_cycles = nx.is_directed_acyclic_graph(G)
print(f"O grafo G3 é cíclico? {'Não' if has_cycles else 'Sim'}")

# Identificando um ciclo (se houver)
try:
    cycle = nx.find_cycle(G)
    print("Um ciclo em G3:", cycle)
except nx.NetworkXNoCycle:
    print("G3 é acíclico.")

    #AndreMouraL
```




```
Caminhos de 'a' para 'b':
['a', 'b']
['a', 'c', 'b']
['a', 'd', 'c', 'b']
O grafo G3 é cíclico? Sim
Um ciclo em G3: [('a', 'b', 0), ('b', 'a', 0)]
```

Slide 53 - Grafo Rotulado

Um **grafo rotulado** é aquele em que seus vértices ou arcos têm rótulos associados que representam informações adicionais.

- **Rotulação de Vértices**: É uma função f_V que associa cada vértice do conjunto V a um rótulo do conjunto R_V.
- **Rotulação de Arcos**: É uma função f_A que associa cada arco do conjunto A a um rótulo do conjunto R_A.

Exemplo de Grafo Rotulado G_4:

Considere o grafo G_4:

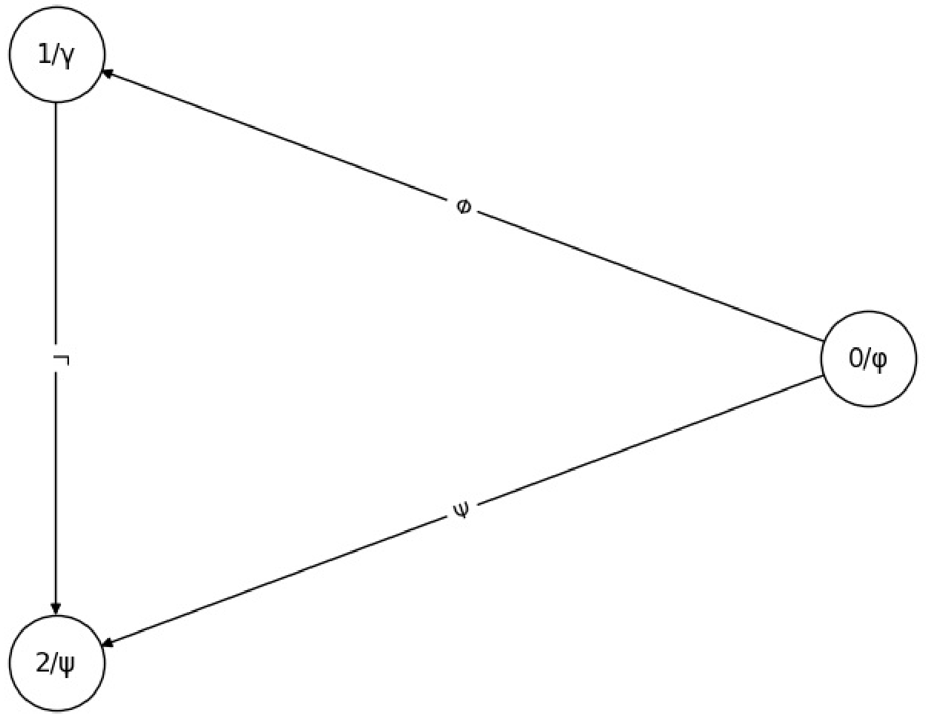
- **Vértices**: $V_4 = \{0, 1, 2\}$
- **Arcos**: $A_4 = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$

Uma possível rotulação para G_4 é:

- **Rotulação de Vértices**: $$ f_V = \{(0, \phi), (1, \gamma), (2, \psi)\} \quad \text{com} \quad R_V = \{\phi, \gamma, \psi\} $$
- **Rotulação de Arcos**: $$ f_A = \{((0, 1), \Phi), ((1, 2), \Gamma), ((0, 2), \Psi)\} \quad \text{com} \quad R_A = \{\Phi, \Gamma, \Psi\} $$

In [44]:
```python
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Criando um grafo direcionado
G4 = nx.DiGraph()

