METODOS APROXIMADOS

Los métodos aproximados permiten resolver un sistema de ecuaciones lineal AX=b en forma iterativa tomando una solución inicial $X^{(0)}$, para luego determinar una sucesión $X^{(k)}$ la cual se aproximara a la solución X del sistema si la sucesión converge
Si A es una matriz de orden n y X es de orden nx1 tenemos

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ X^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}, \ldots \to X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La sucesión converge si $\underset{k\to\infty}{Lim}\, x_i^{(k)} = x_i$, $\forall i = 1,...,n$. Una aproximación a la solución se obtendrá cuando $\left\| X^{(k)} - X^{(k+1)} \right\| < e$ donde, $e \to 0$, sin embargo utilizar la norma euclideana no es conveniente dado que requiere demasiado esfuerzo computacional comparado con otras normas, sabemos que la norma 1 definida por

$$\left\| X \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$

Es equivalente a la norma euclideana es decir si $X^{(k)}$ y $X^{(k+1)}$ están próximos con la norma 1 , también lo estarán con la norma euclideana dado que $\| X \| < \| X \|_1$, lo cual se obtiene de verificar que

$$\| X \| = \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right\| < \left\| \sum_{i=1}^{n} | x_i | \right\| = \| X \|_1$$

Así $\left\| X^{(k)} - X^{(k+1)} \right\| < \left\| X^{(k)} - X^{(k+1)} \right\|_1 < e$
Para garantizar la convergencia de la sucesión se condicionara que la matriz A sea diagonal dominante

$$| a_{ii} | > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} | a_{ij} |$$

Por ejemplo la matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ es diagonal dominante dado que |8|>|1|+|2| , |-5|>|3|+|1| , |9|>|4|+|2|

EL METODO DE JACOBI: Para resolver un sistema de ecuaciones AX=b , con A de orden n , mediante el método de Jacobi se utiliza la sucesión dada por

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Que converge a la solución del sistema tomando con algún valor inicial $X^{(0)}$, si la matriz A es diagonal dominante

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 &= -21 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 15 \end{aligned}$$

Tomando como valor inicial $X^{(0)}$ =[1 2 2]^t con error de e=0.01

Siendo A diagonal dominante la sucesión dada por

$$x_1^{(k+1)} = \frac{7 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{4}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{-21 - 4x_1^{(k)} - x_3^{(k)}}{-8}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{15 + 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{5}$$

Convergerá a la solución del sistema

Para k=1 tenemos

$$x_1^{(1)} = \frac{7 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{4} = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-21 - 4x_1^{(0)} - x_3^{(0)}}{-8} = \frac{-21 - 4(1) - 2}{-8} = 3.375$$

$$x_3^{(1)} = \frac{15 + 2x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{5} = \frac{15 + 2(1) - 2}{5} = 3$$

Asi $X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 3.375 \\ 3 \end{bmatrix}$

Para k=2

$$x_1^{(2)} = \frac{7 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{4} = \frac{7 + 3.375 - 3}{4} = 1.84375$$
$$x_2^{(2)} = \frac{-21 - 4x_1^{(1)} - x_3^{(1)}}{-8} = \frac{-21 - 4(1.75) - 3}{-8} = 3.875$$
$$x_3^{(2)} = \frac{15 + 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}}{5} = \frac{15 + 2(1.75) - 3.375}{5} = 3.025$$

Asi $\quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.84375 \\ 3.875 \\ 3.025 \end{bmatrix}$

Luego de algunas iteraciones obtenemos

x1=1.000000	x2=2.000000	x3=2.000000	
x1=1.750000	x2=3.375000	x3=3.000000	error=3.125000
x1=1.843750	x2=3.875000	x3=3.025000	error=0.618750
x1=1.962500	x2=3.925000	x3=2.962500	error=0.231250
x1=1.990625	x2=3.976563	x3=3.000000	error=0.117188
x1=1.994141	x2=3.995312	x3=3.000938	error=0.023203
x1=1.9986	x2=3.9972	x3=2.9986	error=0.008672

La solución aproximada es x1=1.9986 , x2=3.9972 , x3=2.9986 con un error de 0.008672 .
Siendo su solución real x1= 2 , x2=4 , x3=3

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Tomando como valor inicial $X^{(0)}$ =[1 3 2]^t con error de e=0.1

Siendo A diagonal dominante la sucesión dada por

$$x_1^{(k+1)} = \frac{10 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{5}$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{11 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{8}$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{3 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{4}$$

