ESCUELA DE POSTGRADO
UNIVERSIDAD CATÓLICA SAN PABLO

Sistemas de ecuaciones lineales

Profesor. Sergio Moisés Aquise Escobedo

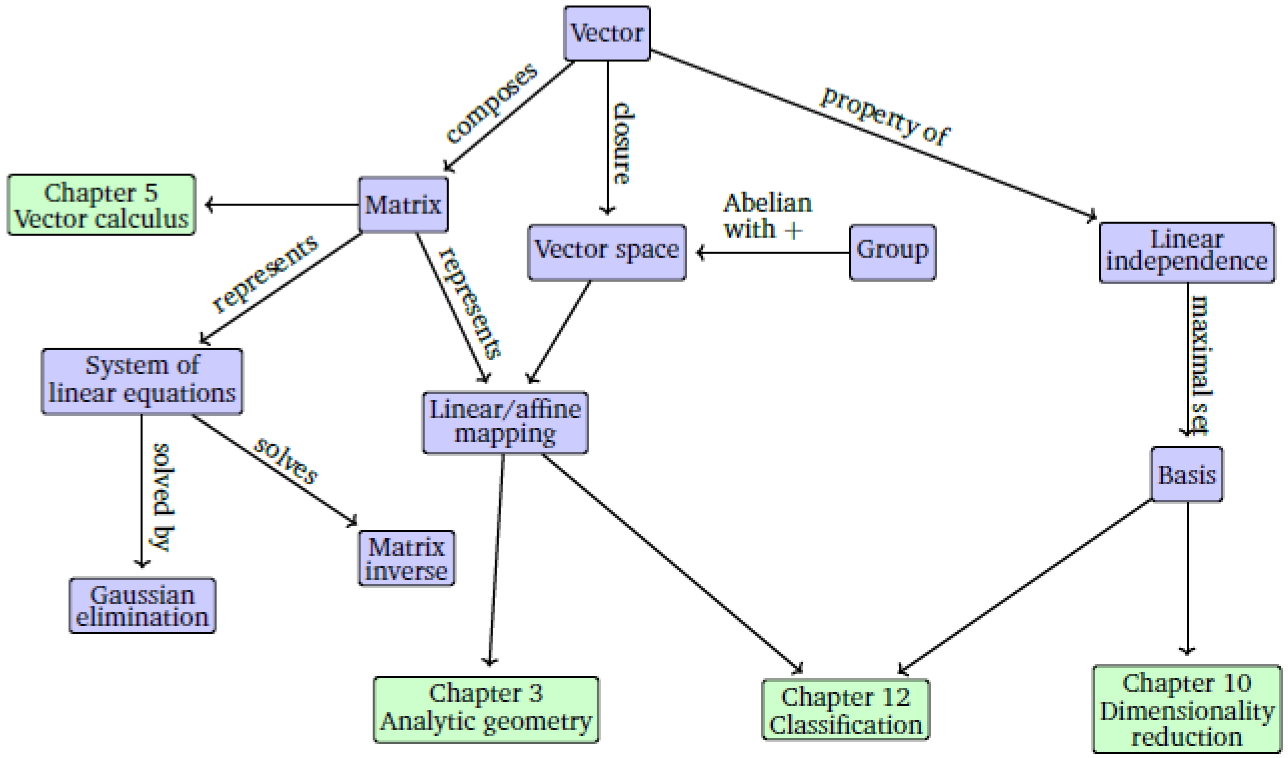
Departamento de Ciencia de la Computación, Universidad Católica San Pablo, Arequipa, Perú.

1. Sistemas de ecuaciones lineales
2. Solución de Sistemas de ecuaciones lineales

    2.1 Métodos directos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

        2.1.1 Análisis y estabilidad de soluciones
        2.1.2 Descomposición matricial : LU,QR,SVD, Shur
        2.1.3 Sistemas banda, de bloques y matrices sparse

    2.2 Métodos iterativos.
        2.2.1 Convergencia
        2.2.2 Métodos de Jacobi, Gauss Seidel, SOR. Convergencia
        2.2.3 Métodos tipo gradiente


Vector
composes
closure
property of
Chapter 5
Vector calculus
Matrix
Vector space
Abelian
with +
Group
Linear
independence
represents
represents
maximal set
System of
linear equations
Linear/affine
mapping
Basis
solved by
solves
Matrix
inverse
Gaussian
elimination
Chapter 3
Analytic geometry
Chapter 12
Classification
Chapter 10
Dimensionality
reduction

Los sistemas de ecuaciones lineales juegan un papel central en el álgebra lineal.

Muchos problemas se pueden formular como sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.

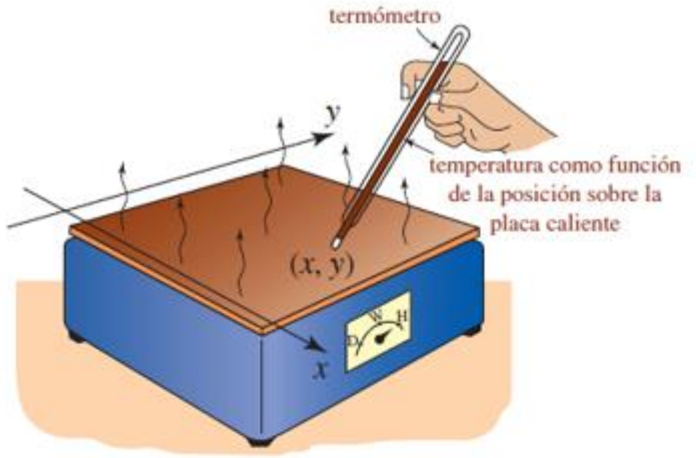
El álgebra Lineal nos proporciona las herramientas para resolverlos.

Solución de ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales son utilizadas en todas las ramas de la ingeniería para el modelado de fenómenos físicos. Su uso es común tanto en ciencias aplicadas, como en ciencias puras: física, química, biología o matemática, así como en economía.

