Matemática para Ciencia de Datos

Permutaciones y Combinaciones

Dr. Daniel Alexis Gutierrez Pachas (dgutierrezp@ucsp.edu.pe)

25 de noviembre de 2023

Departamento de Ciencia de la Computación, Universidad Católica San Pablo, Arequipa, Perú.

Factorial

Dado $n = 0, 1, \ldots$, definimos el factorial de n (denotamos por n!), como sigue: Iniciamos con $0! = 1$ y

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n(n-1)!, \ \ \forall \ n \geq 1.$$

Por ejemplo:

- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$
- $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 720 = 3628800.$
- $\frac{14!}{16!} = \frac{14!}{16 \cdot 15 \cdot 14!} = \frac{1}{16 \cdot 15} = \frac{1}{240}.$

Permutaciones

Es una disposición de todos sus miembros ordenados **linealmente**. El número de permutaciones de n objetos distintos es $n!$.

Las permutaciones de todos elementos de $S = \{a, b, c\}$ son:

$$(a, b, c); (a, c, b); (b, a, c); (b, c, a); (c, b, a); (c, a, b).$$

Para $n \geq r \geq 0$, una r-permutación es a una ordenación lineal de r elementos, y la cantidad de r-permutaciones es:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1).$$

Las 2-permutaciones de los elementos de $S = \{a, b, c, d\}$ son:

$$(a, b); (b, a); (c, a); (a, c); (a, d); (d, a), (b, c); (c, b); (c, d); (d, c); (b, d); (d, b).$$

Ejemplo 1

(a) Determinar el número de configuraciones que forman las letras de la palaba COMPUTER.

(b) Determinar el número de configuraciones que se forman con sólo cinco letras.

(c) Determinar el número de configuraciones si la repetición de letras es permitida.

Ejemplo 2

Supongamos que hay tres hombres y dos mujeres.

(a) ¿De cuántas maneras pueden posar en línea para una fotografía grupal?

(b) ¿De cuántas maneras pueden colocarse en línea si una mujer debe estar en cada extremo?

(c) ¿De cuántas maneras pueden colocarse en línea si las mujeres no deben ubicarse en los extremos?

(d) ¿De cuántas maneras las personas del mismo sexo están juntas?

(e) ¿De cuántas maneras las mujeres están separadas?

Permutaciones con repetición

Supongamos que en el conjunto de los n elementos no son todos distintos entre sí, sino que hay un elemento x_1 que se repite n_1 veces, un elemento x_2 que se repite n_2 veces, y así sucesivamente, un elemento x_k que se repite n_k veces. Entonces, las diferentes formas que ordenar los n elementos seríansan:

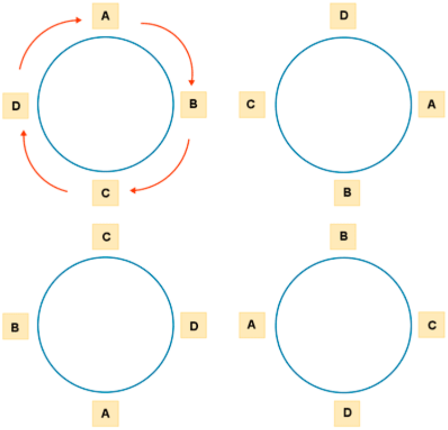
$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Ejemplo 3

Determinar el número de configuraciones distintas que forman las letras de la palabra ESTRUCTURAS, que tengas las T's juntas.

Permutaciones Circulares

Es la variación de una permutación que busca ordenar n elementos de forma circular. La cantidad de formas es $(n-1)!$.



Combinaciones

Una combinación es una selección de elementos de un conjunto que tiene miembros distintos, de modo que el orden de selección no importa (a diferencia de las permutaciones).

Para todo $n \geq r \geq 0$, escribimos

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

También se verifican algunas propiedades:

(a) $C(n, 0) = 1$ y $C(n, n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $C(n, r) = C(n, n-r)$, para todo $n \geq r \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) $C(n, r) + C(n, r+1) = C(n+1, r+1)$, para todo $n \geq r \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4

Para la Copa Mundial de fútbol, hay 25 comentaristas deportivos, de los cuales sólo seis hablan español. ¿De cuántas maneras se pueden formar grupos de cuatro, con la condición de que por lo menos se integren dos que hablen español?

Ejemplo 5

Con 5 frutas diferentes, ¿Cuántos jugos surtidos se pueden preparar?. Además, un jugo surtido se prepara con al menos 2 frutas.