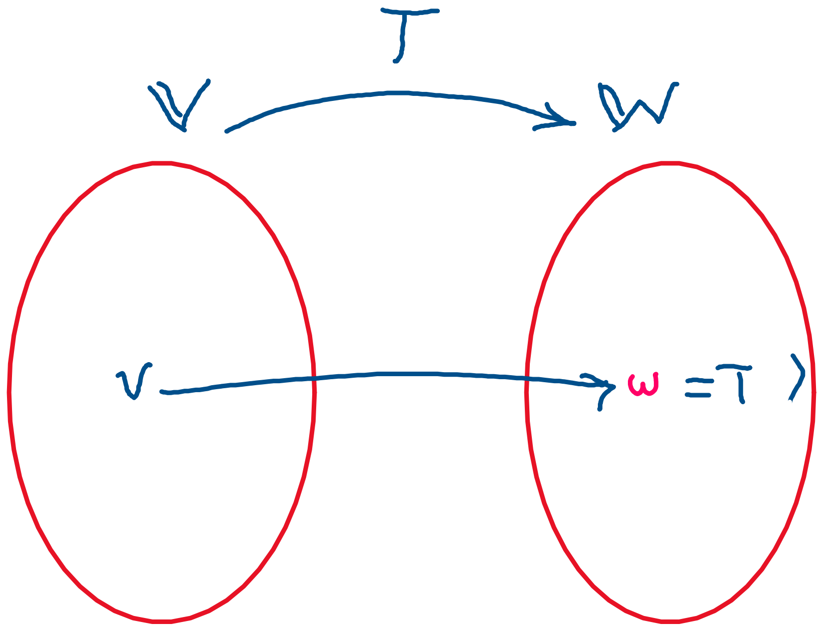
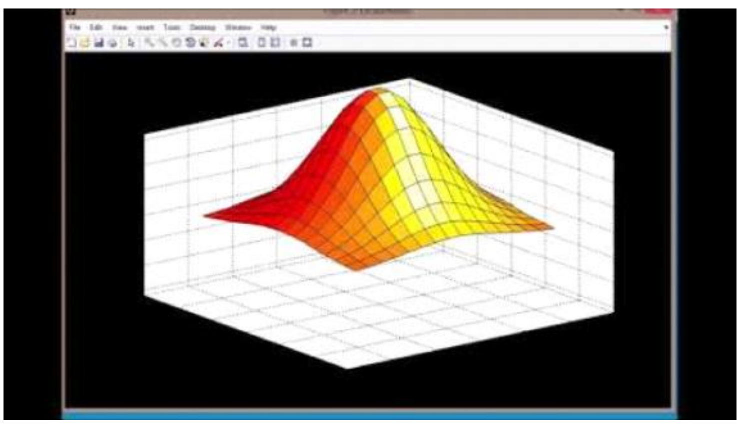
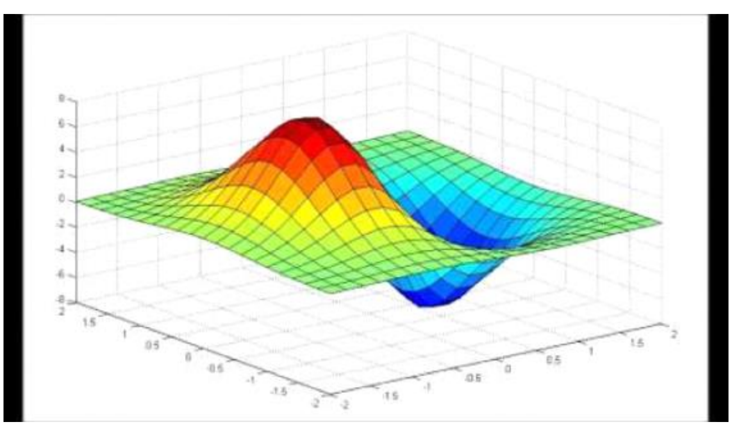
1. Transformaciones lineales



[Escalamiento](#)



[Procesamiento Visual](#)

