Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Engenharia de Computação

- Álgebra Linear -

Conjuntos Convexos e Programação Linear

Adriel Araújo
André Neves
Bianca Vilanova
Leonam Vasconcelos
Matheus Tavares
Maycon Carvalho

18 de Junho de 2018

1 Resumo

A medida que a ciência evolui, surgem vários problemas relacionados à previsão de estados futuros em sistemas que variam com o tempo, como a produção em massa de certo produto ou a venda do mesmo. Algumas ferramentas matemáticas foram desenvolvidas para suprir tal necessidade, como o cálculo diferencial que conta com artifícios precisos o suficiente para garantir alta previsibilidade nas variáveis de um sistema de incógnitas e modelos conhecidos. Porém, nem todo problema requer um ferramental tão avançado quanto o cálculo para se obter um resultado aceitável, ou porque a margem de erros é alta o suficiente para permitir tal flexibilidade, ou porque os modelos são relativamente simples ou ambos.

Nesse trabalho, abordaremos algoritmos de resolução de problemas de otimização onde as equações que modelam o sistema são todas lineares, e portanto, podem ser manipuladas por métodos conhecidos por programas lineares, como o método gráfico e o algoritmo simplex, que maximizam ou minimizam uma dada função linear, de acordo com a necessidade e as restrições impostas à mesma. Também faremos uma abordagem aos conjuntos convexos e como tais conjuntos se relacionam com problemas de otimização linear.

2 Introdução

Na indústria e em vários outros processos científicos, um dos objetivos mais básicos é a otimização de sistemas, a fim de se obter algum benefício com tal ação. Vários métodos foram desenvolvidos para que possamos obter o melhor ou um dos melhores valores dentro de um conjunto de possibilidades. Alguns métodos desenvolvidos, envolvem a programação linear.

Um Programa Linear é um problema de otimização em que a função que se quer otimizar é linear e está sujeita a restrições em seu domínio, ou seja, nesses problemas pretende-se determinar o ótimo da função linear num conjunto convexo (um conjunto de $\mathbb{R}^2$ X diz-se convexo se dados dois qualquer pontos de X o segmento de reta que os une está contido em X) que resulta da interseção de inequações lineares. Geralmente, as funções que estão sujeitas à otimização são dadas na forma de desigualdade ou inequações, assim:

- Um produto X tem um lucro de A e um produto Y tem um lucro B;
- Cada grupo produzido do produto X tem um custo a para ser produzido e cada grupo do produto Y tem um custo b; e a empresa tem um orçamento mensal destinado à produção de p;
- Cada lote de X leva n dias para ser produzido enquanto cada lote de Y leva m dias; A fábrica tem k dias disponíveis para produção.

Passando os dados acima para a forma de inequação, temos:

- $Ax + By$ representa o lucro da produção de uma quantidade x de lotes do produto X e y do produto Y;
- $ax + by \leq p$ para x lotes de X e y lotes de Y;
- $nx + my \leq k$ para x lotes de X e y lotes de Y.

Nesse tipo de problema, as funções que modelam o sistema são todas lineares, e as soluções são vetores do $\mathbb{R}^n$.
Num Programa Linear, a otimização poderá ser maximação ou minimização da função objetivo, e as restrições das inequações podem ser do tipo $\leq$, $=$, $\geq$. As variáveis reais só podem assumir valores positivos, uma vez que na modelagem do problema em questão, elas não assumiriam valores negativos por causa da natureza do problema.

As áreas onde se aplicam a Programação Linear são grandes, podendo citar-se fundamentalmente os seguintes:

- *Gestão de empresas* no qual querem determinar as quantidades a produzir dos diferentes produtos da empresa de acordo com os recursos disponíveis, as condições tecnólogicas existentes e a situação do mercado;
- *Problemas de transportes*, conhecido como o custo de transporte de uma unidade de produto de cada origem para cada destino, com o objetivo de determinar um plano de distribuição que torna mínimo o custo total do transporte;
- *Trim-Loss* determinado número de unidades a cortar, com determinadas dimensões de modo a minimizar os desperdícios envolvidos face às dimensões da produção. Exemplos: indústria de papel, siderúrgica, têxtil, etc;

- *Estrutura financeira dos bancos* no qual se pretende estabelecer uma estrutura no qual maximiza o lucro total, sabendo que devem ser respeitados os condicionalismos legais e de gestão que asseguram o equilíbrio financeiro;

- *Problemas de Mistura* pretende-se obter, com custo mínimo ou lucro máximo, um ou vários produtos através de vários ingredientes possuidores em grau diferente dessas características técnicas.

