Descomposición QR

De acuerdo a la naturaleza de determinados problemas de aplicación algunos tipos de matrices requieren un estudio especial, tales como la matrices ortogonales y triangulares , ellas figuran en los problemas de mínimos cuadrados , resolución de sistemas y descomposiciones especiales de matrices

1. **Matrices triangulares**:

1.1 **Matriz triangular inferior** . Una matriz L de orden nxn es triangular inferior si satisface $l_{ij} = 0$ si $i < j$ para $1\leq i\leq n$ y $1\leq j\leq n$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

1.2 **Matriz triangular superior** . Una matriz U de orden nxn es triangular inferior si satisface $U_{ij} = 0$ si $i > j$ para $1\leq i\leq n$ y $1\leq j\leq n$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & U_{nn} \end{bmatrix}$$

Una de las aplicaciones de las matrices triangulares se da en la solución de sistemas de ecuaciones utilizando la eliminación gaussiana
Debido al isomorfismo entre las matrices y las transformaciones lineales , una matriz triangular tiene asociada una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ donde dimV=n dimW=n, la cual posee subespacios invariantes $F_1, F_2, ..., F_n$ los cuales verifican que $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n$, dado que si $B_1=\{v_1\}$, $B_2=\{v_1, v_2\}$, $B_3=\{v_1\ v_2\ v_3\}$,...., $B_n=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ la representación matricial de T en la base $B= B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$ seria

$T(v_1) = a_{11}v_1$
$T(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$
$T(v_3) = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3$

…………………………

$T(v_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \ldots + a_{nn}v_n$

$$[T] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Esto nos dice que, si la representación matricial de una transformación lineal no se puede diagonalizar, en la medida que posea subespacios invariantes, $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k$ se podrá expresar en forma triangular

2. **La descomposición QR**

La descomposición QR se basa en expresar una matriz A como el producto de dos matrices esto es A=QR , el siguiente teorema prueba dicho resultado

TEOREMA: Si A es una matriz mxn con columnas linealmente independientes, entonces A se puede factorizar como A = QR, donde Q es una matriz mxn cuyas columnas forman una base ortogonal para el espacio generado por las columnas de A y R es una matriz de nxn triangular superior no singular

Prueba:

$$A = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}_{mxn}$$

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ las columnas l.i. de A las cuales forman una base para el espacio generado por las columnas de A Usando el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt obtenemos una base ortogonal $u_1, u_2, \ldots, u_n$ para el espacio generado por las columnas de A, donde

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n &= v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1}
\end{aligned}$$

denotando $r_{ji} = \dfrac{\langle v_i, u_j \rangle}{\|u_j\|}$ con $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le n$

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= r_{12} u_1 + u_2 \\
v_3 &= r_{13} u_1 + r_{23} u_2 + u_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n &= r_{1n} u_1 + r_{2n} u_2 + \ldots . r_{n-1n-1} u_{n-1}
\end{aligned}$$

así mismo si $Q = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ y $R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ tenemos

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ r_{12}u_1 + u_2 \\ r_{13}u_1 + r_{23}u_2 + u_3 \\ \text{.......... ....} \\ r_{1n}u_1 + r_{2n}u_2 + \text{....}r_{n-1n-1}u_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & v_2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & v_n & \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ r_{12} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leftarrow & u_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & u_2 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & u_n & \rightarrow \end{bmatrix}$$

de donde $A^t = R^tQ^t \Rightarrow (A^t)^t = (R^tQ^t)^t$

$$\Rightarrow \quad A = QR$$

Si en la matriz Q tomamos $w_i = \dfrac{u_i}{\|u_i\|}$ tenemos que $Q^tQ = I$

Una de las aplicaciones de la descomposición QR es la determinación de la solución optima por mínimos cuadrados de un sistema $Ax \approx b$, sabemos que la solución de dicho sistema esta dado por

$$A^tAx = A^tb$$

Sustituyendo en ella la descomposición A=QR , tenemos

$$(QR)^t(QR)x = (QR)^tb$$
$$(R^tQ^tQR)x = R^tQ^tb$$
$$R^tRx = R^tQ^tb$$

Como R es no singular R^t también lo es, entonces

$$Rx = Q^tb$$

Este nuevo sistema equivalente a $Ax \approx b$ es fácil de resolver dado que R es triangular superior así el sistema puede ser resuelto por sustitución regresiva

Veamos algunos ejemplos de cómo hallar la descomposición QR de una matriz y luego una aplicación especifica

