Matemática para Ciencia de Datos

Probabilidad Condicional y Teorema de Bayes

Dr. Daniel Alexis Gutierrez Pachas (dgutierrezp@ucsp.edu.pe)

25 de noviembre de 2023

Departamento de Ciencia de la Computación, Universidad Católica San Pablo, Arequipa, Perú.

Introducción

Sean dos eventos A y B en Ω. La probabilidad que ocurra el evento A dado que ocurrió el evento B, es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ siempre que } P(B) \neq 0.$$

En general, $P(A|B) \neq P(B|A)$.

Decimos que A y B son independientes siempre que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Además,

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(B), \text{ siempre que } P(A) \neq 0\,,\, P(B) \neq 0.$$

Ejemplo 1

Matemática para Ciencia de Datos se evaluó con dos exámenes. El 25 % de los estudiantes aprobó el primer examen, mientras que el 15 % aprobaron ambos exámenes. ¿Cuál es la probabilidad que los estudiantes que aprobaron el primer examen también aprobaron el segundo examen?

Ejemplo 2

En una población el 51 % son hombres, y las proporciones de hombres y mujeres daltónicos, se distribuyen

Daltónico	Hombre	Mujer
Si	4 %	0.2 %
No	47 %	48.8 %
Total	51 %	49 %

Si una persona se selecciona al azar de esta población. Responder:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de ser daltónico, dado que la persona es hombre?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de ser mujer, dado que la persona no es daltónica?

Ejemplo 3

Una urna contiene 5 bolas azules y 7 grises. Supongamos que elegimos 2 bolas al azar uno después del otro, sin reemplazo. Calcular la probabilidad de:

(a) obtener ambas azules.

(b) la primera ser azul y la segunda no.

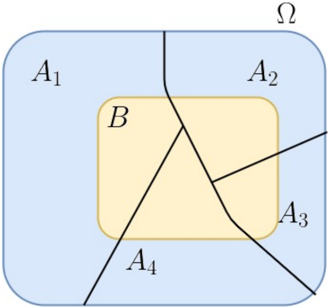
(c) la primera no sea azul y la segunda sea azul.

(d) ninguna ser azul.

(e) al menos una ser azul.

Regla de la Probabilidad Total

Sea Ω tal que $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, y que representamos en la Figura



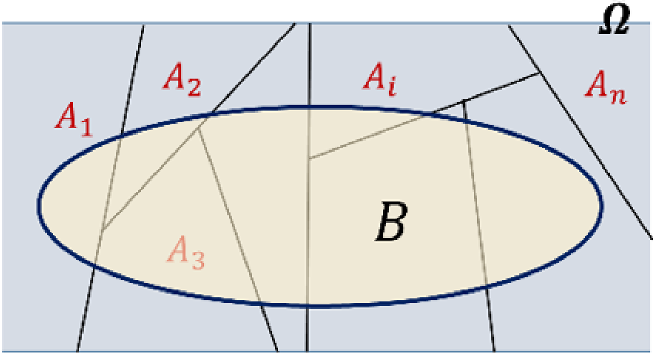
Luego, $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4)$, y dado que $B \cap A_i$ son mutuamente excluyente, entonces

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + P(B|A_4)P(A_4).$$

Regla de la Probabilidad Total

Si A_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_N)P(A_N).$$



Ejemplo 4

Un médico ha observado que el 40 % de sus pacientes fuma y de estos, el 75 % son hombres. Entre los que no fuman, el 60 % son mujeres. Calcula la probabilidad de:

(a) Un paciente no fumador sea hombre.

(b) Un paciente sea hombre fumador.

(c) Un paciente sea mujer.

Teorema de Bayes

Si B es un evento cualquiera y que conocemos $P(B|A)$, entonces la probabilidad $P(A|B)$ es calculada por:

Probabilidad a priori

Probabilidad condicional

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) * P(B \mid A)}{P(B)}$$

Probabilidad a posteriori

Probabilidad total

Teorema de Bayes

Este teorema es aplicado en diversas áreas. Sin embargo, hay una controversia sobre el tipo de probabilidades que emplea.

- El enfoque tradicional o **Frecuentista**, si repites un experimento un número y compruebas que en 35 de cada 100 ocasiones se ha producido un determinado resultado. Un Frecuentista comentaría que la probabilidad que ocurra el evento es $\frac{35}{100}$.
- El enfoque **Bayesiano** se basa por lo tanto en la idea de refinar predicciones a partir de nuevas evidencias. Un Bayesiano comentaría "basándome en el conocimiento actual que tengo, tengo $\frac{35}{100}$ de certeza de que el evento ocurrirá".

Ejemplo 5

Un médico ha observado que el 40 % de sus pacientes fuma y de estos, el 75 % son hombres. Entre los que no fuman, el 60 % son mujeres. Calcula la probabilidad de:

(a) Un paciente no fumador sea hombre.

(b) Un paciente sea hombre fumador.

(c) Un paciente sea mujer.

(d) Sabiendo que el paciente ha sido hombre, qué probabilidad hay de que sea fumador.

Ejemplo 6

Se realiza una encuesta sobre las preferencias de vivir en la ciudad o en urbanizaciones cercanas. Del total de la población encuestada el 60 % son mujeres, de las cuales prefieren vivir en la ciudad un 73 %. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, desee vivir en la ciudad es 0.62.

(a) Calcule la probabilidad de que elegido un hombre al azar, prefiera vivir en la ciudad.

(b) Supuesto que una persona, elegida al azar, desee vivir en la ciudad, calcule la probabilidad de que sea mujer.

Ejemplo 7

Una prueba de detección de drogas se utiliza en una gran población de personas de los cuales el 4 % realmente consume drogas. Supongamos que la tasa de falsos positivos es del 3 % y la tasa de falsos negativos es del 2 %. Si elegimos una persona al azar:

(a) ¿Cuál es la probabilidad que de positivo por drogas dado que usa drogas?

(b) ¿Cuál es la probabilidad que de negativo a las drogas dado que no usa drogas?