ESCUELA DE POSTGRADO
UNIVERSIDAD CATÓLICA SAN PABLO

Espacios vectoriales y transformaciones lineales

Profesor. Sergio Moisés Aquise Escobedo

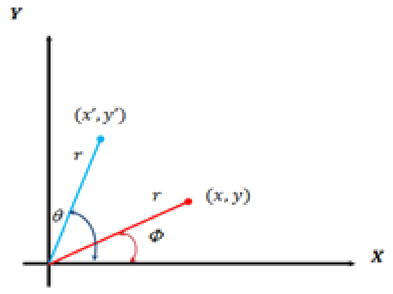
Departamento de Ciencia de la Computación, Universidad Católica San Pablo, Arequipa, Perú.

APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL EN EFECTOS DE ANIMACIÓN

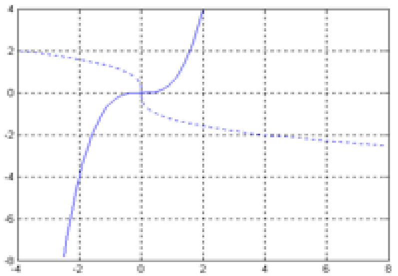
La animación de un objeto dibujado por computadora puede requerir cambios de orientación, tamaño y forma es decir, requiere de las transformaciones geométricas básicas tales como: Traslación, Rotación y Escalamiento, las cuales al realizarse en forma secuencial producen efectos de animación básicos.

ROTACIÓN

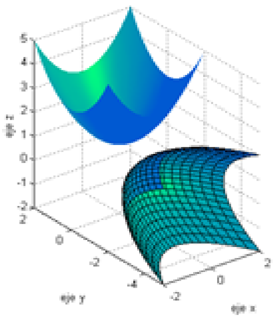
Para generar la rotación de un objeto tenemos que especificar el ángulo y la posición del punto en torno al cual se gira el objeto, consideraremos que el origen de coordenadas es el punto de rotación y que el ángulo de rotación es θ.