Ejemplo: Halle la descomposición QR de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

en A consideramos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix}$$

denotando a $S = \{v_1,v_2,v_3\}$ tenemos que ortogonalizar el conjunto S usando Gram-Schmidt

i) $u_1 = v_1$

ii) $u_2 = v_2 - r_{12}u_1$

$\langle u_1, v_1 \rangle = (1\ 1\ 1)(0\ 1\ 1) = 2$

$\|u_1\|^2 = (1\ 1\ 1)(1\ 1\ 1) = 3$

entonces $r_{12} = \dfrac{\langle u_1, v_1 \rangle}{\|u_1\|^2} = \dfrac{2}{3}$

luego $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\dfrac{2}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

iii) $u_3 = v_3 - r_{13}u_1 - r_{23}u_2$

$\langle u_1, v_3 \rangle = (0\ 1\ 1)(0\ 0\ 1) = 1$

$\|u_1\|^2 = (1\ 1\ 1)(1\ 1\ 1) = 3$

$\langle u_2, v_3 \rangle = (-2/3\ \ 1/3\ \ 1/3\ )(0\ 0\ 1) = 1/3$

$\|u_2\|^2 = (-2/3\ \ 1/3\ \ 1/3)(-2/3\ \ 1/3\ \ 1/3) = 2/3$

entonces $r_{13} = \dfrac{\langle u_1, v_3 \rangle}{\|u_1\|^2} = \dfrac{1}{3}$ $\quad r_{23} = \dfrac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\|u_2\|^2} = \dfrac{1}{2}$

luego $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\dfrac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\dfrac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

por tanto el conjunto $S'=\{u_1,u_2,u_3\}$ es un conjunto ortogonal

La Descomposición QR no normalizada estará dada por

$$Q_o = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad R_o = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/2 \\ 1 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad R_o = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La Descomposición normalizada es dada por

$$S_o = \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|} \right\}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{3} \quad , \quad \|u_2\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad , \quad \|u_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

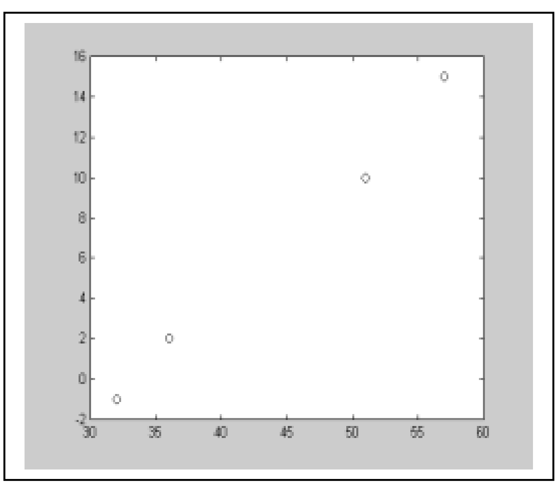
$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -2\sqrt{3}/3\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 \\ 1/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

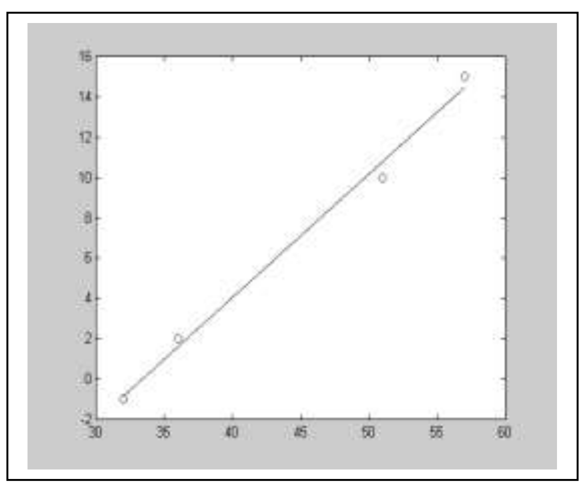
Por tanto en cualquiera de los dos casos se tiene

$$A = QR \qquad\qquad A = Q_oR_o$$

Aplicación: Supongamos que tenemos un problema de mínimos cuadrados
La relación entre los grados Fahrenheit F y los grados Celsius C es de la forma lineal. Debido a medidas inexactas la tabla dada no refleja perfectamente esta relación grafique el conjunto de puntos para apreciar esto.