3 Definições

Neste tópico, trataremos de algumas definições importantes para o bom entendimento do conteúdo tratado nesse artigo.

3.1 Função objetivo

É uma função linear sobre a qual recai a intenção de minimização ou de maximização. Desta forma, chamamos de função objetivo aquela função que pretendemos otimizar.

3.2 Restrições

As restrições são uma forma de matematizar os problemas relacionados à possibilidade de criação de uma solução. Desta forma, as restrições observam os problemas relacionados à disponibilidade de recursos, às regras legais ou éticas em relação a criação.

Tipos de restrições:

- Não negatividade: A restrição de não negatividade é uma restrição que procura impedir que as variáveis assumam valores negativo. Esta restrição é de grande importância, já que vários problemas relacionados ao mundo real não permite que determinadas variáveis assumam com valores negativos. **Ex.:** Sistemas que variam com o tempo.

- Restrições relacionadas ao próprio problema, ou seja, soluções dos campos prático e teórico que impliquem proibições para a aplicação das futuras soluções. Neste ponto, é necessário que uma lista com todas as restrições relacionadas à esse problema seja elaborada para que cada solução encontrada seja analisada e aplicada de acordo com o problema. **Ex.:** Uma reação química não atinge temperaturas acima de X$°C$.

3.3 Variável de *slack* (variável de folga):

É a variável que utilizamos para transformar uma inequação em uma equação.

$$x > 5$$

Observando a inequação acima, pode-se fazer:

$$\begin{gathered} x = z \\ x - z = 0 \\ \text{se } z > 5 \end{gathered}$$

Desta forma, z é nossa variável *slack* e, com ela, conseguimos transformar uma inequação em uma equação através dessa variável.

3.4 Variáveis de decisão:

São os valores procurados que substituídos na função objetiva geram a solução otimizada. Esses valores são dados por $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$.

3.5 Forma canônica:

Forma normal e clássica de representar certa relação. Desta foma, um modelo de programação linear na forma canônica demonstra as seguintes características:

- Todas as variáveis são não negativas;
- Todas as desigualdades são do tipo:

$$by \leq c$$

Se b e c constantes.

  Essa regra encontra uma exceção apenas quando as restrições são referentes a característica de não negatividade.

- A otimização buscada é a maximização da função objetivo.

3.6 Forma padrão:

A forma padrão de um problema de programação linear obedece algumas regras, ou seja, possui algumas características que devem ser mantidas:

- Todas as variáveis devem ser não negativas;
- Todas as restrições devem ser lineares, exceto aquelas que dizem respeito a negatividade que não deve existir na função;
- Os temos independentes das inequações de restrição devem ser não negativos;
- Diferente da forma canônica, não importa aqui se será maximização ou se será minimização da função objetivo.

3.7 Solução possível ou admissível:

Uma solução possível é qualquer solução que otimize ou não a função, mas que obedeça as restrições.

- Observação: Normalmente existem infinitas soluções possíveis.

3.8 Solução ilimitada:

Uma solução ilimitada é aquela que a função objetivo pode pode crescer ou decrescer indefinidamente atendendo todas as restrições do problema, e portanto, não existe um valor máximo ou mínimo finito para a função objetivo.

3.9 Solução ótima:

Uma solução ótima é uma solução que otimiza a função objetivo no interior de um conjunto de possíveis soluções.

- Observação: podem existir uma, várias ou infinitas soluções ótimas.

3.10 Solução impossível:

Uma solução impossível é aquela que não possui nenhum ponto que obedeça ao conjunto de restrições.

3.11 Programa linear

É um problema de otimização em que a função que se pretende otimizar, função objetivo, é linear e está sujeita a restrições, geralmente inequações lineares, que redefinem o seu domínio. Ou seja, num problema de Programação Linear pretende-se determinar o ótimo de uma função linear num conjunto convexo.

3.12 Função convexa

Supondo que seja possível passar uma corda do ponto A da figura abaixo até o ponto B, se essa corda permanecer acima do gráfico da função em toda a sua extensão essa função é convexa.