La ecuación de Laplace está dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

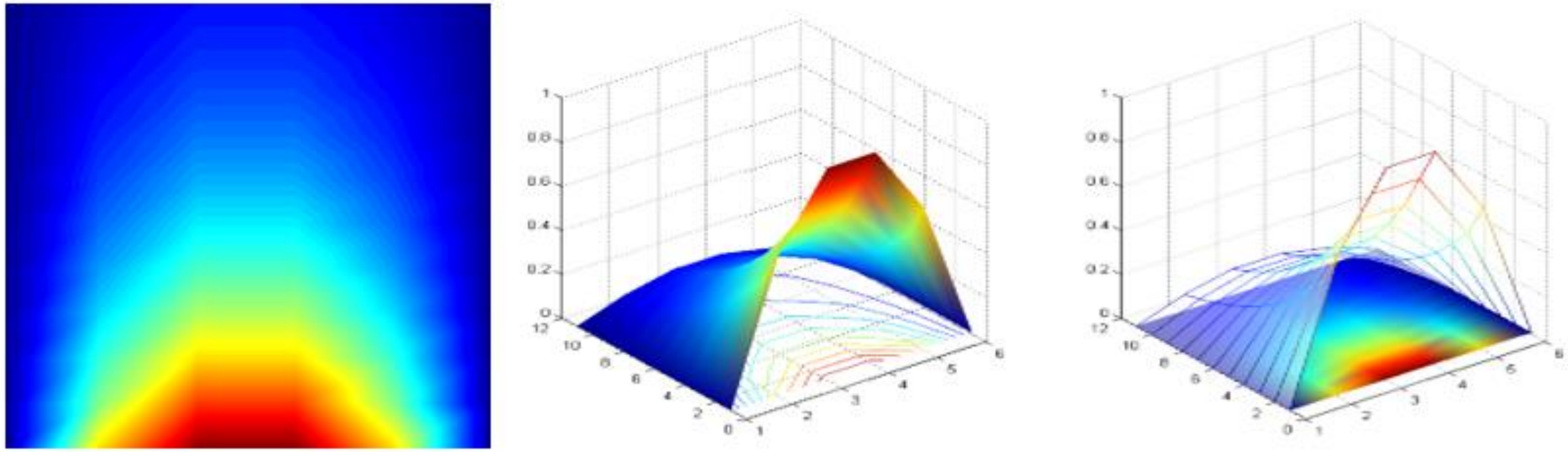


Es posible verificar que la función

$u(x, y) = e^{-(n\pi x/L)} sen(n\pi y/L)$, donde n y L son constantes

satisface la ecuación de Laplace

Esta ecuación está asociada a problemas de conducción de calor, movimiento de fluidos y potencial eléctrico. La solución de esta ecuación es una función $u = f(x, t)$ tal que $f: U \to \mathbb{R}$,donde $U \subset \mathbb{R}^2$



Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

Definida para $0 < x < a$; $0 < y < b$, bajo ciertas condiciones iniciales y condiciones de contorno puede discretizarse como sigue

$$\frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} + \frac{u(x,y+h) - 2u(x,y) + u(x,y-h)}{h^2} \approx 0$$

$$u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y) \approx 0$$

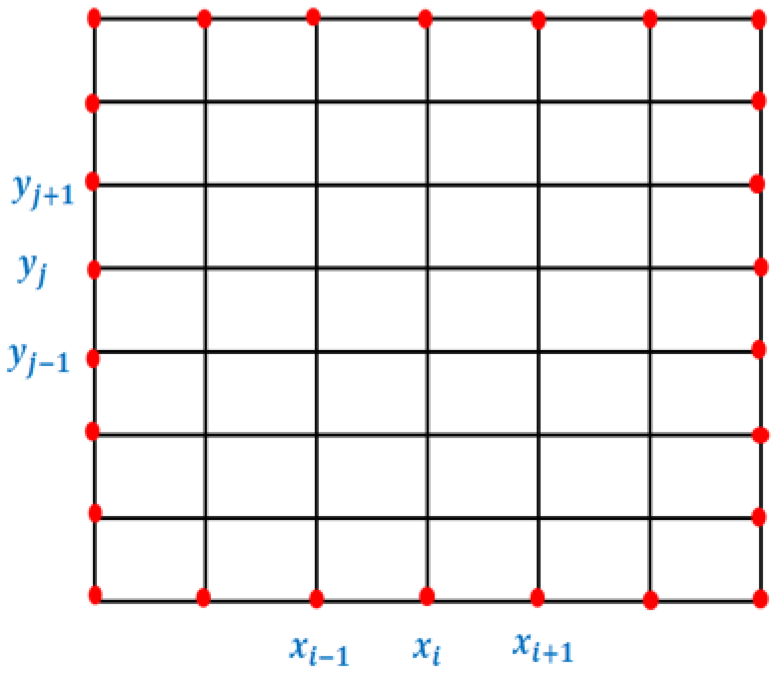
Considerando su dominio computacional

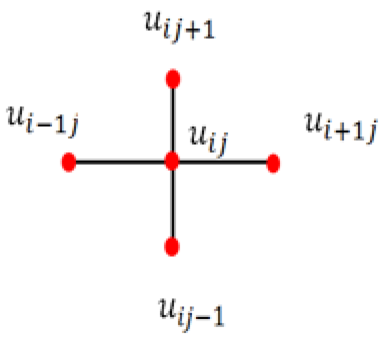
Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

$$u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)-4u(x,y)\approx 0$$

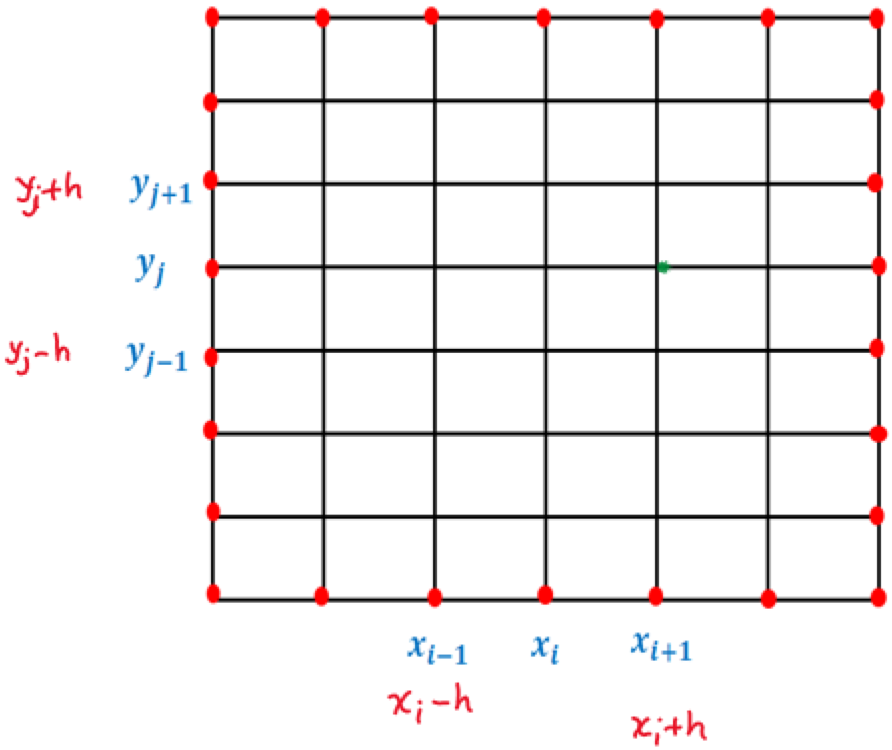
$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+\ u_{i,j-1}-4u_{i,j}\approx 0$$