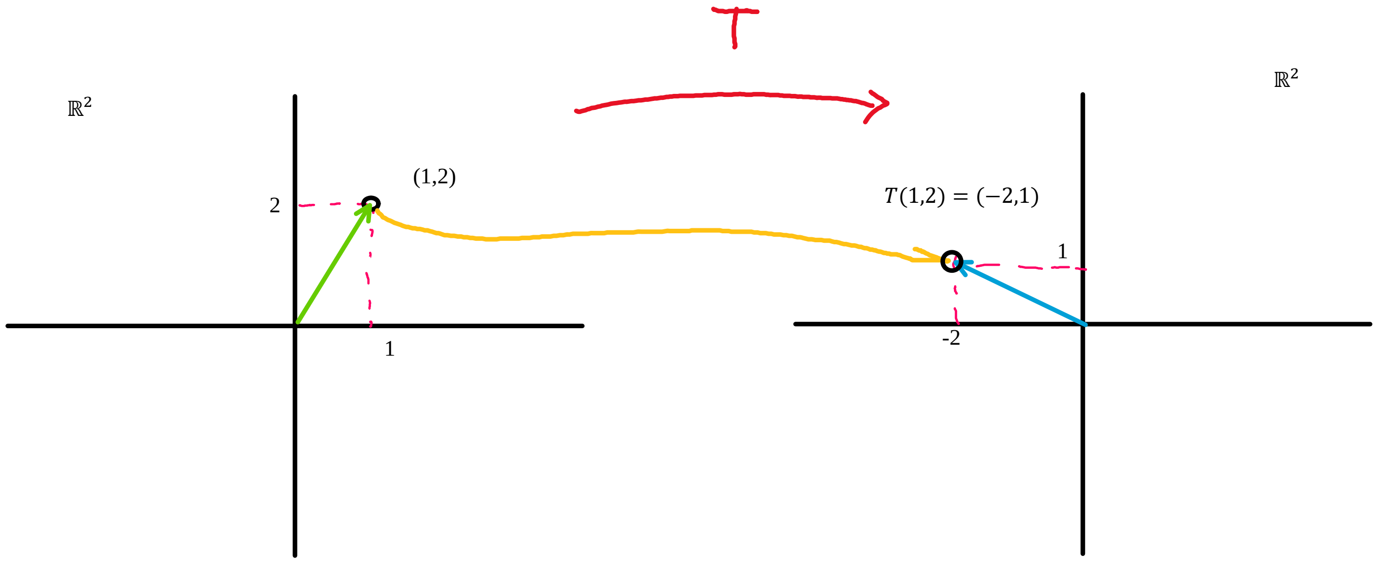


Definición: Una transformación lineal es una función definida por $T: V \rightarrow W$, donde V y W son espacios vectoriales que verifican las siguientes propiedades

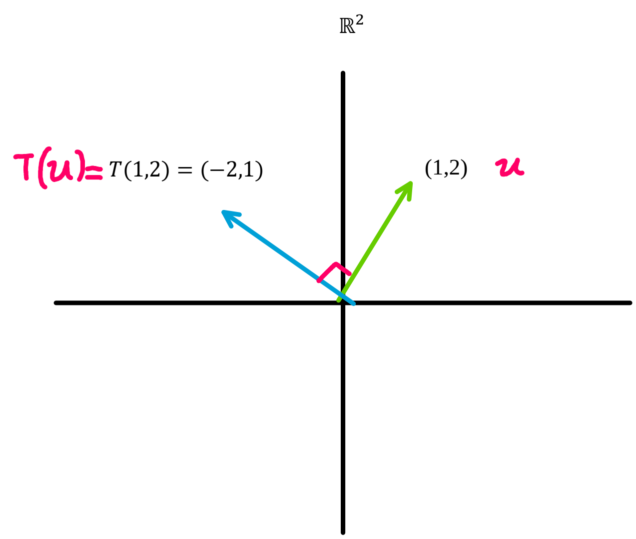
i) $T(u+v) = T(u) + T(v) \qquad u, v \in V$

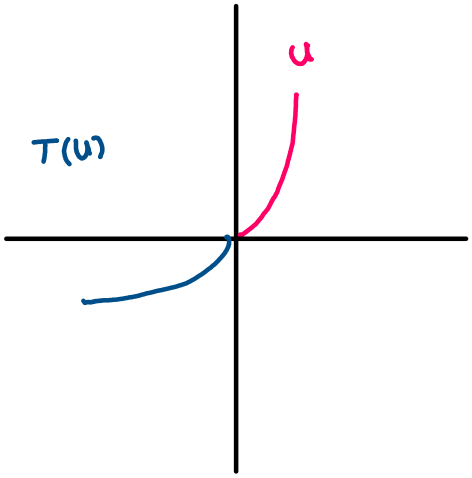
ii) $T(cu) = cT(u) \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{u} \in V$