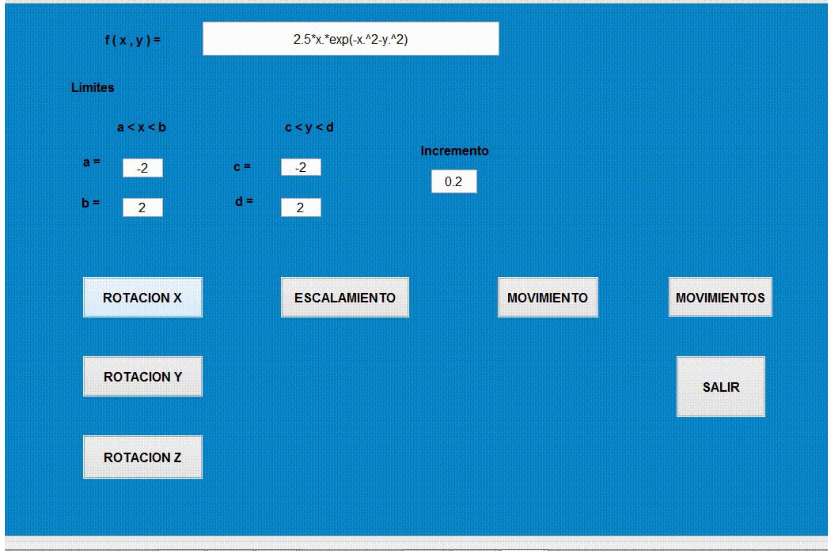
(a) Rotación de un punto



(b) Rotación en $\mathbb{R}^2$



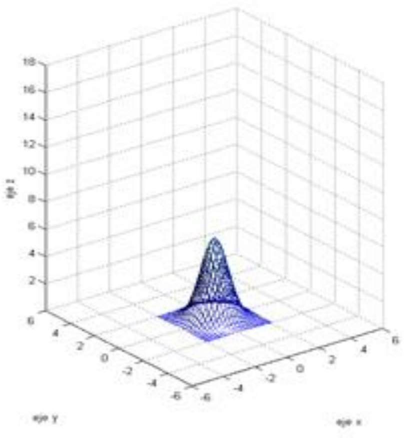
(c) Rotación en $\mathbb{R}^3$

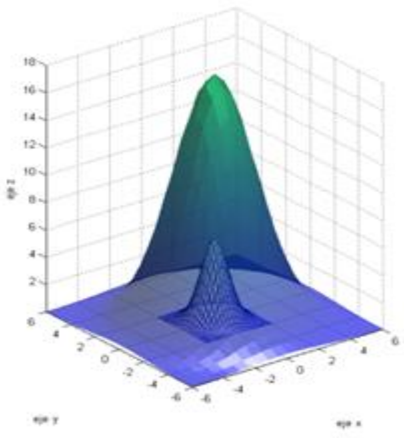


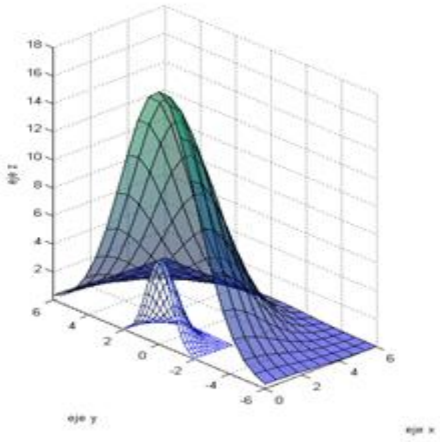
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ESCALAMIENTO