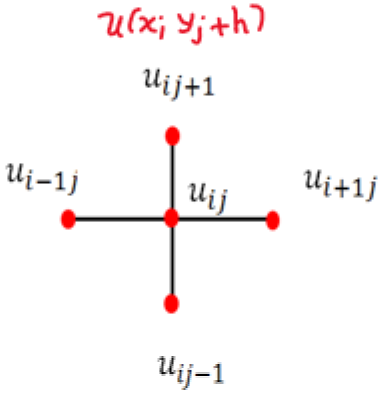
Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

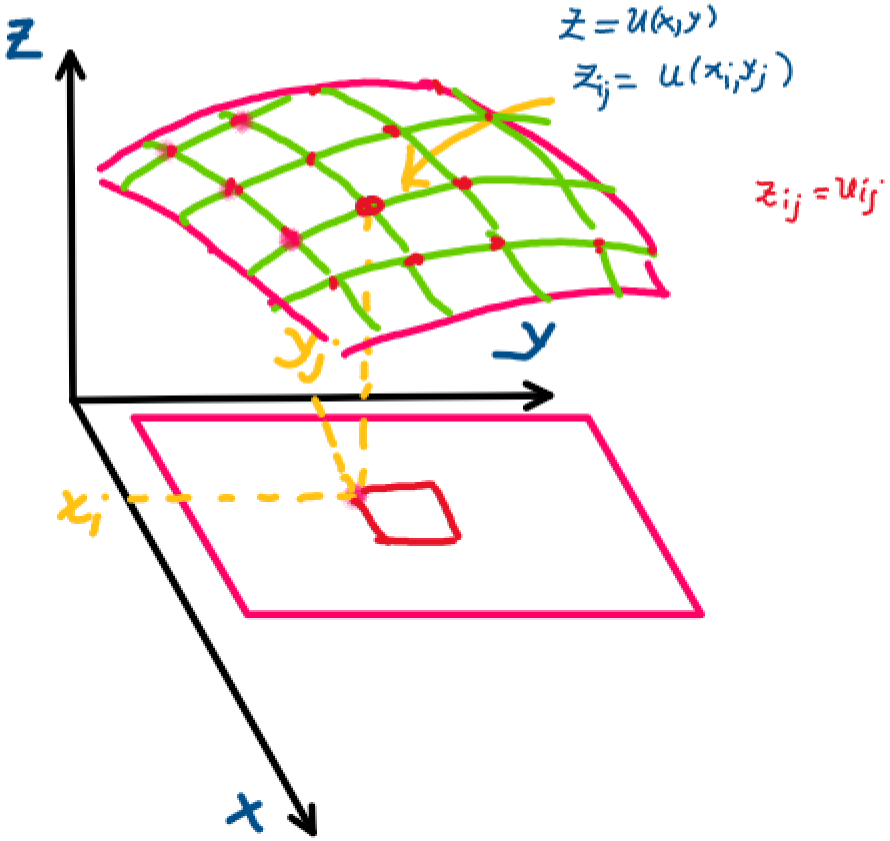




Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales







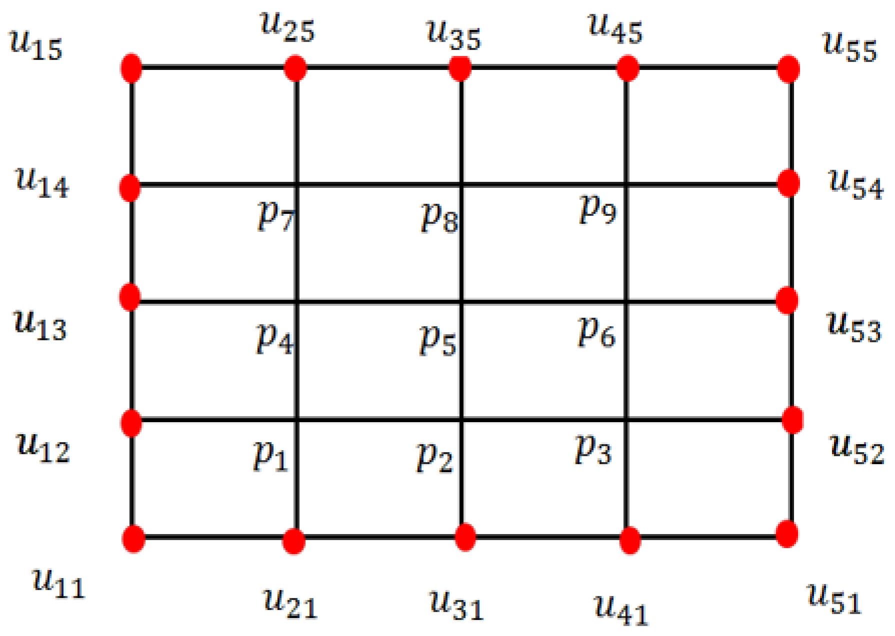
Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

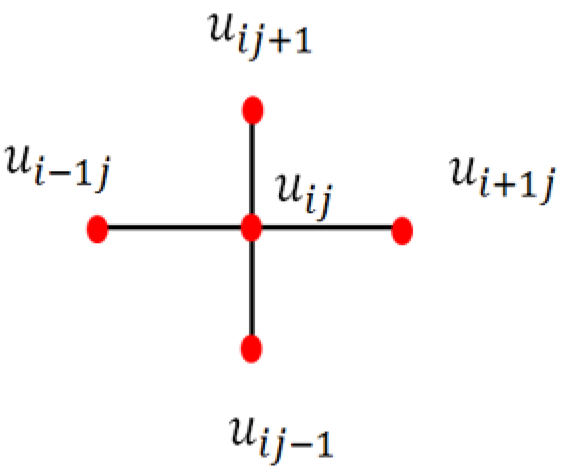
Tenemos que

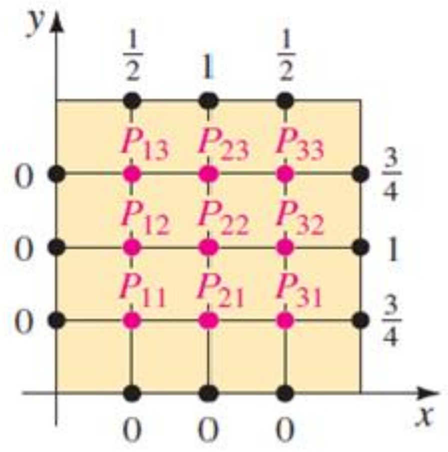
$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} \approx 0$$

