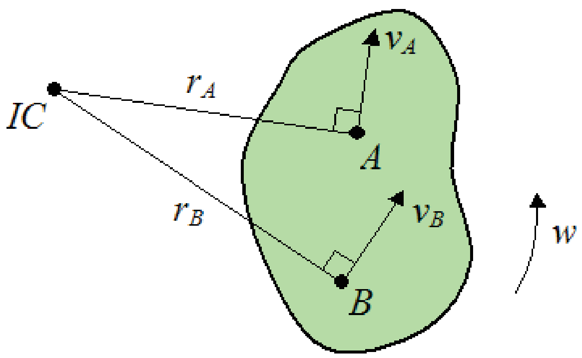
Wykład 4

Sterowanie modelem rowerowym samochodu

4.1 Chwilowy środek obrotu

Definicja 4.1 *Chwilowym środkiem obrotu (instantaneous center of rotation, ICR) nazywamy punkt figury płaskiej lub przestrzeni, który ma zerową prędkość w danej chwili. W chwili tej wszystkie punkty figury obracają się z taką samą prędkością kątową wokół ICR.*

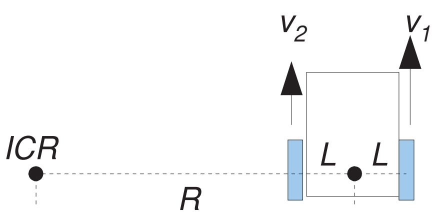


Uwaga 4.1 *Dla robotów:*

- *nieholonomicznych — ICR leży zawsze na linii prostej (linia prosta jest ograniczeniem),*
- *holonomicznych — ICR może być dowolnym punktem na płaszczyźnie (nie ma ograniczeń).*

Przykład 4.1 *Dla napędu różnicowego mamy (prędkości kątowe kół są takie same):*

$$\begin{cases} v_1 = \omega\,(R + L) \\ v_2 = \omega\,(R - L) \end{cases}$$



gdzie: R — promień obrotu wokół punktu ICR, L — odległość kół od punktu P. Rozwiązanie:

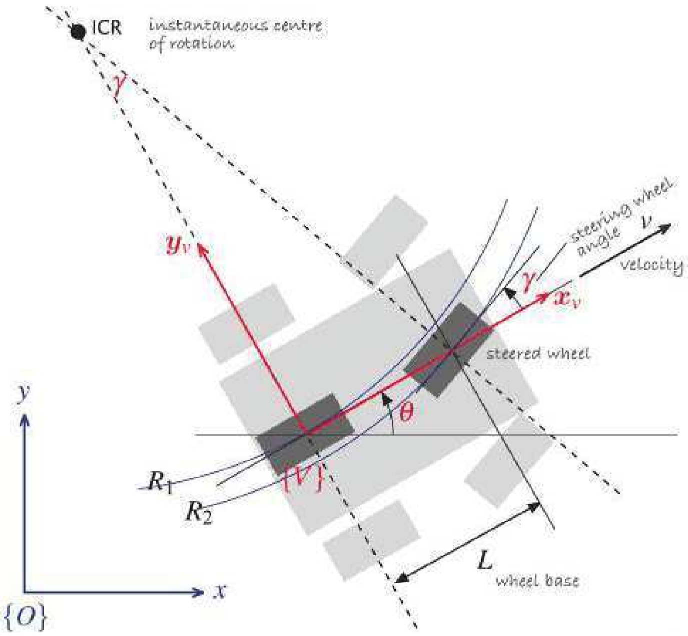
$$R = L\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}, \quad \omega = \frac{1}{2L}\,(v_1 - v_2)$$

Przypadki szczególne:

- $v_1 = v_2$, $R = \infty$ — *punkt ICR leży w nieskończoności, robot porusza się do przodu,*
- $v_1 = -v_2$, $R = 0$ — *punkt ICR leży w punkcie P, robot obraca się.*