Es una aplicación que modifica el trazo a escala de una figura

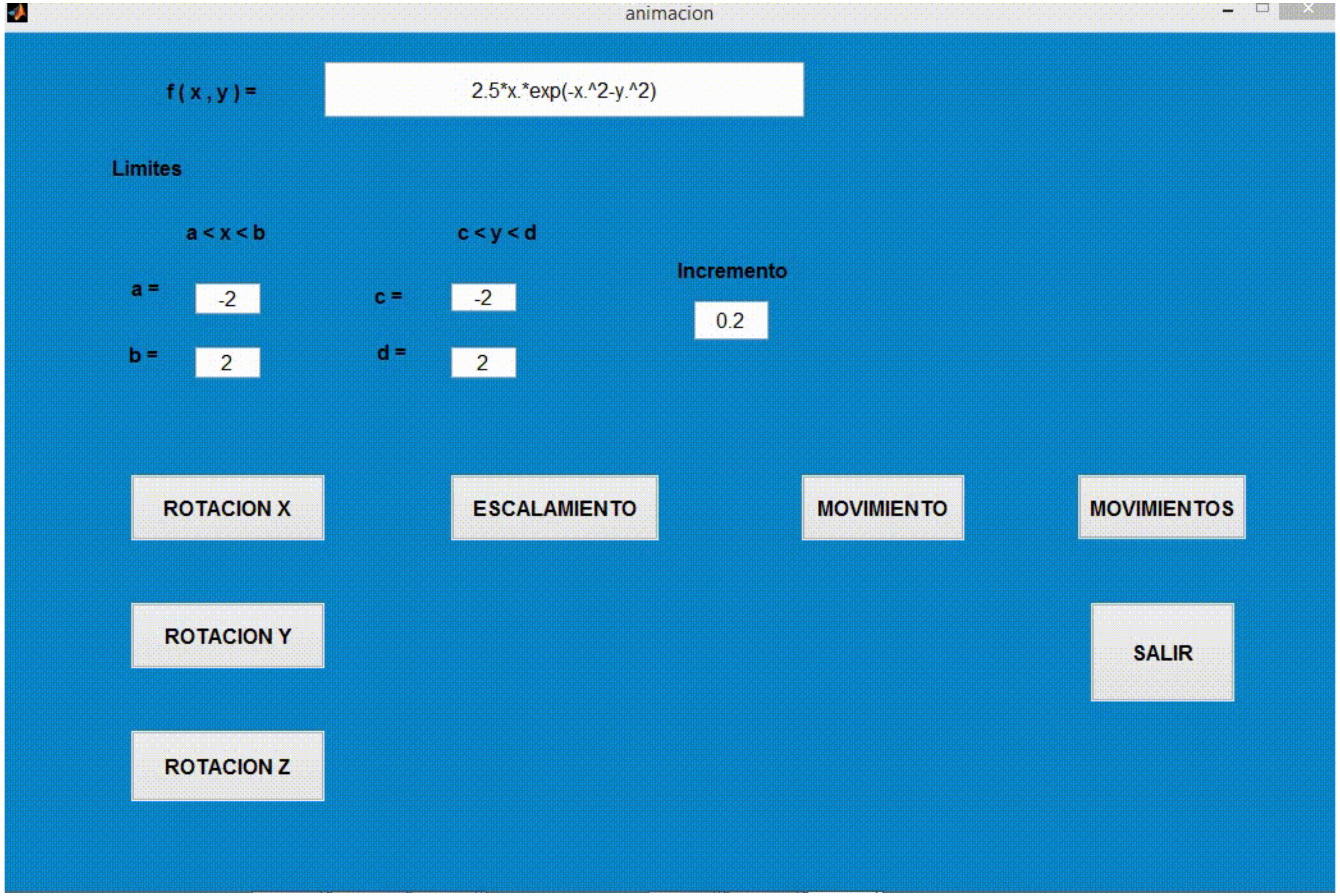




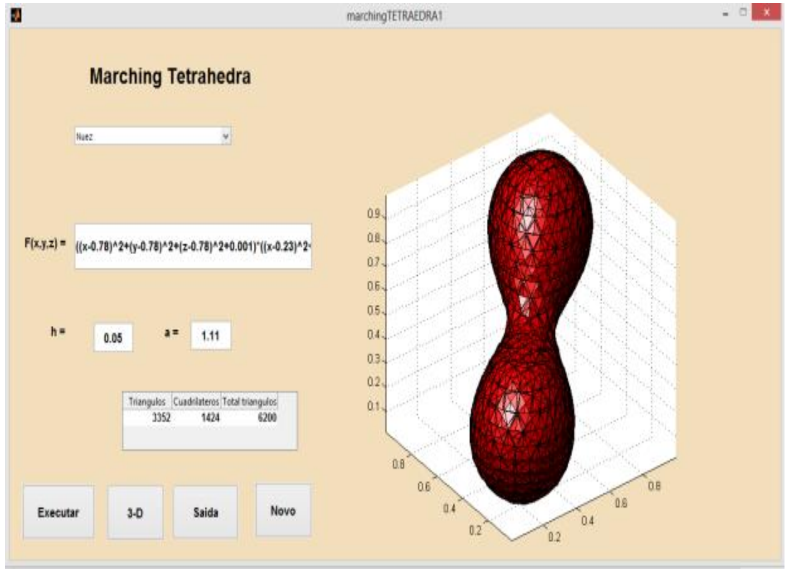


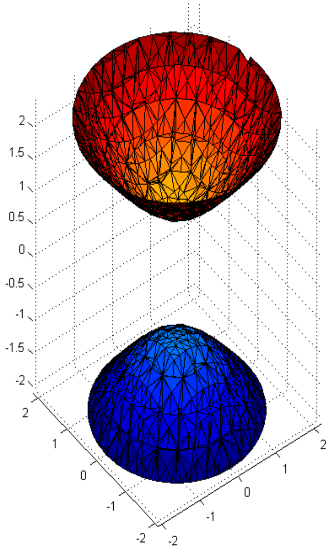
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

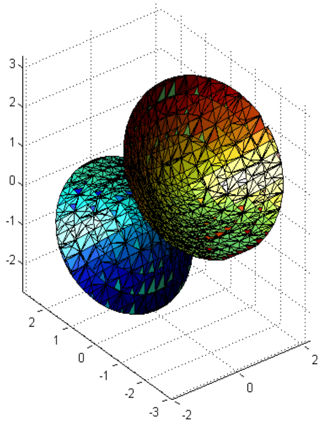
Es posible combinar las aplicaciones mediante multiplicaciones matriciales y obtener efectos de animación básicos

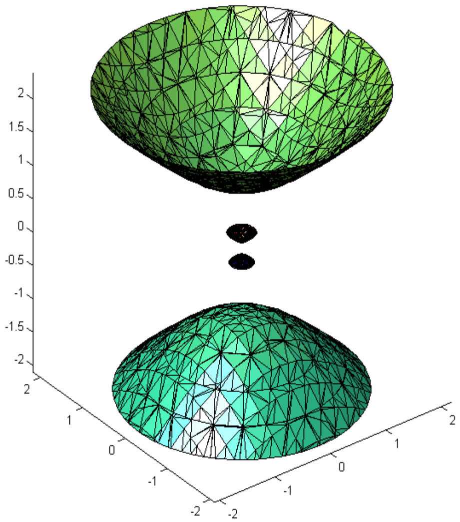


Interfaz Gráfica en Matlab que desarrolla la técnica Marching Tetrahedra



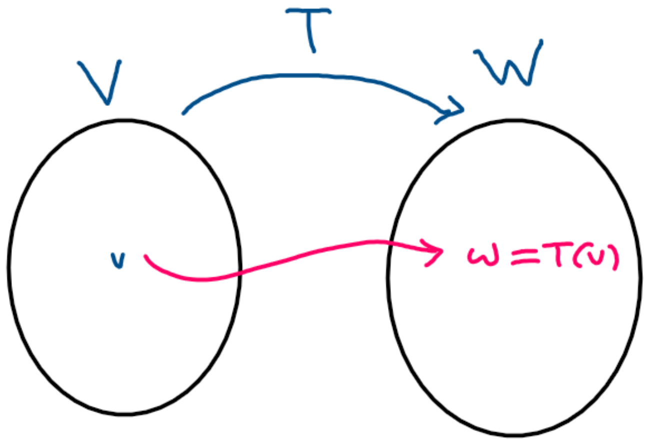






Rotación y escalamiento de un hiperboloide de dos hojas

Representación Matricial de una transformación lineal



$\dim V = n$ $\qquad$ $\dim W = m$

$\beta_1 = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ $\qquad$ $\beta_2 = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$