Con lo cual se generará un sistema de ecuaciones, que en el caso particular de $n = 5$ se obtendría como sigue

Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales







Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

$$u_{12} + u_{21} + p_2 + p_4 - 4p_1 = 0$$

$$p_1 + u_{31} + p_3 + p_5 - 4p_2 = 0$$

$$p_2 + u_{41} + u_{52} + p_6 - 4p_3 = 0$$

$$u_{13} + p_1 + p_3 + p_7 - 4p_4 = 0$$

$$p_4 + p_2 + p_6 + p_8 - 4p_5 = 0$$

$$p_5 + p_3 + u_{53} + p_9 - 4p_6 = 0$$

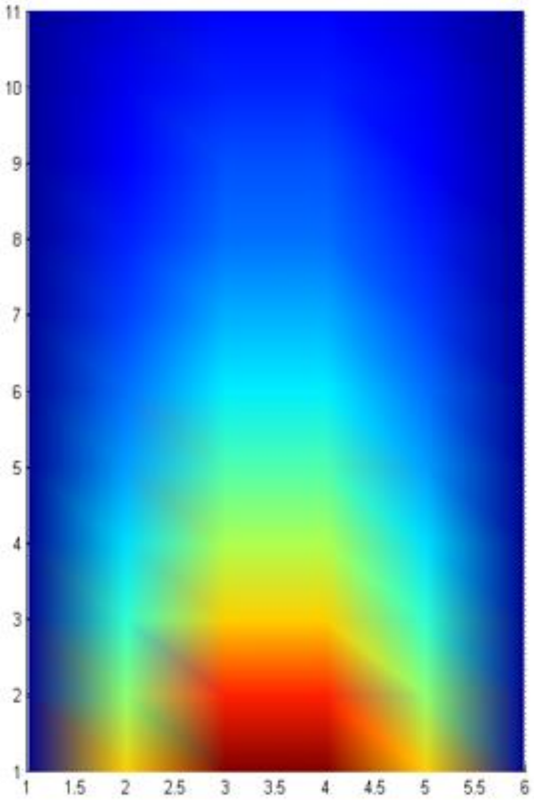
$$u_{14} + p_4 + p_8 + u_{25} - 4p_7 = 0$$

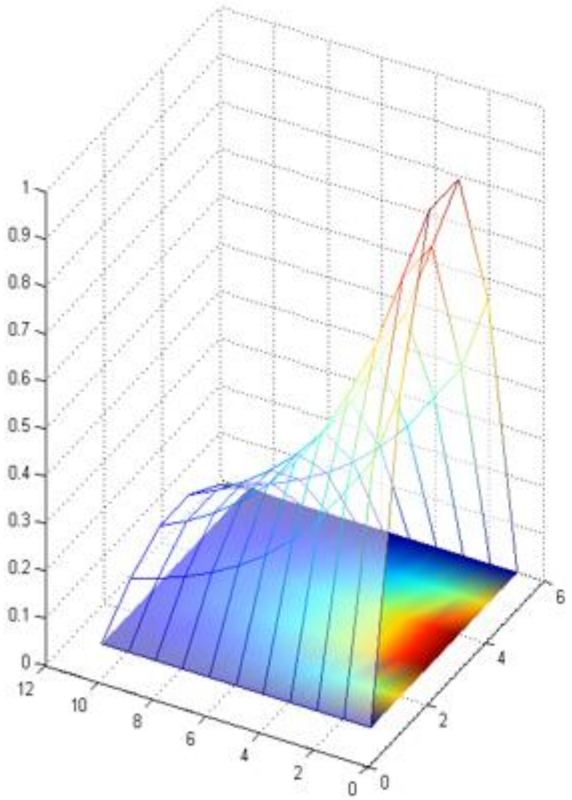
$$p_7 + p_5 + p_9 + u_{35} - 4p_8 = 0$$

$$p_8 + p_6 + u_{54} + u_{45} - 4p_9 = 0$$

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
1	-4	1	0	1	0	0	0	0	0	$-u_{12}-u_{21}$
2	1	-4	1	0	1	0	0	0	0	$-u_{31}$
3	0	1	-4	0	0	1	0	0	0	$-u_{41}-u_{52}$
4	1	0	0	-4	1	0	1	0	0	$-u_{13}$
5	0	1	0	1	-4	1	0	1	0	0
6	0	0	1	0	1	-4	0	0	1	$-u_{53}$
7	0	0	0	1	0	0	-4	1	0	$-u_{14}-u_{25}$
8	0	0	0	0	1	0	1	-4	1	$-u_{35}$
9	0	0	0	0	0	1	0	1	-4	$-u_{45}-u_{54}$

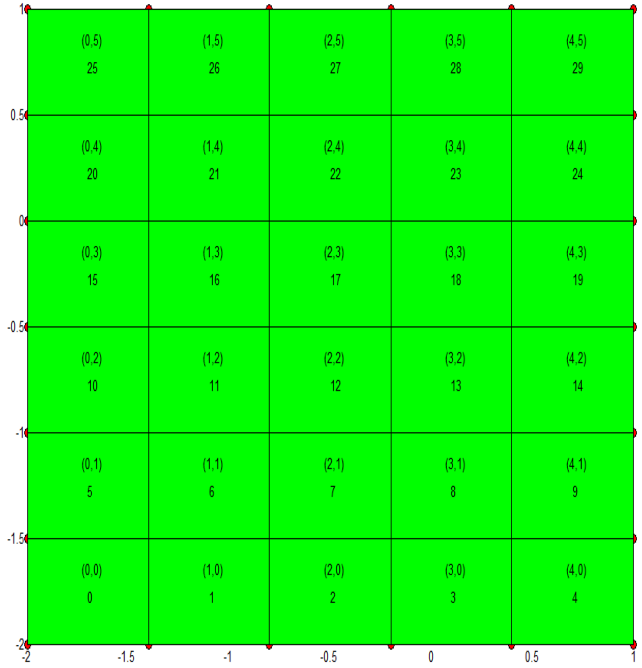
Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