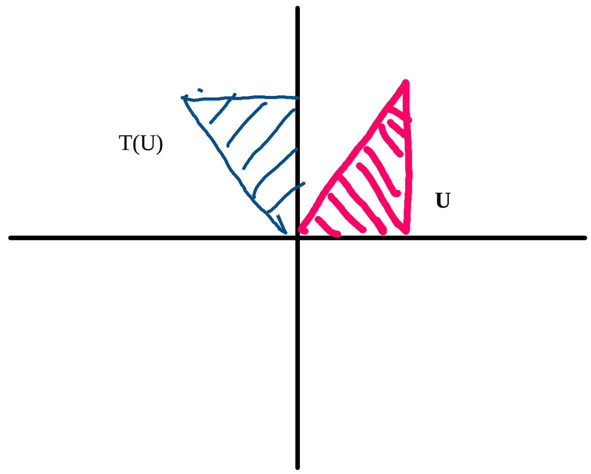
Ejemplo : Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-y, x)$



(1,2)(-2,1)=0







La función $T: \ \mathbb{R}^2 \ \rightarrow \ \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (-y,x)$ es una transformación lineal, en efecto

$i) \quad T(u+v) = T(u) + T(v) \quad u,v \in V$

Sean $u,v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow u = (x,y)$

$v = (a,b)$

$u+v = (x+a, y+b)$

$T(u+v) = T(x+a, y+b) = (-(y+b), x+a)$

$= (-y-b, x+a)$

$= (-y, x) + (-b, a)$

$= T(u) + T(v)$

$\boldsymbol{T(x,y) = (-y,x)}$

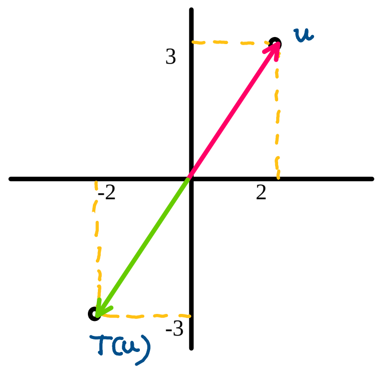
$ii) \quad T(cu) = cT(u) \quad c \in \mathbb{R} \quad u \in V$

$u \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow u = (x,y)$

$cu = (cx, cy)$

$T(cu) = T(cx, cy) = (-cy, cx) = c(-y, x) = c\,T(x,y) = c\,T(u)$

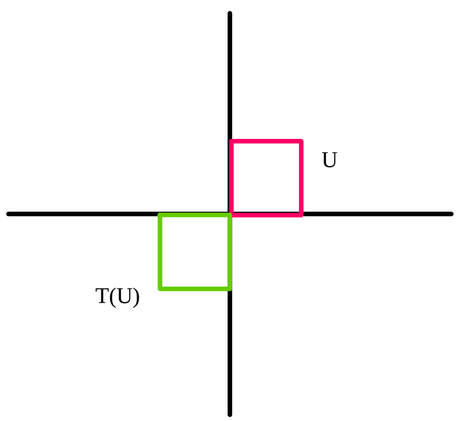
Ejemplo : Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (-x,-y)$



$u = (2,3)$

$T(u) = T(2,3) = (-2,-3) = -(2,3) = -u$

$T(u) = -u$



La función $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (-x,-y)$ es una transformación lineal, en efecto

$i)$ $T(u+v) = T(u) + T(v)$ $u, v \in V$

Sean $u, v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ $u = (x,y)$
$v = (a,b)$
$u+v = (x+a, y+b)$

$T(u+v) = T(x+a, y+b) = (-(x+a), -(y+b)) = (-x-a, -y-b) = (-x,-y) + (-a,-b) = T(u) + T(v)$

$ii)$ $T(cu) = cT(u)$ $c \in \mathbb{R}$ $u \in V$

si $u \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ $u = (x,y)$
$cu = (cx, cy)$