# Adicionando vértices e arestas do grafo G4
G4.add_edge('0', '1', label='Φ')
G4.add_edge('1', '2', label='Γ')
G4.add_edge('0', '2', label='Ψ')

# Rotulação dos vértices
vertex_labels = {'0': 'φ', '1': 'γ', '2': 'ψ'}
for node, label in vertex_labels.items():
    G4.nodes[node]['label'] = label

# Desenhando o grafo
pos = nx.circular_layout(G4)  # Posicionamento circular para os nós
nx.draw(G4, pos, with_labels=False, node_size=2000, node_color='white', edgecolors='black')

# Desenhando os rótulos dos vértices
for node, (x, y) in pos.items():
    plt.text(x, y, f'{node}/{G4.nodes[node]["label"]}', fontsize=12, ha='center', va='center')

# Desenhando os rótulos das arestas
```

```
edge_labels = nx.get_edge_attributes(G4, 'label')
nx.draw_networkx_edge_labels(G4, pos, edge_labels=edge_labels, font_color='black')

# Mostrando o grafo
plt.axis('off')  # Desliga os eixos
plt.show()
```



Slides 54 a 59 - Árvores

Definição de Árvore

- Uma **árvore** é um grafo acíclico (sem ciclos) e orientado, onde:
  - Existe exatamente um vértice chamado **raiz** com $N_E=0$ (sem arestas de entrada).
  - Todos os outros vértices têm exatamente uma aresta de entrada ($N_E=1$).
  - Existe um único caminho de qualquer vértice para a raiz.

Conceitos em Árvores

- **Ancestral e Descendente**:
  - Se a é ancestral de b, então é possível percorrer um caminho da raiz até b passando por a.
  - Se b é descendente de a, então a vem antes de b no caminho da raiz até b.
- **Pai e Filho**:
  - Se não houver vértices intermediários entre a e b, e se a é ancestral direto de b, então a é o pai de b e b é o filho de a.
- **Folhas e Nós Internos**:
  - Vértices sem filhos são chamados de folhas.
  - Vértices com pelo menos um filho são chamados de nós internos.
- **Profundidade**:
  - A profundidade de um nó é o número de arestas no caminho da raiz até esse nó.

Exemplo

Considerando uma árvore com vértices nomeados como `Raiz`, `V1`, `V11`, `V00`, `V01`, `V0`, `V10`:

- `V1` é o pai de `V11`.
- `Raiz` é ancestral de todos os nós.
- `V00` e `V11` são folhas.
- `V0` e `V1` são nós internos.
- `V01` e `V10` têm profundidade 2.

In [48]:
```
!apt-get install -y graphviz libgraphviz-dev
```