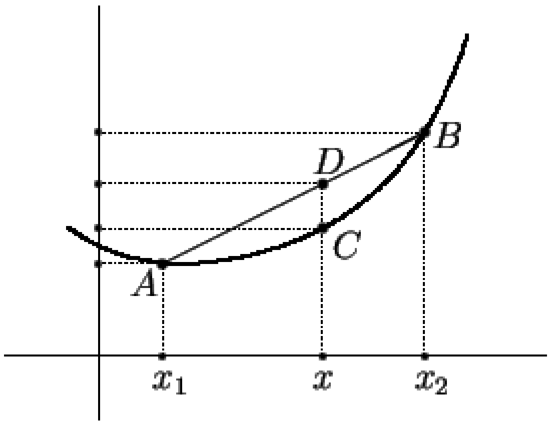

Figura 1: Gráfico genérico de uma função convexa

Ou seja, o ponto D observado no gráfico deve estar sempre acima do ponto C.

3.13 Politopo

- Poliedro convexo: Um poliedro é um conjunto convexo fechado definido como: intersecção finita de semi-espaços fechados, que pode ou não ser limitado.
- Definição politopo: Um poliedro limitado é chamado de politopo.
- Generalização da definição: Um politopo convexo é um invólucro de pontos definido pela intersecção de vários semi-espaços que restringem o domínio desse poliedro. Também pode ser chamado de invólucro convexo que contem uma quantidade finita de pontos em R^n.
- Desta forma, afirma-se que um conjunto de soluções válidas de um problema de programação linear é chamado de poliedro convexo.

4 Conjuntos convexos

O conjunto das soluções viáveis para um programa linear é um conjunto convexo. Se um conjunto S é convexo, para todo par de pontos P_1 e P_2 tais que $P_1, P_2 \in S$, o segmento t que os une é tal que $t \in S$.

4.1 Conjuntos convexos em $\mathbb{R}^n$

Exemplos de conjuntos convexos e não convexos na Figura 2 e Figura 4:

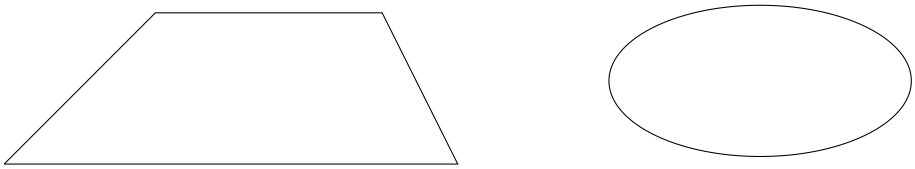

Figura 2: Conjuntos convexos

É possível observar que nos conjuntos convexos, qualquer reta entre dois pontos do conjunto, está contida dentro do próprio conjunto, como mostra a Figura 5

O mesmo não acontece para todos pontos de um conjunto não convexo, como pode ser visto na Figura 6

Figura 3: Caption

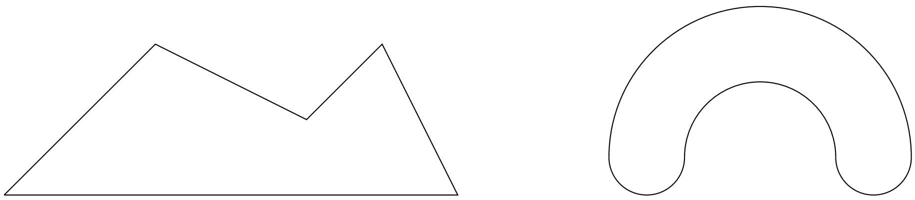

Figura 4: Conjuntos não convexos

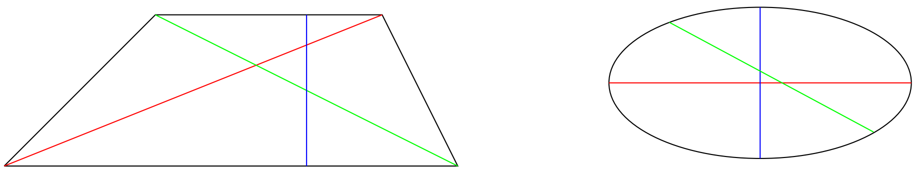

Figura 5: Retas entre pontos de conjuntos convexos

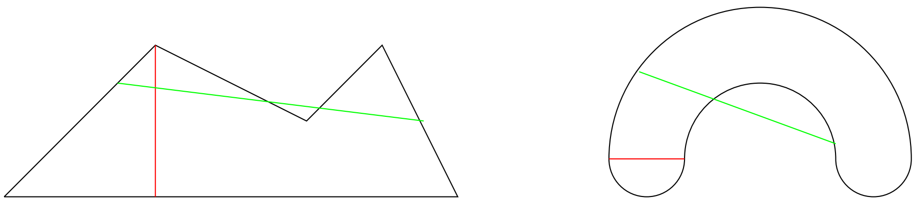

Figura 6: Retas entre pontos de conjuntos não convexos

Em programação linear, cada restrição define uma região do espaço que chamamos de semiespaço. Definiremos a seguir hiperplano e semiespaço.