$T(cu) = T(cx, cy) = (-cx, -cy) = c(-x,-y) = cT(x,y) = cT(u)$

Ejemplo : Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x+5y, 8y)$ determine si T es una transformación lineal

i) $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad u, v \in V$
ii) $T(cu) = cT(u) \quad c \in \mathbb{R} \quad u \in V$

a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

Sean $u = (x,y)$
$v = (a,b)$

$u+v = (x+a, y+b)$

$T(u+v) = T(x+a, y+b) = (3(x+a) + 5(y+b), 8(y+b))$
$= (3x+3a+5y+5b, 8y+8b)$

$= (3x+5y, 8y) + (3a+5b+8b)$
$= T(x,y) + T(a,b)$
$= T(u) + T(v)$

b) $T(cu) = cT(u)$

$u = (x,y)$
$cu = c(x,y) = (cx, cy)$

$T(x,y) = (3x+5y, 8y)$

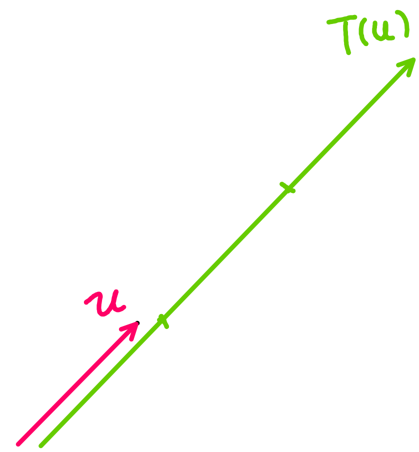
$T(cu) = T(cx, cy) = (3cx + 5cy, 8cy)$
$= c(3x+5y, 8y)$
$= c\,T(x,y)$
$= c\,T(u)$

Por tanto como se verifican las condiciones T es transformación lineal

Ejemplo : Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (3x, 3y)$ determine si T es una transformación lineal

a)