Convergerá a la solución del sistema

Para k=1 tenemos

$$x_1^{(1)} = \frac{10 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{5} = \frac{10+3-2}{5} = 2.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{11 - 2x_1^{(0)} + x_3^{(0)}}{8} = \frac{11-2(1)+2}{8} = 1.375$$

$$x_3^{(1)} = \frac{3 + x_1^{(0)} - x_2^{(0)}}{4} = \frac{3+1-3}{4} = 0.25$$

Así $\quad X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.375 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

Para k=2

$$x_1^{(2)} = \frac{10 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{5} = \frac{10+1.375-0.25}{5} = 2.225$$

$$x_2^{(2)} = \frac{11 - 2x_1^{(1)} + x_3^{(1)}}{8} = \frac{11-2(2.2)+0.25}{8} = 0.85625$$

$$x_3^{(2)} = \frac{3 + x_1^{(1)} - x_2^{(1)}}{4} = \frac{3+2.2-1.375}{4} = 0.95625$$

Así $\quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.225 \\ 0.85625 \\ 0.95625 \end{bmatrix}$

Luego de algunas iteraciones obtenemos

x1=1.000000	x2=3.000000	x3=2.000000	
x1=2.200000	x2=1.375000	x3=0.250000	error=4.575000
x1=2.225000	x2=0.856250	x3=0.956250	error=1.250000
x1=1.980000	x2=0.938281	x3=1.092188	error=0.462969
x1=1.969219	x2=1.016523	x3=1.010430	error=0.170781
x1=2.0012	x2=1.0090	x3=0.9882	error=0.061780

La solución aproximada es x1=2.0012 , x2=1.0090 , x3=0.9882 con un error de 0.061780. Siendo su solución real x1= 2 , x2=1 , x3=1

EL METODO DE GAUSS - SEIDEL: El método de Gauss – Seidel utiliza la misma sucesión que el método de Jacobi, con la diferencia que los nuevos valores se sustituyen inmediatamente

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Tomando como valor inicial $X^{(0)}$ =[1 3 2]^t con error de e=0.1, usando el método de Gauss - Seidel

Siendo A diagonal dominante la sucesión dada por

$$x_1^{(k+1)} = \frac{10 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{5}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{11 - 2x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{8}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{3 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{4}$$

Convergerá a la solución del sistema

Para k=1 tenemos

$$x_1^{(1)} = \frac{10 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{5} = \frac{10 + 3 - 2}{5} = 2.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{11 - 2x_1^{(1)} + x_3^{(0)}}{8} = \frac{11 - 2(2.2) + 2}{8} = 1.075$$

$$x_3^{(1)} = \frac{3 + x_1^{(1)} - x_2^{(1)}}{4} = \frac{3 + 2.2 - 1.075}{4} = 1.03125$$

Así $\quad X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 1.075 \\ 1.03125 \end{bmatrix}$

Para k=2

$$x_1^{(2)} = \frac{10 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{5} = \frac{10 + 1.075 - 1.03125}{5} = 2.00875$$

$$x_2^{(2)} = \frac{11 - 2x_1^{(2)} + x_3^{(1)}}{8} = \frac{11 - 2(2.00875) + 1.03125}{8} = 1.001719$$

$$x_3^{(2)} = \frac{3 + x_1^{(2)} - x_2^{(2)}}{4} = \frac{3 + 2.00875 - 1.001719}{4} = 1.001758$$

Así $X^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.00875 \\ 1.001719 \\ 1.001758 \end{bmatrix}$

Luego de algunas iteraciones obtenemos

x1=1.000000	x2=3.000000	x3=2.000000	
x1=2.200000	x2=1.075000	x3=1.031250	error=4.093750
x1=2.008750	x2=1.001719	x3=1.001758	error=0.294023
x1=2.0000	x2=1.0002	x3=0.9999	error=0.012070

La solución aproximada es x1=2.0000 , x2=1.0002 , x3=0.9999 con un error de 0.012070. Siendo su solución real x1= 2 , x2=1 , x3=1

CONVERGENCIA DE LOS METODOS IERATIVOS

Para resolver el sistema AX=b convertiremos el sistema a la forma

X=BX+C

Tomando el caso particular

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ x_3 &= \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} + 0 - \frac{a_{12}x_2}{a_{11}} - \frac{a_{13}x_3}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}x_2}{a_{22}} - 0 - \frac{a_{23}x_3}{a_{22}} \\ x_3 &= \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}x_3}{a_{33}} - \frac{a_{32}x_2}{a_{33}} + 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow X = C + BX$$