Definição 1. *(Hiperplano). Seja X um conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in X$, existem a_i e b, com pelo menos um a_i diferente de zero.*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

Então, X é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1. *Retas são hiperplanos em $\mathbb{R}^2$, e planos são hiperplanos em $\mathbb{R}^3$.*

Definição 2. *(Semiespaço). Em $\mathbb{R}^n$, um semiespaço é a região de um dos lados de um hiperplano. Em outras palavras, são os pontos $\boldsymbol{x}$ tais que*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b$$

Para determinados a_i, $b \in \mathbb{R}$

Exemplo 2. *As soluções para qualquer desigualdade em $\mathbb{R}^n$ definem um semiespaço.*

Exemplo 3. *Seja a desigualdade $y > 4x$. O semiespaço definido por suas soluções são mostrados na Figura 7*

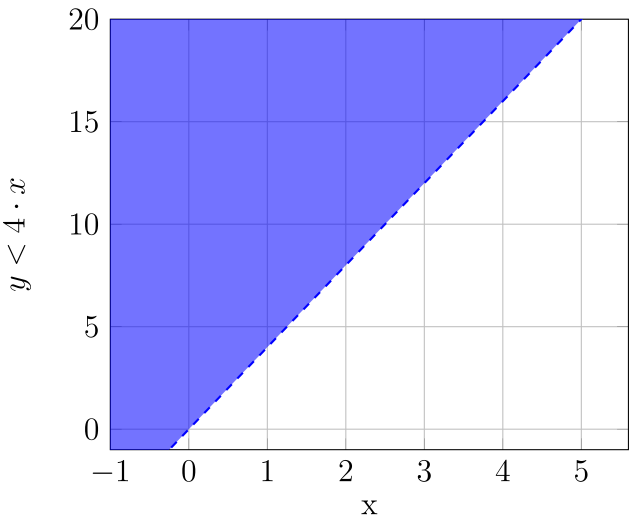

Figura 7: Semiplano $y > 4x$

Semiespaços são conjuntos convexos. Pelo exemplo 3, é possível enxergar que todas retas entre pontos do lado esquerda da reta também estarão nesse mesmo lado.

Teorema 1. *Sejam $S_1, S_2, ..., S_n$ conjuntos convexos. Então qualquer novo conjunto resultante de qualquer relação de intersecção também é um conjunto convexo.*

5 Programação linear

A Programação Linear é uma estrutura de solução de problemas de otimização, que usa de equações e inequações lineares para encontrar soluções viáveis para função objetivo.

$$Z = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 \tag{1}$$

A equação (1) é um exemplo de **Função Objetivo**, onde nossa meta é maximizar ou minimizar o valor de **Z**.

São partes de um problema de programação linear:

1. **Função objetivo:** Conjunto de soluções viáveis.

2. **Variáveis de Decisão:** Variáveis que acompanham os valores do problema. Ex: x_1 e x_2

$$Z = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2$$

3. **Restrições:** Conjunto de inequações que restringe o conjunto de soluções viáveis. Ex: (onde l_1,l_2 e l_3 representam constantes e "limites"nas restrições)

$$\begin{gathered} a_{1.1} \cdot x_1 + a_{2.1} \cdot x_2 + ... + a_{n.1} \cdot x_n \leq l_1 \\ a_{1.2} \cdot x_1 + a_{2.2} \cdot x_2 + ... + a_{n.2} \cdot x_n \leq l_2 \\ a_{1.3} \cdot x_1 + a_{2.3} \cdot x_2 + ... + a_{n.3} \cdot x_n \leq l_3 \end{gathered}$$

As condições impostas ao programa linear podem também ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

5.1 Exemplo de problema de otimização

A programação linear, torna possível a solução de problemas de otimização utilizando de diversas ferramentas, uma das formas mais comuns de representar o conjunto de soluções viáveis para o sistema de soluções criados da programação linear é o método gráfico.

