Matemática para Ciencia de Datos

Teoría de Conjuntos

Dr. Daniel Alexis Gutierrez Pachas (dgutierrezp@ucsp.edu.pe)

24 de noviembre de 2023

Departamento de Ciencia de la Computación, Universidad Católica San Pablo, Arequipa, Perú.

Introducción

Georg Cantor, padre de la Teoría de Conjuntos (junto a Dedekind y Frege); comenta que la noción de Conjunto no está definido formalmente, e intuitivamente alude a una "colección de objetos".

(a) $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ es el conjunto de los números primos.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ es el conjunto de las soluciones de $x^2 - 5x + 6 = 0$ en $\mathbb{R}$.

Los objetos que constituyen un conjunto se denominan Elementos. Letras mayúsculas denotan un conjunto y minúsculas a los elementos.

- x es un elemento de S ($x \in S$).
- x no es un elemento de S, ($x \notin S$). Alternativamente: $x \in S^c$.

Ejemplo 1

Un conjunto S puede ser definido por **comprensión** (exhibiendo una característica de los elementos de S) o por **extensión** (escribiendo explícitamente todos los elementos de S). Escriba tres conjuntos en ambas configuraciones.

Subconjuntos e Igualdad

(a) A es un subconjunto de (o está incluido en) B.

$$A \subseteq B \subseteq U \,(\text{Conjunto universo}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in U, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Obs: Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces $A \subset B$.

(b) A es un conjunto igual a B.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Operaciones con Conjuntos

(a) Unión de Conjuntos: $x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \ \vee \ x \in B$.

(b) Intersección de Conjuntos: $x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \ \wedge \ x \in B$.
Obs: A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

(c) Diferencia de Conjuntos: $x \in A \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \ \wedge \ x \notin B$.
Obs: $A \setminus B = A \cap B^c$.

(d) Diferencia Simétrica de Conjuntos: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Podemos construir un diccionario “Lógica - Conjunto”:

- $\Rightarrow$ (Lógica) es $\subseteq$ (Conjuntos).
- $\Leftrightarrow$ (Lógica) es $=$ (Conjuntos).
- $\vee$ (Lógica) es $\cup$ (Conjuntos).
- $\wedge$ (Lógica) es $\cap$ (Conjuntos).

Cardinalidad de un Conjunto

Sea A, un conjunto no vacío. El cardinal de A es el número de elementos en el conjunto y se denota por $\mid A \mid$.

Obs: Un conjunto A se dice finito si su cardinal es finito. Caso contrário es infinito.

Propiedades Sean A, B y C; conjuntos no vacíos y finitos. Entonces

- $\mid \emptyset \mid = 0$.
- Si $A \subseteq B$, entonces $\mid B \setminus A \mid = \mid B \mid - \mid A \mid$.
- Si $A \subseteq B$, entonces $\mid A \mid \leq \mid B \mid$.
- Principio de Inclusión - Exclusión:

$$\mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid - \mid A \cap B \mid .$$

- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid$.

Ejemplo 2

Demostrar

$$| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C | - | A \cap B | - | B \cap C | - | A \cap C | + | A \cap B \cap C | .$$

Ejemplo 3

En un grupo de 100 personas, un total de 43 hablan inglés, 27 hablan francés y 50 hablan español. Sabemos también que 16 personas hablan inglés y francés, 20 hablan ingles y español y 18 hablan francés y español. Finalmente, 10 personas hablan los tres idiomas. ¿Cuántas personas no hablan ninguno de los tres idiomas?

Ejemplo 4: Una idea de Conteo

Supongamos que el número de teléfono de una persona, que tiene 9 cifras, debe cumplir solo dos restricciones: que empiece por 6, y que sus últimas 5 cifras no contengan la cadena 091. Por ejemplo, 675091822 es válido, mientras que 675809122 no lo es. ¿Cuántos números de teléfono son posibles?

Generalización del Principio de Inclusión - Exclusión

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j\,:\,1 \leq i < j \leq n} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i,j,k\,:\,1 \leq i < j < k \leq n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right|$$

$$- \ \cdots \ + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Producto Cartesiano

Es el conjunto $A \times B$ cuyos elementos son los pares ordenados (a, b), donde a es un elemento de A y b un elemento de B, es decir:

$$A \times B = \{(a, b) \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

Obs: $A \times B \neq B \times A$.

- Si $\mid A \mid= n$ y $\mid B \mid= m$ entonces $\mid A \times B \mid= n \cdot m$.
- Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ con $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elementos respectivamente. El conjunto de k-tuplas, dado por $A_1 \times A_1 \times \cdots \times A_k$, cuya cantidad de elementos es:

$$\mid A_1 \times A_1 \times \cdots \times A_k \mid= n_1 \cdot n_2 \cdot \cdot n_k.$$

Ejemplo 5

Si lanzamos un par de dados. Defina en cada caso la cantidad de posibilidades:

(a) Que la suma de los resultados sea 8.

(b) Que los resultados obtenidos sea el mismo.

(c) Que la suma de los resultados sea como máximo 6.

(d) Que la suma de los resultados sea al menos 9.

(e) Que la suma sea par y mayor a 8.

Ejemplo 6

Supongamos que se lanza una moneda tres veces y se anota el lado que queda boca arriba en cada lanzamiento. Supongamos también que en cada lanzamiento obtener cara (C) y sello (S) son igualmente probables.

(a) Liste todas las configuraciones posibles.

(b) Liste las configuraciones con por lo menos dos caras.

(c) Liste las configuraciones con a lo más una cara.

(d) Generalizar el resultado para n lanzamientos de la moneda.