4.2 Równania ruchu

- model rowerowy samochodu



- równania ruchu

$$\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ \frac{v}{L}\tan\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ \frac{v}{L}\tan\gamma \end{bmatrix}$$

gdzie: v [m/s] — prędkość, γ [rad] — skręt kierownicy, L [m] — długość pojazdu[1]

- oznaczamy 3 zmienne stanu i 2 sterowania (uwaga: równania są już pierwszego rzędu)

$$\begin{array}{ll} x_1(t) = x(t) & u_1(t) = v(t) \\ x_2(t) = y(t) & u_2(t) = \gamma(t) \\ x_3(t) = \theta(t) & \end{array}$$

- równania ruchu z nowymi oznaczeniami

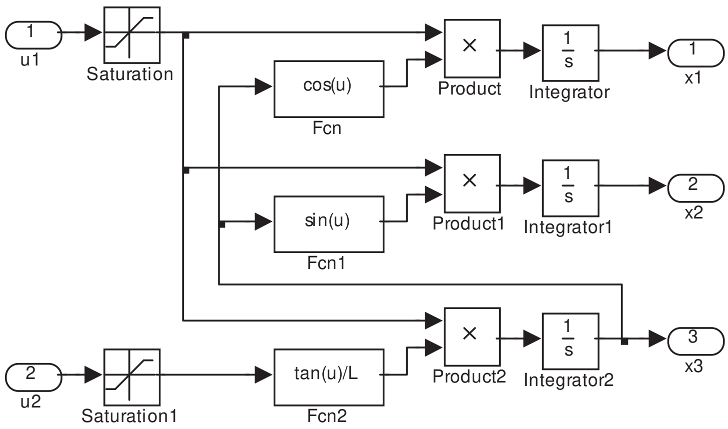
$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t)\cos x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t)\sin x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \dfrac{u_1(t)}{L}\tan u_2(t) \end{cases}}$$

Uwaga 4.2 *Zakładamy, że sterowania u_1 i u_2 mają realne ograniczenia $\overline{u}_1$ oraz $\overline{u}_2$.*

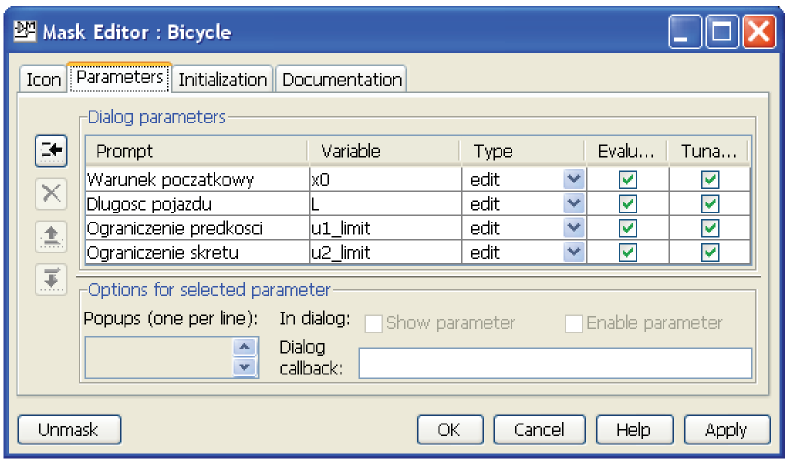
[1] $v = \dot{\theta}R$, $R = L/\tan\gamma$, $\dot{\theta} = v/R = (v/L)\tan\gamma$