Exemplo:

A empresa A, conhecida no ramo de computadores, quer saber qual a quantidade ótima de fabricação de duas de suas mercadorias. Para tal, a empresa precisa de 2 componentes, o componente c_1 e o componente c_2. Ambos os componentes estão em falta no mercado, e a empresa só encontrou 60 unidades do componente c_1 e 100 unidades do componente c_2. Um computador, fabricado com 4 unidades do componente c_1 e 5 unidades do componente c_2, vende por R$4.000,00. Um notebook, fabricado com 2 unidades do componente c_1 e 4 unidades do componente c_2, vende por R$3.000,00.

5.2 Resolvendo problemas

Passo a passo de como montar um sistema de programação linear:

Tomando como exemplo o programa linear citado no início da seção, será mostrado o procedimento para resolução

1. De.finir quais são as variáveis de decisão, que representam as possibilidades de escolha:

$$x_1 = \text{Computadores}$$
$$x_2 = \text{Notebooks}$$

2. Definir a função objetivo, que nesse caso representa o lucro obtido. A função deve ser maximizada:

$$Z = 4.000 \cdot x_1 + 3.000 \cdot x_2$$

3. Definir as condições de restrição do problema:

$$c_1 \longrightarrow 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 60$$
$$c_2 \longrightarrow 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 100$$

4. Definir as condições de não negatividade, que indicam que a quantidade de computadores e notebook não podem ser negativas:

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Após definir todos os componentes do problema, basta utilizar um dos métodos para gerar o conjunto de soluções do sistema.

Uma solução é qualquer vetor candidato a solucionar o problema, podemos encontrar dois tipos de soluções ao resolver esse sistema, são elas:

- **Soluções viáveis:** solução que satisfaz TODAS as restrições.
- **Soluções inviáveis:** solução que viola pelo menos uma das restrições.

5.3 Conjuntos convexos e soluções viáveis de programas lineares

Teorema 2. *O conjunto de soluções viáveis para um programa linear é fechado, convexo e limitado por baixo.*

Demonstração: Pela restrição $x \geq 0$, o conjunto é limitado por baixo. Além disso, o conjunto é a interseção dos semiespaços definidos pelas restrições do problema e pela restrição de não negatividade. Como os semiespaços são convexos e fechados, S também é.

Teorema 3. *Se S é um conjunto de soluções viáveis para um programa linear, e existe uma solução ótima, existe um ponto extremo em S com o valor ótimo.*

Isso implica que a busca de soluções ótimas deve ser feita com avaliação dos vértices do conjunto de restrição.

6 Métodos para resolução de programas lineares

6.1 Método gráfico

O método gráfico, é uma maneira simples de resolver problemas de otimização que contém restrições simples o suficientes para serem computadas de forma analítica.

Essa forma de análise consiste basicamente em plotar a equação que desejamos otimizar, assim como as restrições para as mesmas. De acordo com o tipo de otimização, seja ela uma maximização ou minimização, buscaremos os pontos específicos de intersecção entre as curvas obtidas atentando-se à região de intersecção de todas as retas.

Exemplo 4. *Demonstração do algoritmo para obtenção do melhor estado em um processo utilizando-se o método gráfico.*

Seja um programa linear definido da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } z = y - 8x$$

Sujeito a:

$$\begin{gathered} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y - 20x \geq 15 \\ y + 30x \geq 160 \\ y - 5x \leq 150 \end{gathered}$$

Passos para resolução:

1. Plotar todas as equações que modelam as restrições e condições do problema analizado.

   - Observe que existe uma região limitada pelas curvas plotadas que obedece as inequações iniciais. Essa região do plano é chamada de **Região Factível** ou **Região Viável**.

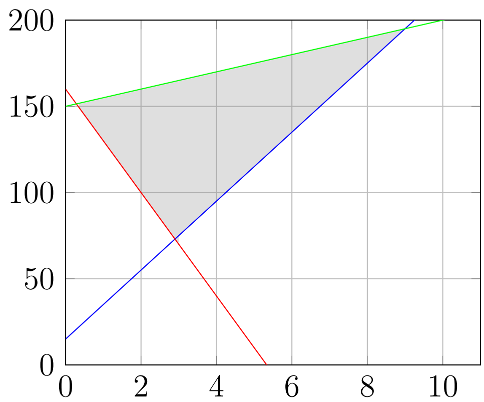

Figura 8: Semiespaço definido pela interseção entre as inequações lineares de restrição.