Donde $C=\begin{bmatrix}\frac{b_1}{a_{11}}\\ \frac{b_2}{a_{22}}\\ \frac{b_3}{a_{33}}\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}}\\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}}\\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0\end{bmatrix}$

En el caso general

$$C=\begin{bmatrix}\frac{b_1}{a_{11}}\\ \frac{b_2}{a_{22}}\\ \vdots\\ \frac{b_n}{a_{nn}}\end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ -\frac{a_{12}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Y la sucesión de Jacobi se define como $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+C$

DEFINICION DE RADIO ESPECTRAL: El radio espectral de un matriz se denota por $\rho(A)$ y se define como $\rho(A)=\max_i|\lambda_i|$ donde $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n}$ son los autovalores de A

DEFINICION DE MATRIZ CONVERGENTE: Una matriz A de orden n se denomina convergente si $\lim_{k\to\infty} A^k=\theta$

TEOREMA: Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1) A es convergente
2) $\rho(A)<1$
3) $\lim_{k\to\infty} A^k X=\theta \quad ,\forall X$

LEMA: Si el radio espectral $\rho(B)<1 \Rightarrow \exists(1-B)^{-1}=I+B+B^2+\dots+B^{k+1}$

Prueba: Si λ es un valor propio de B

$$BX=\lambda X \quad \text{con } X\neq\theta$$
$$-BX=-\lambda X \quad \text{con } X\neq\theta$$

Como IX=X entonces $IX-BX=X-\lambda X$

$$(I-B)X=(1-\lambda)X$$

De aquí $\mu=1-\lambda$ es autovalor de la matriz I-B, así el radio espectral de B , $\rho(B)=\max_i|\lambda_i|$ verifica $\rho(B)<1$ entonces

$$|\lambda|\leq\rho(B)<1 \quad ,\forall\lambda$$

Así autovalores μ=1-λ son distintos de cero, con ello I-B es no singular es decir existe la inversa de I-B

Además sabemos que $I - B^k = (I - B)(I + B + B^2 + ... + B^{k-1})$

Cuando $k \to \infty$ se tiene

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + ... + B^{k-1}$$

Dado que la inversa es única y que $\underset{k\to\infty}{Lim}(I - B^k) = I - \theta = I$

TEOREMA: Para cualquier $X^{(0)}$ la sucesión de Jacobi $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C$ converge a la solución de la ecuación $X = BX + C \quad \Leftrightarrow \rho(B) < 1$

Prueba:

(⇐)

$$X^{(1)} = BX^{(0)} + C$$

$$X^{(2)} = BX^{(1)} + C = B(BX^{(0)} + C) + C = B^2X^{(0)} + BC + C = B^2X^{(0)} + (B + I)C$$

$$X^{(3)} = BX^{(2)} + C = B(B^2X^{(0)} + (B + I)C) + C = B^3X^{(0)} + B^2C + BC + C = B^3X^{(0)} + (B^2 + B + I)C$$

$$\vdots$$

$$X^{(k)} = B^kX^{(0)} + (B^{k-1} + ... + B^2 + B + I)C$$

Tomando el limite obtenemos $\underset{k\to\infty}{Lim}X^{(k)} = \underset{k\to\infty}{Lim}B^kX^{(0)} + \underset{k\to\infty}{Lim}(B^k + ... + B + I)C$

Como $\rho(B) < 1$

$$\underset{k\to\infty}{Lim}X^{(k)} = \theta + (I - B)^{-1}C$$

Así la sucesión $X^k = BX^{(k-1)} + C$ converge a $X = (I - B)^{-1} + C$

es decir $(I - B)X = C$

$X - BX = C$

$X = BX + C$

(⇒) Si $X = BX + C$ es convergente $X^{(k)} = BX^{(k-1)} + C$ asi

$$X - X^{(k)} = BX - BX^{(k-1)}$$
$$= B(X - X^{(k-1)})$$

A su vez

$$X - X^{(k-1)} = BX - BX^{(k-2)}$$
$$= B(X - X^{(k-2)})$$
$$\vdots$$
$$X - X^1 = B(X - X^{(0)})$$

$$\Rightarrow X - X^{(k)} = B(X - X^{(k-1)}) = B(B(X - X^{(k-2)})) = B^2(X - X^{(k-2)}) = ... = B^k(X - X^{(0)})$$

Si denotamos a $X - X^{(0)}$ por z tenemos

$$X - X^{(k)} = B^k z$$

Así $\underset{k\to\infty}{Lim}B^k z = \underset{k\to\infty}{Lim}(X - X^{(k)}) = X - X = \theta$ por tanto $\rho(B) < 1$