C	F
32	-1
36	2
51	10
57	15





Siendo la ecuación lineal de mejor ajuste

$$F = 0.6127C - 20.4577$$

Sin embargo cada punto (x , y) de la tabla dada, verifica la ecuación obtenida en forma aproximada

$$y \approx 0.6127x - 20.4577$$

Si tuviésemos un sistema de ecuaciones obtenido por aproximación, análogo al ejemplo dado

$$\begin{array}{l} x + 2y \approx 2 \\ 2x + y \approx 3 \\ x - y \approx 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad Ax \approx b$$

Para resolver dicho sistema hallaremos la descomposición QR de A y luego resolveremos el sistema $Rx = Q^t b$

La descomposición QR normalizada de A es

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/2 \\ 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6}/2 \\ 0 & 3/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Luego resolvemos $\quad Rx = Q^t b$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6}/2 \\ 0 & 3/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6}x + \dfrac{\sqrt{6}}{2} y = \dfrac{8}{\sqrt{6}} \\ \qquad \dfrac{3}{\sqrt{2}} y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 8 \\ \qquad 3y = 2 \end{cases} \quad \uparrow$$

notemos que el sistema es como mencionamos un sistema triangular el cual puede ser resuelto por sustitución regresiva, así obtenemos

$$x = 1 \quad ; \quad y = 2/3$$

3. La Descomposición LU:

Una matriz no singular A de orden p siempre se puede descomponer en un producto de la forma

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. La descomposición se realiza mediante operaciones elementales
Dado que una operación elemental aplicada a la matriz A equivale a la multiplicación de una matriz elemental a la matriz A tenemos que mediante una sucesión de operaciones elementales obtendríamos una forma escalonada equivalente a la matriz A

$$A \to E_1 A \to E_2 E_1 A \to \cdots \to E_k \cdots E_2 E_1 A$$

si A' denota la ultima matriz escalonada en este proceso tenemos

$$A' = E_k \cdots E_2 E_1 A$$

cada matriz elemental tiene inversa entonces

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} A'$$

por tanto la matriz $U = A'$ y $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$

en el proceso de eliminación tenemos por ejemplo que: seleccionado el elemento pivote α_{11} hacemos 1 este elemento y al realizar las eliminaciones en esta columna las operaciones elementales usadas equivalen a realizar los productos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{p1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{p1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que solo son necesarias operaciones elementales en el proceso tenemos que ;L se construye con los elementos pivote α_{ii} y los negativos de los multiplicadores m_{ij} y la matriz U es la ultima matriz escalonada obtenida de A
La descomposición LU puede realizarse con o sin intercambio de filas, veremos el caso en el que no se utilicen intercambio de filas

Ejemplo: Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar la descomposición LU de A

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\\ 0 & -3 & 6\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{11}&=2\\ -m_{21}&=4\\ -m_{31}&=2\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}\alpha_{22}&=-3\\ -m_{32}&=-2\end{aligned}\qquad\qquad \alpha_{33}=-1$$

Luego $U=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ y $L=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0\\ -m_{21} & \alpha_{22} & 0\\ -m_{31} & -m_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$

Se puede verificar que A = LU

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1/2 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Aplicación: La descomposición LU se utiliza en la resolución de sistema de ecuaciones, para resolver el sistema Ax = b , donde A = LU tenemos

$$\begin{gathered}AX = bLU\\ (LU)X=b\\ L^{-1}(LU)X=L^{-1}b\\ UX=L^{-1}b\\ UX = Y = L^{-1}b\\ UX = Y \qquad y \qquad Y = L^{-1}b\\ UX = Y \qquad y \qquad LY = b\end{gathered}$$

Por tanto resolver Ax = b $\Leftrightarrow$ LY = b y UX = Y

En la practica parece ser mas tedioso resolver un sistema usando la descomposición LU pese a que los dos sistemas equivalentes son triangulares sin embargo la razón de utilizar la descomposición LU es que al resolver un sistema donde periódicamente solamente se altera la matriz b , involucraría resolver el sistema repitiendo las mismas operaciones elementales en la matriz A tantas veces como resuelva el sistema, con la descomposición LU estas operaciones elementales solo se realizarían una sola vez

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema usando la descomposición LU

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -5$$
$$-3x_1 - x_2 + 7x_3 = -22$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 = 10$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvemos los sistemas $LY = b$ y $UX = Y$

i) $LY = b$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -22 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -y_1 &= -5 \\ -3y_1 + 2y_2 &= -22 \\ y_1 - 4y_2 + 3y_3 &= 10 \end{aligned} \uparrow \qquad \begin{aligned} y_1 &= 5 \\ y_2 &= -7/2 \\ y_3 &= -3 \end{aligned} \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 \\ -7/2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ii) $UX = Y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7/2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{-7}{2} \\ x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_3 &= -3 \\ x_2 &= -2 \\ x_1 &= 1 \end{aligned} \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 \\ -7/2 \\ -3 \end{bmatrix}$$