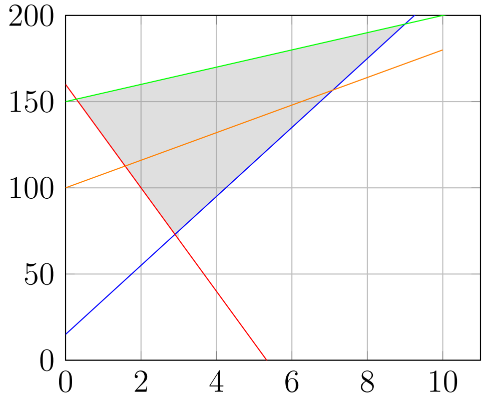

Figura 9: Semiespaço definido pela interseção entre as inequações lineares de restrição e a função objetivo com valor igual a 100.

2. Buscar, com auxílio do gráfico, a melhor solução para a **Função Objetivo**, que seja viável.

   Para esse passo é necessário atribuir um valor inicial para **z**. Supondo **z = 100**, a função objetivo passará a ter a forma $y - 8x = 100$, uma reta que representa as possíveis combinações das variáveis de decisão. A reta está visível na Figura 2

3. Realizar iterações com aumento do valor da função objetivo, até que a reta definida esteja na iminência de sair da região de soluções viáveis. É possível perceber na Figura 10 que a reta ainda está imersa em grande parte da região.

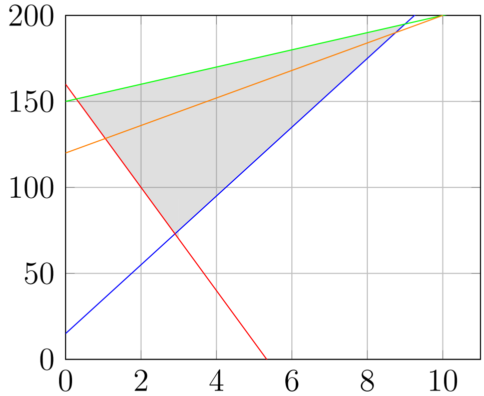

Figura 10: Função objetivo com $z = 120$

Já na figura 11, a função objetivo foi otimizada (z = 140), porém ainda não atingiu o vértice da região.

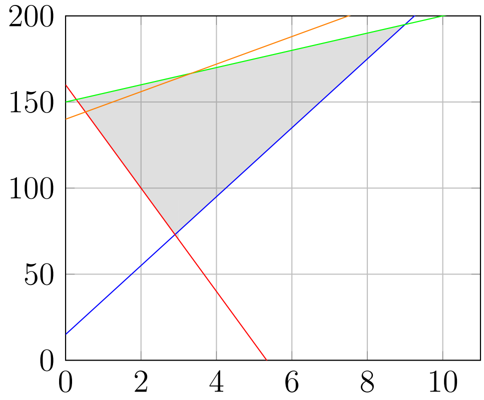

Figura 11: Função objetivo com $z = 140$

Na figura 12, a função objetivo atingiu o maior valor possível dentro do conjunto das soluções viáveis, de modo que um incremento nesse valor tornaria impossível atingi-lo sem desrespeitar as restrições impostas. Com isso, conclui-se que a função objetivo maximizada atinge aproximadamente esse valor.

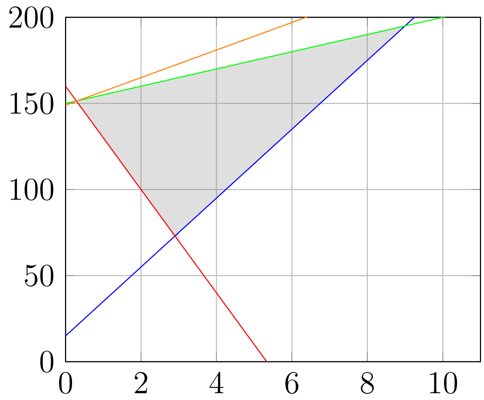

Figura 12: Função objetivo com $z = 149$

6.2 Método simplex

Antes de passar para o método em si, segue a explicação de alguns termos para formalização e bom entendimento do conteúdo apresentado a segui.