4.3 Budowa modelu w Simulinku

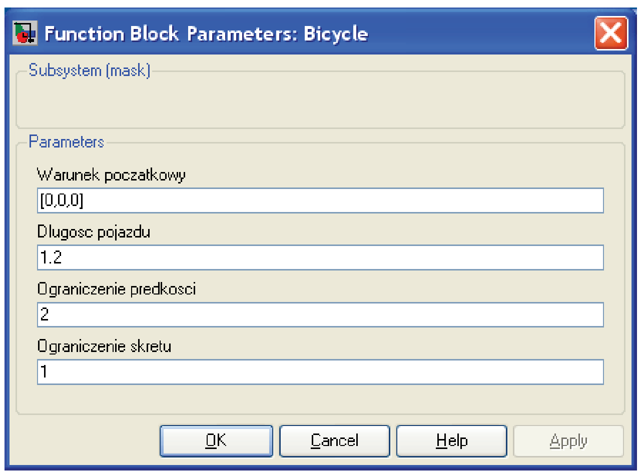
- zaczynamy "od końca" (3 wyjścia i 2 wejścia)
- dodajemy bloki Saturation z parametrami ±u1_limit, ±u2_limit dla ograniczenia sterowań



- ustawiamy warunki początkowe na integratorach
- tworzymy Subsystem i maskujemy



- ustawiamy parametry:



- zmieniamy nazwę Subsystem na Bicycle

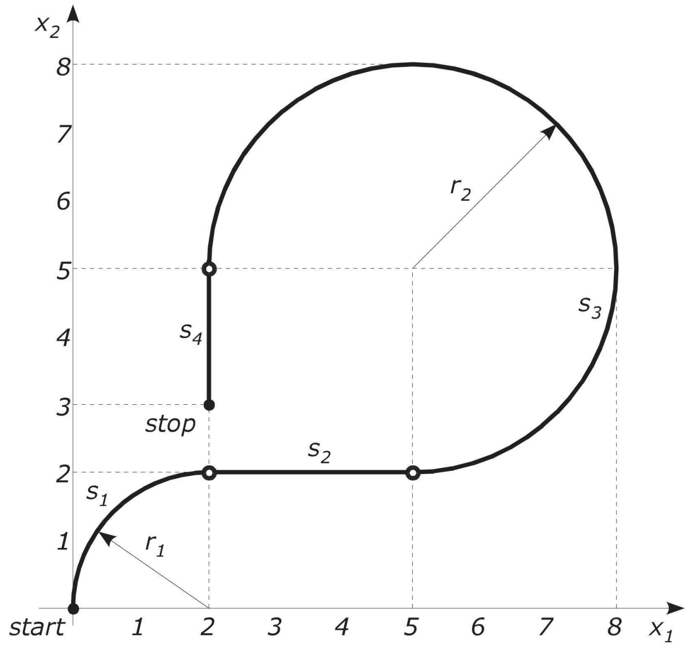
4.4 Śledzenie trajektorii w układzie otwartym

- zadanie polega na śledzeniu trajektorii opisanej za pomocą profili pozycji i prędkości jako funkcji czasu
- dane: $L = 1.2$ m, $u_1 = 1$ m/s
- minimalny promień skrętu (uwaga: ten robot nie może zmieniać orientacji w miejscu):

$$\tan \overline{u}_2 = \frac{L}{\overline{R}}$$

$$\overline{R} = \frac{L}{\tan \overline{u}_2} = \frac{1.2}{\tan(1)} = 0.77 \text{ [m]}$$

- trajektoria ma postać



- wyróżniamy 4 segmenty ($u_1 = \text{const}$):
  - segment s_1:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s}{u_1} = \frac{\frac{1}{4}2\pi R_1}{1} = \frac{\frac{2\pi 2}{4}}{1} = \pi \text{ s}$$
$$u_2 = -\arctan \frac{L}{R_1} = -\arctan \frac{1.2}{2} = -0.5404 \text{ rad}$$

  - segment s_2:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_1}{u_1} = \frac{3}{1} = 3 \text{ s}$$
$$u_2 = 0$$

– segment s_3:

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta s}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}2\pi R_2}{1} = \frac{\frac{3}{4}2\pi 3}{1} = \frac{9}{2}\pi \text{ s}$$
$$u_2 = \arctan\frac{L}{R_2} = \arctan\frac{1.2}{3} = 0.3805 \text{ rad}$$