$A = ?$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "T"] & & W \\
v \arrow[d, dash, dashed] & & \omega = T(v) \arrow[d, dash, dotted] \\
x = v_{\beta_1} \arrow[rr, "A"] & & \omega_{\beta_2} = Y = TX
\end{tikzcd}$$

$$Y = AX$$

$$TX = AX$$

Representación Matricial de una transformación lineal

para v_1 $\quad T(v_i) = \alpha_{1i}w_1 + \alpha_{2i}w_2 + \cdots + \alpha_{mi}w_m$

$$(T(v_i))_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{bmatrix}$$

sea $v \in V$

$$T(v) = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_mw_m$$

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

$$T(v) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \cdots + c_nT(v_n)$$

$$(T(v))_{\beta_2} = c_1\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n\begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Representación Matricial de una transformación lineal

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (T(v_1))_{\beta_2} & (T(v_2))_{\beta_2} & & (T(v_n))_{\beta_2} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
(T(v))_{\beta_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{v_{\beta_1}}
\end{array}
$$

$$(T(v))_{\beta_2} = A v_{\beta_1}$$

Definición de autovalor y autovector

Sean V espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal.

Si $\exists v \in V$ no nulo tal que

$$T(v) = \lambda v$$

a λ se llama autovalor de T y a v se llama autovector de T asociado al valor propio λ

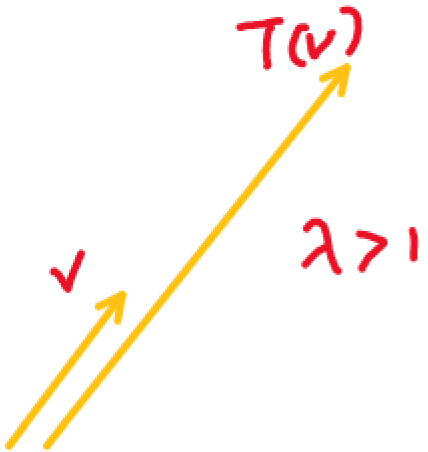
Diagonalización

Semejanza de matrices

Una matriz A es semejante a una matriz B si existe un matriz inversible P tal que $A = P^{-1}BP$

$$T: \underset{\beta}{\mathbb{V}} \longrightarrow \underset{\beta}{\mathbb{V}}$$

Si existe $v \in \mathbb{V}$ tq $T(v) = \underbrace{\lambda}_{\text{autovalor}} \overbrace{v}^{\text{autovector}}$ $\quad v \neq \theta$



$\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ autovectores

$$T(v_1)=\lambda_1 v_1$$
$$T(v_2)=\lambda_2 v_2$$
$$\vdots$$
$$T(v_n)=\lambda_n v_n$$

$$T: \underset{\beta}{V} \longrightarrow \underset{\beta}{V}$$

$$A=[T]=?$$

$$(T(v_1))_\beta=\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$T(v_1)=\lambda_1 v_1=\lambda_1 v_1+0v_2+0v_3$$
$$T(v_2)=\lambda_2 v_2=0v_1+\lambda_2 v_2+0v_3$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$T(v_n)=\lambda_n v_n=0v_1 \quad 0v_2+\lambda_n v_n$$

$$(T(v_2))_\beta=\begin{bmatrix}0\\\lambda_2\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$(T(v_3))_\beta=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\\lambda_n\end{bmatrix}$$

$$A=[T]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$T(v)=\lambda v$$

$$v \longrightarrow v_\beta=X$$

$$TX=\lambda X$$
$$AX=\lambda X$$

$$T: V \longrightarrow V$$

$$v \qquad \omega=T(v)$$

$$x=v_\beta \qquad (T(v))_\beta=Y=AX$$

$$Tx=Ax$$

Definición de autovalor y autovector

Sea A una matriz de orden n , una matriz X no nula de orden $n \times 1$ es un autovector de la matriz A si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se verifica

$$AX = \lambda X$$

Para la determinación de los autovalores se tiene que hallar las raíces del polinomio característico asociado el cual se define como

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$