6.2.1 Definições importantes:

- Restrições
  O método simplex segue restrições básicas, essas restrições são citadas a seguir:
  - Não negatividade (Definido na seção de Definições).
  - Todas as variáveis do lado direito das restrições devem ser não negativas, ou seja, as variáveis independentes precisam ser constantes reais não negativas.
- Limite de restrição: é uma reta, plano ou hiperplano que limita uma função de seguir por uma determinada região.

- Solução em ponto extremo: São soluções formadas por intercessões. Se observamos a Figura 12, veremos extremos viáveis (dentro do limite das restrições, ou seja, nas bordas da região escura) e inviáveis (fora do escopo das restrições na parte branca externa a da região escurecida).

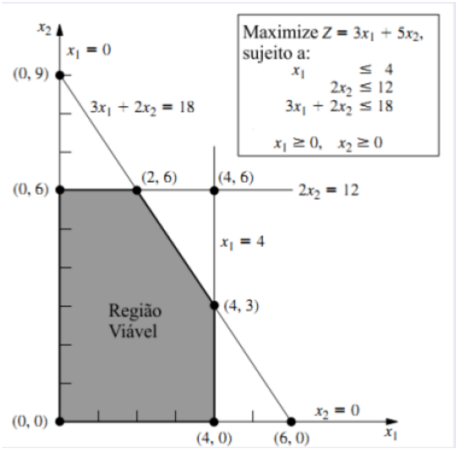

Figura 13: Imagem de demonstração de uma região viável formada por pontos extremos viáveis, extremos inviáveis e por limites de restrição.

- Se existe um número n de variáveis de decisão (termo definido na seção de Definições), cada solução de ponto extremo deve estar na intercessão de uma quantidade n de restrições. Caso em um ponto haja mais que n restrições dizemos haver existência de restrições redundantes.
- Soluções adjacentes:
  - Duas soluções são ditas adjacentes se são conectadas por um segmento de reta, plano ou hiperplano.
  - Duas soluções de ponto extremo viáveis adjacentes são soluções que compartilham n-1 restrições, ou seja, apenas uma restrição não é compartilhada por ela.

6.2.2 Conceitos chaves

- O método em pauta, sempre se interessa, ou melhor, concentra seus esforços, em soluções de ponto extremo que, claro, são viáveis. Desta forma, para encontrar uma solução ótima, devemos procurar a melhor solução de ponto extremo que atenda as restrições do problema, ou seja, que são viáveis.
- O número de pontos extremos viáveis é dado por uma combinação N x M, tal que N número de variáveis e M número de restrições.
- A preferencia de inicialização das iterações pela origem.
- Na ausência de uma solução viável adjacente melhor, chamamos a solução viável de ótima.

6.2.3 Algoritmo para o simplex:

1. Encontrar uma solução de ponto extremo viável.
2. Testar se a solução é ótima.
   - Se sim - Pare e retorne a solução.
   - Se não - Continue a iteração.
3. Procurar outra solução melhor que a primeira e voltar ao passo 2.

6.3 Critérios para procura de soluções ótimas

- A busca por uma solução melhor dá preferencia a uma solução que seja adjacente a atual, ou seja, a busca, normalmente, ocorre pelos lados da região viável.
- O método sempre procura por um coeficiente de maior ganho para se deslocar para outra solução de ponto extremo. Desta forma, o teste de otimalidade é testar se há ou não um lado de maior ganho para a função objetivo.

6.4 Observação geométrica:

Para que seja encontrada uma solução válida, é necessário andar pelos vértices de um politopo (conceito discutido na área de definições) que representa a região viável, até conseguir chegar a um vértice ótimo.

6.5 Conversão:

O simplex exige um adequação do problema para se adequar ao modelo do método.

- É necessário converter as restrições em forma de inequação para restrições na forma de igualdades, que sejam equivalente. Esse tipo de conversão utiliza as variáveis de slack (que definimos na seção de Definições). Desta forma, vamos transformar o sistema de inequações restritivas em equações lineares. Esse processo transforma um problema de programação linear natural para um problema na forma padrão.

6.5.1 Tipos de soluções do Método Simplex

- Solução aumentada: É a solução que foi aumentada pelos valores atribuídos as variáveis de folga
- Solução básica:// É uma solução de ponto extremo aumentada
- É uma solução de ponto extremo aumentada que satisfaz as restrições.

6.5.2 Tipos de variáveis:

- Básicas: São aquelas que estão contidas dentro do número de restrições funcionais, ou seja, são as variáveis slack que usamos para transformar inequações em equações.
  Os valores das variáveis básicas são obtidas através das soluções de equações obtidas pelo processo de transformação para a forma aumentada.
- Não básicas: Aquelas que compõem a própia função antes da conversão. Essas variáveis são configuradas em 0.