```
Reading package lists... Done
Building dependency tree... Done
Reading state information... Done
graphviz is already the newest version (2.42.2-6ubuntu0.1).
The following additional packages will be installed:
  libgail-common libgail18 libgtk2.0-0 libgtk2.0-bin libgtk2.0-common
  libgvc6-plugins-gtk librsvg2-common libxdot4
Suggested packages:
  gvfs
The following NEW packages will be installed:
  libgail-common libgail18 libgraphviz-dev libgtk2.0-0 libgtk2.0-bin
  libgtk2.0-common libgvc6-plugins-gtk librsvg2-common libxdot4
0 upgraded, 9 newly installed, 0 to remove and 34 not upgraded.
Need to get 2,434 kB of archives.
After this operation, 7,681 kB of additional disk space will be used.
Get:1 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/main amd64 libgtk2.0-common all 2.24.33-2ubuntu2.1 [125 kB]
Get:2 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/main amd64 libgtk2.0-0 amd64 2.24.33-2ubuntu2.1 [2,038 kB]
Get:3 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/main amd64 libgail18 amd64 2.24.33-2ubuntu2.1 [15.9 kB]
Get:4 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/main amd64 libgail-common amd64 2.24.33-2ubuntu2.1 [132 kB]
Get:5 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/universe amd64 libxdot4 amd64 2.42.2-6ubuntu0.1 [16.4 kB]
Get:6 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/universe amd64 libgvc6-plugins-gtk amd64 2.42.2-6ubuntu0.1
[22.5 kB]
Get:7 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/universe amd64 libgraphviz-dev amd64 2.42.2-6ubuntu0.1 [58.
5 kB]
Get:8 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/main amd64 libgtk2.0-bin amd64 2.24.33-2ubuntu2.1 [7,936 B]
Get:9 http://archive.ubuntu.com/ubuntu jammy-updates/main amd64 librsvg2-common amd64 2.52.5+dfsg-3ubuntu0.2 [17
.7 kB]
Fetched 2,434 kB in 0s (5,102 kB/s)
Selecting previously unselected package libgtk2.0-common.
(Reading database ... 126332 files and directories currently installed.)
Preparing to unpack .../0-libgtk2.0-common_2.24.33-2ubuntu2.1_all.deb ...
Unpacking libgtk2.0-common (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Selecting previously unselected package libgtk2.0-0:amd64.
Preparing to unpack .../1-libgtk2.0-0_2.24.33-2ubuntu2.1_amd64.deb ...
Unpacking libgtk2.0-0:amd64 (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Selecting previously unselected package libgail18:amd64.
Preparing to unpack .../2-libgail18_2.24.33-2ubuntu2.1_amd64.deb ...
Unpacking libgail18:amd64 (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Selecting previously unselected package libgail-common:amd64.
Preparing to unpack .../3-libgail-common_2.24.33-2ubuntu2.1_amd64.deb ...
Unpacking libgail-common:amd64 (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Selecting previously unselected package libxdot4:amd64.
Preparing to unpack .../4-libxdot4_2.42.2-6ubuntu0.1_amd64.deb ...
Unpacking libxdot4:amd64 (2.42.2-6ubuntu0.1) ...
Selecting previously unselected package libgvc6-plugins-gtk.
Preparing to unpack .../5-libgvc6-plugins-gtk_2.42.2-6ubuntu0.1_amd64.deb ...
Unpacking libgvc6-plugins-gtk (2.42.2-6ubuntu0.1) ...
Selecting previously unselected package libgraphviz-dev:amd64.
Preparing to unpack .../6-libgraphviz-dev_2.42.2-6ubuntu0.1_amd64.deb ...
Unpacking libgraphviz-dev:amd64 (2.42.2-6ubuntu0.1) ...
Selecting previously unselected package libgtk2.0-bin.
Preparing to unpack .../7-libgtk2.0-bin_2.24.33-2ubuntu2.1_amd64.deb ...
Unpacking libgtk2.0-bin (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Selecting previously unselected package librsvg2-common:amd64.
Preparing to unpack .../8-librsvg2-common_2.52.5+dfsg-3ubuntu0.2_amd64.deb ...
Unpacking librsvg2-common:amd64 (2.52.5+dfsg-3ubuntu0.2) ...
Setting up libxdot4:amd64 (2.42.2-6ubuntu0.1) ...
Setting up librsvg2-common:amd64 (2.52.5+dfsg-3ubuntu0.2) ...
Setting up libgtk2.0-common (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Setting up libgtk2.0-0:amd64 (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Setting up libgvc6-plugins-gtk (2.42.2-6ubuntu0.1) ...
Setting up libgail18:amd64 (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Setting up libgtk2.0-bin (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Setting up libgail-common:amd64 (2.24.33-2ubuntu2.1) ...
Setting up libgraphviz-dev:amd64 (2.42.2-6ubuntu0.1) ...
Processing triggers for libc-bin (2.35-0ubuntu3.8) ...
/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libtbbbind.so.3 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libtbb.so.12 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libtcm_debug.so.1 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libur_loader.so.0 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libtbbbind_2_0.so.3 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libtbbmalloc.so.2 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libtbbbind_2_5.so.3 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libur_adapter_level_zero.so.0 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libhwloc.so.15 is not a symbolic link
```