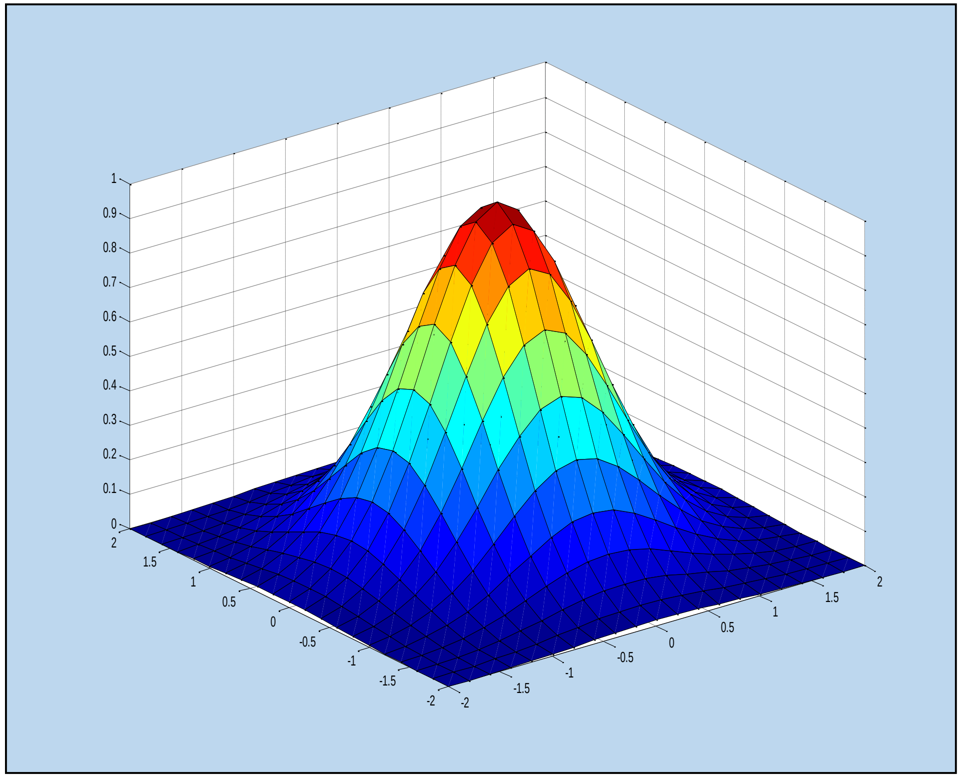




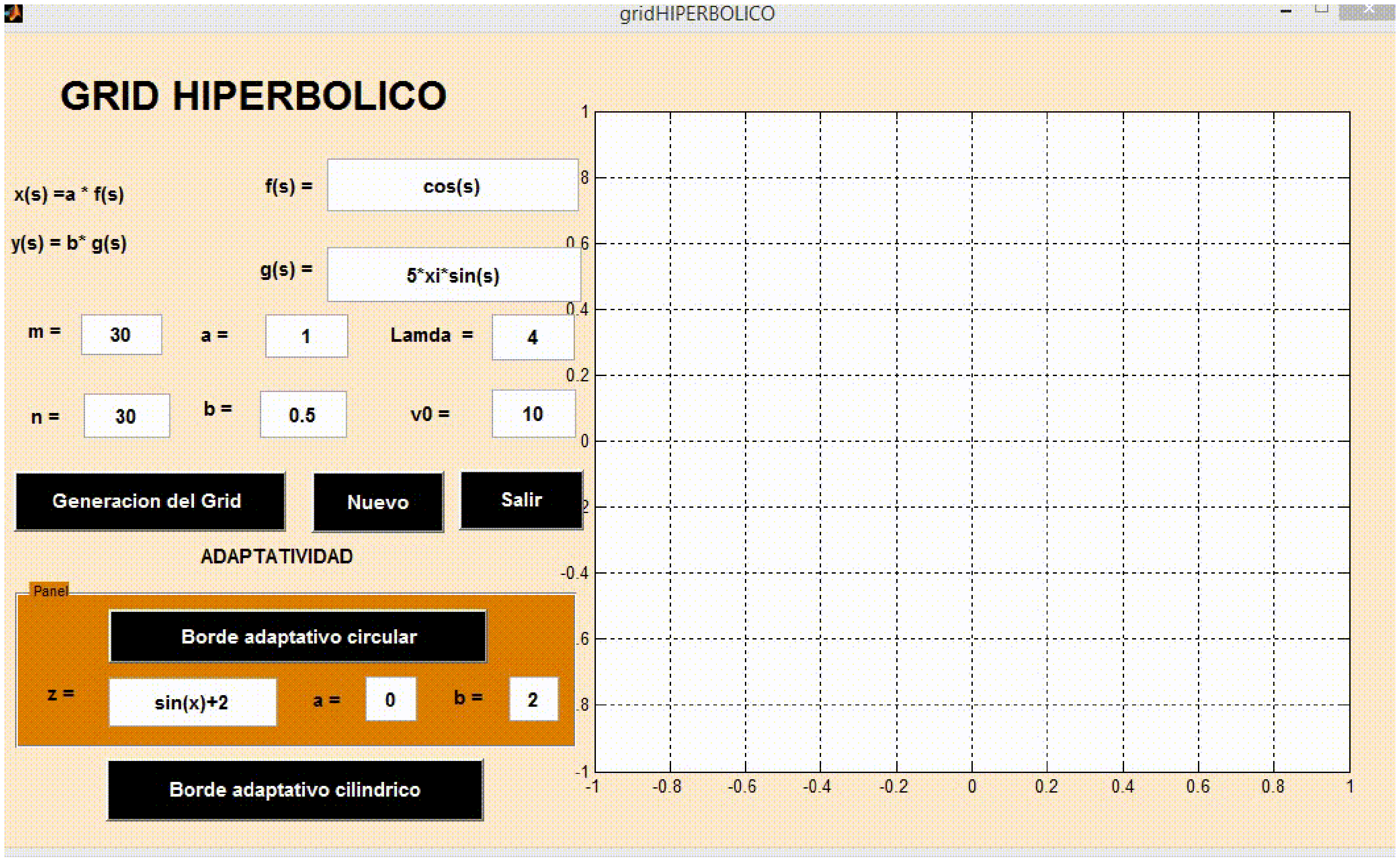
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|ccc}
b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_2 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & b_{k-1} & c_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{k-1} & b_k & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & d_m
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} d_1 \\ \vdots \\ d_k \\ \hline e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{array}\right]$$