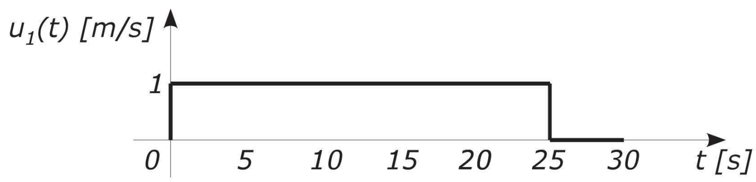
– segment s_4:

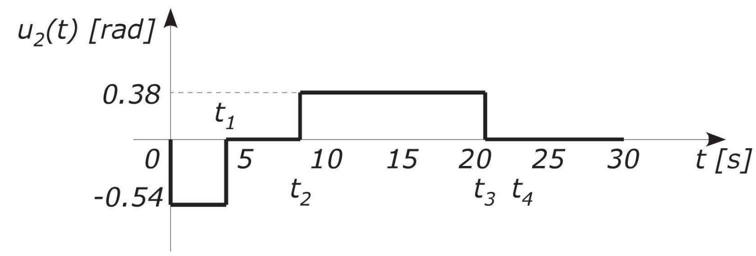
$$\Delta t_4 = \frac{\Delta x_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2 \text{ s}$$
$$u_2 = 0$$

- chwile zmiany sterowań

$$\begin{aligned}
t_0 &= 0\\
t_1 &= t_0 + \Delta t_1 = \pi = 3.14 \text{ s}\\
t_2 &= t_1 + \Delta t_2 = t_1 + 3 = 6.14 \text{ s}\\
t_3 &= t_2 + \Delta t_3 = t_2 + \frac{9}{2}\pi = 20.28 \text{ s}\\
t_4 &= t_3 + \Delta t_4 = t_3 + 2 = 22.28 \text{ s}
\end{aligned}$$

- profile sterowań





- generator trajektorii w Matlabie

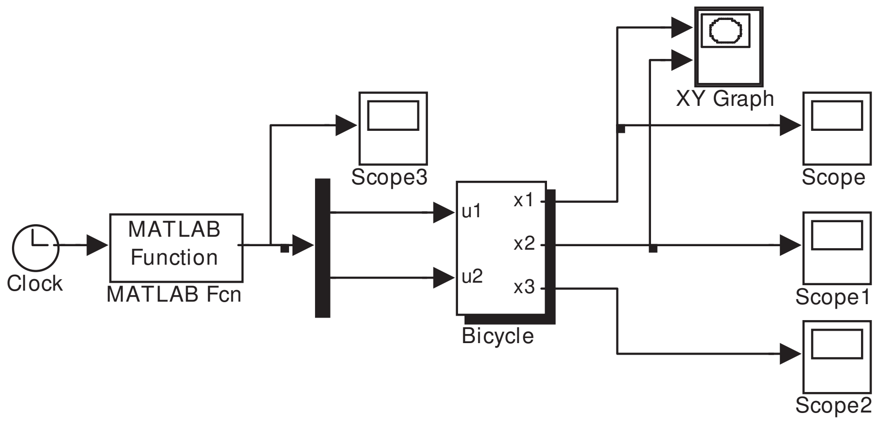
```
function u = generator(t)

L = 1.2;

t1 = pi;
t2 = t1 + 3;
t3 = t2 + 9*pi/2;
t4 = t3 + 2;

if t >= 0 & t < t1, u(1) = 1; u(2) = -atan(L/2);
elseif t >= t1 & t < t2, u(1) = 1; u(2) = 0;
elseif t >= t2 & t < t3, u(1) = 1; u(2) = atan(L/3);
elseif t >= t3 & t < t4, u(1) = 1; u(2) = 0;
else u(1) = 0; u(2) = 0;
end
```

- schemat w Simulinku



- w bloku Matlab Fcn wpisujemy `generator(u)`
- w blokach Scope można ustawić w Parameters|Data history
  - Variable name: np. x1
  - Format: np. Array
- $tfinal = 30$ s
- wówczas można zrobić plot w oknie poleceń, np:

```
>> plot(x1(:,2),x2(:,2)),grid
```