```
/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libtbbmalloc_proxy.so.2 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libumf.so.0 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libtcm.so.1 is not a symbolic link

/sbin/ldconfig.real: /usr/local/lib/libur_adapter_opencl.so.0 is not a symbolic link

Processing triggers for man-db (2.10.2-1) ...
Processing triggers for libgdk-pixbuf-2.0-0:amd64 (2.42.8+dfsg-1ubuntu0.3) ...
```

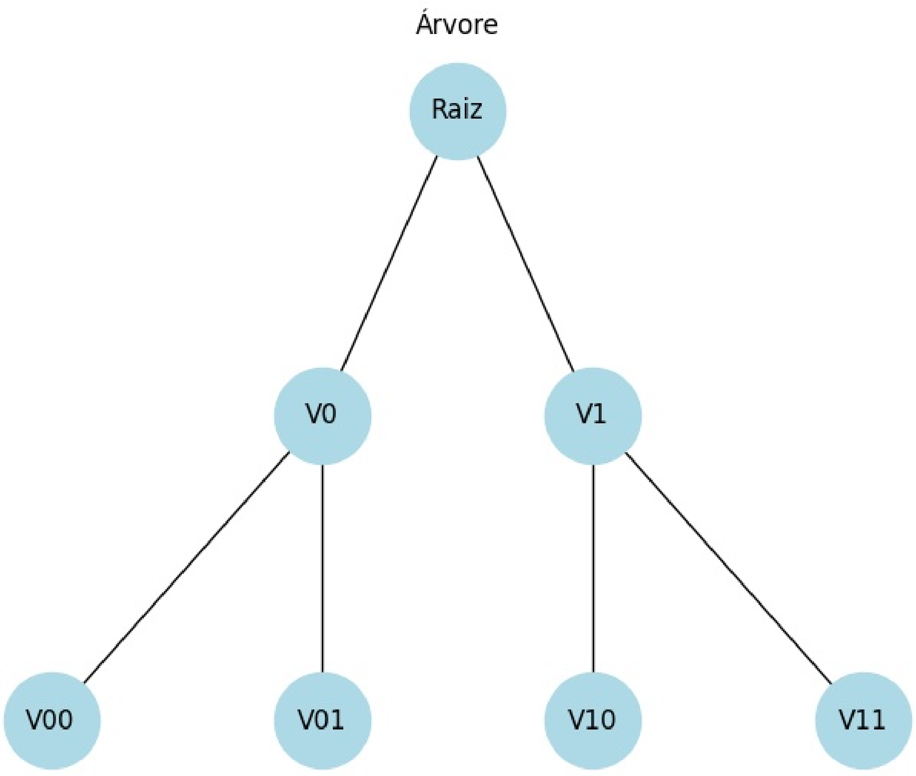
In [49]:

```
!pip install pygraphviz
```

```
Collecting pygraphviz
  Downloading pygraphviz-1.14.tar.gz (106 kB)
      0.0/106.0 kB ? eta -:--:--
      102.4/106.0 kB 5.0 MB/s eta 0:00:01
      106.0/106.0 kB 2.5 MB/s eta 0:00:00
  Installing build dependencies ... done
  Getting requirements to build wheel ... done
  Preparing metadata (pyproject.toml) ... done
Building wheels for collected packages: pygraphviz
  Building wheel for pygraphviz (pyproject.toml) ... done
  Created wheel for pygraphviz: filename=pygraphviz-1.14-cp311-cp311-linux_x86_64.whl size=169715 sha256=f14390c
439d5392467fd88984ab48a4782fedbedd9645b50445b3f203a39027e
  Stored in directory: /root/.cache/pip/wheels/9c/5f/df/6fffd2a4353f26dbb0e3672a1baf070c124a1d74a5f9318279
Successfully built pygraphviz
Installing collected packages: pygraphviz
Successfully installed pygraphviz-1.14
```

In [50]:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Criando uma árvore
T = nx.DiGraph()

# Adicionando vértices e arestas
T.add_edges_from([
    ('Raiz', 'V0'),
    ('Raiz', 'V1'),
    ('V0', 'V00'),
    ('V0', 'V01'),
    ('V1', 'V10'),
    ('V1', 'V11'),
])

# Desenhando a árvore
pos = nx.nx_agraph.graphviz_layout(T, prog='dot')  # Usando o layout do Graphviz
nx.draw(T, pos, with_labels=True, node_size=2000, node_color='lightblue', arrows=False)

# Mostrando a árvore
plt.title("Árvore")
plt.show()
```



In [ ]:

```
# Supondo que G seja o grafo definido anteriormente

# Função para encontrar a raiz, folhas, nós de entrada e saída
def graph_properties(G):
    # Identificar se o grafo é acíclico
    is_acyclic = []
    print(f"O grafo G é acíclico? {is_acyclic}")

    # Identificar a raiz (vértices com grau de entrada igual a zero)
    root = []
    print(f"Raiz do grafo: {root}")

    # Identificar as folhas (vértices com grau de saída igual a zero)
    leaves = []
    print(f"Folhas do grafo: {leaves}")

    # Calcular os graus de entrada e saída
    in_degrees = {}
    out_degrees = {}
    print(f"Graus de entrada: {in_degrees}")
    print(f"Graus de saída: {out_degrees}")

    return is_acyclic, root, leaves, in_degrees, out_degrees

properties = graph_properties(T)
```

```
O grafo G é acíclico? True
Raiz do grafo: ['Raiz']
Folhas do grafo: ['V00', 'V01', 'V10', 'V11']
Graus de entrada: {'Raiz': 0, 'V0': 1, 'V1': 1, 'V00': 1, 'V01': 1, 'V10': 1, 'V11': 1}
Graus de saída: {'Raiz': 2, 'V0': 2, 'V1': 2, 'V00': 0, 'V01': 0, 'V10': 0, 'V11': 0}
```

Melhor resolução:

In [59]:

```
import networkx as nx

# Supondo que T seja o seu grafo, aqui vai a função para calcular as propriedades
def graph_properties(G):
    # Identificar se o grafo é acíclico
    is_acyclic = nx.is_directed_acyclic_graph(G)  # Verifica se o grafo é acíclico
    print(f"O grafo G é acíclico? {is_acyclic}")

    # Identificar a raiz (vértices com grau de entrada igual a zero)
    root = [node for node in G.nodes if G.in_degree(node) == 0]
    print(f"Raiz do grafo: {root}")

    # Identificar as folhas (vértices com grau de saída igual a zero)
    leaves = [node for node in G.nodes if G.out_degree(node) == 0]
    print(f"Folhas do grafo: {leaves}")

    # Calcular os graus de entrada e saída
    in_degrees = dict(G.in_degree())
```

```
    out_degrees = dict(G.out_degree())
    print(f"Graus de entrada: {in_degrees}")
    print(f"Graus de saída: {out_degrees}")

    return is_acyclic, root, leaves, in_degrees, out_degrees

# Supondo que T seja o seu grafo
properties = graph_properties(T)

#AndreMouraL
```

```
O grafo G é acíclico? True
Raiz do grafo: ['Raiz']
Folhas do grafo: ['V00', 'V01', 'V10', 'V11']
Graus de entrada: {'Raiz': 0, 'V0': 1, 'V1': 1, 'V00': 1, 'V01': 1, 'V10': 1, 'V11': 1}
Graus de saída: {'Raiz': 2, 'V0': 2, 'V1': 2, 'V00': 0, 'V01': 0, 'V10': 0, 'V11': 0}
```