Generación de mallas

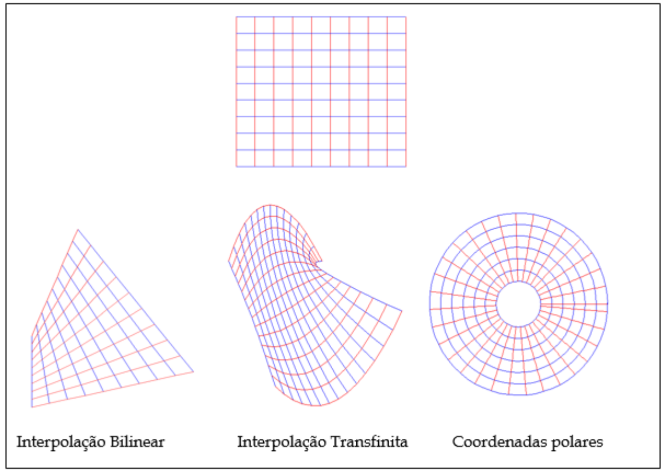


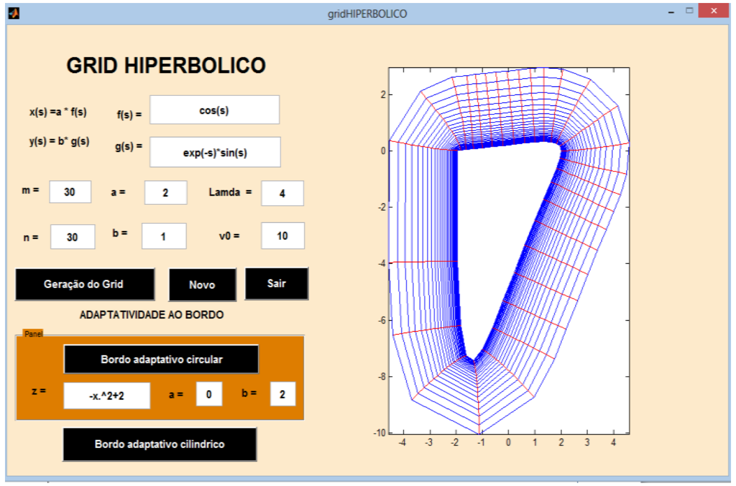
Métodos iterativos

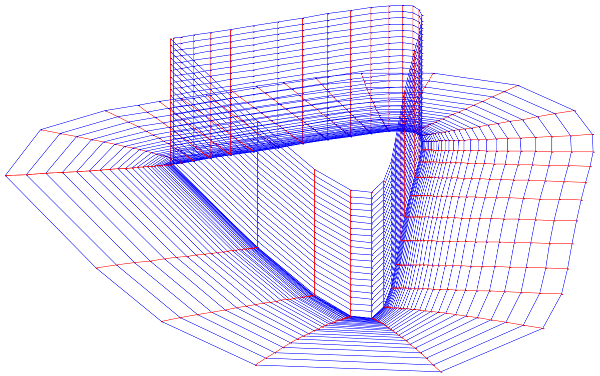
Método de Gauss Seidel

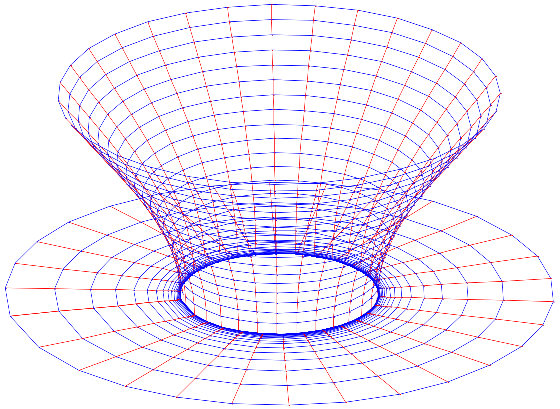
https://sites.google.com/unsa.edu.pe/fcegeogebra/pagina-principal?authuser=0

Generación de mallas









Compresión de imágenes digitales

Una de las aplicaciones de la descomposición SVD, es su uso en la compresión de imágenes digitales, de modo que puedan transmitirse electrónicamente con eficiencia (por satélite, fax, Internet o similares)
Es evidente que los pequeños valores singulares en la descomposición SVD de la matriz *A* provienen de las partes "no muy importantes" de la imagen, y se puede ignorar muchas de ellas. Supongamos, entonces, que se tiene la descomposición SVD de *A* como sigue

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^t + \cdots + \sigma_r u_r v_r^t$$

$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^t + \cdots + \sigma_k u_k v_k^t \qquad k \leq r$$

$$A_k \approx A$$

Compresión de imágenes digitales

Los valores singulares más pequeños contribuyen muy poco a la imagen, razón por la cual las aproximaciones rápidamente parecen tan cercanas al original.

Análisis de componentes principales

El Análisis Multivariante engloba diversos métodos orientados a la síntesis de grandes cantidades de datos de forma que, eliminando la información redundante contenida en ellos, conserven la máxima información de interés para los objetivos del estudio.

Podemos ilustrar un conjunto de datos dispuestos en un cuadro de doble entrada como sigue

	X_1	X_2	$\cdots$	X_p
Y_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1p}
Y_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2p}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Y_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{np}

MATRIZ DE COVARIANZA

La matriz de covarianza de p variables $X_1, \ldots, X_p$ es una matriz cuadrada que denotaremos por *Cov* , que es una matriz de orden p definida por

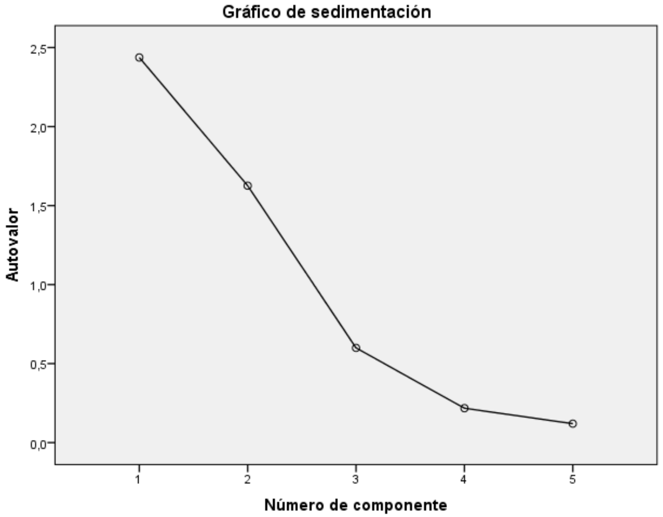
$$Cov = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

Una matriz que estima a la matriz de covarianza es:

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_2^2 & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_p^2 \end{bmatrix}$$

$$s_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)$$

MATRIZ DE COVARIANZA



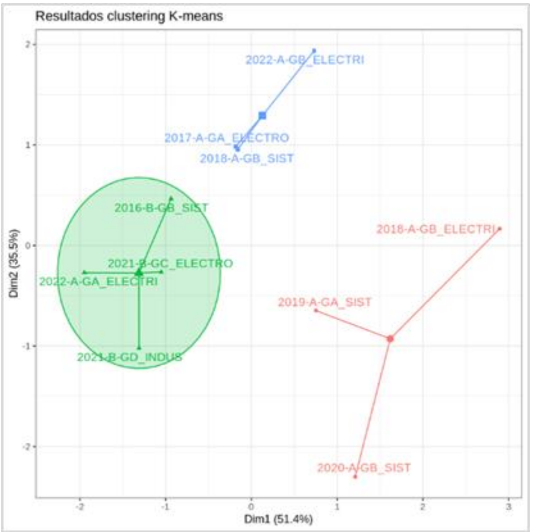
Autovalores	%	% Acumulado
6.932	0.47919259	0.47919259
4.759	0.32897829	0.808170883
1.899	0.13127333	0.939444214
0.574	0.03967925	0.979123462
0.302	0.02087654	1
Total		
14.466		

Matriz de componente[a]

	Puro		Reescalado	
	Componente		Componente	
	1	2	1	2
MAT	1,623	-,808	,819	-,408
LIT	,486	1,689	,267	,928
FIS	1,309	,029	,761	,017
EST	1,399	-,172	,939	-,116
FILO	,627	1,106	,438	,772

Método de extracción: análisis de componentes principales.

a. 2 componentes extraídos.



METODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

MÉTODO DEL GRADIENTE

Este método consiste en resolver un sistema de ecuaciones $Ax = b$, utilizando un problema equivalente el cual consiste en minimizar una función cuadrática

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^t A x - x^t b \qquad\qquad x, b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

donde A es de orden n, simétrica definida positiva

FORMA CUADRÁTICA

Una forma cuadrática es una función $\phi\colon \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x^t A x - x^t b + c \qquad x, b \in \mathbb{R}^{n\times 1}, c \in \mathbb{R}$$

donde A es de orden n

MÉTODO DEL GRADIENTE

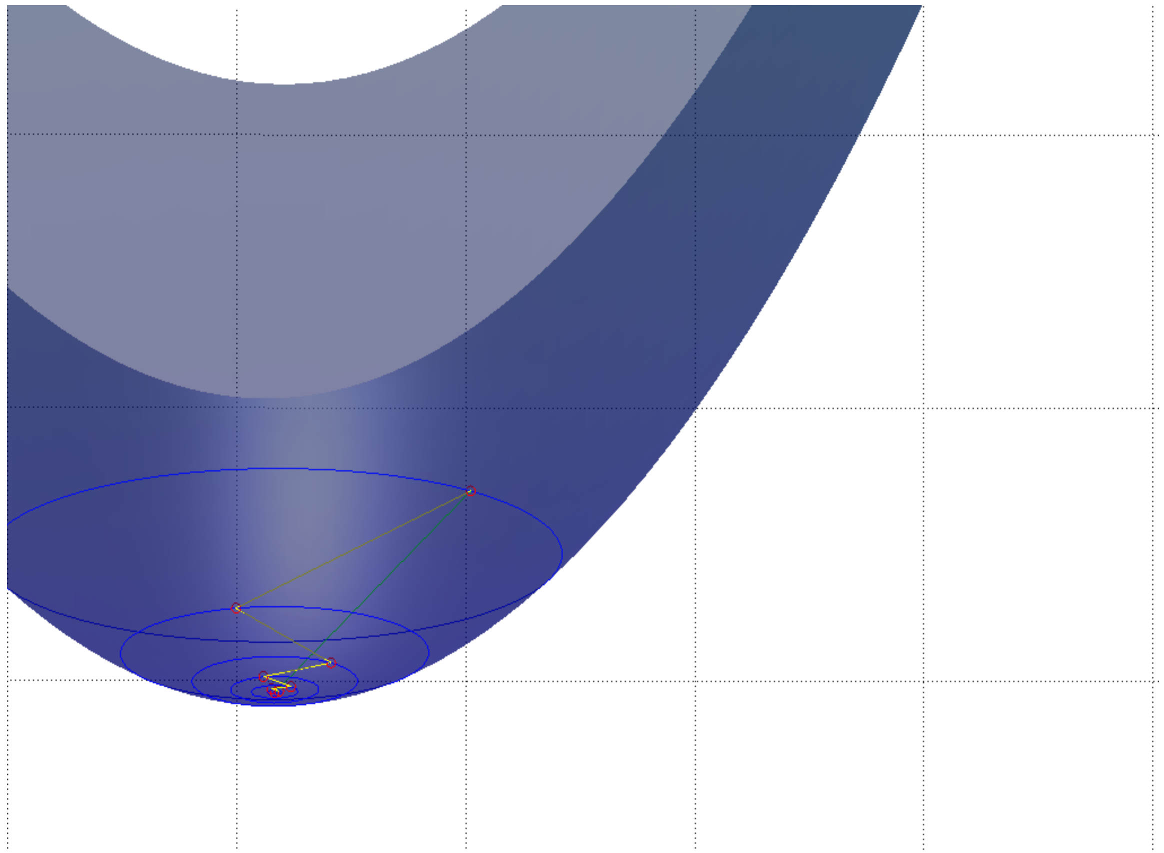
Para hallar el mínimo de la función se considera

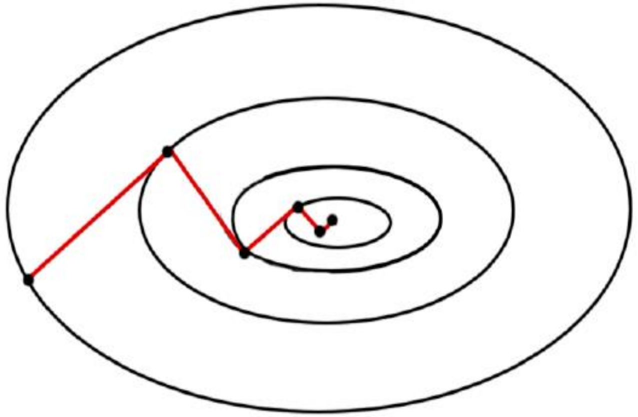
$$\nabla\phi(x) = 0$$

como

$$\nabla\phi(x) = \frac{1}{2}(A^t + A)x - b$$
$$\nabla\phi(x) = Ax - b$$

y dado que $H\phi(x) = \mathrm{A}$ siendo A simetrica definida positiva el minimo de la función se da cuando $Ax - b = 0$, el minimo es la solucion del Sistema $Ax = b$