6.5.3 Teste de otimalidade

O teste inicia definindo as variáveis não básicas como 0 e isso faz com que a função seja igual a zero. Logo depois,fazemos o teste:
A ideia do teste é bem simples, ele testa se aumentando o valor de qualquer das variáveis não básicas na função objetivo ela cresce e ultrapassa o valor da solução atual, ou seja, a solução testada, e se a resposta for positiva é porque essa solução não é a ótima. Contudo, esse teste gera uma pergunta importante:

Para onde devo deslocar para encontrar uma solução melhor até que esta seja a ótima?

6.5.4 Direção do sentido de deslocamento

Tendo em vista uma função qualquer que precisa ser otimizada e que obedece as especificações do método, a busca de um sentido para o deslocamento da função visa comparar as variáveis não básicas presentes na função visando obter o maior resultado para a função. Desta forma, a pergunta feita é:

Qual das variáveis não básicas da função objetivo que ao ser aumentada traduz um maior valor para a função?

A variável que apresenta a maior vantagem, ou seja, o maior valor de crescimento para a função objetivo é a escolhida. Essa escolha pode se dar devido as constantes que estão multiplicando as variáveis.

6.5.5 Critérios de interrupção

Após descobrir que aumentar uma certa variável aumenta o valor final da função objetivo, resta outra uma dúvida:

Até quando incrementar essa variável?

A ideia é deixar as outras variáveis como sendo zero e observar as restrições. Desta forma, aumenta-se uma única variável não básica mantendo as outras sem alteração e corrigir as variáveis básicas necessárias para preservar as restrições.

Restrições:

1. Restrições de limite máximo ou mínimo;
2. Restrição de não negatividade;
3. Outras restrições associadas ao problema.

Ao efetuarmos esses passos simultaneamente, variáveis básicas passarão a ser não básicas e vice-versa até que de fato a solução ótima seja encontrada com sucesso. Esse processo é feito com a entrada e saída de variáveis da equação que será testada no teste de otimalidade.

Uma variável que se torna básica, não será mais presente na função objetivo, a equação de restrição deve ser modificada para que o coeficiente da nova básica seja 1 e a antiga básica que a acompanha deve ser incluída na função testada. Esse processo ocorre substituindo a antiga não básica pelo valor que a equação de restrição modificada impõe a ela.

Esse processo executado simultaneamente, várias vezes acaba por produzir, uma solução que sempre está mais próxima da ótima viável, até que, por fim, ela seja a ótima.

7 Referências

1. BOLDRINI, COSTA; FIGUEIREDO, WETZLER. Álgebra linear. 3.ed. São Paulo: Harper Row do Brasil, 1986.

2. PELLEGRINI; Jerônimo C. Notas de Aula. Versão 64. disponível em :<http://www.pucrs.br/ciencias/viali/especializa/po_famat/material/textos/pl.pdf > Acesso em 22 de junho de 2018.

3. KUMAR, D Nagesh. Linear Programming-Graphical Method. disponível em: <http://www.nptel.ac.in/courses/105108127/pdf/Module_3/M3L2slides.pdf> Acesso em 22 de junho de 2018.

4. SILVA, Adriana Batista da; O método simplex e o método gráfico na resolução de problemas de otimização. 2016. 86f. Dissertação de mestrado - Universidade Federal de Goiás, Goiás. 2016.

5. MATOS, Cati; SANTOS, Daniela; SALGADO Diana; MARTINS, Alice; GOUVEIA Maria Celeste. Programação Linear: Fundamentos e Ensino de Álgebra.Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2005/Programacao20Linear.pdf>. Acesso em 20 de junho de 2018.

6. OLIVEIRA, João Henrique de. Otimização 1 - O método Simplex. Material disponibilizado pelo professor.

7. OLIVEIRA, João Henrique de. Otimização 1 - Programação Linear. Material disponibilizado pelo professor.

8. GOLVEIA, João. Polígonos, Poliedros e Polítopos - Teorema de Yannakakis. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jgouveia/delfosMar2012.pdf>. Acesso em 22 de julho de 2018.

9. BRIETZKE, Eduardo H. M. Funções Convexas . Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/conv/conv.html>. Acesso em 22 de julho de 2018.