- ***Identificando nós folha***: Para identificar os nós folha em um grafo usando a biblioteca NetworkX em Python, utilizamos a seguinte linha de código:

```
leaves = [node for node, deg in G.out_degree() if deg == 0]
```

A linha de código em questão cria uma lista dos nós folha de um grafo `G`. Os nós folha são aqueles que não têm arestas saindo deles. Vamos decompô-la:

- `G.out_degree()`: Este método retorna um conjunto de pares (nó, grau de saída) para todos os nós no grafo `G`. O "grau de saída" é o número de arestas que saem de um nó.
- `[node for node, deg in G.out_degree() if deg == 0]`: Esta é uma compreensão de lista, uma forma concisa de construir uma lista em Python. O que ela faz é:
    - Iterar sobre cada par `(nó, grau de saída)` gerado por `G.out_degree()`.
    - Checar se o grau de saída (`deg`) é `0`, o que significa que não há arestas saindo desse nó.
    - Se o grau de saída for `0`, incluir o `nó` na lista `leaves`.

Portanto, `leaves` será uma lista contendo todos os nós do grafo `G` que são nós folha.

- ***Identificando a raiz***: Para identificar a raiz em um grafo usando a biblioteca NetworkX em Python, utilizamos a seguinte linha de código:

```
root = [node for node, deg in G.in_degree() if deg == 0]
```

A linha de código em questão cria uma lista dos nós raiz de um grafo `G`. Os nós folha são aqueles que não têm arestas entrando neles. Vamos decompô-la:

- `G.in_degree()`: Este método retorna um conjunto de pares (nó, grau de entrada) para todos os nós no grafo `G`. O "grau de entrada" é o número de arestas que entrasm em cada nó.
- `[node for node, deg in G.in_degree() if deg == 0]`: Esta é uma compreensão de lista, uma forma concisa de construir uma lista em Python. O que ela faz é:
    - Iterar sobre cada par `(nó, grau de entrada)` gerado por `G.in_degree()`.
    - Checar se o grau de entrada (`deg`) é `0`, o que significa que não há arestas entrandonesse nó.
    - Se o grau de entrada for `0`, incluir o `nó` na lista `root`.

Portanto, `root` será uma lista contendo todos os nós do grafo `G` que são nós raiz.

- ***Calculando Graus de Entrada e Saída em um Grafo***: Para calcular os graus de entrada e saída de cada nó em um grafo utilizando a biblioteca NetworkX, usamos as seguintes linhas de código:

```
in_degrees = {node: deg for node, deg in G.in_degree()}
out_degrees = {node: deg for node, deg in G.out_degree()}
```

`G.in_degree()`: Este método retorna um iterador sobre os pares (nó, grau de entrada) para todos os nós no grafo `G`. O grau de entrada é o número total de arestas direcionadas para um nó.

`G.out_degree()`: Este método retorna um iterador sobre os pares (nó, grau de saída) para todos os nós no grafo `G`. O grau de saída é o número total de arestas que saem de um nó.

`{node: deg for node, deg in G.in_degree()}`: Esta é uma dictionary comprehension que cria um dicionário `in_degrees`, onde cada chave é um nó do grafo, e seu valor é o grau de entrada desse nó.

`{node: deg for node, deg in G.out_degree()}`: De forma semelhante, cria um dicionário `out_degrees`, onde cada chave é um nó do grafo, e seu valor é o grau de saída desse nó.

O código fornecido utiliza a biblioteca NetworkX para identificar nós folha e raiz em grafos direcionados, além de calcular os graus de entrada e saída de cada nó. Para identificar nós folha, ele verifica aqueles com grau de saída igual a 0, e para identificar a raiz, ele verifica os nós com grau de entrada igual a 0. Também é mostrado como calcular os graus de entrada e saída de todos os nós utilizando compreensões de listas e dicionários. Em grafos não direcionados, o código pode ser ajustado para usar degree() em vez de in_degree() ou out_degree().