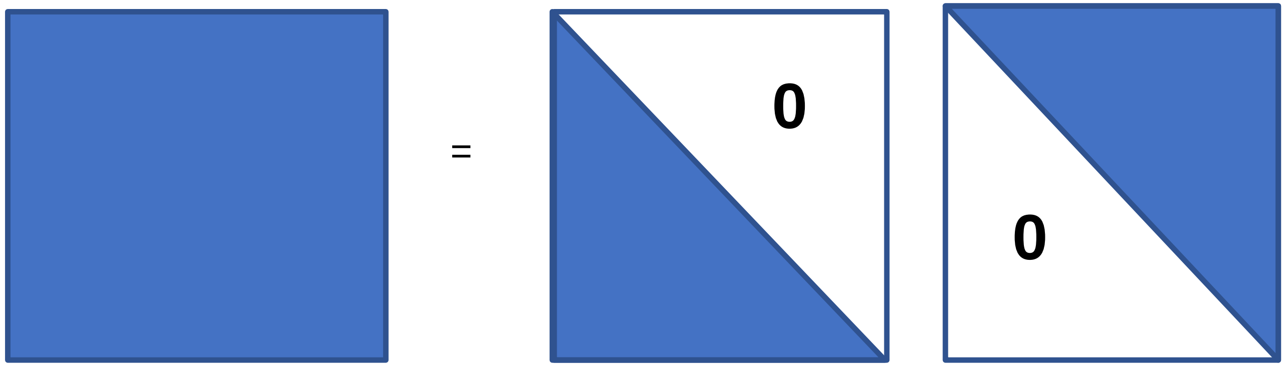


La Descomposición LU

TEOREMA

Si A es de orden n tal que $\det(A_k) \neq 0,\ \forall k = 1,2,\ldots,n-1$, existen L matriz triangular inferior con diagonal 1 y U triangular superior únicas tal que

$$A = LU$$



Operaciones elementales

- Intercambio de filas
- Sumar a una fila el múltiplo de otra

Intercambio de filas

Las matrices de permutación son de la forma

$$P_{rs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & & \cdots & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

estas matrices son una modificación de la matriz identidad remplazando en las posiciones (r,r) y (s,s) de la diagonal por ceros y colocando unos en las posiciones (r,s) y (s,r) ,tienen el efecto de intercambiar filas por columnas seleccionadas. Estas matrices tienen la propiedad $P_{rs}^{-1} = P_{rs}$

Intercambio de filas

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 3 & 9 \\ 7 & 7 & 0 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad PA = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 8 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Para estas matrices en la premultiplicación $P_{rs}^{-1}A$ el efecto es intercambiar las filas r y s de A, mientras que la postmultiplicación multiplicación AP_{rs} intercambia las columnas r y s de A

$$AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 3 & 9 \\ 7 & 8 & 0 & 7 & 7 \\ 5 & 0 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Sumar a una fila el múltiplo de otra

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & r & & s & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\
 & \ddots & & \cdots & & \vdots \\
 & & c & \cdots & 1 & 0 \\
 & & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Sumar a una fila el múltiplo de otra

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim 3F_2 + F_4$$

$$GA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 5 \\ 10 & 29 & 22 & 36 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

las matrices de eliminación son de la forma

$$M_j = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & m_{j+1,j} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & m_{nj} & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2/8 & 1 & 0 & 0 \\ -5/8 & 0 & 1 & 0 \\ -4/8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 6.50 & 5.25 & 8.75 \\ 0 & -0.75 & -2.38 & -0.13 \\ 0 & 2.00 & -2.50 & 3.50 \end{bmatrix}$$

Descomposición LU con itercambios

Problema de la descomposición LU sin intercambios

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/2 & 1 & 0 \\ -2/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Notamos que un intercambio de filas permite continuar el proceso

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Propiedades de una matriz de permutación

- $PP^t = I$
- $P^2 = I$

Descomposición LU con intercambio de filas

$$PA = LU$$

Para obtener la reducción de una matriz a la forma triangular superior U realizando en cada etapa una permutación y eliminación obtendremos

$$M_1 P_1 A = A^1$$
$$M_2 P_2 M_1 P_1 A = M_2 P_2 A^1$$
$$M_2 P_2 M_1 P_1 A = A^2$$
$$\vdots$$

$$\underbrace{M_{n-1}P_{n-1}\cdots M_2P_2M_1P_1}_{L^{-1}P}A = U$$

- $A = (P_1M_1^{-1}\cdots P_{n-1}M_{n-1}^{-1})U$

Para el caso $n = 4$ tenemos que:

$$U = M_3 P_3 M_2 P_2 M_1 P_1 A$$

$$U = M_3 P_3 M_2 P_3 P_3 P_2 M_1 P_2 P_3 P_3 P_2 P_1 A$$

$$U = M_3 \underbrace{(P_3 M_2 P_3)}_{M_2'} \underbrace{(P_3 P_2 M_1 P_2 P_3)}_{M_1'} \underbrace{(P_3 P_2 P_1)}_{P} A$$

$$U = M_3' M_2' M_1' P A$$

$$\underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1}}_{L} U = PA$$

$$LU = PA$$

En general

$$M'_K = P_{n-1} \cdots P_{k+1} M_k P_{k+1} \cdots P_{n-1}$$

TEOREMA

Si A es de orden n existen matrices P de permutación, L matriz triangular inferior con diagonal 1 y U triangular superior únicas tal que

$$PA = LU$$

Descomposición LU con Pivoteo parcial

Dada una matriz A de orden n , para realizar el pivoteo se selecciona como pivote

$$pivote = |a_{rp}| = \max_{p \le i \le n} |a_{ip}| = \max\{|a_{pp}|, \dots, |a_{np}|\}$$

Se debe intercambiar la fila r con la fila p, el objetivo de usar el pivoteo parcial es de reducir la propagacion de errores de redondeo

Problema	Método	Flopcounts	Estabilidad
A=LU	Gauss	$\frac{2}{3}n^3$	Inestable
PA=LU	Gauss pivotamiento parcial	$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$	Estable
PAQ=LU	Gauss pivotamiento completo	$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^3)$	Estable

LA DESCOMPOSICIÓN QR

TEOREMA

Toda matriz que tiene rank máximo puede ser descompuesta en el producto

$$A = QR$$

Donde Q es una matriz unitaria y R es triangular superior