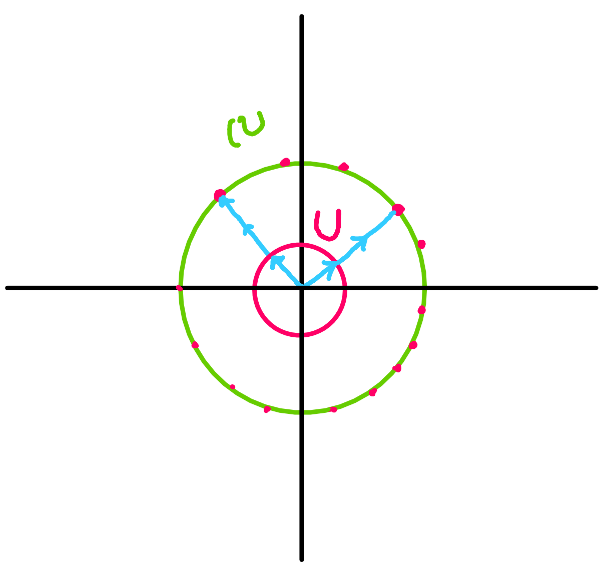
b) ✓



$T(x,y) = (3x, 3y)$

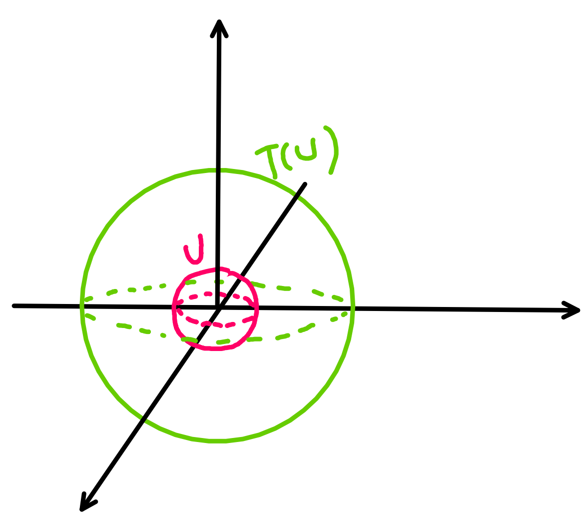
$T(\underbrace{x,y}) = 3(x,y)$

$T(u) = 3u$



$T(x,\ z) = (3x, 3y, 3z)$

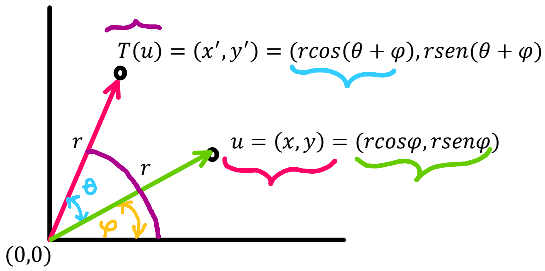
$T(u) =\ u$



Rotación en $\mathbb{R}^2$

Para generar la rotación de un objeto tenemos que especificar el ángulo y la posición del punto en torno al cual se gira el objeto, consideraremos que el origen de coordenadas es el punto de rotación y que el ángulo de rotación es θ

Determinemos la matriz de rotación para el caso en que la aplicación este definida como $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} x' = rcos(\theta + \varphi) \\ y' = rsen(\theta + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = rcos(\theta + \varphi) = r(cos\theta cos\varphi - sen\theta sen\varphi) \\ y' = rsen(\theta + \varphi) = r(sen\theta cos\varphi + sen\varphi cos\theta) \end{cases}$$

$$x' = rcos(\theta + \varphi) = rcos\theta cos\varphi - rsen\theta sen\varphi)$$
$$y' = rsen(\theta + \varphi) = rsen\theta cos\varphi + rsen\varphi cos\theta)$$

$$\begin{cases} x' = rcos(\theta + \varphi) = xcos\theta - ysen\theta \\ y' = rsen(\theta + \varphi) = xsen\theta + ycos\theta \end{cases}$$

$$T(u) = (x', y') = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta)$$

$$\boldsymbol{T(x, y) = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta)}$$

Toda transformación lineal definida en espacios vectoriales de dimensión finita se pueden representar en forma matricial, veamos los siguientes ejemplos

A) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-y, x)$

$$(x', y') = T(x, y)$$

$$(x', y') = (-y, x)$$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = \ \ x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 0x - y \\ y' = x + 0 \cdot y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

B) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (-x,-y)$

$(x',y') = T(x,y)$

$(x',y') = (-x,-y)$

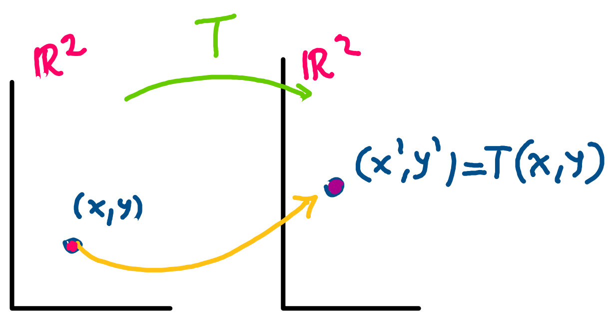
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x + 0y \\ y' = 0x - y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

B) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x+5y, 8x+7y)$



$(x',y') = T(x,y)$

$(x',y') = (3x+5y, 8x+7y)$

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = 8x + 7y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (9x-4y, x)$

$$T(x,y) = (9x - 4y,\ x + 0y)$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

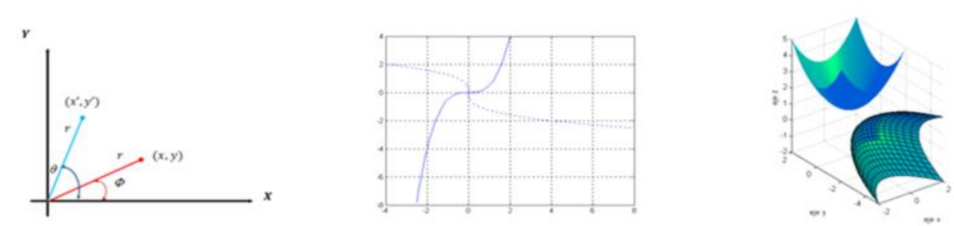
$$x = (x,y) \sim \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = (9x - 4y, x) \longleftrightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$Tx = Ax$$

B) $T:\ \mathbb{R}^2 \ \rightarrow\ \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x\cos\theta - y\,sen\theta, x\,sen\theta + y\cos\theta)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



(a) Rotación de un punto (b) Rotación en $\mathbb{R}^2$ (c) Rotación en $\mathbb{R}^3$